

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre : 192/DS/2018

N° de série : 15/Phy/2018

THESE

**Présentée pour obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES EN PHYSIQUES
Option : ENERGETIQUE**

Thème

**Etude numérique des écoulements combinés aux
transferts thermiques d'un fluide à propriétés
physiques variables dans un espace annulaire
cylindrique soumis à un chauffage volumétrique**

Par :

Khemici Meriem

Soutenue le : 08 / 11 /2018

Devant le Jury :

Président (e)	:	A. CHAKER	Professeur	Univ. Mentouri Constantine 1
Rapporteur	:	T. BOUFENDI	Professeur	Univ. Mentouri Constantine 1
Examineurs	:	C. OULD LAHOUCINE	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma
		M. GUELLAL	Professeur	Univ. Ferhat Abbas Sétif 1

Je dédie cette thèse

À mon cher papa et ma très chère mère.

Que Dieu les préserve

À mon mari et mes deux adorables filles Aniya et Aya

À ma sœur Samira,

À mes frères Mohamed, Amir et Moussa

Les sciences sont des serrures dont la clé est l'étude.
Proverbe arabe

Persévérance et dignité mènent très loin.
Daniel Desbiens

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu le tout puissant pour m'avoir donné la force, la patience et la volonté d'accomplir ce travail.

En premier lieu, je remercie chaleureusement, mon directeur de thèse Monsieur **BOUFENDI Toufik** Professeur à l'université frères Mentouri Constantine 1, pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour m'avoir offert les conditions favorables, et pour m'avoir parfaitement guidé tout le long de la réalisation de ce travail, pour sa patience, ses conseils et ses critiques.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également à Madam **CHAKER Abba** professeur au département de physique de l'université frères Mentouri Constantine 1, pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse. Je remercie également les professeurs **OULD LAHOUCINE chérif** et **GUELLAL Messaoud**, pour avoir bien accepté de participer à mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche, malgré leurs multiples occupations.

La réalisation de ce travail s'appuie également sur un environnement favorable qui est essentiel. Je désire alors remercier Monsieur **S. Touahri** pour m'avoir octroyé le support nécessaire à la réalisation de ce travail.

C'est avec une grande émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier mes parents. Tout au long de mon cursus ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Sans qui je ne serais jamais allé au bout de mes projets, je leurs dois tout. Un grand merci à mon mari pour son soutien et sa patience. Sans oublier, mon frère Moussa pour son aide et mon accompagnateur de tous les jours.

Je remercie également tous mes collègues du laboratoire de la physique énergétique, pour leur soutien. Et enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont prodigué leurs encouragements et m'ont offert leurs soutiens.

Merci à tous.

Table des matières

Nomenclature

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale	01
Chapitre 1 Etude bibliographique	03
1.1 Introduction	03
1.2 Caractéristiques générale des écoulements entre deux cylindres concentriques horizontaux.....	03
1.2.1 Études numériques.....	03
1.2.2 Études expérimentales	19
1.3 Transfert de chaleur dans un espace annulaire horizontale.....	23
1.3.1 Études numériques	23
1.3.2 Études expérimentales.....	26
1.4 Objectif de notre travail	29
Chapitre 2 Modélisation mathématique	31
2.1 Introduction	31
2.2 Les hypothèses simplificatrices communes.....	31
2.3 Description du problème.....	32
2.4 Equations modélisantes	33
2.4.1 Equation de conservation de la masse.....	33
2.4.2 Equation de conservation de quantité de mouvement radiale.....	33
2.4.3 Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire.....	33
2.4.4 Equation de conservation de quantité de mouvement axiale.....	34
2.4.5 Equation de conservation de l'énergie.....	34
2.5 Les conditions aux limites	35
2.6 Le nombre de Nusselt	37
2.6.1 Le nombre de Nusselt axial et moyen.....	37
Chapitre 3 Résolution numérique	39
3.1 Introduction	39
3.2 Choix de la méthode numérique de résolution	40
3.2.1 Maillage.....	41
3.3 Discrétisation des équations.....	45
3.3.1 Discrétisation temporelle.....	45
3.3.1.1 Traitement des dérivées temporelles.....	45
3.3.1.2 Traitement des termes convectifs et non linéaires.....	46
3.3.1.3 Traitement des termes diffusifs et de pression.....	46
3.3.2 Traitement spatiale au second ordre.....	46
3.4 Discrétisation des équations modélisantes.....	48
3.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité	48
3.4.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité	

de mouvement.....	48
3.4.3 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement.....	60
3.4.4 Discrétisation de la composante axiale de l'équation de quantité de mouvement.....	68
3.4.5 Discrétisation de l'équation d'énergie.....	75
3.5 Discrétisation des conditions aux limites.....	80
3.5.1 A l'entrée de tube $Z^* = 0$	80
3.5.2 A la sortie du conduit : $z^* = L/D_h = 277.777$	81
3.5.3 Sur la paroi interne du cylindre intérieur : $r^*=0.777$	83
3.5.4 Sur la paroi externe du cylindre extérieur : $r^*=1.38$	84
3.6 Equation de la discrétisation de pression.....	84
3.6.1 Equation de correction de la pression.....	86
3.7 Résolution des équations algébrique ou équation discrétisée.....	91
3.8 Validation du code de calcul.....	92
Chapitre 4 Résultats et discussion	93
4.1 Introduction	93
4.2 Le cas de référence : La convection forcée ($Gr^* = 0$).....	94
4.2.1 Le champ dynamique de l'écoulement.....	94
4.2.2 Le champ thermique.....	95
4.2.3 Variation de nombre de Nusselt.....	96
4.2.4 Développement des propriétés thermo-physiques de fluide.....	98
4.2.4.1 La variation de la viscosité dynamique.....	98
4.2.4.2 La variation de la conductivité thermique adimensionnelle	99
4.3 La convection mixte.....	99
4.3.1 Champ dynamique de l'écoulement.....	99
4.3.1.1 L'écoulement secondaire.....	99
4.3.1.2 L'écoulement axial	102
4.3.2 Le champ thermique.....	108
4.3.3 Nombre de Nusselt.....	111
4.3.4 Développement des propriétés thermo-physiques de fluide.....	112
4.3.4.1 La variation de la viscosité.....	112
4.3.4.2 La variation de la conductivité thermique.....	113
Conclusion générale	115
Bibliographie	118

Nomenclature

A	rapport d'aspect (L/D_h)
A	coefficient de l'équation discrétisée
b^*	terme de source globale adimensionnelle
D_{1i}	diamètre intérieur du cylindre interne de l'espace annulaire, (m)
D_{1e}	diamètre extérieur du cylindre interne de l'espace annulaire, (m)
D_{2i}	diamètre intérieur du cylindre externe de l'espace annulaire, (m)
D_{2e}	diamètre extérieur du cylindre externe de l'espace annulaire, (m)
D_h	diamètre hydraulique, (cm)
g	accélération gravitationnelle, ($= 9.81m/s^2$)
Gr^*	nombre de grashof modifié ($g \beta G D_h^5 / K_s v^2$)
G	source de chaleur volumique, (W/m^3)
G^*	source de chaleur volumique adimensionnelle ($K_d^* / Re_0 Pr_0$)
$h(\theta, z)$	coefficient local de convection, (W/m^2K)
h_c	coefficient de transfert convectif (cylindre extérieur - air ambiant), (W/m^2K)
h_r	coefficient de transfert radiatif (cylindre extérieur- air ambiant), (W/m^2K)
K	conductivité thermique du fluide, (W/mK)
K^*	conductivité thermique du fluide adimensionnelle, (K/K_0)
K_0	Conductivité thermique du fluide à l'entrée de l'espace annulaire, ($W/M^\circ K$)
K_s^*	conductivité thermique du solide adimensionnelle, (K_d/K_0)
L	longueur du conduit annulaire, (m)
$Nu(\theta, z^*)$	nombre de nusselt local, [$h(\theta, z)D_h/K_0$]
$Nu(z^*)$	nombre de nusselt local axial moyen circonférentiel, [$h(z)D_h/K_0$]
Nu_m	nombre de nusselt moyen.
P	pression, (Pa)
P^*	pression adimensionnelle, [$(P - P_0)/\rho_0 V_0^2$]
Pr	nombre de prandtl, (v/α)
q	densité de flux de chaleur, (W/m^2)
r	coordonné radiale, (m)
r^*	coordonné radiale adimensionnelle, (r/D_h)
Ra	nombre de rayleigh, [$g \beta (T(R_0, \theta, z) - T_\infty)D_0^3/\alpha_{air} v_{air}$]

Re	nombre de reynolds, $(V_0 D_h / \nu_0)$
S^*	terme de source dans la forme générale de l'équation de conservation
t	temps, (s)
t^*	temps adimensionnel, $(V_0 t / D_h)$
T	température, (K)
T^*	température adimensionnelle, $(T - T_0) / (G D_h^2 / K_s)$
T_m	température moyenne de mélange, (k)
T_m^*	température moyenne dimensionnelle, $(T_m - T_0) / (G D_h^2 / K_s)$
V_0	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit annulaire, (m/s)
V_r	composante radiale de la vitesse, (m/s)
V_r^*	composante radiale de la vitesse adimensionnelle, (V_r / V_0)
V_θ	composante circonférentielle de la vitesse, (m/s)
V_θ^*	composante circonférentielle de la vitesse adimensionnelle, (V_θ / V_0)
V_z	composante axiale de la vitesse, (m/s)
V_z^*	composante axiale de la vitesse adimensionnelle, (V_z / V_0)
z	coordonnée axiale, (m)
z^*	coordonnée axiale adimensionnelle, (z / D_h)

Symboles grecs

α	diffusivité thermique, (m^2/s)
β	coefficient d'expansion thermique, $(1/K^0)$
Δ	intervalle fini
\emptyset	variable dépendante généralisée
Γ	coefficient de diffusion
μ	viscosité dynamique, (kg .m/s)
μ^*	viscosité dynamique adimensionnelle, (μ / μ_0)
ν	viscosité cinématique, (m^2/s)
θ	coordonnée angulaire, (rad)
ρ	densité, (Kg/m^3)
σ	constante de stephane-boltzman, $(= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ w/m}^2\text{k}^4)$
τ	contrainte, (N/m^2)
τ^*	contrainte adimensionnelle, $[\tau / (\mu_0 V_0 / D_h)]$

Indices

d	désigne la paroi du conduit annulaire
-----	---------------------------------------

i,o	fait référence aux surfaces interne et externe du conduit annulaire
m	respectivement moyen
p	fait référence au nœud p d'un volume fini typique
n,s,e,w,t,b	fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N,S,E,W,T,B	fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
nb	désigne les nœuds voisins à p
r, θ, z	référence aux directions radiale, tangentielle et axiale respectivement
∞	fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	entrée du conduit

Exposants

*	variable adimensionnelle
t	désigne l'instant t
$t + \Delta t$	désigne l'instant $t + \Delta t$

Table des figures

1.1	Diagramme des caractéristiques d'écoulement et de chaleur dans un anneau horizontal en fonction de R et Ra_H , de la référence [26].....	17
1.2	les différentes régions d'écoulement dans un anneau horizontal, de la référence [27].....	18
1.3	Catégorisation des modèles d'écoulement dans les anneaux cylindriques concentriques horizontaux, de la référence [29].....	20
1.4	Transition entre différents types d'écoulements observés. (I) Ecoulement de Poiseuille. (II) Structure de type R_{\perp} , (III) Structure de type R_{\parallel} , (IV) R_{\perp} , ou R_{\parallel} suivant les conditions initiales. (V) Superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} . Les flèches indiquent le sens des transitions observées, de la référence [31].....	21
1.5	Dispositif expérimental : 1- membrane, 2- tube en plexiglas transparent, 3- rotor, 4- espace annulaire. De la référence [32].....	22
2.1	Géométrie de l'espace annulaire : (a) longitudinale, (b) transversale.....	32
3.1	le domaine de calcul discrétisé.....	41
3.2	Volume de contrôle typique.....	42
3.3	représentation suivant la section $(r - \theta)$ de volume de contrôle typique  , nomenclature de la distance radiale et azimutale.....	43
3.4	représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle typique  , nomenclature de la distance radiale et axiale.....	43
3.5	représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle typique  , nomenclature de la distance azimutale et axiale.	44
3.6	Maillage unidimensionnel pour le calcul de la variable dépendante à l'interface.....	47
3.7	Représentation suivant la section $(r - \theta)$ de volume de contrôle décalé dans la direction radiale 	49
3.8	Représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction radiale 	50
3.9	Représentation suivant la section $(r - \theta)$ de volume de contrôle décalé dans la direction angulaire 	60
3.10	Représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction angulaire 	61
3.11	Représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction axiale 	69
3.12	Représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction axiale 	69
3.13	Algorithme SIMPLER.	90
3.14	Validation du code de calcul : Comparaison avec les valeurs du Nusselt	

	circonférentiel moyen obtenues par Nonino et Giudice [49].	92
4.1	Distribution de la vitesse axiale en toute section compris entre $z^* = 0$ et $z^* = 277.77$ (Convection forcée).	94
4.2	Distribution des températures aux quatre stations axiales arbitrairement choisies. (Convection forcée).....	96
4.3	Variation du nombre de Nusselt axial à $Gr=0$	97
4.4	Nombre de Nusselt local le long du conduit annulaire $Gr=0$	97
4.5	Variation de la viscosité dynamique adimensionnelle.	98
4.6	Variation de conductivité adimensionnelle.	99
4.7	L'écoulement secondaire pour $Gr = 3781,98$ à différentes positions.....	101
4.8	Le champ de la vitesse axiale en des positions axiales choisies à $Gr=3781.98$ (Où le maximum de la vitesse axiale est situé à $z^* = 190.104$).	104
4.9	la variation de la vitesse axiale dans le plan verticale pour les cas étudiés...	106
4.10	Profil de la vitesse axiale V_z^* pour différentes valeurs de l'angle θ Pour $Gr=3781.98$	107
4.11	La répartition des isothermes dans un plan verticale en fonction du nombre de Grashof.	110
4.12	Nombre de Nusselt local le long du conduit annulaire $Gr=3781.98$	111
4.13	Nombre de Nusselt axiale pour tous les cas étudiés.....	112
4.14	Variation dynamique de la viscosité adimensionnelle pour $Gr = 3781.98$	113
4.15	Variation de conductivité adimensionnelle pour $Gr = 3781.98$	114

Liste des tableaux

1.6	Nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour différents cas étudiés.....	24
4.1	Positions de la vitesse maximale $V_{\theta max}^*$ pour différents nombres de Grashof.....	102
4.2	Positions de la vitesse maximale $V_{z max}^*$ pour différents nombres de Grashof.	105
4.3	Les nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit et les nombres de Nusselt moyens.	112

Introduction Générale

La présente étude se veut être une contribution à la compréhension de l'effet des propriétés thermo-physiques variable (dépendantes de la température) sur la convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres concentriques et horizontaux.

La Convection dans les conduits est très commune, dans les applications domestiques et industrielles ; les systèmes de forage utilisés dans l'industrie pétrochimique et les hydrocarbures où le cylindre intérieur est en rotation uniforme par rapport au cylindre extérieur ainsi les échangeurs thermiques où les parois cylindriques sont fixes, étant un très bon exemple.

Le terme "*convection*" est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. La convection est une science qui regroupe la mécanique des fluides et le transfert de chaleur. On parle de *convection naturelle* lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique. *La convection forcée* concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, i.e. les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment, on parle alors de *convection mixte*.

Dans le but d'améliorer la clarté de ce travail, nous avons alors jugé utile de structurer cette thèse en quatre chapitres.

Introduction générale

Il faudra bien sûr commencer par une étude bibliographique spécialisée dans le premier chapitre, cette recherche bibliographique portera sur les caractéristiques des écoulements tri dimensionnels et le transfert thermique, des convections forcée, naturelle et mixte dans les conduits annulaires cylindriques horizontaux, fixes et en rotation l'un par rapport à l'autre, soumis à des gradients de température. Etalée sur les études théoriques, numériques et expérimentales cette recherche bibliographique permettra d'actualiser les connaissances dans ce domaine et donc de centrer de façon plus approfondie le sujet de thèse.

La description de l'écoulement et la formulation mathématique du problème avec les caractéristiques géométriques et physiques font l'objet du deuxième chapitre. Nous présentons en détail les équations adimensionnelles qui modélisent la conservation de la masse, les trois quantités de mouvements et l'énergie, ainsi que leurs conditions initiales et aux limites. La quantification du transfert thermique est modélisée par les nombres de Nusselt, locaux axiales et moyens.

Le troisième chapitre concerne donc la résolution numérique des équations modélisantes développées au deuxième chapitre, on présente les détails de la méthode numérique « volumes finis » utilisée pour discrétiser le domaine géométrique et les équations du modèle mathématique. On a utilisé une discrétisation numérique spatio-temporelle du second ordre. Les systèmes d'équations discrétisées seront résolus en suivant l'algorithme SIMPLER en faisant appel aux algorithmes de Thomas et Thomas cyclique.

Le quatrième chapitre rassemblera l'ensemble des résultats obtenus dans cette étude. Où on présente les champs hydrodynamique et thermique que ce soit en convection forcée et en convection mixte, ainsi que la quantification de transfert thermique.

Enfin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les différentes étapes de cette thèse ainsi que les principaux résultats obtenus.

Chapitre 1

Etude bibliographique

1.1 Introduction

Cette partie est consacrée aux principales investigations effectuées sur la convection (forcée, naturelle ou mixte) dans des géométries cylindriques qui sont en relation directe avec notre étude.

1.2 Caractéristiques générale des écoulements entre deux cylindres concentriques horizontaux.

1.2.1 Études numériques

A. Mojtabi et J.-P.Caltagirone [1] se sont intéressés à étudier l'écoulement laminaire de convection mixte une fois les régimes dynamique et thermique établis, en considérant un écoulement laminaire avec un fluide entre deux cylindres horizontaux concentriques et isotherme ($T_o < T_i$). Les résultats numériques sont obtenus pour un nombre de Prandtl égal à 0.7 et pour deux rapports de rayons : $\sqrt{2}$ et 2 ainsi que pour plusieurs valeurs de couple (Ra, Re). L'intention est portée beaucoup plus sur la composante axiale de la vitesse W , il s'agit d'une part de déterminer son profil pour plusieurs valeurs de l'angle φ (angle polaire orienté par rapport à la verticale Ascendante) et d'autre part de préciser l'influence de Ra et de Re

sur W . La composante axiale de vitesse est beaucoup plus importante près du cylindre intérieur pour $\varphi \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$. Ce fait est d'autant plus remarqué pour les valeurs importantes de Rayleigh.

Ce résultat physique s'explique simplement par les effets de la convection naturelle qui entraîne une partie du fluide vers l'extérieur de certaines zones de la couche annulaire ($\varphi = 0$ et $r \simeq R$, $\varphi = \pi$ et $r \simeq 1$) et apporte du fluide dans d'autre ($\varphi = 0$ et $r \simeq 1$, $\varphi = \pi$ et $r \simeq R$), il s'ensuit un débit axial important dans les premières zones et un faible débit dans les secondes. L'échange de chaleurs au niveau des deux cylindres n'est pas modifié par la présence de la composante W en effet la température ne dépend que de Ra , R et Pr .

Le travail de **O. Terhmina et A. Mojtabi [2]** avait pour objet l'étude de l'écoulement laminaire bidimensionnel et axisymétrique de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. La résolution du problème a été faite par la méthode des différences finies du fait que le problème dynamique est découplé du problème thermique. Cette étude considère l'écoulement laminaire d'un fluide Newtonien incompressible et dilatable dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et coaxiaux ; le fluide pénètre dans l'espace annulaire avec une vitesse uniforme W_0 et à la température θ_0 comprise entre T_i et T_e . Cette étude considère aussi un faible gradient de température pour lequel le phénomène de convection naturelle est négligeable et l'écoulement peut être considéré comme étant bidimensionnel et axisymétrique. L'étude a aboutie à l'obtention des champs de vitesse et de température pour plusieurs combinaisons du rapport de rayons, du nombre de Reynolds, et le nombre de Peclet.

L'évolution axiale du profil de la vitesse axiale et celui de la vitesse radiale pour $R=1.4$ et $Re=1250$, montre que le profil de la vitesse axiale qui est uniforme à la section d'entrée se déforme continuellement d'une section à l'autre et tend asymptotiquement vers le profil de poiseuille correspond au régime dynamique établis.

Les résultats numériques obtenus montrent que la longueur d'établissement dynamique L_D croit quand R ou Re croit. D'autre part plusieurs combinaisons (θ_0, P_e) (θ_0 est la température adimensionnelle à l'entrée de l'espace annulaire) ont été envisagée, θ_0 est évaluée entre 0, 0.25, 0.4 et plusieurs valeurs de P_e comprises entre 100 et 6000. D'après les résultats numériques obtenus, le profil de température qui est constant à la section d'entrée se déforme continuellement d'une section à l'autre et tend asymptotiquement vers le profil de la conduction pure correspondant au régime thermique établi. Il y a trois zones fluides à savoir : une zone de chauffage située à proximité de la paroi du cylindre interne, une zone de refroidissement située

à proximité de la paroi du cylindre externe et une zone centrale comprise entre les deux où le transfert de chaleur est faible. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la section d'entrée les zones de chauffage et de refroidissement s'épaississent au dépend de la zone centrale qui finit par disparaître au bout d'une certaine longueur. La longueur d'établissement thermique L_T comme étant l'abscisse axiale à partir de laquelle le nombre de Nusselt local au niveau des deux parois tend vers l'unité à 1% près. Les résultats numériques montre que L_T croit avec R et P_e et décroît avec θ_0 .

Cette étude a démontré aussi que dans le cas des grands nombres de Prandtl, la longueur d'établissement dynamique devient négligeable devant la longueur d'établissement thermique. Par conséquent, dans ce cas le problème thermique peut être résolu en considérant que le régime dynamique est établi à partir de la section d'entrée.

Dans le travail de **D.B. Fant [3]**, des solutions numériques et analytiques sont présentées pour l'instabilité d'écoulement multicellulaire dans un espace annulaire cylindrique horizontal étroit. Les résultats de cette étude montrent qu'une instabilité hydrodynamique multicellulaire est possible dans les sections verticales. Cette instabilité ne nécessite pas la présence d'une diffusion azimutale. Il semble que cette instabilité résulte du couplage des termes non linéaires avec la flottabilité.

Dans les problèmes de l'écoulement laminaire dans un canal horizontal le mouvement thermo gravitationnel d'un fluide dû au gradient de température crée entre les deux plaques horizontales du conduit est complètement différent à l'écoulement de couette-Taylor. **M. T. Ouazzani et al [4]** ont constaté la manifestation de deux structures transversale et longitudinale dans l'écoulement de base dans certain condition, lorsque les rouleaux ont leur axes parallèles à O_y , ils seront dits « tranverseaux » par rapport à l'écoulement de base qui se fait dans la direction (x) et seront indiqués par la suite par le symbole R_{\perp} ; lorsqu'ils sont parallèles à O_x ils seront dits « longitudinaux » et leur représentation symbolique sera R_{\parallel} . Les auteurs ont présenté une approche numérique et expérimentale du problème de la convection mixte entre deux plans horizontaux à température différente, le plan inférieur est maintenu à la température T_1 le plan supérieur à la température T_2 ($T_1 > T_2$) les deux plans ont une longueur L et sont distants de H , $A = \frac{L}{H}$ c'est le rapport de forme longitudinal. L'approche numérique consiste en une simulation par différences finies des équations de convection, elle est réalisée pour $2000 < Ra < 12000$, $1 < Re < 9$ et pour $Pr = 0.7$. L'étude numérique permet de mettre en évidence et de caractériser l'écoulement d'air sous forme des rouleaux transversaux dus à la

force de gravité obtenus pour faible valeurs de Re ($Re < 9$) et pour une large gamme de valeur de Rayleigh ($2000 < Ra < 12000$). Ces rouleaux sont entraînés par l'écoulement d'ensemble et disparaissent à la sortie de la cellule au fur et à mesure que d'autres rouleaux naissent à l'entrée. Ainsi que ces rouleaux se déplacent avec une vitesse supérieure à la vitesse débitante de fluide. Cette vitesse adimensionnelle à laquelle les rouleaux sont convectés ne dépend pas du nombre de Reynolds par contre elle diminue quand le nombre de Ra augmente. D'autre part et compte tenu du caractère périodique de l'écoulement le nombre de Nusselt globale est indépendant du nombre de Re et de la vitesse de l'écoulement.

L'objectif principal de l'étude de **L. Yang et F. Bakhetier [5]** est de quantifier les interactions entre la force de flottabilité et la force centrifuge due à la rotation du cylindre chauffé, ces interactions ont donné lieu à un écoulement tridimensionnel et déterminent les effets de l'écoulement secondaire qui est dû à des cellules de Taylor sur le transfert de chaleur. Le cylindre intérieur est considéré en rotation à une vitesse uniforme et le cylindre extérieur est fixe ; les deux cylindres sont isothermes (le cylindre interne plus chaud que le cylindre externe). La relation entre la force de flottabilité et la force centrifuge est rétablie par le rapport Gr/Re^2 . Pour $Gr=0$ la rotation du cylindre induit l'écoulement de Couette pour une faible vitesse de rotation. L'instabilité rotationnelle est déclenchée à un nombre de Reynolds critique (comme on peut le remplacer par un nombre de Taylor Ta critique) lorsque le gradient de température existe dans le domaine physique, la force de flottabilité induit un écoulement qui interagit avec l'écoulement rotationnel qui peut retarder l'apparition de l'écoulement de type Taylor Vortex. Les résultats obtenus pour $Gr=0$, $Re=0$ (pas de rotation), le rapport de rayon $\eta = 2.6$ et le rapport d'aspect Γ varié de 1 à 10, c'est seulement l'écoulement laminaire dominant, le champ d'écoulement est unidimensionnel le nombre de Reynolds critique où les vortex de Taylor se manifeste est égale 64 ; supérieur à Re_c le champ d'écoulement caractérisé par des vortex toroïdale qui se manifeste sous forme des cellules contra rotatifs. À $Re=100$ $Gr=138$ avec $Gr/Re^2 = 0.014$ qui est très petit signifie que la force centrifuge est dominante, l'écoulement est caractérisé par l'apparition des cellules de Taylor. $Re= 100$ $Gr=6944$ et $Gr/Re^2 = 0.69$ à cette valeur de Gr la force de flottabilité induit l'écoulement est forte et les effets des cellules de Taylor sur le transfert de chaleur ont disparu. Ainsi à cette valeur de nombre de Gr le nombre critique de Re où les cellules de Taylor apparaissent, est plus élevé de 100.

Ainsi **J.Y. Choi et M. U. Kim [6]** ont étudié numériquement une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de convection naturel (2D stable flow unicellulaire) dans un espace annulaire

moyen ($1.2 \leq R \leq 2$) et ($2.0 \leq \sigma = \frac{2R_i}{L} \leq 10.0$) rempli d'air ($Pr = 0.7$) ; dans cette étude ils ont déterminé le nombre de Ra critique au-dessus duquel se manifeste l'écoulement spiral tridimensionnel et ont obtenu une compréhension plus claire de la convection spirale. Les calculs sont effectués pour $10^3 \leq Ra \leq 10^5$. ils ont prouvé que le principe de l'échange des stabilités est valable. Pour $\sigma = 10$ l'écoulement unicellulaire prédominant pour le nombre de Ra inférieur à 2300, ainsi la valeur de nombre de Ra à laquelle l'écoulement bicellulaire se manifeste est supérieure à 2900. Tandis que $\sigma = 2.5$ le nombre de Ra critique est inférieur à celle de $\sigma = 10$ qui est égale à $Ra_c = 2195.6$

A la fin les auteurs ont déduit que les instabilités étaient dues à la formation des rouleaux transversaux dans la partie supérieure de l'espace annulaire qui sont principalement causées par l'effet de force de flottabilité, ce qui crée un écoulement spiral tridimensionnel qui se compose par des rouleaux contrarotatifs déjà qui sont détectés par **Pow et al. [29]**. Ainsi une concordance entre les résultats analytiques [6] et expérimentaux [29] a été enregistrée.

J.S.Yoo [7] présente une étude numérique de la convection naturelle dans un espace annulaire entre deux cylindres infinis concentriques et horizontaux qui sont chauffés à différentes températures ($T_i > T_o$). Dans cette étude l'auteur a examiné l'occurrence de doubles solutions stationnaires représentées par un écoulement ascendant et un écoulement descendant. Les résultats enregistrés pour $10^3 < Ra < 2.10^5$, $0,1 \leq \sigma \leq 10$ et $Pr = 0.7$ présente deux types de l'écoulement différents, lorsque le fluide monte (localisé en haut de l'anneau) s'appelle « Ecoulement ascendant », et lorsqu' il descend (localisé en bas de l'anneau) s'appelle « Ecoulement descendant ». A $\sigma = 1.25$ (un large espace annulaire) une double solution (un écoulement ascendant et un écoulement descendant) existent lorsque $Ra \geq Ra_c$. L'écoulement descendant composé par un petit tourbillon superposé avec le grand tourbillon, qui sont en contra rotation dans la partie supérieure de l'espace annulaire, le petit tourbillon se réduit en fonction de la diminution de Ra. Ainsi l'écoulement ascendant se compose d'un seul tourbillon (cellule). Pour σ dans l'intervalle $1.8 \leq \sigma \leq 8.5$ (entrefer moyen), les résultats sont similaires à ceux d'un espace annulaire large.

Pour un espace annulaire étroit $\sigma \geq 10$, l'écoulement secondaire (descendant) coexiste avec l'écoulement ascendant lorsque $Ra \geq Ra_c$ où ($Ra_c = 1900$), l'écoulement ascendant est unicellulaire et prend une forme de croissant, l'auteur a constaté que lorsque Ra excède une autre valeur critique $Ra_c = 3000$, l'écoulement ascendant est multicellulaire et devient stable

à $Ra = 10^4$, tandis que l'écoulement persiste dans laquelle l'écoulement multicellulaire régulier est observé.

M.N. Borjini et al [8] ont étudié numériquement la convection naturelle en présence du rayonnement dans une enceinte annulaire d'axe horizontal situé entre deux cylindres concentriques portés en température T_o et T_i ($T_i > T_o$), les parois sont supposées grises, diffusantes en émission comme en réflexion et de même émissivité. L'enceinte est remplie d'un fluide newtonien et incompressible. L'influence du rayonnement contrôlée par le paramètre de couplage thermique $R_c = r\sigma T_e^3/\lambda$, les auteurs ont constaté que lorsque l'importance de rayonnement augmente (R_c augmente) varie de 0 à ∞ et $R_a = 10^3, 10^4$ les centres de cellule convective se déplacent vers le bas. En augmentant le nombre de R_a ($R_a = 10^5$) une cellule contra rotative apparaît juste au dessus du cylindre intérieur, et ont conclu que le rayonnement stabilise l'écoulement pour $R_a = 10^3, 10^4$ et le déstabilise pour $R_a = 10^5$ qui fait apparaître l'écoulement secondaire. L'influence du paramètre de couplage sur les flux thermiques locaux traversant les deux parois internes et externe pour $R_a = 10^4$: montre que le transfert radiatif uniformise les deux flux pariétaux tout en les augmentant, spécialement au niveau de la moitié supérieure du cylindre interne et de la moitié inférieure du cylindre externe.

La convection naturelle dans l'espace annulaire horizontale étroit $\sigma = 12$ est étudiée numériquement par **J. S. Yoo [9]** ; Pour $Pr \leq 0.2$ la transition vers l'écoulement oscillatoire constitué à multiples cellules de même sens de rotation est résulté de l'instabilité hydrodynamique. Ainsi le nombre de Grashof critique à laquelle l'instabilité du régime de conduction se produit est diminué lorsque Pr augmente. L'effet de nombre de Pr sur la structure spatiale de l'écoulement est démontré pour $Pr = 0.001, 0.05, 0.1$ et 0.2 avec $r = 2 \cdot 10^4$. A $Pr \approx 0$ des cellules sous formes des multiples cellules de même sens de rotation son distribué uniformément dans la partie supérieure et inférieure de l'espace annulaire. A $Pr = 0.001$ la première instabilité se produit près de $\Phi = \frac{\pi}{2}$ et prolongé vers le haut avec l'augmentation de Pr ; Lorsque Pr augment, cependant, les cellules sont décalées vers le haut et la force des cellules de la partie supérieure plus forte. A $Pr = 0.2$ une nouvelle cellule contra-rotative est formée sur le haut de l'anneau pendant la période d'oscillation. Ainsi pour tous les cas précédents un écoulement multicellulaire est observé dérivées vers le bas et la vitesse du déplacement augmente à mesure que Pr augmente. Et on note que les résultats enregistrés montre que à $Pr = 0.001$ le nombre de Grashof critique est égale à 8900 et pour $Pr = 0.2$ le $Gr_c = 7300$.

Pour des valeurs de Grashof relativement petit près de Gr_c , la région occupée par les cellules multiples est étroite, et les cellules sont minces. Le nombre des cellules multiples augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof et la région occupée par les cellules est étendue sur tout l'anneau. A $Pr = 0.3$, les instabilités hydrodynamiques et thermiques coexistent ainsi un multiple écoulement oscillatoire caractérisé par des cellules dans la partie supérieure de l'anneau apparaît après le seuil de l'instabilité. Ainsi, les résultats montrent que la première instabilité pour $Pr = 0.3$ est thermique, seulement l'écoulement stable avec une cellule contrarotative dans la partie supérieure de l'anneau est établi lorsque le cylindre intérieur chauffé, est thermiquement instable à $Gr=7000$ correspond à $Ra=2100$. Lorsque Gr est plus élevé l'instabilité secondaire apparaît à $Gr \geq 8000$ est hydrodynamique, l'écoulement se compose par multiple cellule de même sens de rotation dans la section verticale de l'anneau et une ou plusieurs cellules contrarotative dans la partie supérieure. Les multiples cellules subissent à un fort mouvement oscillatoire. Cependant, le nombre de cellule et la taille de la région occupée par les cellules sont augmentés avec l'augmentation de Gr . Ainsi des mouvements chaotiques sont développées à $Gr = 2 \cdot 10^4$ et $Gr = 3 \cdot 10^4$.

La convection mixte turbulente dans un espace annulaire horizontale entre deux cylindres est étudiée par **M. Ichar et Y.Hsiung Hsu [10]**. Le cylindre extérieur a une température relativement inférieure à celle du cylindre interne qui est en rotation, cette étude basée sur l'effet de nombre de Reynolds et le nombre de Rayleigh ($10^7 \leq Ra \leq 10^{10}$; $0 \leq Re \leq 10^5$; $Pr = 0.7$ et $R = 2.6$). A cause de la rotation du cylindre intérieur la convection forcée influe sur la structure de l'écoulement et le champ de la température aux différents nombre de Reynolds. A $Ra = 10^8$, avec l'augmentation de Re la structure du champ d'écoulement principal crée une plume thermique qui se penche d'un côté, avec une diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique le long du cylindre intérieur. Lorsque Re dépasse 10^5 , la séparation de l'écoulement diminue et se produit des circulations concentriques qu'il démontre que la force centrifuge domine, la structure de l'écoulement devient plus importante autour du cylindre intérieur.

L'effet de l'augmentation du nombre de Ra pour $Re = 10^4$, fait apparaître l'augmentation de la turbulence de l'énergie et de la viscosité. Un large gradient de température devient plus élevé se traduit par l'augmentation du flux de chaleur local autour du cylindre intérieur et extérieur qui montre que l'effet de la convection due par la force de flottabilité est plus important que la convection causée par la force centrifuge.

L'objectif de l'étude présenté par **J. S. Yoo [11]** est d'examiner l'effet de l'écoulement forcé qui est induit par la rotation du cylindre extérieur sur l'écoulement de base ; et la transition entre les différents types de régimes. Le fluide est confiné dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques infinis et horizontaux qui sont maintenus à une température uniforme ($T_i > T_e$) tandis que le cylindre interne est fixe, le cylindre externe tourne dans le sens contraire des aiguilles de la montre avec une vitesse de rotation (Ω) faible et uniforme. Les résultats sont obtenus pour diverses combinaisons de Ra , Re et σ dans la gamme de $Ra \leq 5 \cdot 10^4$; $Re \leq 1500$ et $0.5 \leq \sigma \leq 5$ avec $Pr=0.7$. A faible valeur de Ra ($Ra=1000$), le champ d'écoulement est induit par la force de flottabilité, deux tourbillons se manifestent sous forme de rein symétriques par rapport à l'axe verticale $\Phi = 0$, cette symétrie se fracture quand le cylindre externe est en rotation. Pour $\sigma = 2$, et à faible nombre de $Re=100$ deux tourbillons symétriques sont créés par la force de flottabilité, par contre à $Re=300$ les tourbillons commencent à se dissiper due à la convection forcée, au-delà d'une certaine valeur critique $Re=400$, les tourbillons commencent à disparaître et se dissolvent complètement à $0 < \Phi < \pi$

Les mécanismes de formation ou de disparition des rouleaux sont bien étudiés par **P. Cadiou et al [12]** pour l'écoulement de convection naturelle entre deux cylindres horizontaux isotherme (le cylindre interne étant plus chaud que le cylindre externe) et coaxiaux de faible rapport des rayons ($R \leq 1.2$), les auteurs montrent que l'écoulement perd sa stabilité à travers une bifurcation imparfaite, chaque branche de bifurcation caractérise par un sens de vitesse dans le plan de symétrie. L'étude a mis en évidence l'existence d'un seuil critique au-delà duquel deux types de structures convectives stables existent. Ainsi que le processus de formation des rouleaux au sommet de la cavité annulaire se développe lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté de 1790 à 3000 (la première branche de bifurcation). Avant le point de bifurcation, l'écoulement de base est unicellulaire et la concurrence entre les forces de poussées et les forces d'inertie est plus importante dans la partie supérieure de l'espace annulaire où le gradient de température est colinéaire au vecteur de gravité. Ainsi, un petit rouleau peut se développer dans cette zone de faible vitesse par séparation du rouleau de l'écoulement de base, ce rouleau secondaire et le rouleau de l'écoulement de base sont co-rotatifs. Entre ces deux rouleaux s'étend progressivement une zone stagnante, due aux forces de viscosité, lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Dans cette zone inter-rouleaux co-rotatifs, un nouveau rouleau apparaît : il est naturellement contra-rotatif aux deux rouleaux l'encadrant. Lorsque le nombre de Ra augmente encore, le processus se répète avec une seconde séparation du rouleau de base avec un pincement dans sa partie supérieure qui donnera

naissance au deuxième rouleau co-rotatif. Tandis que la disparition des rouleaux est comme suit : à $Ra=3000$ on observe trois rouleaux sommitaux, tous contra-rotatifs entre eux. Cet écoulement a été obtenu en augmentant le nombre de Ra de $Ra=0$ à $Ra=3000$ et en partant d'un écoulement thermiquement perturbé. Lorsque le nombre de Ra est diminué, le rouleau adjacent au rouleau de l'écoulement de base se trouve écrasé, puis fini par disparaître.

J. S. Yoo [13] étudié numériquement les profils d'écoulement et les phénomènes de bifurcation pour les fluides ayant un nombre de Pr dans la gamme de $0.3 \leq Pr \leq 1$ dans un espace annulaire large $\frac{D_i}{L} = 2$. En constatant que lorsque Ra dépasse une valeur critique, deux types d'écoulement appelé « flux descendant » et « flux ascendant » qui sont caractérisé par la direction de l'écoulement de fluide dans le haut de l'espace annulaire sont réalisé selon les conditions initiales, et deux types de phénomène de bifurcation sont observés qui dépendent du nombre de Prandtl. Pour des fluides ayant $0.3 \leq Pr \leq 0.5$, le développement transitoire des écoulements après le chauffage impulsif du cylindre interne produit un écoulement descendant. A $0.6 \leq Pr \leq 1$, l'écoulement descendant n'a pas été obtenu à partir de la condition initiale zéro. Au début de l'instabilité de l'écoulement ascendant, une zone stagnante est formée dans la partie supérieure de l'espace annulaire. A $0.3 \leq Pr \leq 0.4$ les deux transitions du l'écoulement descendant vers l'écoulement ascendant et l'inverse se produisent. Pour $0.5 \leq Pr \leq 1$, cependant seule la transition de l'écoulement vers le bas à l'écoulement vers le haut se produit avec une diminution de Ra . Ainsi, lorsque Pr augmente, le nombre de Rayleigh critique au-dessus du quelle. Les deux flux ascendant et descendant existant est diminué.

Pour faible valeur de Pr les caractéristiques de l'écoulement sont très différentes, pour cela l'étude de **J.S. Yoo [14]** est abordée sur l'effet de nombre de Pr sur la transition de écoulement de convection naturelle dans un espace annulaire horizontal avec $\sigma = 0.5$ et le nombre de Pr est dans l'intervalle $0.01 \leq Pr \leq 1$. Le phénomène de transition peut être résumé comme suit : A $Pr \leq 0.2$ un écoulement multicellulaire est observé à nombre de Ra élevé après chauffage impulsif du cylindre interne, la solution est unique, d'où l'écoulement bicellulaire pour $Pr=0.2$ consiste en un tourbillon contrarotatif dans la partie supérieure de l'espace annulaire situé au-dessus d'un grand tourbillon. Pour $0.3 \leq Pr \leq 1$, cependant les deux types d'écoulement unicellulaire et bicellulaire stables existant au-dessus d'un certain nombre critique de Rayleigh. Ainsi la transition de l'écoulement unicellulaire vers l'écoulement bicellulaire n'a pas été observée, par contre la transition de l'écoulement bicellulaire vers l'écoulement unicellulaire se produit avec la diminution de Ra . Sachant que dans cette étude

avec $\sigma = 0.5$ le nombre de Ra critique au-dessus du quelle les deux écoulements unicellulaire et bicellulaire existants diminue lorsque Pr diminue.

J. S. Yoo [15] étudié numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire étroit pour un fluide de $Pr = 0.4$. Les calculs ont été effectués pour un espace annulaire de $\frac{D_i}{L} = 12$, $Gr \leq 8 \cdot 10^4$. Dans un anneau étroit horizontal avec un cylindre interne chauffé, il y a deux mécanismes d'instabilités présentes dans l'écoulement. L'une est l'instabilité thermique de Rayleigh Bénard, qui fonctionne sur la partie supérieure de la région thermiquement instable, et l'autre est l'instabilité hydrodynamique entraînée par le cisaillement près de la section verticale. L'instabilité hydrodynamique a été observée à de faibles valeurs de Pr sous forme des cellules en rotation dans le même sens [3] et l'instabilité thermique à haute Pr sous forme des cellules en contra-rotation [7]. A la valeur intermédiaire du nombre de Prandtl, les deux mécanismes d'instabilité peuvent être coexistent. En conséquence, cette étude a observé des schémas d'écoulement multicellulaire très complexe et des phénomènes de transition intéressants pour $Pr = 0.4$. Le champ d'écoulement après le début de l'instabilité du régime de conduction se compose de cellules de forme de carré au-dessus de l'espace annulaire et d'une ou plusieurs cellules rotatifs similaires (des cellules de même sens de rotation) dans la section verticale. Lorsque Gr augmente à partir de la valeur du régime de conduction, la transition de la structure de l'écoulement montre une augmentation progressive du nombre de cellules.

J. Mizushima et al [16] ont été les premiers à tenter une détermination rigoureuse de la transition de la convection naturelle auprès du point de bifurcation, et confirment que les solutions duales étaient dues à une bifurcation transcritique imparfaite. Les diagrammes de bifurcation des solutions stables sont obtenus par la méthode de Newton-Raphson's pour diverse valeur de $1 \leq \sigma \leq 20$ et $Ra \leq 5000$.

Islam et al [17] ont effectué des études numériques et expérimentales sur le transfert de chaleur de convection mixte laminaire dans un espace annulaire horizontale entre deux cylindres concentriques en utilisant de l'air et de l'eau. L'étude numérique a été menée avec les paramètres suivants :

$10^4 \leq Ra \leq 10^8$; $200 \leq Re \leq 1000$; $1.5 \leq R \leq 10$ et $0.7 \leq Pr \leq 5.42$. Lorsque le fluide se déplace de l'entrée, la force de flottabilité est devenue plus forte et influe sur le champ de température à la moitié supérieure, ce qui a provoqué une déformation notable, les résultats ont aussi montré l'influence de nombre de Ra sur l'écoulement secondaire. Le profil de vitesse

axiale et le transfert de chaleur ont démontré que l'écoulement secondaire est plus intense dans la partie supérieure que la partie inférieure. Ainsi la relation entre le nombre de Nu et le nombre de Pr est une relation inverse c-à-d l'augmentation de nombre de Pr a fait diminué le nombre Nusselt.

C. Lung Yeh [18] l'étude numérique du champ thermique de l'écoulement soumis à une convection laminaire naturelle dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux avec des extrémités ouvertes. Compte tenu des conditions thermiques qui sont spécifiées en termes de propriété de flux de chaleur pour la surface du cylindre intérieur et la surface du cylindre extérieur traitée par deux cas isothermique et adiabatique. Les résultats enregistrés dans cette étude démontrent que l'écoulement secondaire pour le cas adiabatique est plus fort que le cas isothermique et évolue dans le sens contraire de la zone de circulation, au moment que la température de surface de cylindre intérieur démunie vers le plan de sortie dans le cas adiabatique et reste constante dans le cas isothermique.

Joo- Sik- Yoo [19] étudié numériquement les caractéristiques de l'écoulement de différents fluides $0,2 \leq Pr \leq 1$ confiné entre deux cylindres concentriques horizontaux où la surface du cylindre interne chauffée par un flux de chaleur « Q » constant et le cylindre externe maintenu à une température T_0 constante avec un rapport de rayon $R=2$. Pour $Pr = 0.7$ double solutions existe : pour une valeur de Ra supérieur à sa valeur critique ($Ra \geq 5700$) soit l'écoulement ascendant ou l'écoulement descendant existent, à $Ra \leq 5600$ seul l'écoulement ascendant existe.

La distribution de l'écoulement ascendant et l'écoulement descendant à la région supérieur de l'espace annulaire ($\Phi < 90^\circ$) sont significativement différents. Dans l'écoulement ascendant, le maximum de la température sur le cylindre interne et le maximum de flux de chaleur sur le cylindre externe situés au point supérieur de l'espace annulaire ($\Phi = 0$) ; ainsi le nombre Nusselt moyen \overline{Nu}_u pour l'écoulement descendant est plus grand que le nombre Nusselt Moyen \overline{Nu}_u de l'écoulement ascendant. Pour $Pr = 0.2$ l'écoulement descendant naitra après l'échauffement du cylindre interne à $Ra = 5 \cdot 10^4$, l'écoulement ascendant qui se compose d'un tourbillon sous forme de croissant se manifeste en premier avant l'écoulement descendant crée avec un petit tourbillon contra rotative attaché au cylindre intérieur qui croit (soit en taille et en force) à la région supérieure de l'anneau. En conclusion l'écoulement descendant se produit par la combinaison des effets des instabilités thermiques et hydrodynamique et qui dépend de Pr et

de la force de l'instabilité thermique au sommet de l'anneau et il dépend de la différence de température entre les deux parois.

L'étude de **G. Petrone et al [20]** est motivée par la nécessité de l'obtention du diagramme de bifurcation et une carte de structure d'écoulement dans le plan (Ra, R) pour un écoulement de convection naturelle dans un espace annulaire cylindrique horizontal rempli d'air a été étudié numériquement pour un rapport de rayon dans l'intervalle de $1.2 \leq R \leq 3$ et $Ra \leq 10^4$. D'après les diagrammes de bifurcation dans le plan (Ra, R) des comportements d'écoulements complexes sont signalés, surtout pour les petits rapports de rayon où les solutions sont fortement modifiées par des petites augmentations de Ra , ces transitions sont prouvées, produites par des perturbations brisant la symétrie autour du plan vertical du cylindre. Ainsi les différents modèles d'écoulement ont été examinés et une carte de différentes structures des écoulements possibles sont présentées dans le plan (Ra, R) qui pour la première fois, la multiplicité des solutions et des modèles d'écoulement ont été clairement établis et décrits.

N.A.Roschina et al [21] ont considéré un problème de convection d'un gaz $Pr=0,7$ dans un système de cylindres coaxiaux horizontaux avec une production de chaleur interne (Q). Les deux parois sont maintenues aux différentes températures. Le problème étudié numériquement [coordonnées (R, θ) avec θ tournent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre]. Ils ont constaté que le comportement du système dépend essentiellement de trois paramètres, y compris $\sigma = \frac{D_i}{L}$ le rapport entre le diamètre intérieur du cylindre et la largeur de l'espace annulaire, le nombre de Ra et le nombre de Ra modifié Ra_T qui décrit la production de chaleur $Ra_T = \frac{\rho g \beta L^3 T_0 q}{\mu \alpha}$, ils ont démontré que, selon les paramètres d'un problème, il existe deux différentes distributions de courants bidimensionnels avec un et deux vortex. A cause de l'absence d'une source de chaleur interne l'écoulement se compose par un vortex, lorsqu' il existe une source de chaleur deux vortex se manifestent.

M. C. Kim et C. K. Choi [22] ont étudié théoriquement le début de l'instabilité dans un écoulement de Couette développé après le démarrage impulsif d'un cylindre interne avec une vitesse de rotation constante, Ainsi le cylindre externe maintenu fixe. En utilisant la théorie linéaire. Il est bien connu qu'il existe un nombre de Taylor critique Ta_c auquel les tourbillons de Taylor apparaissent entre deux cylindres concentriques, aux $Ta > Ta_c$ les vortex de Taylor se produisent à un certain temps. Dans cette présente étude, le temps critique t_c représente le début de cette instabilité initiale qui se développe ensuite sous forme de tourbillons toroïdaux est analysé à l'aide de la théorie de la propagation.

A. M. Al-Amiri et K. M. Khanafer [23] ont examiné une étude numérique de la convection mixte en double diffusion dans un espace annulaire entre deux cylindres horizontaux et bidimensionnels, Le cylindre extérieur a été mis en rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre pour introduire l'effet de convection forcée, tandis que le cylindre interne est fixe, la convection mixte double-diffusive est maintenue. En prenant le cylindre intérieur comme paroi chauffée ($T_i > T_o$), ainsi les parois des cylindres sont maintenues à concentration uniforme ($C'_i > C'_o$). Les paramètres de control sont les suivants : $0.01 \leq Le \leq 10, 10^3 \leq Ra \leq 10^5, -15 \leq N \leq 15$ et $0.7 \leq Pr \leq 10$

Lorsque le nombre de Re est porté à 10 puis à 25 la convection est de type convection mixte, l'ensemble d'observations ci-dessus deviennent plus prononcées. L'augmentation de vitesse de rotation $Re=100$ détruit la présence des tourbillons qui disparaissent complètement à $Re=150$ où l'écoulement subit au régime de convection forcée ce qui est attribué à la domination de la rotation mécanique sur le mouvement d'écoulement, et les lignes de courant deviennent semblables au modèle classique de couette par formation des anneaux circulaires autour du cylindre interne. Les isothermes à grande vitesse de rotation, portent les caractéristiques de diffusion et indiquent par la présence de stratification thermique dans la direction radiale.

Ainsi le taux de transfert de chaleur et de masse a été examiné en fonction de nombre de Lewis. Les résultats obtenus montrent que pour les nombres de Reynolds de rotation élevée tend à diffuser le flux de convection thermique, ce qui entraîne la formation des isothermes concentriques En outre, à des valeurs élevées de Lewis une amélioration significative de taux de transfert de masse est remarquée, alors qu'elle a un impact insignifiant sur le transfert de chaleur.

M. A. Teamah [24] a effectué une étude numérique de la convection mixte laminaire à double diffusion dans un espace annulaire horizontal, où la convection à double diffusion se réfère aux problèmes dans lesquelles l'écoulement de fluide est induit par la présence simultanée de deux composants diffusifs, il s'agit de la différence de température et de la concentration. En considérant deux longs cylindres horizontaux concentriques et ces derniers sont maintenus à des températures et concentrations différentes de T_i, C_i et T_o, C_o ($T_i > T_o$) et ($C_i > C_o$). Le gradient de température génère la force de diffusion thermique naturelle et le gradient de concentration génère la force de diffusion solutale naturelle, le cylindre interne est en rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour créer la convection forcée, d'autre part le cylindre externe est considéré comme fixe, en supposant que l'écoulement dans l'espace annulaire est Newtonien, bidimensionnel, stable et

laminaire. Différentes analyses ont été effectuées pour expliquer les effets des nombres thermiques de Rayleigh et de Lewis sur le problème étudié. Tous les résultats ont été réalisés avec $Pr = 0.7$, $Re = 100$ et $R = 0.5$ le nombre de Lewis est dans la gamme de $0.1 \leq Le \leq 10$ et le nombre de Ra thermique est varié dans l'intervalle $10^2 \leq Ra_T \leq 10^6$. A nombre de Ra_T élevé, la convection naturelle est dominée. A $Ra_T = 10^6$, les lignes de courant montrent que l'écoulement se compose de deux cellules. Les deux cellules sont symétriques dans toutes les conditions, le nombre moyen Nu et de Sh augmente si le nombre de Ra_T ou la valeur absolu de N augmente. Ainsi les études [23] et [24] sont en bon accord sur l'effet de nombre de Lewis sur les valeurs moyennes des nombres de Nu et Sh. L'augmentation du nombre de Sh est vive à mesure que Lewis est augmenté (régime de transfert masse domine). Au contraire le nombre de Nu montre un léger plongeon et assume alors une valeur asymptotique avec l'augmentation de Lewis.

T.Adachi et S.Imai [25] ont effectué une analyse de stabilité linéaire tridimensionnelle de la convection naturelle de l'air ($Pr = 0.71$) dans un anneau horizontal entre deux cylindres concentriques en utilisant une méthode d'éléments spectraux, les cylindres sont maintenus à des températures T_i et T_0 ($T_i < T_0$), ils ont évalué le nombre critique de Rayleigh où la convection bidimensionnelle perd la stabilité aux perturbations tridimensionnelles sur une large gamme du rapport de rayon ($1 \leq A \leq 20$). On constate que le mode d'instabilité qui déstabilise les échanges de convection de base est de trois modes différents (i) pour $1 \leq A \leq 1.6$, la convection en forme de croissant bifurque en convection tridimensionnelle stable asymétrie dans le plan central vertical, (ii) $1.7 \leq A \leq 2.2$, la convection en forme de croissant bifurque en une forme oscillatoire tridimensionnelle asymétrie dans le plan vertical, et (iii) $A \geq 2.3$, la convection en forme de croissant bifurque vers une convection tridimensionnelle stable avec une symétrie dans le plan vertical

D. Angeli et al [26] ont examiné les principaux résultats concernant la dynamique de transition de l'écoulement de convection naturelle dans l'espace annulaire horizontale entre deux cylindres coaxiaux avec température imposée en surface ($T_i > T_0$) ; selon la figure 1.1 ci-dessous, différents type de l'écoulement identifié en fonction de nombre de Nusselt qui varie avec le nombre de Ra et R.

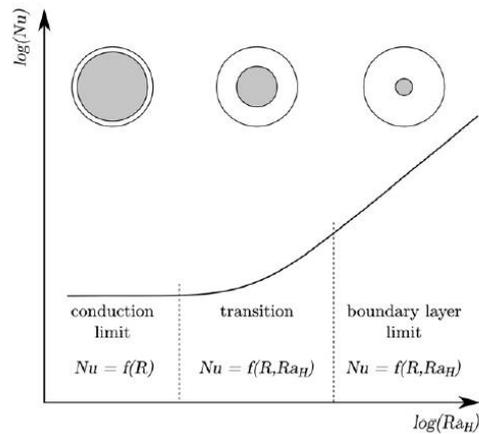


Figure 1.1 : Diagramme des caractéristiques d'écoulement et de chaleur dans un anneau horizontal en fonction de R et Ra_H , de la référence [26].

A faible valeur de Ra l'écoulement est de type pseudo-diffusif (PD) et le processus de transfert de chaleur type conduction qui domine dans tous l'entrefer et, en tant que tel, est une fonction de R uniquement. Un tel régime persiste tant que l'écart annulaire et / ou la différence de température entre les deux cylindres sont suffisamment petits. Une faible circulation induit par faible gradient de température est caractérisée par deux cellules contra rotative symétriques prennent des formes différentes selon la valeur de R ; pour les petits nombre de R (étroit anneau) les cellules ayant une forme de croissant, tandis que pour large rapport de rayon R ils prennent une forme de rein.

A des valeurs de Ra élevées, l'écoulement est de type couche limite, Pour ce régime d'écoulement Le taux de transfert de chaleur moyen est en fonction à la fois de Ra et de R . Ainsi le champ de l'écoulement est divisé en cinq régions physiquement distinctes comme représentées, dans la figure 1.2 ci-dessous par **M.C. Jischke et M. Farshchi [27]** : une couche limite mince intérieure développée autour du cylindre intérieur dans laquelle domine les forces de flottabilité et les forces visqueuses. Ainsi cette couche mince donne naissance à une plume dans la région supérieure de l'espace annulaire, elle est entraînée par des forces de flottabilité, pour large valeur de « R » la dynamique de la plume est le phénomène principal pour la transition à l'écoulement turbulent. Le long de la surface du cylindre extérieur le fluide descend formant une seconde couche limite c'est la couche limite mince externe sur le cylindre extérieur, dans laquelle dominant les forces de flottabilité et les forces visqueuses.

Région stagnante : au-dessous du cylindre le fluide stratifié est stable et principalement stagnant, ici, les forces de flottabilité freinent le mouvement du fluide, et le transfert de chaleur se fait en grande partie par conduction.

Région centrale : une région adiabatique et non-visqueuse délimitée par les quatre régions précédentes caractérisée par la recirculation du fluide.

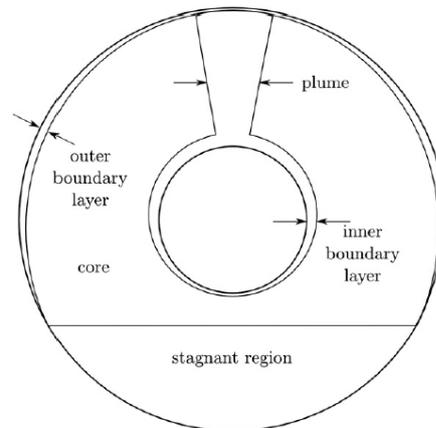


Figure 1.2 : les différentes régions d'écoulement dans un anneau horizontal, de la référence [27]

Dans la région intermédiaire entre les régimes de pseudo-diffusion et de couche limite [26], l'écoulement est à nouveau une fonction forte à la fois de Ra et R . Lorsque Ra augmente, les régimes cellulaires constants du régime pseudo-diffusif se transforment en divers types d'écoulement, en fonction du rapport d'aspect R , et aussi le nombre de Prandtl. L'identification des régimes d'écoulement possibles dans cette «région de transition» est un problème majeur dans l'étude de l'écoulement flottant dans un anneau horizontal.

L'objectif de l'article de **Y-R. Li et al** [28] c'est étudié numériquement par la méthode du volume fini la convection naturelle de l'eau froide près de sa densité maximale entre deux cylindres horizontaux. Le rapport de rayon des cylindres concentriques horizontaux varie de 1.2 à 2.0 et le paramètre d'inversion de densité de 0 à 1. Les parois interne et externe de l'anneau horizontal sont maintenues isothermes à des températures uniformes constantes. Les résultats montrent que le modèle d'écoulement dépend principalement du paramètre d'inversion de densité et du nombre de Rayleigh. Pour un écoulement en régime permanent, le champ de l'écoulement et de température est toujours symétrique par rapport à l'axe vertical pour tout paramètre d'inversion de densité. La formation de petites cellules en haut ou en bas de l'anneau est attribuée à l'instabilité de Rayleigh-Bénard. À faible paramètre d'inversion de densité, les cellules de Bénard apparaissent près du sommet de l'anneau, et elles apparaissent également près du fond de l'anneau pour un paramètre d'inversion de grande densité. La largeur de l'anneau

a une légère influence sur la structure de l'écoulement. Cependant, le nombre de cellules de Bénard diminue avec l'augmentation du rapport des rayons.

Lorsque l'écoulement passe à l'état oscillatoire, le champ de l'écoulement et de température devient asymétrique. En outre, le gradient vertical de densité inverse au sommet de l'anneau et le gradient de densité horizontal au centre de l'anneau joue le rôle principal pour la formation d'un écoulement oscillatoire à paramètre d'inversion de densité faible et modéré, respectivement. Mais le gradient de densité verticale au sommet de l'anneau et le gradient horizontale de densité au milieu de l'anneau travaillent ensemble pour l'écoulement oscillatoire à un grand paramètre d'inversion de densité.

1.2.2 Études expérimentales

Les différents régimes d'écoulement dans la région de transition ont été étudié expérimentalement par **Pow et al [29]**, où dans leur étude ont identifié une description complète des différents régimes d'écoulement dans un espace annulaire en fonction du rapport de rayon R et le nombre de Ra pour un espace annulaire rempli d'air. Les résultats enregistrés ont été résumés dans le schéma ci-dessous (figure 1.3) le graphique montre les régions où se produisent les différents type d'écoulement, d'où on observe un écoulement bidimensionnel unicellulaire stable à faible valeur du nombre de Ra , Ainsi ; lorsque le nombre de Ra augmente au-dessus d'une valeur critique, différents régimes d'écoulement instationnaires se produisent en fonction du rapport de rayon R :

Pour $R > 1.71$ (large espace annulaire) une transition directe a été observée qui se compose par des tourbillons sous forme de croissant autour de l'axe horizontal des cylindres, qui apparaissent lorsque le nombre du Ra dépasse une valeur critique d'environ 10^5 . Pour un espace annulaire modéré ($1.24 > R > 1.71$) un écoulement 3D spiral a été détecté après le point de transition, ce mouvement spiral des particules de fluide était le résultat de la combinaison des tourbillons en forme de croissant manifestés sur le plan transversal avec l'ensemble des rouleaux contrarotatifs qui se développent dans la direction axiale, générés par une instabilité de type Rayleigh Bénard. Finalement pour un espace annulaire étroit ($R > 1.24$) un écoulement unicellulaire a été observé qui se transforme en multicellulaire.

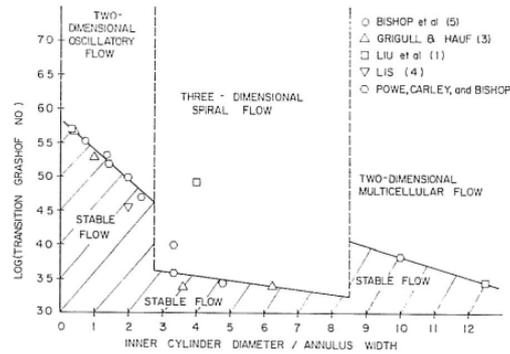


Figure 1.3 : Catégorisation des modèles d'écoulement dans les anneaux cylindriques concentriques horizontaux, de la référence [29].

Les résultats expérimentaux obtenus avec l'air par **M. T. Ouazzani et al [4]** montrent une structure de l'écoulement sous forme des rouleaux transversaux pour faible nombre de Re et de rouleaux longitudinaux apparaissent pour des nombres de Re plus élevés. Ces rouleaux ne se déplacent pas mais tournent autour de leur centre deux à deux contrarotatifs. Leurs traces des sections normales à la direction de l'écoulement est périodique en raison du mouvement hélicoïdale du fluide. Le dispositif expérimental ne permet pas de visualiser cet écoulement alors il est tridimensionnel. En conclusion la structure transversale de l'écoulement devient complètement longitudinale lorsque Re est supérieur de sa valeur critique.

M. Naimi et al [30] ont étudié expérimentalement et analytiquement la structure des tourbillons de Taylor en la présence et en absence d'écoulement axial dans un espace annulaire horizontale entre deux cylindres où le cylindre intérieur en rotation et plus chaud que le cylindre extérieure qui est fixe. L'étude expérimentale a été menée avec un fluide à caractère rhéo-fluidifiant au-delà du seuil d'écoulement et thermo-dépendant, le choix s'est porté sur une solution aqueuse d'un acide acrylique. Ce gel possède les propriétés d'être réversible, transparent, non toxique et peut garder son homogénéité sous l'action des grandes déformations. Afin de séparer les différents régimes d'écoulement une technique de visualisation a été utilisée ; Celle-ci consiste en l'adjonction de paillettes d'aluminium au fluide.

Dans le cas de l'écoulement de couette pur, ont constaté qu'au-delà d'un nombre de Taylor critique, les structures tourbillonnaires prennent naissance aux deux extrémités du dispositif. En augmentant le nombre de Taylor, ces structures occupent progressivement toute la longueur de l'espace annulaire. L'apparition des tourbillons est retardée dans le cas où un débit axial est imposé. Le remplissage de l'espace annulaire se fait alors progressivement vers l'amont, pour les nombres de Taylor croissants. Ainsi l'étude de la stabilité hydrodynamique a été complétée

par celle du champ des vitesses ; pour l'écoulement de poiseuille pur, l'influence du débit axial sur la zone d'iso-vitesse a été mise en évidence, elle subit un rétrécissement au fur et à mesure que celui-ci croit. Pour l'écoulement de Couette – Poiseuille, cette zone disparaît totalement lors de la mise en rotation du cylindre intérieur. La vitesse augmente au voisinage de la paroi tournante, là où existent des valeurs élevées du taux de cisaillement,

Ainsi **M. T. OUZZANI et al [31]** ont réalisé une étude expérimentale par anémométrie laser pour déterminer les conditions d'apparition de la convection mixte sous forme de rouleaux transversaux ou longitudinaux dans un canal, le canal de mesure est constitué de deux plaques, les plaques sont rendus séparément isothermes aux températures ($T_1 > T_2$). Les expériences sont effectuées pour des nombres de Re et nombre de Ra dans le domaine $0,03 < Re < 3,3$ et $Ra \leq 4700$. Utilisant l'eau comme fluide d'étude. A la figure ci-dessous une schématisation des différents types d'écoulement pouvant exister dans le canal. Ainsi l'écoulement de base de poiseuille (région I) donne par une augmentation de Ra . Une structure de type R_{\perp} (région II) ou R_{\parallel} (région III). En résumé lorsque le nombre de Reynolds caractérisant la vitesse moyenne de l'écoulement de poiseuille inférieur à 0,6 et $Ra = 1730$ la forme des rouleaux transverseaux R_{\perp} seulement existent. Par contre à $Re > 0,6$ et $Ra_c = 1840$ les instabilités thermo convectifs sous la forme longitudinale R_{\parallel} apparaissent. En conclu que $Ra_{\parallel}^c > Ra_{\perp}^c (Re)$ où le nombre de Rayleigh critique Ra_c égale à 1730 lorsque $Re = 0$ et avec l'augmentation de nombre de Re jusqu'à l'apparence des rouleaux longitudinaux R_{\parallel} à $Ra_{\parallel}^c = 1840$.

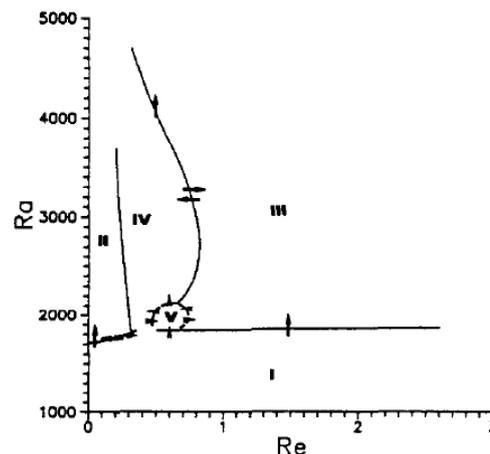


Figure 1.4 : Transition entre différents types d'écoulements observés. (I) Écoulement de Poiseuille. (II) Structure de type R_{\perp} , (III) Structure de type R_{\parallel} , (IV) R_{\perp} , ou R_{\parallel} suivant les conditions initiales. (V) Superposition de R_{\perp} et de R_{\parallel} . Les flèches indiquent le sens des transitions observées, de la référence [31].

L'écoulement hélicoïdal qui a lieu dans l'espace annulaire entre deux cylindres concentriques où le cylindre interne est en rotation, est une superposition de (a) un écoulement axiale Poiseuille et (b) l'écoulement de Couette en rotation. Dans ce type de l'écoulement des instabilités hydrodynamiques dues aux vortex de Taylor peuvent se produire au-dessus d'une valeur critique de la vitesse angulaire du cylindre en rotation. Dans un système monophasé la forme de ces vortex dépend des nombres de Taylor et de Reynolds axiaux. Pour cela, **R. Hubacz et S. Wroński [32]** Examinent expérimentalement l'écoulement de C-T pour des systèmes à deux phases, en particulier pour la dispersion de deux liquides non miscibles, En utilisant l'eau et une solution aqueuse de glycérine comme fluide de travail et en utilisant de Nitrogen comme phase gazeuse confinés entre deux cylindres horizontaux en rotation. Dans cette étude ont mis en évidence l'effet de trois types de force qui influent sur le mouvement des bulles de gaz dans l'appareil expérimental, à savoir : la gravitation, la centrifugation et l'interaction entre les phases (la force de traînée).

Il est possible d'identifier deux zones distinctes dans l'espace annulaire horizontal de l'appareil expérimental selon la direction de la force de flottabilité (gravité) et la force de traînée (due à la rotation) comme indiqué par " L " et " P " (Fig. 1). Dans la zone «P», les forces de flottabilité et de traînée agissent dans la même direction. Dans la zone «L», ces forces agissent dans des directions opposées.

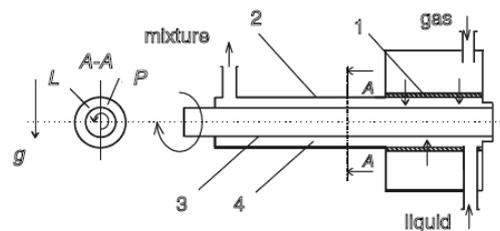


Figure 1.5 : Dispositif expérimental : 1- membrane, 2- tube en plexiglas transparent, 3- rotor, 4- espace annulaire. De la référence [32]

L'effet de la vitesse de rotation sur le mode d'écoulement à deux phases peut être expliqué de manière générale pour différent phase de vitesse de rotation. A «faible vitesse de rotation» est défini comme la vitesse où la gravité domine le mouvement de la phase gazeuse, «la vitesse de transition» est la phase, dans laquelle on peut voir à la fois la force de flottabilité et les forces centrifuges, et à «des vitesses de rotation élevées» les forces centrifuges dominant l'écoulement ; A partir de ces informations, des cartes de régimes d'écoulement ont été construites.

1.3 Transfert de chaleur dans un espace annulaire horizontale

1.3.1 Etudes numériques

C.J.Ho et al [33] ont présenté une étude numérique par la méthode des différences finies pour une convection naturelle et laminaire dans un espace annulaire horizontale avec un flux de chaleur constant q_i imposé sur la paroi du cylindre interne et la surface du cylindre externe est maintenu à une température constante T_0 (le cylindre intérieur plus chaud que le cylindre extérieure). Les paramètres gouvernants de la présente étude sont : le nombre de Ra modifié Ra^* ($Ra^* = \frac{g\beta q_i L^4}{k\alpha\nu}$) qui sont dans l'intervalle $10^3 \leq Ra^* \leq 10^6$ et le nombre de Prandtl $0.4 \leq Pr \leq 100$, et le rapport de rayon $R = 2.6$. Les résultats numériques obtenus indiquent que l'influence du nombre de Prandtl est assez faible ; et le transfert de chaleur dépendant principalement du nombre de Rayleigh modifié Ra^* , ainsi la variation du nombre de Prandtl ne produit aucun effet apparent sur le transfert de chaleur à $Pr \geq 7$.

La stabilité hydrodynamique de la convection mixte dans un anneau est étudiée numériquement par **B. B. Rogers et L. S. Yao [34]** ils ont considéré le mouvement d'un fluide chauffé dans un espace annulaire cylindrique vertical, un flux de chaleur constant est fourni au niveau de la paroi du cylindre interne sachant que le cylindre externe est adiabatique. Les résultats indiquent que le flux entièrement développé est thermiquement instable dans la plupart des régions de l'espace annulaire. Ces résultats démontrent clairement que l'augmentation observée de nombre de Nu est due à la présence des instabilités hydrodynamiques. A $Ra = 100$, l'augmentation de Nu se situe à environ de 5%, et à $Ra = 200$, elle est augmentée jusqu'à 20%. La relation entre nombre de Nu et Ra est écrite selon la formule de corrélation suivante : $Nu = 1.02 Ra^{0.28}$

L'influence de la force centrifuge sur le transfert de chaleur a été étudié par **M. Ichar et Y. Hsiung Hsu [10]** avec un cylindre intérieur plus chaud que le cylindre extérieur et en rotation. Ils montrent que le nombre Nusselt moyen diminue avec l'augmentation de nombre de Re à cause de l'effet de la force centrifuge qui réduit le transfert de la chaleur globale et il augmente généralement la force de l'écoulement secondaire ; l'effet de la force centrifuge devient plus important autour du cylindre intérieur qui augmente l'espace iso thermique et réduit \overline{Nu} autour du cylindre interne.

Le tableau 01, ci-dessous montre que les valeurs \overline{Nu} augmentent avec l'augmentation de nombre de Ra due à la convection de la force de flottabilité ; ainsi lorsque le système est rotatif

(Re augmente) l'écoulement induit par l'effet centrifuge le long de cylindre interne est prédominant et surtout pour faible valeur de Ra en remarque une diminution de Nusselt. Cette diminution de \overline{Nu} est plus élevée à Ra petit et Re élevée due à la convection de la force centrifuge prédominante. Donc les résultats montrent que le nombre moyen de Nusselt \overline{Nu} , augmente avec une augmentation de Ra, mais diminue avec une augmentation de Re ou RR (rapport de rayon)

Parameter Ra =	10 ⁷		10 ⁸	10 ⁹			10 ¹⁰	
RR =	2.6	5.0	2.6	2.6	3.5	5.0	10.0	2.6
Re = 0	10.286	9.953	21.823	42.084	40.932	38.179	36.231	86.432
Re = 10 ²	10.129	9.578	20.826	41.937				
Re = 10 ³	10.006	9.162	20.512	41.672				
Re = 10 ⁴	8.826	7.583	19.340	41.328	39.541	35.621	30.074	85.478
Re = 10 ⁵	6.091	5.211	15.832	40.803				

Tableaux 1.6 : Nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour différents cas étudiés.

Le transfert de chaleur conjugué conduction-convection naturelle dans les cylindres concentriques, sous irradiation solaire, est analysé numériquement par **D.C.Kim et Y.D.Choi [35]**, les effets de la propriété matérielle du cylindre externe sont pris en considération. Où le nombre Rayleigh est dans la gamme de $0.0063 \leq Ra_L \leq 7.5 \cdot 10^4$. Les résultats montrent que, plus la conductivité thermique du cylindre externe est grande, plus les variations du nombre de Nusselt des surfaces de cylindre externes et internes sont petites. Cela est dû à l'équilibre de la conduction dans les cylindres et à la convection naturelle dans l'espace entre les deux cylindres.

Dans l'étude de **Colombo et al. [36]** une méthode spectrale de Galerkin a été appliquée pour résoudre numériquement le problème de la convection mixte laminaire complètement développée dans un espace annulaire horizontal. Deux cas de conditions aux limites ont été étudiés : le cylindre interne est maintenu à une température uniforme ainsi que le cylindre externe est thermiquement isolé (a), et vice versa (b). Les résultats ont été obtenus pour des valeurs de PeRa allant jusqu'à 10⁷, pour Pr = (0.7, 5 et ∞) et différentes valeurs de rapport de rayon $\eta = 0.2$ dans le cas du cylindre intérieur qu'est chauffé et $\eta = 0.2, 0.4$ et 0.6 dans le cas du cylindre externe chauffé ; ont été supposés comme paramètres pertinents dans la description des champs de l'écoulement et de température. Les calculs permettent de comprendre

l'apparition de l'écoulement secondaire et leur influence sur la dynamique de l'écoulement et le transfert de chaleur. En ce qui concerne le champ de température, dans les deux cas, une couche limite thermique tend à se développer au-delà de la surface chauffée, devenant plus mince lorsque $PeRa$ augmente. Cependant, dans le cas (a) une plume s'élève de cylindre intérieur et, en augmentant $PeRa$, une stratification horizontale de la température est observée dans la région inférieure. Au contraire, dans le cas (b), la circulation favorise une stratification horizontale de la température dans la région supérieure.

Dans le travail de **Touahri et Boufendi [37, 38, 39]**, les auteurs ont étudié numériquement le transfert de chaleur conjugué tridimensionnel dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux avec des propriétés physiques du fluide dépendantes de la température. Le nombre de Nusselt par convection mixte devient supérieur à celui de la convection forcée quand le nombre de Grashof est augmenté. A l'interface solide-fluide, les résultats montrent clairement les variations azimutales et axiales du flux de chaleur local et les nombres locaux de Nusselt. Suite à leurs résultats, le transfert de chaleur est quantifié par la corrélation suivante : $Nu_A = 9.9130 Ri^{0.0816}$.

1.3.2 Etudes expérimentales

M. Ciamp et al [40] ont effectué une étude expérimentale pour déterminer l'écoulement de convection mixte et le transfert de chaleur dans un espace annulaire horizontal entre deux tubes concentriques utilisant l'eau comme fluide, le tube intérieur chauffé et le tube extérieur isolé, l'étude faite pour deux valeurs de rapports des rayons $R=1.65$ et 2.18 et les nombres de Re et Ra sont dans l'intervalle $2200 \leq Re \leq 5000$ et $10^7 \leq Ra \leq 10^9$. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur critique Re_I , et qui dépend du nombre de Rayleigh (la valeur de Re_I augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra), du rapport des diamètres et de la position longitudinale, l'écoulement le long des côtés de l'espace annulaire est laminaire et hélicoïdal. Pour $Re > Re_I$, il y a une rupture dans le mouvement hélicoïdal, avec transition à la turbulence au sommet et dans les régions latérales du passage annulaire. Les mesures de transfert de chaleur révèlent des différences significatives entre les nombres locaux de Nusselt en haut et en bas du cylindre interne, là que pour $Re < Re_I$, le nombre de Nusselt en haut du cylindre excède celui en bas, tandis que l'inverse est vrai pour $Re > Re_I$. Ainsi que le nombre de Nusselt moyen sur la circonférence est à faiblement dépendance de la position longitudinale, et peut être exprimé en fonction des nombres de Ra et de Re et du Rapport des rayons des tubes qui sont corrigés de 15% par une expression de la forme $\overline{Nu} = 0.0274(ReRa)^{0.25}(R)^{0.38}$.

L'étude expérimentale effectuée par **M. Naimi et al [30]** pour un fluide à un seuil d'écoulement et un caractère rhéo-fluidifiant, permet de caractériser les différents régimes d'écoulement laminaire et laminaire tourbillonnaire axisymétrique, lesquels conditionnent les mécanismes de transfert de chaleur. Pour un nombre de Reynolds et une densité de flux donné, l'évolution radiale de la température au sein du fluide à la sortie de l'espace annulaire, la température augmente du côté de la paroi froide et diminue du côté de la paroi chaude, Ceci traduit l'effet de recirculation des tourbillons ramenant du fluide chaud de la paroi du cylindre interne qui est soumise au flux de chaleur vers l'autre paroi du cylindre externe. Ainsi l'épaisseur de la couche limite thermique est plus importante en régime tourbillonnaire qu'en régime laminaire, à cause du mélange créé par les tourbillons.

Le transfert de chaleur entre paroi chaude et le fluide en mouvement est caractérisé par le nombre adimensionnel Nu. En régime laminaire, l'influence de nombre de Taylor se traduit par une légère diminution du coefficient de transfert, cette diminution qui peut être attribuée à celle du gradient de vitesse axiale au voisinage de la paroi chaude, et dans le cas d'un fluide newtonien cette diminution est beaucoup moins nette. En revanche, dans le régime tourbillonnaire, l'apparition progressive des tourbillons de Taylor de l'aval vers l'amont, qui viennent perturber la croissance uniforme de la couche limite thermique, entraînent un accroissement important du nombre de Nusselt lorsque nombre de Taylor croissant ; la remontée des courbes d'évolution du nombre de Nusselt à l'aval de la zone chauffée est due à l'effet de recirculation provoquée par les cellules de Taylor contra-rotatives. Lorsque la totalité de l'espace annulaire est envahie par les tourbillons de Taylor, le nombre de Nusselt continue de croître partout avec le nombre de Taylor.

La rotation des tubes interne et externe produit des effets significatifs sur les champs des vitesses et de température ainsi que sur le taux de transfert de chaleur de l'écoulement turbulent d'un fluide dans un espace annulaire horizontale. Pour cela **H.Pfitzer et H. Beer [41]** ont déterminé expérimentalement le flux thermique dans la région d'entrée hydrodynamique et thermique de l'espace annulaire tournant et les profils de vitesse et de températures en fin de section d'essais. Ainsi, l'étude analytique a été réalisée pour un écoulement turbulent complètement développé en appliquant la théorie de longueur de mélange modifiée pour exprimer l'accroissement ou la suppression de la turbulence à cause des forces centrifuges créées par la rotation du tube, la longueur de mélange est modifiée par une fonction du nombre de Richardson.

L'étude expérimentale est effectuée avec l'air comme fluide qui s'écoule dans un espace annulaire tournant avec un écoulement axial turbulent pour deux cas : lorsque les deux tubes en co-rotation ou lorsque les tubes sont en contra-rotation, pour $\frac{L}{d_h} = 60.94$ (L est la longueur de l'espace annulaire et d_h est le diamètre hydraulique) et un rapport de rayon $R = 0.8575$, dont le tube extérieur est chauffé électriquement et le tube intérieur est adiabatique. Le nombre de Nusselt est déterminé en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement Re_z et avec le nombre de Reynolds de rotation $Re_{\varphi,1}$ et $Re_{\varphi,2}$ des tubes intérieur et extérieur respectivement comme des paramètres visualisant l'influence de rotation des deux tubes. Le nombre de Nusselt Nu_z est calculé à $\frac{Z}{d_h} = 60$ expérimentalement, tandis que les résultats analytiques Nu_∞ ont été calculé pour un écoulement totalement développé à $\frac{Z}{d_h} \approx \infty$, les résultats des deux études montrent que l'écoulement n'est pas entièrement développé à $\frac{Z}{d_h} = 60$.

Avec l'augmentation de nombre de Reynolds du tube intérieur $Re_{\varphi,1}$ et le tube extérieure fixe, une augmentation remarquable du nombre de Nusselt est observée qui est proportionnelle au taux de rotation de tube interne $N_1 = \frac{Re_{\varphi,1}}{Re_z}$. Et dans le cas du tube extérieur en rotation et le tube intérieur fixe, le nombre de Nusselt ne change pas significativement. En revanche, le nombre de Nu diminue lorsque les deux tubes sont en co-rotation.

Avec l'augmentation de vitesse de rotation des deux tubes qui sont en contra-rotation la température de la paroi de tube interne augmente et la température de tube externe diminue sur toute la longueur, donc la distribution radiale de la température prend une forme plus turbulente qui correspond à des fluctuations turbulentes croissantes dans le fluide.

Mohammed et al. [42] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection mixte pour l'écoulement d'air laminaire dans la région d'entrée thermique d'un anneau horizontal concentrique avec un rapport de rayon égale à 2. Sachant que le tube interne d'une longueur de 900 mm chauffée par un flux de chaleur constant et le tube externe était adiabatique. La distribution de la température le long de la surface de tube interne, et la distribution du nombre local de Nusselt par rapport à la distance axiale sans dimension Z_t ont été présentées et discutées. On en déduit que les effets de la convection libre ont eu tendance à diminuer le transfert de chaleur à un faible nombre de Re tandis que en augmentant le transfert de chaleur pour un nombre élevé de Re, en raison de la domination de convection forcée sur le processus de transfert de chaleur. Le paramètre de convection mixte, le nombre de Richardson a été approximativement varié de 0,631 à 315,218. Les résultats moyens de transfert de chaleur

ont été corrélés en termes de paramètres sans dimension pertinents avec une corrélation empirique avec l'équation suivante : $Nu_m = 2.964 (Gr Pr / Re)^{0.0326}$ avec une erreur relative de $\pm 10\%$.

Une étude expérimentale est réalisée par **M. Alipour et al [43]** pour étudier les effets du rapport de rayon sur le transfert de chaleur naturel dans un anneau concentrique vertical. Le fluide entrant par le bas de l'espace annulaire avec un profil de vitesse et de température est uniforme. Le tube externe est en matériau acrylique avec un diamètre interne égal à 76,5 mm et une épaisseur de 6,35 mm. Ainsi que le tube interne est composé principalement de métal et qui est chauffé électriquement et ont utilisé trois cas de tube interne de différents rayons ce qui a donné des rapports de rayon différent $\frac{r_i}{r_o}$ égale à 0.10, 0.16 et 0.20, nommés respectivement 1st rod, 2ad rod et 3rd rod. Par conséquent, le rapport d'aspect de l'espace annulaire $\frac{L}{(r_o-r_i)}$ est respectivement de : 51.97, 55.19 et 57.89. A très faible flux de chaleur, les résultats indiquent que la distribution de la température est indépendante du rapport de rayon. Sachant que. La température le long du tube interne est presque constante, et elle est attribuée à la conduction thermique du tube chaud à l'air adjacent où il n'y a pas de mouvement appréciable de l'air. Par ailleurs la distribution de la température dépend fortement du rapport de rayon à un flux de chaleur élevée, à mesure que le flux de chaleur augmente, la température de surface augmente en raison de la convection libre qui est le facteur dominant du processus de transfert de chaleur. De plus, à un flux de chaleur fixe, la température de la surface de tube intérieur diminue à mesure que le rapport de rayon augmente. La dépendance du nombre moyen de Nusselt sur le nombre de Rayleigh est explorée dans cette étude. Les résultats révèlent que la dépendance du nombre moyen de Nusselt sur le nombre de Rayleigh est faible à faible rapport de rayon et augmente avec le rapport de rayon. De plus, le nombre moyen de Nusselt diminue à mesure que le rapport de rayon augmente, de sorte qu'il est 50% plus élevé pour (premier tube) que pour (troisième tube).

L'étude de **M. Hongting et al. [44]** vise à mener une enquête approfondie sur les caractéristiques du transfert de chaleur par convection (le transfert de chaleur local et moyen) d'un cylindre isotherme horizontal en rotation et de large diamètre à des nombres de Gr élevés. Un équipement expérimental est conçu, Le cylindre est fait d'une plaque d'acier avec un diamètre extérieur de 500 mm et une longueur de 900 mm. La température de la surface du cylindre varie de 30 à 140 ° C, correspondant à Gr allant de 1.70×10^8 à 9.36×10^8 . L'effet de la rotation sur le transfert de chaleur est illustré par la variation du nombre moyen de Nusselt

Nu avec le nombre Reynolds rotationnel Re_r . Les résultats indiquent que le transfert de chaleur du côté ascendant est différent de celui du côté descendant et que la rotation du cylindre peut conduire à une distribution non uniforme du nombre local de Nusselt Nu_φ , en particulier dans la région au-delà du nombre de Reynolds rotationnel critique $Re_{r,cri}$. Ce dernier se définit comme il est la valeur critique du nombre de Reynolds rotationnel où le nombre moyen de Nusselt Nu varie avec le nombre de Reynolds rotationnel Re_r , lorsque $Re_r < Re_{r,cri}$, le nombre de Nusselt moyen Nu est indépendant de Re_r , autrement dit, Nu ne varie pas avec la variation de Re_r et maintient une constante, seulement comme $Re_r \geq Re_{r,cri}$, Nu commence à augmenter avec le Re_r croissant selon une certaine règle. Ainsi que, Le transfert de chaleur passe graduellement de la convection libre pure à la convection mixte en raison des effets de rotation tels que $Re_r \geq \frac{2}{3} Re_{r,cri}$.

En conséquence, il est essentiel de déterminer $Re_{r,cri}$ pour juger l'état de l'écoulement et étudier les caractéristiques de transfert de chaleur. $Re_{r,cri}$ se rapporte à Gr et Pr , et peut être exprimé par la formule suivante $Re_{r,cri} = 2.59Gr^{0.456}$; compte tenu de l'influence de la conductivité thermique et de la viscosité de l'air, les données peuvent être corrigées par l'équation suivante : $Re_{r,cri} = 1.09(GrPr)^{0.5}$

1.4 Objectifs de notre travail

Cette recherche bibliographique, a permis, tout d'abord de prendre connaissance de l'évolution des différents travaux effectués dans le domaine des écoulements en convection forcée et mixte dans l'espace annulaire horizontale entre deux cylindres concentriques. Il apparaît clairement une large diversité d'application de ce genre de système, les échangeurs de chaleur étant un très bon exemple. Elle a permis aussi de situer le contexte de notre étude ainsi que ses spécificités. Il a été établi que le flux transversal est relativement sensible aux modifications des paramètres géométriques, cinématiques et dynamique.

L'objectif du présent travail est une contribution à la simulation numérique réaliste des développements hydrodynamique et thermique de la convection mixte avec des propriétés variables (en fonction de la température), dans les conduits annulaires horizontaux parcourus par un fluide newtonien et incompressible. Le cylindre interne est adiabatique tandis que le cylindre externe est soumis à une énergie interne générée par l'effet Joule le long de l'épaisseur du cylindre externe. Cette étude présente l'effet de l'écoulement secondaire induit par la

poussée thermique et des propriétés variables sur les développements (hydrodynamique et thermique) axiaux de l'écoulement et du champ thermique.

Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Introduction

Ce chapitre est destiné à la description et la modélisation mathématique du problème physique. Le modèle mathématique est l'ensemble des équations différentielles aux dérivées partielles, de la conservation de masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites régissant les transferts thermo-convectifs au sein de l'espace annulaire. La forme non dimensionnelle des équations modélisantes est obtenue par la normalisation des variables indépendantes avec des échelles caractéristiques appropriées. Le transfert thermique est quantifié par des nombres de Nusselt locaux et moyens.

2.2 Les hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices de cette étude sont les suivantes :

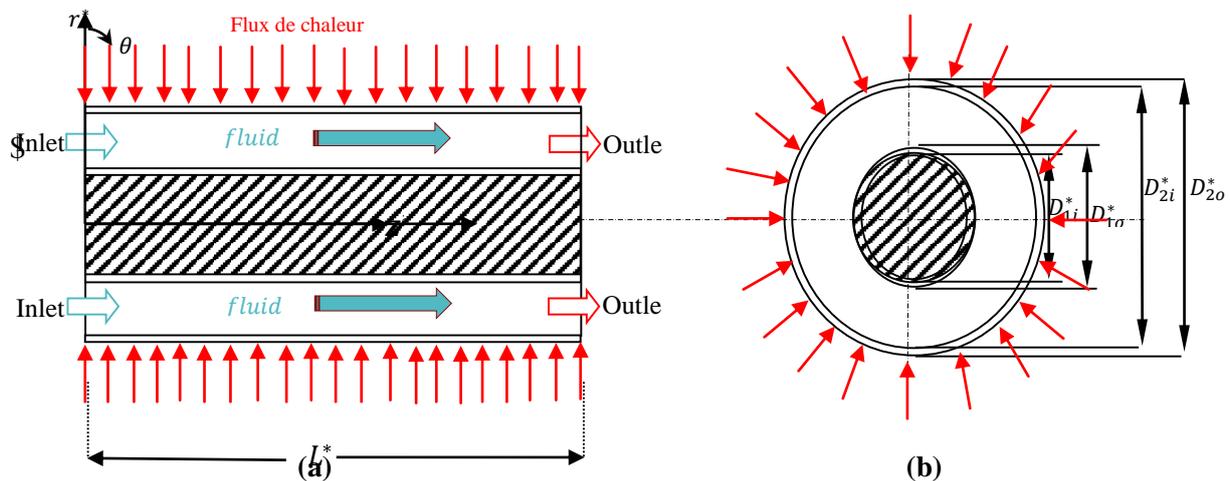
- L'écoulement est laminaire et incompressible.
- Le fluide est Newtonien (l'eau distillée).
- La dissipation visqueuse dans le fluide est négligeable.
- Le rayonnement thermique à l'intérieur de l'espace annulaire est négligeable.

2.3 Description du problème

La géométrie du système étudié est illustrée dans la figure 2.1, qui montre également les conditions aux limites utilisées dans le travail numérique. On considère deux cylindres concentriques horizontaux ayant une longueur $L = 1 \text{ m}$.

Le cylindre interne d'un diamètre intérieur $D_{1i} = 0.56 \text{ cm}$ et un diamètre extérieur $D_{1e} = 0.60 \text{ cm}$, et le cylindre externe d'un diamètre intérieur $D_{2i} = 0.96 \text{ cm}$ et un diamètre extérieur $D_{2e} = 1 \text{ cm}$. Le cylindre interne est considéré comme parfaitement isolé (adiabatique) tandis que le cylindre externe est chauffé par un courant électrique passant le long de son épaisseur solide qui produit une génération de chaleur par l'effet Joule, cette chaleur est transférée à l'écoulement de l'eau distillée dans l'espace annulaire. Des pertes de chaleurs par convection et rayonnement vers le milieu externe sont prises en considération. Le fluide considéré dans cette simulation est l'eau avec un nombre Prandtl égal à 8.082 et sa viscosité $\mu^*(T^*)$ et la conductivité thermique $K^*(T^*)$ sont considérées comme des fonctions variables de la température. La masse volumique est une fonction linéaire de la température traduite par l'hypothèse de Boussinesq. A l'entrée, la température du fluide est constante et égale à 15°C , un nombre Reynolds Re égal à 373,28. A la sortie, l'écoulement est considéré quasi-développé.

L'adimensionnalisation des paramètres géométriques se fait en divisant toutes les dimensions par le diamètre hydraulique $D_h = D_{2i} - D_{1e} = 0.36 \text{ cm}$.



$$L^* = 277.77, D_{1i}^* = 1.55, D_{2i}^* = 1.66, D_{1o}^* = 2.66, D_{2o}^* = 2.77$$

Figure 2.1 : Géométrie de l'espace annulaire : (a) longitudinale, (b) transversale

2.4 Equations modélisantes

L'écoulement satisfait aux équations de conservation de quantité, de mouvement et de masse qu'on peut représenter sous forme vectorielle comme suit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

Le plus intéressant pour résoudre le système (2.1) est d'exploité la géométrie. Pour cela on utilise les coordonnées cylindriques (r^*, θ, z^*) et on développe le système précédent selon les trois directions : radiale (r^*) , azimutale (θ) et axiale (z^*) .

L'introduction des variables adimensionnelles, par un choix judicieux de référence, nous permet de faire ressortir des paramètres de contrôle très importants dans l'étude des instabilités de l'écoulement de Couette-Taylor, qui sont le nombre de Reynolds qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses et le nombre de Grashof qui correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses, qui permet de caractériser le transfert thermique dû au déplacement naturel d'un fluide.

Après les modifications effectuées sur les équations de transport, on obtient un système adimensionnel de trois équations de conservation de quantité de mouvement comprenant chacune : un terme instationnaire, un terme de diffusion, un terme de convection et un terme de source de l'équation de continuité.

A $t^* = 0$:

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \dots\dots\dots (2.2)$$

A $t^* > 0$:

2.4.1 Equation de conservation de la masse

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

2.4.2 Equation de conservation de quantité de mouvement radiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z^* V_r^*) - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0}{Re_0^2} \cos\theta T^* + \\ \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

2.4.3 Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire

$$\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_\theta^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z^* V_\theta^*) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0}{Re_0^2} \sin\theta T^* +$$

$$\frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta \theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right] \dots \dots \dots (2.5)$$

2.4.4 Equation de conservation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right] \dots \dots \dots (2.6)$$

2.4.5 Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* T^*) = G^* - \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right] \dots \dots \dots (2.7)$$

Avec $G^* = \begin{cases} \frac{K_s^*}{(Re_0 Pr_0)} & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$

La conductivité thermique du solide est celle de l'Inconel est égale à $K_s = 20 \text{ W/m}^\circ\text{K}$.

La conductivité thermique du fluide à l'entrée de l'espace annulaire est égale à $K_0 = 0.5893 \text{ W/m}^\circ\text{K}$.

La conductivité thermique adimensionnelle du solide est égale à $K_s^*(T^*) = K_s / K_0 = 33.94$

La viscosité et la conductivité adimensionnelles de l'eau en fonction de la température adimensionnelle sont obtenues à partir d'un lissage des valeurs tabulées citées dans **Baehr et Stephan [45]**, mentionnées aussi dans la thèse de **S.Touahri [46]** :

$$\mu^*(T^*) = 0.23087 + 0.78727 \exp(-T^* / 0.11386)$$

$$K^*(T^*) = 1.00111 + 0.80477 T^* - 1.06002 T^{*2}$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses sont :

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^* &= 2\mu^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} & \tau_{r\theta}^* &= \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta\theta}^* &= 2\mu^* \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right] & \tau_{\theta z}^* &= \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right] \dots \dots \dots (2.8) \\ \tau_{zz}^* &= 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} & \tau_{zr}^* &= \tau_{rz}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right] \end{aligned}$$

Les flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} , \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \dots \dots \dots (2.9)$$

Les nombres adimensionnels Re_0 , Pr_0 et Gr_0 sont calculés avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température d'entrée ($T_0 = 15^\circ\text{C}$):

$$Re_0 = \frac{V_0 D_i}{\nu_0}, \quad Pr_0 = \frac{\nu_0}{\alpha_0}, \quad Gr_0 = \frac{g \beta D_i^3 \Delta T}{\nu_0^2}$$

2.5 Les conditions aux limites

Les équations différentielles précédentes sont résolues en appliquant les conditions aux limites suivantes :

➤ **A l'entrée de l'espace annulaire : $Z^* = 0$**

Dans le domaine solide : $0,77 \leq r^* \leq 0,83$ ou $1,33 \leq r^* \leq 1,38$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

Dans le domaine fluide $0.833 \leq r^* \leq 1.3333$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = T^* = 0 \dots\dots\dots(2.11)$$

A l'entrée, l'écoulement axial V_z^* a un profil hydro-dynamiquement développé détaillé comme suit :

$$V_z^*(r^*) = \frac{C_3 r^{*2} + C_2 \ln(r^*) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2 \left(\frac{R_{2i}^2 \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2} \right)} \dots\dots\dots(2.12)$$

$$C_1 = R_{2i}^2 \ln(R_{1e}) - R_{1e}^2 \ln(R_{2i}) / \ln \left(\frac{R_{2i}}{R_{1e}} \right) \dots\dots\dots(2.13)$$

$$C_2 = R_{1e}^2 - R_{2i}^2 / \ln \left(\frac{R_{2i}}{R_{1e}} \right) \dots\dots\dots(2.14)$$

$$C_3 = (R_{2i} - R_{1e})^2 \dots\dots\dots(2.15)$$

$$C_4 = C_1 + C_2 \ln(R_{2i} - R_{1e}) \dots\dots\dots(2.16)$$

➤ **A la sortie de l'espace annulaire $Z^* = 277.77$**

Dans le domaine solide : $0.777 \leq r^* \leq 0.833$ ou $1.333 \leq r^* \leq 1.388$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

➤ $V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \dots\dots\dots(2.17)$

Dans le domaine fluide $0.833 \leq r^* \leq 1.333$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Le conduit est considéré assez long pour permettre une invariance axiale des composantes de vitesse et du flux thermique diffusif axial.

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \dots\dots\dots (2.18)$$

➤ **Sur la paroi interne du cylindre intérieur** $r^* = 0.777$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 277.77$

-Condition de non-glissement : $V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \dots\dots\dots (2.19)$

- Condition adiabatique : $\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \dots\dots\dots (2.20)$

➤ **Sur la paroi externe du cylindre extérieur** $r^* = 1.388$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 277.77$

-Condition de non-glissement : $V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \dots\dots\dots (2.21)$

- Condition de Fourier : $-K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{(h_r + h_c) D_h}{K_0} T^* \dots\dots\dots (2.22)$

Le flux de chaleur de conduction est égal à la somme des flux de chaleur du rayonnement et des pertes de convection naturelle.

Avec :

h_r : coefficient de transfert radiatif (cylindre extérieur – air ambiant)

$$h_r = \varepsilon \sigma (T^2 + T_\infty^2) (T + T_\infty)$$

L'émissivité de la surface extérieure ε est arbitrairement choisie à 0.9,
 $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ est la constante de Stephane-Boltzman.

- Le coefficient de transfert convectif h_c entre le cylindre extérieur et l'air ambiant est donné par la corrélation de **Churchill et Chu [47]**, porté aussi dans la thèse de **S. Touahri [46]** valable pour tous les nombres de Pr et de Ra dans l'intervalle $10^{-6} < Ra < 10^9$

$$Nu = h_c D_i / K_{air} = \left[0.6 + \left(0.387 Ra^{1/6} / (1 + (0.559 / Pr_{air})^{9/16})^{8/27} \right) \right]^2$$

Avec cette corrélation on peut déterminer un nombre de Nusselt moyen externe sur la distance du cylindre.

- Les nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl sont définis par :

$$Ra = \frac{g\beta[T(R_0, \theta, z) - T_\infty]D_0^3}{\alpha_{\text{air}} \nu_{\text{air}}}, \quad Pr_{\text{air}} = \nu_{\text{air}} / \alpha_{\text{air}}$$

- Les nombres de Prandtl $Pr_0=8.082$, de Reynolds $Re_0=606.85$ et les différents nombres de Grashof étudiés sont calculés avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température d'entrée ($T_0 = 15^\circ\text{C}$).

2.6 Le nombre de Nusselt

Pour définir le nombre de Nusselt local à l'interface solide-fluide du cylindre externe, il faut définir le coefficient local de transfert de chaleur par convection à la paroi interne du cylindre extérieur $h(\theta, z)$. A cette paroi, on a l'égalité du flux de chaleur imposé par conduction et le flux de chaleur convecté par le fluide :

$$Nu(\theta, z) = \frac{h(\theta, z)D_h}{K_0}$$

$$q_w = h(\theta, z)[T(1.33, \theta, z) - T_m(z)]$$

De cette équation, on déduit $h(\theta, z)$

$$h(\theta, z) = \frac{q_w}{[T(1.33, \theta, z) - T_m(z)]} = \frac{-K_0 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1.33}}{[T(1.33, \theta, z) - T_m(z)]}$$

$$\Rightarrow Nu(\theta, z) = \frac{-K_0 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1.33}}{[T(1.33, \theta, z) - T_m(z)]} \times \frac{D_h}{K_0}$$

La forme adimensionnelle de nombre de Nusselt local est défini par :

$$Nu(\theta, z^*) = \frac{h(\theta, z^*)D_h}{K_0} = \left[\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*) \Big|_{r^*=1.33}}{T^*(1.33, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)} \right]$$

La température moyenne adimensionnelle $T_m^*(z^*)$ dans une section droite est donnée par la relation suivante :

$$T_m^*(z^*) = \frac{\int_{0.83}^{1.33} \int_0^{2\pi} V^*(r^*, \theta, z^*) T^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}{\int_{0.83}^{1.33} \int_0^{2\pi} V^*(r^*, \theta, z^*) r^* dr^* d\theta}$$

2.6.1 Le nombre de Nusselt axial et moyen

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre externe et on divise le résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial :

$$\text{Nu}(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Nu}(\theta, z^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(K^* \partial T^* / \partial r^*)|_{r^*=1.33}}{T^*(1.33, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)} \right] d\theta.$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide-fluide, si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre extérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit :

$$\text{Nu}_m = \frac{1}{277.77} \int_0^{277.77} \text{Nu}(z^*) dz^*.$$

Chapitre 03

Résolution Numérique

3.1 Introduction

Les résultats obtenus par les méthodes expérimentales sont le fruit d'une observation prolongée, onéreuse et la plus précise possible. Le chemin numérique, en revanche, peut aboutir à des résultats tout aussi satisfaisants à moindre coût (temps et moyens).

Par la simulation numérique, la prédiction des phénomènes physiques survenant dans le système étudié pour des conditions prédéterminées, permet entre autres, de diriger les essais expérimentaux et d'en améliorer les résultats. Il existe plusieurs méthodes de simulation numérique telles que la méthode des éléments finis, des différences finies et des volumes finis...

Dans notre étude, nous considérons l'écoulement global du fluide et son évolution dans le temps en résolvant les équations de Navier-Stokes de continuité et de l'énergie par la méthode des volumes finis.

Dans ce chapitre nous présentons la méthodologie de résolution des systèmes d'équations régissant l'écoulement dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques.

On exposera la méthode numérique utilisée, la discrétisation du domaine de calcul et des équations modélisant. On introduit ensuite, les différents algorithmes utilisés pour résoudre les systèmes d'équations discrétisées obtenues.

3.2 Choix de la méthode numérique de résolution

L'écoulement de couette cylindrique soumis à un gradient radiale de température est mathématiquement modélisé par le système d'équations différentielles aux dérivées partielles, du second ordre, non linéaires et couplées (2.3) - (2.7) Avec les conditions spatio-temporelles appropriées.

La caractéristique transitoire, la tridimensionnalité, le fort couplage à travers les termes de gravité et d'advection des équations différentielles ainsi que les propriétés physiques de fluide utilisé, imposent une solution exclusivement numérique.

Les équations différentielles expriment un principe de conservation d'une variable, dite variable dépendante. L'utilisation d'une méthode numérique a pour objectif la détermination des variables dépendantes dans le domaine à étudier

Une des classes des méthodes numériques, est celle dite méthode de discrétisation, cette dernière repose sur le principe du remplacement des informations continues obtenues par la solution exacte des équations différentielles (qu'on ne peut obtenir analytiquement), par des valeurs discrètes. On obtiendra donc les valeurs de la variable dépendante, localisées dans les points discrets appelés nœuds. Ces nœuds résultent du découpage du domaine de calcul, donc le principe de discrétisation est appliqué à la fois aux équations et au domaine à étudier.

Parmi les nombreuses méthodes numériques qui existent nous allons choisir la méthode des volumes finis (V.F), ce choix est motivé par la géométrie du problème qui n'est pas complexe, et par les capacités de calculs, ces deux critères sont généralement les critères qui imposent le choix d'une méthode numérique. La méthode des V.F a été développée pour résoudre les problèmes de conduction de chaleur et d'écoulement des fluides **Patankar [48]**

On peut justifier ce choix par certains avantages que cette méthode peut offrir :

- L'extension du principe de conservation de la grandeur Φ écrite sous une forme discrétisée pour un volume fini typique est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique (La continuité de flux à l'interface).
- La facilité de mise en œuvre, son côté pratique et sa maniabilité lors de la résolution de cette classe de problème convectifs –diffusifs.

Suhas. V. Patankar [48] a élaboré la méthode des V.F. son principe consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires en un système d'équations algébriques linéaires ; afin de les solutionner on distingue trois phases :

La 1^{ère} phase concerne la génération du maillage telle qu'on peut répartir le domaine d'étude en un nombre fini de volumes. Qui permet de transformer le domaine physique continu en un domaine de calcul discret.

La seconde phase concerne la discrétisation des équations de conservation qui consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles sur un volume de contrôle fini. Cette discrétisation présente certains avantages du fait qu'elle garantit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans chaque volume de contrôle.

Enfin la troisième phase consiste à solutionner (dans le temps) le système d'équations algébriques linéaires sur l'ensemble du domaine de calcul.

3.2.1 Maillage

Le choix de la forme du volume de contrôle est conditionné par la géométrie du domaine, c'est pourquoi, nous avons opté pour un maillage en coordonnées cylindriques, pour un espace annulaire sont découpés selon les directions radiale, angulaire et axiale r^* , θ et z^* respectivement en un ensemble des volumes finis ou «volumes de contrôle» dont les dimensions pour un volume typique sont Δr^* , $r^* \Delta \theta$ et Δz^*

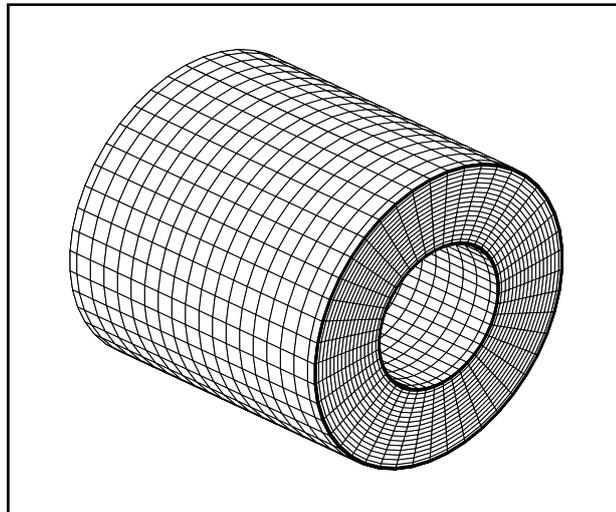


Figure3.1 : le domaine de calcul discrétisé.

Le maillage obtenu par la discrétisation du domaine de calcul dans les trois directions se compose d'un nombre fini de volumes. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces, dans le nœud de ce volume de contrôle typique associé au nœud \mathbf{P} seront stockées les valeurs des quantités physiques scalaire telles que la pression, la température, la masse volumique et la concentration, tandis que les trois composantes des vitesses sont stockées au centres des six faces latérales, les faces Nord (\mathbf{n}) et Sud (\mathbf{s}) dans la direction radiale (r). Est (\mathbf{e})

et Ouest (**w**) dans la direction azimutale (θ) et Frontale (**f**) et Dorsale (**b**) dans la direction axiale (z), qui correspondent aux nœuds des volumes décalés .

Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes ; dans la direction radiale (r) deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction azimutale (θ) deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et enfin dans la direction axiale (z) les deux volumes adjacents aux face Frontale et Dorsale contenant en leurs centres les nœuds **F** et **B**.

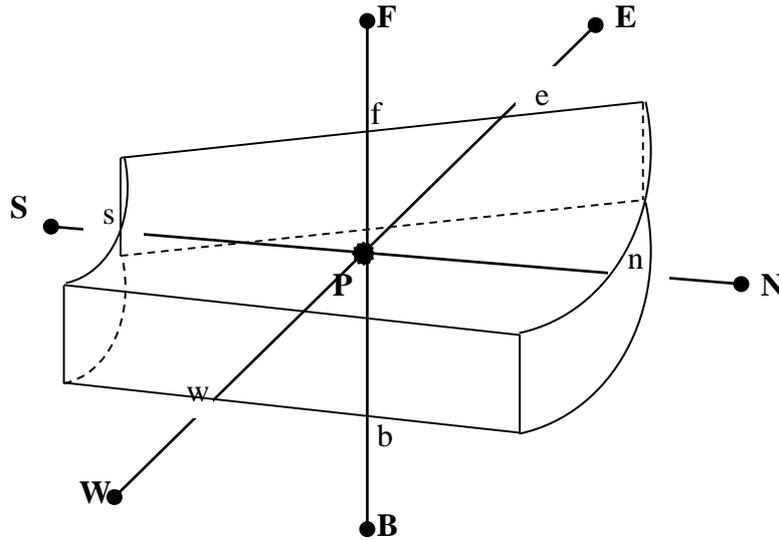


Figure 3.2 : Volume de contrôle typique

Les angles et les distance entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **F** et **B** sont $d\theta_e, d\theta_w, dr_n, dr_s, dz_f$ et dz_b respectivement ; tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement : $\Delta r_N, \Delta r_S, \Delta \theta_E, \Delta \theta_W, \Delta z_F$ et Δz_B .

Des projections du volume typique suivant les trois plans : $(r^*, \theta), (r^*, z^*), (\theta, z^*)$ sont représentées **dans les figures (3.3) (3.4) (3.5)**

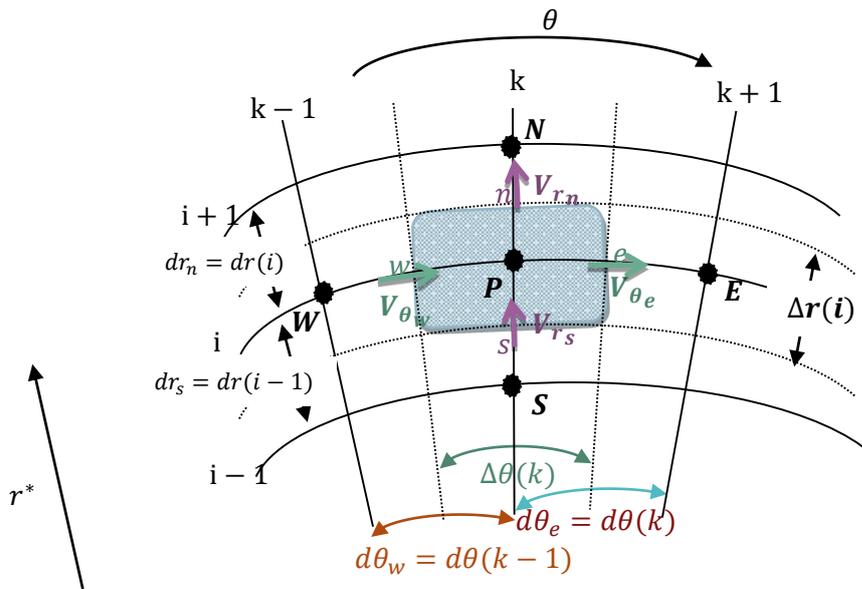


Figure 3.3 : représentation suivant la section $(r - \theta)$ de volume de contrôle typique , nomenclature de la distance radiale et azimutale.

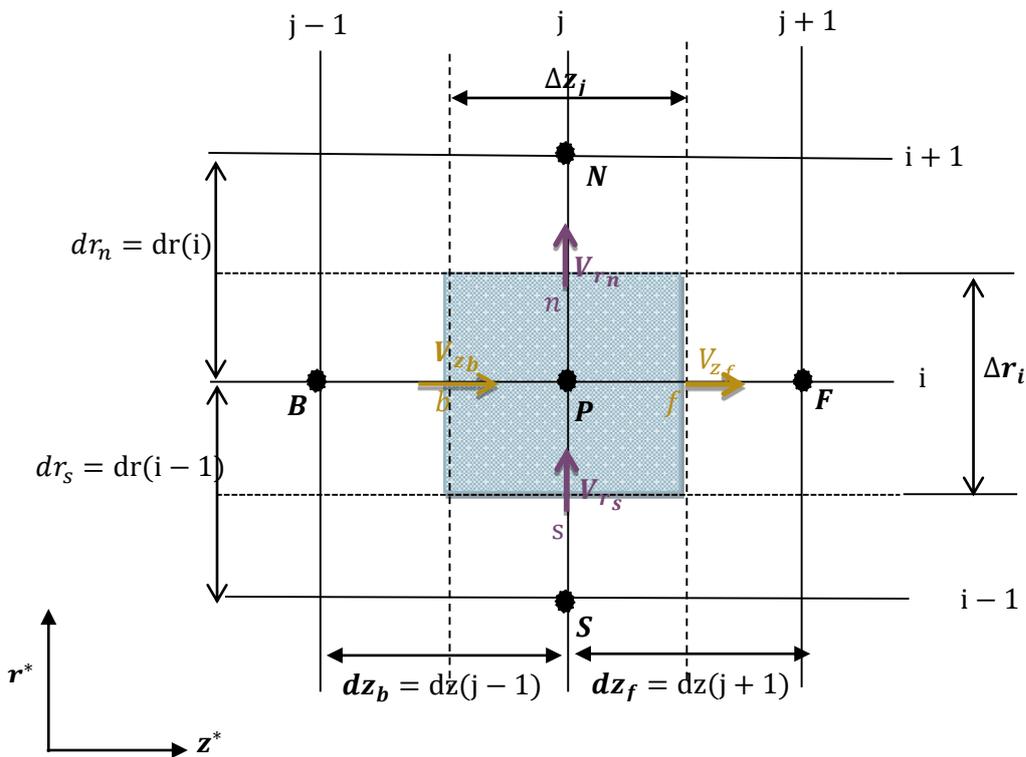


Figure 3.4 : représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle typique , nomenclature de la distance radiale et axiale.

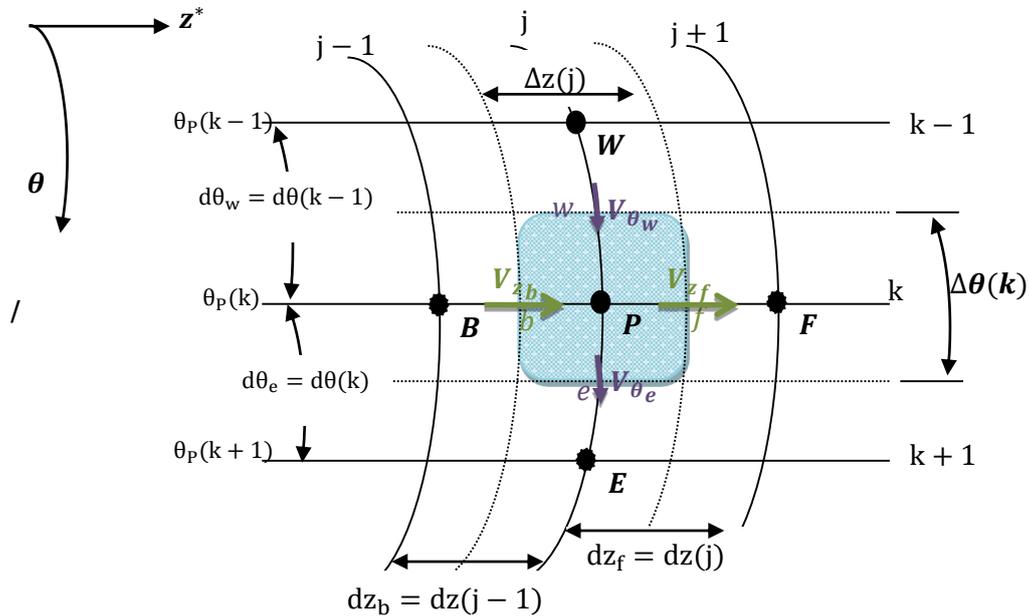


Figure 3.5 : Représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle typique , nomenclature de la distance azimuthale et axiale.

L'utilisation de la méthode des volumes finis donne comme résultats la valeur nodale de la variable dépendante c.-à-d. la valeur de la variable dépendante dans chaque nœud du volume de contrôle. Notre résolution numérique de l'équation de la continuité et de la conservation du moment et d'énergie donne lieu à la détermination simultanée de la pression, du champ de vitesse et de la température. Donc, on aura à rechercher trois variables la pression, les composantes de vitesses et de température. L'utilisation d'un même maillage, en l'occurrence le maillage typique pour l'obtention de ces 3 variables donne lieu à des résultats erronés et physiquement inacceptables **S. V. Ptankaere [48]**.

Pour contourner cette difficulté, on utilise un maillage pour le stockage de la pression et de la température et un autre maillage pour le stockage des composantes du champ de vitesse (la notion de stockage exprime la localisation des quantités physique). Le maillage qui sera utilisé pour le calcul des composantes du champ de vitesse et dit maillage **décalé**.

Le décalage du volume de contrôle permet d'éviter l'obtention d'une distribution irréaliste des paramètres physique calculés dans le maillage initial, offre une grande stabilité numérique, et permet une meilleur estimation du flux convectif, ainsi une bonne estimation de la force de pression dans les équations de quantité de mouvement **[48]**.

La discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement (V_r) sera effectuée par le décalage radial (r), un décalage dans la direction azimutale (θ) pour la discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement (V_θ). Enfin on décalera le maillage typique dans la direction axiale (z) pour la discrétisation de la composante axiale de l'équation de quantité de mouvement (V_z).

Différentes projections sont illustrées dans les figures 3.7 - 3.12 donnant de meilleures représentations spatiales des décalages dans les trois directions.

Dans notre cas, on a découpé le domaine physique en **26 nœuds** dans la direction radiale, **44 nœuds** dans la direction azimutale(θ) et **162 nœuds** dans la direction axiale (z). Donc le maillage utilisé est un maillage de **26*44*162** ce qui correspond à un nombre totale de **185 328 nœuds**.

3.3 Discrétisation des équations

La discrétisation des équations différentielles modélisantes, qui régissent le phénomène implique l'évaluation des différentes dérivées spatiales et temporelles de la variable dépendante. L'évaluation de ces dérivées implique de connaître comment la variable dépendante varie dans le temps et dans l'espace, qui consiste à les transformer en équations algébriques plus adaptées à la résolution numérique. Pour ce faire, on adopte différentes approximations dites schémas de variations.

3.3.1 Discrétisation temporelle

Cette discrétisation concerne la variation temporelle de tous les termes contenus dans les équations de Navier Stokes, l'équation de continuité et de l'énergie.

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques ; pour cela on a fait le choix d'une discrétisation spatio-temporelle du second ordre.

3.3.1.1 Traitement des dérivées temporelles

Cette discrétisation se fait selon le schéma obtenu de la manière suivante :

Considérons le développement limite en série Taylor d'ordre 2 de la variable dépendante ϕ au temps t :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^3 \dots \dots \dots (3.1)$$

Maintenant, considérons le développement de Taylor toujours d'ordre 2, au temps $t - \Delta t$:

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{2\Delta t}{1!} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^3 \dots\dots\dots (3.2)$$

On multiplie l'équation (3.1) par 4, puis on retranche l'équation (3.2) du résultat obtenu. On obtient l'équation suivante :

$$4 \phi^t - \phi^{t-\Delta t} = 3\phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^3 \dots\dots\dots (3.3)$$

Donc, la valeur de la dérivée temporelle au temps $t + \Delta t$ est donnée par l'équation :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^t + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^3 \dots\dots\dots (3.4)$$

Cette discrétisation est celle d'Euler retardée, l'erreur de troncature est d'ordre 2.

3.3.1.2 Traitement des termes convectifs et non linéaires

Les termes convectifs et non linéaires seront discrétisés temporellement au second ordre, dans l'ensemble des équations suivent le schéma explicite d'Adams Bashforth. Le schéma de discrétisation est obtenu comme suit :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^3 \dots\dots\dots (3.5)$$

Considérons maintenant le développement de Taylor d'ordre 1 de la variable dépendante au temps $t - \Delta t$:

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^2 \dots\dots\dots (3.6)$$

On multiplie l'équation (3.5) par (-2) puis on additionne l'équation résultante et l'équation (3.6). On obtient l'équation qui nous donne l'expression de la variable dépendante au temps $t + \Delta t$:

$$\phi^{t+\Delta t} = 2 \phi^t - \phi^{t-\Delta t} + O(\Delta t)^2 \dots\dots\dots (3.7)$$

3.3.1.3 Traitement des termes diffusifs et de pression

La discrétisation selon un schéma totalement implicite au temps $(t + \Delta t)$ sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression.

3.3.2 Traitement spatiale au second ordre

Pour assurer une bonne représentation spatiale de la variable dépendante, représentation qui doit être physiquement acceptable. En effet, lors de l'évaluation des intégrales des équations différentielles dans les volumes finis, on aura besoin de connaître comment déterminer la variable dépendante aux interfaces des volumes finis. Pour cela on adopte le schéma de différences centrées qui décrira la variation spatiale de la dépendante comme suit :

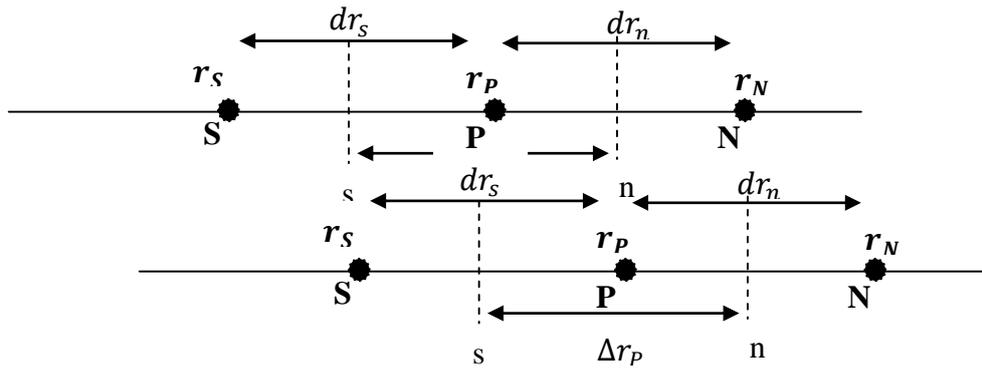


Figure 3.6 : Maillage unidimensionnel pour le calcul de la variable dépendante à l’interface.

Considérons le cas unidimensionnel de la figure 3.6, on cherche à déterminer la valeur de la variable dépendante à l’interface **n**. le développement de Taylor au 1^{er}e ordre de ϕ (la variable dépendante de référence) au Nœud **N** est donnée par la formule suivante :

$$\phi_N = \phi_n + \frac{\Delta r_P}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_n + O(\Delta r)^2 \dots \dots \dots (3.8)$$

Le développement de Taylor au premier ordre de ϕ au nœud **P** est donné par l’équation suivante :

$$\phi_P = \phi_n - \frac{\Delta r_P}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \Big|_n + O(\Delta r)^2 \dots \dots \dots (3.9)$$

On fait l’addition des équations (3.8) et (3.9), et on obtient après réarrangement la formule suivante pour ϕ_n :

$$\phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2} + O(\Delta r)^2 \dots \dots \dots (3.10)$$

Cette formule qui servira à évaluer la valeur de la variable dépendante aux interfaces.

En ce qui concerne l’évaluation de la dérivée spatiale à l’interface ; on considère les équations (3.8) et (3.9) on multiplie l’équation (3.9) par le signe (-), puis on réarrange l’équation résultante et on obtient la formule suivante pour $\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta r_n} + O(\Delta r)^2 \dots \dots \dots (3.11)$$

C’est donc la formule donnée par l’équation (3.11) qui sera utilisée pour l’évaluation des dérivées spatiales (suivant une direction donnée) de la variable dépendante considérée aux interfaces des volumes de contrôle.

3.4 Discrétisation des équations modélisantes

- Les termes au temps $t - \Delta t$ porteront l'exposant $t - \Delta t$.
- Les termes au temps t porteront l'exposant t .
- Les termes au temps $t + \Delta t$ porteront l'exposant $t + \Delta t$.

3.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité sera discrétisée dans un volume de contrôle typique comme suit :

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right] \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 0$$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (r_n^* V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta\theta_P \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta r_P^* \Delta\theta_P$$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (V_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*}) r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P$$

On peut mettre l'équation de discrétisation finale sous la forme :

$$(r_n^* V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta\theta_P \Delta z_P^* + (V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*}) \Delta r_P^* \Delta z_P^* + (V_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*}) r_P^* \Delta r_P^* \Delta\theta_P = 0$$

(3.12)

Dans cette équation (3.12) tous les termes sont évalués à l'instant $t+\Delta t$.

3.4.2 Discrétisation de la composante radiale de l'équation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement radial (2.3) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_r^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_r^*) - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} = \\ - \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta T^* + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \right] \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}, \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right]$$

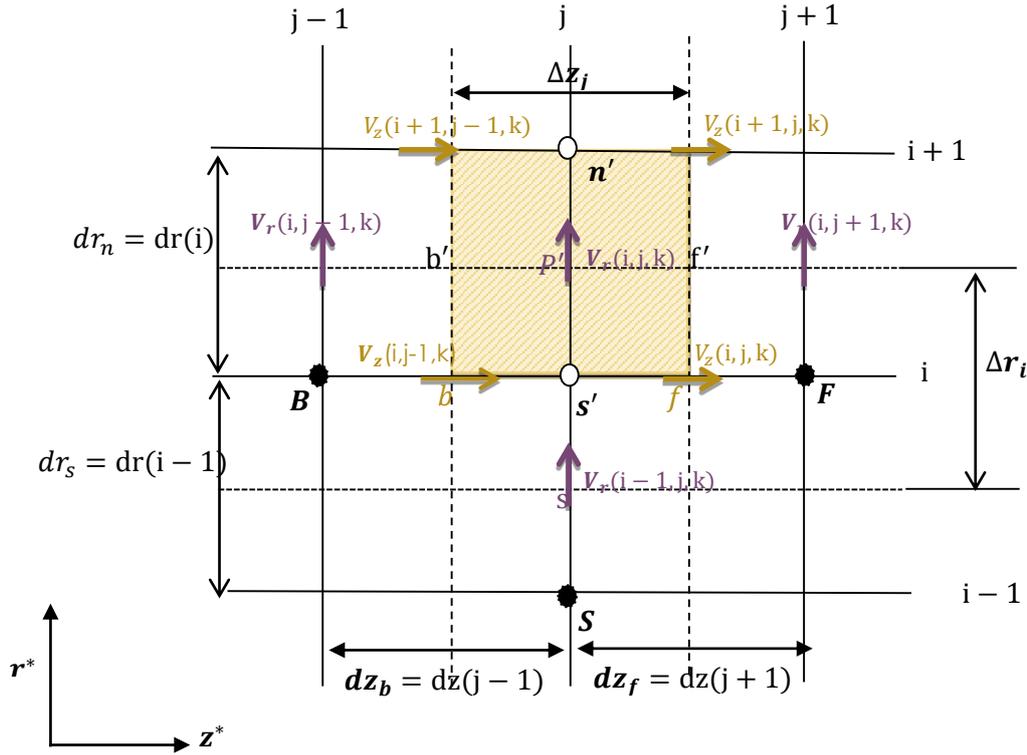


Figure 3.8 : Représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction radiale .

- Terme transitoire :

$$\iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{rp}^{*t^* + \Delta t^*} - 4V_{rp}^{*t^*} + V_{rp}^{*t^* - \Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* d\theta_p dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\iiint_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n f} \left[2 \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_r^*) \Big|^{t^* - \Delta t^*} \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2(r_n^* V_{rn}^{*t^*} V_{rn}^{*t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*} V_{rs}^{*t^*}) - (r_n^* V_{rn}^{*t^* - \Delta t^*} V_{rn}^{*t^* - \Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^* - \Delta t^*} V_{rs}^{*t^* - \Delta t^*}) \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

$$\iiint_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^* V_r^*) \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n f} \left[2 \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^* V_r^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^* V_r^*) \Big|^{t^* - \Delta t^*} \right] dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2(v_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*} - v_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*}) - (v_{\theta e}^{*t^* - \Delta t^*} V_{re}^{*t^* - \Delta t^*} - v_{\theta w}^{*t^* - \Delta t^*} V_{rw}^{*t^* - \Delta t^*}) \right] dr_n^* \Delta z_p^*$$

$$\iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*} (v_z^* V_r^*) \Big|^{t^* + \Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n f} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (v_z^* V_r^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (v_z^* V_r^*) \Big|^{t^* - \Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2(v_{zf}^{*t^*} V_{rf}^{*t^*} - v_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*}) - (v_{zf}^{*t^* - \Delta t^*} V_{rf}^{*t^* - \Delta t^*} - v_{zb}^{*t^* - \Delta t^*} V_{rb}^{*t^* - \Delta t^*}) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p$$

$$\int_{w s b}^{e n t} \int \int \frac{V_{\theta}^{*2}}{r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \left(2[V_{\theta p}^{*t^*}]^2 - [V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}]^2 \right) dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2 \left[\frac{V_{\theta n e}^{*t^*} + V_{\theta n w}^{*t^*} + V_{\theta s e}^{*t^*} + V_{\theta s w}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[\frac{V_{\theta n e}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta n w}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta s e}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta s w}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Terme de pression :

$$\int_{w s b}^{e n f} \int \int -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

- **Termes diffusifs :**

* **Le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial t^*} (r^* \tau_{rr}^*)$

$$\int_{w s b}^{e n f} \int \int \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rr}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_{w s b}^{e n f} \int \int \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* \mu^{*t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int_{w s b}^{e n f} \int \int \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left(4r^* \mu^{*t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|_s^{t^*+\Delta t^*} \right)^n \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \left(2r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \Big|_s^{t^*+\Delta t^*} \right)^n \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}) \left(r_n^* \frac{V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^* - 2(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}) \left(r_s^* \frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Avec

$$\mu_n^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_s^* = \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$r_n^* = r_p^*(i+1) \quad , \quad r_s^* = r_p^*(i)$$

$$dr_n^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad dr_s^* = \Delta r_p^* = \Delta r^*(i)$$

$$V_{rN}^* = V_r^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k) \quad \text{et} \quad V_{rS}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

* **le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}^*)$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{r\theta}^* \right)^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{r\theta}^* \right)^{i^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
& 2 \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*i^*} \left[\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* - \\
& \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*i^*-\Delta t^*} \left[\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* = \\
& \left[2\mu^{*i^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right]_w^e dr_n^* \Delta z_p^* - \left[\mu^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right]_w^e dr_n^* \Delta z_p^* = \\
& \left[\left(2\mu^{*i^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*} + \mu^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} \right) \right]_w^e dr_n^* \Delta z_p^* + \left[\left(2\mu^{*i^*} - \mu^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right]_w^e dr_n^* \Delta z_p^* =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(2\mu^{*t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*} \right) \Big|_e - 2\mu^{*t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*} \Big|_w + \right. \\
& \left. \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \Big|_w - \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \Big|_e \right] dr_n^* \Delta z_p^* \\
& + \left[\left(2\mu^{*t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_w^e dr_n^* \Delta z_p^* =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(2 \left(\mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^*} - V_{\theta s e}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta s e}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
& \left[\left(2 \left(\mu_w^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^*} - V_{\theta s e}^{*t^*}}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left(\mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n e}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta s e}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta n w}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta s w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
& \left(2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_n^*} \frac{V_{r E}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{r P}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) dr_n^* \Delta z_p^* - \left(2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_n^*} \frac{V_{r P}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{r W}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) dr_n^* \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NE}}{\mu_{NE}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}}, \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*} + \frac{\Delta\theta_{NW}}{\mu_{NW}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k), \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k), \quad \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1), \quad \mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$\mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1), \quad \mu_{NW}^* = \mu^*(i+1, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k), \quad d\theta_w = d\theta(k-1)$$

$$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k), \quad \Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1), \quad \Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$r_n^* = r_p^*(i+1), \quad dr_n^* = \Delta r_n^* = \Delta r^*(i+1)$$

$$V_{\theta_{ne}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k), \quad V_{\theta_{nw}}^* = V_\theta^*(i+1, j, k-1), \quad V_{\theta_{se}}^* = V_\theta^*(i, j, k), \quad V_{\theta_{sw}}^* = V_\theta^*(i, j, k-1)$$

$$V_{rE}^* = V_r^*(i, j, k+1), \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k), \quad V_{rW}^* = V_r^*(i, j, k-1)$$

* le terme $\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*}$

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_s^n \int_b^f \left. \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} \right|^{i+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_s^n \int_b^f \tau_{\theta\theta}^* \Big|^{i+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int_w^e \int_s^n \int_b^f \left[2\mu^{*i} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{i^*} + \left(\frac{V_r^*}{r^*} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* - \\ & \int_w^e \int_s^n \int_b^f \left[2\mu^{*i-\Delta t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{V_r^*}{r^*} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[2\mu^{*i} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{i^*} - \mu^{*i-\Delta t^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} \right)^{i^*-\Delta t^*} \right]_P + \left[2(2\mu^{*i} - \mu^{*i-\Delta t^*}) \left(\frac{V_r^*}{r^*} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right]_P \right\} dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* = \\ & 2 \left[\left(2\mu_p^{*i} \right) \frac{1}{2r_n^*} \left(\frac{V_{\theta_{ne}}^{*i} - V_{\theta_{nw}}^{*i}}{\Delta\theta_p} + \frac{V_{\theta_{se}}^{*i} - V_{\theta_{sw}}^{*i}}{\Delta\theta_p} \right) - \right. \\ & \left. \left(\mu_p^{*i-\Delta t^*} \right) \frac{1}{2r_n^*} \left(\frac{V_{\theta_{ne}}^{*i-\Delta t^*} - V_{\theta_{nw}}^{*i-\Delta t^*}}{\Delta\theta_p} + \frac{V_{\theta_{se}}^{*i-\Delta t^*} - V_{\theta_{sw}}^{*i-\Delta t^*}}{\Delta\theta_p} \right) \right] dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \\ & 2(2\mu_p^{*i} - \mu_p^{*i-\Delta t^*}) \left[\frac{V_{rP}^{*i+\Delta t^*}}{r_n^*} \right] dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* = \end{aligned}$$

$$2 \left[\frac{\left(\mu_p^{*t} \right)}{r_n^*} \left(V_{\theta_{ne}}^{*t} - V_{\theta_{nw}}^{*t} + V_{\theta_{se}}^{*t} - V_{\theta_{sw}}^{*t} \right) - \frac{\left(\mu_p^{*t-\Delta t^*} \right)}{2r_n^*} \left(V_{\theta_{ne}}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta_{nw}}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta_{se}}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta_{sw}}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$2 \left(2\mu_p^{*t} - \mu_p^{*t-\Delta t^*} \right) \left[\frac{V_{rP}^{*t+\Delta t^*}}{r_n^*} \right] dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_p^* = \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}}, \quad \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k), \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\Delta \theta_p = d\theta_e = d\theta(k), \quad r_n^* = r_c^*(i)$$

$$V_{\theta_{ne}}^* = V_{\theta}^*(i+1, j, k), \quad V_{\theta_{nw}}^* = V_{\theta}^*(i+1, j, k-1), \quad V_{\theta_{se}}^* = V_{\theta}^*(i, j, k), \quad V_{\theta_{sw}}^* = V_{\theta}^*(i, j, k-1)$$

$$V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k)$$

* le terme $\frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*)$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{rz}^*) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^{*t} \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} - \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) \right) \Big|^{t+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \left[\mu^{*t} \left(\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^t + \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right]_b^f r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p - \left[\mu^{*t-\Delta t^*} \left(\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t+\Delta t^*} \right) \right]_b^f r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p =$$

$$\left[2\mu^{*t} \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^t - \mu^{*t-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t-\Delta t^*} \right]_b^f r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p + \left[\left(2\mu^{*t} - \mu^{*t-\Delta t^*} \right) \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right) \right]_b^f r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p =$$

$$\left[\left(2 \left(\mu_t^{*t} \frac{V_{znf}^{*t} - V_{zsf}^{*t}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t} \frac{V_{znb}^{*t} - V_{zsb}^{*t}}{dr_n^*} \right) + \left(\mu_b^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znb}^{*t-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znf}^{*t-\Delta t^*} - V_{zsf}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p +$$

$$\left(2\mu_f^{*t} - \mu_f^{*t-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{rP}^{*t+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t-\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p - \left(2\mu_b^{*t} - \mu_b^{*t-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{rP}^{*t+\Delta t^*} - V_{rP}^{*t-\Delta t^*}}{dz_b^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p$$

Avec :

$$\mu_f^* = \frac{dz_f^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NF}^*}{\mu_{NF}^*}} + \frac{dz_f^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_F^*}{\mu_F^*}} \quad , \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*} + \frac{\Delta z_{NB}^*}{\mu_{NB}^*}} + \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_n^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_s^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{NF}^* = \mu^*(i+1, j+1, k) \quad , \quad \mu_F^* = \mu^*(i, j+1, k)$$

$$\mu_{NB}^* = \mu^*(i+1, j-1, k) \quad , \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k)$$

$$dr_n^* = dr^*(i) \quad , \quad dz_f^* = dz^*(j) \quad , \quad r_n^* = r_c^*(i)$$

$$V_{z_{nf}}^* = V(i+1, j, k) \quad , \quad V_{z_{sf}}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{z_{nb}}^* = V_z^*(i+1, j-1, k) \quad , \quad V_{z_{sb}}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

$$V_{rF}^* = V_r^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k) \quad , \quad V_{rB}^* = V_r^*(i, j-1, k)$$

*** le terme** $\left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^*$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$2 \int_w^e \int_s^n \int_b^f \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int_w^e \int_s^n \int_b^f \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \right) T^* \Big|_{t^*}^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \left\{ \left[2(T^*) \Big|_P \Big|_{t^*}^{t^*} - (T^*) \Big|_P \Big|_{t^*}^{t^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

On regroupe tous les termes précédents, pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_P V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_F V_{rF}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + S_r^{*t^*+\Delta t^*} \dots (3.13)$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
A_N = dn &= \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*} \\
A_S = ds &= \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*} \\
A_E = de &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e} \\
A_W = dw &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w} \\
A_F = dt &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_f^{*t^*} - \mu_f^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^*}{dz_f^*} \\
A_B = db &= \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p^*}{dz_b^*} \dots\dots\dots(3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{\Delta t^*} + \\
\frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_p^{*t^*} - \mu_p^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{r_n^*}
\end{aligned}$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 - 2 \left(V_{rn}^{*t^*} \right)^2 \right] r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[2 \left(V_{rs}^{*t^*} \right)^2 - \left(V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} \right)^2 \right] r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{re}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left(V_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \left[2 \left(V_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*} \right) - \left(V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rw}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rf}^{*t^*-\Delta t^*} \right) - 2 \left(V_{zf}^{*t^*} V_{rf}^{*t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p + \left[2 \left(V_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*} \right) - \left(V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rb}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \\
\left. \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_w^{*t} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t} - V_{\theta sw}^{*t}}{2} - \mu_e^{*t} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t} - V_{\theta se}^{*t}}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_e^{*t-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \frac{\left(\mu_p^{*t} \right)}{r_n^*} \left(V_{\theta ne}^{*t} - V_{\theta nw}^{*t} + V_{\theta se}^{*t} - V_{\theta sw}^{*t} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\left(\mu_p^{*t-\Delta t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{\theta ne}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta nw}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_f^{*t} \frac{V_{znf}^{*t} - V_{zsf}^{*t}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t} \frac{V_{znb}^{*t} - V_{zsb}^{*t}}{dr_n^*} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_b^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znb}^{*t-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_f^{*t-\Delta t^*} \frac{V_{znf}^{*t-\Delta t^*} - V_{zsf}^{*t-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* + \\
& 2 \left[\frac{V_{\theta ne}^{*t} + V_{\theta nw}^{*t} + V_{\theta se}^{*t} + V_{\theta sw}^{*t}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* - \\
& \left[\frac{V_{\theta ne}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta nw}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t-\Delta t^*} + V_{\theta sw}^{*t-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* + \\
& \frac{\text{Gr}_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta \left(T_N^{*t} + T_P^{*t} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* - \frac{\text{Gr}_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{*t-\Delta t^*} + T_P^{*t-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^* \\
& + \left(P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right) r_n^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi :

$$\begin{aligned}
S_r^{t^*+\Delta t^*} &= \frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
& \left[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*} \right] + \left[fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*} \right] + \left[fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ff^{t^*-\Delta t^*} - ff^{t^*} \right] + \left[fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*} \right] + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_w^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{2} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{1}{r_n^*} \frac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* - \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \frac{\left(\mu_p^{*t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\left(\mu_p^{*t^*-\Delta t^*} \right)}{r_n^*} \left(V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \right] dr_n^* \Delta z_p^* + \\
& \frac{1}{\text{Re}_0} \left[2 \left(\mu_t^{*t^*} \frac{V_{znf}^{*t^*} - V_{zsf}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t^*} \frac{V_{znb}^{*t^*} - V_{zsb}^{*t^*}}{dr_n^*} \right) + \right. \\
& \left. \left(\mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{znb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{znf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zsf}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p + \\
& 2 \left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \\
& \left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} \right]^2 dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \\
& \frac{Gr_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta \left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{\text{Re}_0^2} \cos \theta \left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_n^* dr_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \\
& + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = \mathbf{b}_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P V_{rP}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t+\Delta t^*} + A_F V_{rF}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

.....(3.15)

Comme $V_{rP}^{*t+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_r^* à l'interface n du volume typique ($V_{r_n}^{*t+\Delta t^*}$), on peut écrire

l'équation donnant la vitesse $V_{rN}^{*t+\Delta t^*}$:

$$A_P V_{rN}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t+\Delta t^*} + A_F V_{rF}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \dots\dots\dots(3.16)$$

Les coefficients dans la relation (3.14) sont tous positifs, car des règles de la méthode des volumes finis (exigeant le même signe pour tous les coefficients de l'équation de discrétisation) sont vérifiées, et il n'y a pas de risque d'obtenir des résultats physiquement inacceptables.

D'après la relation (3.15) on constate que le coefficient A_P est positif, et supérieur à la somme des autres coefficients, cela est la satisfaction d'une deuxième règle de la méthode des volumes finis exigeant la dominance diagonale de la matrice des coefficients de l'équation de discrétisation qui assure une grande stabilité numérique.

3.4.3 Discrétisation de la composante azimutale de l'équation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale (2.4) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit :

$$\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_\theta^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_\theta^*) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0^*} \left[\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{\theta z}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^* \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \right] \qquad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^* \left[\left(r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \right]$$

Les figures 3.9 et 3.10 illustrent le maillage décalé dans la direction azimutale, dans les plans (r- θ) et (θ -z) respectivement.

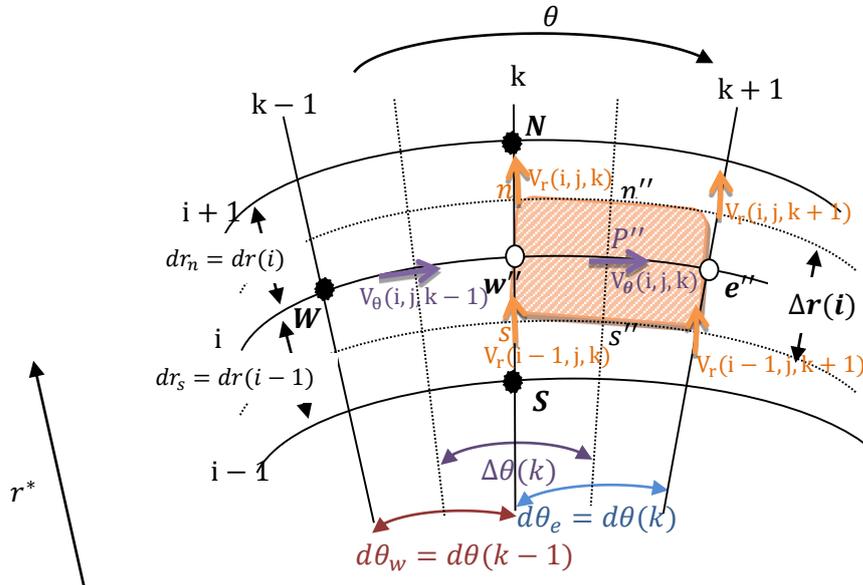


Figure 3.9 : Représentation suivant la section ($r - \theta$) de volume de contrôle décalé dans la direction angulaire .

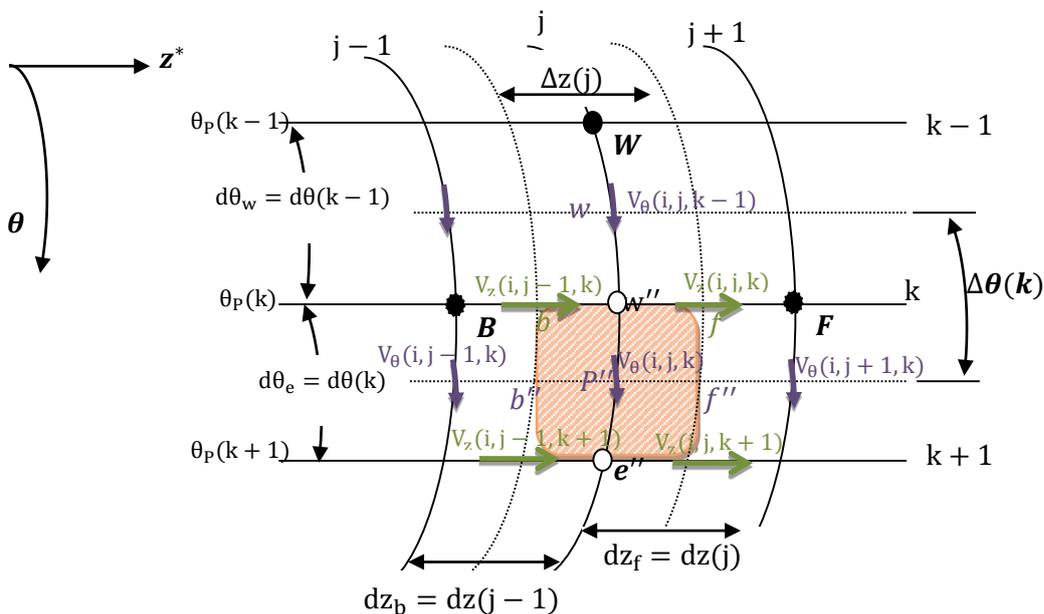


Figure 3.10 : Représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction angulaire  .

- Terme transitoire :

$$\iiint_{w s b} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial t^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{\theta p}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{\theta p}^{*t^*} + V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = \\ &= \left[2(r_n^* V_{rn}^* V_{\theta n}^* - r_s^* V_{rs}^* V_{\theta s}^*) - (r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta n}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta s}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] d\theta_e \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b} \left[\frac{2}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = \\ &= \left[2(V_{\theta e}^{*t^*} V_{\theta e}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{\theta w}^{*t^*}) - (V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b} \left[2 \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_{\theta}^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* = \\ &= \left[2(V_{zf}^{*t^*} V_{\theta f}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*} V_{\theta b}^{*t^*}) - (V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta f}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta b}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \end{aligned}$$

$$\iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$\iiint_{w s b} \frac{V_r^* V_{\theta}^*}{r^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b} \left[\frac{2 V_r^* V_{\theta}^*}{r^*} \Big|^{t^*} - \frac{V_r^* V_{\theta}^*}{r^*} \Big|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left(2V_{rp}^{*t^*} V_{\theta p}^{*t^*} - V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* = \left(\frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rnw}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{2} V_{\theta p}^{*t^*} - \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

-Termes diffusifs :

*Le terme $\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*)$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \tau_{\theta r}^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* =$$

$$\int_w^e \int_s^n \int_b^f \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \mu^* \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} \right) dr^* d\theta dz^* =$$

$$\frac{2}{r_p^*} \left[r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[2r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*} + r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} - \frac{V_{\theta}^*}{r^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} \right) \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*} \left[2r^{*2} \mu^{*t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} - r^{*2} \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\left[\begin{aligned} & 2\mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*} - V_{rnw}^{*t^*}}{d\theta_e} - 2\mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*} - V_{rsw}^{*t^*}}{d\theta_e} - \\ & \mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} (V_{\theta N}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} (V_{\theta S}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \\ & \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} + \\ & \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta N}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta S}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{aligned} \right] d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\left(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left[\frac{r_n^{*2}}{r_p^*} \left(\frac{V_{\theta N}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\left(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left[\frac{r_s^{*2}}{r_p^*} \left(\frac{V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta S}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right] d\theta_e \Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_n^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_e^*} + \frac{1}{\mu_{NE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P^*} + \frac{1}{\mu_N^*}} \quad , \quad \mu_s^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_e^*} + \frac{1}{\mu_{SE}^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\mu_P^*} + \frac{1}{\mu_S^*}}$$

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) \quad , \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1) \quad , \quad \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k)$$

$$\mu_{SE}^* = \mu^*(i-1, j, k+1) \quad , \quad \mu_S^* = \mu^*(i-1, j, k)$$

$$\mathbf{r}_n^* = \mathbf{r}_c^*(i) \quad , \quad \mathbf{r}_s^* = \mathbf{r}_c^*(i)$$

$$d\mathbf{r}_s^* = d\mathbf{r}^*(i-1) \quad , \quad d\mathbf{r}_n^* = d\mathbf{r}^*(i)$$

* le terme $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*)$

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}^*) \Big|^{i^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\ & \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\mu^* \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \left[2\mu^* \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*} \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\ & 2 \left[2\mu_e^{*i^*} \left(\left(\frac{V_r^*}{r^*} \right)^{i^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \left[2\mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{V_r^*}{r^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\ & 2\mu_e^{*i^*} \left(\frac{V_{rne}^{*i^*} - V_{rse}^{*i^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* - 2\mu_w^{*i^*} \left(\frac{V_{rnw}^{*i^*} - V_{rsw}^{*i^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \\ & \mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{rne}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{rse}^{*i^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{rnw}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*i^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\ & 2 \left[\left(2\mu_e^{*i^*} - \mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{\theta E}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*i^*+\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \left[\left(2\mu_w^{*i^*} - \mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{\theta P}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{\theta W}^{*i^*+\Delta t^*}}{d\theta_w} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) \quad , \quad \mu_w^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$d\theta_e = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad d\theta_w = \Delta\theta(k) \quad , \quad \mathbf{r}_p^* = \mathbf{r}_p^*(i)$$

$$V_{rne}^* = V_r^*(i, j, k+1), \quad V_r^* = V_{rse}^*(i-1, j, k+1), \quad V_{rnw}^* = V_r^*(i, j, k), \quad V_{rsw}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

$$V_{\theta E}^* = V_{\theta}^*(i, j, k+1), \quad V_{\theta P}^* = V_{\theta}^*(i, j, k), \quad V_{\theta W}^* = V_{\theta}^*(i, j, k-1)$$

* le terme $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*)$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{\theta z}^*) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \left\{ 2 \left[\mu^{*i^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^{i^*} + \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_b^f - \left[\mu^{*i^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_b^f \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\ & \left[2\mu_{i^*}^{*i^*} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zef}^{*i^*} - V_{z wf}^{*i^*}}{d\theta_e} \right) - 2\mu_{i^*}^{*i^*} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zeb}^{*i^*} - V_{zwb}^{*i^*}}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\mu_{i^*}^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zef}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{z wf}^{*i^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) - \mu_{i^*}^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{V_{zeb}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{zwb}^{*i^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e + \\ & \left[\left(2\mu_{i^*}^{*i^*} - \mu_{i^*}^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{\theta F}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*i^*+\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e - \left[\left(2\mu_{i^*}^{*i^*} - \mu_{i^*}^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{\theta P}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{\theta B}^{*i^*+\Delta t^*}}{dz_b^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_f^* = \frac{dz_f^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \frac{\Delta z_F^*}{\mu_{FE}^*}} + \frac{dz_f^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_F^*}{\mu_F^*}}, \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \frac{\Delta z_F^*}{\mu_{BE}^*}} + \frac{dz_b^*}{\frac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \frac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1), \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{FE}^* = \mu^*(i, j+1, k+1), \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k)$$

$$\mu_{BE}^* = \mu^*(i, j-1, k+1), \quad \mu_F^* = \mu^*(i, j+1, k)$$

$$dz_f^* = dz(j), \quad dz_b^* = dz^*(j-1), \quad d\theta_e = d\theta(k)$$

$$V_{zet}^* = V_z^*(i, j, k+1), \quad V_{zeb}^* = V_z^*(i, j-1, k+1), \quad V_{z wf}^* = V_z^*(i, j, k), \quad V_{zwb}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

$$V_{\theta F}^* = V_{\theta}^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{\theta P}^* = V_{\theta}^*(i, j, k) \quad , \quad V_{\theta B}^* = V_{\theta}^*(i, j-1, k)$$

* le terme $\left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^*$

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{w s b}^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & 2 \int \int \int \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{w s b}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \right) T^* \Big|_{w s b}^{i^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ & \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \left\{ \left[2(T^*)_{|P} \Big|_{i^*} - (T^*)_{|P} \Big|_{i^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* = \\ & \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta (T_E^{*i^*} + T_P^{*i^*}) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2} \sin \theta \left(\frac{T_E^{*i^*-\Delta t^*} + T_P^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* \end{aligned}$$

On regroupe tous les termes précédents, pour obtenir une équation de discrétisation finale sous la forme suivante :

$$A_P V_{\theta P}^{*i^*+\Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*i^*+\Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*i^*+\Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*i^*+\Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*i^*+\Delta t^*} + A_F V_{\theta F}^{*i^*+\Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*i^*+\Delta t^*} + S_{\theta}^{*i^*+\Delta t^*} \dots \dots \dots$$

(3.17)

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et la source donnée par les relations suivantes :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_n^{*i^*} - \mu_n^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_s^{*i^*} - \mu_s^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_e^{*i^*} - \mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{2}{Re_0} \left(2\mu_w^{*i^*} - \mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_F = df = \frac{1}{Re_0} \left(2\mu_f^{*i^*} - \mu_f^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_f^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_e}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \dots \dots \dots (3.18)$$

$$S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{\theta p}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\left[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*} \right] + \left[fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*} \right] + \left[fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*} \right] + \left[fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*} \right] +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{array}{l} 2\mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*} - V_{rnw}^{*t^*}}{d\theta_e} - 2\mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*} - V_{rsw}^{*t^*}}{d\theta_e} - \\ \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \end{array} \right] d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{array}{l} \mu_n^{*t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} (V_{\theta N}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \mu_s^{*t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} (V_{\theta S}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}) + \\ \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_n^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta N}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \frac{r_s^*}{r_p^*} \frac{V_{\theta S}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{array} \right] d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{array}{l} 2\mu_e^{*t^*} \left(\frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - 2\mu_w^{*t^*} \left(\frac{V_{rnw}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{r_p^*} \right) - \\ \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*} \right) \end{array} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{array}{l} 2 \left(\mu_t^{*t^*} \frac{V_{zef}^{*t^*} - V_{z wf}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*} \frac{V_{zeb}^{*t^*} - V_{z wb}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) + \\ \left(\mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{zef}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{z wf}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{zeb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{z wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \end{array} \right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e +$$

$$\left(\frac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rnw}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{2} V_{\theta p}^{*t^*} - \frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$- \frac{Gr_0^*}{\text{Re}_0^2} \sin \theta \left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* + \frac{Gr_0^*}{\text{Re}_0^2} \sin \theta \left(\frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$\left(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

La source peut s'écrire :

$$S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = b_\theta^* + \left(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*} \right) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P V_{\theta P}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*t+\Delta t^*} + A_F V_{\theta F}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*t+\Delta t^*} + b_{\theta}^* + (P_P^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \dots (3.19)$$

Comme $V_{\theta p}^{*t+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_{θ}^* à l'interface e du volume typique ($V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*}$), on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*}$:

$$A_P V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*t+\Delta t^*} + A_F V_{\theta F}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*t+\Delta t^*} + b_{\theta}^* + (P_P^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \dots (3.20)$$

On note que les coefficients de l'équation de discrétisation sont tous positifs et la relation (3.17) montre que A_P est supérieur à la somme des autres coefficients, comme dans le cas de l'équation de discrétisation radiale.

3.4.3 Discrétisation de la composante axiale de l'équation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale (2.5) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit :

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\theta}^* V_z^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\tau_{zz}^*) \right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{zr}^* = \tau_{rz}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right], \quad \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^* \left[\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right], \quad \tau_{zz}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}$$

Les figures 3.11 et 3.12 illustrent le maillage décalé axialement dans le plan (r-z) et (θ -z) respectivement.

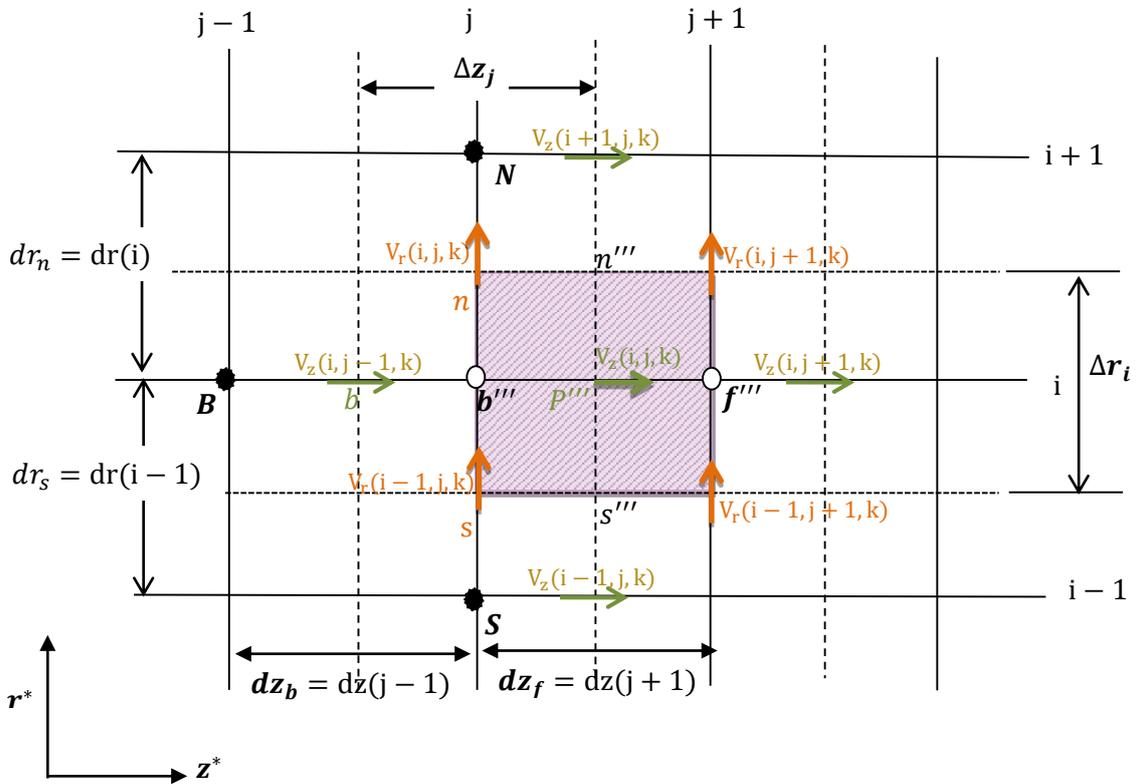


Figure 3.11 : Représentation suivant la section $(r - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction axiale .

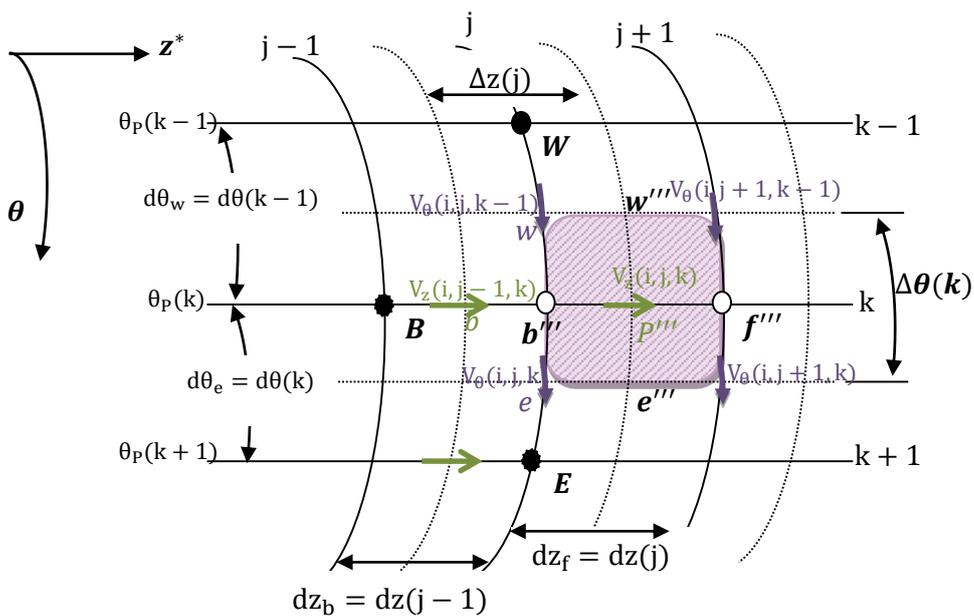


Figure 3.12 : Représentation suivant la section $(\theta - z)$ de volume de contrôle décalé dans la direction axiale 

- **Terme transitoire :**

$$\iiint_{w s b} \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{zP}^{*t^*} + V_{zP}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_p^*$$

- **Termes advectifs :**

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* \\ & 2 \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* V_z^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* \end{aligned}$$

$$\left[2(r_n^* V_{rn}^* V_{zn}^* - r_s^* V_{rs}^* V_{zs}^*) - (r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zn}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zs}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] \Delta \theta_p dz_f^*$$

$$\iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* V_z^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2(V_{\theta e}^* V_{ze}^* - V_{\theta w}^* V_{zw}^*) - (V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{ze}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zw}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] \Delta r_p^* dz_f^*$$

$$\iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) \Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b} \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* V_z^*) \Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* =$$

$$\left[2(V_{zf}^* V_{zf}^* - V_{zb}^* V_{zb}^*) - (V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

- **Terme de pression :**

$$\iiint_{w s b} - \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = (P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_F^{*t^*+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

- **Termes diffusifs :**

* **Le terme** $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau_{rz}^*)$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \tau_{rz}^* \right) \Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
& 2 \int \int \int_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* - \\
& \int \int \int_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right] dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[r^* \mu^{*t^*} \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n - \left[r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right)^{t^*+\Delta t^*} \right) \right]_s^n \right\} \Delta \theta_p dz_f^* = \\
& \left[2 \mu_n^{*t^*} r_n^* \left(\frac{V_{rnf}^{*t^*} - V_{rnb}^{*t^*}}{dz_f^*} \right) - 2 \mu_s^{*t^*} r_s^* \left(\frac{V_{rsf}^{*t^*} - V_{rsb}^{*t^*}}{dz_f^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_f^* - \\
& \left[\mu_n^{*t^*-\Delta t^*} r_n^* \left(\frac{V_{rnf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} r_s^* \left(\frac{V_{rsf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) \right] \Delta \theta_p dz_f^* + \\
& \left(2 \mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_n^* \frac{V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) \Delta \theta_p dz_f^* - \left(2 \mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \left(r_s^* \frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \Delta \theta_p dz_f^*
\end{aligned}$$

Avec

$$\mu_n^* = \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_i^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_{NF}^*}} + \frac{dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}} \quad , \quad \mu_s^* = \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_i^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_{SF}^*}} + \frac{dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{\mu_p^*} + \frac{\Delta r_S^*}{\mu_S^*}}$$

$$\mu_f^* = \mu_F^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{NF}^* = \mu^*(i+1, j+1, k) \quad , \quad \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k)$$

$$\mu_{SF}^* = \mu^*(i-1, j+1, k) \quad , \quad \mu_S^* = \mu^*(i-1, j, k)$$

$$V_{rnf}^* = V_r^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{rsf}^* = V_r^*(i-1, j+1, k) \quad , \quad V_{rnb}^* = V_r^*(i, j, k) \quad , \quad V_{rsb}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

$$V_{zN}^* = V_z^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zS}^* = V_z^*(i-1, j, k)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1) \quad , \quad dr_n^* = dr^*(i)$$

$$\Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad \Delta r_p^* = \Delta r^*(i) \quad , \quad \Delta r_S^* = \Delta r^*(i-1)$$

* le terme $\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*)$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^*) \Big|^{i^*+\Delta t^*} dr^* d\theta dz^* = \\
& 2 \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*i^*} \left[\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* - \\
& \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mu^{*i^*-\Delta t^*} \left[\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} \right] \right\} dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ \left[2\mu^{*i^*} \left(\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_w - \left[\mu^{*i^*-\Delta t^*} \left(\left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right)^{i^*+\Delta t^*} \right) \right]_w \right\} \Delta r_p^* dz_f^* = \\
& \left[\left(2\mu^{*i^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*} + \mu^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial z^*} \right)^{i^*-\Delta t^*} \right) \right]_w \Delta r_p^* dz_f^* + \left[\left(2\mu^{*i^*} - \mu^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} \right]_w \Delta r_p^* dz_f^* = \\
& \left[2\mu_e^{*i^*} \left(\frac{V_{\theta ef}^{*i^*} - V_{\theta p}^{*i^*}}{dz_f^*} \right) - 2\mu_w^{*i^*} \left(\frac{V_{\theta wf}^{*i^*} - V_{\theta wb}^{*i^*}}{dz_f^*} \right) \right] \Delta r_p^* dz_f^* - \\
& \left[\mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{\theta ef}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{\theta p}^{*i^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) - \mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \left(\frac{V_{\theta wf}^{*i^*-\Delta t^*} - V_{\theta wb}^{*i^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \right) \right] \Delta r_p^* dz_f^* + \\
& \left(2\mu_e^{*i^*} - \mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{zE}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*i^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} \right) \Delta r_p^* dz_f^* - \left(2\mu_w^{*i^*} - \mu_w^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{zP}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{zW}^{*i^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_w} \right) \Delta r_p^* dz_f^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_f^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_{EF}^*}} + \frac{d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}}, \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_f^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_{WF}^*}} + \frac{d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*} + \frac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_f^* = \mu_F^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{EF}^* = \mu^*(i, j+1, k+1) \quad , \quad \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1)$$

$$\mu_{WF}^* = \mu^*(i, j+1, k-1) \quad , \quad \mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \quad , \quad r_p^* = r_p^*(i)$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$V_{\theta ef}^* = V_{\theta}^*(i, j+1, k), \quad V_{\theta wf}^* = V_{\theta}^*(i, j+1, k-1), \quad V_{\theta wb}^* = V_{\theta}^*(i, j, k-1), \quad V_{\theta p}^* = V_{\theta}^*(i, j, k)$$

$$V_{zE}^* = V_z^*(i, j, k+1), \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k), \quad V_{zW}^* = V_z^*(i, j, k-1)$$

* le terme $\frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*)$

$$\begin{aligned} \int \int \int \frac{\partial}{\partial z^*}(\tau_{zz}^*) \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* &= \int \int \int \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\ &= \left\{ 2 \left[2\mu_f^* \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \Big|_b^{i^*+\Delta t^*} \right] - \left[2\mu_f^{*-\Delta t^*} \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \Big|_b^{i^*+\Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \end{aligned}$$

$$\left[2 \left(2\mu_f^* - \mu_f^{*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{zF}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*i^*+\Delta t^*}}{\Delta z_F^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p - \left[2 \left(2\mu_b^* - \mu_b^{*-\Delta t^*} \right) \left(\frac{V_{zP}^{*i^*+\Delta t^*} - V_{zB}^{*i^*+\Delta t^*}}{\Delta z_P^*} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

Avec :

$$\mu_f^* = \mu_F^* = \mu^*(i, j+1, k), \quad \mu_b^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\Delta z_F^* = \Delta z^*(j+1), \quad \Delta z_P^* = \Delta z^*(j)$$

$$V_{zF}^* = V_z^*(i, j+1, k), \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k), \quad V_{zB}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{zP}^{*i^*+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*i^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*i^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*i^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*i^*+\Delta t^*} + A_F V_{zF}^{*i^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*i^*+\Delta t^*} + S_z^{i^*+\Delta t^*}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_n^{*i^*} - \mu_n^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta \theta_p dz_f^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_s^{*i^*} - \mu_s^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta \theta_p dz_f^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_e^{*i^*} - \mu_e^{*i^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* dz_f^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{\text{Re}_0} \left(2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* dz_f^*}{r_p^* d\theta_p}$$

$$A_F = df = \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_f^{*t^*} - \mu_f^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{\Delta z_F^*}$$

$$A_B = db = \frac{2}{\text{Re}_0} \left(2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{\Delta z_P^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B + \frac{3}{2} \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_f^*}{\Delta t^*} \dots\dots\dots(3.21)$$

$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{zp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_f^* - \frac{V_{zp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_f^* +$$

$$\left[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*} \right] + \left[fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*} \right] + \left[fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*} \right] + \left[ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*} \right] + \left[fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*} \right] +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_n^{*t^*} r_n^* \frac{V_{rnf}^{*t^*} - V_{rnb}^{*t^*}}{dz_f^*} - 2\mu_s^{*t^*} r_s^* \frac{V_{rsf}^{*t^*} - V_{rsb}^{*t^*}}{dz_f^*} - \\ & \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} r_n^* \frac{V_{rnf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} + \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} r_s^* \frac{V_{rsf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \end{aligned} \right] \Delta \theta_p dz_f^* +$$

$$\frac{1}{\text{Re}_0} \left[\begin{aligned} & 2\mu_e^{*t^*} \frac{V_{\theta ef}^{*t^*} - V_{\theta P}^{*t^*}}{dz_f^*} - 2\mu_w^{*t^*} \frac{V_{\theta wf}^{*t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*}}{dz_f^*} - \\ & \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta wf}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} + \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \frac{V_{\theta ef}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_f^*} \end{aligned} \right] \Delta r_p^* dz_f^* +$$

$$\left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_F^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

On peut écrire aussi

$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = b_z^* + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_F^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*} +$$

$$A_F V_{zF}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*} + b_z^* + \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_F^{*t^*+\Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \dots\dots\dots(3.22)$$

Comme $V_{zP}^{*t+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_z^* à l'interface f du volume typique ($V_{zf}^{*t+\Delta t^*}$), on peut écrire

l'équation donnant la vitesse $V_{zf}^{*t+\Delta t^*}$:

$$A_P V_{zf}^{*t+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t+\Delta t^*} + A_F V_{zF}^{*t+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t+\Delta t^*} + b_z^* + (P_P^{*t+\Delta t^*} - P_F^{*t+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \dots\dots\dots(3.23)$$

Comme dans le cas des équations de discrétisation radiale et azimutale, les relations (3.20) et (3.21) indiquent respectivement que les coefficients de l'équation de discrétisation axiale sont tous positifs et que le A_p est supérieur à la somme des autres coefficients.

3.4.4 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation de conservation de l'énergie (2.6) est exprimée en termes de vitesses et de flux thermiques comme suit :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^* T^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta^* T^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (V_z^* T^*) = G^* - \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* q_r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) \right]$$

Avec $G^* = \begin{cases} K_s^*/(Re_0 Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$

Et les densités de flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}, \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation d'énergie (2.7) est intégrée dans le volume fini typique (figure 3.3- 3.5) comme suit :

- **Terme transitoire :**

$$\int_w^e \int_s^f \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \Big|_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \frac{3T_p^{*t+\Delta t^*} - 4T_p^{*t^*} + T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \Delta z_p^*$$

- **Termes advectifs :**

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* V_r^* T^* \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* V_r^* T^* \right) \Big|^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* V_r^* T^* \right) \Big|^{i^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[\left(r^* V_r^* T^* \right)_{|n}^{i^*} - \left(r^* V_r^* T^* \right)_{|s}^{i^*} \right] - \left[\left(r^* V_r^* T^* \right)_{|n}^{i^*-\Delta t^*} - \left(r^* V_r^* T^* \right)_{|s}^{i^*-\Delta t^*} \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* = \\
& \left\{ 2 \left[\left(r_n^* V_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left(r_s^* V_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{i^*} - \left[\left(r_n^* V_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2} \right) - \left(r_s^* V_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2} \right) \right]^{i^*-\Delta t^*} \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* = \\
& \left\{ \left[r_n^* V_{rn}^* \left(T_N^{*i^*} + T_P^{*i^*} \right) \right] - \left[r_s^* V_{rs}^* \left(T_P^{*i^*} + T_S^{*i^*} \right) \right] \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \\
& \left[\left(r_n^* V_{rn}^* \frac{T_N^{*i^*-\Delta t^*} + T_P^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(r_s^* V_{rs}^* \frac{T_P^{*i^*-\Delta t^*} + T_S^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$T_N^* = T^*(i+1, j, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_S^* = T^*(i-1, j, K)$$

$$V_{rn}^* = V_r^*(i, j, K) \quad , \quad V_{rs}^* = V_r^*(i-1, j, K)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_\theta^* T^* \right) \Big|^{i^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_\theta^* T^* \right) \Big|^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int_{w s b} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(V_\theta^* T^* \right) \Big|^{i^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[\left(V_{\theta e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_{\theta w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{i^*} - \left[\left(V_{\theta e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_{\theta w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2} \right) \right]^{i^*-\Delta t^*} \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\
& \left\{ \left[V_{\theta e}^{*i^*} \left(T_E^{*i^*} + T_P^{*i^*} \right) \right] - \left[V_{\theta w}^{*i^*} \left(T_P^{*i^*} + T_W^{*i^*} \right) \right] \right\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* - \\
& \left[\left(V_{\theta e}^{*i^*-\Delta t^*} \frac{T_E^{*i^*-\Delta t^*} + T_P^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(V_{\theta w}^{*i^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*i^*-\Delta t^*} + T_W^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$T_E^* = T^*(i, j, K+1) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_W^* = T^*(i, j, K-1)$$

$$V_{\theta e}^* = V_\theta^*(i, j, K) \quad , \quad V_{\theta w}^* = V_\theta^*(i, j, K-1)$$

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \frac{\partial}{\partial z^*} \left(V_z^* T^* \right) \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* = 2 \int \int \int \frac{\partial}{\partial z^*} \left(V_z^* T^* \right) \Big|_{i^*}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* - \int \int \int \frac{\partial}{\partial z^*} \left(V_z^* T^* \right) \Big|_{i^*-\Delta t^*}^{i^*} r^* dr^* d\theta dz^* = \\
& \left\{ 2 \left[\left(V_z^* T^* \right) \Big|_f^{i^*} - \left(V_z^* T^* \right) \Big|_b^{i^*} \right] - \left[\left(V_z^* T^* \right) \Big|_f^{i^*-\Delta t^*} - \left(V_z^* T^* \right) \Big|_b^{i^*-\Delta t^*} \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\
& \left\{ 2 \left[\left(V_{zf}^* \frac{T_F^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_{zb}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right] \Big|_{i^*}^{i^*} - \left[\left(V_{zf}^* \frac{T_F^* + T_P^*}{2} \right) - \left(V_{zb}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2} \right) \right] \Big|_{i^*-\Delta t^*}^{i^*-\Delta t^*} \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p = \\
& \left\{ \left[V_{zf}^{*i^*} \left(T_F^{*i^*} + T_P^{*i^*} \right) \right] - \left[V_{zb}^{*i^*} \left(T_P^{*i^*} + T_B^{*i^*} \right) \right] \right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p - \\
& \left[\left(V_{zf}^{*i^*-\Delta t^*} \frac{T_F^{*i^*-\Delta t^*} + T_P^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) - \left(V_{zb}^{*i^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*i^*-\Delta t^*} + T_B^{*i^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p
\end{aligned}$$

Avec :

$$T_F^* = T^*(i, j+1, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_B^* = T^*(i, j-1, K)$$

$$V_{zf}^* = V_z^*(i, j, K) \quad , \quad V_{zb}^* = V_z^*(i, j-1, K)$$

- Termes diffusifs :

$$\begin{aligned}
& \int \int \int \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* q_r^* \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \int \int \int \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* q_r^* \right) dr^* d\theta dz^* = \\
& \int \int \int \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2r^* K^{*i^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} \right) dr^* d\theta dz^* - \int \int \int \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* K^{*i^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\
& \left(2r^* K^{*i^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} \right) \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* - \left(r^* K^{*i^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} \right) \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* = \left[\left(2K^{*i^*} - K^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{i^*+\Delta t^*}^{i^*} \right) \right] \Big|_s \Delta \theta \Delta z^* = \\
& \left\{ \left(2K_n^{*i^*} - K_n^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(r_n^* \frac{T_N^{*i^*+\Delta t^*} - T_P^{*i^*+\Delta t^*}}{dr_n^*} \right) - \left(2K_s^{*i^*} - K_s^{*i^*-\Delta t^*} \right) \left(r_s^* \frac{T_P^{*i^*+\Delta t^*} - T_S^{*i^*+\Delta t^*}}{dr_s^*} \right) \right\} \Delta \theta_p \Delta z_p^*
\end{aligned}$$

Avec :

$$K_n^* = \frac{2dr_n^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_n^*}{K_n^*}} \quad , \quad K_s^* = \frac{2dr_s^*}{\frac{\Delta r_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta r_s^*}{K_s^*}}$$

$$K_N^* = K^*(i+1, j, K) \quad , \quad K_P^* = K^*(i, j, K) \quad , \quad K_S^* = K^*(i-1, j, K)$$

$$dr_n^* = dr^*(i) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1)$$

$$\Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad \Delta r_p^* = \Delta r^*(i) \quad , \quad \Delta r_s^* = \Delta r^*(i-1)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta^*) dr^* d\theta dz^* = \\ \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2K^{*i^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) dr^* d\theta dz^* &- \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K^{*i^*-\Delta i^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) dr^* d\theta dz^* = \\ \left(2K^{*i^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* &- \left(K^{*i^*-\Delta i^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \left[2K^{*i^*} - K^{*i^*-\Delta i^*} \right] \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_w^e \Delta r_p^* \Delta z_p^* = \\ \left\{ 2K_e^{*i^*} - K_e^{*i^*-\Delta i^*} \right\} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{T_E^{*i^*+\Delta i^*} - T_P^{*i^*+\Delta i^*}}{d\theta_e} \right) &- \left\{ 2K_w^{*i^*} - K_w^{*i^*-\Delta i^*} \right\} \left(\frac{1}{r_p^*} \frac{T_P^{*i^*+\Delta i^*} - T_W^{*i^*+\Delta i^*}}{d\theta_w} \right) \Big\} \Delta r_p^* \Delta z_p^* \end{aligned}$$

Avec :

$$K_e^* = \frac{2d\theta_e}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p^*} + \frac{\Delta\theta_E}{K_E^*}} \quad , \quad K_w^* = \frac{2d\theta_w}{\frac{\Delta\theta_p}{K_p^*} + \frac{\Delta\theta_W}{K_W^*}}$$

$$K_E^* = K^*(i, j, k+1) \quad , \quad K_W^* = K^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \quad \quad \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \quad \quad \quad \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \quad \quad \quad \Delta\theta_p = \Delta\theta(k)$$

$$, \quad \Delta\theta_w = \Delta\theta(k-1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*} (q_z^*) r^* dr^* d\theta dz^* &= \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2K^{*i^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* - \iiint_{w s b}^{e n f} \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^{*i^*-\Delta i^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) r^* dr^* d\theta dz^* = \\ \left(2K^{*i^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_b^f r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p &- \left(K^{*i^*-\Delta i^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_b^f r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = \left[2K^{*i^*} - K^{*i^*-\Delta i^*} \right] \left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|^{i^*+\Delta i^*} \right) \Big|_b^f r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = \\ \left\{ 2K_f^{*i^*} - K_f^{*i^*-\Delta i^*} \right\} \left(\frac{T_F^{*i^*+\Delta i^*} - T_P^{*i^*+\Delta i^*}}{dz_f^*} \right) &- \left\{ 2K_b^{*i^*} - K_b^{*i^*-\Delta i^*} \right\} \left(\frac{T_P^{*i^*+\Delta i^*} - T_B^{*i^*+\Delta i^*}}{dz_b^*} \right) \Big\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \end{aligned}$$

Avec :

$$K_f^* = \frac{2dz_f^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_F^*}{K_F^*}} \quad , \quad K_b^* = \frac{2dz_b^*}{\frac{\Delta z_p^*}{K_p^*} + \frac{\Delta z_B^*}{K_B^*}}$$

$$K_F^* = K^*(i, j+1, k) \quad , \quad K_P^* = K^*(i, j, k) \quad , \quad K_B^* = K^*(i, j-1, k)$$

$$\Delta z_F^* = \Delta z^*(j+1) \quad , \quad \Delta z_P^* = \Delta z^*(j) \quad , \quad \Delta z_B^* = \Delta z^*(j-1)$$

$$dz_f^* = dz^*(j) \quad , \quad dz_b^* = dz^*(j-1)$$

-Termes de production d'énergie :

$$\int \int \int_{w s b}^{e n f} G^* r^* dr^* d\theta dz^* = G^* \int \int \int_{w s b}^{e n f} r^* dr^* d\theta dz^* = G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

La production G^* est constante $\left(G^* = \frac{K_s^*}{Re_0 Pr_0} \right)$.

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P T_P^{*t+\Delta t^*} = A_N T_N^{*t+\Delta t^*} + A_S T_S^{*t+\Delta t^*} + A_E T_E^{*t+\Delta t^*} + A_W T_W^{*t+\Delta t^*} + A_F T_F^{*t+\Delta t^*} + A_B T_B^{*t+\Delta t^*} + S^{*t+\Delta t^*} \dots\dots\dots(3.24)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*} \quad A_S = ds = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_e^{*t^*} - K_e^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e} \quad A_W = dw = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_f^{*t^*} - K_f^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_f^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0 Pr_0} \left(2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*} \right) \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B + \frac{3 r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p dz_f^*}{2 \Delta t^*} \dots\dots\dots(3.25)$$

$$S^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{rn}^{*t^*} (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[V_{rs}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*}) - \left(V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{\theta e}^{*t^*} (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\left[V_{\theta w}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*}) - \left(V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_F^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) - V_{zf}^{*t^*} (T_F^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p +$$

$$\left[V_{zb}^{*t^*} (T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*}) - \left(V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \right) \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$S^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$(f_n^{t^*-\Delta t^*} - f_n^{t^*}) + (f_s^{t^*} - f_s^{t^*-\Delta t^*}) + (f_e^{t^*-\Delta t^*} - f_e^{t^*}) + (f_w^{t^*} - f_w^{t^*-\Delta t^*}) + (f_f^{t^*-\Delta t^*} - f_f^{t^*}) + (f_b^{t^*} - f_b^{t^*-\Delta t^*})$$

Où:

$$f_n^{*t^*} = V_{rn}^{*t^*} (T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad f_n^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$f_s^{*t^*} = V_{rs}^{*t^*} (T_S^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad f_s^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_S^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$f_e^{*t^*} = V_{\theta e}^{*t^*} (T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad f_e^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$f_w^{*t^*} = V_{\theta w}^{*t^*} (T_W^{*t^*} + T_P^{*t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad f_w^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_W^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$f_f^{*t^*} = V_{zf}^{*t^*} (T_F^{*t^*} + T_P^{*t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad , \quad f_f^{*t^*-\Delta t^*} = \frac{V_{zf}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} (T_F^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$f_b^{*t^*} = V_{zb}^{*t^*} \left(T_B^{*t^*} + T_P^{*t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^* \quad , \quad f_b^{*t^* - \Delta t^*} = \frac{V_{zb}^{*t^* - \Delta t^*}}{2} \left(T_B^{*t^* - \Delta t^*} + T_P^{*t^* - \Delta t^*} \right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p^*$$

3.5 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations des conditions aux limites doivent être sous la forme générale de l'équation de discrétisation. Les coefficients, dans ce cas, sont spécifiés d'après les conditions du problème posé. Il s'agit de condition de non glissement sur les parois et condition d'extrémités rigides des cylindres.

Il s'agira toujours d'identifier pour chaque condition aux limites les coefficients des variables dépendantes ainsi que les termes de sources correspondantes. Le domaine numérique est défini par : $i=1, IL$; $j=1, JL$; $k=1, KL$. Balayant les directions radiale, azimutale et axiale.

3.5.1 A l'entrée de conduit annulaire $Z^* = 0$

Le domaine numérique correspondant est : $j = 1, 1 \leq i \leq IL, 1 \leq k \leq KL$

Domaine solide $0.77 \leq r^* \leq 0.83$ or $1.33 \leq r^* \leq 1.38$ and $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^*(r^*, \theta, 0) = V_\theta^*(r^*, \theta, 0) = V_z^*(r^*, \theta, 0) = T^*(r^*, \theta, 0) = 0$$

Domaine fluide $0.833 \leq r^* \leq 1.333$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^*(r^*, \theta, 0) = V_\theta^*(r^*, \theta, 0) = T^*(r^*, \theta, 0) = 0$$

$$V_z^*(r^*, \theta, 0) = \frac{C_3 r^{*2} + C_2 \ln(r^*) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2 \left(\frac{R_{2i}^2 \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2} \right)}$$

C_1, C_2, C_3 et C_4 sont donnés respectivement par les équations (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16).

- Pour la composante axiale $V_z^*(r^*, \theta, 0)$; elle doit vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_P^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_{ZP}^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) &= A_N^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i + 1, j, k) + A_S^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i - 1, j, k) + \\ &A_E^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k + 1) + A_W^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k - 1) + A_F^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, j + 1, k) + \\ &A_B^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, j - 1, k) + S_z^{t^* + \Delta t^*}(i, j, k) \dots \dots \dots (3.26) \end{aligned}$$

Qui devra donc s'écrire :

$$\begin{aligned} 1. V_{ZP}^{t^* + \Delta t^*}(i, 1, k) &= 0. V_z^{t^* + \Delta t^*}(i + 1, 1, k) + 0. V_z^{t^* + \Delta t^*}(i - 1, 1, k) + 0. V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, 1, k + 1) + 0. V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, 1, k - 1) + \\ 0. V_z^{t^* + \Delta t^*}(i, 2, k) &+ \frac{C_3 r_p^{*2}(i) + C_2 \ln(r_p^*(i)) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2 \left(\frac{R_{2i}^2 \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2} \right)} \end{aligned}$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = A_F^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, 1, k) = 0..(3.27)$$

$$S_z^{t^*+\Delta t^*}(i, 1k) = \frac{C_3 r_p^{*2}(i) + C_2 \ln(r_p^*(i)) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2 \left(\frac{R_{2i}^2 \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2} \right)}$$

- Pour les autres variables V_r^* , V_θ^* et la température T^* qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*} = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*} = A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_F^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = S_r^{t^*+\Delta t^*} = S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = S_T^{t^*+\Delta t^*} = 0 \dots\dots\dots(3.28)$$

3.5.2 A la sortie du conduit : $z^* = L / D_h = 277.777$

Le domaine numérique correspondant est $j = JL$; $1 \leq i \leq IL$; $1 \leq k \leq KL$

Domaine solide $0.777 \leq r^* \leq 0.833$ or $1.333 \leq r^* \leq 1.388$ and $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^*(r^*, \theta, L/D_h) = V_\theta^*(r^*, \theta, L/D_h) = V_z^*(r^*, \theta, L/D_h) = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*(r^*, \theta, L/D_h)}{\partial z^*} \right) = 0$$

Domaine fluide $0.833 \leq r^* \leq 1.333$ and $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\frac{\partial V_r^*(r^*, \theta, L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*(r^*, \theta, L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*(r^*, \theta, L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*(r^*, \theta, L/D_h)}{\partial z^*} \right) = 0$$

L'invariance axiale sur les composantes de la vitesse se discrétise selon les différences régressives à l'ordre 1. On le détaille pour la vitesse radiale (c'est identique pour V_θ^* et V_z^*) :

$$\frac{(V_r^*(i, JL, k) - V_r^*(i, JL - 1, k))}{dz^*(JL - 1)} = 0$$

$$V_r^*(i, JL, k) = V_r^*(i, JL - 1, k)$$

Si la dernière équation est identifiée à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

$$A_p^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{*t+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

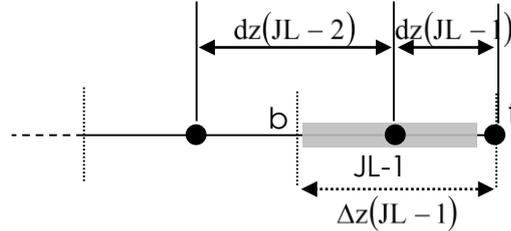
$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_F^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0 \dots\dots\dots(3.29)$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

La condition sur la température : $\left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right|_{z^*=L/D_h} = 0$ se discrétise selon les différences

centrées à l'ordre 2 autour de **JL-1** :

$$K_f^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_f - K_b^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_b = 0 \Rightarrow$$



$$K_f^* \frac{T^*(i, JL, k) - T^*(i, JL-1, k)}{dz^*(JL-1)} - K_b^* \frac{T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)}{dz^*(JL-2)} = 0$$

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{K_b^* dz^*(JL-1)}{K_f^* dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

Dans la partie solide : la conductivité est constante $K_n^* = K_s^* = K_f^* = K_b^*$ donc :

$$T^*(i, JL, k) = T^*(i, JL-1, k) + \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^*(i, JL-1, k) - T^*(i, JL-2, k)]$$

On en déduit les différents coefficients :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i, JL, k) = A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i+1, JL, k) + A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i-1, JL, k) + A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i, JL, k+1) + A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i, JL, k-1) + A_F^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i, JL+1, k) + A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) T^*(i, JL-1, k) + S^t(i, JL, k).$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approchée par l'approximation d'Adam-Bashforth et on déduit les différents coefficients :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_F^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 2 \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k)] - \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k)] \dots\dots\dots(3.30)$$

Dans la partie fluide : la conductivité en **f** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = A_F^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(i, JL, k) = 2 \frac{K_b^{*t^*}}{K_f^{*t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*}(i, JL-2, k)] - \frac{K_b^{*t^*-\Delta t^*}}{K_f^{*t^*-\Delta t^*}} \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)} [T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-1, k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i, JL-2, k)]$$

3.5.3 Sur la paroi interne du cylindre intérieur : $r^*=0.777$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq z^* \leq 277.77$

Le domaine numérique correspondant est $i = 1$; $1 \leq j \leq JL$; $1 \leq k \leq KL$

Pour les vitesses V_r^* , V_θ^* et V_z^* ($V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0$), seuls les coefficients A_p sont égaux à 1.

La condition thermique à la paroi interne du cylindre intérieur $-K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=D_{ii}/2D_h} = 0$, se

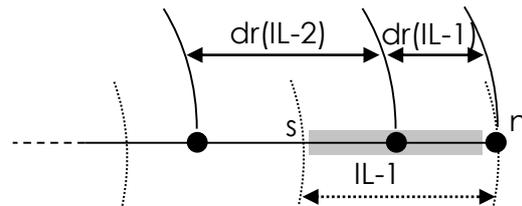
discrétise selon des différences régressives, on obtient :

$$\begin{aligned} A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL, J, K) &= 1 \\ A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= 1 \\ A_S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0 \\ A_F^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) &= A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0 \end{aligned}$$

3.5.4 Sur la paroi externe du cylindre extérieur : $r^*=1.38$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq z^* \leq 277.77 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \\ -K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=D_{2e}/2D_h} = \frac{(h_r + h_c)D_h}{k_0} T^* \Big|_{r^*=D_{2e}/2D_h} \end{array} \right.$$

La condition thermique à la paroi externe du cylindre extérieur se discrétise selon des différences régressives, on obtient :



$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 1 + \frac{(h_r + h_c)D_h}{K_0} \frac{dr^*(IL-1)}{cof} \Delta(IL-1)$$

$$cof = 2K^*(IL-1, j, k)^{t^*} - K^*(IL-1, j, k)^{t^*-\Delta t^*}$$

$$A_S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0$$

$$A_T^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0$$

3.6 Equation de la discrétisation de pression

Pour résoudre les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse (3.15), (3.19) et (3.22), il faut préciser la pression qui est présente dans les sources de ces équations. La détermination de la pression dans les points centrés des volumes finis, nécessite une équation de discrétisation de la pression. Cette équation est obtenue par une manipulation combinant les équations de discrétisation de continuité et des quantités de mouvement.

Les équations discrétisées associées aux composantes de vitesse calculées sur le maillage décalé s'écrivent comme suit :

$$V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{rnb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^*(i, j, k)}{A_p} + d_m [P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}] \quad \text{Avec} \quad d_m = \frac{r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*}{A_p}$$

$$V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{\theta nb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_\theta^*(i, j, k)}{A_p} + d_{\theta e} [P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}] \quad \text{Avec} \quad d_{\theta e} = \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{A_p}$$

$$V_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{znb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_z^*(i, j, k)}{A_p} + d_{zf} [P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_F^{*t^*+\Delta t^*}] \quad \text{Avec} \quad d_{zf} = \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p}{A_p}$$

On définit à ce niveau des **pseudos vitesses** $\hat{V}_r^*, \hat{V}_\theta^*, \hat{V}_z^*$, sans les termes de pression, telles que :

$$\hat{V}_r^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{rnb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.46)$$

$$\hat{V}_\theta^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{\theta nb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_\theta^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.47)$$

$$\hat{V}_z^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^6 A_{nb} V_{znb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_z^*(i, j, k)}{A_p} \quad (3.48)$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudos vitesses sous la forme suivante :

$$V_r^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_r^{*t+\Delta t^*} + d_m \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.49)$$

$$V_\theta^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_\theta^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta e} \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.50)$$

$$V_z^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_z^{*t+\Delta t^*} + d_{zf} \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_F^{*t+\Delta t^*} \right] \quad (3.51)$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que :

$$V_{rn}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{rn}^{*t+\Delta t^*} + d_m \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_N^{*t+\Delta t^*} \right], \quad V_{\theta w}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta w}^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta w} \left[P_W^{*t+\Delta t^*} - P_P^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{rs}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{rs}^{*t+\Delta t^*} + d_{rs} \left[P_S^{*t+\Delta t^*} - P_P^{*t+\Delta t^*} \right], \quad V_{zf}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{zf}^{*t+\Delta t^*} + d_{zf} \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_F^{*t+\Delta t^*} \right]$$

$$V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} + d_{\theta e} \left[P_P^{*t+\Delta t^*} - P_E^{*t+\Delta t^*} \right], \quad V_{zb}^{*t+\Delta t^*} = \hat{V}_{zb}^{*t+\Delta t^*} + d_{zb} \left[P_B^{*t+\Delta t^*} - P_P^{*t+\Delta t^*} \right]$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est :

$$\left(V_m^{*t+\Delta t^*} r_n^* - V_{rs}^{*t+\Delta t^*} r_s^* \right) \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \left(V_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t+\Delta t^*} \right) \Delta r_p \Delta z_p^* + \left(V_{zf}^{*t+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t+\Delta t^*} \right) r_p \Delta r_p \Delta \theta_p = 0 \quad (3.52)$$

L'utilisation des six équations précédentes du champ de vitesse dans l'équation de discrétisation de continuité (3.52) nous donne une équation de discrétisation de pression au nœud typique P sous la forme standard :

$$A_P P_p^{*t+\Delta t^*} = A_N P_N^{*t+\Delta t^*} + A_S P_S^{*t+\Delta t^*} + A_E P_E^{*t+\Delta t^*} + A_W P_W^{*t+\Delta t^*} + A_F P_F^{*t+\Delta t^*} + A_B P_B^{*t+\Delta t^*} + S_p \quad (3.53)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B$$

$$A_N = r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = r_s^* dr_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad (3.54)$$

$$A_E = d\theta_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d\theta_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad (3.55)$$

$$A_F = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_f^* \quad , \quad A_B = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_b^* \quad (3.56)$$

$$S_p^{*t+\Delta t^*} = \left[r_s^* \hat{V}_{rs}^{*t+\Delta t^*} - r_n^* \hat{V}_{rn}^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[\hat{V}_{\theta w}^{*t+\Delta t^*} - \hat{V}_{\theta e}^{*t+\Delta t^*} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \left[\hat{V}_{zb}^{*t+\Delta t^*} - \hat{V}_{zf}^{*t+\Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad (3.57)$$

3.6.1 Equation de correction de la pression

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. Donc si on a les pseudos vitesses, on peut calculer la source S et donc la pression. Sachant que les pseudos vitesses sont calculés avec des approximations de la vitesse, appelées estimations de la vitesse, la pression calculée ne peut être considérée qu'une estimation de pression qui nécessite une correction. Si cette estimation de pression est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement, on obtient un champ de vitesse qui est une nouvelle estimation qui nécessite une correction. Il est clair que pour l'obtention d'un champ de pression correcte, il faut un champ de vitesse correcte et vice-versa. Evidemment, les corrections de vitesse et de pression sont liées. A un point donné, la correction de la vitesse est liée aux corrections des vitesses des points adjacents et des corrections de pression. Mais il y'a une méthode qui lie la correction de la vitesse à un point aux seules corrections de la pression. Cette méthode est au cœur de l'algorithme **SIMPLER** utilisée dans nos calculs est qui sera présente plus tard. Avec cette méthode, on détermine une équation de correction de la pression ; et une fois la correction de la pression obtenue, elle est directement utilisée pour corriger le champ de vitesse.

Les relations entre les estimations et les corrections de vitesse et de pression sont définies par :

$$P^* = P^{**} + P'^* \quad , \quad V_r^* = V_r^{**} + V_r'^* \quad , \quad V_\theta^* = V_\theta^{**} + V_\theta'^* \quad , \quad V_z^* = V_z^{**} + V_z'^*$$

$V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$ Sont les vitesses estimées associées à la pression estimée P^{**} .

$V_r'^*, V_\theta'^*, V_z'^*$ Sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression corrigée P'^* .

Les estimations des vitesses sont corrigées comme suit :

$$\mathbf{V}_m^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_m^{*t^*+\Delta t^*} + d_m \left[\mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_N^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.58)$$

$$\mathbf{V}_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{rs} \left[\mathbf{P}'_S^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.59)$$

$$\mathbf{V}_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{\theta e} \left[\mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_E^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.60)$$

$$\mathbf{V}_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{\theta w} \left[\mathbf{P}'_W^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.61)$$

$$\mathbf{V}_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{zf} \left[\mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_F^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.62)$$

$$\mathbf{V}_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} = \mathbf{V}_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{zb} \left[\mathbf{P}'_B^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{P}'_P^{*t^*+\Delta t^*} \right] \quad (3.63)$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront d'obtenir une équation de discrétisation de la correction de pression \mathbf{P}'^* avec des vitesses estimées : \mathbf{V}_r^{**} , \mathbf{V}_θ^{**} , \mathbf{V}_z^{**}

$$\begin{aligned} A_P \mathbf{P}'_p^{*t^*+\Delta t^*} = & A_N \mathbf{P}'_N^{*t^*+\Delta t^*} + A_S \mathbf{P}'_S^{*t^*+\Delta t^*} + A_E \mathbf{P}'_E^{*t^*+\Delta t^*} + A_W \mathbf{P}'_W^{*t^*+\Delta t^*} + A_F \mathbf{P}'_F^{*t^*+\Delta t^*} \\ & + A_B \mathbf{P}'_B^{*t^*+\Delta t^*} + S_p^{*t^*+\Delta t^*} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_F + A_B$$

$$A_N = d_m r_n^* \Delta \theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = d_{rs} r_s^* \Delta \theta_p \Delta z_p^*$$

$$A_E = d_{\theta e} \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d_{\theta w} \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$A_F = d_{zf} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \quad , \quad A_B = d_{zb} r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p$$

$$\begin{aligned} S_p^{*t^*+\Delta t^*} = & \left[r_s^* \mathbf{V}_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} - r_n^* \mathbf{V}_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} \right] \Delta \theta_p \Delta z_p^* + \left[\mathbf{V}_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{V}_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} \right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* + \\ & \left[\mathbf{V}_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} - \mathbf{V}_{zf}^{*t^*+\Delta t^*} \right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta \theta_p \end{aligned}$$

La solution séquentielle des systèmes d'équations linéaires des variables dépendantes (composantes des vitesses, pression et température) suivent l'algorithme **SIMPLER** (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) dont les étapes sont citées ci-après :

1 - initialisation (estimation) des champs des vitesses et de température.

- 2 - calcul des coefficients des équations de discrétisation des quantités de mouvement et des pseudo-vitesses
- 3 - utilisation des pseudo-vitesses calculées pour calculer la source de l'équation de la pression.
 - calcul des coefficients de discrétisation de cette équation de pression.
 - Résolution de l'équation de pression pour tirer la pression P^* .
- 4 - considérer cette solution P^* comme étant une pression estimée P^{**} et calculer les vitesses estimées
- 5 - utilisation de ces vitesses estimées $V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$ pour calculer la source de l'équation de correction de la pression.
 - résolution de l'équation de correction de la pression pour tirer la correction de pression P'^* .
- 6 - A l'aide de la pression corrigée P'^* , des nouvelles vitesses corrigées V_r^*, V_θ^*, V_z^* sont calculées.
- 7 - Résolution de l'équation de discrétisation de l'énergie pour déterminer le champ des températures.
- 8 - Vérification de la convergence des calculs (l'atteinte du régime permanent). On arrête les calculs si ce régime est atteint et on stocke les résultats. Sinon, on revient à l'étape 2 pour effectuer un autre cycle en démarrant avec les vitesses calculées (corrigées) comme une nouvelle estimation (ou initialisation). On continue cette procédure jusqu'à la convergence des calculs.

Dans notre travail deux critères qui contrôlent la convergence du code de calcul :

a) Un critère de convergence de type numérique défini par :

$diff \phi = \sum_{\phi} |\phi^n - \phi^{n-1}| \leq \varepsilon$ Où ϕ représente les variables V_r^*, V_θ^*, V_z^* et T^* et n le nombre d'itération final, ε égale à 10^{-5} .

b) Un critère de convergence de type énergétique dans lequel la chaleur produite par effet Joule dans la paroi du conduit soit égale à la chaleur transférée au fluide + les pertes vers le milieu externe.

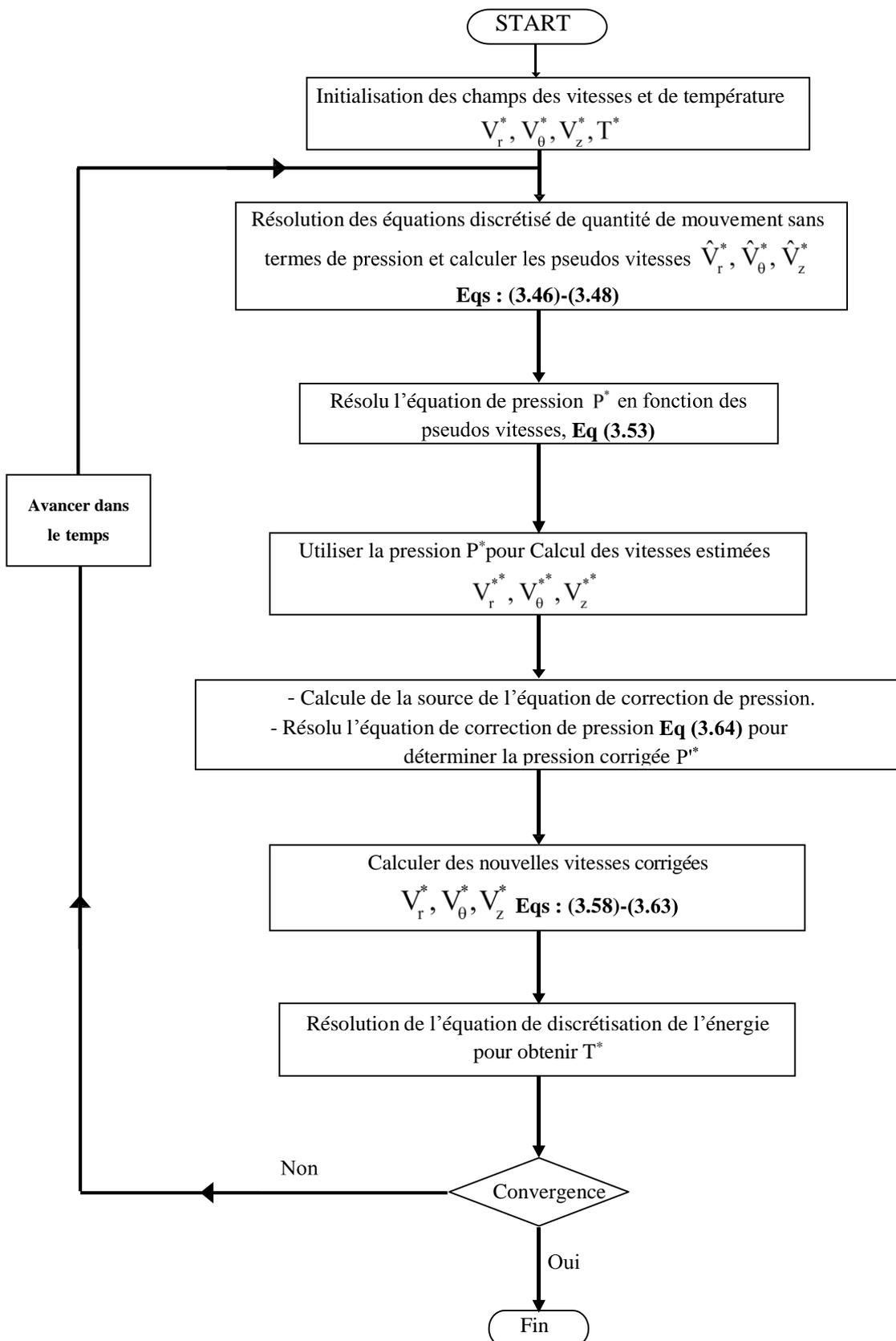


Figure 3.13 : Algorithme SIMPLER.

3.7- Résolution des équations algébrique ou équation discrétisée

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative.

Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$\begin{aligned} A_p(i, j, k)\phi_{i,j,k} = & A_N(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + A_S(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\ & A_T(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ & A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions z et θ sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.66) est réécrite :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} a_i &= A_p(i, j, k) \\ b_i &= A_N(i, j, k) \\ c_i &= A_S(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$d_i = A_F(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + A_E(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i, j, k)$$

Le système d'équation (3.67) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm).

Le balayage suivant la direction z est similaire à celui de balayage suivant la direction radiale ; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique qui est représenté par l'équation indicielle suivante :

$$a_k\phi_k = b_k\phi_{kkk} + c_k\phi_{kk} + d_k \quad (3.69)$$

$k=1,2,\dots,\dots, KL$ Avec

$$kkk = \begin{cases} k+1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k-1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

3.8 Validation du code de calcul

La validation du code de calcul est faite par comparaison des résultats fournis par notre code à ceux obtenus par des solutions numériques publiées par **Nonino et Giudice [49]** qui ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte conjugué dans un espace annulaire avec un flux de chaleur constant sur la paroi du cylindre interne tandis que le cylindre externe est adiabatique. Les paramètres de contrôle du problème sont : $Re = 1000$, $Pr = 0.7$, $Gr = 10^6$, and $R2/R1 = 2$. Cette validation a aussi été établie dans les travaux de **Touahri [46]**.

La figure 3.14, illustre l'évolution axiale du nombre Nusselt circonférentiel moyen, On voit qu'il y a un bon accord entre nos résultats et ceux de **Nonino et Giudice [49]**.

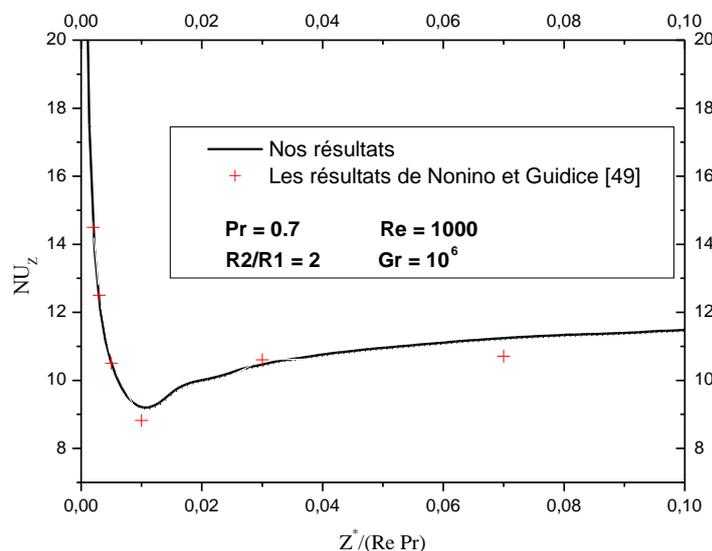


Figure 3.14 : Validation du code de calcul : Comparaison avec les valeurs du Nusselt circonférentiel moyen obtenues par **Nonino et Giudice [49]**.

Chapitre 4

Résultats et discussion

4.1 Introduction

La discussion présentée ici est pertinente pour l'étude du transfert de chaleur par convection mixte laminaire tridimensionnelle dans un espace annulaire entre deux cylindres horizontaux concentriques avec des propriétés physiques qui dépendent de la température, dont l'importance dans les applications industrielles a été présentée au premier chapitre.

Les résultats figurant dans ce qui suit, sont tous obtenus pour un rapport d'aspect géométrique $A = 277.77$, un nombre de Reynolds $Re = 373.28$ et un nombre de Prandtl $Pr = 8.082$. Nous présentons des résultats qui démontrent des détails sur les champs de l'écoulement et de température, le développement des propriétés thermo-physiques de fluide ainsi que le nombre Nusselt axial pour différents nombres de Grashof : $Gr = 0$ (cas de référence), 1432.55, 1813.07, 2238.35, 2708.41, 3223.23 et 3781.98. L'écoulement obtenu pour les cas étudiés est caractérisé par un écoulement principal le long de la direction axiale et un écoulement secondaire influencé par la variation de densité avec la température.

Dans ce chapitre, les logiciels de graphisme utilisés sont Tecplot version 9.0 (pour la représentation en 3D surtout) et Origin version 6.0 pour la représentation en 2D.

4.2 Le cas de référence : La convection forcée ($Gr^* = 0$)

4.2.1 Le champ dynamique de l'écoulement

L'écoulement imposé à l'entrée ($Z^*=0$) suit un profil parabolique dont la seule composante axiale est celle d'un écoulement hydrodynamiquement développé, l'utilisation de ce profil permet d'atteindre rapidement le développement hydrodynamique de l'écoulement. Tandis que, les composantes angulaires et radiales sont nulles. Ces dernières resteront nulles à travers l'ensemble du conduit annulaire car la condition de non glissement à la paroi ainsi que le nombre de Grashof nul, sont appliqués. En convection forcée les champs thermiques et dynamiques sont axisymétriques. On trace les contours avec le logiciel Tecplot 9.0 et la distribution de la vitesse axiale en toute section compris entre $z^* = 0$ et $z^* = 277.77$. La figure 4.1 illustre ces contours de vitesse axiale. Le profil à l'entrée sera donc conservé sur tout le conduit. Il est clair que le profil est axisymétrique de l'entrée jusqu'à la sortie et les isotacs sont des cercles concentriques, comme cela est cité dans la référence [46], la convection forcée est hydro-dynamiquement développée, depuis sa valeur nulle aux deux parois d'adhérence aux parois fixes, jusqu'à sa valeur maximum $V_{zmax}^* = 1.503$ au centre de l'espace annulaire ($r^* = 1.0677$) en suivant un profil parabolique.

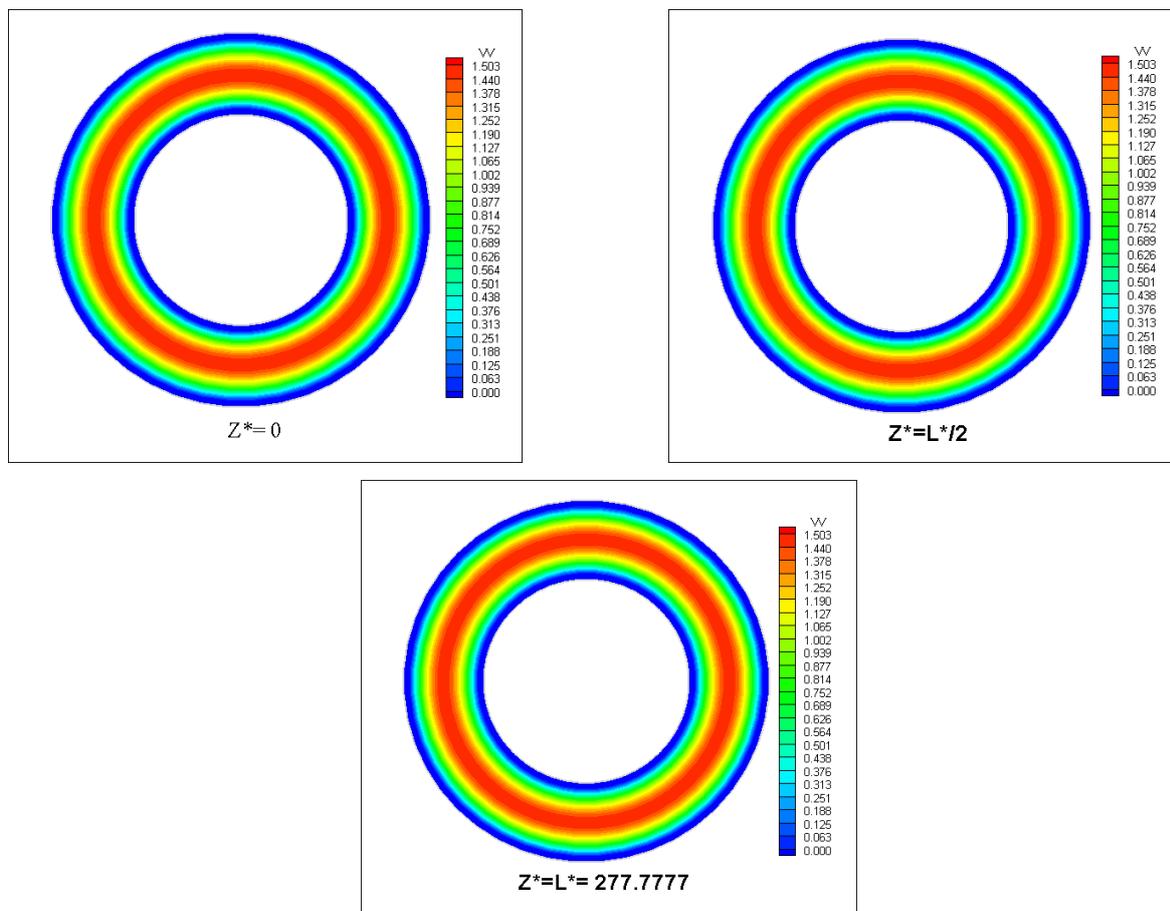


Figure 4.1 : Distribution de la vitesse axiale en toute section compris entre $z^* = 0$ et $z^* = 277.77$ (Convection forcée)

4.2.2 Le champ thermique

A l'entrée le fluide se présente avec une température constante. Il est soumis à un flux de chaleur uniforme pariétal qui a été généré par la production volumique au sein du conduit externe et entrainera une augmentation de température du fluide due à la chaleur dégagée et qui rendra l'écoulement en développement thermique. Le gradient de température imposé et orienté vers le cylindre interne de telle sorte que la distribution des isothermes conserve une variation axisymétrique est dû à la chaleur fournie par la paroi du cylindre externe. L'absence d'un écoulement secondaire permet d'avoir une variation du champ de température suivant uniquement la direction radiale et de respecter la symétrie cylindrique.

La variation de température est démontrée par la représentation graphique dans la figure 4.2 de la distribution des températures aux quatre stations axiales arbitrairement choisies : $Z^* = L^*/4, L^*/2, 3L^*/4$ et L^* , correspondantes successivement au quart, demi, trois quart et la longueur totale. On voit une variation bidirectionnelle constituée par une croissance axiale monotone de l'entrée jusqu'à la sortie du conduit ainsi qu'une variation radiale en toute section axiale. A l'entrée la température est constante égale à $(T^*|_{Z^*=0} = 0)$ tandis qu'à la sortie elle atteint son maximum absolu qui est égale à 0.716. Les isothermes sont aussi des cercles concentriques. La comparaison des quatre distributions révèle que pour toute section le maximum des températures se situe au niveau du sommet du cylindre extérieur qui est le plus chaud et que la température décroît radialement vers le cylindre intérieur adiabatique. Le minimum des températures se situe au niveau de ce dernier.

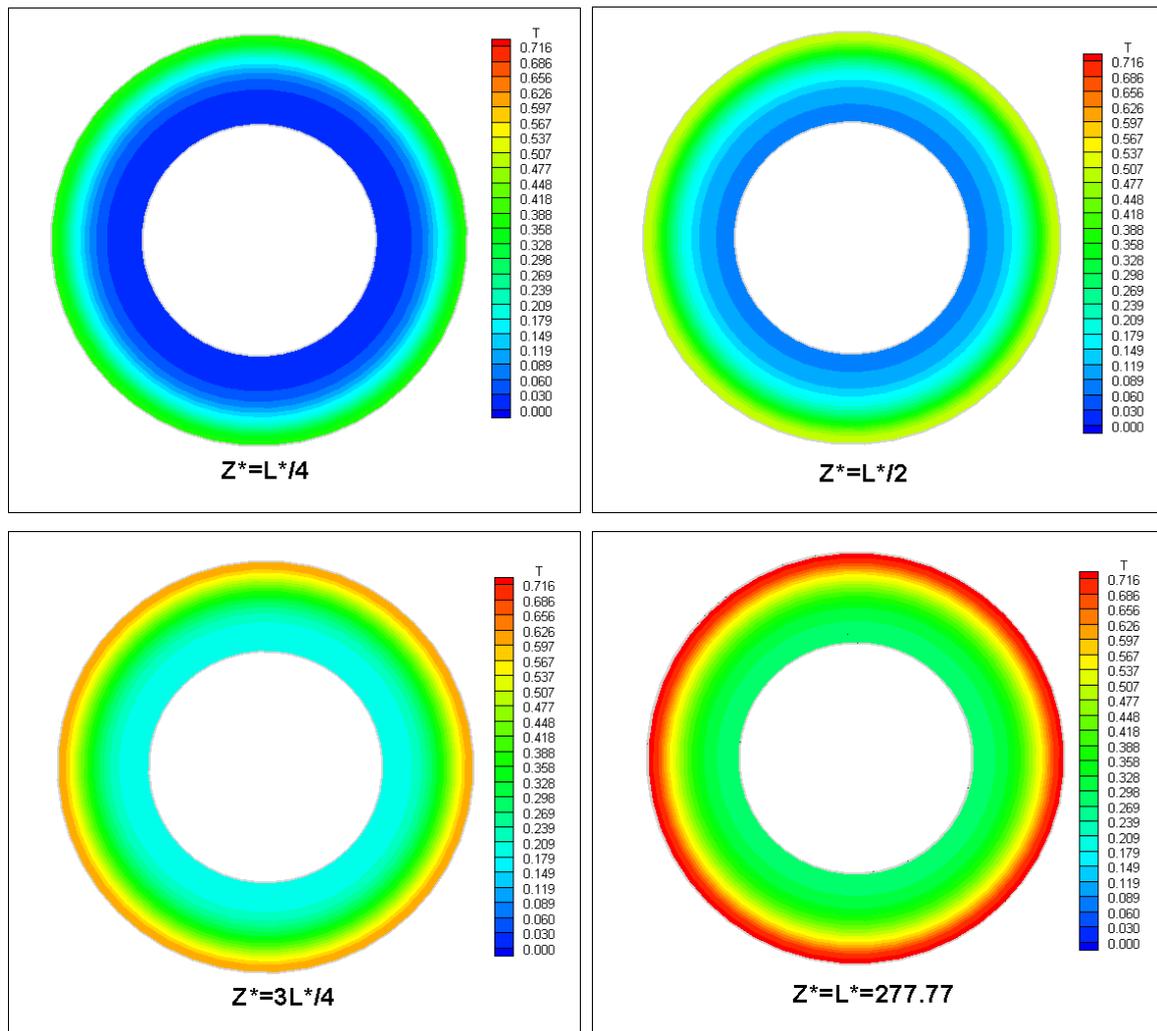


Figure 4.2 : Distribution de température au quatre stations axiales arbitrairement choisies. (Convection forcée).

4.2.3 Variation de nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt axial est représenté dans la figure 4.3. Cette figure illustre que, juste à l'entrée du conduit le nombre de Nusselt axial présente une forte diminution expliquée par l'écart des températures important entre la paroi et le fluide. Mais au fur et à mesure que le fluide s'écoule l'échange convectif s'intensifie entraînant une augmentation du nombre de Nusselt. Le long la direction axiale du conduit annulaire. Le nombre de Nusselt axial à la sortie du conduit annulaire égale à 5.847.

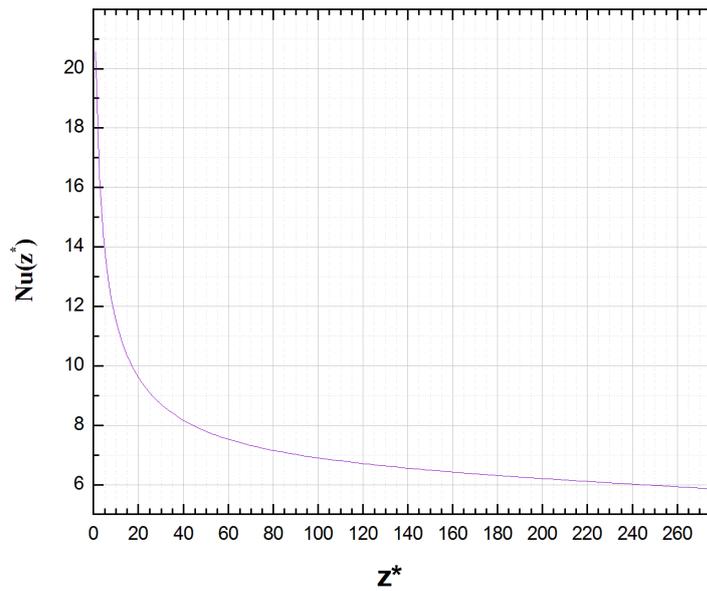


Figure 4.3 : Variation du nombre de Nusselt axial à Gr=0.

Dans la figure 4.4. Le nombre de Nusselt local connaît seulement une variation axiale à cause de la variation axisymétrique de la température, à l'entrée du système le nombre de Nusselt est important car la différence des températures entre la température moyenne du fluide et la température à l'interface est très faible. Loin de l'entrée il se diminue progressivement jusqu'à la sortie du conduit annulaire.

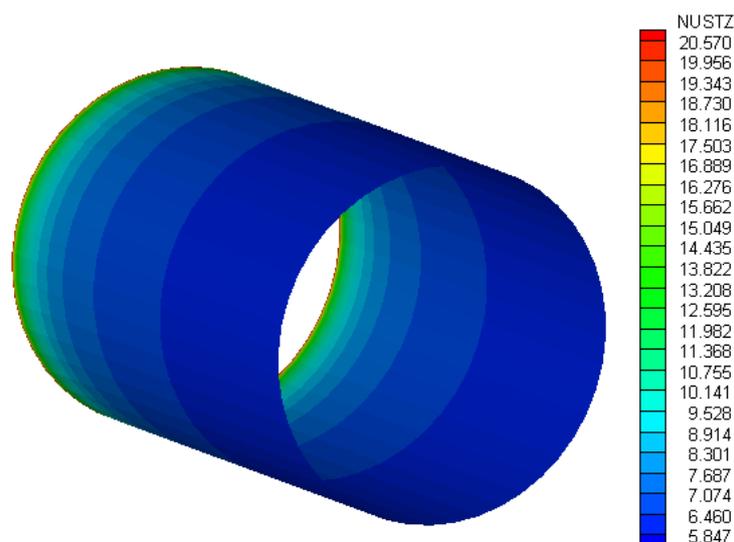


Figure 4.4 : Nombre de Nusselt local le long du conduit annulaire Gr=0.

4.2.4 Développement des propriétés thermo-physiques de fluide

4.2.4.1 La variation de la viscosité dynamique

Pour montrer le changement significatif des propriétés physiques avec la température, la variation de la viscosité dynamique adimensionnelle de fluide $\mu^* = \mu/\mu_0$ pour $Gr = 0$ est illustrée dans la figure 4.5. Dans le cas d'un écoulement de convection forcée avec des propriétés thermo physiques dépendant de la température, le chauffage axial provoque une réduction axiale continue de la viscosité de l'entrée jusqu'à la sortie de l'espace annulaire. A l'entrée du conduit annulaire, localement la viscosité est faible près de la paroi chaude, pour cela, une faible viscosité réduit les frottements visqueux et tend à augmenter le niveau de la vitesse. Pour cela ; L'écoulement axial est affecté par la variation de la viscosité, il est constant (axialement invariant) et l'effet de la viscosité variable doit être la redistribution du niveau de la vitesse axiale sur la section transversale lorsque l'écoulement axial traverse l'anneau de l'entrée vers la sortie.

La viscosité est une fonction décroissante de la température et il est clair dans ci-dessous, que les zones froides ont des viscosités supérieures à celles des zones chaudes. A une section transversale donnée, la viscosité diminue du cylindre intérieur au cylindre extérieur. A la sortie de l'anneau, la température du fluide devient supérieure à $15C^\circ$, dans ce cas μ^* prend une valeur minimale en haut de l'anneau égale à 0,233 et une valeur maximale égale à 1,018 à $\theta = \pi$ à l'entrée du conduit annulaire.

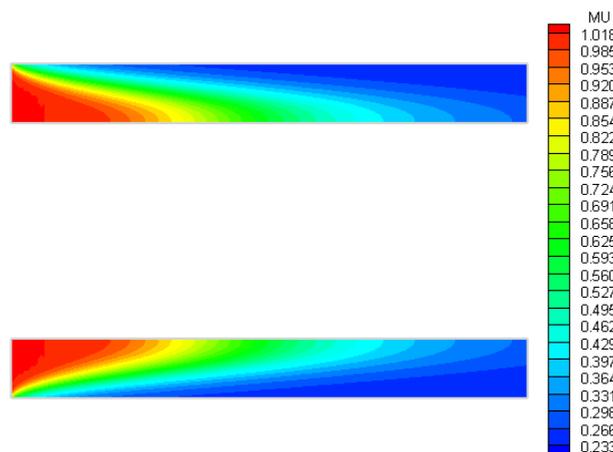


Figure 4.5 : Variation de la viscosité dynamique adimensionnelle.

4.2.4.2 La variation de la conductivité thermique adimensionnelle

En ce qui concerne la conductivité thermique adimensionnelle du fluide, la diffusion de la température est proportionnelle à la conductivité thermique qui augmente avec la température. La variation de la conductivité thermique à $Gr=0$ (cas de référence) est présentée dans la figure 4.6 La conductivité thermique est une fonction croissante de la température. Il est clair que la conductivité thermique adimensionnelle maximale augmente à la sortie de l'espace annulaire jusqu'à 1.154.

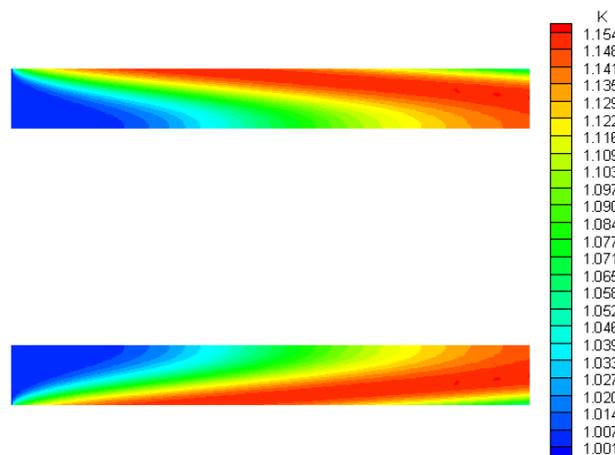


Figure 4.6 : Variation de conductivité adimensionnelle.

4.3 La convection mixte

Le passage de la convection purement forcée vers la convection mixte est le résultat d'une augmentation du nombre de Grashof. Cette augmentation change complètement la structure axisymétrique des champs thermique et dynamique de l'écoulement. La seule symétrie est celle par rapport au plan vertical qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$, une variation angulaire s'ajoute aux variations radiales et axiales discutées dans la convection forcée.

4.3.1 Champ dynamique de l'écoulement

4.3.1.1 L'écoulement secondaire

La solution numérique de la convection mixte hydro-dynamiquement développée avec des propriétés thermo-physiques dépendantes de la température est obtenue par résolution des équations (2.3)-(2.6) avec les conditions spécifiées par les équations (2.10)-(2.18). Pour différentes valeurs de nombre de Grashof, les résultats ont révélé que l'écoulement se développe hydro-dynamiquement et thermiquement depuis l'entrée jusqu'à la sortie de l'anneau. Le champ d'écoulement est composé d'un écoulement axial (écoulement principal) (représenté par la

composante axiale de la vitesse V_z^*) et d'un écoulement secondaire (représenté par les composantes radiales et angulaires de la vitesse), La présence permanente des deux ces écoulements donne à l'écoulement de la convection mixte son caractère tri directionnel (avec trois composantes de vitesse).

L'écoulement secondaire, dans une section transversale du conduit annulaire, peut également être représenté de manière appropriée par les contours des composantes radiales et angulaires de la vitesse.

A l'entrée du système ($z^*=0$) la température est constante, l'écoulement secondaire est inexistant. Loin de l'entrée de l'espace annulaire un écoulement secondaire se manifeste. La chaleur générée dans la paroi du cylindre externe de l'espace annulaire crée un gradient thermique radial orienté vers l'intérieur qui induit nécessairement la force de la poussée thermique qui dépend de la variation de la température et à créer un mouvement transversal du fluide dans le plan ($r^* - \theta$), comme il est illustré dans l'étude de **Touahri [46]**.

L'écoulement secondaire est induit par la force de flottabilité et s'intensifie progressivement dans la direction axiale et son moment augmente avec le nombre de Grashof et sa forme varie en fonction du nombre de Grashof. L'écoulement secondaire pour $Gr = 3781.98$ à des positions axiales sélectionnées : $Z^* = 26.9097$, $\frac{L^*}{4} = 68.58$, $\frac{L^*}{2} = 138.0208$, 174.479 , $\frac{3L^*}{4} = 209.2014$, $L^* = 277.777$ est illustré dans la figure 4.7, l'emplacement axiale où l'écoulement secondaire est plus intense c'est $Z^* = 174.479$. Dans le domaine $33.85 < z^* < L^*$, cet écoulement est accompagné de deux vortex contra-rotatives identiques dans le plan ($r^* - \theta$) et que chaque tourbillon circule dans une demi-section, dans la moitié droite de la section l'écoulement circule dans le sens inverse des aiguilles d'une montre alors qu'il est dans le même sens des aiguilles d'une montre dans la moitié gauche, ces deux cellules se déplacent du haut vers le bas de l'espace annulaire le long de la direction axiale. Cette situation est induite nécessairement par la force de flottabilité qui soulève le fluide plus léger (le fluide le plus chaud) vers la section supérieure ($\theta = 0$) de l'anneau et déplace le plus lourd (fluide plus froid) vers le fond ($\theta = \pi$) de la section. Comme il a été démontré dans la référence [46].

Dans le tableau 4.1, nous présentons la position radiale, axiale et angulaire de $V_{\theta max}^*$ pour différents nombres de Grashof étudiés.

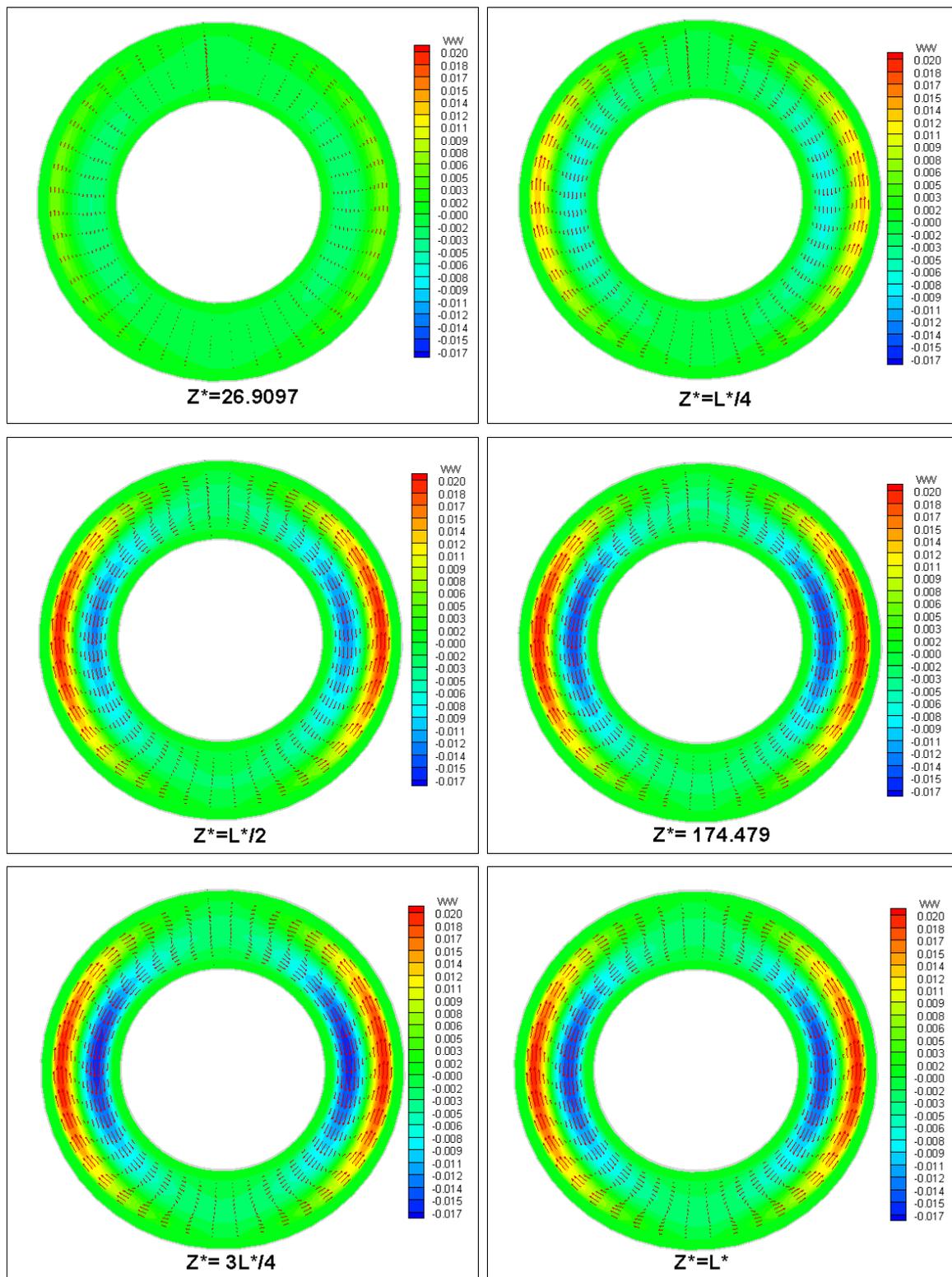


Figure 4.7 : L'écoulement secondaire pour $Gr = 3781,98$ à différentes positions.

Tableau 4.1: Positions de la vitesse maximale $V_{\theta_{max}}^*$ pour différents nombres de Grashof.

Gr	$V_{\theta_{max}}^*$	r^*	z^*	θ
1432.55	0.0103	1.2239	277.77	4.7837
1813.07	0.0124	1.2239	277.77	4.7837
2238.35	0.0144	1.2239	277.77	4.7837
2708.41	0.0162	1.2239	277.77	4.7837
3223.23	0.0182	1.2239	188.368	4.7837
3781.98	0.0202	1.2239	174.479	4.7837

4.3.1.2 L'écoulement axial

Pour une géométrie de deux cylindres concentriques et horizontaux, une longueur du conduit annulaire, un débit de l'écoulement et un flux de chaleur considérés. La synergie de l'effet combiné de la réduction de viscosité et de l'écoulement secondaire induit par la poussée thermique sur les développements (hydrodynamique et thermique) axiaux de l'écoulement et du champ thermique, n'est pas une simple superposition des deux effets séparés puisque chacun des ces effets influence l'autre et cette influence dépend du niveau de chauffage considéré.

En l'absence de volume de chauffage (**le cas de la convection forcée $Gr = 0$**) avec un débit hydro-dynamiquement développé à l'entrée, les contours de la vitesse axiale sont des cercles concentriques à travers l'ensemble de l'anneau, et le champ de l'écoulement est axisymétrique. À une section donnée, la vitesse axiale prend une valeur minimale (0) sur les parois des tubes et une valeur maximale au centre de l'espace annulaire. La formation de l'écoulement change automatiquement en présence d'un volume de chauffage. L'écoulement axial est influencé par le transfert de chaleur conjugué entre la paroi et le fluide ; la génération de l'écoulement secondaire affecte l'écoulement axial principal qui dépend de la distribution de la température dans l'espace annulaire. Pour un tel cas l'écoulement ne peut être axisymétrique, la seule symétrie possible est celle par rapport à un plan vertical (parallèle au vecteur de gravité) passant par $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

La génération d'un mouvement transversal dans le plan ($r^* - \theta$) et la variation de la viscosité en fonction de la température provoquent une variation angulaire de la vitesse axiale, expliquée comme suit : comme la viscosité thermique diminue avec la température du fluide et qui entraîne une augmentation de la vitesse axiale, en conséquence c'est dans la partie supérieure de l'espace annulaire qu'on va retrouver les vitesses les plus élevées où la température du fluide est plus grande.

Une illustration de la variation polaire de la vitesse axiale pour le cas du $Gr=3781.98$ pour des positions axiales choisies ($z^* = 0, 35.59, L^*/4, L^*/2, 190.104$ et L^*) est présenté dans la figure 4.8, sachant que $z^* = 190.104$ est l'emplacement axiale où $V_{z^*max}^*$ de l'écoulement axial égale à 1.674. L'observation générale des six positions choisies montre un net changement du profil de vitesse par rapport à ce qui a été vu précédemment figure 4.1. L'écoulement axial à l'entrée ($z^* = 0$) est axisymétrique avec une vitesse axiale maximale $V_{z^*max}^* = 1.503$ à $r^* = 1.0677$. Dans une courte zone de l'entrée jusqu'à $z^* = 35.59$ c'est avec une faible variation azimutale que la vitesse axiale diminue vers 1.370. A partir de $z^* = 35.59$ qu'on remarque une variation angulaire de la vitesse axiale et que $V_{z^*max}^*$ est situé au haut de l'espace annulaire ($\theta = 0$). Ainsi, à partir de $z^* = 61.631$ la distribution polaire de l'écoulement axial présente des isotaques sous forme de croissant en haut de l'espace annulaire ; sachant que la vitesse maximale est concentrée dans le noyau du croissant. À $z^* = L^*/4 = 68.576$, le maximum $V_{z^*max}^* = 1.484$ à $r^* = 1.130$ et toujours à $\theta = 0$. Ce maximum continue à augmenter suivant la direction axiale jusqu'à $z^* = 190.104$ prend un maximum égale à 1.674, ce dernier commence à diminuer légèrement. La vitesse axiale maximale $V_{z^*max}^*$ à la sortie de l'espace annulaire est égale à 1.617.

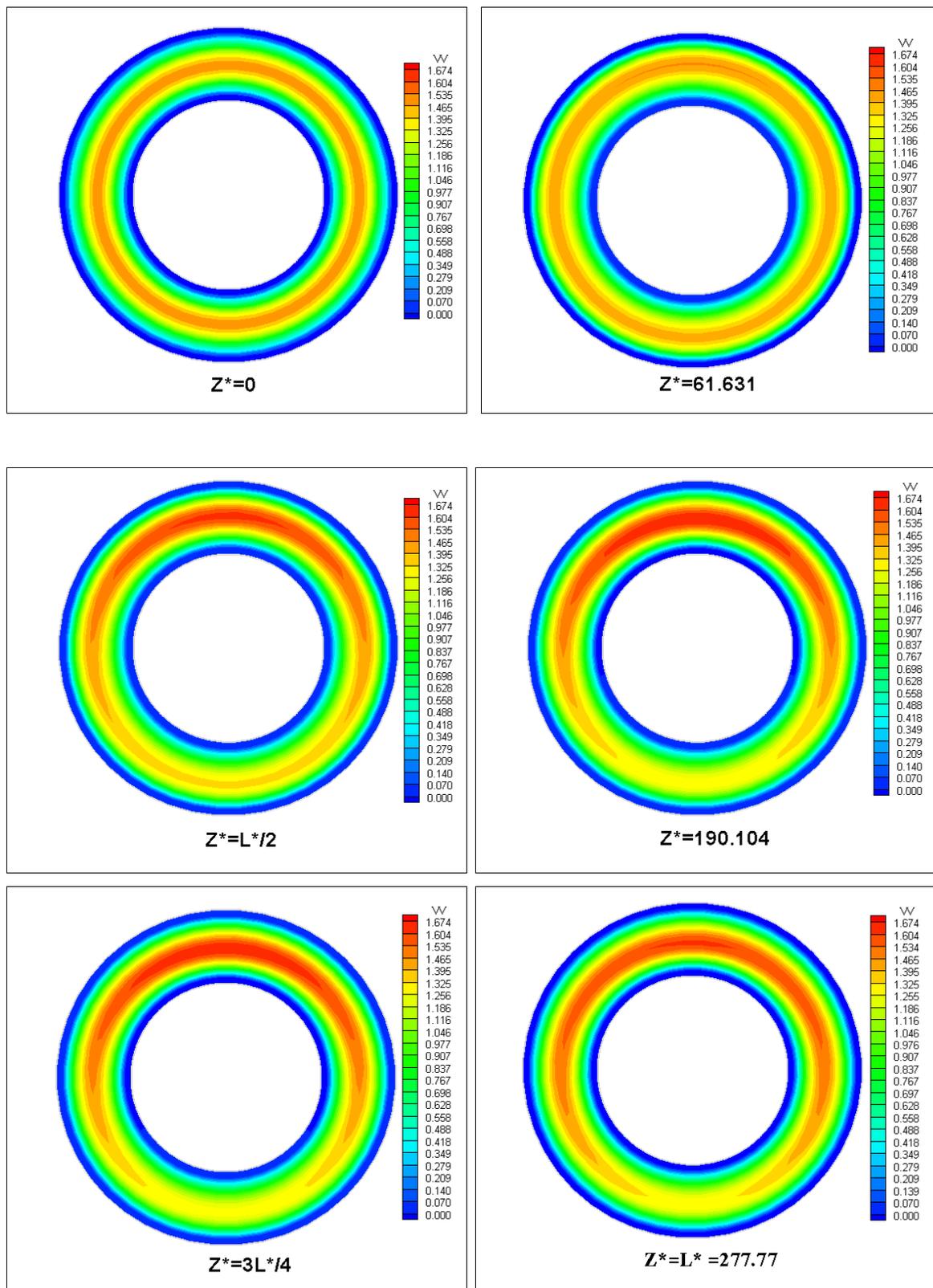


Figure 4.8 : Le champ de la vitesse axiale en des positions axiales choisies à $Gr=3781.98$ (Où le maximum de la vitesse axiale est situé à $z^* = 190.104$).

La figure 4.9 illustre la variation de la vitesse axiale dans le plan verticale pour les cas étudiés suivant : $Gr=0$, $Gr=1432.55$, $Gr=1813.07$, $Gr=2238.35$, $Gr = 2708.41$, $Gr = 3223.23$ et $Gr=3781.98$. Les résultats montrent que l'effet combiné de la réduction de viscosité et de l'écoulement secondaire induit par la poussée thermique sur l'écoulement axial devient de plus en plus important avec l'augmentation du volume de chauffage. Sous cet effet, le maximum de la vitesse axiale $V_{z\max}^*$ est toujours dans la partie supérieure de la sortie de l'espace annulaire. Dans le tableau 4.2, nous présentons la position axiale, radiale et angulaire de $V_{z\max}^*$ pour différents nombres de Grashof étudiés. On remarque que le maximum de la vitesse axiale s'approche de la sortie de l'espace annulaire en diminuant le nombre de Grashof.

Tableau 4. 2 : Positions de la vitesse maximale $V_{z\max}^*$ pour différents nombres de Grashof.

Gr	$V_{z\max}^*$	z^*	r^*	θ
1432.55	1.571	230.035	1.067	0
1813.07	1.592	219.618	1.067	0
2238.35	1.613	214.409	1.067	0
2708.41	1.635	207.465	1.067	0
3223.23	1.654	197.049	1.067	0
3781.98	1.674	190.104	1.067	0

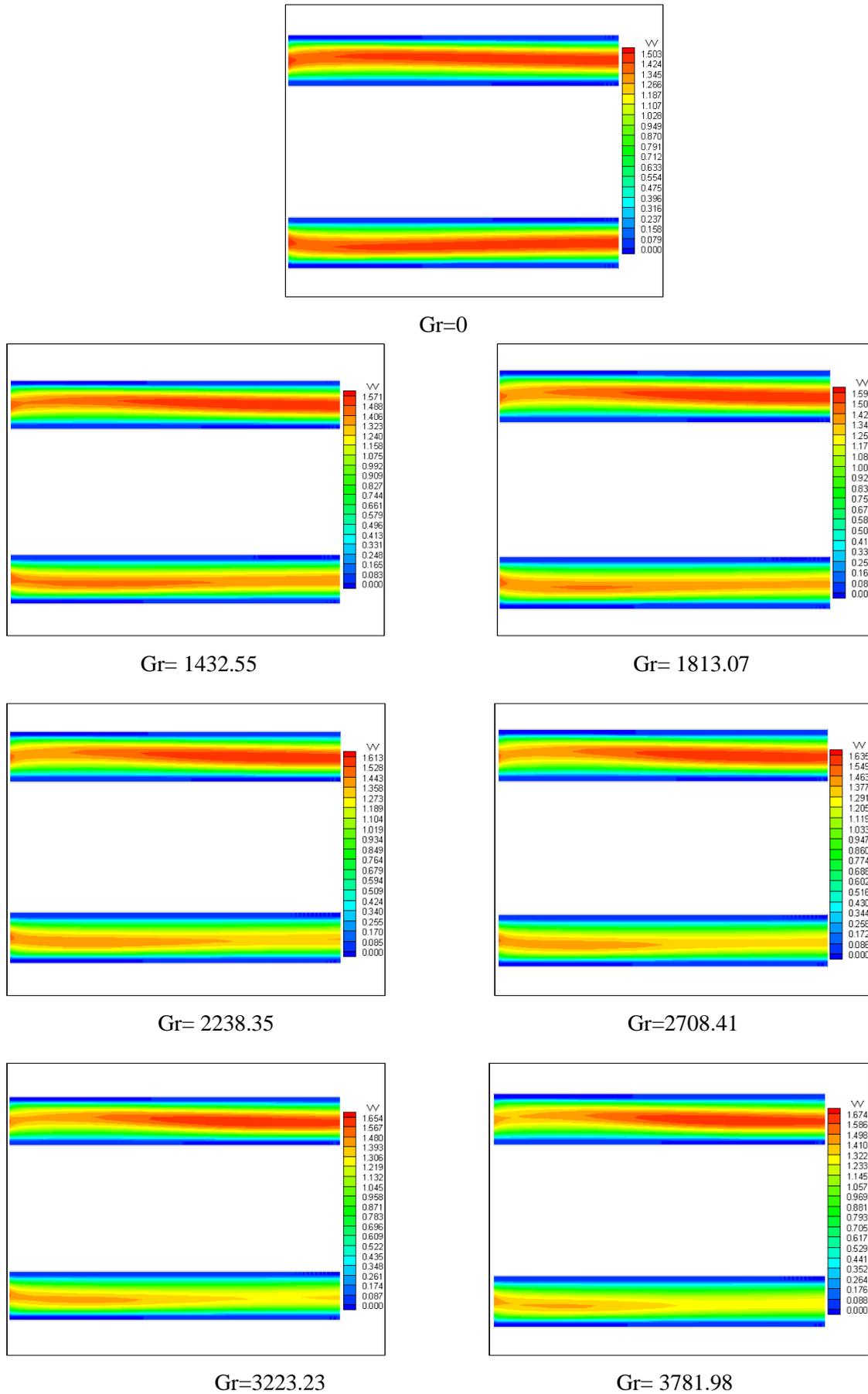


Figure 4.9 : la variation de la vitesse axiale dans le plan verticale pour les cas étudiés.

D'autre part, la figure. 4.10 montre le profil de vitesse axiale $V_z^*(r^*)$ à différentes valeurs de l'angle θ à la position axiale sélectionnée $z^* = 190.104$ et $z^* = 277.777$ (à la sortie de l'anneau) pour un nombre de Grashof égal à 3781.98 (où $z^* = 190.104$ est la position axiale où la vitesse axiale est maximale), on remarque que la vitesse axiale est beaucoup plus grande près du cylindre externe dans la moitié supérieure de l'espace annulaire où la température du fluide est supérieure à celle de la partie inférieure. Ce fait est d'autant plus remarqué au nombre de Grashof est élevé ($Gr=3781.98$). La vitesse axiale prend une valeur minimale dans la partie inférieure de l'espace annulaire et une valeur maximale dans la partie supérieure de l'anneau, exactement à $z^*= 190.104$ et $\theta = 0$ qui est égal à 1.674.

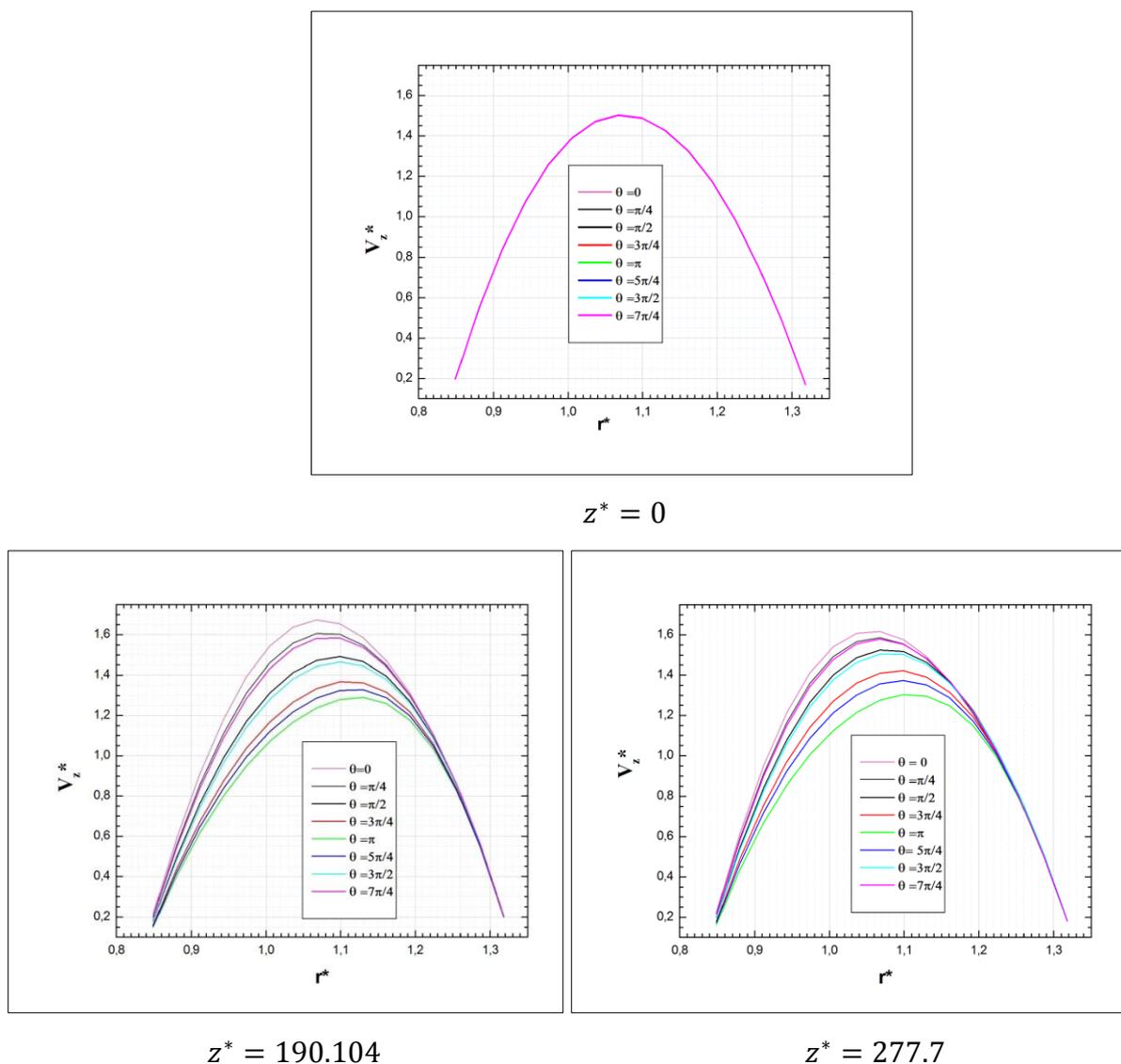


Figure 4.10 : Profil de la vitesse axiale V_z^* pour différentes valeurs de l'angle θ
 Pour $Gr=3781.98$

4.3.2 Le champ thermique

La température est uniforme à l'entrée de l'anneau. L'écoulement est continuellement chauffé dans la direction axiale conduisant à une augmentation linéaire de la température moyenne de mélange dans la section transversale. La forme de la distribution de la température sur la section transversale est affectée par la forme de l'écoulement secondaire lorsqu'elle est suffisamment forte, tandis que les isothermes sont entraînées par le mouvement de l'écoulement secondaire qui dépend du nombre de Grashof et de la position axiale. Ce mouvement sert à redistribuer la température de manière à conserver la température moyenne de mélange dans la section transversale constante.

La comparaison de la distribution de température montre clairement une large variation qualitative et quantitative entre la convection forcée et la convection mixte. Dans le cas de référence (convection forcée), le champ thermique est axisymétrique et les isothermes à une section donnée, sont des cercles concentriques avec une température maximale sur la paroi interne du cylindre externe ($r^* = 1.33$) et la température minimale sur la paroi extérieure du cylindre interne ($r^* = 0.83$).

En présence de chauffage volumétrique, un écoulement transversal existe et modifie la distribution axisymétrique du fluide et la température de la paroi du cylindre et lui donne une variation angulaire. Cette variation est expliquée comme suit : le fluide chaud est au voisinage du cylindre externe et le fluide relativement froid est au voisinage du cylindre interne, entouré par le fluide chaud. Dans la partie haute de la section la stratification thermique est stable car le fluide chaud (léger) se trouve au-dessus du fluide froid. En revanche, dans la partie basse de la section, c'est inverse : le fluide froid est au-dessus du fluide chaud ce qui crée une stratification thermique instable. Une force ascensionnelle est donc induite par cette instabilité par la formation d'une circulation convective qui tend à entraîner le fluide chaud le long de la paroi du cylindre externe vers le haut et le fluide relativement froid vers le bas. Ce mouvement convectif est bien expliqué dans la thèse de **Boufendi [50]**. Dans l'écoulement de convection mixte «le champ thermique est considéré comme symétrique par rapport au plan vertical passant par $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ mais asymétrique par rapport à l'axe de l'espace annulaire. Ceci est dû au mélange dans un sens de rotation provoqué par l'écoulement secondaire dans le plan $(r^* - \theta)$. Donc, en raison du flux de chaleur imposé à la paroi, en toute section de conduit annulaire la chaleur est diffusée à travers la paroi de cylindre externe et est convectée le long de la paroi» [50], la température maximale doit être à la paroi interne du cylindre extérieur dans le plan de symétrie $\theta = 0$.

En effet, la figure 4.11(a)-(d), illustre la répartition des isothermes dans un plan verticale pour l'état de référence ($Gr=0$) et pour les six nombres de Grashof ($Gr= 1432,55, 1813.07, 2238.35, 2708.41, 3223.23, 3781.98$). On voit clairement que l'augmentation du nombre de Grashof entraîne une augmentation de mouvement convectif dans le plan verticale qui induit des températures plus élevées dans la partie supérieur du conduit annulaire et des basses températures dans la partie inférieure.

Radialement, la température diminue à partir de la paroi du cylindre chaud pour atteindre un minimum situé à la paroi du cylindre adiabatique. Concernant les variations angulaires, elles dépendent du domaine axial. Le maximum de la température T_{max}^* est toujours dans la partie supérieure de la sortie de l'anneau $\theta = 0$ et $r^* = 1.38$ et la température minimale se trouve dans la partie inférieure de l'espace annulaire à $\theta = \pi$.

La température maximale de l'espace annulaire de convection mixte est égale à 0,787, 0,806 et 0,819 pour les nombres de Grashof de 1432,55, 2238.35 et 3781,98, respectivement. Ces valeurs sont supérieures à la température maximale de l'espace annulaire de convection forcée égale à 0,716.

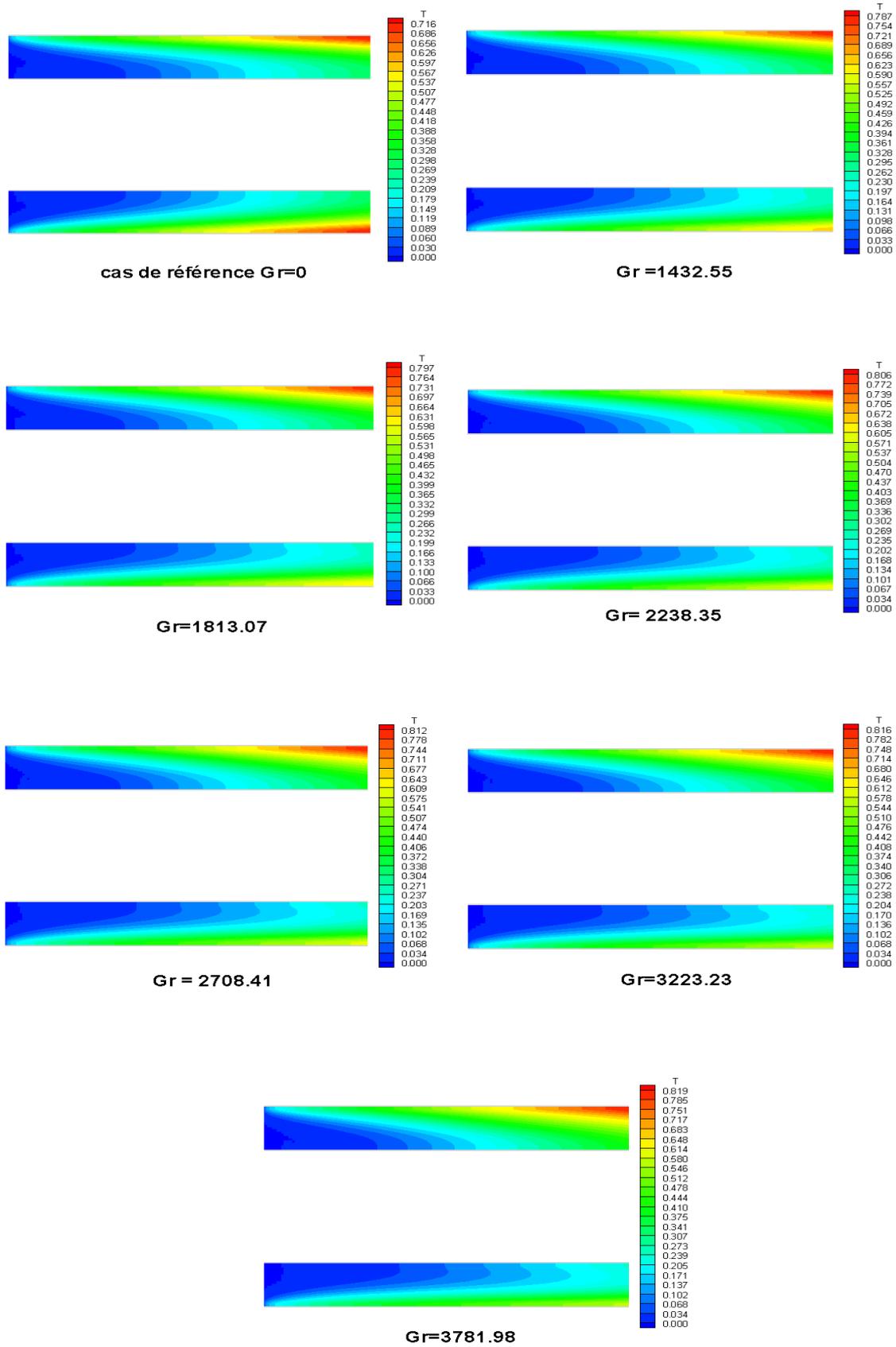


Figure 4. 11 : La répartition des isothermes dans un plan verticale en fonction du nombre de Grashof.

4.3.3 Nombre de Nusselt

Pour comprendre l'effet de l'écoulement induit par la flottabilité (l'écoulement secondaire) sur le transfert de chaleur, ceci peut être réalisé en comparant les variations des nombres axiaux de Nusselt $Nu(z^*)$ et la variation angulaire du nombre de Nusselt local, comme il est illustré dans la figure 4.12 et la figure 4.13. On constate qu'à partir de l'entrée jusqu'à $z^* = 43$, aucune variation du nombre de Nusselt local n'a été constaté comparativement à celle de la convection forcée. Ceci est compréhensible car dans cette zone, l'écoulement induit par la force de flottabilité est très faible. La seule variation est suivant la direction axiale. De cette zone à la sortie, l'écoulement secondaire s'intensifie rapidement et est renforcé par une augmentation du nombre de Grashof, pour cela, la variation azimutale de la distribution de température entraîne une importante variation angulaire de nombre de Nusselt local. Le minimum du Nusselt local se trouve à $\theta=0$ au sommet de l'espace annulaire, le maximum est situé au bas à $(\theta=\pi)$.

On représente la variation du nombre de Nusselt axiale pour tous les cas étudiés dans la figure 4.13. Juste à l'entrée du système, une forte diminution du nombre de Nusselt axial est remarquée pour tous les cas considérés. En aval de cette zone, il y a une amélioration du transfert thermique cela est dû à l'effet de la poussée thermique. Le transfert thermique s'améliore avec l'augmentation du nombre de Grashof. Le nombre de Nusselt axial atteint un maximum à la sortie du conduit annulaire égal à 5.847, 6.320, 6.566, 6.862, 7.208, 7.593 et 8.014 pour différents nombres de Gr qui sont reportés sur le Tableau 4.3.

Dans ce même Tableau 4.3 figurent aussi les valeurs des nombres de Nusselt moyens des cas considérés.

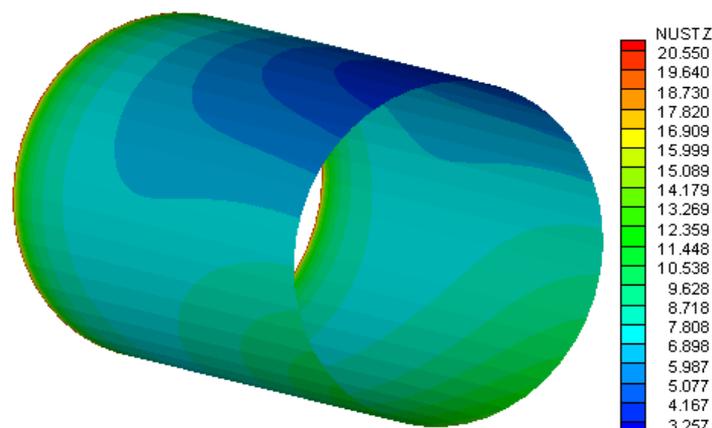


Figure 4.12 : Nombre de Nusselt local le long du conduit annulaire $Gr=3781.98$.

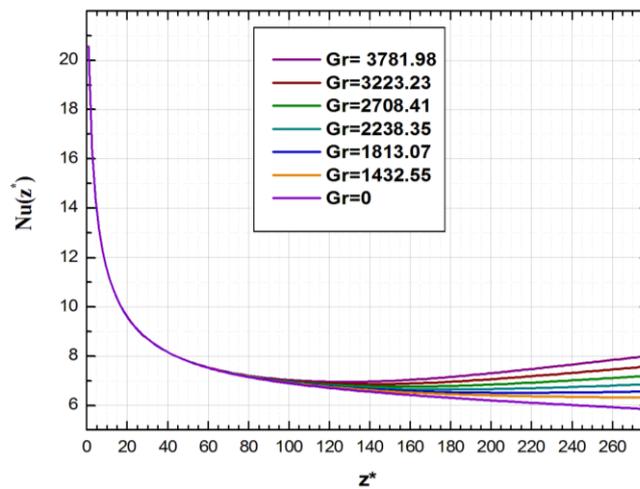


Figure 4.13 : Nombre de Nusselt axial pour tous les cas étudiés.

Tableau 4.3 : Les nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit et les nombres de Nusselt moyens

Gr	1432.55	1813.07	2238.35	2708.41	3223.23	3781.98
Ri	0.0103	0.0130	0.0161	0.0194	0.0231	0.0271
Nombre de Nusselt axial à la sortie du conduit	6.320	6.566	6.862	7.208	7.593	8.014
Nombre de Nusselt Moyen	7.2903	7.3608	7.4497	7.5588	7.6861	7.8313

4.3.4 Développement des propriétés thermo-physiques de fluide

4.3.4.1 La variation de la viscosité

L'effet combiné des propriétés thermophysiques variables et l'écoulement secondaire induit par la force de flottabilité conduit à un meilleur transfert de chaleur ceci est démontré par un nombre de Nusselt considérablement plus élevé en convection mixte que la convection forcée. La viscosité variable et l'écoulement secondaire influence les uns sur les autres. Lorsque le nombre de Grashof est augmenté, l'effet de l'écoulement secondaire et la réduction de la viscosité tend à renforcer la température de mélange dans la section transversale.

Pour montrer le changement significatif dans les propriétés physiques avec la température, la variation de la viscosité est illustrée sur la figure 4.14 pour $Gr = 3781.98$. La viscosité diminue axialement depuis sa valeur maximale adimensionnelle qui est égale à 1 située à l'entrée de l'espace annulaire pour atteindre une valeur minimale à la sortie de l'espace annulaire. À l'entrée de l'espace annulaire il est également clair que proche de la paroi chaude, le long de la direction angulaire la viscosité augmente continuellement du haut vers le bas de l'anneau. A la sortie de l'anneau la température du fluide devient supérieure à l'entrée, pour cette situation μ^* prend une valeur minimale au sommet de l'anneau égale à 0,233 et une valeur maximale égale à 1,018 à $r^* = 1,0365$ et $\theta = \pi$.

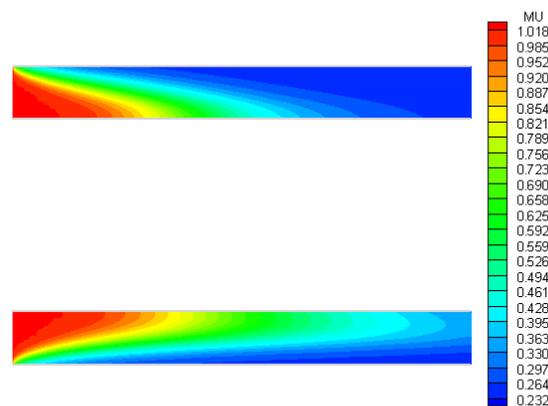


Figure 4.14 : Variation dynamique de la viscosité adimensionnelle pour $Gr = 3781.98$.

4.3.4.2 La variation de la conductivité thermique

Dans la figure 4.15, on a présenté les variations de la conductivité pour $Gr = 3781.98$, sa variation est moins importante que celle de la viscosité. La variation de la conductivité thermique sans dimension à la sortie de l'anneau avec le flux de chaleur considéré est faible, par conséquent, l'amélioration de la diffusion thermique est faible et les effets de la variation de la viscosité et de l'écoulement secondaire sont plus importants.

La conductivité thermique adimensionnelle varie de 0.97 à l'entrée et augmente axialement à 1.154 au sommet de l'anneau situé à $r^* = 1,0677$ et $z^* = 129,340$

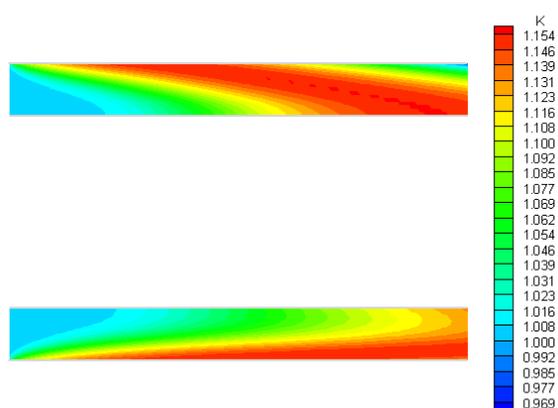


Figure 4.15 : Variation de conductivité adimensionnelle pour $Gr = 3781.98$.

Conclusion générale

Dans ce travail on a considéré un écoulement laminaire, visqueux et incompressible dans un espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques et horizontaux de longueur $L=1\text{m}$. Le cylindre interne est statique et considéré comme parfaitement isolé (adiabatique). Le cylindre extérieur est également statique mais chauffé par une génération de chaleur volumétrique par effet Joule dans toute l'épaisseur du conduit. Cette chaleur est transférée vers un écoulement laminaire incompressible. Le fluide considéré dans cette simulation est l'eau avec un nombre Prandtl égal à 8.082 et sa viscosité et sa conductivité thermique sont considérées comme des fonctions variables de la température. Ainsi que l'approximation de Boussinesq est appliquée. L'écoulement à l'entrée du système est considéré développé pour minimiser la zone d'entrée hydrodynamique avec un nombre Reynolds Re égal à 373,28 et une température constante de 15°C ; tandis qu'à la sortie, l'écoulement est considéré quasi-développée puisque l'on considère que les effets convectifs sont bien plus importants que les effets diffusifs. En revanche le flux thermique diffusif à la sortie est invariant dans la direction axiale qui se traduit par des dérivées secondes de la température par rapport à la coordonnée axiale nulle.

Ce problème physique est modélisé dans un repère cylindrique par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser le domaine physique et les équations de Navier- Stokes et de l'énergie. On a utilisé une discrétisation numérique spatio-temporelle du second ordre. La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation suit l'algorithme SIMPLER. Le maillage utilisé est : 26 points suivant la direction radiale (r), 162 points suivant la direction axiale (z) et 44 points suivant la direction azimutale(θ) ce qui correspond à un nombre totale de **185 328 nœuds**. On

a utilisé un pas de temps $5 \cdot 10^{-4}$ et le temps de marche est poursuivi jusqu'à ce qu'un état stable soit atteint. La validation du code de calcul est vérifiée par la comparaison de nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature.

On considère que le cas de la convection forcée simulée avec un nombre de Grashof égal à zéro ($Gr=0$) et la convection mixte avec les nombres de Grashof $Gr= 1432.55, 1813.07, 2238.35, 2708.41, 3223.23$ et 3781.98 . Les résultats des écoulements et des champs thermiques de la convection forcée et la convection mixte avec des propriétés physiques variables ont été présentés et comparés. Nous avons trouvé que la convection mixte donne des écoulements et des champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée. Le passage de la convection forcée vers la convection mixte change complètement la structure axisymétrique des champs thermiques et dynamiques, ce changement devient de plus en plus important en augmentant le nombre de Grashof. Le cas de la convection forcée a permis de garder de l'entrée jusqu'à la sortie une distribution axisymétrique des champs thermiques et dynamiques, les isothermes du fluide sont des cercles concentriques avec une température minimale sur la paroi extérieure du cylindre interne et une température maximale sur la paroi intérieure du cylindre externe. On constate qu'avec des flux de chaleur relativement élevés, entraînant de larges variations de température, les résultats de la convection mixte montrent que l'effet combiné de la réduction de la viscosité et de la flottabilité conduit à une dissymétrie ce qui provoque une variation angulaire de la vitesse axiale et que la viscosité thermique est inversement proportionnelle à la température du fluide et que la vitesse axiale augmente avec la diminution de la viscosité, une vitesse axiale relativement élevée sera automatiquement obtenue dans la partie supérieure de la section transversale où la température du fluide est plus grande que celle de la partie inférieure.

Pour les paramètres de contrôle géométriques, dynamiques et thermiques considérés, la comparaison des nombres de Nusselt axiaux et moyens nous ont permis de mieux comprendre l'effet de l'écoulement induit par la flottabilité (l'écoulement secondaire) sur le transfert de chaleur.

L'important du travail de cette thèse est publié dans une publication intitulée : « **Numerical Study Of Developing Laminar Mixed Convection In A Heated Annular Duct With Temperature Dependent Properties** », dans le journal : **Journal of Thermal Sciences. Volume 22, N 06, 2018.**

Nos perspectives futures sont nombreuses ; nous pensons à l'amélioration du transfert thermique dans le système de couette cylindrique horizontale en rotation (un ou les deux cylindres en rotation). Ces études peuvent être détaillées dans le cas où la génération de chaleur est produite dans la paroi du cylindre interne ou bien dans les parois des deux cylindres à la fois et voir l'influence de ce changement sur les champs thermiques et dynamiques ainsi que sur les flux et les nombres de Nusselt aux interfaces avec les variations des paramètres de contrôle géométriques, dynamiques et thermiques.

Bibliographie

- [1] **A. Mojtabi et J-P. Caltagirone**, Analyse du transfert de chaleur en convection mixte laminaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux ; ht. J. Heat Mass Transfer, Volume23, pp. 1369-137, (1980).
- [2] **0. Terhmina et A. Mojtabi**, Ecoulements de convection forcé en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire, J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, pp. 583-590, (1988).
- [3] **D.B. Fant; J. Prusa; A.P. Rothmayer**, Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus, Journal of Heat Transfer 112, pp 0889 268, (1990).
- [4] **M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyers et A. Mojtabi**, Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux températures différentes, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 32, No. 2, pp. 261-269, (1989).
- [5] **Lei yang and Bakhtier Farouk**, Three-dimensional mixed convection flows in a horizontal annulus with a heated rotating inner circular cylinder, J. Heat Mass Transfer. Vol 35, pp. 1947-1956, (1992).
- [6] **Jun Young Choi and Moon-Uhn Kim**, Three-dimensional linear stability of natural convective flow between concentric horizontal cylinders, int. J. Heat Mass transfer. Vol 36, No. 17, pp. 4173-4180, (1993).
- [7] **Joo- Sik-Yoo**, Dual steady solutions in natural convection between horizontal concentric cylinders, Int. J. Heat and fluid flow, Vol 17, pp 587-593, (1996).
- [8] **M.N. Borjini, Cheikh Mbow, Michel Daguenet**, Etude numérique de l'influence du transfert radiatif sur la convection naturelle laminaire, bidimensionnelle, permanente, dans un espace annulaire d'axe horizontal, délimité par deux cylindres isothermes, Rev GénTherm, Vol 37, pp 475-487, (1998).
- [9] **Joo-Sik Yoo**, Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus: $Pr \leq 0.3$, Inter Journal of Heat and MassTransfer Vol 41, pp 3055-3073, (1998).

- [10] **Ming I Char and Yuan- Hsiung HSU**, Numerical prediction of turbulent mixed convection in a horizontal rotating annulus with low- Re two equation models, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 41, No 12, pp 1633-1643, (1998).
- [11] **Joo- Sik Yoo**, Mixed convection of air between two horizontal concentric cylinders with a cooled rotating outer cylinder; *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 41, No 2, pp 293-302, (1998).
- [12] **P. Cadiou, G. Desrayoud, G. Lauriat**, L'étude numérique de stabilité des écoulements de convection naturelle dans les espaces annulaires horizontaux de faible épaisseur, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.327, série II b, pp 119-124, (1999).
- [13] **J-S.Yoo**, Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus, *Inter Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 42, pp 3279-3290, 1999
- [14] **J. S. Yoo**, Prandtl number effect on transition of free convection flows in a wide – gape horizontal annulus, *International communication in heat and mass transfer* Vol 26, pp 811-817, and (1999).
- [15] **J-S.Yoo**, Transition and multiplicity of flows in natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus: $Pr = 0.4$, *Inter Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 42, pp 709-722, (1999).
- [16] **J. Mizushima, S. Hayashi, T. Adachi**, Transitions of Natural convection in a horizontal annulus, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 44, pp 1249-1257, (2001).
- [17] **N. Islam, U.N.Gaitonde, and G. K. Sharma**, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 44, pp. 2107-2120, (2001).
- [18] **Chun – Lung Yeh**, Numerical investigation of the three dimensional natural convection inside horizontal concentric annulus with specified wall temperature or heat flux, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol 45, pp 775-784, (2002).
- [19] **Joo- Sik- Yoo**, Dual free- convection flows in a horizontal annulus with a constant heat flux wall, *Int Journal of heat and mass transfer*, Vol 46, pp 2499-2503, (2003).

- [20] **G. Petrone, E. Chenier, G. Lauriat**, Stability of free convection in air-filled horizontal annuli: influence of the radius ratio, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 47, pp 3889–3907, (2004).
- [21] **N. A. Roschina, A. V. Uvarov, A. I. Osipov**, Natural convection in an annulus between coaxial horizontal cylinders with internal heat generation, *International journal of heat and mass transfer*, vol 48, pp 4518-4525, (2005).
- [22] **Min Chan Kim and Chan Kyun Choi**, The onset of instability in the flow induced by an impulsively started rotating cylinder, *chemical Engineering Science*, Vol 60, pp 599-608, (2005).
- [23] **Abdalla M. Al-Amiria and Khalil M. Khanafer**, Numerical simulation of double-diffusive mixed convection within a rotating horizontal annulus, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol 45, pp 567–578, (2006).
- [24] **Mohamed. A. Teamah**, Numerical simulation of double diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder, *Int J of thermal sciences*, Vol 46, pp 637-648, (2007).
- [25] **T. Adachi and S. Imai**, Three-dimensional linear stability of natural convection in horizontal concentric annuli, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 50, pp 1388–1396, (2007).
- [26] **D. Angeli, G. S. Barozzi, M. W. Collins, O. M. Kamiyo**, A critical review of buoyancy-induced flow transitions in horizontal annuli, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol 49, pp 2231-2241, (2010).
- [27] **M. C. Jischke and M. Farshchi**, Boundary layer regime for laminar free convection between horizontal circular cylinders, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol 102, pp 228-235, (1980).
- [28] **Y-R. Li, X-F. Yuan, C-M. Wu, Y-P. Hu**, Natural convection of water near its density maximum between horizontal cylinders, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 54, pp 2550–2559, (2011).

- [29] **R.E. Powe, C.T. Carley, E.H. Bishop**, Free convective flow patterns in cylindrical annuli, ASME Journal of Heat Transfer, Vol 91, pp 310-314, (1969).
- [30] **M. Naimi, R. Devienne et M. Lebouche**, Etude dynamique et thermique de l'écoulement de couette Taylor Poiseuille, cas d'un fluide un seuil d'écoulement, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 33, N02, pp 381-391, (1990).
- [31] **M. T. Ouazzani J. K. Platten et A. Mojtabi**, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes-II, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33, pp. 1417-1427, (1990).
- [32] **R. Hubacz and S. Wroński**, Horizontal Couette – Taylor flow in a two – phase gas- liquid system: flow patterns, Experimental Thermal and Fluid science, Vol 28, pp 457-466, (2004).
- [33] **C.J.Ho, Y.H. Lin, T.C.Chen**, A Numerical study of natural convection in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli with mixed boundary conditions, Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol 10, N1, pp 40-47, (1989).
- [34] **B. B. Rogers and L. S. Yao**, The effect of mixed convection instability on heat transfer in a vertical annulus, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 33, N. 1, pp 79-90, (1990).
- [35] **D. C. Kim and Y. D. Choi**, Analysis of conduction – natural convection conjugate heat transfer in the gap between concentric cylinders under solar irradiation, International Journal of Thermal Sciences Vol 48, pp 1247–1258, (2009).
- [36] **L. P. M. Colombo, A. Lucchini, and A. Muzzio**, Fully developed laminar mixed convection in uniformly heated horizontal annular ducts, International Journal of Thermal Sciences, Vol 94, pp. 204-220, (2015).
- [37] **S. Touahri et T. Boufendi**, Conjugate heat transfer in the case of variable fluid properties in a heated horizontal annulus, Heat Transfer Research, Vol 46 (11),pp 1019–1038, (2015).
- [38] **S. Touahri, T. Boufendi**, Conjugate Heat Transfer with Variable Fluid Properties in a Horizontal Annulus, Sciences et Technologie A, N°32, pp 35-41, (2010).
- [39] **S. Touahri, T. Boufendi**, Three-Dimensional Mixed Convection in Horizontal Annulus Heated by Joulean Effect, International Conference on Energy and Sustainable Development, Adrar, Algérie, 29-30 November (2011).

- [40] **M. Ciamp, S. Faggiani, W. Grassi and G. Tuoni**, Mixed convection heat transfer in horizontal concentric annuli for transitional flow condition, *Int heat mass transfer*, Vol 30, Nu 5, pp 833-841, (1987).
- [41] **H. Pfitzer and H. Beer**, Heat transfer in an annulus between independly rotating tubes with turbulent axial flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 35, N03, PP 623-633, (1992).
- [42] **H. A. Mohammed, C. Antonio and R. Saidur**, Experimental study of forced and free convective heat transfer in the thermal entry region of horizontal concentric annuli, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol 37, pp. 739–747, (2010).
- [43] **M. Alipour, R. Hosseini, A. Rezania**, Radius ratio effects on natural heat transfer in concentric annulus, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol 49, pp 135–140, (2013).
- [44] **M. Hongting, Z. Ding, Y. Cao, X. Lv, W. Lu, X. Shen, L. Yin**, Characteristics of the heat transfer from a horizontal rotating cylinder surface, *Experimental Thermal and Fluid Science* 66, pp 235–242, (2015).
- [45] **H. D. Baehr and K. Stephan**, *Heat and Mass Transfer*, Springer- Verlag, Berlin, (1998).
- [46] **S. Touahri**, Phénomènes de convection mixte à propriétés variables dans les conduits cylindriques à ailettes et sans ailettes, Thèse de doctorat en science, Université Mentouri Constantine (2012).
- [47] **S. D. Churchill and H. S. Chu**, Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder, *Int. J. Heat Transfer*, vol. 18, pp. 1049-1053 (1975).
- [48] **S. V. Patankar**, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New York, (1980).
- [49] **C. Nonino and S. D. Guidice**, Finite element analysis of laminar mixed convection in the entrance region of horizontal annular ducts, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 29, pp 313–330, (1996).
- [50] **T. Boufendi.**, Contribution à l'étude théorique des transferts thermiques dans un conduit cylindrique horizontal soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Mentouri Constantine (2005).

دراسة عددية للتدفقات مع التحويلات الحرارية لمائع ذي خواص فيزيائية متغيرة في الفضاء الحلقي الاسطواني يتعرض للتدفئة الحجمي.

ملخص:

الحمل الحراري المختلط بين اسطوانتين متحدتي المركز ذات الخواص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة تطرقنا له في هذه الدراسة العددية ثلاثيه الابعاد للتدفق أصفحي، لزج وغير قابل للضغط. المائع المستعمل في هذه المحاكاة هو الماء (رقم براندل يساوي 8.082) حيث معامل اللزوجة ومعامل التوصيل الحراري المائع يتعلقان بدرجة الحرارة. الشروط الحرارية في هذه الدراسة كالاتي: تسخين منتج بانتظام عن طريق منبع طاقوي في الجدار الصلب للاسطوانة الخارجية بينما الاسطوانة الداخلية فهي كضومة. الحمل المختلط المتولد في المائع والتوصيل الحراري في سطح الاسطوانة الخارجية هما مصدرا التحويل الحراري المترافق. يؤخذ بعين الاعتبار في هذه الدراسة الضياع الحراري عن طريق الاشعاع و الحمل في اتجاه المحيط. الجريان و الحقل الحراري عبر عنه بواسطة معادلة الاستمرارية، معادلات كمية الحركة ومعادلة الطاقة مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية و الحدية المناسبة باستخدام نظام الإحداثيات الاسطوانية. لحل نظام المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية استعملنا طريقة الحجوم المنتهية من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء والزمن. حيث استخدمت شبكة لحل هذه المعادلات مكونة من $162 \times 44 \times 26$ من العقد وفقا للتوجيه الشعاعي، الزاوي والمحوري. في هذه الدراسة نثبت عددين لا بعدين هما عدد رينولدز الذي يترجم شدة ديناميكا التدفق وعدد براندل الذي هو خاصية من خصائص الفيزيائية للسائل اللذان يساويان على الترتيب 373.28 و 8.082 كما نثبت نسب المظاهر الهندسية يساوي 277.77، من خلال تغيير عدد غرشوف الذي يعكس تأثير قوى الطفو على التدفق. ندرس آثاره على وضعي الحمل الحراري، القسري والمختلط. من اجل معايير التحكم الهندسية ، الديناميكية والحرارية السابقة الذكر تم عرض ومقارنة نتائج التدفقات والحقول الحرارية للحمل القسري والحمل المختلط ذو الخصائص الفيزيائية المتعلقة بدرجة الحرارة. الانتقال من الحمل القسري إلى الحمل المختلط يغير تماما في البنية المحايدية للحقلين الحراري والدينامي، هذا التغيير يصبح أكثر وأكثر أهمية من خلال زيادة عدد غرشوف. من اجل اعداد غرشوف التي تمت دراستها، فإن جريان ثانوي يتطور في المستوى القطبي على شكل دوامتين متعاكستين في الدوران هو السبب في الاختلاف المحيطي لدرجة الحرارة وتبعاً لذلك، الخصائص الفيزيائية لمائع حيث تبرز ظاهرة التقسيم الطبقي لدرجات الحرارة كما تؤدي الدوامات الناتجة إلى تحسين نقل الحرارة كميّاً من خلال زيادة عدد نسلت. و يتضح الاعتماد الحراري للخواص الفيزيائية بشكل جيد مع تصرف تنضيدي في أي سطح قطبي و تغير محوري اكثر اهمية للزوجة منه للموصلية.

الكلمات المفتاحية: الحمل القسري والمختلط / أسطوانات متحدة المركز و افقية / الخصائص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة / طريقة الحجوم المنتهية.

Numerical study of flows combined with thermal transfers of a fluid with variable physical properties in a cylindrical annular space subjected to volumetric heating

Abstract:

The mixed convection between two concentric horizontal cylinders with physical properties which depend on temperature is presented in this three-dimensional numerical study of laminar, viscous and incompressible flow. The fluid considered is water with a Prandtl number equal to 8.082 and its viscosity and thermal conductivity are considered variable functions of the temperature. The thermal conditions are as follows: a uniform volume heating produced by an internal source of energy in the thickness of the outer cylinder, while the inner cylinder is adiabatic. The mixed convection generated in the fluid, and the thermal conduction in the wall of the outer cylinder are at the origin of a conjugated thermal transfer. The thermal losses by radiation and convection towards the ambient are considered. The flow and thermal fields are modeled by the continuity equation, momentum and energy equations with appropriate initial and boundary conditions using a cylindrical coordinate system. The system of nonlinear partial differential equations is solved by a finite volume numerical method with second order accurate spatiotemporal discretizations. The mesh used in this study is $26 \times 44 \times 162$ in the radial, azimuth and axial directions respectively. In this study, two adimensional control parameters are fixed: the Reynolds numbers, which indicates the flow dynamics, and the Prandtl number which is a physical characteristic of the fluid, are equal respectively, 373.28 and 8.082. While the geometric aspect ratio equal 277.77. By varying the number of Grashof, which indicate the effect of, buoyancy forces on the flow. We study its effects on the two modes of convection, forced and mixed. For geometric, dynamic and thermal control parameters considered, the results of the flows and thermal fields of forced convection and mixed convection with varying physical properties were presented and compared. The passage from forced convection to mixed convection completely changes the axisymmetric structure of thermal and dynamic fields; this change becomes more and more important by increasing the number of Grashof. For the Grashofs numbers studied, a secondary flow develops in the polar plane in the form of two contra-rotating vortices, is always the cause of the circumferential variation of the temperature and in consequence, the physical properties of the fluid. The phenomenon of stratification of temperature is highlighted and the vortices obtained lead to an improvement of the heat transfer quantified by the increase of the number of Nusselt. The thermo-dependence of the

properties is well evidenced with a stratified behavior in any polar plane and an axial variation more important for the viscosity than for the conductivity.

Keywords: Forced and Mixed Convection / Concentric and horizontal cylinders / Physical properties depend on temperature / finite volume method.

Résumé

La convection mixte entre deux cylindres horizontaux concentriques avec des propriétés physiques qui dépendent de la température est présentée dans cette étude numérique en trois dimensions d'un écoulement laminaire, visqueux et incompressible. Le fluide considéré est l'eau avec un nombre Prandtl égal à 8.082 et sa viscosité et sa conductivité thermique sont considérées dépendantes de la température. Les conditions thermiques sont les suivantes : un chauffage volumique uniforme produit par une source interne d'énergie dans l'épaisseur du cylindre externe, tandis que le cylindre interne est adiabatique. La convection mixte générée dans le fluide, et la conduction thermique dans la paroi du cylindre externe sont à l'origine d'un transfert thermique conjugué. Les pertes convectives et radiatives vers le milieu ambiant sont considérées. L'écoulement et le champ thermique sont modélisés par l'équation de continuité, les trois équations de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie avec des conditions initiales et aux limites appropriées en utilisant un système de coordonnées cylindrique. Le système d'équations différentielles non linéaires, aux dérivées partielles d'ordre deux est résolu numériquement par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. Le maillage utilisé dans cette étude est $26 \times 44 \times 162$ dans les directions radiale, azimutale et axiale respectivement. Dans cette étude on fixe deux paramètres de contrôle adimensionnels : le nombre de Reynolds qui traduit la dynamique de l'écoulement et le nombre de Prandtl qui est une caractéristique physique du fluide, sont égaux respectivement à 373.28 et 8.082, tandis que le rapport d'aspect géométrique est fixé à 277.77 ; et en faisant varier le nombre de Grashof qui traduit l'effet des forces ascensionnelles sur l'écoulement, on étudie ses effets sur les deux modes de convection, forcée et mixte. Pour les paramètres de contrôle géométrique, dynamique et thermique considérés, les résultats des écoulements et des champs thermiques de la convection forcée et la convection mixte avec des propriétés physiques variables ont été présenté et comparé. Le passage de la convection forcée vers la convection mixte change complètement la structure axisymétrique des champs thermiques et dynamiques ; ce changement devient de plus en plus important en augmentant le nombre de Grashof. Pour les nombres de Grashof étudiés, un écoulement secondaire se développe dans le plan polaire sous forme de deux vortex contra-rotatifs qui est la principale cause de la variation circumférentielle de la température, et en conséquence des propriétés physiques du fluide. Le phénomène de stratification de température est mis en évidence le long du conduit annulaire et les tourbillons obtenus conduisent à une nette amélioration du transfert de chaleur quantifiée par l'augmentation du nombre de Nusselt. La thermo-dépendance des propriétés est bien mise en évidence avec un comportement stratifié dans tout plan polaire et une variation axiale plus importante pour la viscosité que pour la conductivité thermique.

Mots Clés : Convection Forcée et Mixte / Cylindres concentriques et horizontaux / Propriétés physiques dépendent de la température / Méthode des volumes finis.