

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI-CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

N° de série :

THESE

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT

3^{ème} CYCLE (LMD) EN PHYSIQUE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME :

Développement et Traitement de Certains Problèmes de Mécanique Quantique

PRESENTEE PAR :

ILYAS HAOUAM

Devant le jury

Présidente :

Mme. Baya Bentag Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Rapporteur :

Mr. Lyazid Chetouani Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Examineurs :

Mr. Nouredine Mebarki Prof Université Frères Mentouri, Constantine

Mr. Abdelmalik Boumali Prof Université Larbi Tebessi, Tébessa

Mr. Mekki Aouachria Prof Université Hadj Lakhdar, Batna

Mr. Slimane Zaim Prof Université Hadj Lakhdar, Batna

© copyright by Ilyas Haouam

All Rights Reserved

DÉVELOPPEMENT ET TRAITEMENT DE CERTAINS PROBLÈMES DE MÉCANIQUE QUANTIQUE

Ilyas Haouam ¹

1. ilyashaouam@live.fr

DÉDICACE

A mes parents,
A mes deux soeurs et mon neveu Louai,

Je dédié cet humble travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux de m'avoir donné la volonté et le courage de mener à bien cette thèse de Doctorat. Et d'une façon toute particulière, je remercie mes chers parents qui m'ont toujours soutenu au cours de mes études.

Je tiens à remercier le Pr Lyazid Chetouani, mon directeur de thèse. Pour l'avoir cotoyé pendant toute la durée du travail, j'ai eu l'occasion de découvrir l'énergie, la compétence et la détermination d'un chercheur passionné dont j'ai apprécié également la complète disponibilité.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Pr B. Bentag, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance. Je remercie également Pr N. Mebarki, Pr A. Boumali, Pr M. Aouachria et Pr S. Zaim d'avoir acceptés de faire partie du jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude aux nombreuses personnes qui m'ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse, particulièrement prof N. Boudiaf et ma chère amie du Jordanie Salam Abdul Kareem Abu Hammad.

Liste des tableaux

B.1 Spin des particules élémentaires	104
B.2 Spin des particules composites	104

Table des figures

1.1	Représentation des cartes Seiberg-Witten	14
3.1	Photographie du premier positron détecté	36
4.1	Présentation diagrammatique du chemin de la limite non relativiste	92

Liste des Symboles

x^μ	Le quadricvecteur contravaillant (indice en haut)
x_μ	Quadri-vecteur covariant (indice en bas)
\hbar^{eff}	La constante de Planck effective
Θ, η	Les paramètres de la non-commutativité de l'espace de phase
γ	Paramètre de la fluidité d'espace dans la non-commutativité
\hat{W}	Opérateur de Weyl
Λ_{nc}	Échelle non-commutative
$f(x), \tilde{f}(k)$	Une fonction d'espace vectoriel, et sa transformée de Fourier
I	L'invariant dynamique de Lewis-Riesenfeld
\star	Le produit star de Moyal
$F_{\mu\nu}$	Tenseur champ électromagnétique
A^μ	Quadripotentiel électromagnétique
$\delta, \hat{\delta}$	Des transformations de jauge commutative et non-commutative
$\Lambda, \hat{\Lambda}$	Des paramètres de jauge commutative et non-commutative
V_{NL}, V_L	Les potentiels non-local et local
$*, \dagger$	la conjugaison complexe
ρ_{NL}, ρ_L	Les densités de courant non-locale et locale
\vec{j}, j^μ	Vecteur de densité de courant, et quadri-vecteur de la densité de courant
$g^{\mu\nu}$	Tenseur métrique dans l'espace-temps de Minkowski
\square, Δ	Le d'Alembertien et le laplacien
$\alpha_i, \beta, \sigma_i$	Matrices de Dirac et de Pauli
ψ, ϕ, χ	Des spineurs de Dirac
$\Psi^{\mu\nu}$	Tenseur-spineur
$\bar{\psi}$	Le spineur conjugué de Dirac
ψ	Le spineur non-commutatif de Dirac
B, \mathcal{H}	Le champ magnétique (l'induction magnétique et le champ d'aimantation)
\vec{E}	Le champ électrique (volts par mètre)
\vec{M}	Vecteur de la magnétisation
$(c_{ij}^\pm)_{\mathcal{HP}}$	L'image Holstein-Primakoff
H_k	L'Hamiltonien de Kemmer
μ	Le moment magnétique intrinsèque
\vec{L}, \vec{S}	Opérateurs du moment angulaire orbital et du spin
U_{FW}	Opérateur unitaire qui caractérise la transformation de FW
\mathcal{U}, \mathcal{H}	La valeur moyenne locale et la largeur de la non-localité

Table des matières

DÉDICACE	i
REMERCIEMENTS	ii
LISTE DES TABLEAUX	ii
LISTE DES FIGURES	iii
Liste des Symboles	v
Introduction générale	2
1 Mécanique quantique non-commutative	5
1.1 Introduction	5
1.2 La géométrie non-commutative	6
1.2.1 La non-commutativité dans l'espace-phase	6
1.2.2 La non-commutativité dépendante du temps	8
1.3 La quantification de Weyl (opérateur de Weyl)	9
1.4 Le produit Groenewold-Moyal (produit \star)	10
1.4.1 Définition et formule	10
1.4.2 Quelques propriétés et règles	11
1.5 Les cartes de Seiberg-Witten (SW)	12
1.6 La translation linéaire du décalage de Bopp	16
1.6.1 Le décalage de Bopp	16

1.6.2	Le décalage de Bopp dépendant du temps	17
1.7	Conclusion	18
2	Les équations non-relativistes	19
2.1	Introduction	19
2.2	L'équation de Schrödinger	21
2.3	Equation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local dans un espace de phase commutatif	22
2.3.1	Potentiel non-local de Frahn-Lemmer	22
2.3.2	L'équation de continuité dans un espace de phase commutatif	24
2.4	Equation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local dans un espace de phase non-commutatif	26
2.4.1	Le potentiel non-local de Frahn-Lemmer dans un espace de phase non-commutatif	27
2.4.2	L'équation de continuité dans un espace de phase non-commutatif	27
2.5	Conclusion	30
3	Les équations relativistes	31
3.1	Introduction	31
3.2	L'équation de Klein-Gordon (KG)	32
3.3	L'équation de Dirac	34
3.3.1	L'équation de Dirac dans l'espace de phase commutatif	35
3.3.1.1	La densité de probabilité	37
3.3.1.2	La notion covariante	37
3.3.1.3	L'interaction électromagnétique	38
3.3.2	L'équation de Dirac dans un espace de phase non-commutatif	39
3.3.3	L'équation de Dirac dans un espace de phase non-commutatif dépendant du temps	41

3.3.3.1	L'équation de Dirac à (2+1) d dans un espace de phase non-commutatif dépendant du temps	41
3.4	L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)	50
3.4.1	Equation de DKP dans une phase non-commutative	51
3.4.2	Equation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique dans un espace de phase non-commutatif	53
3.5	L'équation de Fisk-Tait décrivant le mouvement des fermions de spin-3/2	55
3.5.1	L'équation de Fisk-Tait dans un espace commutatif	56
3.5.2	L'équation de Fisk-Tait dans un espace non-commutatif	58
3.5.3	L'équation de continuité dans les deux types d'espace	60
3.5.3.1	Cas d'espace commutatif	60
3.5.3.2	Cas d'espace non-commutatif	62
3.5.4	Une contribution additionnelle	63
3.5.4.1	La densité de courant de spin	63
3.5.4.2	La transformation de Holstein-Primakoff	65
3.6	Conclusion	67
4	La limite non relativiste des équations relativistes	69
4.1	Introduction	69
4.2	La limite non relativiste de l'équation de Dirac	71
4.2.1	L'approche des composantes grandes-petites du spineur dans l'espace-phase non-commutatif	71
4.2.1.1	Facteur gyromagnétique de l'électron ($g=2$)	73
4.2.2	La transformation de Foldy-Wouthoyusen dans l'espace-phase non-commutatif	75
4.3	La Limite non relativiste de l'équation de DKP	80
4.3.1	La transformation de Foldy-Wouthuysen pour un boson libre en phase non-commutative	80
4.3.2	La transformation de FW dans un espace de phase non-commutatif	83
4.4	Conclusion	89

TABLE DES MATIÈRES

Conclusion générale	90
Bibliographie	93
Les Annexes	99
A Calculs et simplifications	100
B Le spin en mécanique quantique	103
Publications Scientifiques	105
Abstract	107
Résumé	108

Introduction générale

Le pouvoir de la physique réside dans le fait qu'un seul cadre permet de décrire des systèmes extrêmement différents. Mais même les plus grandes équations descriptives atteignent parfois leurs limites. Un nombre considérable d'équations de physique ne sont que des approximations. Ce que les physiciens veulent vraiment, ce n'est pas une approximation, mais des équations qui relient les comportements du monde directement aux fondements de la réalité, c'est un grand défi. Mais avec les équations du mouvement, ils peuvent en réaliser au moins une partie. Tant que nous puissions toujours extraire l'équation de continuité à l'aide des équations de mouvement, nous pouvons aussi la considérer pas une approximation mais une des équations qui décrivent les concepts de base, où elle exprime l'aspect cinématique d'une symétrie et constitue une équation auxiliaire utile.

Au fil des ans, les équations de mouvement des particules pour un spin arbitraire ont été considérées comme un sujet à examiner minutieusement. C'est pourquoi nous nous intéressons aujourd'hui aux équations relativistes qui décrivent le mouvement des particules relativiste. Dernièrement, il a été très intéressant d'étudier les bases théoriques de la physique moderne pour expliquer la nature et le comportement de la matière et de l'énergie à l'échelle subatomique, parfois appelés théories quantiques telles que : La gravité quantique, la relativité générale quantique, l'optique et l'information quantiques, le modèle standard et les théories de jauge. Cette recherche peut parfois être représentée en termes de régime basse énergie par le biais d'examen des propriétés non relativistes dans diverses interactions telles que : Les champs électromagnétiques externes, les interactions de type oscillateur de Dirac ou Kemmer, potentiel de Lennard-Jones, potentiel de Kratzer, potentiel carré... La limite non relativiste concerne les

faibles vitesses devant la vitesse de la lumière¹, plus en détail, il s'agit du régime de la faible énergie devant l'énergie de masse [1], où la limite non relativiste peut être réalisée grâce à de nombreuses méthodes. Nous verrons ces méthodes dans les prochains chapitres.

L'étude de la physique dans les espaces non-commutatifs a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années, non seulement parce que l'espace non-commutatif est nécessaire lorsque l'on étudie le faible rendement énergétique de la D-brane avec un fond de champ B, mais aussi parce que dans une très petite échelle de cordes ou dans des conditions d'énergie très élevées, des effets de non-commutativité d'espace peuvent apparaître. Aussi une des motivations fortes de la géométrie non-commutative, est d'obtenir un cadre mathématique cohérent dans lequel il serait possible d'écrire une gravitation quantique. Alors ce travail est réalisé au sein de la géométrie non-commutative en raison de son importance et de ses avantages principalement en mécanique quantique et théorie quantique des champs. Nous verrons ce type de géométrie plus profondément dans le premier chapitre.

La thèse est organisée et composée de quatre chapitres de la façon suivante : Dans le premier chapitre nous présentons la géométrie non-commutative en mécanique quantique, on rappelle ainsi brièvement les méthodes suivantes : La quantification de Weyl, le produit de Moyal-Weyl, les transformations linéaires de décalage de Bopp, les cartes de Seiberg-Witten. Le deuxième chapitre, présente de façon générale l'équation de Schrödinger non-commutative en interaction avec des potentiels local et non-local, et son équation de continuité dans les cas commutatif et non-commutatif, par la suite nous voulons examiner l'effet de la non-commutativité en espace de phase sur les quantités conservées.

Le chapitre suivant résume quelques notions sur la mécanique quantique relativiste, alors nous étudierons les équations relativistes non-commutatives de Klein-Gordon, de Dirac, de Kemmer et de Fisk-Tait. Puis l'équation de Dirac sera considérée dans l'espace de phase non-commutatif et dépendant du temps, la non-commutativité dépendante du temps sera introduite à travers la translation de décalage-Bopp dépendante du temps. Ensuite, l'équation de Fisk-Tait non-commutative avec une interaction électromagnétique sera utilisée pour obtenir l'équation

1. Pour tout problème de physique quantique, il est admis que selon la vitesse des particules, la mécanique quantique non relativiste ou relativiste décrit et explique correctement les phénomènes physiques.

de continuité; nous examinerons l'effet de la non-commutativité sur le manque de définition de la charge totale obtenue à partir de la densité de probabilité. Ainsi que le lien entre les fermions et les bosons dans l'espace de Fock en utilisant la représentation de Holstein-Primakoff sera montré.

Puis le dernier chapitre est consacré à la limite non relativiste des équations non-commutatives de Dirac et de DKP en présence d'une interaction électromagnétique, l'effet de la non-commutativité sur la limite non relativiste sera examiné. Les méthodes de la transformation de Foldy-Wouthuysen et l'approche des grandes et petites composantes de la fonction d'onde seront utilisées pour obtenir l'équation non relativiste non-commutative de Schrödinger-Pauli. Nous finirons par exposer l'essentiel de nos résultats dans la conclusion.

Chapitre 1

Mécanique quantique non-commutative

1.1 Introduction

Notre but dans ce chapitre, est de présenter l'importance et les avantages de la géométrie non-commutative en mécanique quantique et en théorie des champs quantiques. OÙ l'idée de la non-commutativité dans l'espace-phase est fortement motivée en grande partie par les fondements de la mécanique quantique dans le cadre de la quantification canonique, et l'origine de la géométrie non-commutative relative en première fois à l'idée d'espace-temps non-commutatif qu'a été suggérée par Heisenberg en 1930 et a présentée en 1947 par Snyder [2] à la nécessité de régulariser la divergence de la théorie des champs quantiques. Cette structure pourrait apparaître comme une généralisation naturelle de la non-commutativité d'espace de phase en mécanique quantique. Et en deuxième fois à la recherche d'espaces topologiques (lorsque les C^* -algèbres commutatives sont remplacées par des algèbres de fonctions non-commutatives). Plus tard le concept de la géométrie non-commutative a été ravivé par A. Connes et d'autres en 1985 [3], qui ont théorisé l'idée d'une structure différentielle dans un cadre non-commutatif¹. Ensuite, ce type de géométrie a trouvé un grand soutien et encouragements par de nombreux résultats mathématiques : théorème de Gelfand-Naïmark sur les C^* -algèbres, cohomologie cyclique de l'algèbre $C^\infty(M)$, K-théorie des C^* -algèbres, relations entre opérateurs de Dirac et

1. Par l'étude et la définition de la cohomologie cyclique. Ils montraient ainsi que la notion de calcul différentiel sur les variétés avait un équivalent non-commutatif.

métriques riemanniennes, théorème de Serre-Swan... La théorie non-commutative remplace la non-commutativité des opérateurs liés aux coordonnées espace-temps par une déformation de l'algèbre des fonctions définies sur l'espace-temps. D'autre part, une version non-commutative d'une théorie de champ s'obtient en remplaçant la théorie ordinaire par une théorie non-commutative, dont en remplaçant les champs ordinaires par des champs non-commutatifs et les produits ordinaires par des produits de Moyal-Weyl. Précisément, N. Seiberg et E. Witten ont publié ces dernières années leur célèbre article [4], qui était l'article le plus cité selon SPIRES², cela a suscité et encouragé un grand intérêt pour la géométrie non-commutative, qui est devenue ces dernières années courante et très intéressante pour l'étude de nombreux problèmes physiques, et il est devenu évident qu'il existe un lien étroit entre ces idées et les théories des cordes. Les études de ce type géométrique et son implication contribuent largement à faire émerger divers domaines de la physique, en particulier dans la théorie de matrice³ et dans la description des théories de la gravitation quantique.

En tenant compte du fait que les notions de la non-commutativité dans l'espace-phase basées principalement sur les cartes de Seiberg-Witten, le produit star de Moyal-Weyl et la transformation linéaire du décalage de Bopp.

1.2 La géométrie non-commutative

1.2.1 La non-commutativité dans l'espace-phase

L'algèbre commutative est une algèbre dont le produit de deux quantités algébriques ou plus ne dépend pas de l'ordre des termes (c.-à-d. $AB=BA$). Pour la mécanique quantique ordinaire, dans l'espace de phase commutatif, les coordonnées x_i et les quantités de mouvement p_i (les variables canoniques) satisfont les relations de commutation canoniques usuelles

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, d). \quad (1.2. 1)$$

Aux échelles des cordes (très petites), l'espace ne commute plus, de sorte que nous admettons les opérateurs de coordonnées et d'impulsions dans l'espace de phase non-commutatif x_i^{nc}

2. SPIRES : Stanford Physics Information Retrieval System.

3. Aussi connue sous le nom du modèle matriciel BFSS (1997), c'est un outil pour étudier les propriétés de la théorie M, elle décrit le comportement d'un ensemble de 9 grandes matrices.

et p_i^{nc} , respectivement. Les relations de commutation de Heisenberg se présentent comme suit

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\Theta_{ij}, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\eta_{ij}, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff}\delta_{ij}, (i, j = 1, \dots, d), \quad (1.2. 2)$$

la constante de Planck effective comme montré dans la sous-section 1.6 peut être écrite comme suit

$$\hbar^{eff} = \hbar(1 + \xi), \quad (1.2. 3)$$

où $\xi = \frac{\Theta\eta}{4\hbar^2}$ et $\xi \ll 1$ est la condition de cohérence, avec Θ_{ij} , η_{ij} sont des matrices antisymétriques constantes ($d \times d$) et δ_{ij} est la matrice d'identité. Les prévisions théoriques pour les systèmes non-commutatifs concernant les paramètres non-commutatifs comme dans l'expérience de Nesvizhevsky et al [5], on note $\Theta \approx 10^{-30}m^2$ et $\eta \approx 1,76.10^{-61}Kg^2m^2s^{-2}$. Il faut prendre en compte que la résolution d'énergie expérimentale est liée au principe d'incertitude à cause de la durée de vie finie du neutron, alors nous aurons $\eta \approx 10^{-67}Kg^2m^2s^{-2}$ (une correction). Ces obtenus résultats et les résultats de l'expérience de Nesvizhevsky et al nous permettront d'estimer la cohérence du modèle non-commutatif $\left| \frac{\Theta\eta}{4\hbar^2} \right| \lesssim 10^{-24}$. Mais s'on considère les modifications introduites par la non-commutativité sur la valeur de \hbar qui sont au moins environ 24 ordres de grandeur plus petits que sa valeur (avec une précision d'environ 10^{-9}), et en considérant les limites corrigées de η , on aura $\left| \frac{\Theta\eta}{4\hbar^2} \right| \lesssim 10^{-29}$ [7]. Ces valeurs sont en accord avec les limites supérieures des échelles de base de la coordonnée et de l'impulsion, ces limites seront supprimées si le champ magnétique utilisé dans l'expérience est faible $B \approx 5mG$.

Pour les systèmes non-commutatifs à 3 dimensions, on a l'algèbre non-commutative suivante

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\epsilon_{ijk}\Theta_k, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\epsilon_{ijk}\eta_k, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff}\delta_{ij}, (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1.2. 4)$$

Θ_{ij} , η_{ij} sont des matrices antisymétriques de (3×3) , et ϵ_{ijk} est le symbole de Levi-Civita et la convention de sommation est utilisée. On a $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = 1$, si $i = j$ ou $j = k$, $\epsilon_{ijk} = 0$. Et Θ_k , η_k sont les paramètres de non-commutativité et sont des matrices à valeurs réelles et antisymétriques à la dimension de *longueur*², *impulsion*² respectivement. En prenant en compte qu'on néglige la relation d'incertitude entre les variables canoniques non-commutatifs.

4. Une autre borne peut être trouvée, par exemple $\Theta \approx 4.10^{-40}m^2$ s'en supposant les unités naturelles, $\hbar = c = 1$. Dans la ref-2 de [6].

Pour les systèmes non-commutatifs à 2 dimensions, on a l'algèbre non-commutative suivante

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\Theta\epsilon_{ij}, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\eta\epsilon_{ij}, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff}\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (1.2. 5)$$

on a $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, et Θ, η ont des valeurs réelles et correspondent aux composants Θ_{12} et Θ_{21} de paramètres de non-commutativité dans l'Eq.(1.2. 2).

Tenir en compte que la relation (1.2. 2) (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) donne lieu aux relations d'incertitude espace-phase suivantes [8,9]

$$(\Delta x)^i(\Delta x)^j \geq \frac{1}{2} |\Theta^{ij}|, (\Delta p)^i(\Delta p)^j \geq \frac{1}{2} |\eta^{ij}|. \quad (1.2. 6)$$

1.2.2 La non-commutativité dépendante du temps

Plusieurs travaux scientifiques ont porté sur la non-commutativité indépendante du temps. Expérimentalement les recherches ont considéré les paramètres de la non-commutativité de valeurs fixes dans le cadre de rayonnement de fond de micro-ondes cosmique, peut-être considérés approximativement fixés à la sphère céleste, par exemple, comme proposé dans la référence [10]. Cependant, autrement, dans cette partie, notre intention évidente est d'impliquer la dépendance du temps dans les paramètres non-commutatifs à la raison de la possibilité que les paramètres non-commutatifs puissent montrer une dépendance en temps, par exemple, les mesures physiques doivent prendre en compte l'effet de la rotation de la Terre autour de son axe, ce qui produira une dépendance temporelle des paramètres non-commutatifs.

Donc, en considérant ici une algèbre non-commutative et dépendante du temps, qui satisfait les relations de commutation suivantes [11]

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\Theta_{ij}(t), [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\eta_{ij}(t), [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff}\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, d), \quad (1.2. 7)$$

avec

$$\Theta_{ij}(t) = \Theta_{ij}e^{\gamma t} \text{ et } \eta_{ij}(t) = \eta_{ij}e^{-\gamma t}. \quad (1.2. 8)$$

La position du système ne peut pas être localisée dans l'espace, excepté pour des temps moins infinis. Les coordonnées d'espace (la même chose pour l'impulsion) deviennent floues (fuzzy) et fluides [9]. Le paramètre Θ représente le flou (fuzziness) et le paramètre γ représente la fluidité d'espace. Les relations ci-dessus sont les relations connues de la géométrie

non-commutative ordinaire sauf que les paramètres $\Theta(t)$, $\eta(t)$ sont considérés des fonctions exponentielles. Bien sûr une multitude d'autres possibilités existe telles que $\Theta(t) = \Theta \cos(\gamma t)$, $\eta(t) = \eta \sin(\gamma t)$. Où la constante de Planck effective donnée par l'Eq.(1.2. 3).

1.3 La quantification de Weyl (opérateur de Weyl)

En 1927, Hermann K. H Weyl introduisit la quantification de Weyl. La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique. Cette prescription élégante nous permet d'associer un observable quantique à une fonction classique réelle qui dépend des variables canoniques sur l'espace de phase [12]. Cette technique fournit un moyen systématique de décrire les espaces non-commutatifs en général et d'étudier les théories des champs définies sur ces derniers. Dans cette section, nous allons présenter ce formalisme qui jouera un rôle central dans la plupart de nos analyses ultérieures.

La condition de Schwartz [13] implique également que toute fonction $f(x)$ définie sur un espace vectoriel euclidien \mathcal{R}^D à D dimensions peut être décrite par sa transformée de Fourier $\tilde{f}(k)$, par la relation

$$\tilde{f}(k) = \int d^d x e^{-ik_i x^i} f(x), \text{ avec } \tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k) \text{ si la fonction } f(x) \text{ est réelle.} \quad (1.3. 9)$$

On définit un espace-temps non commutatif en remplaçant les coordonnées locales x_i de \mathcal{R}^D par des opérateurs Hermétiques \hat{x}_i qui vérifient la relation de commutation (1.2. 2). Puis \hat{x}_i génèrent une algèbre non-commutative d'opérateurs.

La quantification de Weyl consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur \mathcal{R}^D et l'algèbre des opérateurs. On définit le symbole de Weyl par [19]

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i}. \quad (1.3. 10)$$

L'opérateur de Weyl est Hermitique, si $f(x)$ est une fonction réelle

$$\hat{W}^\dagger[f] = \hat{W}[f]. \quad (1.3. 11)$$

1.4 Le produit Groenewold-Moyal (produit \star)

1.4.1 Définition et formule

Le produit Moyal (d'après José E. Moyal) également appelé produit star (noté \star) ou produit Groenewold-Weyl (d'après Hermann Weyl et Hilbrand J. Groenewold). Il est une déformation associative de la loi du produit, il a été introduit la première fois pendant les développements de la signification statistique possible de la mécanique quantique et la relation entre les quantités physique et les opérateurs de la mécanique quantique.

Un produit pour des fonctions ordinaires définies sur un espace de Minkowski, qui permet au symbole de Weyl d'être un homomorphisme pour la multiplication. Donc un produit star tel que : Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions. Alors en utilisant les Eqs.(1.3. 9 - 1.3. 10) et d'après la formule Baker-Campbell-Hausdorff [14]⁵, on en déduit que

$$\hat{W}[f]\hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g]. \quad (1.4. 12)$$

La géométrie non-commutative est à son tour décrite au niveau des champs et des fonctions par le produit Gronewold-Moyal. Pour deux fonctions font varier en termes de x et p , $f(x, p)$ et $g(x, p)$, le produit Moyal peut être utilisé de la façon suivante [15]

$$\begin{aligned} (f \star g)(x, p) &= \exp\left[\frac{i}{2}\Theta_{ab}\partial_{x_a}\partial_{x_b} + \frac{i}{2}\eta_{ab}\partial_{p_a}\partial_{p_b}\right]f(x_a, p_a)g(x_b, p_b) = f(x, p)g(x, p) \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x, p) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x, p) \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x, p) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x, p) \end{aligned} \quad (1.4. 13)$$

Lorsque deux fonctions font varier en termes de x uniquement, l'Eq.(1.4. 13) se réduit à [16, 17]

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \exp\left[\frac{i}{2}\Theta_{ab}\partial_{x_a}\partial_{x_b}\right]f(x_a)g(x_b) = f(x)g(x) \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x) \end{aligned} \quad (1.4. 14)$$

En raison de la nature du produit star, les théories des champs non-commutatives pour les champs à variation lente ou basses énergies ($\Theta E^2 < 1$) sont complètement réduites à leurs versions commutatives.

5. La formule Baker-Campbell-Hausdorff est : $e^A e^B = \exp\left[A+B + \frac{\hbar}{2}[A, B] + \frac{\hbar^2}{12}[[A, B], B] - \frac{\hbar^3}{12}[[A, B], A] \dots\right]$

1.4.2 Quelques propriétés et règles

En ce qui suit, on résume certaines des propriétés et des identités utiles [17] de l'algèbre de produit star.

Soient f , g et h trois fonctions arbitraires à partir de \mathcal{R}^4

1. Le produit star est non-commutatif

$$f(x, p) \star g(x, p) \neq g(x, p) \star f(x, p), \text{ par contre } f(x) \star g(x) = g(x) \star f(x) |_{\Theta \rightarrow -\Theta}, \quad (1.4. 15)$$

2. Pour $\Theta = \eta = 0$, on retrouve le cas commutatif dont

$$f(x, p) \star g(x, p) |_{\Theta = \eta = 0} = f(x, p) g(x, p). \quad (1.4. 16)$$

3. La conjugaison complexe

$$(f(x) \star g(x))^* = g^*(x) \star f^*(x). \quad (1.4. 17)$$

4. Le produit star entre exponentiels

$$e^{ikx} \star e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k \wedge q)}, \text{ avec } k \wedge q \equiv k^\mu q^\nu \theta_{\mu\nu}. \quad (1.4. 18)$$

5. Représentation d'espace d'impulsion

$$f(x) = \int \tilde{f}(k) e^{ikx} d^4k, \quad g(x) = \int \tilde{g}(k) e^{ikx} d^4k, \quad \text{et } h(x) = \int \tilde{h}(k) e^{ikx} d^4k, \quad (1.4. 19)$$

dont $\tilde{f}(k)$, $\tilde{g}(k)$ et $\tilde{h}(k)$ sont les transformées de Fourier des fonctions f , g et h respectivement. Alors en utilisant l'Eq.(1.4. 18) on trouve

$$f(x) \star g(x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{-i\frac{k \wedge q}{2}} e^{i(k+q)x} d^4k d^4q. \quad (1.4. 20)$$

6. L'associativité : En utilisant la propriété (1.4. 20) on trouve

$$((f \star g) \star h)(x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-i\frac{k \wedge q}{2}} e^{-i\frac{(k+q) \wedge p}{2}} e^{i(k+q+p)x} d^4k d^4q d^4p, \quad (1.4. 21)$$

$$(f \star (g \star h))(x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-i\frac{q \wedge p}{2}} e^{-i\frac{(q+p) \wedge k}{2}} e^{i(k+q+p)x} d^4k d^4q d^4p, \quad (1.4. 22)$$

donc le produit star est associatif

$$(f(x) \star g(x)) \star h(x) = f(x) \star (g(x) \star h(x)) = f(x) \star g(x) \star h(x). \quad (1.4. 23)$$

7. Le produit star sous le signe intégral

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int (g \star f)(x) d^4x = \int (fg)(x) d^4x, \quad (1.4. 24)$$

nous apprenons que la partie cinétique des actions (qui sont quadratiques dans les champs) est la même que sa version commutative. Ainsi, les propagateurs de champ libre dans les espaces commutatifs et non-commutatifs sont les mêmes. Cette propriété suit pour les fonctions de Schwartz sur \mathcal{R}^D via l'intégration par parties.

8. l'intégration sur les coordonnées d'espace x a la propriété cyclique et toutes les propriétés du Tr dans le calcul matriciel

$$\int (f \star g \star h)(x) d^4x = \int (h \star f \star g)(x) d^4x = \int (g \star h \star f)(x) d^4x. \quad (1.4. 25)$$

9. La règle de Leibniz

$$\partial_\mu (f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + f \star (\partial_\mu g). \quad (1.4. 26)$$

10. Le commutateur Moyal en termes de quantification de déformation au 1er ordre de Θ

$$[f, g]_\star = f \star g - g \star f = [f, g] + i\Theta^{ij} \partial_i f \partial_j g + 0 (\partial^3 f, \partial^3 g), \quad (1.4. 27)$$

pour un groupe abélien⁶ ($[f, g] = 0$), l'équation ci-dessus devient

$$[f, g]_\star = i\Theta^{ij} \partial_i f \partial_j g + 0 (\partial^3 f, \partial^3 g). \quad (1.4. 28)$$

1.5 Les cartes de Seiberg-Witten (SW)

L'idée des cartes de Seiberg-Witten a attiré beaucoup d'attention, et a été étudiée de manière approfondie ces dernières années. Principalement sur la base que la théorie des jauge non-commutatives apparaît comme une certaine limite de la théorie des cordes. La relation à la théorie des cordes donne un résultat intéressant : Les théories de jauge non-commutatives peuvent être mappées sur des théories commutatives [3].

⁶. Un groupe abélien (d'après Niels Abel), nommé aussi groupe commutatif, est un groupe dont la loi de composition interne est commutative.

Lorsqu'on a une théorie non-abélienne, comme la théorie de Yang-Mills⁷, la structure de jauge sera codée dans les commutateurs et les anti-commutateurs. Par contre pour une théorie abélienne, tous les commutateurs disparaissent. Du coté non-commutatif, la multiplication habituelle des fonctions est remplacée par le produit star (1.4. 14), et on peut écrire le commutateur star au premier ordre par l'Eq.(1.4. 27).

L'action Yang-Mills non-commutative est comme suit [3, 18]

$$S = -\frac{1}{4}Tr \int \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} d^4k = -\frac{1}{4}Tr \int \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} d^4k, \quad (1.5. 29)$$

où l'intensité du champ de jauge non-commutatif \hat{A}_μ est

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \hat{A}_\mu \partial_\nu - i [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star. \quad (1.5. 30)$$

L'Eq.(1.5. 29) est invariante sous les transformations de jauge non-commutatives suivantes

$$\hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{A} + i [\hat{A}, \hat{A}_\mu]_\star \equiv \hat{D}_\mu \hat{A}, \quad \text{avec } \hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{F}_{\mu\nu} = i [\hat{A}, \hat{F}_{\mu\nu}]_\star. \quad (1.5. 31)$$

Où \hat{A} est le paramètre de jauge dans le cas non-commutatif.

Tenir en compte que pour une théorie de jauge commutative, le quadri-vecteur potentiel de jauge est A_μ (où le paramètre de jauge est Λ ⁸), avec l'intensité de champ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - A_\mu \partial_\nu - i [A_\mu, A_\nu], \quad (1.5. 32)$$

dont les transformations de jauge commutatives sont

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda + i [\Lambda, A_\mu] \equiv D_\mu \Lambda, \quad \text{avec } \delta_\Lambda F_{\mu\nu} = i [\Lambda, F_{\mu\nu}]. \quad (1.5. 33)$$

Les cartes de Seiberg-Witten font le lien (une relation d'équivalence) entre la théorie de jauge commutative et non-commutative. Une telle relation entre la théorie de jauge non-commutative et sa contrepartie (homologue) ordinaire, peut également être démontrée en utilisant uniquement la structure algébrique de l'espace non-commutatif précité (déformé canoniquement) et du produit \star sans faire référence à la théorie des cordes [18–20]. Donc il est possible de définir une carte SW qui fait le lien comme une relation d'équivalence de jauge par

$$\hat{A}_\mu (A; \Theta) + \hat{\delta}_{\hat{A}} \hat{A}_\mu (A; \Theta) = \hat{A}_\mu (A + \delta_\Lambda A; \Theta). \quad (1.5. 34)$$

7. Ce type de théorie a été introduit dans les années 1950 par Chen, N Yang et R. Mills.

8. Il faut différencier les opérateurs $\hat{A}, \hat{\Lambda}, \hat{\delta}, \dots$ (avec circonflexe) et ceux sans circonflexe $A, \Lambda, \delta, \dots$

Notez que le champ de jauge non-commutatif \hat{A}_μ et le paramètre de jauge non-commutatif $\hat{\Lambda}$ ont la dépendance fonctionnelle suivante (c.-à-d. les considérés comme des fonctionnelles des champs ordinaires $A_\mu, F_{\mu\nu}$)

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(A; \Theta), \quad \hat{F}_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu}(A; \Theta), \quad \text{et} \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\hat{\Lambda}, A; \Theta). \quad (1.5. 35)$$

La transformation se résume au diagramme suivant⁹

$$\begin{array}{ccc} A_\mu & \xrightarrow{\delta} & A_\mu + \delta A_\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_\mu & \xrightarrow{\hat{\delta}} & \hat{A}_\mu + \hat{\delta} \hat{A}_\mu \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{A_\mu + \delta A_\mu} = \hat{A}_\mu + \hat{\delta} \hat{A}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \delta \hat{A}_\mu = \hat{\delta} \hat{A}_\mu$$

FIGURE 1.1 – Représentation des cartes Seiberg-Witten

où, il est équivalent de transformer par δ la fonction A_μ et de transformer par $\hat{\delta}$ la connexion non-commutative \hat{A}_μ . C'est ce que nous appellerons l'équation de Seiberg-Witten

$$\delta_\Lambda \hat{A}_\mu - \partial_\mu \hat{\Lambda} = i \left[\hat{\Lambda}, \hat{A}_\mu \right]_\star. \quad (1.5. 36)$$

Pour résoudre l'Eq.(1.5. 34), on utilise la condition de consistence (cohérence) de jauge non-commutative [18]

$$i \hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta - i \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha - \left[\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{A}_\beta \right]_\star = i \hat{\Lambda}_{-i[\alpha, \beta]}, \quad (1.5. 37)$$

et sa contrepartie ordinaire donnée par

$$\delta_\alpha \delta_\beta - \delta_\beta \delta_\alpha = \delta_{-i[\alpha, \beta]} = \delta_{\alpha \times \beta}, \quad (1.5. 38)$$

tenir en compte que pour les composants d'ordre n de $\hat{\Lambda}_\alpha$ et $\hat{\Lambda}_\beta$, il est alors possible d'écrire une équation de cohérence de jauge non-commutative

$$i \hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta^n - i \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha^n - \sum_{p+q+r=n} \left[\hat{\Lambda}_\alpha^p, \hat{A}_\beta^q \right]_{\star^r} = i \hat{\Lambda}_{-i[\alpha, \beta]}^n, \quad (1.5. 39)$$

et \star^r dénote

$$(f \star^r g)(x) = \frac{1}{r!} \left(\frac{i}{2} \right)^r \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_r b_r} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_r} f(x) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_r} g(x). \quad (1.5. 40)$$

9. D'après la thèse de doctorat de S. Fianza. Rôle (s) du champ de fond antisymétrique en théorie des cordes (2003).

Pour les composants d'ordre n de A_α et A_ν , il est aussi possible d'écrire une équation de cohérence de jauge

$$\delta_\alpha A_\nu^n = \partial_\nu A_\alpha^n - \sum_{p+q+r=n} [A_\nu^p, A_\alpha^q]_{\star^r}. \quad (1.5. 41)$$

Pour trouver des cartes de SW du paramètre de jauge non-commutatif \hat{A} et du champ de jauge non-commutatif \hat{A}_μ , on peut résoudre la condition de consistance (1.5. 37) et la jauge d'équivalence (1.5. 34). Dans ce but, les variables non-commutatives peuvent être étendues en tant que série de puissances formelles en Θ

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu &= A_\mu + A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} \dots \\ \hat{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \\ \hat{A} &= A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.5. 42)$$

les termes d'ordre zéro sont les homologues ordinaires. De plus, en permettant à la théorie d'être une algèbre enveloppante valorisée, on peut construire la théorie de jauge non-commutative pour un groupe de jauge arbitraire comme SU (N). En outre nous ne spécifierons pas le groupe de jauge et les résultats seront valables pour un groupe de jauge non abélien arbitraire.

De sorte que nous avons la solution de premier ordre donnée dans le document d'origine [3]

$$A_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{4}\Theta^{k\lambda} \{A_k, \partial_\lambda \alpha\}, \quad A_\gamma^{(1)} = -\frac{1}{4}\Theta^{k\lambda} \{A_k, \partial_\lambda A_\gamma + F_{\lambda k}\}, \quad (1.5. 43)$$

on peut trouver aussi l'intensité du champ (1.5. 30) de premier ordre

$$F_{\gamma\rho}^{(1)} = -\frac{1}{4}\Theta^{k\lambda} (\{A_k, \partial_\lambda F_{\gamma\rho} + D_\lambda F_{\gamma\rho}\} - 2\{F_{\gamma k}, F_{\rho\lambda}\}). \quad (1.5. 44)$$

Il convient de souligner ici une fois de plus que ces solutions ne sont pas uniques car on peut ajouter des solutions homogènes à (1.5. 43) avec des coefficients arbitraires. Cependant, la structure de ces solutions sera utile pour obtenir les solutions récursives de tous les ordres.

En effet, les solutions explicites pour les cartes de SW de la théorie de jauge non abélienne ont été trouvées par divers auteurs jusqu'au second ordre de Θ [18,21]. En raison de la liberté dans les solutions (1.5. 43), ces cartes sont différentes les unes des autres jusqu'à une solution homogène avec des coefficients différents.

Finalement, Il est clair que des cartes Seiberg-Witten explicites des champs non-commutatifs sont nécessaires à la fois pour comprendre les prédictions physiques et pour vérifier le comportement de la théorie non-commutative elle-même, telle que la renormalisabilité.

1.6 La translation linéaire du décalage de Bopp

1.6.1 Le décalage de Bopp

Dans l'espace-phase non-commutatif, les coordonnées x_i^{nc} et ses moments conjugués p_i^{nc} satisfont les relations de commutations (1.2. 2), et en utilisant les équations (1.2. 1 - 1.2. 2), on peut représenter les variables x_i^{nc} et p_i^{nc} en fonction de x_i et p_i par [22]

$$x_i^{nc} = a_{ij}x_j + b_{ij}p_j \text{ et } p_i^{nc} = c_{ij}x_j + d_{ij}p_j \text{ avec } i, j = 1..n. \quad (1.6. 45)$$

Le système des Eqs.(1.6. 45) peut aussi être récrit comme suivant

$$\begin{pmatrix} x^{nc} \\ p^{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (1.6. 46)$$

où $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, et $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$ sont des matrices carrées de dimension $n \times n$.

En calculant la forme exacte des matrices ci-dessus. Pour cela, on utilise les équations (1.2. 1-1.2. 2 et 1.6. 45), on obtient le système d'équations suivant

$$AB^T - BA^T = \frac{\Theta}{\hbar}, \quad CD^T - DC^T = \frac{\eta}{\hbar} \text{ et } AD^T - BC^T = \frac{\hbar^{eff}}{\hbar} I_{n \times n}. \quad (1.6. 47)$$

Les matrices A et D peuvent être choisis proportionnel à l'opérateur identité, que l'on note par α et β respectivement, ce qui signifie $a_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ et $d_{ij} = \beta\delta_{ij}$ avec α et β sont deux constantes d'échelle. Ainsi le système devient

$$\alpha(B^T - B) = \Theta, \quad \beta(C - C^T) = \eta \text{ et } BC^T = (\alpha\beta - 1)I_{n \times n}, \quad (1.6. 48)$$

selon les deux premières équations en Eq.(1.6. 48), on peut voir que, si B , C sont antisymétriques, ils auront des solutions explicites. La troisième équation en Eq.(1.6. 48) est satisfait que lorsque B , C sont symétriques ou antisymétriques.

Le cas symétrique de B , C conduit au $\Theta = \eta = 0$ (ce qui signifie que notre espace est commutatif).

Ainsi on choisit B , C antisymétriques, et on trouve

$$B = -\frac{1}{2\alpha\hbar}\Theta, \quad C = \frac{1}{2\beta\hbar}\eta. \quad (1.6. 49)$$

En substituant les expressions de A , B , C et D dans la troisième équation de l'Eq.(1.6. 47), nous obtenons l'expression généralisée de la constante de Planck effective

$$\hbar^{eff} = \alpha\beta\hbar + \frac{\Theta\eta}{4\hbar\alpha\beta}. \quad (1.6. 50)$$

On insère Eq.(1.6. 49) dans Eq.(1.6. 46), on obtient

$$\begin{pmatrix} x^{nc} \\ p^{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha I_{n \times n} & -\frac{1}{2\alpha\hbar}\Theta \\ \frac{1}{2\beta\hbar}\eta & \beta I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (1.6. 51)$$

donc l'Eq.(1.6. 45) devient [23]

$$x_i^{nc} = \alpha x_i - \frac{1}{2\alpha\hbar}\Theta_{ij}p_j, \quad p_i^{nc} = \beta p_i + \frac{1}{2\beta\hbar}\eta_{ij}x_j, \quad \text{avec } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6. 52)$$

Les équations ci-dessus (1.6. 52) sont la transformation de décalage de Bopp généralisée. Dont $\alpha = 1 - \frac{\Theta\eta}{8\hbar^2}$ et $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Généralement dans les calculs on prend $\alpha = \beta = 1$, donc les Eqs.(1.6. 52, 1.6. 50) deviennent

$$x_i^{nc} = x_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}p_j, \quad p_i^{nc} = p_i + \frac{1}{2\hbar}\eta_{ij}x_j \quad \text{et} \quad \hbar^{eff} = \hbar + \frac{\Theta\eta}{4\hbar}, \quad \text{avec } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6. 53)$$

Considérons maintenant un espace de phase non-commutatif bidimensionnel ($i, j = 1, 2$)

$$\text{Pour } i=1, \quad x_1^{nc} = x^{nc} = x - \frac{1}{2\hbar}\Theta p_y, \quad p_1^{nc} = p_x^{nc} = p_x + \frac{1}{2\hbar}\eta y. \quad (1.6. 54)$$

$$\text{Pour } i=2, \quad x_2^{nc} = y^{nc} = y + \frac{1}{2\hbar}\Theta p_x, \quad p_2^{nc} = p_y^{nc} = p_y - \frac{1}{2\hbar}\eta x, \quad (1.6. 55)$$

donc finalement, on a

$$\begin{aligned} x^{nc} &= x - \frac{1}{2\hbar}\Theta p_y, & p_x^{nc} &= p_x + \frac{1}{2\hbar}\eta y \\ y^{nc} &= y + \frac{1}{2\hbar}\Theta p_x, & p_y^{nc} &= p_y - \frac{1}{2\hbar}\eta x \end{aligned}. \quad (1.6. 56)$$

On peut dire que les opérateurs de la non-commutativité dans l'espace-phase sont liés aux opérateurs commutatifs par l'algèbre de Heisenberg-Weyl en termes de la translation linéaire de décalage-Bopp introduite à partir de l'équation (1.6. 56).

1.6.2 Le décalage de Bopp dépendant du temps

La nouvelle géométrie déformée de la non-commutativité dépendante du temps dans l'espace-phase est liée au géométrie commutative par l'algèbre de Heisenberg-Weyl via la transformation linéaire de décalage-Bopp dépendante du temps introduite à partir de l'équation

$$x_i^{nc}(t) = x_i - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij}(t) p_j, \quad p_i^{nc} = p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij}(t) x_j, \quad \text{avec } i, j = 1, 2 \dots n. \quad (1.6. 57)$$

Pour un espace-phase non-commutatif bidimensionnel et d'après l'Eq.(1.2. 8), il vient

$$\begin{aligned} x^{nc} &= x - \frac{1}{2\hbar} \Theta e^{\gamma t} p_y, & p_x^{nc} &= p_x + \frac{1}{2\hbar} \eta e^{-\gamma t} y \\ y^{nc} &= y + \frac{1}{2\hbar} \Theta e^{\gamma t} p_x, & p_y^{nc} &= p_y - \frac{1}{2\hbar} \eta e^{-\gamma t} x \end{aligned} \quad (1.6. 58)$$

Lorsque $\gamma = 0$, la dépendance du temps dans la structure des paramètres non-commutatifs s'annule. Et pour que $\Theta = \eta = 0$, les systèmes d'espace-phase non-commutatif (1.6. 56) et d'espace-phase non-commutatif dépendant du temps (1.6. 58) deviendront des systèmes commutatifs.

1.7 Conclusion

Les techniques décrites dans ce chapitre se sont révélées être des méthodes inestimables pour l'étude de la mécanique quantique non-commutative et la théorie des champs non-commutatifs. Il s'est avéré que pour appliquer et coder la non-commutativité d'espace de phase, nous devrions utiliser principalement quatre méthodes qui sont :

1. Le produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl.
2. En remplaçant le produit ordinaire par le produit de Moyal-Weyl dans les fonctions et les actions de notre système.
3. Utiliser des transformations linéaires de décalage de Bopp.
4. À travers les cartes de Seiberg-Witten.

Dans les sections suivantes pour l'application de la non-commutativité dans l'espace de phase, on va utiliser uniquement la translation linéaire de décalage de Bopp et le produit de Moyal-Weyl. Également une partie de notre étude sur la non-commutativité, sera sur la non-commutativité dépendante du temps (translation linéaire de décalage de Bopp dépendante du temps).

Chapitre 2

Les équations non-relativistes

2.1 Introduction

Au cours des dernières années, dans le développement de la nanotechnologie, les propriétés de transport des nano-dispositifs sont devenues de plus en plus importantes, et il est très intéressant de comprendre comment le courant circule à l'intérieur des nano-dispositifs et comment par exemple la densité de courant fournit des informations sur la dissipation thermique [24]. Ainsi que, dans la physique des particules élémentaires, pour les quarks et les gluons qui ont une charge de couleur [25] (dans la théorie de la chromodynamique quantique QCD), dans laquelle elle est toujours conservée tel que la charge électrique. Il existe une équation de continuité pour un tel courant de charge de couleur (donnée au tenseur de l'intensité du champ de gluon). En outre, il existe de nombreuses quantités souvent ou toujours conservées, telles que le nombre de baryons qu'est proportionnel au nombre de quarks moins le nombre d'antiquarks, ainsi que le nombre de lepton, l'isospin (terme utilisé pour décrire des groupes de particules presque ont la même masse, comme le proton et le neutron)...etc. Ce qui signifie que pour étudier leurs propres lois de conservation, nous devons atteindre leurs équations de continuité. Dont l'équation de continuité est une équation qui décrit le transport d'une certaine quantité, en plus, il doit y avoir une quantité x qui peut circuler ou se déplacer (comme l'énergie, la charge des particules...), avec ρ_x étant la densité en volume de cette quantité; la façon dont cette quantité s'écoule est décrite par son flux, noté \mathcal{J}_x . Sachant que l'équation de continuité est une autre forme de la loi de conservation, elle aura un sens quand elle sera appliquée à une quantité

conservée, et elle peut être exprimée sous forme intégrale, ou sous la forme différentielle par le théorème de divergence, en mécanique quantique elle est toujours liée à la conservation de la probabilité.

Dans ce chapitre, nous dérivons une équation de continuité pour une particule soumise à un potentiel non-local et autre local [26] en espace de phase non-commutatif, à travers l'équation de Schrödinger qui s'applique aux particules de spin 0 dans le domaine de la mécanique quantique non-relativiste.

Pourquoi nous soucions-nous du potentiel non-local ? La raison derrière cela est que l'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local fait l'objet de nombreuses enquêtes et études depuis plusieurs années [27], comme dans les calculs des propriétés de transport des nano-dispositifs à travers la théorie de la densité fonctionnelle et la théorie de la fonction de Green là-bas [28], il existe de nombreux cas où le potentiel non-local est présent. Dans les théories de diffusion des nucléons et des noyaux [29], la non-localité est générée par l'interaction d'échange entre les nucléons du noyau (considérée dans les calculs de type Hartree-Fock) [30]. De plus, le potentiel optique nucléaire décrivant le mouvement entre les noyaux en collision est également non-local [31]. Dans la plupart des calculs de structure et des réactions nucléaires, la non-localité a été supposée petite et plusieurs méthodes d'approximation ont été introduites dans le modèle de potentiel local pour reproduire ses contributions.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de résoudre des équations, mais de concentrer sur l'extraction des équations de continuité dans les deux types d'espace. Dans la section 3 : Nous dérivons l'équation de continuité pour les potentiels non-local et local, en prenant comme un exemple d'application le potentiel non-local de Frahn-Lemmer. Dans la section 4 : Nous avons le résultat le plus intéressant de ce chapitre, dont l'équation de continuité non-commutative pour un potentiel non-local et un autre local dans un espace de phase non-commutatif a été étudiée.

2.2 L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est principalement l'équation non-relativiste fondamentale en mécanique quantique, conçue par le physicien Erwin Schrödinger en 1925 pour une particule massive non-relativiste, qui décrit l'évolution dans le temps d'une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$, cette équation est un postulat de la mécanique quantique, en tout point et à tout instant

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t), \quad (2.2. 1)$$

pour une particule donnée, l'énergie totale est donnée par l'opérateur \hat{H}

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r), \quad (2.2. 2)$$

\hat{r} et \hat{p} sont successivement l'opérateur position et l'impulsion, $V(r)$ est l'énergie potentielle, en mettant Eq.(2.2. 2) dans Eq.(2.2. 1) et faisant la substitution suivante

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (2.2. 3)$$

où $i\frac{\partial}{\partial t}$ et $-i\vec{\nabla}$ sont des opérateurs agissant sur la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$, conduit bien à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right\} \psi(\vec{r}, t), \quad (2.2. 4)$$

où l'opérateur \hat{H} est appelée l'Hamiltonien, dépendant du temps en général, et $V(r)$ est l'énergie potentielle de la particules au point r , le carré de $\psi(\vec{r}, t)$ représente la densité de probabilité de trouver la particule pour un système

$$\psi^2(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t). \quad (2.2. 5)$$

Dans certains problèmes, il est possible de considérer des phénomènes indépendants du temps, donc l'énergie n'est plus une dérivée de la fonction d'onde, et l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) - E \right\} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.2. 6)$$

2.3 Equation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local dans un espace de phase commutatif

En présence d'un potentiel non-local $V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')$, la fonction d'onde obéit à l'équation de Schrödinger suivante

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) + \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')\psi(\vec{r}', t)d\vec{r}' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 7)$$

un potentiel non-local opérant sur une fonction d'onde [32] a la forme

$$\int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')\psi(\vec{r}', t)d\vec{r}' = \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{s})\psi(\vec{r} + \vec{s}, t)d\vec{s}, \quad (2.3. 8)$$

avec $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{s}$ et $d\vec{r}' = d\vec{s}$, en tenant compte que $Re[V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')] = Re[V_{NL}(\vec{r}', \vec{r})]$ (symétrique), et utilisant le développement en série de Taylor¹ $\psi(\vec{r} + \vec{s}) = (1 + \vec{s}\frac{\partial}{\partial\vec{r}} + \frac{\vec{s}^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2} + \frac{\vec{s}^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\vec{r}^3} + ..)\psi(\vec{r}) = e^{\frac{i\vec{s}\vec{p}}{\hbar}}\psi(\vec{r})$, nous trouvons

$$\int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')\psi(\vec{r}', t)d\vec{r}' = \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{s})e^{\frac{i\vec{s}\vec{p}}{\hbar}}d\vec{s}\psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 9)$$

on peut noter

$$\int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{s})e^{\frac{i\vec{s}\vec{p}}{\hbar}}d\vec{s}\psi(\vec{r}, t) = \int d\vec{s}e^{\frac{i\vec{s}\vec{p}}{\hbar}}V_{NL}(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}, \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2})e^{\frac{i\vec{s}\vec{p}}{\hbar}}\psi(\vec{r}, t) = V_{NL}(\vec{r}, \vec{p})\psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 10)$$

alors, simplement Eq.(2.3. 7) prend la forme

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{r}, t) + V_{NL}(\vec{r}, \vec{p})\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t). \quad (2.3. 11)$$

2.3.1 Potentiel non-local de Frahn-Lemmer

En raison de faciliter les calculs, et comme une application concernant le potentiel non-local, nous choisissons le potentiel de Frahn-Lemmer (Perey-Buck) [33] défini comme suit

$$V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}|\vec{r} + \vec{r}'|\right)\mathcal{H}\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right), \quad (2.3. 12)$$

où \mathcal{U} , \mathcal{H} représentent respectivement la valeur moyenne locale et la largeur de la non-localité, sachant que pour simplifier, nous considérons $\mathcal{U}\left(\frac{1}{2}|\vec{r} + \vec{r}'|\right) \approx V_0$, et \mathcal{H} est choisi pour être une fonction gaussienne normalisée

$$\mathcal{H}\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right) = \frac{1}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{\beta^2}}, \quad (2.3. 13)$$

1. Au voisinage de a : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + h^n\xi(h)$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \xi(h) = 0$.

alors, notre potentiel non-local prend la forme [une fois le paramètre de portée est très petit, le potentiel non-local tend à $V_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$]

$$\mathcal{V}_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{V_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{\beta^2}}, \quad (2.3. 14)$$

avec β , V_0 sont respectivement le paramètre de de la non-localité, et la profondeur du potentiel nucléaire (type de fonction *Wood-Saxon*).

L'équation suivante, obtenue en insérant l'Eq.(2.3. 14) dans l'Eq.(2.3. 7)

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) + \int \frac{V_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{\beta^2}} \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 15)$$

en utilisant Eq.(2.3. 10), nous avons

$$\mathcal{V}_{NL}(\vec{r}, \vec{p}) = \int d\vec{s} e^{\frac{i\vec{s}\cdot\vec{p}}{2\hbar}} \left\{ \frac{V_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} - \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2})^2}{\beta^2}} \right\} e^{\frac{i\vec{s}\cdot\vec{p}}{2\hbar}} = \int d\vec{s} \frac{V_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{s}^2}{\beta^2} + \frac{i}{\hbar} \vec{s}\cdot\vec{p}}, \quad (2.3. 16)$$

en utilisant l'intégrale $\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-A^2 s^2 + Bs} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{\frac{B^2}{4A^2}}$, avec $A = \frac{1}{\beta}$, $B = \frac{i}{\hbar} p$, l'Eq.(2.3. 15) tourne à

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) + V_0 e^{-\frac{p^2 \beta^2}{4\hbar^2}} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (2.3. 17)$$

Ce dont nous avons besoin ici, c'est de montrer la forme de l'équation de Schrödinger en interaction avec le potentiel non-local de Frahn-Lemmer, sachant que si nous voulons résoudre l'équation ci-dessus, nous devons utiliser la transformée de Fourier pour passer à la représentation d'impulsion (représentation P), là les calculs seront très faciles, sachant que l'équation sera considérée indépendamment du temps, avec $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, l'Eq.(2.3. 17) devient

$$E - \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m} = V_0 e^{-\frac{\vec{k}^2 \beta^2}{4}}, \quad (2.3. 18)$$

ceci explique le lien entre le potentiel nucléaire et la quantité de mouvement. D'une autre manière, la force du potentiel diminue rapidement avec l'augmentation de l'impulsion.

2.3.2 L'équation de continuité dans un espace de phase commutatif

L'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local $V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')$ et d'un potentiel local $V_L(r)$ s'écrit comme suit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) + \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' + V_L(r) \psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 19)$$

le conjugué complexe de l'équation ci-dessus s'écrit comme suit

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi^\dagger(\vec{r}, t) + \int V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) d\vec{r}' + V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t), \quad (2.3. 20)$$

ici * et † représentent la conjugaison complexe des potentiels et des fonctions d'onde respectivement. En raison de trouver l'équation de continuité, on fait $\psi^\dagger(\vec{r}, t)$ Eq.(2.3. 19) et $\psi(\vec{r}, t)$ Eq.(2.3. 20) comme suit

$$i\hbar \psi^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) + \int \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' + \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_L(r) \psi(\vec{r}, t), \quad (2.3. 21)$$

$$-i\hbar \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla}^2 \psi^\dagger(\vec{r}, t) + \int \psi(\vec{r}, t) V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) d\vec{r}' + \psi(\vec{r}, t) V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t), \quad (2.3. 22)$$

en soustrayant Eq.(2.3. 21) de Eq.(2.3. 22), nous trouvons

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)) &= \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) \\ &+ \int \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) - \psi(\vec{r}, t) V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) \right) d\vec{r}' \\ &+ \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_L(r) \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3. 23)$$

s'on multiplie l'équation ci-dessus par la charge portée par la particule, on obtient l'équation de continuité de la particule correspondante, comme dans le cas d'électron, on multiplie par [-e]. L'équation (2.3. 23) peut être contractée comme suit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \rho_{NL} + \rho_L = 0, \quad (2.3. 24)$$

l'équation de continuité obtenue Eq.(2.3. 24) contient de nouvelles quantités, qui sont la densité de courant non-locale ρ_{NL} , et la densité locale ρ_L , en raison de la prise en compte des interactions non-locale et locale dans l'équation de Schrödinger, où

$$\begin{aligned} \rho &= J^0 = \psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \\ \vec{J} &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) \\ \rho_{NL} &= \int \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) - \psi(\vec{r}, t) V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) \right) d\vec{r}' \\ \rho_L &= \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_L(r) \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3. 25)$$

Si le potentiel $V_L(r)$ est Hermitien, ce qu'implique que ρ_L disparaît, ce qui signifie que sa symétrie est maintenue, ces résultats sont similaires aux calculs de C. Li et ses collègues [34].

À l'état d'équilibre $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'Eq.(2.3. 24) devient

$$\vec{\nabla} \vec{J} + \rho_{NL} = 0, \quad (2.3. 26)$$

si le potentiel non-local $V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')$ est une matrice diagonale réelle, la quantité ρ_{NL} s'annule, sa symétrie est également conservée. Le courant calculé à partir de \vec{J} est conservé puisque $\vec{\nabla} \vec{J} = 0$. Cependant, en présence d'un potentiel non-local, la quantité ρ_{NL} est non nul, et donc $\vec{\nabla} \vec{J} \neq 0$. En conséquence, le courant calculé à partir de la densité de courant n'est pas conservé. Par conséquent, nous devons modifier la définition conventionnelle de la densité de courant pour inclure la contribution de ρ_{NL} et ρ_L induite par les potentiels non local et local.

Nous définissons la nouvelle densité de courant en présence des potentiels non-local et local comme suit

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + \vec{J}_{NL} + \vec{J}_L, \quad (2.3. 27)$$

où \vec{J}_L , \vec{J}_{NL} sont la densité de courant locale et la densité de courant non-locale (Nous l'appelons la densité de courant non-locale, car elle est simplement en raison de potentiel non-local) définies comme suit

$$\begin{aligned} \vec{J}_{NL} &= -\vec{\nabla} \chi_{NL}(\vec{r}) \\ \vec{J}_L &= -\vec{\nabla} \varphi_L(\vec{r}) \end{aligned}, \quad (2.3. 28)$$

où $\chi_{NL}(\vec{r})$, $\varphi_L(\vec{r})$ ont déterminées par l'ensemble d'équation de Poisson suivant

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \chi_{NL}(\vec{r}) + \rho_{NL} &= 0 \\ \vec{\nabla}^2 \varphi_L(\vec{r}) + \rho_L &= 0 \end{aligned}, \quad (2.3. 29)$$

en résolvant chaque équation de Poisson avec des conditions aux limites appropriées, nous pouvons calculer \vec{J}_{NL} et \vec{J}_L .

Il est évident que la densité de courant nouvellement définie satisfait $\vec{\nabla} \vec{J}_{tot} = 0$ et par conséquent, le courant calculé à partir de cette densité de courant satisfait à la conservation actuelle.

De toute façon, en absence des interactions, l'équation de continuité prend sa forme simple connue en mécanique quantique

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\vec{r}, t)|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} [\psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{r}, t)] = 0. \quad (2.3. 30)$$

2.4 Equation de Schrödinger en présence d'un potentiel non-local dans un espace de phase non-commutatif

Nous introduisons la non-commutativité dans l'espace à travers le produit \star , l'équation de Schrödinger en présence des potentiels non-local et local dans un espace non-commutatif est

$$\frac{(\vec{p})^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) + \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \star \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' + V_L(r) \star \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t), \quad (2.4. 31)$$

tenir en compte que le produit \star de Moyal sous le signe intégral est donné par Eq.(1.4. 24)

$$\int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \star \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' = \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}', \quad (2.4. 32)$$

ce qui nous amène à constater que la symétrie de la partie réelle du potentiel non-local est maintenue dans l'espace des phases non-commutatif.

Pour $V_L(r) \sim \hbar r$, avec \hbar est réel et en utilisant Eq.(1.4. 14), on trouve

$$V_L(r) \star \psi(\vec{r}, t) = V_L(r) \psi(\vec{r}, t) + i\Theta_{ab} \partial_a V_L(r) \partial_b \psi(\vec{r}, t) + 0 (\Theta^2). \quad (2.4. 33)$$

Ensuite nous introduisons la non-commutativité en phase dans Eq.(2.4. 31) par le raccordement $\vec{p} \rightarrow \vec{p}^{nc}$ via la transformation de décalage de Bopp (1.6. 56), dont

$$(\vec{p}^{nc})^2 = (p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} r_j)^2 = p_i^2 + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_i r_j + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} r_j p_i + \frac{1}{4\hbar^2} \eta_{ij} \eta_{ik} r_j r_k, \quad (2.4. 34)$$

par l'équivalence en ordre considéré dans la non-commutativité en espace, limitons nous par ailleurs en premier ordre de η , tenir en compte que ² $\eta_{ij} = 2\eta_k \epsilon_{kij}$, avec $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_i r_j &= \frac{1}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} p_i r_j = \frac{1}{\hbar} (\vec{p} \times \vec{r}) \cdot \vec{\eta} = -\frac{1}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{\eta} \\ \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} r_j p_i &= -\frac{1}{2\hbar} \eta_{ji} r_j p_i = -\frac{1}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kji} r_j p_i = -\frac{1}{\hbar} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{\eta} = -\frac{1}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{\eta}, \end{aligned} \quad (2.4. 35)$$

en substituant les relations ci-dessus dans l'Eq. (2.4. 34), nous obtenons

$$(\vec{p}^{nc})^2 = \vec{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{\eta} + 0 (\eta^2). \quad (2.4. 36)$$

À partir des équations (2.4. 32, 2.4. 33, 2.4. 36) ci-dessus, nous obtenons

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) - \frac{\vec{L} \cdot \vec{\eta}}{m\hbar} \psi(\vec{r}, t) + \int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' + V_L(r) \psi(\vec{r}, t) + i\Theta_{ab} \partial_a V_L(r) \partial_b \psi(\vec{r}, t). \quad (2.4. 37)$$

2. On a $\eta_{ij} = -\eta_{ji} = \eta \epsilon_{ij}$ avec $\eta_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \eta_{ij}$ et $(\epsilon_{kij})^2 = 1$, aussi on a $(U \times V)_k = \epsilon_{kij} U_i V_j$.

2.4.1 Le potentiel non-local de Frahn-Lemmer dans un espace de phase non-commutatif

Sachant que $\int V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')\psi(\vec{r}', t)d\vec{r}' \rightarrow V_{NL}(\vec{r}, \vec{p})\psi(\vec{r}, t)$, l'équation de Schrödinger en interaction avec le potentiel non-local de Frahn-Lemmer dans l'espace de phase non-commutatif est donnée par

$$\frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) - \frac{\vec{L} \vec{\eta}}{m\hbar} \psi(\vec{r}, t) + \frac{V_0}{\pi\beta^2} e^{-\frac{(\vec{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \vec{L} \vec{\eta})\beta^2}{4\hbar^2}} \psi(\vec{r}, t) + V_L(r)\psi(\vec{r}, t) + i\Theta_{ab}\partial_a V_L(r)\partial_b \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t), \quad (2.4. 38)$$

pour $\left(\vec{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \vec{L} \vec{\eta}\right) \ll \frac{4\hbar^2}{\beta^2}$, laissez-nous approximer comme suit

$$V_0 \exp\left[-\frac{\left(\vec{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \vec{L} \vec{\eta}\right)\beta^2}{4\hbar^2}\right] = V_0 \left[1 - \frac{\vec{p}^2 \beta^2}{4\hbar^2} + \frac{\vec{L} \vec{\eta} \beta^2}{2\hbar^3}\right], \quad (2.4. 39)$$

avec $a = \frac{\hbar^2}{2m} + \frac{V_0\beta^2}{4}$, $b = \frac{V_0\beta^2}{2\hbar^3} - \frac{1}{m\hbar}$ et en substituant Eq.(2.4. 39) dans Eq.(2.4. 38), on obtient

$$-a\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) + b\vec{L} \vec{\eta} \psi(\vec{r}, t) + V_0 \psi(\vec{r}, t) + V_L(r)\psi(\vec{r}, t) + i\Theta_{ab}\partial_a V_L(r)\partial_b \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (2.4. 40)$$

2.4.2 L'équation de continuité dans un espace de phase non-commutatif

L'équation de Schrödinger en présence des potentiels non-local et local dans un espace de phase non-commutatif est donnée par Eq.(2.4. 37), et sa conjugué complexe est donné par

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} \psi^\dagger(\vec{r}, t) - \frac{\vec{L} \vec{\eta}}{m\hbar} \psi^\dagger(\vec{r}, t) + \int V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}')\psi^\dagger(\vec{r}', t)d\vec{r}' + V_L^*(r)\psi^\dagger(\vec{r}, t) - i\Theta_{ab}\partial_a V_L^*(r)\partial_b \psi^\dagger(\vec{r}, t), \quad (2.4. 41)$$

de la multiplication de $\psi^\dagger(\vec{r}, t)$ Eq.(2.4. 37) et $\psi(\vec{r}, t)$ Eq.(2.4. 41), on obtient

$$i\hbar \psi^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{m\hbar} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{L} \vec{\eta} \psi(\vec{r}, t) + \int \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) d\vec{r}' + \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_L(r) \psi(\vec{r}, t) + i\Theta_{ab} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \partial_a V_L(r) \partial_b \psi(\vec{r}, t), \quad (2.4. 42)$$

$$-i\hbar \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla}^2 \psi^\dagger(\vec{r}, t) - \frac{1}{m\hbar} \psi(\vec{r}, t) \vec{L} \vec{\eta} \psi^\dagger(\vec{r}, t) + \int \psi(\vec{r}, t) V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) d\vec{r}' + \psi(\vec{r}, t) V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t) - i\Theta_{ab} \psi(\vec{r}, t) \partial_a V_L^*(r) \partial_b \psi^\dagger(\vec{r}, t), \quad (2.4. 43)$$

puis, par la soustraction de l'Eq.(2.4. 42) de l'Eq.(2.4. 43) on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)) = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) + \frac{1}{m\hbar} \left(\psi(\vec{r}, t) \vec{L} \vec{\eta} \psi^\dagger(\vec{r}, t) - \psi^\dagger(\vec{r}, t) \vec{L} \vec{\eta} \psi(\vec{r}, t) \right) + \int \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}', t) - \psi(\vec{r}, t) V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}') \psi^\dagger(\vec{r}', t) \right) d\vec{r}' + i\Theta_{ab} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t) \partial_a V_L(r) \partial_b \psi(\vec{r}, t) + \psi(\vec{r}, t) \partial_a V_L^*(r) \partial_b \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) + \psi^\dagger(\vec{r}, t) V_L(r) \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) V_L^*(r) \psi^\dagger(\vec{r}, t), \quad (2.4. 44)$$

contracter l'équation ci-dessus comme suit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \rho_{NL} + \rho_L^{nc} + \mathcal{C}^{nc} = 0. \quad (2.4. 45)$$

L'équation (2.4. 44) sera reconnue comme l'équation de continuité non-commutative. En dénotant les termes distincts qui composent l'équation ci-dessus comme suit

$$\begin{aligned} \rho &= \mathcal{J}^0 = \psi^\dagger(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \\ \vec{J} &= \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) \\ \rho_{NL} &= \int \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t)V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')\psi(\vec{r}', t) - \psi(\vec{r}, t)V_{NL}^*(\vec{r}, \vec{r}')\psi^\dagger(\vec{r}', t) \right) d\vec{r}' \\ \rho_L^{nc} &= \psi^\dagger(\vec{r}, t)V_L(r)\psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t)V_L^*(r)\psi^\dagger(\vec{r}, t) \\ &\quad + i\Theta_{ab} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t)\partial_a V_L(r)\partial_b \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t)\partial_a V_L^*(r)\partial_b \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) \\ \mathcal{C}^{nc} &= \frac{1}{m\hbar} \left(\psi^\dagger(\vec{r}, t)\vec{L}\vec{\eta}\psi(\vec{r}, t) + \psi(\vec{r}, t)\vec{L}\vec{\eta}\psi^\dagger(\vec{r}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.4. 46)$$

Il est évident que la conservation de la densité de courant dans l'espace de phase non-commutatif a été violée complètement, ce qui signifie que la densité de courant ne satisfait pas la conservation actuelle. Ensuite, nous passons à l'interprétation des termes séparés, l'existence des quantités correspondantes aux paramètres explicites Θ , η qui sont impliquées dans l'équation obtenue (2.4. 46) en raison d'effet de la non-commutativité en espace-phase sur l'équation de Schrödinger. Premièrement, ces quantités sont simplement apparues comme des termes contenant les paramètres Θ et η , par conséquent, après avoir extrait l'équation de continuité non-commutative, ces termes sont responsables de la génération des nouvelles quantités collectivement avec le terme de correction qui contient le paramètre Θ .

Plus précisément, l'effet du potentiel non-local sur l'équation de continuité apparaît en tant que quantité non-locale de type densité, ainsi que pour l'effet de la localité, il apparaît en tant que quantité locale de type densité, où la non-commutativité en phase ne forme qu'un terme correctif \mathcal{C}^{nc} , qui apparaît dans l'équation de continuité non-commutative, mais pour la non-commutativité dans l'espace affecter seulement la quantité locale ρ_L^{nc} grâce à une correction de premier ordre. Une fois que le potentiel local est nul, la quantité de densité locale avec sa correction non-commutative disparaîtra.

En comparant l'équation de continuité dans le cas commutatif et le cas non-commutatif, nous trouvons que l'influence de la non-commutativité est très claire dans la quantité du potentiel local, mais pour la quantité non-locale disparaître. Nous constatons que l'effet de la

non-commutativité viole la conservation de l'équation de continuité.

Dans ce qui suit, nous modifions l'expression du courant de densité, dans lequel il sera conservé dans l'espace de phase non commutative :

Si le potentiel local $V_L(r)$ est réel, la quantité ρ_L^{nc} disparaît (semblable au cas commutatif), aussi quand le potentiel non-local $V_{NL}(\vec{r}, \vec{r}')$ est une matrice diagonale réelle, la quantité ρ_{NL} disparaît. Mais le courant calculé à partir de la densité de courant \vec{J} n'est pas conservé à cause de la correction qui vient de la non-commutativité dans la phase \mathcal{C}^{nc} , donc quelle que soit ρ_{NL} et ρ_L^{nc} , ça conduit à une densité de courant non conservable, ainsi que de la symétrie n'est pas maintenue dans l'espace de phase non-commutatif. Nous devons donc modifier la définition conventionnelle de la densité de courant pour y inclure la contribution de ρ_{NL} et ρ_L^{nc} , et donc à l'état stable $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'Eq.(2.4. 45) devient

$$\vec{\nabla} \vec{J} + \mathcal{C}^{nc} + \rho_L^{nc} + \rho_{NL} = 0, \quad (2.4. 47)$$

nous faisons le remplacement suivant

$$\vec{J} + \vec{K}^{nc} \rightarrow \vec{J}^{nc}, \text{ avec } \mathcal{C}^{nc} = \vec{\nabla} \vec{K}^{nc}, \quad (2.4. 48)$$

avec la condition $\nabla \mathcal{C}^{nc} = 0$. Nous définissons la nouvelle densité de courant globale en présence d'un potentiel non-local et autre local où la non-commutativité est considérée, comme

$$\vec{J}_{tot}^{nc} = \vec{J}^{nc} + \vec{J}_{NL} + \vec{J}_L^{nc}, \quad (2.4. 49)$$

où \vec{J}_L^{nc} , \vec{J}_{NL} sont la densité de courant local non-commutative, la densité de courant non-local définie de la façon suivante

$$\begin{aligned} \vec{J}_{NL} &= -\vec{\nabla} \chi_{NL}(\vec{r}), \\ \vec{J}_L^{nc} &= -\vec{\nabla} \varphi_L^{nc}(\vec{r}) \end{aligned}, \quad (2.4. 50)$$

dont $\chi_{NL}(\vec{r})$, $\varphi_L^{nc}(\vec{r})$ ont déterminé par l'ensemble d'équation de Poisson suivant

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \chi_{NL}(\vec{r}) + \rho_{NL} &= 0 \\ \vec{\nabla}^2 \varphi_L^{nc}(\vec{r}) + \rho_L^{nc} &= 0 \end{aligned}, \quad (2.4. 51)$$

en résolvant chaque équation de Poisson avec des conditions aux limites appropriées, nous trouvons \vec{J}_{NL} et \vec{J}_L^{nc} . Donc la densité de courant nouvellement définie satisfait $\nabla \vec{J}_{tot}^{nc} = 0$ et par conséquent, le courant calculé à partir de cette densité de courant satisfait à la conservation actuelle.

2.5 Conclusion

En conclusion, la non-commutativité en espace de phase introduite dans l'équation de Schrödinger et par conséquent, l'équation de continuité obtenue dans le cas commutatif et dans le cas non-commutatif, sans oublier que l'équation de Schrödinger est considérée en interaction avec un potentiel non-local et autre local, ceux-ci étant responsables à trouver des nouvelles quantités de type densité dans l'équation de continuité. Nous avons constaté que la non-commutativité dans l'espace de phase ne convient pas pour décrire la densité de courant en présence d'un potentiel non-local et d'un autre local. Aussi, avec certaines conditions, nous avons modifié la densité de courant pour résoudre ce problème. Ensuite, en tant qu'application, nous avons étudié le potentiel non local de Frahn-Lemmer.

Sachant que l'influence de la non-commutativité dans l'espace de phase a été introduite par les méthodes de la translation linéaire de décalage de Bopp et le produit de Moyal-Weyl.

Sous la condition que l'espace-espace et l'impulsion-impulsion sont tous commutatifs (c.-à-d. $\Theta = \eta = 0$), les résultats dans l'espace de phase non-commutatif reviennent à ceux de la mécanique quantique habituelle.

Les résultats du présent travail peuvent être utilisés et aident à étudier les lois de conservation telles que la symétrie du CPT (avec l'invariance de Lorentz), la conservation de l'isospin faible (avec $SU(2)$, invariance de jauge), et dans l'électromagnétisme tel que les équations de Maxwell, peut-être aussi utilisés dans la relativité générale en impliquant la géométrie non-commutative.

Chapitre 3

Les équations relativistes

3.1 Introduction

Dans la description de la mécanique quantique relativiste, il existe diverses équations d'onde relativistes, qui sont définis principalement selon les spins des particules, dont les particules de spins entiers sont les bosons, et ceux qui ont un spin demi-entier sont les fermions. Les équations relativistes de particules pour un spin arbitraire ont été considérées comme un sujet à étudier minutieusement, dans laquelle l'équation de Klein-Gordon est l'équation relativiste appropriée pour les particules de spin-0, et en ce qui concerne les particules de spin-1/2 de masse sont régies par l'équation relativiste de Dirac, d'autre part l'équation de Weyl décrit les particules de spin-1/2 sans masse, appelées fermions de Weyl. Pour l'équation d'onde qui décrit à la fois les particules de spin-0 et de spin-1 dans une seule équation est l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau. Pour les équations relativistes décrivant le mouvement des particules de spin-3/2, elles sont nombreuses telles que : l'équation de Rarita-Schwinger, l'équation de Fisk-Tait, l'équation de Bhabha-Gupta... (voir la section 5). Les équations de Joos-Weinberg et de Bargmann-Wigner aussi sont des équations d'onde relativistes applicables aux particules libres de spin-j arbitraire (entier ou demi-entier).

L'objectif de ce chapitre est d'examiner et étudier les équations de Kemmer et de Dirac, de Fisk-Tait dans l'espace de phase non-commutatif. Dans la section 3 : nous dérivons l'équation de kemmer dans le cas libre et en présence d'une interaction électromagnétique dans les deux types d'espace de phase (commutatif et non-commutatif). Dans les sections 4, 5 : nous avons

les résultats les plus intéressants de ce chapitre, dont l'équation de Dirac non-commutative en présence d'une interaction électromagnétique a été étudiée, et la solution de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif où la non-commutativité dépendante du temps a été trouvée. Nous avons aussi quelques choses de nouveau, pour la première fois, nous extrayons l'équation Fisk-Tait dans l'espace non-commutatif, et l'équation de continuité non-commutative est obtenue, où l'équation de Fisk-Tait a été considérée en présence d'une interaction électromagnétique. Nous avons aussi montré la correspondance entre les fermions et les bosons de l'espace de Fock utilisant la représentation de Holstein-Primakoff, et nous avons également trouvé la densité de courant de spin dans les deux directions de spin.

Dans ce chapitre, nous considérons que pour la notion de produit, nous ferons toujours la somme sur des indices répétés. Par exemple $A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\nu B_\mu = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$, avec les lettres grecques μ, ν, λ étant 0, 1, 2, 3, et $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique dans l'espace-temps de Minkowski.

3.2 L'équation de Klein-Gordon (KG)

L'équation de Klein-Gordon a été établie en 1926 par les physiciens Oskar Klein et Walter Gordon, c'est une équation d'onde relativiste doit converger vers l'équation de Schrödinger à la limite non relativiste, c'est l'équation qui décrit les particules massives ayant un spin nul. La seule particule fondamentale de spin-0 est le boson de Higgs (de masse $>115 \text{ GeV}/c^2$), où son champ satisfait l'équation de Klein-Gordon. Par contre il existe des particules composites de spin-0 comme les mésons π (pions), les mésons K (Kaons) et les noyaux atomiques des certains atomes composés d'un nombre pair de protons et de neutrons tels que ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si ... leurs dynamiques sont décrites par l'équation de Klein-Gordon.

Nous rappelons que l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre de masse m s'obtient à partir de l'équation (en adoptant les unités naturelles, $\hbar = c = 1$)

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2, \tag{3.2. 1}$$

avec E est l'énergie totale, nous pouvons la quantifier avec la substitution d'Eq.(2.2. 4) [équation

tion de Schrödinger, avec $V(x) = 0$] dans Eq.(3.2. 1), ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{x}, t) = (\Delta - m^2) \psi(\vec{x}, t), \quad (3.2. 2)$$

d'une manière plus simple et avec $\Delta = \vec{\nabla}^2$ et $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, on trouve

$$(\square + m^2) \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.2. 3)$$

l'Eq.(3.2. 3) est l'équation de KG qui s'applique à une fonction d'onde scalaire $\psi(\vec{x}, t)$ décrivant une particule de spin-0 et se généralisée à toutes les particules de spin entier.

Grace à la métrique minkovskienne $g_{\mu\nu}$, le d'Alembertien est $g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, alors Eq.(3.2. 3) devient

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi(x, t) = 0, \quad (3.2. 4)$$

il existe un courant conservé par les champs ψ vérifiant l'équation de Klein-Gordon via l'équation de continuité. En effet ¹

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \text{ avec } j^\mu = \frac{i}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*), \text{ la densité de probabilité } j^0 = \rho(x). \quad (3.2. 5)$$

On peut aussi écrire facilement l'équation de KG couplée au champ électromagnétique à travers le principe de couplage minimal, qui consiste à remplacer les dérivées ∂_μ par une dérivée covariante $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$, donc l'équation (3.2. 3) devient

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \psi(x, t) = 0. \quad (3.2. 6)$$

On peut facilement voir que le courant conservé associé à cette équation s'obtient en remplaçant ∂_μ par D_μ dans l'ancien courant. Ce qui s'écrit

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\psi^* D^\mu \psi - (D^\mu \psi)^* \psi) \text{ avec } \rho = \frac{i}{2m} (\psi^* (\partial_t + iqA_0) \psi - \psi (\partial_t - iqA_0) \psi^*) \text{ et } \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.2. 7)$$

Utilisant Eq.(1.4. 14), on trouve l'équation de KG dans un espace non-commutatif

$$(\square + m^2) \star \psi(x, t) \approx (\square + m^2) \psi(x, t) + \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a(\square) \partial_b \psi(x, t) + \mathcal{O}(\Theta^2) = 0. \quad (3.2. 8)$$

1. Le courant conservé associé à la symétrie U(1) d'un champ complexe $\psi(x) \in \mathbb{C}$. La forme du courant conservé peut être déduite systématiquement en appliquant le théorème de Noether à la symétrie U(1).

Nous ne nous attardons pas ici au calcul ou trouver les solutions de l'équation de Klein-Gordon et leurs interprétations.

Contrairement à l'équation de Schrödinger, l'équation libre de KG est invariante sous la transformation de Lorentz. Donc elle est éligible pour l'équation relativiste. Malheureusement, elle présente d'autres défauts qui compliquent son interprétation physique appropriée :

1. La densité associée à la composante temporelle du courant n'est pas définie positive (on peut également voir que les probabilités négatives sont liées à l'existence de solutions énergétiques négatives, pour lesquelles nous n'avons aucune interprétation physique).
2. L'équation implique une dérivée seconde ainsi que la première dérivée. Cela signifie que pour résoudre l'équation de certains ψ à $t > 0$, nous devons connaître les deux ψ et $\partial_t \psi$ à $t = 0$. Contrairement à l'équation de Schrödinger, l'équation de Klein-Gordon a un degré de liberté supplémentaire.
3. L'absence de densité de probabilité définie positive.

Pour ces raisons et d'autres, l'équation de KG a été considérée comme insatisfaisante pendant des décennies. Un point de vue contradictoire soutient que les problèmes de l'équation de KG peuvent être résolus (en page 24 [35]). Ensuite aujourd'hui, cette équation est considérée comme une équation d'onde respectable décrivant des particules relativistes de spin-0, et peut être trouvée dans certains livres traitant de la théorie classique des champs [36] et dans de nombreux ouvrages sur la théorie des champs quantitatifs (en page 21 [37]).

3.3 L'équation de Dirac

Les difficultés d'obtention d'une théorie cohérente d'une seule particule à partir de l'équation de Klein-Gordon ont conduit Paul Dirac en 1928 à construire son équation différentielle du premier ordre relativiste dans laquelle ayant une densité conservée définie positive et un ordre de priorité dans le temps donnant une équation d'évolution unique. Cette équation décrit le comportement de particules élémentaires de spin-1/2, comme les électrons.

3.3.1 L'équation de Dirac dans l'espace de phase commutatif

D'après Dirac, nous postulons l'existence d'une équation d'onde linéaire par rapport aux dérivées du temps et aux variables spatiales. Cette équation doit être similaire à l'équation de Schrödinger. Ainsi, on écrit

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \text{grad} + \beta m \right) \psi. \quad (3.3. 9)$$

Il reste à définir les opérateurs $\vec{\alpha}$ et β .

L'Eq.(3.2. 2), et la relation entre énergie et impulsion (3.2. 1) restent évidemment valables, et donc l'équation de Klein-Gordon (3.2. 2) aussi. Itérant l'équation (3.2. 3) nous trouvons

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2 \psi, \quad (3.3. 10)$$

et comparant avec (3.2. 1), nous concluons que les matrices α_i et β doivent satisfaire à

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}, \quad (3.3. 11)$$

ceci est réalisable si les α_i et β sont des matrices de rang N pair, au minimum égal à 4. Nous nous limiterons à ce dernier cas.

On vérifie facilement bien qu'avec un peu d'effort, que le choix

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3. 12)$$

avec les matrices de Pauli σ_i satisfait à Eq. (3.3. 11). Les fonctions d'onde sont alors des spineurs de rang 4 de la forme suivante

$$\psi(\vec{x}, t) = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4)^T, \quad (3.3. 13)$$

ayant donc 4 degrés de liberté. Dans le référentiel où la particule est au repos, nous avons quatre états distincts donnés par les expressions suivantes

$$\psi(\vec{x}, t) = \underbrace{e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=+m, \uparrow}, \underbrace{e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=+m, \downarrow}, \underbrace{e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=-m, \uparrow}, \underbrace{e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E=-m, \downarrow}. \quad (3.3. 14)$$

Les deux états d'énergie positive correspondent à deux orientations de spin possible d'une particule de spin $S = \frac{1}{2}$ avec ($m_s = \pm 1/2$), disons un électron. Les deux états d'énergie négative représentent les deux orientations de spin de l'antiparticule associée, dans notre cas un positron.

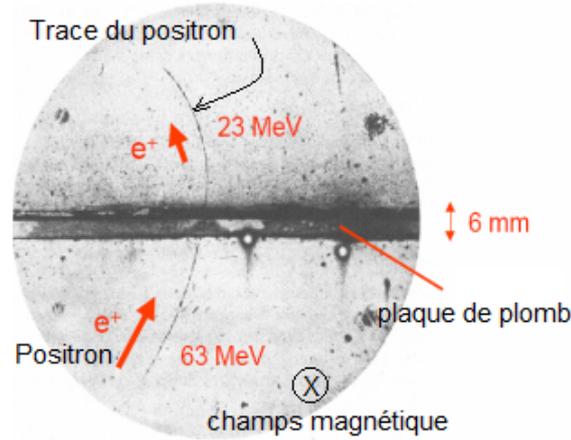


FIGURE 3.1 – Photographie du premier positron détecté

La figure ci-dessus est une photographie de la trajectoire d'un positron dans une chambre à brouillard par Carl D. Anderson (1932)², qui confirme la prédiction de Dirac. Où le positron traverse une plaque de plomb de bas en haut, sous un champ magnétique (perpendiculairement au plan de la figure) avec une perte progressive d'énergie. Les solutions de l'équation de Dirac contiennent non seulement des particules, mais aussi leurs antiparticules.

On peut aussi avoir des solutions dans un référentiel quelconque, alors pour les ondes planes de la forme

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ip^\mu x_\mu}, \quad (3.3. 15)$$

qui sont des solutions de l'équation de Dirac libre avec un spineur de rang 4 qui est composé de deux spineurs de rang 2 ϕ et χ . Nous rappelons que

$$p^\mu = (E, \vec{p}), \quad x^\mu = (t, \vec{x}). \quad (3.3. 16)$$

À partir des équations (3.3. 13) et (3.3. 15), nous pouvons exprimer les quatre états distincts

2. C. D. Anderson, Physical Review 43, 491 (1933).

dans un référentiel quelconque, où la particule a une impulsion \vec{p}

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (E, \vec{p}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}}_{E=+\sqrt{p^2+m^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}}_{E=-\sqrt{p^2+m^2}}, \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_+}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (p_{\pm} = p_x \pm ip_y). \quad (3.3. 17)$$

Finalement, l'équation de Dirac décrit des fermions et des anti-fermions de spin-1/2.

3.3.1.1 La densité de probabilité

D'une manière similaire au cas de l'équation de Schrödinger, nous définissons la densité de probabilité par

$$P = \psi^\dagger \psi = \psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2 + \psi_3^\dagger \psi_3 + \psi_4^\dagger \psi_4 \geq 0. \quad (3.3. 18)$$

Il nous reste à construire une densité de courant de probabilité, de telle sorte que l'équation de continuité soit satisfaite. D'après Eq.(3.3. 9) et en tenant compte du fait que $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^\dagger$ et $\beta^\dagger = \beta$, de la même façon utilisée précédemment dans le chapitre 2, nous trouvons l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \psi = -\text{div} \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi, \quad (3.3. 19)$$

donc simplement nous obtenons le quadricourant de probabilité

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi). \quad (3.3. 20)$$

Multipliant par la charge portée par l'électron $[-e]$, nous obtenons le quadricourant

$$j_{em}^\mu = (-e) (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi). \quad (3.3. 21)$$

3.3.1.2 La notion covariante

Nous passons maintenant à une notation plus compacte, la notation covariante. Pour ceci nous introduisons les matrices

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma^i = \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}). \quad (3.3. 22)$$

À partir d'Eq.(3.3. 11) on aboutit à les relations d'anti-commutation suivantes

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= 2\beta^2 &= 2 \times 1_{4 \times 4} \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= \beta^2 \alpha_i + \beta \alpha_i \beta &= 0 \\ \{\gamma^i, \gamma^k\} &= \beta \alpha_i \beta \alpha_k + \beta \alpha_k \beta \alpha_i &= -\alpha_i \alpha_k - \alpha_k \alpha_i = -2\delta_{ij} \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.3. 23)$$

Nous multiplions Eq.(3.3. 9) par la gauche par γ^0 , on obtient

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial t} - m\psi = 0, \quad (3.3. 24)$$

pour obtenir la forme covariante de l'équation de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (3.3. 25)$$

Nous définissons encore le spineur conjugué

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.3. 26)$$

avec lequel la densité de probabilité et son courant deviennent le quadricourant³

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.3. 27)$$

La densité de courant électromagnétique s'obtient en multipliant par la charge de l'électron

$$j_{em}^\mu = (-e) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.3. 28)$$

3.3.1.3 L'interaction électromagnétique

La forme de l'équation de Dirac que nous avons utilisée jusqu'ici n'est applicable qu'aux particules libres. Nous allons essayer d'incorporer l'interaction électromagnétique. La relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule libre classique se généralise à une particule de charge e plongée dans un champ électromagnétique dérivant du quadripotentiell $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ en opérant la substitution

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu, \quad (3.3. 29)$$

l'impulsion généralisée se distingue de l'impulsion ordinaire \vec{p} par l'addition du terme $-e\vec{A}$.

Le passage à la mécanique quantique se fait en remplaçant la substitution (3.3. 29) par

$$p_\mu = i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu. \quad (3.3. 30)$$

Nous incorporons donc l'interaction électromagnétique dans l'équation de Dirac par Eq.(3.3. 30), ce qui donne

$$\{\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m\} \psi = 0. \quad (3.3. 31)$$

³. En simplifiant j^μ comme suivant : $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) = \psi^\dagger (1, \vec{\alpha}) \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (\gamma^0, \gamma^0 \vec{\alpha}) \psi = \bar{\psi} (\gamma^0, \vec{\alpha}) \psi$.

Multiplions l'équation de Dirac à gauche par γ^0

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \gamma^0 \gamma^i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0 m \right\} \psi = 0, \quad (3.3. 32)$$

donc, on obtient

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{(-\alpha_i \partial_i + \beta m)}_{H_0} \psi + \underbrace{(eA_0 + e\gamma^0 \gamma^i A_i)}_V \psi. \quad (3.3. 33)$$

Ceci ressemble à une équation de Schrödinger, même si la fonction d'onde est spinorielle.

Il est évident que notre formalisme de calcul de perturbation s'applique avec l'Hamiltonien non perturbé H_0 dont les ondes planes sont les fonctions propres, et la perturbation

$$V(\vec{x}, t) = e(A_0 + \gamma^0 \gamma^i A_i) = e\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu(\vec{x}, t). \quad (3.3. 34)$$

Pour illustration, nous écrivons ce potentiel de manière explicite dans la représentation standard

$$V(\vec{x}, t) = e \begin{pmatrix} A_0 & \vec{\sigma} \vec{A} \\ \vec{\sigma} \vec{A} & A_0 \end{pmatrix}. \quad (3.3. 35)$$

Notamment, dans le cas particulier où $A^\mu = (\varphi, 0)$ le potentiel se réduit au potentiel électrique multiplié par la charge de la particule e , et par la matrice unité

$$V(\vec{x}, t) = e\varphi(\vec{x}, t). \quad (3.3. 36)$$

Nous revenons encore à la forme (3.3. 31) de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique et remarquons qu'elle est invariante de jauge si nous complétons la transformation habituelle du champ A^μ avec une fonction $f(\vec{x})$ quelconque par une transformation de la fonction d'onde ψ

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f(\vec{x}), \quad (3.3. 37)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ief(\vec{x})} \psi, \quad (3.3. 38)$$

dont

$$\{\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA'_\mu) - m\} \psi' = e^{-ief(\vec{x})} \{\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu - e\partial_\mu f(\vec{x}) + e\partial_\mu f(\vec{x})) - m\} \psi = 0. \quad (3.3. 39)$$

3.3.2 L'équation de Dirac dans un espace de phase non-commutatif

Comme il est connu, en utilisant le produit- \star et la transformation de décalage de Bopp, nous obtenons l'équation de Dirac pour la mécanique quantique non-commutative ⁴

$$H(\vec{x}, \vec{p}^{nc}) \star \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t). \quad (3.3. 40)$$

⁴ Ici, on ne considère pas les unités naturelles, $\hbar \neq c \neq 1$: Puisque on s'intéresse à \hbar , c , pour plus tard, appliquer la limite non-relativiste (dans la sous-section 4.2.1)

Sachant que, l'équation de Dirac en interaction avec un potentiel électromagnétique à quadri-potentiel A^μ dans l'espace de phase commutatif est

$$\left\{ c\alpha_i(p_i - \frac{e}{c}A_i(\vec{x})) + eA_0(\vec{x}) + \beta mc^2 \right\} \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t), \quad (3.3. 41)$$

avec $\psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est le bi-spineur dans la représentation de Dirac ⁵.

Premièrement, en réalisant la non-commutativité dans l'espace, par le raccordement entre les coordonnées non-commutatives x_i^{nc} et les coordonnées commutatives x_i grâce au produit- \star , donc à l'aide d'Eq.(1.4. 14), nous trouvons

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star \psi(\vec{x}) = \left\{ c\alpha_i(p_i^{nc} - \frac{e}{c}A_i(\vec{x})) + eA_0(\vec{x}) + \beta mc^2 \right\} \star \psi(\vec{x}). \quad (3.3. 42)$$

Nous Considérons le potentiel électromagnétique $A(x) = hx$, où h est une constante réelle. Les dérivations dans l'équation (1.4. 14) s'éteignent automatiquement dans le premier ordre, donc Eq.(3.3. 42) devient comme suit

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star \psi(\vec{x}) = H(\vec{x}, \vec{p}^{nc})\psi(\vec{x}) + \frac{i}{2}\Theta_{ab}\partial_a \left\{ c\alpha_i(p_i^{nc} - \frac{e}{c}A_i(\vec{x})) + eA_0(\vec{x}) + \beta mc^2 \right\} \partial_b \psi(\vec{x}) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\Theta^2) = 0 \quad (3.3. 43)$$

Avec $\partial_a(c\alpha_i p_i^{nc}) = \partial_a(\beta mc^2) = 0$, l'Eq.(3.3. 43) réduit à

$$H(\vec{x}, \vec{p}^{nc})\psi(\vec{x}) - \frac{ie}{2}\Theta_{ab}\partial_a(\hat{\alpha}_i A_i(\vec{x}) + A_0(\vec{x}))\partial_b \psi(\vec{x}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}). \quad (3.3. 44)$$

Deuxièmement, en réalisant la non-commutativité en la phase dans Eq.(3.3. 44) par le raccordement entre l'impulsion non-commutatif p_i^{nc} et l'impulsion commutatif p_i à travers Eq.(1.6. 53), alors on obtient l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star \psi(\vec{x}) = \left\{ c\alpha_i \left(p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j - \frac{e}{c} A_i(\vec{x}) \right) + eA_0(\vec{x}) + \beta mc^2 \right. \\ \left. - \frac{ie}{2} \Theta_{ab} \partial_a (\alpha_i A_i(\vec{x}) + A_0(\vec{x})) \partial_b \right\} \psi(\vec{x}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}) \quad (3.3. 45)$$

nous réécrivons Eq.(3.3. 45) sous une forme plus compacte (voir l'**annexe A**)

$$H^{nc} \star \bar{\psi} = \left\{ c\vec{\alpha}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + eA_0 + \beta mc^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} + \frac{e}{\hbar}(\vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A} - A_0) \times \vec{p})\vec{\Theta} \right\} \bar{\psi} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}, \quad (3.3. 46)$$

avec $\bar{\psi} = e^{-\frac{i(E + \frac{e}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta})t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \phi^{nc} \\ \chi^{nc} \end{pmatrix}$ est la fonction d'onde dans un espace de phase non-commutatif.

5. La représentation de Dirac (la représentation d'interaction) : c'est une représentation intermédiaire entre la représentation de Schrödinger et celle de Heisenberg, où on traite les problèmes dépendant du temps. C'est utile pour traiter les modifications des fonctions d'onde et des observables en raison des interactions.

3.3.3 L'équation de Dirac dans un espace de phase non-commutatif dépendant du temps

La solution analytique pour un système d'équations au potentiel explicitement dépendant du temps a longtemps attiré l'attention des physiciens, outre son intérêt mathématique intrinsèque, ce problème est lié à plusieurs applications à de nombreux problèmes physiques pour son applicabilité, comme dans le transport quantique [38], optique et information quantique [39, 40], aussi l'amplification paramétrique dégénérée [41]. Il existe plusieurs méthodes pour étudier les systèmes d'équations dépendant du temps, telles que l'opérateur d'évolution, le changement de représentation, les transformations unitaires, et notamment la méthode dite de l'opérateur invariant de Lewis-Riesenfeld.

La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld [42, 43] est une technique qui permet d'obtenir un ensemble complet de solutions de systèmes d'équations dans lesquels les Hamiltoniens sont dépendants du temps, en termes des états propres des invariants de Lewis-Riesenfeld, on trouve les solutions du système d'équations, où Lewis et Riesenfeld dans leur article original [42] ont fourni une méthode pour obtenir une famille de fonctions d'onde exactes pour l'oscillateur harmonique dépendant du temps couvrant tout l'espace de Hilbert. Récemment, la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld a été utilisée dans de nombreuses applications comme : les circuits électriques mésoscopiques RLC (R, L, C sont dépendantes du temps) [44] où l'évolution quantique est décrite, aussi pour inverser les raccourcis d'ingénierie vers l'adiabaticité [45]...

Dans cette sous-section, nous considérons la non-commutativité dépendante du temps via la translation linéaire de décalage-Bopp dépendante du temps, ce qui conduit à un système non-commutatif dépendant du temps $\mathcal{H}(x^{nc}, p^{nc}) \rightarrow \mathcal{H}(x, p, t)$, ensuite en utilisant de la technique des invariants, nous obtenons l'invariant de Lewis-Riesenfeld et ses états propres, et ultimement résoudre l'équation de notre système.

3.3.3.1 L'équation de Dirac à (2+1) d dans un espace de phase non-commutatif dépendant du temps

D'abord notre choix d'étudier l'équation de Dirac à (2+1) d parce qu'au cours des dernières années, elle a été étudiée d'après un certain nombre d'auteurs, pour des diverses raisons telles

que l'étude des niveaux de Landau, l'oscillation de la magnétisation, l'oscillation de Weiss, description du mouvement des porteurs d'électrons dans le graphène⁶ et d'autres matériaux...etc. En outre l'équation de Dirac à 2 d en interaction avec un champ magnétique homogène a de nombreuses applications par exemple dans le graphène, créer des états liés, étudier l'effet Hall quantique et les effets Hall fractionnaires, la phase de Berry...etc.

L'équation de Dirac en interaction avec un quadripotentiel électromagnétique A^μ à (2+1) dimensions est donnée par

$$[\alpha_i(p_i - eA_i(x)) + eA_0(x) + \beta m] |\psi\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle, \quad (3.3. 47)$$

où $|\psi\rangle$ est la fonction d'onde de Dirac, et $p_i = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ est l'impulsion, les matrices de Dirac α_i et β satisfont les relations anti-commutation (3.3. 11). Le champ magnétique est défini en termes de potentiel symétrique $[\vec{B}$ orienté selon (Oz)]

$$A_i = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right), \quad A_0 = 0, \quad (3.3. 48)$$

la plupart des recherches sur les systèmes dépendant du temps s'intéressent aux mouvements de particules sous le champ électrique. Différemment dans nos travaux actuels, nous négligeons le champ électrique. En outre le choix de négliger \vec{E} concerne des études futures dans lesquelles nous ne comptons pas sur le champ électrique (et en raison de la simplification).

En utilisant Eq.(3.3. 48), alors l'Hamiltonien du système devient

$$H(x_i, p_i) = \alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + e\alpha_1 \frac{B}{2}y - e\alpha_2 \frac{B}{2}x + eA_0 + \hat{\beta}m. \quad (3.3. 49)$$

En appliquant la géométrie non-commutative dans l'Hamiltonien de Dirac (3.3. 49)

$$H(x^{nc}, y^{nc}, p_x^{nc}, p_y^{nc}) = \alpha_1 p_x^{nc} + \alpha_2 p_y^{nc} - e\alpha_2 \frac{B}{2}x^{nc} + e\alpha_1 \frac{B}{2}y^{nc} + eA_0 + \hat{\beta}m, \quad (3.3. 50)$$

en appliquant Eq.(1.6. 56), nous nécessairement exprimons le nouvel Hamiltonien non-commutatif à travers les variables commutatives $\{x, y, p_x, p_y\}$, alors on obtient

$$H^{nc}(t) = \alpha_1 \left(1 + \frac{eB}{4} \Theta e^{\gamma t}\right) p_x - \alpha_2 \left(\frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma t}\right) x + \alpha_2 \left(1 + \frac{eB}{4} \Theta e^{\gamma t}\right) p_y + \alpha_1 \left(\frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma t}\right) y + \hat{\beta}m, \quad (3.3. 51)$$

6. C'est une monocouche d'atomes de carbone dans une structure cristalline en nid d'abeille dense qui peut être considérée comme un plan atomique individuel extrait du graphite ou des nanotubes de carbone à paroi unique déroulés ou comme une molécule de fullerène géante et plate.

avec

$$\alpha_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3. 52)$$

Dans un espace de phase non-commutatif, l'équation de Dirac dépendante du temps est

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\psi}(t)\rangle = H^{nc}(t) |\bar{\psi}(t)\rangle, \quad (3.3. 53)$$

rappelant encore une fois que $|\bar{\psi}(t)\rangle$ est la fonction d'onde non-commutative de Dirac.

— **La construction des invariants de Lewis-Riesenfeld**

Pour résoudre Eq.(3.3. 53), nous utilisons la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld, nous supposons qu'il existe un invariant quantique-mécanique $I(t)$ qui satisfait l'équation

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{i} [I(t), H^{nc}(t)] + \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 54)$$

avec

$$i \frac{\partial}{\partial t} (I(t) |\bar{\psi}(t)\rangle) = H^{nc}(t) I(t) |\bar{\psi}(t)\rangle. \quad (3.3. 55)$$

L'équation ci-dessus s'appelle la condition d'invariance pour l'invariant dynamique $I(t)$, sachant que cet invariant dynamique est un opérateur Hermitien

$$I(t) = I^+(t). \quad (3.3. 56)$$

En admettant que

$$I(t) = A_1(t)p_x + B_1(t)x + A_2(t)p_y + B_2(t)y + C(t), \quad (3.3. 57)$$

avec $A_1(t)$, $B_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)$, $C(t)$ sont des matrices dépendantes du temps. La substitution des équations (3.3. 57 et 3.3. 50) dans l'Eq.(3.3. 54), et en utilisant les propriétés des relations de commutation, conduisent à⁷

$$[I, H^{nc}] + i \frac{\partial I}{\partial t} = [A_1 p_x, H^{nc}] + [B_1 x, H^{nc}] + [A_2 p_y, H^{nc}] + [B_2 y, H^{nc}] + [C, H^{nc}] = 0. \quad (3.3. 58)$$

Pour la simplicité nous prenons $f_\Theta(t) = 1 + \frac{eB}{4}\Theta e^{\gamma t}$ et $f_\eta(t) = \frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2}e^{-\gamma t}$ (ne sont pas des matrices), alors nous avons

$$\begin{aligned} & [A_1, \alpha_1 f_\Theta] p_x^2 + [A_2, \alpha_2 f_\Theta] p_y^2 - [B_1, \alpha_2 f_\eta] x^2 + [B_2, \alpha_1 f_\eta] y^2 + \{[A_1, \alpha_2 f_\Theta] + [A_2, \alpha_1 f_\Theta]\} p_x p_y \\ & + \{[A_1, \alpha_1 f_\eta] + [B_2, \alpha_1 f_\Theta]\} y p_x + \{[A_1, \beta m] + [C, \alpha_1 f_\Theta] + i \frac{\partial A_1}{\partial t}\} p_x + \{[A_2, \beta m] + [C, \alpha_2 f_\Theta] + \frac{\partial A_2}{\partial t}\} p_y \\ & + \{[B_1, \beta m] - [C, \alpha_2 f_\eta] + i \frac{\partial B_1}{\partial t}\} x + \{[B_2, \beta m] + [C, \alpha_1 f_\eta] + i \frac{\partial B_2}{\partial t}\} y + \{-[A_1, \alpha_2 f_\eta] + [B_1, \alpha_1 f_\Theta]\} x p_x \\ & + \{[B_1, \alpha_2 f_\Theta] - [A_2, \alpha_2 f_\eta]\} x p_y + \{[B_1, \alpha_1 f_\eta] - [B_2, \alpha_2 f_\eta]\} x y + \{[A_2, \alpha_1 f_\eta] + [B_2, \alpha_2 f_\Theta]\} y p_y \\ & + i A_1 \alpha_2 f_\eta + i B_1 \alpha_1 f_\Theta - i A_2 \alpha_1 f_\eta + i B_2 \alpha_2 f_\Theta - i [B_1, \alpha_1 f_\Theta] - i [B_2, \alpha_2 f_\Theta] + [C, \beta m] + i \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3.3. 59)$$

7. Pour les commutateurs, on a : $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$ et $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Pour satisfaire Eq.(3.3. 54), et en profitant toujours des propriétés des relations de commutation, et $p_i p_j = p_j p_i$, $x_i p_j = p_j x_i$ si $i \neq j \in \{1,2\}$, sinon $p_x x = x p_x - i$, $p_y y = y p_y - i$, nous demandons

$$[A_1, \alpha_1 f_\Theta] = 0, \quad (3.3. 60)$$

$$[A_2, \alpha_2 f_\Theta] = 0, \quad (3.3. 61)$$

$$[B_1, \alpha_2 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 62)$$

$$[B_2, \alpha_1 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 63)$$

$$[A_1, \beta] m + [C, \alpha_1 f_\Theta] + i \frac{\partial A_1}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 64)$$

$$[A_2, \beta] m + [C, \alpha_2 f_\Theta] + i \frac{\partial A_2}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 65)$$

$$[B_1, \beta] m - [C, \alpha_2 f_\eta] + i \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 66)$$

$$[B_2, \beta] m + [C, \alpha_1 f_\eta] + i \frac{\partial B_2}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 67)$$

$$[A_1, \alpha_2 f_\Theta] + [A_2, \alpha_1 f_\Theta] = 0, \quad (3.3. 68)$$

$$[B_1, \alpha_1 f_\Theta] - [A_1, \alpha_2 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 69)$$

$$[B_1, \alpha_2 f_\Theta] - [A_2, \alpha_2 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 70)$$

$$[B_1, \alpha_1 f_\eta] - [B_2, \alpha_2 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 71)$$

$$[B_2, \alpha_1 f_\Theta] + [A_1, \alpha_1 f_\eta] = 0, \quad (3.3. 72)$$

$$[A_2, \alpha_1 f_\eta] + [B_2, \alpha_2 f_\Theta] = 0, \quad (3.3. 73)$$

$$iA_1 \alpha_2 f_\eta + iB_1 \alpha_1 f_\Theta - iA_2 \alpha_1 f_\eta + iB_2 \alpha_2 f_\Theta - i \{ [B_1, \alpha_1 f_\Theta] + [B_2, \alpha_2 f_\Theta] \} + [C, \beta m] + i \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \quad (3.3. 74)$$

D'après les relations (3.3. 60-3.3. 63), on obtient ⁸

$$A_1 = a_1 + a_2 \alpha_1, \quad (3.3. 75)$$

$$A_2 = a_3 + a_4 \alpha_2, \quad (3.3. 76)$$

8. Tant que par exemple, à partir d'Eq.(3.3. 60), on a $A_1 \alpha_1 f_\Theta(t) = \alpha_1 f_\Theta(t) A_1$, alors $A_1 = g(\alpha_1, t)$, de sorte que $A_1 = a_0(t) + a_1(t) \alpha_1 + a_2(t) \alpha_1^2 + a_3(t) \alpha_1^3 + a_4(t) \alpha_1^4 + \dots = a'_0(t) + a'_1(t) \alpha_1$.

$$B_1 = b_1 + b_2\alpha_2, \quad (3.3. 77)$$

$$B_2 = b_3 + b_4\alpha_1. \quad (3.3. 78)$$

À partir de les équations (3.3. 64 - 3.3. 67) et de la même manière, en supposant que C soit écrit en termes de de α_1 et α_2 comme suit

$$C = c_1 + c_2\alpha_1 + c_3\alpha_2 + c_4\beta, \quad (3.3. 79)$$

dont a_i , b_i et c_i avec ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des fonctions arbitraires dépendantes du temps.

En remplaçant Eqs.(3.3. 79, 3.3. 75) dans l'Eq.(3.3. 64) et Eqs.(3.3. 79, 3.3. 76) dans Eq.(3.3. 65), prendre en considération Eq.(3.3. 11) cèdent

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} = 0, \quad a_2 = a_4 = c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad (3.3. 80)$$

ensuite, en remplaçant Eqs.(3.3. 79, 3.3. 77) dans Eq.(3.3. 66) et Eqs.(3.3. 79, 3.3. 78) Eq.(3.3. 67), prendre en considération Eq.(3.3. 11) cèdent

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial b_3}{\partial t} = 0, \quad b_2 = b_4 = c_2 = c_4 = 0. \quad (3.3. 81)$$

À partir d'équations (3.3. 80, 3.3. 81) on remarque que a_1 , a_3 et b_1 , b_3 sont constants et indépendants dans le temps. Cela conduit à trouver

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_3, \quad B_1 = b_1, \quad B_2 = b_3, \quad C = c_1. \quad (3.3. 82)$$

En plus, à partir des Eqs.(3.3. 70, 3.3. 72), et en supposant que $\exists \chi(t), \varphi(t)$ (matrices dépendantes du temps) avec $[\chi(t), \alpha_2] = [\varphi(t), \alpha_1] = 0$. La dépendance du temps peut apparaître comme suit

$$\begin{aligned} b_1 f_\Theta - a_3 f_\eta &= \chi(t) \\ b_3 f_\Theta + a_1 f_\eta &= \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.3. 83)$$

Maintenant, en remplaçant Eq.(3.3. 82) en Eq.(3.3. 74) et utilisant Eq.(3.3. 83), nous donne

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = - \{a_1 f_\eta + b_3 f_\Theta\} \alpha_2 - \{b_1 f_\Theta - a_3 f_\eta\} \alpha_1, \quad (3.3. 84)$$

en utilisant le système de relations (3.3. 83), nous trouvons

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = 0 \text{ et } \chi = \varphi = 0. \quad (3.3. 85)$$

Enfin et surtout, l'invariant dynamique (3.3. 57) de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif et dépendant du temps peut s'écrire comme suit

$$I = a_1 p_x + b_1 x + a_3 p_y + b_3 y + c_1, \quad (3.3. 86)$$

nous avons déduit qu'Eq.(2.3. 14) est vérifiée et c_1 doit être une constante. On peut noter également que toutes les parties dépendantes du spin qui sont proportionnelles à α_j, β disparaissent. Cela signifie que I n'ai aucune dépendance de spin. Il est proportionnel à la matrice d'identité dans l'espace spineur.

— **Valeurs propres et états propres de I et $H(t)$**

En supposant que l'invariant $I(t)$ (dans cette partie, l'analyse ne concerne pas seulement l'invariant indépendants du temps) est un ensemble complet de fonctions propres $|\phi(\lambda, k)\rangle$, avec λ étant la valeur propre correspondante (spectre d'opérateur), et k représentant tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres.

L'équation de valeur propre s'écrit comme suit

$$I(t) |\phi(\lambda, k)\rangle = \lambda |\phi(\lambda, k)\rangle, \quad (3.3. 87)$$

où $|\phi(\lambda, k)\rangle$ sont des fonctions propres orthogonales⁹

$$\langle \phi(\lambda, k) | \phi(\lambda', k') \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}. \quad (3.3. 88)$$

Suivant Eq.(3.3. 56), la valeur propre est réelle et non dépendante du temps. En dérivant Eq.(3.3. 87) dans le temps, on trouve

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle, \quad (3.3. 89)$$

on applique l'Eq.(3.3. 54) sur les fonctions propres $|\phi(\lambda, k)\rangle$, il vient

$$i \frac{\partial I}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle + IH^{nc} |\phi(\lambda, k)\rangle - H^{nc} \lambda |\phi(\lambda, k)\rangle = 0, \quad (3.3. 90)$$

le produit scalaire d'Eq.(3.3. 90) avec $\langle \phi(\lambda', k') |$ est

$$i \langle \phi(\lambda', k') | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi(\lambda, k) \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \phi(\lambda', k') | H^{nc} | \phi(\lambda, k) \rangle = 0, \quad (3.3. 91)$$

9. Base orthonormée (de valeur 0 ou 1) est : $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$.

ce qui implique

$$\left\langle \phi(\lambda', k') \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle = 0, \quad (3.3. 92)$$

le produit scalaire aussi d'Eq.(3.3. 89) avec $\left\langle \phi(\lambda', k') \right|$ est

$$\left\langle \phi(\lambda', k') \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (3.3. 93)$$

à partir d'Eqs.(3.3. 92, 3.3. 93) en montrant que

$$\left\langle \phi(\lambda', k') \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.3. 94)$$

Comme les valeurs propres sont indépendantes du temps, les états propres doivent dépendre du temps.

Pour trouver la relation entre les états propres de l'invariant et les solutions de l'équation de Dirac, nous écrivons d'abord l'équation de mouvement de $|\phi(\lambda, k)\rangle$. Nous commençons avec Eqs.(3.3. 89, 3.3. 94), on obtient

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle = (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\phi(\lambda, k)\rangle, \quad (3.3. 95)$$

en prenant le produit scalaire avec $\left\langle \phi(\lambda', k') \right|$ et en utilisant Eq.(3.3. 91) pour éliminer $\left\langle \phi(\lambda', k') \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle$, on obtient

$$i \left\langle \phi(\lambda', k') \left| \left(\lambda - \lambda' \right) \frac{\partial}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle = (\lambda - \lambda') \left\langle \phi(\lambda', k') \left| H^{nc} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle. \quad (3.3. 96)$$

Alors, pour que $\lambda' \neq \lambda$, on a

$$i \left\langle \phi(\lambda', k') \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle = \left\langle \phi(\lambda', k') \left| H^{nc} \right| \phi(\lambda, k) \right\rangle, \quad (3.3. 97)$$

on déduit immédiatement que $|\phi(\lambda, k)\rangle$ vérifie l'équation de Dirac, c'est-à-dire $|\phi(\lambda, k)\rangle$ sont des solutions particulières de l'équation de Dirac.

On suppose qu'une phase a été choisie, mais il est toujours loisible de la multiplier par un facteur arbitraire de phase dépendant du temps, ce qui signifie que nous pouvons définir un nouvel ensemble d'états propres de $I(t)$ lié à notre ensemble par une transformation de jauge dépendante du temps

$$|\phi(\lambda, k)\rangle_\alpha = e^{i\alpha_\lambda(t)} |\phi(\lambda, k)\rangle, \quad (3.3. 98)$$

dont $\alpha_\lambda(t)$ est une fonction du temps choisi arbitrairement, appelée la phase de Lewis-Riesenfeld, et $|\phi_\lambda(x, y, t)\rangle_\alpha$ sont des états propres orthonormés de $I(t)$ associé à λ . En mettant Eq.(3.3. 98) dans Eq.(3.3. 97) et en utilisant Eq.(3.3. 88) on trouve

$$\frac{\partial \alpha_{\lambda,k}}{\partial t} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'} = \langle \phi(\lambda', k') | i \frac{\partial}{\partial t} - H^{nc} | \phi(\lambda, k) \rangle. \quad (3.3. 99)$$

Tous les états propres d'invariant sont également des solutions à l'équation de Dirac dépendante du temps, ainsi sa solution générale se fait par

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = \sum_{\lambda,k} C_{\lambda,k} e^{i\alpha_{\lambda,k}(t)} |\phi(\lambda, k, t)\rangle, \quad (3.3. 100)$$

dont $|\bar{\psi}(t)\rangle$ est la solution de l'équation de Dirac non-commutative, nous remarquons que Eq. (3.3. 100) est également indépendant du spin dans son état. Mais peut-être que la partie dépendante du spin est empêtrée dans le coefficient C , $|\phi(\lambda, k, t)\rangle$ sont les états propres orthonormés d'invariant $I(t)$, et $C_{\lambda,k}$ sont les coefficients indépendants du temps, qui correspondent à $|\psi(0)\rangle$

$$C_{\lambda,k} = \langle \lambda, k | \psi(0) \rangle. \quad (3.3. 101)$$

Pour un spectre discret de $I(t)$, avec $\lambda = \lambda'$ et $k = k'$, à partir d'Eq.(3.3. 99) la phase de Lewis-Riesenfeld est définie comme suivant

$$\alpha(t) = \int_0^t \langle \phi(\lambda, k, t') | i \frac{\partial}{\partial t'} - H^{nc}(t') | \phi(\lambda, k, t') \rangle dt'. \quad (3.3. 102)$$

Mais, dans le cas d'un spectre continu, l'expression générale de la phase est

$$\frac{\partial \alpha_{\lambda,k}}{\partial t} \langle \phi(\lambda', k', t' | \phi(\lambda, k, t)) \rangle = \langle \phi(\lambda', k', t') | i \frac{\partial}{\partial t} - H^{nc} | \phi(\lambda, k, t) \rangle, \quad (3.3. 103)$$

où k est un indice qui varie continuellement dans les valeurs réelles, donc

$$\langle \phi(\lambda', k', t' | \phi(\lambda, k, t)) \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k'), \quad (3.3. 104)$$

en substituant Eq.(3.3. 104) en Eq.(3.3. 103), on trouve

$$\alpha(t) = \int \int_0^t \langle \phi(\lambda, k', t') | i \frac{\partial}{\partial t'} - H^{nc} | \phi(\lambda, k, t') \rangle dt' dk'. \quad (3.3. 105)$$

Une fois on trouve l'expression de la phase $\alpha(t)$, on peut écrire la solution particulière de notre équation de Dirac non-commutative dépendante du temps Eq.(3.3. 100).

Pour simplifier, on utilise la notation du spectre discret de $I(t)$. Il est facile de voir que la fonction propre de $I(t)$ est de la forme [46]

$$|\phi_{\lambda,k}(x, y, t)\rangle \propto |\lambda, k\rangle \exp [i (\xi_1(t)x + \xi_2(t)y + \xi_3(t)x^2 + \xi_4(t)y^2)], \quad (3.3. 106)$$

où $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, $\xi_4(t)$ sont des fonctions arbitraires dépendantes du temps.

La substitution d'Eq.(3.3. 106) dans Eq.(3.3. 102) donne

$$\alpha(t) = \vartheta - \int_0^t E^{nc} dt', \quad (3.3. 107)$$

avec

$$\vartheta(x, y, t) = (\xi_1(0) - \xi_1(t))x + (\xi_2(0) - \xi_2(t))y + (\xi_3(0) - \xi_3(t))x^2 + (\xi_4(0) - \xi_4(t))y^2, \quad (3.3. 108)$$

E^{nc} est la valeur propre de l'Hamiltonien (3.3. 51).

Enfin, la solution de l'équation de Dirac non-commutative dépendante du temps est [46]

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = \sum_{\lambda, k} C_{\lambda, k} \exp[i(\vartheta - \int_0^t E^{nc} dt')] |\phi(\lambda, k, t)\rangle. \quad (3.3. 109)$$

— La forme exacte des solutions du problème

Comme convenu [46], la fonction d'onde de l'équation de Dirac non-commutative est donnée par la fonction d'essai suivante

$$|\bar{\psi}(x, y, t)\rangle = \mathcal{F}(t) |\phi(x, y, t)\rangle, \quad (3.3. 110)$$

où \mathcal{F} un vecteur dépendant du temps de 2 composantes (2×1)

$$\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(t) \\ \mathcal{F}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.3. 111)$$

tant que $I(t)$ est indépendant dans le temps, Eq.(3.3. 55) va à Eq.(3.3. 53). Puis la substitution d'Eq.(3.3. 110) dans Eq.(3.3. 53), et en utilisant Eqs.(3.3. 106, 3.3. 52) donne

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} x - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} y - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} x^2 - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_4}{\partial t} y^2 \\ i \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} x - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} y - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} x^2 - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_4}{\partial t} y^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m \\ \alpha_1 f_{\ominus} p_x - \alpha_2 f_{\eta} x + \alpha_2 f_{\ominus} p_y + \alpha_1 f_{\eta} y \\ -m \end{array} \right\} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3. 112)$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} x - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} y - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} x^2 - \mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_4}{\partial t} y^2 &= f_{\ominus} \mathcal{F}_2 p_x + i f_{\eta} \mathcal{F}_2 x - i f_{\ominus} \mathcal{F}_2 p_y + f_{\eta} \mathcal{F}_2 y + m \mathcal{F}_1 \\ i \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} x - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} y - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} x^2 - \mathcal{F}_2 \frac{\partial \xi_4}{\partial t} y^2 &= f_{\ominus} \mathcal{F}_1 p_x - i f_{\eta} \mathcal{F}_1 x + i f_{\ominus} \mathcal{F}_1 p_y + f_{\eta} \mathcal{F}_1 y - m \mathcal{F}_2 \end{aligned} \quad (3.3. 113)$$

en résolvant le système d'équations ci-dessus, nous trouvons

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = -im \mathcal{F}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = im \mathcal{F}_2, \quad (3.3. 114)$$

$$\mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = -i \left\{ \frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma t} \right\} \mathcal{F}_2, \quad (3.3. 115)$$

$$\mathcal{F}_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = - \left\{ \frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma t} \right\} \mathcal{F}_2, \quad (3.3. 116)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial t} = \frac{\partial \xi_4}{\partial t} = 0, \quad (3.3. 117)$$

qui conduisent à l'obtention de

$$\mathcal{F}_1 = e^{-imt+q_1}, \quad \mathcal{F}_2 = e^{imt+q_2}, \quad (3.3. 118)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = i \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -i \left\{ \frac{eB}{2} + \frac{\eta}{2} e^{-\gamma t} \right\} e^{i2mt+q_2-q_1}, \quad (3.3. 119)$$

$$\xi_1 = i\xi_2 = -i \left\{ \frac{\mathcal{K}}{4l_B^2 im} e^{i2mt} + \frac{\eta \mathcal{K}}{4im - 2\gamma} e^{(-\gamma+i2m)t} \right\}, \quad (3.3. 120)$$

avec q_1, q_2 et $\mathcal{K} = e^{q_2-q_1}$ sont des constantes réelles, $l_B^{-1} = \sqrt{eB}$ est la longueur magnétique.

En cas de commutation ($\Theta = \eta = \gamma = 0$), alors les relations ci-dessus (3.3. 118, 3.3. 120) reviennent à celles de la mécanique quantique générale

$$\xi_1(t) = i\xi_2(t) = -\frac{\mathcal{K}}{4l_B^2 m} e^{i2mt}, \quad |\phi(x, y, t)|_{\eta=\gamma=0} \sim \exp \left[-\frac{i\mathcal{K}}{4l_B^2 m} e^{i2mt} (x + iy) + o_1 i x^2 + o_2 i y^2 \right], \quad (3.3. 121)$$

avec o_1, o_2 sont aussi des constantes réelles, et dans $t = 0$

$$\xi_1(t=0) = i\xi_2(t=0) = -\frac{\mathcal{K}}{4l_B^2 m}, \quad \text{et } \mathcal{F}_1 = \kappa \mathcal{F}_2 = e^{q_1}. \quad (3.3. 122)$$

Nous avons bénéficié de l'invariant dynamique suivant la procédure standard permettant de construire et d'obtenir une solution analytique du système.

3.4 L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) (s'appelle aussi l'équation de Kemmer)¹⁰ est une équation d'onde relativiste de premier ordre qui fournit une description relativiste aux particules de spin-0 et de spin-1 dans une seule équation relativiste [47]. En ce qui concerne ce qui peut être fait avec cette équation est de déduire l'oscillateur DKP et également étudier

¹⁰. L'équation de DKP a été découverte après l'équation de Dirac, et a été introduite en 1930 par R. J. Duffin, N. Kemmer et G. Petiau.

les valeurs propres de son énergie totale (spectre), les fonctions propres, et aussi l'influence du défaut topologique sur l'équation du mouvement correspondante, etc.

L'équation de DKP pour un spin-0 est étroitement liée à l'équation de Klein-Gordon [48] et l'équation d'un spin-1 aux équations de Proca [49].

3.4.1 Equation de DKP dans une phase non-commutative

L'équation de DKP est une équation d'onde relativiste décrit un boson libre de masse m donné par

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.4.123)$$

où m est la masse, ψ est la fonction d'onde du boson, et $\beta^\mu = (\beta^0, \vec{\beta})$ sont les matrices carrées de DKP qui satisfont la relation algébrique

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \quad (3.4.124)$$

qui définit l'algèbre de DKP (il est également appelée l'algèbre de méson). Où les relations suivantes peuvent être impliquées

$$\begin{aligned} \beta_0 \beta_k \beta_0 &= 0, \quad k = 1, 2, 3 \\ \beta_0^3 &= \beta_0 \\ \partial_\mu a^\mu \beta_\nu \partial_\mu a^\mu &= \partial_\mu a^\mu a_\nu, \\ (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \beta_0 (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.125)$$

l'algèbre de DKP a trois représentations irréductibles : une représentation de 10-dimensions décrivant les bosons à spin-1, une représentation de 5-dimensions décrivant les bosons à spin-0 (particules sans spin) et une représentation de 1-dimension qu'est une représentation triviale. Pour ce travail, nous allons utiliser la représentation d'ordre 5 qui représente les particules à spin 0. Donc, β^μ sont des matrices 5×5 définies comme suit

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4.126)$$

où l'état ψ dans la représentation de spin-0 est une fonction d'onde à 5-composantes de l'équation de DKP, qui peut être donnée par

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (3.4. 127)$$

Pour des bosons de spin-1, β^μ sont des matrices 10×10 , et l'état stationnaire ψ est un vecteur avec une fonction d'onde à 10-composantes, qui est donné par

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T. \quad (3.4. 128)$$

Nous pouvons obtenir

$$\partial_\mu \psi = \beta_\mu \partial^\mu \beta_\mu \psi, \quad (3.4. 129)$$

en multipliant Eq.(3.4. 123) par β_0 , et obtenir la composante zéro d'Eq.(3.4. 129), on peut noter ¹¹

$$H_{k0}(\vec{p}, \vec{x}) = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta_0 m, \quad (3.4. 130)$$

avec

$$\alpha_k = \beta_0 \beta_k - \beta_k \beta_0. \quad (3.4. 131)$$

L'Eq.(3.4. 123) peut simplement prendre la forme suivante aussi

$$\left(\vec{\beta} \vec{p} + m \right) = i\beta_0 \frac{\partial}{\partial t} \psi. \quad (3.4. 132)$$

En remplaçant Eq.(1.6. 53) dans Eq.(3.4. 130), l'Hamiltonien de DKP en phase non-commutative devient

$$H_{k0}^{nc}(\vec{p}, \vec{x}) = \alpha^i (p^i + \frac{1}{2} \eta^{ij} x^j) + \beta_0 m, \quad (3.4. 133)$$

avec $\eta^{ij} = 2\eta^k \epsilon^{kij}$, et selon la définition du produit vectoriel $(A \times B)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu B_\lambda$, on notera notre Hamiltonien de DKP en phase non-commutative par

$$H_{k0}^{nc}(\vec{p}, \vec{x}) = \vec{\alpha} \vec{p} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m, \quad (3.4. 134)$$

le paramètre de la non-commutativité en phase $\vec{\eta}$ forme un tétraèdre avec la position \vec{x} et le vecteur de DKP $\vec{\beta}$.

11. En notant H_k comme Hamiltonien de DKP (Kemmer), et H comme Hamiltonien de Dirac

3.4.2 Equation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique dans un espace de phase non-commutatif

Définir d'abord le champ électromagnétique par $A_\mu = (A_0, \vec{A})$. En insérant la dérivée covariante suivante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (3.4.135)$$

qui satisfait la relation de commutation

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.4.136)$$

dans l'équation de DKP, cela conduit à trouver l'équation de DKP suivante (en présence d'une interaction électromagnétique)

$$(i\mathcal{D} - m)\psi = 0, \quad (3.4.137)$$

avec $\mathcal{D} = \beta_\mu D^\mu$, puis la forme physique correcte pour ψ quand nous avons une interaction électromagnétique est donnée par

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{m}} D_\mu \varphi \\ \sqrt{m} \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.4.138)$$

Nous allons maintenant interpréter la présence d'un terme apparemment anormal dépourvu d'interprétation physique dans la théorie d'Hamiltonien de DKP. Ces formes sont obtenues à partir de l'équation de DKP à couplage minimal (3.4.135), et contracter de gauche avec $D_\mu \beta^\mu \beta^\nu$ qui se traduit par

$$i\beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu D_\rho D_\mu \psi = m D_\rho \beta^\rho \beta^\nu \psi. \quad (3.4.139)$$

Après quelques calculs algébriques et simplifications, l'expression ci-dessus se réduit à

$$D^\mu \psi = \beta^\mu \beta^\nu D_\mu \psi + \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\mu g^{\nu\rho}) \psi. \quad (3.4.140)$$

Ensuite multiplier Eq.(3.4.137) de gauche par $(-i\beta^\rho)$ et faire $\nu = 0$ dans Eq.(3.4.140), nous obtenons la forme Hamiltonienne de l'équation de DKP

$$i\partial_0 \psi = H_k \psi, \quad (3.4.141)$$

où

$$H_k = i [\beta^i, \beta^0] D_i + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) - eA_0 + m\beta_0, \quad (3.4. 142)$$

après une simplification mineure, l'équation ci-dessus devient

$$H_k = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) - eA_0 + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}), \quad (3.4. 143)$$

terme proportionnel à $\frac{e}{2m}$ dans Eqs(3.4. 140, 3.4. 143) était auparavant considéré par Kemmer lui-même dans ses propres recherches originales [47]. Ce terme n'a pas d'interprétation physique claire contrairement aux autres termes de ces équations qui ont des interprétations physiques similaires aux termes similaires obtenus dans l'équation de Dirac en interaction avec le champ électromagnétique.

En utilisant le produit- \star et la transformation du décalage de Bopp, nous obtenons l'équation de DKP pour la mécanique quantique non-commutative

$$H(\vec{p}^{nc}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi, \quad (3.4. 144)$$

alors, à partir d'Eq.(1.4. 14), en appliquant la non-commutativité dans l'espace dans Eq.(3.4. 143)

$$H_k(\vec{p}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \{ \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + \frac{ie}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \} \star \psi(\vec{x}), \quad (3.4. 145)$$

considérant $\vec{A}(\vec{x}) \propto k \vec{x}$, avec k étant une constante réelle, de sorte que la dérivation dans Eq.(3.4. 145) s'éteigne avec le premier ordre $0(\Theta^2)$, alors Eq.(3.4. 145) devient

$$H(\vec{p}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = H(\vec{p}, \vec{x}) \psi(\vec{x}) - \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left\{ e \vec{\alpha}(\vec{A}(\vec{x})) + eA_0(\vec{x}) - \frac{ie}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right\} \partial_b \psi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\Theta^2) \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}) \quad (3.4. 146)$$

avec $\partial_a(m\beta_0) = \partial_a(\vec{\alpha} \vec{p}) = 0$, on obtient

$$H(\vec{p}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) - \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left\{ e \vec{\alpha} \vec{A}(\vec{x}) + eA_0(\vec{x}) - i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right\} \partial_b \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}) \quad (3.4. 147)$$

Ensuite par le raccordement entre l'impulsion non commutative p_i^{nc} et l'impulsion commutative p_i utilisant Eq.(1.6. 53), en réalisant la non-commutativité dans la phase dans Eq.(3.4. 147) pour obtenir l'équation de DKP dans l'espace de phase non-commutatif suivante

$$\alpha_i(p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j - eA_i(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) - \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left\{ e \alpha_i A_i(\vec{x}) + eA_0(\vec{x}) - i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right\} \partial_b \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}) \quad (3.4. 148)$$

avec $\eta^{ij} = 2\eta^k \epsilon^{kij}$, et selon la définition du produit vectoriel $(A \times B)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu B_\lambda$, et après une simplification mineure (voir l'**annexe A**), on trouve

$$H(\vec{p}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{\alpha}\vec{A}) + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i\frac{e}{2m}F_{\rho\mu}(\beta^\mu\beta^0\beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e\left\{ \vec{\nabla} \left(\vec{\alpha}\vec{A} + A_0 - \frac{i}{2m}F_{\rho\mu}(\beta^\mu\beta^0\beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right\} \vec{\Theta}\psi(\vec{x}) = i\beta^0\partial_0\psi(\vec{x}) \quad (3.4. 149)$$

3.5 L'équation de Fisk-Tait décrivant le mouvement des fermions de spin-3/2

Dans cette sous-section, nous nous intéressons aux équations relativistes décrivant le mouvement des particules de spin-3/2 telle que l'équation relativiste de Rarita-Schwinger (1940) [50], l'équation de Fisk-Tait (1973) [51], l'équation de champ de Hurley [52], l'équation de Bhabha-Gupta (Bhabha, Gupta 1952, 1954, 1974) [53], les équations du mouvement de Heisenberg pour le champ de spin-3/2 (1977) [54]...etc. Tenir en compte l'équation d'une particule de spin-3/2 a été donnée à l'origine par Fierz et Pauli (1939) sous une forme de spineur [55].

L'équation de Rarita-Schwinger a été formulée par W. Rarita et J. Schwinger, c'est l'équation la plus célèbre qui décrit le mouvement des fermions à spin-3/2. Mais dans notre travail, nous nous intéressons à l'équation de Fisk-Tait, car l'équation de Rarita-Schwinger et certaines des équations mentionnées en haut de cette partie contiennent de nombreux problèmes, tels que le problème de causalité, dont la propagation du front d'onde décrite par l'équation correspondante est plus grande et plus rapide que celle de la lumière [56], et le problème de l'énergie imaginaire. Contrairement et parmi ces équations mentionnées, on s'intéressé à l'équation de Fisk-Tait tous, dont ces problèmes ont presque été résolus. Pour être clair dès le début, toutes ces équations décrivant le mouvement des fermions à spin-3/2 posent le problème de l'indétermination de la charge totale [57,58], mais avec quelques exceptions, comme dans le cas de l'équation de Gupta [59], la densité de charge est positive pour certaines propriétés. Ainsi que dans la théorie des particules de spin-3/2 en cas d'interaction par T. Fukuyama et K. Yamamoto [60], ils ont supprimés les particules redondantes en rendant leurs masses infinies, mais ces choix rendent la charge totale dans la théorie libre encore indéterminée.

L'objectif de cette section est de nous concentrer sur l'équation de Fisk-Tait dans un espace

non-commutatif, ensuite extraire les équations de continuité dans les espaces commutatif et non-commutatif à travers la méthode classique qui consistant à ne pas utiliser le Lagrangien pour extraire la densité de courant, ensuite en examinant des contributions supplémentaires de la densité de courant du spin, et à la fin, faire relier les fermions aux bosons dans l'espace de Fock à l'aide de la représentation de Holstein-Primakoff.

Parmi les particules qui ont un spin-3/2 nous mentionnons : les particules de quasi-spin-3/2 des paires de Cooper ¹², le gravitino ¹³, et le baryon ¹⁴, ce dernier peut avoir un spin plus élevé de 3/2 ¹⁵ ...

3.5.1 L'équation de Fisk-Tait dans un espace commutatif

Récemment, en 1973, Fisk et Tait ont proposé une équation pour les particules de spin-3/2 [63], dont ils ont montré que leur équation reste causale même avec un couplage électromagnétique minimal, et ils l'ont libérée d'autres types de difficultés par lesquelles le formalisme de Rarita-Schwinger est en proie.

La fonction d'onde utilisée est un tenseur-spineur antisymétrique à 24-composants, $\Psi_{\lambda}^{\mu\nu} = -\Psi_{\lambda}^{\nu\mu}$, et se transforme selon la représentation du groupe de Lorentz suivante

$$D(0, \frac{3}{2}) \oplus D(\frac{3}{2}, 0) \oplus D(\frac{1}{2}, 1) \oplus D(1, \frac{1}{2}) \oplus D(0, \frac{1}{2}) \oplus D(\frac{1}{2}, 0), \quad (3.5. 150)$$

lorsque $\mu = \nu$ alors $\Psi^{\mu\mu} = 0$, pour cela la fonction d'onde utilisée est la suivante

$$\Psi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Psi^{01} & \Psi^{02} & \Psi^{03} \\ -\Psi^{01} & 0 & \Psi^{12} & \Psi^{13} \\ -\Psi^{02} & -\Psi^{12} & 0 & \Psi^{23} \\ -\Psi^{03} & -\Psi^{13} & -\Psi^{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5. 151)$$

en présence d'un champ électromagnétique externe $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, où $F_{\mu\nu}$ et $A_{\mu} = (A_0, \vec{A})$ sont le tenseur du champs électromagnétique, et le quadri-vecteur du champ électromagnétique respectivement. Dans l'espace commutatif, la fonction d'onde obéit à l'équation covariante [64]

$$(\Gamma\pi + mB)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi^{\rho\sigma} = 0, \quad (3.5. 152)$$

12. C'est un alliage d'Yttrium, de Platine et de Bismuth [61], où la charge est portée de type spin-3/2.

13. C'est le super partenaire du graviton, prédit par la théorie de la supersymétrie, son existence n'est qu'une hypothèse.

14. C'est une combinaison d'au moins 3 quarks comme u , d et s formant un décuplet de baryon avec spin-3/2, comme le Ω^- hyperons, constitué de trois quarks étranges.

15. Récemment, en 2017, LHCb a annoncé l'observation de 5 nouveaux états Ω_c^0 étroits en décomposition à $\Xi_c^+ K^-$ (un groupe grand de baryons) [62].

avec $\pi_\mu = p_\mu + eA_\mu$, $p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et les matrices $(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}$ et $B_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$ sont données par

$$B_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = g_\rho^\mu g_\sigma^\nu, \quad (3.5. 153)$$

$$(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu} = -\frac{4}{3}\gamma^\lambda g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - \frac{1}{3}\gamma^\lambda (\gamma^\mu \gamma_\sigma g_\rho^\nu - \gamma^\nu \gamma_\sigma g_\rho^\mu) + \frac{1}{3} (\gamma^\mu g_\rho^\lambda g_\sigma^\nu - \gamma^\nu g_\rho^\lambda g_\sigma^\mu - g^{\lambda\mu} \gamma_\rho g_\sigma^\nu + g^{\lambda\nu} \gamma_\rho g_\sigma^\mu), \quad (3.5. 154)$$

Les matrices gamma obéissent à l'algèbre covariante de Clifford suivante

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (3.5. 155)$$

avec $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, et en prenant en compte que γ^0 est Hermitien et γ^λ est anti-Hermitian (skew-Hermitian).

En utilisant Eqs.(3.5. 153, 3.5. 154), l'équation de Fisk-Tait sous une forme plus détaillée est

$$m\Psi^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\gamma^\lambda \pi_\lambda \Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\gamma^\lambda \pi_\lambda (\gamma^\nu \gamma_\sigma \Psi^{\mu\sigma} - \gamma^\mu \gamma_\sigma \Psi^{\nu\sigma}) + \frac{1}{3} (\gamma^\mu \pi_\rho \Psi^{\rho\nu} - \gamma^\nu \pi_\rho \Psi^{\rho\mu} - \gamma_\rho \pi^\mu \Psi^{\rho\nu} + \gamma_\rho \pi^\nu \Psi^{\rho\mu}) = 0. \quad (3.5. 156)$$

Le tenseur-spineur de fonction d'onde utilisé est décomposé en deux composantes de vecteurs d'onde comme suivant

$$\Psi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\chi} \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{\psi} = (\Psi^{01}, \Psi^{02}, \Psi^{03}), \quad \vec{\chi} = (\Psi^{23}, \Psi^{31}, \Psi^{12}), \quad (3.5. 157)$$

sachant que les parties de spin-3/2 de la fonction d'onde sont

$$\vec{\psi}_{3/2} = \vec{\psi} + \frac{1}{3}\vec{\gamma}(\vec{\gamma}\vec{\psi}), \quad \vec{\chi}_{3/2} = \vec{\chi} + \frac{1}{3}\vec{\gamma}(\vec{\gamma}\vec{\chi}), \quad (3.5. 158)$$

où $\vec{\gamma}\vec{\psi}_{3/2} = \vec{\gamma}\vec{\chi}_{3/2} = 0$ sont les conditions subsidiaires.

► En cas de champ magnétique réel et constant, on a l'expression suivante

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H} & 0 \\ 0 & -\mathcal{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5. 159)$$

où \mathcal{H} est un champ magnétique réel et constant orienté selon l'axe (Oz). Ce système physique actuel est souvent appelé système de Landau. Pour ce problème, le choix approprié du vecteur de champ électromagnétique est la jauge symétrique suivante

$$\vec{A} = \frac{\mathcal{H}}{2}(-y, x, 0), \text{ avec } A_0 = 0. \quad (3.5. 160)$$

Pour la simplicité, nous pouvons choisir la jauge de Landau pour réduire \vec{A} en une seule composante, de sorte que

$$\vec{A} = \mathcal{H}(0, x, 0), \text{ ou } \vec{A} = \mathcal{H}(-y, 0, 0). \quad (3.5. 161)$$

Il convient de souligner que l'expression de \vec{A} dans les jauges symétriques et de Landau est obtenue en utilisant Eq.(3.5. 159). Donc, l'équation de Fisk–Tait (3.5. 152) va à

$$\left(\Gamma^\lambda\right)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} p_\lambda \Psi^{\rho\sigma} - eA_k \left(\Gamma^k\right)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi^{\rho\sigma} + mB_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi^{\rho\sigma} = 0, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.5. 162)$$

avec

$$\left(\Gamma^k\right)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{4}{3}\gamma^k g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - \frac{1}{3}\gamma^k (\gamma^\mu \gamma_\sigma g_\rho^\nu - \gamma^\nu \gamma_\sigma g_\rho^\mu) + \frac{1}{3} (\gamma^\mu g_\rho^k g_\sigma^\nu - \gamma^\nu g_\rho^k g_\sigma^\mu - g^{k\mu} \gamma_\rho g_\sigma^\nu + g^{k\nu} \gamma_\rho g_\sigma^\mu). \quad (3.5. 163)$$

► Dans le cas général d'un champ magnétique non constant :

Nous introduisons une fonction dépendant de x dans la jauge de Landau sous la forme $A_2 = x\mathcal{H}f(x)$ qui nous donne un champ magnétique non constant. Le champ magnétique peut être calculé facilement en utilisant $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ qui donne¹⁶

$$\vec{\mathcal{H}}(x) = \left(x\mathcal{H}\frac{d}{dx}f(x) + \mathcal{H}f(x)\right) \vec{e}_3. \quad (3.5. 164)$$

L'équation ci-dessus représente un type spécial de champ magnétique non constant. Si nous spécifions $f(x)$, nous obtenons différentes classes de champ magnétique non constant. Si $f(x) = 1$ dans ce cas, nous obtenons un champ magnétique constant. Considérons $f(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$, pour obtenir un champ magnétique exponentiel. Bien sûr, une multitude d'autres possibilités existent, donc Eq.(3.5. 164) va à

$$\vec{\mathcal{H}}(x) = (\mathcal{H}e^{-x}) \vec{e}_3. \quad (3.5. 165)$$

3.5.2 L'équation de Fisk-Tait dans un espace non-commutatif

Nous considérons les opérateurs de coordonnées dans un espace non-commutatif à 4 dimensions x_{nc}^μ , qui satisfont aux relations de commutation suivantes

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}. \quad (3.5. 166)$$

Pour nos besoins, il est plus pratique d'introduire l'échelle non-commutative Λ_{nc} donnée par

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{c^{\mu\nu}}{\Lambda_{nc}}, \quad (3.5. 167)$$

^{16.} utilisée par Ranveer K Singh dans son article : Singh, R.K. Indian J Phys (2019) 93 : 503. <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1316-z>

avec $c^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique sans dimension, où les composants sont $\mathcal{O}(1)$. A_{nc} représente pour la théorie non-commutative une échelle d'énergie caractéristique nécessairement assez grande.

Nous voudrions noter que ce serait très bien d'approcher le problème via les cartes de Seiberg-Witten si nous avons une interaction de champ électromagnétique. Mais, bien que nous avons une interaction de champ magnétique, nous suivons une approche assez standard qui a été largement utilisée dans la littérature sur la mécanique quantique non-commutative ; qui dépend de l'obtention d'une version non-commutative d'une théorie de champ donnée, et basée sur le remplacement du produit des champs par le produit Moyal-Weyl. Alors d'après le produit star, l'équation de Fisk-Tait dans l'espace non-commutatif est

$$e(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} A_\lambda(x) \star \Psi^{\rho\sigma}(x) = - \left\{ (\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} p_\lambda + m B_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \right\} \Psi^{\rho\sigma}, \quad (3.5. 168)$$

ensuite à travers Eq.(1.4. 14), on peut écrire la partie non-commutative comme

$$e(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} A_\lambda(x) \star \Psi^{\rho\sigma}(x) = e(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} A_\lambda \Psi^{\rho\sigma} + \frac{i\epsilon}{2} \Theta^{\alpha\beta} (\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \partial_\alpha \{A_\lambda\} \partial_\beta \Psi^{\rho\sigma} - \frac{\epsilon}{8} (\Theta^{ab})^2 (\partial_\alpha)^2 \{(\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} A_\lambda(x)\} (\partial_\beta)^2 \phi(x) \dots + \sum_{n=3} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_k} H_{ft}(x, \hat{p}) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_k} \phi(x) . \quad (3.5. 169)$$

En cas d'un champ magnétique constant : En tenant compte du cas de potentiel $A_2 = \mathcal{H}x$, les dérivations en algèbre (3.5. 169) s'arrêtent grossièrement en premier ordre de Θ , alors l'approximation donne

$$\left\{ (\Gamma^\lambda)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} p_\lambda + m B_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \right\} \Psi^{\rho\sigma} - e \mathcal{H}x (\Gamma^2)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \Psi^{\rho\sigma} - \frac{i\epsilon}{2} \mathcal{H} \Theta^{\alpha\beta} (\Gamma^2)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \partial_\alpha \{x\} \partial_\beta \Psi^{\rho\sigma} + 0(\Theta^2) = 0. \quad (3.5. 170)$$

Nous pouvons voir à cet ordre, notre équation de Fisk-Tait non-commutative suggère la quantité suivante en tant que correction non-commutative

$$\frac{i\epsilon}{2} \mathcal{H} \Theta^{\alpha\beta} (\Gamma^2)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \partial_\alpha \{x\} \partial_\beta \Psi^{\rho\sigma} = \frac{i\epsilon}{2} \mathcal{H} \Theta^{1\beta} (\Gamma^2)^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \partial_\beta \Psi^{\rho\sigma}. \quad (3.5. 171)$$

La caractéristique la plus importante de cette approximation est son caractère simple, qui permet de tester simplement l'effet de non-comutativité sur la charge totale via l'équation de continuité plus tard, sans avoir à s'inquiéter des problèmes découlant de la série naissante du produit \star .

En cas d'un champ magnétique non constant : L'utilisation des Eqs.(3.5. 161, 3.5. 165) conduirait à un champ magnétique non constant $A_2 = \mathcal{H}xe^{-x}$, qui fournit une équation de Fisk-Tait non-commutative pour tous les ordres de Θ , comme suit

$$\left\{ (\Gamma^\lambda)^{\mu\nu} \pi_\lambda + mB_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \right\} \Psi^{\rho\sigma} - e(\Gamma^2)^{\mu\nu} \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{i}{2} \right)^n \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} \{ \mathcal{H}xe^{-x} \} \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} \Psi^{\rho\sigma} = 0. \quad (3.5. 172)$$

Il est largement évident que le produit Moyal provoque des corrections non-commutatives sur l'équation de Fisk-Tait en raison de la présence du champ magnétique. Ces corrections sont contrôlées par la forme et le type du champ magnétique. On peut montrer que, dans l'espace non-commutatif, si on prend un champ magnétique constant, l'ordre de la non-commutativité ne peut pas être supérieur au premier ordre. D'autre part, quand nous prenons un champ magnétique non constant (au moins sous la forme du champ magnétique non constant que nous avons considéré), il provoque des ordres élevés en non-commutativité, ce qui produit des séries infinies de Θ .

Alors l'apparition du terme proportionnel au paramètre non-commutatif est en raison d'effet de la non-commutativité sur l'équation du mouvement de particule de spin 3/2, nous considérons ce terme comme une sorte de potentiel. Dans ce qui vient, nous verrons si ce terme fait la charge totale obtenue à partir de la densité de probabilité définie ou non.

3.5.3 L'équation de continuité dans les deux types d'espace

3.5.3.1 Cas d'espace commutatif

L'équation de Fisk-Tait dans l'espace commutatif est donnée par Eq.(3.5. 156), où les conditions subsidiaires qui suivent Eq.(3.5. 156) sont

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \Psi^{\mu\nu} = 0, \quad \pi_\mu \gamma_\nu \Psi^{\mu\nu} = 0, \quad (3.5. 173)$$

le conjugué complexe d'Eq.(3.5. 156) est

$$m\Psi^{\dagger\mu\nu} - \frac{4}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu} \pi_\lambda^* \gamma^{\lambda\dagger} + \frac{1}{3} \left(-\Psi^{\dagger\nu\sigma} \gamma_\sigma^\dagger \gamma^{\dagger\mu} \gamma^{\dagger\lambda} + \Psi^{\dagger\mu\sigma} \gamma_\sigma^\dagger \gamma^{\dagger\nu} \gamma^{\dagger\lambda} \right) \pi_\lambda^* + \frac{1}{3} \left(\Psi^{\dagger\rho\nu} \pi_\rho^* \gamma^{\dagger\mu} - \Psi^{\dagger\rho\mu} \pi_\rho^* \gamma^{\dagger\nu} - \Psi^{\dagger\rho\nu} \pi_\rho^* \gamma_\rho^\dagger + \Psi^{\dagger\rho\mu} \pi_\rho^* \gamma_\rho^\dagger \right) = 0, \quad (3.5. 174)$$

en multipliant Eq.(3.5. 156) de la gauche par $\Psi_{\mu\nu}^\dagger$

$$m\Psi_{\mu\nu}^\dagger \Psi^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma^\lambda \pi_\lambda \Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma^\lambda \pi_\lambda \left(-\gamma^\mu \gamma_\sigma \Psi^{\nu\sigma} + \gamma^\nu \gamma_\sigma \Psi^{\mu\sigma} \right) + \frac{1}{3} \left(\Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma^\mu \pi_\rho \Psi^{\rho\nu} - \Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma^\nu \pi_\rho \Psi^{\rho\mu} - \Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma_\rho \pi^\mu \Psi^{\rho\nu} + \Psi_{\mu\nu}^\dagger \gamma_\rho \pi^\nu \Psi^{\rho\mu} \right) = 0, \quad (3.5. 175)$$

en multipliant à nouveau Eq.(3.5. 174) de la droite par $\Psi_{\mu\nu}$

$$m\Psi^{\dagger\mu\nu}\Psi_{\mu\nu} - \frac{4}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu}\pi_{\lambda}^*\gamma^{\lambda\dagger}\Psi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(-\Psi^{\dagger\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\dagger}\gamma^{\dagger\mu}\gamma^{\dagger\lambda} + \Psi^{\dagger\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\dagger}\gamma^{\dagger\nu}\gamma^{\dagger\lambda}\right)\pi_{\lambda}^*\Psi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(\Psi^{\dagger\rho\nu}\pi_{\rho}^*\gamma^{\dagger\mu}\Psi_{\mu\nu} - \Psi^{\dagger\rho\mu}\pi_{\rho}^*\gamma^{\dagger\nu}\Psi_{\mu\nu} - \Psi^{\dagger\rho\nu}\pi^{*\mu}\gamma_{\rho}^{\dagger}\Psi_{\mu\nu} + \Psi^{\dagger\rho\mu}\pi^{*\nu}\gamma_{\rho}^{\dagger}\Psi_{\mu\nu}\right) = 0 \quad (3.5. 176)$$

sachant que, γ^{λ} est anti-Hermitian et $\gamma^{\mu} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0$, selon la soustraction d'Eq.(3.5. 175) de l'Eq.(3.5. 176), on trouve

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3}\pi_{\lambda}\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\Psi^{\mu\nu} + \frac{4}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\dagger\lambda}\pi_{\lambda}\Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left(-\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\pi_{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\Psi^{\nu\sigma} + \Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\pi_{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma_{\sigma}\Psi^{\mu\sigma} \right. \\ & \left. + \pi_{\lambda}\Psi^{\dagger\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\dagger}\gamma^{\dagger\mu}\gamma^{\dagger\lambda}\Psi^{\mu\nu} - \pi_{\lambda}\Psi^{\dagger\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\dagger}\gamma^{\dagger\nu}\gamma^{\dagger\lambda}\Psi^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{3}\left(\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\mu}\pi_{\rho}\Psi^{\rho\nu} - \Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\nu}\pi_{\rho}\Psi^{\rho\mu} \right. \\ & \left. - \Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma_{\rho}\pi^{\mu}\Psi^{\rho\nu} + \Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma_{\rho}\pi^{\nu}\Psi^{\rho\mu} - \Psi^{\dagger\rho\nu}\gamma^{\dagger\mu}\pi_{\rho}\Psi^{\mu\nu} + \Psi^{\dagger\rho\mu}\gamma^{\dagger\nu}\pi_{\rho}\Psi^{\mu\nu} + \Psi^{\dagger\rho\nu}\gamma_{\rho}^{\dagger}\pi^{\mu}\Psi^{\mu\nu} - \Psi^{\dagger\rho\mu}\gamma_{\rho}^{\dagger}\pi^{\nu}\Psi^{\mu\nu}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.5. 177)$$

dans le cas simple nous prenons $\pi_{\lambda} = i\partial_{\lambda}$, ce qui signifie considérer l'équation Fisk-Tait sans interaction électromagnétique, et après quelques simplifications mineures nous trouvons

$$\partial_{\lambda}\mathcal{J}^{\lambda} = \partial_{\lambda}\left(-\frac{4}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\Psi^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\Psi^{\nu\sigma} + \frac{2}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\mu}\Psi^{\lambda\nu} - \frac{2}{3}\Psi^{\dagger\lambda\nu}\gamma_{\rho}\Psi^{\rho\nu}\right) = 0, \quad (3.5. 178)$$

l'équation ci-dessus est l'équation de continuité, où le quadri-vecteur de la densité de courant $\mathcal{J}^{\lambda} = (\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^i)$, $i = 1, 2, 3$, est

$$\mathcal{J}^{\lambda} = -\frac{1}{3}\left(4\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\Psi^{\mu\nu} + 2\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\Psi^{\nu\sigma} - 2\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\mu}\Psi^{\lambda\nu} + 2\Psi^{\dagger\lambda\nu}\gamma_{\rho}\Psi^{\rho\nu}\right), \quad (3.5. 179)$$

la quantité conservée correspondante est la probabilité totale

$$\mathcal{J}^0 = -\frac{1}{3}\left(4\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^0\Psi^{\mu\nu} + 2\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\Psi^{\nu\sigma} - 2\Psi^{\dagger\mu\nu}\gamma^{\mu}\Psi^{0\nu} + 2\Psi^{\dagger0\nu}\gamma_{\rho}\Psi^{\rho\nu}\right), \quad (3.5. 180)$$

où \mathcal{J}^0 est la densité de probabilité pour trouver une particule dans une position particulière et \mathcal{J}^i est la densité de courant de la particule de spin-3/2. Il est clair que la charge totale \mathcal{Q} obtenue à partir de la densité de probabilité lorsque la période de repos considérée est indéterminée, dont

$$\mathcal{Q} = \int \mathcal{J}^0 d^3x = \int d^3x \left(-\frac{4}{3}\Psi^{\dagger ij}\Psi^{ij} + 2\Psi^{\dagger 0i}\Psi^{0i} - \frac{2}{3}\Psi^{\dagger ij}\gamma_i\gamma^k\Psi_{jk} + \frac{2}{3}\Psi^{\dagger 0i}\gamma_i\gamma^j\Psi_{ki}\right), \quad (3.5. 181)$$

en utilisant Eqs.(3.5. 157, 3.5. 158), nous obtenons

$$\mathcal{Q} = 2 \int d^3x \left(\vec{\psi}_{3/2}^{\dagger}\vec{\psi}_{3/2} - \vec{\chi}_{3/2}^{\dagger}\vec{\chi}_{3/2}\right). \quad (3.5. 182)$$

Pour toutes les équations de mouvement de spin-3/2, le problème de la charge totale indéterminée reste encore [57], sachant que dans le cas de l'équation de Gupta [59] pour certaines conditions, la densité de charge devient positive-définie. Mais en général, la charge totale dans la théorie libre est indéfinie, ce qui signifie que la condition de positivité de la charge est d'abord

notée et qu'il est ensuite montré que cette condition doit être violée si l'on veut assurer la causalité de la propagation. Comme la densité de probabilité est indéfinie et n'est pas positive, cela suggère qu'un bon nombre des problèmes rencontrés par les tentatives de quantification des champs de spin-3/2 se retrouvent également dans les équations de champ classiques.

Il convient de noter, une fois on considère l'équation de Fisk-Tait en interaction électromagnétique, dans les calculs de l'équation de continuité, cela, à son tour, conduit à obtenir un terme de correction (de type densité de probabilité) dans les expressions de l'équation de continuité et la charge totale. Nous allons le montrer dans ce qui suit.

3.5.3.2 Cas d'espace non-commutatif

L'équation de Fisk-Tait dans l'espace non-commutatif est donnée par Eq.(3.5. 171), et son conjugué complexe est donné par

$$m\Psi^{\dagger\mu\nu} - \frac{4}{3}\Psi^{\dagger\mu\nu} p_{\lambda}^* \gamma^{\lambda\dagger} + \frac{1}{3} (-\Psi^{\dagger\nu\sigma} \gamma_{\sigma}^{\dagger} \gamma^{\dagger\mu} \gamma^{\dagger\lambda} + \Psi^{\dagger\mu\sigma} \gamma_{\sigma}^{\dagger} \gamma^{\dagger\nu} \gamma^{\dagger\lambda}) p_{\lambda}^* + \frac{1}{3} (\Psi^{\dagger\rho\nu} p_{\rho}^* \gamma^{\dagger\mu} - \Psi^{\dagger\rho\mu} p_{\rho}^* \gamma^{\dagger\nu} - \Psi^{\dagger\rho\nu} p^{*\mu} \gamma_{\rho}^{\dagger} + \Psi^{\dagger\rho\mu} p^{*\nu} \gamma_{\rho}^{\dagger}) - e\mathcal{H}x\Psi^{\dagger\rho\sigma} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} + \frac{ie}{2} \mathcal{H}\Theta^{1\beta} (\partial_{\beta} \Psi^{\rho\sigma})^{\dagger} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.5. 183)$$

En notant qu'il suffit de considérer le cas le plus simple concernant le champ magnétique $A_2 = \mathcal{H}x$, pour étudier la charge totale au sein de la non-commutativité à un modèle explicitement résoluble. Avec $p_{\lambda} = i\partial_{\lambda}$, et en faisant $\Psi_{\mu\nu}^{\dagger}$ Eq.(3.5. 171) et Eq.(3.5. 183) $\Psi_{\mu\nu}$; et en soustrayant entre eux, on obtient

$$i\partial_{\lambda} (-\frac{4}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \Psi_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \Psi_{\nu\sigma} + \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma_{\mu} \Psi_{\nu}^{\lambda} - \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\lambda\nu} \gamma^{\rho} \Psi_{\rho\nu}) + e\mathcal{H}x(\Psi^{\dagger\rho\sigma} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu} - \Psi_{\mu\nu}^{\dagger} (\Gamma^2)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi^{\rho\sigma}) - \frac{ie}{2} \mathcal{H}\Theta^{1\beta} (\Psi_{\mu\nu}^{\dagger} (\Gamma^2)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \partial_{\beta} \Psi^{\rho\sigma} + \Psi^{\dagger\rho\sigma} \partial_{\beta} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}) = 0 \quad (3.5. 184)$$

en contractant l'équation ci-dessus comme suit

$$\partial_{\lambda} \mathcal{J}^{\lambda} + \zeta^2 + \zeta_{nc}^2 = 0, \quad (3.5. 185)$$

en dénotant les termes séparés comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\lambda} &= -\frac{4}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \Psi_{\mu\nu} - \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \Psi_{\nu\sigma} + \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\mu\nu} \gamma_{\mu} \Psi_{\nu}^{\lambda} - \frac{2}{3}\overline{\Psi}^{\lambda\nu} \gamma^{\rho} \Psi_{\rho\nu} \\ \zeta^2 &= e\mathcal{H}x(\Psi^{\dagger\rho\sigma} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu} - \Psi_{\mu\nu}^{\dagger} (\Gamma^2)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi^{\rho\sigma}) \\ \mathcal{J}_{nc}^2 &= \frac{-e}{2} \mathcal{H}\Theta^{1\beta} (\Psi_{\mu\nu}^{\dagger} (\Gamma^2)_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \partial_{\beta} \Psi^{\rho\sigma} + \Psi^{\dagger\rho\sigma} \partial_{\beta} (\Gamma^{\dagger 2})_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.5. 186)$$

où \mathcal{J}^{λ} est le quadri-vecteur de densité de courant de la particule de spin-3/2. La quantité ζ^2 est un terme de type densité de probabilité; cette quantité est liée à l'effet de l'interaction du

champ électromagnétique sur l'équation de Fisk-Tait. On voit que la charge totale Q obtenue à partir de la densité de probabilité \mathcal{J}^0 reste indéfini même lorsque l'espace ne commute pas. \mathcal{J}_{nc}^2 est la nouvelle quantité non-commutative de type densité de courant. L'existence de cette quantité dans l'équation de continuité obtenue est relative à l'influence de la non-commutativité sur l'équation du mouvement des particules de spin-3/2. Exactement cette quantité est apparue comme un terme proportionnel au paramètre de la non-commutativité Θ , et après obtenir l'équation de continuité non-commutative, ce terme étant responsable à la génération du nouveau terme de quantité de type densité de courant. Une fois le champ magnétique est nul, les quantités ζ^2 et ζ_{nc}^2 disparaîtront.

On voit que la charge totale Q obtenue à partir de la densité de probabilité \mathcal{J}^0 reste indéfinie même lorsque l'espace ne commute pas. Pour démontrer ça, il suffit de considérer le cadre de repos dans lequel $p = 0$. Puis Eq. (3.5. 173) se réduit à

$$\gamma_i \gamma_j \Psi^{ij} = 0, \quad \gamma_i \Psi^{0i} = 0, \quad (3.5. 187)$$

alors que

$$Q^{nc} = Q + \zeta^2 + \zeta_{nc}^2 = \int \mathcal{J}^0 d^3x + \zeta^2 + \zeta_{nc}^2.$$

On voit facilement que les relations (3.5. 187) n'éliminent pas l'indéfinité de Q^{nc} .

3.5.4 Une contribution additionnelle

Plusieurs idées issues de l'électricité, du magnétisme et de la physique nucléaire suggèrent la contribution du spin et de la densité de courant. Dans cette sous-section, nous essayons de mettre en évidence certaines de ces idées.

Tandis que $S = 3/2$ et selon notre représentation (2.2. 3), nous nous donc limitons aux vecteurs propres suivants (voir l'**annexe B**)

$$\left|0, \frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, 0\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, 1\right\rangle, \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, \frac{1}{2}\right\rangle. \quad (3.5. 188)$$

3.5.4.1 La densité de courant de spin

Nous sommes intéressés à la valeur propre du spin $m_S = \frac{3}{2}$, alors d'après Eq.(3.5. 157) notre fonction d'onde avec spin est

$$\Psi^{\mu\nu}(x, t) = \begin{pmatrix} \psi(x, +\frac{3}{2}, t) \\ \chi(x, -\frac{3}{2}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \chi_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{\dagger\mu\nu} = (\psi^*(x, +\frac{3}{2}, t) \quad \chi^*(x, -\frac{3}{2}, t)) = (\psi_{\uparrow}^* \quad \chi_{\downarrow}^*), \quad (3.5. 189)$$

cela suggère que, la fonction de densité de probabilité est utilisée pour trouver la particule de spin-3/2 au point x à l'instant t et pour trouver la densité de courant, dans laquelle elle est composée des parties des deux directions de spin différentes.

La densité de courant est causée par le mouvement orbital de la particule de spin-3/2, sachant que le spin d'une particule de spin-3/2 provoque un moment magnétique, dans lequel il peut être exprimé par son courant correspondant, et nous notons que cette partie de la densité de courant \mathcal{J}_S (densité de courant de spin), celle-ci ne peut pas apparaître dans l'équation de continuité en raison de l'indétermination de la charge totale.

Nous calculons la densité de courant de spin en utilisant l'équation de Maxwell, avec

$$r\vec{o}t\vec{B} = 4\pi(\vec{J} + r\vec{o}t \times \langle \vec{M} \rangle), \quad (3.5. 190)$$

nous devons remplacer la magnétisation $\langle \vec{M} \rangle$ par la densité moyenne du moment magnétique, la partie de direction en haut du dipôle magnétique est donnée par

$$\langle \vec{M}_{\uparrow} \rangle = -\mu\psi_{\uparrow}^* \vec{S} \psi_{\uparrow}, \quad (3.5. 191)$$

avec

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1,2,3} c_{\alpha}^{\dagger} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{\beta}, \quad (3.5. 192)$$

$\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ sont les matrices habituelles de Pauli, c^{\dagger} et c sont des opérateurs de création et d'annihilation, $\hat{n}_i = c_i^{\dagger} c_i$ est l'opérateur de nombre de particules de spin-3/2 sur le site i . Le moment magnétique intrinsèque est $\vec{\mu} = \frac{q}{3m} \vec{S}$ [65] qui relie le moment magnétique au moment angulaire de rotation, qui correspond au rapport gyromagnétique $\frac{q}{3m}$; la plus grande valeur propre d'opérateur μ est donnée par

$$\mu_{max} = \frac{|q|}{2m}, \quad (3.5. 193)$$

par les propriétés ci-dessus, l'Eq.(3.5. 190) devient

$$r\vec{o}t\vec{B}_{\uparrow} = 4\pi(\vec{J}_{\uparrow} - \mu r\vec{o}t \times (\psi_{\uparrow}^* \vec{S} \psi_{\uparrow})), \quad (3.5. 194)$$

avec

$$\vec{J}_{\uparrow_S} = -\mu r \vec{\partial} t \times (\psi_{\uparrow}^* \vec{S} \psi_{\uparrow}), \quad (3.5.195)$$

sachant que la densité de courant de spin est composée des parties des deux directions de spin différentes, en notant que pour l'autre direction différente la densité de courant de spin est

$$\vec{J}_{\downarrow_S} = -\mu r \vec{\partial} t \times (\chi_{\downarrow}^* \vec{S} \chi_{\downarrow}), \quad (3.5.196)$$

en notant que pour les composants de la fonction d'onde de direction en haut nous avons seulement $\{\Psi^{01}, \Psi^{02}, \Psi^{03}\}$, mais pour la direction en bas des composants de la fonction d'onde nous avons $\{\Psi^{23}, \Psi^{31}, \Psi^{12}\}$.

Sachant que la densité de courant de spin obtenue ne peut pas être affectée par la non-commutativité dans l'espace, contrairement à l'équation de Maxwell considérée, qui serait influencée par la non-commutativité dans l'espace

$$r \vec{\partial} t \vec{B}_{\uparrow\downarrow} = 4\pi(\vec{J}_{\uparrow\downarrow} + \mathcal{J}_{nc\uparrow\downarrow}^2 + r \vec{\partial} t \times \langle \vec{M}_{\uparrow\downarrow} \rangle). \quad (3.5.197)$$

3.5.4.2 La transformation de Holstein-Primakoff

Comme il est mentionné dans l'introduction de cette section, le graviton avec spin-2 dans SUSY¹⁷ aurait un super partenaire appelé le gravitino à spin-3/2. Nous voulons montrer comment lier les opérateurs de spin des bosons aux opérateurs de spin des fermions dans l'espace de Fock en utilisant la transformation de Holstein-Primakoff (\mathcal{HP}) [66], l'idée ici est de connecter un système de $2N + 1$ fermions à un système de N bosons. Cette transformation a été notée à l'origine par C. E. Alonso et ses collègues en 1992 [67]. Les fonctions propres du spin et du moment angulaire sont étiquetées avec les nombres quantiques n, m, l, j, \dots

L'espace du fermion est défini en termes d'opérateurs de création (annihilation) de fermion $c_{ij}^{\pm}(c_{ij})$. L'espace du boson-fermion est défini en termes d'opérateur de création de boson (annihilation) $B_{ij}^{\pm}(B_{ij})$, avec de nouveaux opérateurs de création (annihilation) de fermion $a_{ij}^{\pm}(a_{ij})$, sachant que les opérateurs de boson et de fermion commutent les uns avec les autres. Avec

¹⁷ La supersymétrie (SUSY) est une symétrie supposée qui postule une relation profonde entre les fermions qui constituent la matière et les bosons véhiculant les interactions. Chaque fermion est associé à un superpartenaire de spin entier, alors que chaque boson est associé à un superpartenaire de spin demi-entier.

$[B_{ij}, B_{\alpha\beta}^+] = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}$ et $[B_{ij}, B_{\alpha\beta}] = 0$, l'image Holstein-Primakoff d'opérateur de création mono-fermion $c_{s_1 m_1}^+$ est donnée par [68]

$$(c_{s_1 m_1}^+)_{\mathcal{HP}} = \sum_{s_2 m_2} \{ \mathcal{T}_{s_1 m_1 s_2 m_2} a_{s_2 m_2}^+ + B_{s_1 m_1 s_2 m_2}^+ a_{s_2 m_2} \}, \quad (3.5. 198)$$

avec l'opérateur $\mathcal{T} = \sqrt{I - B^+ B}$ qui caractérise le développement \mathcal{HP} du boson, il doit être interprété par son développement de série de Taylor. $(c_{ij}^+)_{\mathcal{HP}}$ dénote l'image Holstein-Primakoff de c_{ij}^+ .

Sachant que le développement de premier ordre du \mathcal{T} (fonction racine carrée) est obtenu

$$\mathcal{T}_{s_1 m_1 s_2 m_2} = \delta_{s_1 s_2} \delta_{m_1 m_2} - \frac{1}{2} (B^+ B)_{s_1 m_1 s_2 m_2}, \quad (3.5. 199)$$

en effet, le développement de \mathcal{T} (avec $B^+ B \ll 1$) nous donne $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (B^+ B)^i$, il est prévu que la série de Taylor pour l'opérateur \mathcal{T} converger très lentement de sorte que son développement nécessitera probablement de nombreux termes, puisque les termes d'ordre élevé dans la série se traduisent par de nombreux opérateurs de boson, physiquement l'utilité d'une telle approche est suspecte, de sorte que J. Dukelsky et S. Pittel [69] ont proposé d'accélérer la convergence des séries en choisissant une meilleure valeur initiale pour $(B^+ B)_0$. Cela a conduit à l'Eq.(3.5. 199), où

$$(B^+ B)_{s_1 m_1 s_2 m_2} = \sum_{s_3 l_1 l_2 \alpha \beta} l_1 l_2 \alpha (-1)^{s_3 + m_1 + l_2 + \alpha + \beta} X_{j_2 j_3}^{L_1} X_{j_1 j_3}^{L_2} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \alpha \\ m_1 & -m_2 & \beta \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \alpha \\ s_1 & s_2 & \beta \end{pmatrix} (\gamma_{L_1}^+ \times \tilde{\gamma}_{L_2})_{\beta}^{\alpha}, \quad (3.5. 200)$$

nous pouvons déterminer l'expression des composantes de spin du boson dans l'espace Fock

$$\begin{aligned} S_3 &= S - n_b \\ S^+ &= \sqrt{2s - n_b} b \\ S^- &= b^+ \sqrt{2s - n_b} \end{aligned}, \quad (3.5. 201)$$

avec $n_b = b^+ b = 1, 2, 3, \dots$. Sachant que $J = \sqrt{2j + 1}$ qui décrit l'interaction entre les spins, b est un opérateur de boson dit Holstein-Primakoff. L'opérateur γ_b^+ crée le boson collectif de la multipolarité b , qui est donné par

$$\gamma_{\alpha\beta}^+ = \frac{1}{2} \sum_{j_1 j_2} X_{s_1 s_2}^{\alpha} B_{s_1 s_2 \alpha \beta}, \quad (3.5. 202)$$

et $X_{s_1 s_2}^a$ sont les coefficients de structure de γ_a^+ , $B_{s_1 s_2 \alpha \beta}$ sont les opérateurs de création de bosons couplés à un moment angulaire.

Pour lier l'opérateur quadripolaire à l'aide du développement \mathcal{HP} , généralement il est possible d'utiliser directement l'image d'opérateur fermion particules-trous donnée par

$$(c_i^+ c_j)_{HP} = \sum_k B_{ik}^+ B_{jk} + a_i^+ a_j. \quad (3.5. 203)$$

Des états non physiques apparaissent pour $n_b \geq 2S$, tant que dans ces conditions, la projection de spin sur la direction $\mathbf{3}$ est supérieure à S , de sorte que l'utilisation de cette représentation de spin ait une signification forte pour la température basse et pour les valeurs de spin larges (n_b est très faible).

3.6 Conclusion

En conclusion, la non-commutativité en espace de phase a été introduite dans les équations relativistes considérées, qui sont l'équation de Klein-Gordon, équation de Dirac, équation de Kemmer et l'équation de Fisk-Tait. En rappelant également que la dynamique du système d'équation de Dirac avec un espace de phase non-commutatif dépendant du temps a été analysée et formulée et résolue à l'aide de la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld. Où nous avons introduit la non-commutativité dépendante du temps à travers une transformation de décalage de Bopp dépendante du temps. Sachant que les constantes de structure non-commutatives postulaient en expansion exponentielle avec l'évolution du temps, et les dépendances en temps offrent une multitude d'autres possibilités. L'obtention des solutions explicites pourrait également aider à examiner et à reformuler la version modifiée des relations d'incertitude de Heisenberg résultant de relations de commutation non-disparaisantes (1.2. 7). Où l'incertitude pour les observables A et B doit obéir à l'inégalité $\Delta A \Delta B |_{\psi} \geq \frac{1}{2} | \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle |$ et $\Delta A |_{\psi}^2 = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2$, la même chose pour B pour n'importe quel état.

Pour l'équation de Fisk-Tait avec une interaction électromagnétique, l'équation de continuité a été obtenue dans les deux types d'espaces (commutatif et non-commutatif), trouvant que la non-commutativité ne fait pas la charge totale obtenue à partir de la densité de probabilité définie. Sous la condition $\Theta = \eta = 0$, les équations relativistes et les équations de continuité

correspondantes dans l'espace de phase non-commutatif reviennent à celles de la mécanique quantique commutative habituelle. En outre, la correspondance entre les fermions et les bosons dans l'espace de Fock a été montrée utilisant la représentation de Holstein Primakoff, sans oublier que nous avons également trouvé la densité de courant de spin dans les deux directions de spin différentes pour les particules à spin-3/2.

Chapitre 4

La limite non relativiste des équations relativistes

4.1 Introduction

Pour passer de la mécanique quantique relativiste à la mécanique quantique non relativiste, il est très nécessaire de passer par la limite non relativiste, qui consiste à transformer l'information physique sous la condition $v \ll c$, on parle de la limite non relativiste pour des basses vitesses devant la vitesse de la lumière ou pour de régime d'énergie faible devant l'énergie de masse $\frac{v}{c} \approx \frac{pc}{mc^2} \ll 1$ [1]. La limite non relativiste peut être réalisée à l'aide de nombreuses méthodes, parmi lesquelles la transformation de Foldy-Wouthuysen (FW) (applicable de préférence aux champs faibles) [70] et la méthode d'Eriksen [71] proposée en 1958, basée sur la dérivation systématique de la transformation unitaire qui rend l'Hamiltonien un opérateur paire (even), elle peut également être utilisée lorsqu'un champ électromagnétique est présent. Il y a aussi la transformation de Cayley et la transformation de Cini-Touschek, ainsi que la méthode de développement en puissance de \hbar [72], et l'approche de Douglas-Kroll-Hess (DKH) [73, 74], qui a principalement été utilisée dans le cadre de la chimie quantique relativiste, et cela dépend de la séparation (diagonaliser par blocs¹) d'Hamiltonien relativiste en deux parties, une partie décrit les électrons dans le cas d'Hamiltonien de Dirac par exemple, tandis que l'autre donne lieu à des états d'énergie négatifs. La limite non relativiste des équations relativistes

1. Une matrice diagonale par blocs : est une matrice carrée qui possède des blocs matrices carrées sur la diagonale principale, tels que les blocs non-diagonaux soient des matrices nulles

a été essentiellement étudiée en transformant l'Hamiltonien d'une forme impaire (odd) à une forme paire. Aussi l'approche classique qui est l'approche des composantes grandes-petites de la fonction d'onde [75, 76].

Une grande partie de ce chapitre concerne la transformation de Foldy-Wouthuysen, alors cette transformation est utilisée pour étudier la limite de basse énergie des équations relativistes en raison d'une série de transformations unitaires séquentielles [1]. Nous étudions la limite non relativiste des équations relativistes selon cette transformation puisqu'elle occupe une position extraordinaire dans la théorie quantique en raison de ses propriétés uniques qui nous poussent à obtenir un Hamiltonien et des opérateurs totalement diagonaux (diagonaux dans deux spineurs), et à garder les propriétés des opérateurs dans la représentation FW similaires à celles de la représentation classique. Sachant que la transformation FW amène l'Hamiltonien initial à une forme diagonale par bloc en cas de présence ou d'absence du champ électromagnétique. L'avantage formidable de la représentation FW réside dans la forme simple des opérateurs et des quantités. Grâce à ces propriétés la représentation FW offre les meilleures chances d'obtenir une limite non relativiste significative de la mécanique quantique relativiste. Le passage à la limite non relativiste se réduit généralement à un remplacement des opérateurs d'Hamiltoniens quantiques et d'équations de mouvement par les quantités classiques correspondantes. La possibilité d'un tel remplacement explicitement ou implicitement utilisé dans tous les travaux consacrés à la transformation relativiste FW.

Notre but dans ce chapitre est d'examiner et étudier la limite non relativiste² des équations de Dirac et de Kemmer dans l'espace de phase non-commutatif, ensuite tester l'influence de la non-commutativité sur la limite non relativiste. Dans la section 2 : Nous étudions la limite non relativiste de l'équation de Dirac en présence d'une interaction électromagnétique dans l'espace de phase non-commutatif à travers deux méthodes : Selon l'approche des composantes grandes et petites de la fonction d'onde (la sous-section 2-1). Et via la méthode de la transformation de FW (la sous-section 2-2). Pour dériver directement l'équation de Schrödinger-Pauli [75, 77].

2. On doit différencier entre la limite non relativiste et la limite classique, elles semblent identiques mais dans une certaine mesure, elles ne sont pas. On peut dire que la limite non relativiste est une petite partie de la limite classique, la limite non relativiste concerne les faibles vitesses devant la vitesse de la lumière, c.-à-d. pour le régime d'énergie faible devant la énergie de masse, mais en général la limite classique concerne la négligence des phénomènes quantiques d'effets quantiques.

Dans la section 3 : On va étudier la limite non relativiste de l'équation de DKP pour deux cas : Premier cas autour de l'absence d'interaction avec un espace commutatif et une phase non-commutative, ce qui nous amène à une équation de Schrödinger. Deuxième cas autour de la présence d'interaction électromagnétique avec un espace de phase non-commutatif, ce qui nous conduit à une équation de Schrödinger-Pauli.

En outre, il faut garder en tête que si nous considérons l'interaction dans l'équation relativiste correspondante, l'équation non relativiste obtenue sera de Schrödinger-Pauli. Sinon, l'équation non relativiste obtenue sera celle de Schrödinger.

4.2 La limite non relativiste de l'équation de Dirac

Nous étudions la limite non relativiste de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif selon la méthode de Foldy-Wouthuysen et l'approche des composantes grandes et petites de la fonction d'onde pour extraire l'équation de Schrödinger-Pauli non-commutatif, en notant que l'équation de Schrödinger ne tient pas compte le spin des particules dans les études, dont le spin décrit correctement l'interaction d'une particule avec le champ électromagnétique externe. En revanche, le spin peut être introduit en supposant la présence d'un champ électromagnétique dans l'équation relativiste de Dirac avant l'extraction de l'équation non relativiste de Schrödinger-Pauli.

4.2.1 L'approche des composantes grandes-petites du spineur dans l'espace-phase non-commutatif

Il est possible de définir absolument la limite non relativiste de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif utilisant l'approche classique qui dépend des deux composantes supérieures de la fonction d'onde de Dirac ψ (dans la représentation standard) sont beaucoup plus grandes que les deux composantes inférieures, en utilisant cette propriété nous pouvons simplement déduire l'équation de Schrödinger-Pauli non-commutatif.

Pour définir la limite non relativiste de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif, nous devons d'abord étudier le cas d'un électron au repos, de sorte que sans

interaction électromagnétique ($\hat{\vec{p}}\psi = 0$, $A^\mu = 0$), Eq.(3.3. 46) devient

$$H_{nc}\bar{\psi} = \left\{ \hat{\beta}m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} \right\} \bar{\psi} = i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}, \quad (4.2. 1)$$

ce système d'équations est simplement résolu et conduit aux quatre solutions suivantes

$$\begin{aligned} \psi_{nc}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta})t}, & \psi_{nc}^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta})t} \\ \psi_{nc}^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}(m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta})t}, & \psi_{nc}^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\frac{i}{\hbar}(m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta})t} \end{aligned}, \quad (4.2. 2)$$

ψ_{nc}^1 et ψ_{nc}^2 correspondent à la valeur d'énergie positive et ψ_{nc}^3 , ψ_{nc}^4 à la valeur négative.

Alors, nous nous limitons à des solutions d'énergie positive. Pour montrer que l'équation de Dirac reproduit l'équation de Pauli à deux composantes dans la limite non relativiste.

La limite non relativiste d'Eq.(3.3. 46) peut être étudiée plus efficacement dans la représentation

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix}, \quad (4.2. 3)$$

où le spineur à quatre-composantes ψ_{nc} est décomposé en spineurs à deux-deux composantes $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\chi}$, avec $((\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}) \rightarrow \hat{\vec{\Pi}})$, l'équation de Dirac (3.3. 46) devient

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} &= c\vec{\alpha}\hat{\vec{\Pi}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} + \hat{\beta}m_0c^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} + \frac{e}{\hbar}(\vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A} - A_0) \times \vec{p})\vec{\Theta} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2. 4)$$

selon Eq.(3.3. 12) et mettre $\mathcal{T}_\eta = (\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta}$ et $\mathcal{T}_\Theta = (\vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A} - A_0) \times \vec{p})\vec{\Theta}$, on trouve

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c\vec{\sigma}\hat{\vec{\Pi}}\tilde{\chi}_{nc} \\ c\vec{\sigma}\hat{\vec{\Pi}}\tilde{\varphi}_{nc} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} + m_0c^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ -\tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{c}{\hbar}\mathcal{T}_\eta \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} + \frac{e}{\hbar}\mathcal{T}_\Theta \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2. 5)$$

tenir en compte que l'énergie de repos m_0c^2 en tant que l'énergie la plus grande. Et pour les spineurs correspondant à l'énergie positive, on a $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{nc} \\ \tilde{\chi}_{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{nc} \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}(m_0c^2 + \frac{c}{\hbar}\mathcal{T}_\eta)t}$, ensuite Eq.(4.2. 5) prend la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi_{nc} \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\vec{\sigma}\hat{\vec{\Pi}}\chi_{nc} \\ c\vec{\sigma}\hat{\vec{\Pi}}\varphi_{nc} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi_{nc} \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} - 2m_0c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} + \frac{e}{\hbar}\mathcal{T}_\Theta \begin{pmatrix} \varphi_{nc} \\ \chi_{nc} \end{pmatrix}. \quad (4.2. 6)$$

En considérant le plus bas de l'équation ci-dessus. À travers de la dépendance au temps lent $E_0 \gg i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, et du couplage faible de l'approche du potentiel électromagnétique $E_0 \gg eA_0$, c.-à-d. l'énergie cinétique ainsi que l'énergie potentielle sont faibles comparées à l'énergie de repos. Par un autre terme le passage à la limite non relativiste est réalisé en supposant que l'impulsion est faible par rapport à la quantité caractéristique mc et que l'énergie d'interaction de Coulomb est faible par rapport à l'énergie de masse, de sorte que Eq.(4.2. 6) devient

$$\begin{pmatrix} c \hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \chi_{nc} \\ c \hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi} \varphi_{nc} \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} + \frac{e}{\hbar} \mathcal{T}_\Theta \begin{pmatrix} \varphi_{nc} \\ \chi_{nc} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2. 7)$$

En utilisant la seconde équation du système ci-dessus (4.2. 7), on obtient alors

$$\chi_{nc} = \frac{c \hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi}}{2m_0 c^2 - \frac{e}{\hbar} \mathcal{T}_\Theta} \varphi_{nc} \quad (4.2. 8)$$

où χ_{nc} représente la petite composante de la fonction d'onde ψ_{nc} . L'insertion d'Eq.(4.2. 8) dans la première équation d'Eq.(4.2. 6) résulte en une fonction d'onde non relativiste pour φ_{nc}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{nc} = \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\Pi})}{2m_0 - \frac{e}{\hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta} \varphi_{nc} + eA_0 \varphi_{nc} + \frac{e}{\hbar} \mathcal{T}_\Theta \varphi_{nc}, \quad (4.2. 9)$$

à l'aide de

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{A})(\hat{\sigma} \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} + i \hat{\sigma} \cdot (\hat{A} \times \hat{B}), \quad (4.2. 10)$$

enfin, l'Eq.(4.2. 9) devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{nc} = \left[\frac{(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}{2m_0 - \frac{e}{\hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta} - \frac{e\hbar \hat{\sigma} \cdot \vec{B}}{c(2m_0 - \frac{e}{\hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta)} + eA_0 + \frac{e}{\hbar} \mathcal{T}_\Theta \right] \varphi_{nc}, \quad (4.2. 11)$$

c'est comme il se doit l'équation de Schrödinger-Pauli non-commutative. Lorsque $\Theta = 0$ donc $\mathcal{T}_\Theta = 0$, alors Eq.(4.2. 11) revient à l'équation de Schrödinger-Pauli habituelle.

4.2.1.1 Facteur gyromagnétique de l'électron ($g=2$)

Selon $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ et $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}$ on a

$$\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{2c} \vec{B} \times \vec{x} \right)^2 \approx \hat{\vec{p}}^2 - \frac{e}{c} \vec{B} \cdot \vec{L}, \quad (4.2. 12)$$

avec $\vec{L} = \vec{x} \times \hat{\vec{p}}$ et $\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}$ sont les opérateur du moment angulaire orbital et du spin respectivement. Alors Eq.(4.2. 11) prend enfin la forme suivante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{nc} = \left[\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0 - \frac{e}{\hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta} - \frac{e}{c(2m_0 - \frac{e}{\hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta)} (\vec{L} + 2\vec{S}) \vec{B} + eA_0 + \frac{e}{\hbar} \mathcal{T}_\Theta \right] \varphi_{nc}. \quad (4.2. 13)$$

Tant que nous sommes dans des très petites échelles d'espace, donc le terme $\mathcal{T}_\Theta \ll 1$, on met $\frac{e}{2m_0 \hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta = \Xi_\Theta$, cela permet d'utiliser la série Maclaurin

$$\frac{1}{1 - \frac{e}{2m_0 \hbar c^2} \mathcal{T}_\Theta} \approx \sum_{j=0}^n \Xi_\Theta^j, \quad (4.2. 14)$$

nous trouvons que Eq.(4.2. 13) devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{nc} = \left[\frac{1}{2m_0} \sum_{j=0}^n \left[\Xi_\Theta^j \hat{\vec{p}}^2 - \frac{e}{c} \Xi_\Theta^j (\vec{L} + 2\vec{S}) \vec{B} \right] + eA_0 + 2m_0 c^2 \Xi_\Theta \right] \varphi_{nc}. \quad (4.2. 15)$$

L'équation (4.2. 13) représente l'équation de Schrödinger-Pauli non-commutative qui contient un opérateur d'énergie cinétique non-commutatif et un terme de couplage de Zeeman non-commutatif³, et un terme non-commutatif associé au diamagnétisme. Ces termes sont similaires à ceux utilisés dans un cas commutatif, mais ils sont modifiés par l'effet de la non-commutativité. En absence du champ magnétique $\vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$, Eq.(4.2. 15) prend sa forme d'origine sans les informations à propos du spin, qui est l'équation de Schrödinger non-commutative suivante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{nc} = \left[\frac{1}{2m_0} \sum_{j=0}^n \Xi_\Theta^j \hat{\vec{p}}^2 + 2m_0 c^2 \Xi_\Theta \right] \varphi_{nc}. \quad (4.2. 16)$$

L'Eq.(4.2. 15) est une équation du premier ordre en $1/m$, le développement non relativiste de cette équation permet d'ajouter des potentiels tels que le potentiel électrique, mais aussi de trouver des termes correctifs si on réalise le développement du deuxième et troisième ordre en $1/m$, nous prédisons précisément que dans le deuxième ordre, on trouvera les termes non-commutatifs d'interaction et de couplage spin-orbite, sachant que le terme non-commutatif de Darwin est interprété comme une correction de l'énergie potentielle due au phénomène de Zitterbewegung (mouvement de tremblement)⁴ [78], dans le troisième ordre nous trouverons

3. Terme ajouté à la main par Pauli lui-même lorsque nous parlons de son version commutatif.

4. C'est un phénomène physique de micro-oscillations d'une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif (comme un signal lumineux dans une fibre), il donne naissance au paradoxe de Klein. Il est censé expliquer le spin et le moment magnétique d'électron.

des corrections de l'énergie cinétique et des termes non-commutatifs ont une dépendance du champ électrique.

À la fin de cette partie nous constatons que l'effet de la non-commutativité en phase sur la limite non relativiste a disparu, mais l'effet de la non-commutativité dans l'espace est apparu clairement et est réduit en \mathcal{T}_Θ (au moins à l'ordre d'approximation que nous avons considéré). Lorsque $\eta = \Theta = 0$, les résultats retournent à ceux de la mécanique quantique habituelle.

4.2.2 La transformation de Foldy-Wouthoyusen dans l'espace-phase non-commutatif

En dérivant l'équation de Schrödinger-Pauli dans un espace de phase non-commutatif à partir de la limite non relativiste de l'équation de Dirac simplement à l'aide de la transformation de Foldy-Wouthuysen, celle-ci est obtenue par une série de transformations unitaires successives effectuées sur l'Hamiltonien de Dirac dans un espace de phase non-commutatif d'Eq.(3.3. 46), sachant que cela ne s'applique qu'aux champs faibles. L'Hamiltonien de Dirac dans un espace de phase non-commutatif est donné par

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + eA_0 + \hat{\beta}mc^2 + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} + \frac{e}{\hbar} \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha}\vec{A} - A_0 \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}. \quad (4.2. 17)$$

Pour effectuer la transformation de FW, nous devons réécrire Eq.(4.2. 17) sous la forme

$$\hat{H} = \hat{\theta} + \hat{\varepsilon} + \beta mc^2, \quad (4.2. 18)$$

où l'Hamiltonien de Dirac est divisé en parties de bloc diagonale et non diagonale désignées respectivement par l'opérateur pair ε_{nc} et par l'opérateur impair θ_{nc} ⁵.

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= eA_0 - \frac{e}{\hbar} \left(\vec{\nabla} (A_0) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \\ \hat{\theta} &= c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}(\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} + \frac{e}{\hbar} \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha}\vec{A} \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}. \end{aligned} \quad (4.2. 19)$$

Ceux-ci sont définis pour satisfaire

$$\beta\hat{\theta} = -\hat{\theta}\beta \text{ et } \beta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}\beta. \quad (4.2. 20)$$

En raison de la présence des opérateurs impairs (de matrices $\vec{\alpha}$), l'Hamiltonien de Dirac n'est pas diagonalisé en bloc, de sorte que nous essayons d'éliminer les opérateurs impairs

⁵. Opérateurs impaire (non diagonales dans la base de Dirac) : $\alpha^i, \gamma^i, \dots$, les opérateurs paire (diagonales dans la base de Pauli-Dirac) : $\beta, \Sigma, 1, \dots$

d'Hamiltonien de Dirac, en appliquant la transformation de FW

$$\psi'_{(NC)} = e^{i\hat{S}} \psi_{(NC)} \text{ et } \hat{H}' = e^{i\hat{S}} \hat{H} e^{-i\hat{S}}, \quad (4.2. 21)$$

avec \hat{S} est Hermitien et a la forme suivante

$$\hat{S} = \frac{-i}{2mc^2} \beta \hat{\theta}. \quad (4.2. 22)$$

En utilisant le développement en série de Maclaurin du $e^{i\hat{S}}$ défini comme $e^{i\hat{S}} = 1 + \frac{i\hat{S}}{1!} + \frac{(i\hat{S})^2}{2!} + \dots$ dans Eq.(4.2. 21) donne un Hamiltonien transformé de Dirac (développement de Campbell-Baker-Hausdorff)

$$\hat{H}' = \hat{H} + i [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{i^2}{2!} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] + \frac{i^3}{3!} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \dots + \frac{i^n}{n!} [\hat{S}, [\hat{S}, \dots, [\hat{S}, \hat{H}] \dots]] + \dots \quad (4.2. 23)$$

En écrivant notre Hamiltonien, se limiter à des termes allant jusqu'au ordre de $1/(mc^2)^3$. Ainsi, nous sommes suffisants au 4ème ordre de \hat{S} ,

$$\hat{H}' = \hat{H} + i [\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] - \frac{1}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \beta mc^2]]]] + \dots \quad (4.2. 24)$$

En utilisant les propriétés mentionnées en Eq.(4.2. 20) avec Eqs.(4.2. 18, 4.2. 22), sachant que

$$\beta [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] = - [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] \beta, \quad (4.2. 25)$$

on calcule les différents commutateurs de \hat{S} et \hat{H} ,

$$i [\hat{S}, \hat{H}] = -\hat{\theta} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}], \quad (4.2. 26)$$

$$\frac{i^2}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] = -\frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{2m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{8m^2 c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]], \quad (4.2. 27)$$

$$-\frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] = \frac{1}{6m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{6m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{48m^3 c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]]], \quad (4.2. 28)$$

de la même manière, nous continuons en ne prenant en compte que les termes d'ordre

$1/(m_0 c^2)^3$, on a

$$-\frac{1}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\beta} mc^2]]]] \approx \frac{1}{24m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4, \quad (4.2. 29)$$

en collectant les termes de \hat{H}' , Eqs.(4.2. 26, 4.2. 29), on trouve

$$\hat{H}' = \hat{H} + -\hat{\theta} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] - \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{2m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{8m^2 c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]] + \frac{1}{6m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{6m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{48m^3 c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]]] + \frac{1}{24m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4, \quad (4.2. 30)$$

$$= \hat{\varepsilon} + \hat{\beta} \left\{ mc^2 + \frac{1}{2mc^2} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\theta}^4 \right\} + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] - \frac{1}{3m^2c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]] - \frac{1}{48m^3c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]]], \quad (4.2. 31)$$

comme indiqué dans Eq.(4.2. 31) le nouvel Hamiltonien n'est pas libéré d'opérateur impair, la partie impaire n'est pas omise, donc par une transformation FW supplémentaire, nous réduisons la partie impaire d'Hamiltonien transformé. Nous effectuons donc une seconde transformation en nous rappelant que le produit de deux opérateurs pairs ou impairs est un opérateur pair. Pour réduire la partie impaire de l'Hamiltonien transformé, nous avons donc choisi

$$\hat{S}' = \frac{-i}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}', \quad (4.2. 32)$$

où

$$\hat{H}' = \hat{\theta}' + \hat{\varepsilon}' + \hat{\beta} mc^2, \quad (4.2. 33)$$

avec

$$\hat{\theta}' = \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] - \frac{1}{3m^2c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{48m^3c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]]], \quad (4.2. 34)$$

$$\hat{\varepsilon}' = \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]], \quad (4.2. 35)$$

$$\hat{H}'' = e^{i\hat{S}'} \hat{H}' e^{-i\hat{S}'}, \quad (4.2. 36)$$

$$\hat{H}'' = \hat{H}' + i [\hat{S}', \hat{H}'] - \frac{1}{2} [\hat{S}', [\hat{S}', \hat{H}']] - \frac{i}{6} [\hat{S}', [\hat{S}', [\hat{S}', \hat{H}']]] - \frac{1}{24} [\hat{S}', [\hat{S}', [\hat{S}', [\hat{S}', \hat{H}']]]] + \dots \quad (4.2. 37)$$

Nous nous limitons aux termes jusqu'au ordre de $1/(mc^2)^3$ comme dans la première transformation FW (sachant que $\hat{\theta}' \sim \frac{1}{mc^2}$), de sorte que le nouvel Hamiltonien est

$$\hat{H}'' = \hat{\beta} mc^2 + \hat{\varepsilon}' + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}', \hat{\varepsilon}'] + \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}'^2 - \frac{1}{2m^2c^4} \hat{\theta}'^3 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}', [\hat{\theta}', \hat{\varepsilon}']]. \quad (4.2. 38)$$

Les termes proportionnels à $\hat{\theta}'^3$ et $\hat{\theta}'^2$ contiennent de grandes puissances de $1/mc^2$, donc ils peuvent être négligés, et donc Eq.(4.2. 38) est donné par

$$\hat{H}'' \approx \hat{\beta} mc^2 + \hat{\varepsilon}' + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}', \hat{\varepsilon}'] = \hat{\beta} mc^2 + \hat{\varepsilon}' + \hat{\theta}'', \quad (4.2. 39)$$

\hat{H}'' n'est pas encore libéré des opérateurs impairs, nous appliquons une troisième transformation FW pour éliminer $\hat{\theta}''$,

$$\hat{H}''' = e^{i\hat{S}''} \hat{H}'' e^{-i\hat{S}''} \text{ avec } \hat{S}'' = \frac{-i}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}'', \quad (4.2. 40)$$

donc

$$\hat{H}''' \approx \hat{\beta} mc^2 + \hat{\varepsilon}' = \hat{\beta} mc^2 + \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}]], \quad (4.2. 41)$$

Enfin, l'Hamiltonien transformé est complètement libre d'opérateurs impairs, ensuite nous calculons les différentes termes d'Eq.(4.2. 41), selon Eq.(4.2. 19), et à l'aide des relations du produit mixte, d'abord Eq.(4.2. 19) devient ⁶

$$\hat{\theta} = c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar}\vec{\alpha} \left\{ (\vec{x} \times \vec{\eta}) + \frac{e}{c}\vec{\nabla}\vec{A} (\vec{p} \times \vec{\Theta}) \right\} = c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega} \quad , \quad (4.2. 42)$$

avec

$$\vec{\Omega} = (\vec{x} \times \vec{\eta}) + \frac{e}{c}\vec{\nabla}\vec{A} (\vec{p} \times \vec{\Theta}) \quad , \quad (4.2. 43)$$

à travers Eq.(4.2. 42), il vient

$$\hat{\theta}^2 = c^2 \left(\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right)^2 + 2\frac{c^2}{\hbar}\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \vec{\alpha}\vec{\Omega} + \frac{c^2}{\hbar^2} \left(\vec{\alpha}\vec{\Omega} \right)^2 \quad , \quad (4.2. 44)$$

en utilisant la relation suivante ⁷

$$\left(\vec{\alpha}\vec{A} \right) \left(\vec{\alpha}\vec{B} \right) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\Sigma} \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \quad , \quad (4.2. 45)$$

simplement on obtient

$$\hat{\theta}^2 = c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + 2\frac{c^2}{\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \vec{\Omega} + \frac{c^2}{\hbar^2} \vec{\Omega}^2 + ic^2\vec{\Sigma} \left\{ \frac{i\hbar e}{c}\vec{B} + \frac{2}{\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \times \vec{\Omega} + \frac{1}{\hbar^2} \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \right\} \quad , \quad (4.2. 46)$$

ensuite, en calculant les commutateurs comme suivant

$$\frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, \hat{\varepsilon}] = -\frac{i\hbar}{8m^2c^4} c\vec{\alpha}\vec{\nabla}A_0 + \frac{1}{8m^2c^4} \left\{ \left[\frac{e}{\hbar} \left(\vec{\nabla}(A_0) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}, c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega} \right] + \left[\frac{c}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega}, eA_0 \right] \right\} \quad , \quad (4.2. 47)$$

pour $A_0 = V$, on a $g\vec{r}adV = -\vec{E}$ et en utilisant Eq.(4.2. 47), on trouve

$$\begin{aligned} \left[\hat{\theta}, \left[\hat{\theta}, \hat{\varepsilon} \right] \right] &= \frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\nabla}\vec{E} + \frac{ie\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\Sigma}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{e\hbar}{4m^2c^4} \vec{\Sigma}\vec{E} \times \vec{p} + \left[\frac{c}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega}, \frac{i\hbar}{8m^2c^4} c\vec{\alpha}\vec{E} \right] \\ &+ \left[\hat{\theta}, -\frac{1}{8m^2c^4} \left\{ \left[\left(c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega} \right), \frac{e}{\hbar} \left(\vec{\nabla}(A_0) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] + \left[\frac{c}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{\Omega}, eA_0 \right] \right\} \right] \quad , \quad (4.2. 48) \end{aligned}$$

en utilisant Eq.(4.2. 45) nous simplifions l'Eq.(4.2. 48) (voir l'**annexe A**), pour avoir

$$\begin{aligned} \left[\hat{\theta}, \left[\hat{\theta}, \hat{\varepsilon} \right] \right] &= \frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\nabla}\vec{E} + \frac{ie\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\Sigma}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{e\hbar}{4m^2c^4} \vec{\Sigma}\vec{E} \times \vec{p} + \frac{ic^2}{8m^2c^4} \left(\left[\vec{\Omega}, \vec{E} \right] + 2i\vec{\Sigma} \left(\vec{\Omega} \times \vec{E} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{8m^2c^4} \frac{e}{\hbar} \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right), \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right), \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] - c \left[\vec{\Omega}, V \right] \right] \\ &+ \frac{1}{8m^2c^4} \frac{e}{\hbar} i\vec{\Sigma} \left\{ -2 \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right) \right. \\ &\left. + 2c \left[\vec{\Omega}, V \right] \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right) + \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar}\vec{\Omega} \right), \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] \right\} \quad . \quad (4.2. 49) \end{aligned}$$

6. Pour trois vecteurs arbitraires \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} on a : $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$, $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}$.

7. $\alpha^i\alpha^j = \alpha^i\beta^2\alpha^j = -\beta\alpha^i\beta\alpha^j = -\gamma^i\gamma^j = -\frac{1}{2}(\{\gamma^i, \gamma^j\} + [\gamma^i, \gamma^j]) = -g^{ij} + i\epsilon^{ijk}\Sigma^k = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\Sigma^k$.

En collectant les différentes contributions (4.2. 46, 4.2. 49) dans Eq.(4.2. 41), et supposant que $\frac{1}{8m^3c^6}\hat{\theta}^4 \sim \frac{1}{8m^3c^6}\vec{p}^4$, et pour $\psi_{FW} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ l'équation de Schrödinger-Pauli est

$$\begin{aligned}
 ih \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \left\{ \hat{\beta} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \vec{p}^4 + \frac{1}{m\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \vec{\Omega} + \frac{1}{2m\hbar^2} \vec{\Omega}^2 + \frac{i}{2m} \vec{\Sigma} \left(\frac{2}{\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \vec{\Omega} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\hbar^2} \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \right) \right) + eV - \frac{\hbar e}{2mc} \hat{\beta} \vec{\Sigma} \vec{B} - \frac{ie\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{e\hbar}{4m^2c^4} \vec{\Sigma} \vec{E} \times \vec{p} + \frac{e}{\hbar} \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} - \frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\nabla} \vec{E} \\
 & - \frac{ic^2}{8m^2c^4} \left(\left[\vec{\Omega}, \vec{E} \right] + 2i \vec{\Sigma} \left(\vec{\Omega} \times \vec{E} \right) \right) - \frac{1}{8m^2c^4} \frac{e}{\hbar} \left\{ \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right), \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right), \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] - c \left[\vec{\Omega}, V \right] \right\} + i \vec{\Sigma} \left\{ \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right), \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] \right. \\
 & \left. \left. + 2c \left[\vec{\Omega}, V \right] \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right) - 2 \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{e}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \right\} \right\} \varphi.
 \end{aligned} \tag{4.2. 50}$$

Nous expliquons l'existence des termes non-commutatifs explicites enchevêtrés dans l'équation obtenue de Schrödinger-Pauli (4.2. 50), par l'effet de la non-commutativité en premier fois sur l'équation de Dirac, dont cet effet apparaît comme une sorte de potentiel proportionnels aux η , Θ , ensuite, après l'application de la limite non relativiste, cet pseudo potentiel étant responsable de la création des nouveaux termes et ainsi des termes connus mais modifié par la non-commutativité (l'effet non-commutatif réduit en Ω) dans Eq.(4.2. 50) Alors, les termes dans la première parenthèse décrivent l'énergie cinétique non relativiste non-commutative et sa première correction non relativiste non-commutative (au moins dans l'ordre d'approximation que nous avons considéré) se manifestent comme des termes contenant des paramètres non-commutatifs ajoutés aux termes connus, ensuite les deux termes successifs décrivent l'énergie électrostatique et l'énergie du dipôle magnétique. Aussi

$$\mathcal{E}_{Spin-Orbite} = -\frac{e\hbar}{8m^2c^4} \vec{\Sigma} \vec{E} \times \vec{p} + \frac{e}{\hbar} \left(\vec{E} \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}, \tag{4.2. 51}$$

représente le terme Θ -modifié de l'interaction spin-orbite. Pour un potentiel sphérique symétrique, et avec

$$r \vec{\partial}_t \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{E} = -\vec{grad}V(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{r}, \quad \text{et } \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}, \tag{4.2. 52}$$

simplement Eq.(4.2. 51) devient

$$\mathcal{E}_{Spin-Orbite} = \frac{e\hbar}{8m^2c^4} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\Sigma} \vec{L} - \frac{e}{\hbar} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L} \vec{\Theta}. \tag{4.2. 53}$$

Le terme suivant dans Eq.(4.2. 50) est $-\frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\nabla} \vec{E} - \frac{ic^2}{8m^2c^4} \left(\left[\vec{\Omega}, \vec{E} \right] + 2i \vec{\Sigma} \left(\vec{\Omega} \times \vec{E} \right) \right)$ qui représente le terme $\Theta\eta$ -modifié de Darwin (attribué au Zitterbewegung), avec $\vec{E} = -\vec{grad}V(r)$ et $\vec{A} = 0$, donc $\vec{\Omega} = (\vec{x} \times \vec{\eta})$, alors on trouve

$$\mathcal{E}_{Darwin} = -\frac{e\hbar^2 c^2}{8m^2 c^4} \vec{\Delta} V - \frac{ic^2}{8m^2 c^4} (\vec{x} \times \vec{\eta}, \vec{\nabla} V) + 2i\vec{\Sigma}((\vec{x} \times \vec{\eta}) \times \vec{\nabla} V). \quad (4.2. 54)$$

Les autres termes d'Eq.(4.2. 50) représentent les corrections non-commutatives de l'équation de Schrödinger-Pauli. Essentiellement, la partie intéressante de nos résultats est que les effets non-commutatifs accordent des termes $\Theta\eta$ -modifiés enchevêtrés dans l'équation obtenue de Schrödinger-Pauli non-commutative. Pour $\Theta = \eta = 0$, les résultats reviennent à ceux de la mécanique quantique habituelle.

À la fin de cette partie on peut dire que les transformations de FW sont bien exploitées pour réduire le système en présence de champ électromagnétique à un régime non relativiste, ce qui donne l'équation de Schrödinger-Pauli non-commutative.

4.3 La Limite non relativiste de l'équation de DKP

Dans cette section⁸, nous étudions la limite non relativiste de l'équation de DKP utilisant la transformation FW dans un espace de phase non-commutatif, ce qui nous conduit à l'équation de Schrödinger et à l'équation de Schrödinger-Pauli, sachant que la première équation est extraite dans le cas où la non-commutativité en phase seulement est considérée et en absence du champ électromagnétique, et la deuxième équation est extraite en présence d'un champ électromagnétique externe et de la non-commutativité en phase et espace.

4.3.1 La transformation de Foldy-Wouthuysen pour un boson libre en phase non-commutative

La transformation de FW élimine complètement la partie impaire d'Hamiltonien de l'équation d'onde, en le réduisant à la forme diagonale (partie paire), alors la transformation de FW est donnée par les transformations unitaires suivantes

$$\psi_{FW} = U_{FW}\psi = e^{iS}\psi, \quad S \text{ est Hermitien}, \quad (4.3. 55)$$

avec U_{FW} est un opérateur unitaire, S étant un opérateur indépendant du temps

$$S = -i \frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \mathcal{G}, \quad (4.3. 56)$$

⁸. Dans cette section pour des raisons de simplification, en adoptant les unités naturelles $\hbar = c = 1$.

où \mathcal{G} est une fonction prenant la forme

$$\tan(2|\vec{P}|\mathcal{G}) = \frac{|\vec{P}|}{m}. \quad (4.3. 57)$$

L'Hamiltonien transformé ne devrait pas contenir d'opérateurs impairs, alors

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = U_{FW} H_{k0}^{nc} U_{FW}^\dagger, \quad (4.3. 58)$$

laissez-nous faire une transformation de type d'Eq.(4.3. 58) sur Eq.(3.4. 134), sachant que S est un opérateur explicitement indépendant du temps

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = e^{\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|}\mathcal{G}} \left(\vec{\alpha}\vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m \right) e^{-\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|}\mathcal{G}}, \quad (4.3. 59)$$

comme $U_{FW}U_{FW}^\dagger = 1$, dans ce cas Eq. (4.3. 59) est écrit

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = e^{2\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|}\mathcal{G}} \left(\vec{\alpha}\vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m \right), \quad (4.3. 60)$$

sachant que d'Eq.(3.4. 124)

$$\left(\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = \sum_{i,j,k} P_i P_j P_k \frac{(\beta_i \beta_j \beta_k + \beta_k \beta_j \beta_i)}{2}, \quad (4.3. 61)$$

$$2 \left(\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = -\sum_{i,j,k} P_i P_j P_k (\beta_i \delta_{ij} + \beta_k \delta_{ji}), \quad (4.3. 62)$$

de sorte que

$$\left(\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = -|\vec{P}|^2 \left(\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \right), \quad (4.3. 63)$$

en notant que

$$\left(\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^2 = i^2, \quad (4.3. 64)$$

où l'opérateur unitaire est

$$e^{\frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|}\mathcal{G}} = \cos(|\vec{P}|\mathcal{G}) + \frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \sin(|\vec{P}|\mathcal{G}), \quad (4.3. 65)$$

l'Eq.(4.3. 60) devient

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = \left(\cos(2|\vec{P}|\mathcal{G}) + \frac{\vec{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \sin(2|\vec{P}|\mathcal{G}) \right) \left(\vec{\alpha}\vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m \right). \quad (4.3. 66)$$

On utilise les propriétés du produit mixte $(\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} = -(\vec{x} \times \vec{\alpha}) \vec{\eta} = (\vec{x} \times \vec{\eta}) \vec{\alpha}$, ensuite Eq.(4.3. 66) se change à

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = \vec{\alpha}(\vec{P} + \vec{x} \times \vec{\eta})(\cos(2|\vec{P}|\mathcal{G}) - \frac{m}{|\vec{P}|}\sin(2|\vec{P}|\mathcal{G})) + \beta_0(m \cos(2|\vec{P}|\mathcal{G}) + |\vec{P}|\sin(2|\vec{P}|\mathcal{G})), \quad (4.3. 67)$$

en raison d'éliminer la partie impaire, choisir

$$\sin(2|\vec{P}|\mathcal{G}) = \frac{|\vec{P}|}{E}, \quad \cos(2|\vec{P}|\mathcal{G}) = \frac{m}{E}, \quad (4.3. 68)$$

on arrive à

$$\tilde{H}_{k0}^{nc} = \frac{\beta_0}{E}(\vec{P}^2 + m^2), \quad (4.3. 69)$$

enfin, cela satisfait l'équation de Schrödinger qui est semblable au cas d'espace de phase commutative, de sorte que nous trouvons que l'effet de la non-commutativité en phase sur la limite non relativiste de l'équation de DKP a disparu, c'est du fait que le paramètre de non-commutativité a été explicitement associé à la partie non diagonale d'Hamiltonien, d'une autre manière la non-commutativité en phase affecte la partie impaire d'Hamiltonien de DKP, ceci est sans interaction avec des potentiels.

Pour la fonction d'onde transformée, nous prenons simplement le cas de la représentation spin-0, nous choisissons la fonction d'onde

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-iEt}, \quad (4.3. 70)$$

d'Eq.(3.4. 132), nous réécrivons l'équation DKP comme suit

$$(\beta^1 P_x^{nc} + \beta^2 P_y^{nc} + m) \psi = \beta_0 E \psi, \quad (4.3. 71)$$

en substituant ψ dans Eq.(4.3. 71) nous donne

$$-m\psi_1 + E\psi_2 + P_x^{nc}\psi_3 + P_y^{nc}\psi_4 = 0, \quad (4.3. 72)$$

$$E\psi_1 - m\psi_2 = 0, \quad P_y^{nc}\psi_1 + m\psi_4 = 0, \quad P_x^{nc}\psi_1 + m\psi_3 = 0, \quad m\psi_5 = 0. \quad (4.3. 73)$$

Il est clair que les cinq composants $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ ne sont pas indépendants les uns des autres. Avec $[\psi_2 = \frac{E}{m}\psi_1, \psi_3 = \frac{-P_x^{nc}}{m}\psi_1, \psi_4 = \frac{-P_y^{nc}}{m}\psi_1]$ en combinant les équations ci-dessus, et on obtient l'équation dynamique du composant ψ_1

$$\left\{-m^2 + E^2 - (P_x^{nc})^2 - (P_y^{nc})^2\right\} \psi_1 = 0, \quad (4.3. 74)$$

cela nous amène à

$$E = \pm \sqrt{m^2 + (\vec{P}^{nc})^2}, \quad (4.3. 75)$$

d'après Eq.(2.4. 36), et selon les unités naturelles

$$(\vec{P}^{nc})^2 = \vec{P}^2 - 2\vec{L}\vec{\eta}, \quad (4.3. 76)$$

alors, on trouve

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\vec{\eta}}, \quad (4.3. 77)$$

de sorte qu'en substituant Eq.(4.3. 77) dans Eq.(4.3. 70), on trouve

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-i\sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\vec{\eta}} t}, \quad (4.3. 78)$$

alors, notre fonction d'onde transformée (4.3. 55) devient

$$\psi_{FW} = \psi(\vec{x}) e^{\frac{\vec{p}\vec{p}}{|\vec{p}|} \theta - i\sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\vec{\eta}} t}. \quad (4.3. 79)$$

4.3.2 La transformation de FW dans un espace de phase non-commutatif

Nous déterminons l'équation de Schrödinger-Pauli dans un espace de phase non-commutatif, ce qui signifie obtenir la limite non relativiste à partir de l'équation de DKP en présence d'une interaction électromagnétique via la transformation de FW. Alors l'Hamiltonien de DKP dans un espace de phase non-commutatif peut être écrit sous la forme

$$H_k^{nc} = \vec{\alpha}\vec{\pi} + (\vec{\alpha} \times \vec{x})\vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i\frac{e}{2m}F_{\rho\mu}(\beta^\mu\beta^0\beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\alpha}\vec{A} + A_0 - \frac{i}{2m}F_{\rho\mu}(\beta^\mu\beta^0\beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})\right) \times \vec{p}\right)\vec{\Theta}, \quad (4.3. 80)$$

avec

$$\vec{\pi} = \vec{P} - e\vec{A}(\vec{x}), \quad (4.3. 81)$$

pour effectuer la transformation de FW, nous divisons l'Hamiltonien non-commutatif (4.3. 80) à une partie diagonale de bloc et autre non diagonale, où ces parties désignent les opérateurs pair ξ et impair \mathcal{O} respectivement ⁹

$$H_k^{nc} = \mathcal{O} + \xi, \quad (4.3. 82)$$

avec

$$\xi = -eA_0 + e((\vec{\nabla}A_0) \times \vec{p})\vec{\Theta}, \quad (4.3. 83)$$

9. Opérateurs impairs (de la représentation à 5d) comme : $\alpha^i, \beta^i, \beta^0 \dots$, opérateurs pairs comme : I_i, δ_{ij}, \dots

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & \vec{\alpha} \vec{\pi} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \\ & + e \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \end{aligned} \quad (4.3. 84)$$

ceux-ci sont définis pour satisfaire $\xi \mathcal{O} = \mathcal{O} \xi$.

En nous rappelant que le produit de deux opérateurs pairs ou impairs est nécessairement un opérateur pair et que le produit d'un opérateur pair et autre impair est un opérateur impair, nous verrons que par la transformation de FW, nous supprimons tous les opérateurs impairs, nous pouvons supprimer successivement ces termes impairs d'Hamiltonien de DKP, nous obtenons alors un Hamiltonien complètement libre d'opérateurs impairs. Nous supposons en outre que ξ et \mathcal{O} ne peuvent pas être inférieurs à l'ordre de $(\frac{1}{m})^0$.

On considère la transformation canonique générée par l'opérateur Hermitien

$$S = -i \frac{\vec{\beta} \vec{\pi}}{m}, \quad (4.3. 85)$$

à partir d'Eq.(4.3. 55, 4.3. 58) et satisfaisant Eq.(3.4. 141) dans le cas d'un Hamiltonien dépendant du temps et d'un opérateur S dépendant du temps, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_{FW} &= e^{iS} \psi \\ \tilde{H}_k^{nc} &= e^{iS} H_k^{nc} e^{-iS} - i e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS} \end{aligned} \quad (4.3. 86)$$

tandis que l'opérateur S peut être considéré comme petit, de sorte qu'on peut faire un développement en puissance de $\frac{1}{m}$ d'Hamiltonien de DKP

$$\tilde{H}_k^{nc} = H_k^{nc} + \frac{\partial S}{\partial t} + i \left[S, H_k^{nc} + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] - \frac{1}{2!} \left[S, \left[S, H_k^{nc} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] - \frac{i}{3!} \left[S, \left[S, \left[S, H_k^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] \right] + \dots \quad (4.3. 87)$$

et

$$\psi_{FW}^{nc} = \left(\frac{i}{\sqrt{m}} D_\mu^{nc} \varphi^{nc} \quad \sqrt{m} \varphi^{nc} \right)^T. \quad (4.3. 88)$$

Nous calculons notre Hamiltonien transformé \tilde{H}_k^{nc} (4.3. 87), où nous ne retiendrons que les termes de l'approximation $(\frac{1}{m})^4$. Pour cela on calcule d'abord les commutateurs suivants

$$\begin{aligned} i \left[S, H_k^{nc} + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] &= i \left[S, \mathcal{O} + \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = -\frac{e}{m} \vec{\beta} \vec{\nabla} A_0 - \frac{1}{m} \beta_0 \vec{\pi}^2 + \frac{1}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] - \vec{\alpha} \vec{\pi} \\ &+ \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H} + (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] + \frac{e}{m^2} \vec{\Sigma} \left(\vec{\beta} \times \vec{E} \right) (\beta^0)^2 - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \{ 2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \} \quad , \\ &+ \frac{e}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \right] - \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma} \left(\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.3. 89)$$

$$\begin{aligned} \frac{-i}{2!} [S, [iS, H_k^{nc} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t}]] &= \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0) - \frac{1}{2m^2} \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) - \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] \\ &\quad - \frac{1}{2m} \beta_0 \vec{\pi}^2 - \frac{ie}{4m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta})(\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right], \\ - \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu}(\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} \right] &+ \frac{e}{6m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \end{aligned} \quad (4.3. 90)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{3!} [S, [S, [S, H_k^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t}]]] &= \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0) \right] - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] - \frac{1}{12m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] \\ - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] \right] &- \frac{ie}{24m^4} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta})(\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right] \right] \\ - \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu}(\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} \right] \right] &+ \frac{e}{48m^4} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.3. 91)$$

Les termes qui contiennent de grandes puissances de $\frac{1}{m}$ (supérieures à $(\frac{1}{m})^4$) dans Eq.(4.3. 91), alors ils peuvent être négligés, plus précisément nous ne prenons en compte que les termes d'ordre que nous nous limitons dans le développement, donc Eq.(4.3. 91) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{i}{3!} [S, [S, [S, H_k^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t}]]] &= \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0) \right] \\ - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] &- \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] \right] - \frac{1}{12m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] \\ - \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu}(\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} \right] \right] &+ 0(\frac{1}{m})^4 \end{aligned} \quad (4.3. 92)$$

En substituant Eqs.(4.3. 89, 4.3. 90, 4.3. 92) dans Eq.(4.3. 87), avec $(\vec{x} \times \vec{\eta}) \vec{\alpha} = \vec{X} \vec{\alpha}$, on arrive à

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k^{nc} &= (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i \frac{eF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e((\vec{\nabla} A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta} - \beta_0 \frac{\vec{\pi}^2}{2m} \\ &+ e \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} - \frac{i}{m} \vec{\beta} \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} - \frac{e}{m} \vec{\beta} \vec{\nabla} A_0 + \frac{1}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \\ &+ \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H} + (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] + \frac{e\vec{\Sigma}}{m^2} (\vec{\beta} \times \vec{E}) (\beta^0)^2 - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \{2(\vec{\beta} \vec{\pi})(\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi}\} \\ &+ \frac{e}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2} (\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0) \\ &+ \frac{\vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi})}{2m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \right] + \frac{ie}{4m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta})(\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right] \\ &+ \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu}(\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} \right] - \frac{e}{6m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \\ &- \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma}(\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0) \right] + \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] + \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \right] \right] \\ &+ \frac{1}{12m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] + \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \vec{A}) - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p} \right] \vec{\Theta} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.3. 93)$$

pour être plus précis, nous ne prenons en compte que les termes jusqu'au ordre de $(\frac{1}{m})^2$, donc les termes supérieurs ou égaux en ordre à $(\frac{1}{m})^3$ peuvent être négligés, et avec Eq.(1.0. 11), nous obtenons un Hamiltonien presque pair qui est

$$\begin{aligned}
\vec{H}_k^{nc} = & m\beta_0 - e(A_0 + ((\vec{\nabla} A_0 + \vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A})) \times \vec{p}) \vec{\Theta}) + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}(\vec{\alpha}\frac{\vec{\pi}}{m} - \beta_0) - \frac{\vec{p}}{m} \left(i\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + e\vec{\nabla} A_0 \right) \\
& - \frac{ie}{m} \left\{ (\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - (\vec{\nabla}((\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right\} + \frac{e}{2m} \left\{ \beta^0(\vec{\Sigma}\vec{H}) - (\vec{\nabla}(\beta^0\vec{\Sigma}\vec{H}) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right\} \\
& + \frac{e}{2m} \left\{ (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H} - (\vec{\nabla}((\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H}) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right\} + \frac{e}{2m^2} [\vec{\beta}\vec{\pi}, (\beta^0\vec{\Sigma} + \vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H}] + \vec{X}\vec{\alpha} \\
& - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta}\vec{E})(2(\vec{\beta}\vec{\pi})(\beta^0)^2 - \vec{\beta}\vec{\pi}) + \frac{e\vec{\Sigma}}{m^2} (\vec{\beta} \times \vec{E})(\beta^0)^2 - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2} \vec{\pi} \times (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} A_0) + \frac{1}{2m} [\vec{\beta}\vec{\pi}, [\vec{\beta}\frac{\vec{\pi}}{m}, \vec{X}\vec{\alpha}]] \\
& + \frac{e}{m} [\vec{\beta}\vec{\pi}, (\vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A} + (\frac{i}{m}(\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - \beta^0\frac{\vec{\Sigma}}{2m}\vec{H} - \frac{1}{2m}(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H})) \times \vec{p}) \vec{\Theta}] + \frac{1}{m} [\vec{\beta}\vec{\pi}, \beta_0\frac{\vec{\pi}^2}{12m} + \vec{X}\vec{\alpha}] + 0(\frac{1}{m})^3
\end{aligned} \tag{4.3. 94}$$

L'équation ci-dessus sera admise essentiellement sous le nom d'Hamiltonien de Schrödinger-Pauli non-commutatif pour une particule à un spin zéro ou unité interagissant avec un champ électromagnétique. L'apparition de termes proportionnels aux termes non-commutatifs de phase explicite (même d'espace) impliqués dans l'Hamiltonien de Schrödinger-Pauli en raison d'effet de la non-commutativité sur l'équation de DKP, ce qui signifie qu'ils apparaissent sous forme de termes contenant les paramètres de la non-commutativité. Après l'application de la limite non relativiste via la transformation unitaire de FW, les termes apparus vont générer de nouveaux termes non-commutatifs et des termes de correction non-commutatifs.

Dans les équations ci-dessus (4.3. 93, 4.3. 94), $\vec{\Sigma}$ représente l'opérateur de spin des bosons (de valeurs propres de 0 ou 1), et \vec{H} , \vec{E} sont le champ magnétique et le champ électrique respectivement. Nous désignons et interprétons maintenant les termes distincts dans notre Hamiltonien de Schrödinger-Pauli non-commutatif comme suit :

Nous pouvons identifier chaque terme séparément, en commençant par le terme non diagonal $m\beta_0$ comme énergie de repos (pouvant être éliminé simplement à partir d'une autre transformation FW), ensuite $e(A_0 + ((\vec{\nabla} A_0 + \vec{\nabla}(\vec{\alpha}\vec{A})) \times \vec{p}) \vec{\Theta}) = e\frac{nc}{\Phi}$ comme terme d'énergie électrostatique non-commutative, suivi par $\frac{\vec{\pi}^2}{2m}(\vec{\alpha}\frac{\vec{\pi}}{m} - \beta_0) + \frac{1}{2m}[\vec{\beta}\vec{\pi}, [\vec{\beta}\frac{\vec{\pi}}{m}, \vec{X}\vec{\alpha}]]$ qui sont l'énergie cinétique non-commutative modifiée, avec son terme de correction non-commutatif $\frac{1}{2m}[\vec{\beta}\vec{\pi}, \beta_0\frac{\vec{\pi}^2}{6m} + 2\vec{X}\vec{\alpha}]$. En utilisant les mêmes étapes qui nous ont données Eq.(3.4. 132) à travers Eq.(2.3. 12), et avec ($\eta = 0$, $\vec{X}\vec{\alpha} \sim 0$), le terme d'énergie cinétique est totalement diagonalisé, et peut être écrit comme

$$\frac{\vec{\pi}^2}{2m} \frac{\pi_0}{m} (2\beta_0^2 - 1). \tag{4.3. 95}$$

Le résultat le plus important qui compte pour nous est l'existence du moment angulaire

orbital et les couplages de spin avec le champ magnétique externe, mais ils sont modifiés et affectés par l'influence de la non-commutativité, comme il est évident dans les termes

$$\frac{e}{2m} \{ \beta^0 (\vec{\Sigma} \vec{H}) - (\vec{\nabla} (\beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H}) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \} \text{ et } \frac{e}{2m} \{ (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} - (\vec{\nabla} ((\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H}) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \}. \quad (4.3. 96)$$

Les termes suivants représentent le couplage spin-orbite diagonal par le champ électrique, mais ils sont également affectés et modifiés par l'influence de la non-commutativité

$$- \frac{e \vec{\Sigma}}{2m^2} \vec{\pi} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} A_0 \right) - \frac{ie}{m} \{ (\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - (\vec{\nabla} ((\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \}, \quad (4.3. 97)$$

Les termes suivants peuvent être expliqués en étant analogues aux termes de Darwin pour les particules avec spin-1/2 en interaction avec un potentiel électromagnétique

$$- \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \{ 2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \} + \frac{e \vec{\Sigma}}{m^2} (\vec{\beta} \times \vec{E}) (\beta^0)^2. \quad (4.3. 98)$$

Le reste des termes représentent des corrections d'ordre supérieur : un de la transformation de FW et l'autre de l'influence de la non-commutativité.

Sous la condition $\eta = \Theta = 0$, Eq.(4.3. 94) devient

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k^{nc} = & m\beta_0 - eA_0 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} \left(\frac{1}{m} \vec{\alpha} \vec{\pi} - \beta_0 \right) + \frac{e}{2m} \beta^0 (\vec{\Sigma} \vec{H}) + \frac{e}{2m} (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \\ & - \frac{\vec{\beta}}{m} \left(i \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + e \vec{\nabla} A_0 \right) - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \left(2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \right) + \frac{e}{m^2} \vec{\Sigma} \left(\vec{\beta} \times \vec{E} \right) (\beta^0)^2, \\ & - \frac{ie}{m} (\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma} \vec{\pi} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} A_0 \right) + \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, e(\beta^0 \vec{\Sigma} + \vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} + \frac{\beta_0}{6} \vec{\pi}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.3. 99)$$

l'équation (4.3. 99) est similaire au Hamiltonien de Schrödinger-Pauli extrait de l'équation de Dirac en interaction avec un champ électromagnétique externe.

À la fin de la section, on peut dire que nous avons étudié la limite non relativiste de l'équation de DKP à travers la transformation unitaire de FW dans deux cas, dans le premier, nous n'avons considéré uniquement la non-commutativité en phase et en absence d'interaction avec les champs. Pour le second cas, nous avons considéré complètement la non-commutativité en espace de phase avec la présence du champ électromagnétique externe.

Dans le premier cas, l'équation concernée était l'équation non relativiste de Schrödinger, sachant que l'effet de la non-commutativité de phase disparaissait dans l'Hamiltonien de DKP mais apparaissait dans la fonction d'onde correspondante. Dans le deuxième cas, l'équation

concernée était l'équation non-commutative de Schrödinger-Pauli en espace de phase non-commutatif, dont l'effet de la non-commutativité était évidemment présent dans l'équation obtenue et modifiait la plupart des termes de l'équation, et affectait en particulier le spin et les termes de moment angulaire orbital qui caractérisent l'équation de Schrödinger-Pauli.

Dans le thème de la théorie du DKP, les premiers auteurs ayant étudiés la limite non relativiste de l'équation de DKP étaient A. G. Nikitin et W. I. Fushchych dans leur article [79], dans lequel ils utilisaient une technique différente pour diagonaliser l'Hamiltonien. Il y a aussi des autres qui ont également étudié l'équation de Kemmer non relativiste selon une approche de covariance galiléenne [80], dans laquelle ils ont utilisé la covariance galiléenne pour diagonaliser l'Hamiltonien de Kemmer, sans oublier les auteurs P. Y. Moshin et J. L. Tomazelli qui ont enquêté sur la limite non relativiste de l'équation de DKP pour un espace commutatif [81]. Nous pouvons comparer nos résultats avec ces résultats là et aussi avec d'autres résultats d'auteurs comme suit :

Dans un premier temps, nous avons comparé nos résultats avec ceux d'auteurs Moshin et Tomazelli. Sous la condition $\eta = \Theta = 0$, et en ne prenant en compte que les termes jusqu'au ordre de $(\frac{1}{m})^2$ (les termes supérieurs ou égaux en ordre à $(\frac{1}{m})^3$ peuvent être négligés), alors nous avons trouvé à peu près les mêmes résultats.

Deuxièmement, nous avons comparé notre résultat avec celle d'auteur Silenko [82]. Nous avons constaté que l'auteur avait fondé ses recherches sur l'équation de mouvement de spin des particules décrite par l'équation de Bargmann-Michel-Telegdi. Ensuite, pour vérifier les équations d'onde des particules de spin-1, l'auteur a pris le Lagrangien qui décrit les effets de spin pour les particules d'un spin arbitraire interagissant avec un champ électromagnétique. Notez que, dans la forme générale de son Hamiltonien, il a considéré un terme supplémentaire comportant les termes impairs et pairs dans l'Hamiltonien pour faciliter l'application de la transformation de FW, de sorte que l'équation (19) est semblable à la nôtre à quelques exceptions près, comme dans notre Hamiltonien transformé dans le cas de la commutativité, $\eta = \Theta = 0$ (mais avec une seconde transformation de FW pour éliminer le premier terme de notre Hamiltonien transformé). Notre Hamiltonien est plus détaillé que celui de Silenko, et

contient des corrections liées à l'ordre de $(\frac{1}{m})^3$. L'auteur a effectué deux des transformations de FW. D'autre part, nous n'avons effectué qu'une seule transformation de FW (il nous suffisait d'utiliser une seule transformation pour trouver ce qui était intéressant).

4.4 Conclusion

En conclusion, nous avons examiné la limite non relativiste des équations de Dirac et de DKP en présence d'une interaction électromagnétique dans l'espace de phase non-commutatif, nous avons tester l'effet de la non-commutativité sur la limite non relativiste à travers principalement deux méthodes, la méthode de la transformation de Foldy-Wouthuysen et l'approche des composantes grandes- petites de la fonction d'onde, ce qui nous a conduit à obtenir l'équation non relativiste non-commutative de Schrödinger-Pauli. Et l'influence de la non-commutativité se manifeste clairement dans les différents nouveaux termes proportionnels aux paramètres de la non-commutativité dans l'Hamiltonien obtenu d'après l'équation correspondante.

L'utilisation de la transformation de Foldy-Wouthuysen permet toujours d'amener le système de la mécanique quantique relativiste à un régime non relativiste, et nos travaux actuels confirment que la transformation de FW est applicable même lorsque la non-commutativité est prise en compte.

Pour la condition $\eta = \Theta = 0$, les résultats reviennent à ceux de la mécanique quantique habituelle.

En rappelant également que l'équation de Schrödinger ne tient pas compte le spin des particules. En revanche, le spin peut être introduit en supposant la présence d'un champ électromagnétique dans l'équation relativiste avant l'extraction de l'équation non relativiste de Schrödinger-Pauli, où le spin décrit correctement l'interaction d'une particule avec le champ électromagnétique externe.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse est l'étude de certaines équations relativistes et leurs limites non relativistes dans la géométrie non-commutative, exactement nous nous sommes intéressés au lien entre la mécanique quantique relativiste et la mécanique quantique non relativiste au sein de la géométrie non-commutative, sachant que principalement les méthodes de base utilisées pour l'application de la non-commutativité sont

- Utiliser un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl.
- En remplaçant le produit ordinaire par le produit de Moyal-Weyl dans les fonctions et les actions de notre système.
- Utiliser des transformations linéaires de décalage de Bopp.
- À travers les cartes de Seiberg-Witten.

Nous avons utilisé uniquement deux méthodes, qui sont la translation linéaire de décalage de Bopp et le produit de Moyal-Weyl, dont une partie de notre étude sur la non-commutativité, a été la non-commutativité dépendante du temps à travers la translation linéaire de décalage-Bopp dépendante du temps. L'avantage de ces deux techniques réside dans la possibilité d'avoir directement des expressions exactes et simples à utiliser.

On a voulu tester l'effet de la non-commutativité sur la mécanique quantique relativiste et sur la mécanique quantique non relativiste et sur la limite non relativiste :

Pour la partie concernant la mécanique quantique non relativiste, nous avons utilisé la non-commutativité en espace de phase dans l'équation de Schrödinger en interaction avec des potentiels de type local et non-local, ensuite on a extrait l'équation de continuité dans le cas commutatif et dans le cas non-commutatif, la non-localité et la localité, étant responsables à

trouver des nouvelles quantités de type densité dans l'équation de continuité dans les deux types d'espace. Mais dans le cas non-commutatif, la loi de la conservation est entravée. Dont nous avons trouvé que la non-commutativité en espace de phase ne convient pas pour décrire la densité de courant en présence d'un potentiel non-local et d'un autre local. Où il a fallu poser certaines conditions, et modifier la densité de courant pour résoudre ce problème.

Pour la partie concernant la mécanique quantique relativiste, la non-commutativité en espace de phase a été introduite dans les équations relativistes de Klein-Gordon, de Dirac, de Kemmer et de Fisk-Tait. Sachant que nous avons également examiné et résolu l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif dépendant du temps à travers la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld, où la non-commutativité a été introduite selon la translation de décalage-Bopp dépendante du temps. Pour l'équation de Fisk-Tait avec une interaction électromagnétique, l'équation de continuité correspondante a été obtenue dans les deux types d'espaces, commutatif et non-commutatif, en trouvant que la non-commutativité ne fait pas la charge totale obtenue à partir de la densité de probabilité définie. Ainsi que nous avons montré le lien entre les fermions et les bosons dans l'espace de Fock utilisant la représentation de Holstein Primakoff, et également trouver que la densité de courant de spin pour les particules à spin-3/2, ne peut pas être affectée par la non-commutativité dans l'espace, contrairement à l'équation de Maxwell correspondante, qu'a été influencée par la non-commutativité dans l'espace.

Pour la limite non relativiste des équations de Dirac et de DKP en présence d'une interaction électromagnétique dans l'espace de phase non-commutatif, nous avons examiné avec succès l'effet de la non-commutativité sur limite non relativiste. Dont la limite non relativiste a été réalisée à l'aide de la méthode de la transformation de Foldy-Wouthuysen principalement et avec l'approche des composantes grandes et petites de la fonction d'onde, ce qui nous a conduit à obtenir l'équation non relativiste non-commutative de Schrödinger-Pauli. L'effet de la non-commutativité se manifeste clairement dans les différents nouveaux termes proportionnels aux paramètres de la non-commutativité dans l'Hamiltonien obtenu d'après l'équation correspondante. Sachant que la présence d'un champ électromagnétique dans l'équation rela-

tiviste correspondante, nous a servis à trouver l'équation non relativiste de Schrödinger-Pauli, puisque l'équation de Schrödinger ne tient pas compte le spin des particules.

La transformation de Foldy-Wouthuysen est un outil puissant dans le domaine de la mécanique quantique, qui consiste à faire une série de transformations unitaires séquentielles, qui visent à réécrire l'Hamiltonien sous une forme plus simple et diagonale, et à amener le système de la mécanique quantique relativiste à un régime non relativiste.

Sous la condition $\Theta = \eta = 0$, les équations relativistes et les leurs limites non relativistes dans l'espace de phase non-commutatif reviennent à celles de la mécanique quantique commutative habituelle.

On schématise l'analyse de la limite non relativiste par la manière suivante :

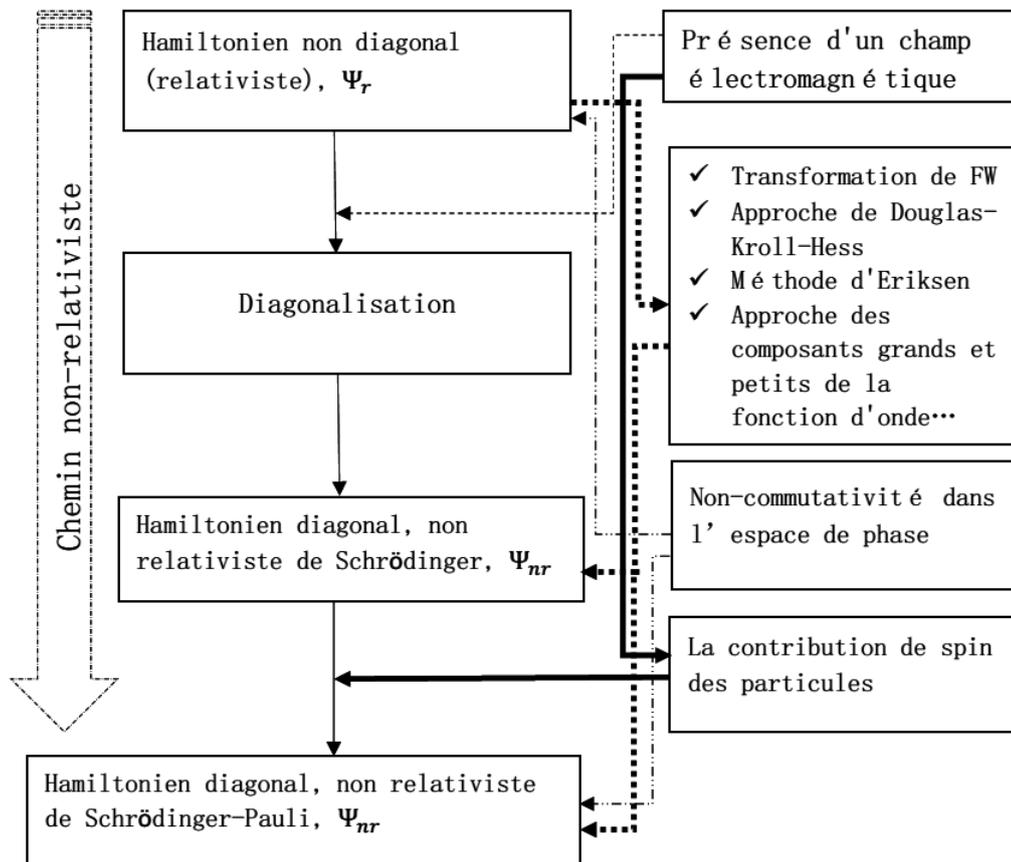


FIGURE 4.1 – Présentation diagrammatique du chemin de la limite non relativiste

Bibliographie

- [1] G. W. Quantum Mechanics an Introduction, 4th ed, Springer : Berlin, Germany; Vol. I (2000).
- [2] H. S. Snyder. Phys. Rev. 71 (1947) 38. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.38>; H. S. Snyder. Phys. Rev. 72 (1947) 68. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.68>
- [3] A. Connes. Publications Mathématiques de l'IHÉS. 62 (1985) 41. <https://doi.org/10.1007/BF02698807>; S.L. Woronowicz. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987) 117. <https://doi.org/10.2977/prims/1195176848>; S.L. Woronowicz. Commun.Math. Phys. 111 (1987) 613. <https://doi.org/10.1007/BF01219077>
- [4] N. Seiberg, E. Witten JHEP09 (1999) 032. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032>
- [5] V. V. Nesvizhesky et al. Phys. Rev. D 67 (2003) 102002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.102002>; Nature (London) 415 (2002) 297. <https://doi.org/10.1038/415297a>
- [6] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane, and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 141601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.141601>
- [7] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragão, P. Castorina, and D. Zappalà Phys. Rev. D 72 (2005) 025010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.025010>
- [8] R. J. Szabo. Phys. Rep. 378 (4) (2003) 207. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(03\)00059-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(03)00059-0)
- [9] F. Delduc et al J. Phys. Conf. Ser. 103 (2008) 012020. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/103/1/012020>

- [10] Kamoshita, J, Eur. Phys. J. C 52 (2007) 451. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0371-y>
- [11] D. Sanjib et al. Phys. Rev. D 90. No.8 (2014) 084005.<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.084005>
- [12] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics Dover, New York (1931).
- [13] M. A. Rieffel, Mem. Am. Math. Soc. vol 506 (1993) 106; S. Mohamed, R. Al-Btoush. Int J of Novel Research in Physics Chemistry & Mathematics. 3.Vol. 3, Issue 3 (2016) 18.
- [14] F. Schwabl, Quantum Mechanics. Springer, Berlin (1995); Van-Brunt, A. Visser, M. Mathematics, 6 (2018) 135. <https://doi.org/10.3390/math6080135>
- [15] M. Najafzadeh, M. Saadat. Chin.J.Phys. 51. No.1, (2013) 94. <https://doi.org/10.6122/CJP.51.94>; Z. Yang, C. Long, Qin, SJ. et al. Int J Theor Phys. 49 (2010) 644. <https://doi.org/10.1007/s10773-010-0244-2>
- [16] L. Kang and D. Sayipjamal Chinese Phys. C 34 (2010) 944. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/34/7/003>
- [17] M. M. Sheikh-Jabbari. Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 5265. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.5265>
- [18] J. B. Möller, L. Schraml, S. et al. Eur. Phys. J. C. 21 (2001) 383. <https://doi.org/10.1007/s100520100731>
- [19] M. J. Schraml, S. Schupp, P. et al. Eur. Phys. J. C. 16 (2000) 161. <https://doi.org/10.1007/s100520050012>
- [20] J. B. Schraml, S. Schupp, P. et al. Eur. Phys. J. C. 17 (2000) 521. <https://doi.org/10.1007/s100520000487>
- [21] X. Calmet, J. B., Schupp, P. et al. Eur. Phys. J. C. 23 (2002) 363. <https://doi.org/10.1007/s100520100873>; J. Trampetić, M. Wohlgenannt, Phys. Rev. D 76 (2007) 127703. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.127703>

- [22] K. Li, J. Wang, C. Chen, Mod. Phys. Lett. A Vol. 20, No. 28 (2005) 2165. <https://doi.org/10.1142/S0217732305017421>; C. Bastos, O. Bertolami, Phys. Lett. A 372 (2008) 5556. <https://doi.org/10.1063/1.2944996>
- [23] S. Gangopadhyay, A. Saha, A. Halder. Phys.Lett. A 379 (2015) 2956. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.08.039>
- [24] M. Galperin , N. A and Ratner M A. Phys. Rev. B (2007) 75155312.
- [25] G. C. Nayak. J. High Energ. Phys. 2013 (2013) 1. [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2013\)001](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2013)001); G. C. Nayak. Eur. Phys. J. C. 73 (2013) 2442. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2442-6>
- [26] C. M., Arnold, L. G., & MacKellar, A. D. Annals of Physics, 59 (1970) 219. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(70\)90401-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(70)90401-X)
- [27] D. N. Pattanayak & Wolf, E. Phys. Rev. D, 13 (1976) 913. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.913>; O. Kidun et al. J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 9413. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/44/310>; M. Reeves & Owen, L. W. Journal of Computational Physics, 4, (1969) 572. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(69\)90021-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(69)90021-7)
- [28] J. Taylor. Guo H and Wang J. Phys. Rev.B 63 (2001) 245407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.245407>; A. B. Balantekin et al. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 24 (1998) 2087. <https://doi.org/10.1088/0954-3899/24/11/010>
- [29] F. Perey & Buck, B. Nucl. Phys, 32 (1962) 353. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90345-0](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90345-0)
- [30] A. L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill, New York, (1971).
- [31] G. R. Satchler, Direct Nuclear Reactions, Clarendon, Oxford, (1983); H. Feshbach, Ann. of Phys. (N. Y) 5 (1958) 357. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90007-1)
- [32] H. Horiuchi. Progress of Theoretical Physics, 64 (1980) 184. <https://doi.org/10.1143/PTP.64.184>

- [33] S. Woon-young, K. Byung-taik J. Korean Phy. Soc. 30, No. 2 (1997) 175.
- [34] C. Li et al. Nanotechnology. 19 (2008) 155401. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/19/15/155401>
- [35] H. Feshbach and F. Villars . Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 24. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.30.24>
- [36] A. O. Barut. Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles, New York : MacMillan (1965). See pp. 102, 211; G. Sterman An Introduction to Quantum Field Theory, Cambridge : University Press (1993) P. 7.
- [37] S. Weinberg The Quantum Theory of Fields, Cambridge : University Press. Vol. 1. (1995).
- [38] G. Burmeister and K. Maschke, Phys. Rev. B 57 (1998) 13050. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.57.13050>; C. S. Tang and C. S. Chu, Phys. Rev. B 60 (1999) 1830. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.1830>; W. Li and L. E. Reichl, Phys. Rev. B 62 (2000) 8269. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.8269>
- [39] C. Figueira de Morisson Faria, M Dörr, and W. Sandner,. Phys. Rev. A 55 (1997) 3961 ; H. Zeng, Phys. Rev. A 57 (1997) 388; H. Maeda and T. F. Gallagher, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 133004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.133004>
- [40] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2000); C. E. Creffield and G. Platero, Phys. Rev. B 65 (2002) 113304. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.113304>
- [41] H. P. Yuen, Phys.Rev.A 13 (1976) 2226. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.13.2226>
- [42] H. R. Lewis J. Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 510; H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld. J. Math. Phys. 10 (1969) 1458.
- [43] X. Chen, E. Torrontegui, and J. G. Muga1, Phys. RevA. A 83 (2011) 062116. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.062116>; J. Guerrero and Francisco F López-Ruiz, 2015, Phys. Scr. 90 (2015) 074046. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/90/7/074046>
- [44] I. A. Pedrosa , J. L. Melo and Nogueira E Jr, Mod. Phys. Rev. Lett. B 28 (2014) 1450212.

- [45] X. Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, del Campo A, Guéry Odelin D and Muga JG, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 063002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.063002>
- [46] X. Jiang, C. Long and S. Qin, J. Mod. Phys. 4 (2013) 940. <https://doi.org/10.4236/jmp.2013.47126>; H. Sobhani and H. Hassanabadi, Commun. Theor. Phys. 64 (2015) 263. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/64/3/263>; M. Merad, S. Bensaida, J. Math. Phy. 48, 073515 (2007). <https://doi.org/10.1063/1.2747609>
- [47] G. Petiau Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mere. Collect. 16 No. 2 (1936); N. Kemmer Proc. R. Soc. 166 (1938) 127; roc. R. Soc. A 173 (1939) 91; R. J. Duffin Phys. Rev. 54 (1939) 1114.
- [48] Z. Anton Capri, Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Quantum Field Theory, World Scientific , ISBN 981-238-136-8, (2002) p. 25.
- [49] R. Casana, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel et al. General Relativity and Gravitation. 34 (2002) 1941. <https://doi.org/10.1023/A:1020732611995>
- [50] W. Rarita and J. Schwinger Phys. Rev. 60 (1941) 61. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.61>
- [51] M. A. K. Khalil, M. Seetharaman. Phys. Rev. D 18 (1978) 3040. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.18.3040>
- [52] J. O. Eeg. Physical Review D, 14 (1976) 2197. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.2197>
- [53] H.J. Bhabha. Phil. Mag. 43 (1952) 33; T. S. Santhanam A. R. Tekumalla Santhanam. Fortschr. Phys., 22 (1974) 431. <https://doi.org/10.1002/prop.19740220802>
- [54] A. K. Nagpal. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 10 No. 10 (1977) 1803. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/10/10/014>
- [55] M. Fierz and W. Pauli, Proc. R. Soc. Lond. A 173 (1939) 211. <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140>
- [56] G. Velo and D. Zwanziger, Phys. Rev. 186 (1969) 1337. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.186.1337>

- [57] J. Prabhakaran et al. J. Phys. A: Math. Gen. 8 (1975) 560. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/8/4/018>
- [58] K. Johnson and E. C. G. Sudarshan, Ann. of Phys. 13 (1961) 126. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(61\)90030-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90030-6)
- [59] K. K. Gupta. Series A, Mathematical and Physical Sciences. . 222. 1148 (1954) 118. <https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0057>
- [60] T. Fukuyama, K. Yamamoto, Progress of Theoretical Physics, Vol. 49 (1973) 304. <https://doi.org/10.1143/PTP.49.304>
- [61] H. Kim, K.Wang, Y. Nakajima, R. Hu, S. Ziemak, P. Syers, L. Wang, H. Hodovanets, J. D. Denlinger, P. M. R. Brydon, D. F. Agterberg, M. A. Tanatar, R. Prozorov and J. Paglione. Beyond triplet. Science Advances. 4. No. 4 (2018) eaao4513. <https://doi.org/10.1126/sciadv.aao4513>
- [62] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration) Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 182001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.182001>
- [63] C. Fisk and W. Tait. J. Phys. A : Math. Nucl. Gen. 6 (1973) 383. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/6/3/012>
- [64] M. Seetharaman, et al. Phys.Rev. D12 (1975) 3195. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.3195>
- [65] G. F. T. del Castillo, J. Velázquez Castro. Rev. mex. fis. México. 50. No. 3 (2004) 306 .
- [66] S. Azakov. In: Halilov S. (eds) Physics of Spin in Solids: Materials, Methods and Applications. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, vol 156. Springer, Dordrecht (2004) 101. https://doi.org/10.1007/1-4020-2708-7_7
- [67] C. E. Alonso, J.M. Arias, J. Dukelsky, & S. Pittel. Nucl. Phys A 539 (1992) 391. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(92\)90283-P](https://doi.org/10.1016/0375-9474(92)90283-P)
- [68] E. R. Marshalek, Nucl . Phys . A 347 (1980) 253.
- [69] J. Dukelsky and S. Pittel, Phys. Lett. B 177 (1986) 125. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(86\)91040-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)91040-3)

- [70] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen. *Physical Review* 78 (1950) 29. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.29>
- [71] E. De Vries. *Fortsch. Phys.* 18 (1970) 149. <https://doi.org/10.1002/prop.19700180402>
- [72] P. Gosselin, A. Bérard & Mohrbach, H. *Eur. Phys. J. B.* 58 (2007) 137. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2007-00212-6>
- [73] G. Jansen and B. A. Hess. *Physical Review A* 39 (1989) 6016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.6016>
- [74] T. Nakajima *Chem. Rev.* 112, 1 (2012) 385. <https://doi.org/10.1021/cr200040s>
- [75] W. Greiner, *Quantum Mechanics*. 3rd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg (1994) .
- [76] P. Bechouche, Mauser, N. & Bechouche, P. *Comm Math Phys* (1998) 197. <https://doi.org/10.1007/s002200050457>
- [77] A. S. Davydov. *Quantum Mechanics*. 2nd Edition, Pergamon, Oxford (1965); A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II. Wiley, New York (1968) .
- [78] D. Hestenes. *Found Phys.* 20 (1990) 1213. <https://doi.org/10.1007/BF01889466>; K. Huang. *Am. J. of Phys.* 20 (1952) 479. <https://doi.org/10.1119/1.1933296>
- [79] A. G. Nikitin & V. I Fushchich. *Theor Math Phys.* 34 (1978) 203. <https://doi.org/10.1007/BF01028837>
- [80] M. de Montigny , F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos and J. D. M. Vianna, *J. Phys. A* 33 (2000) 273. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/31/102>
- [81] P. Yu. Moshin and J. L. Tomazelli . *Mod Phys. Lett A.* Vol. 23, No. 02, (2008) 129. <https://doi.org/10.1142/S0217732308023803>
- [82] J. Alexander Silenko. (2004). arXiv:hep-th/0404074.
- [83] P. Pyykkö. *Molecular Physics*, 116 (10). (2018) 1328. <https://doi.org/10.1080/00268976.2018.1426131>

Annexe A

Calculs et simplifications

A.1 Sur l'équation de Dirac, sa limite non relativiste

A.1.1 Passer d'Eq.(3.3. 45) à Eq.(3.3. 46) (simplification)

En utilisant les relations $\eta_{ij} = \eta\epsilon_{ij}$ et $\eta_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\eta_{ij}$, on trouve

$$\alpha_i \frac{c}{2\hbar} \eta_{ij} x_j = \frac{c}{2\hbar} \left(2\eta_k \epsilon_{kij}^{-1} \right) \alpha_i x_j = \frac{c}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} \alpha_i x_j, \quad (1.0. 1)$$

où $\epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}$ et sachant que $(u \times v)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} u_\nu v_\lambda$

$$\frac{c}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} \alpha_i x_j = \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x})_k \eta_k = \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta}, \quad (1.0. 2)$$

de la même manière nous prouvons que

$$-ie\Theta_k \epsilon_{abk} \partial_a (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \partial_b = -ie \frac{\hbar}{\hbar} \Theta_k \epsilon_{abk} \partial_a (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \partial_b = \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta}. \quad (1.0. 3)$$

A.1.2 Élimination de $\vec{\alpha}$ des deux derniers termes de l'équation (4.2. 48)

En utilisant Eq.(4.2. 45), il vient

$$\begin{aligned} \left[\frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} \right] &= \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} - \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \\ &= \frac{c^2}{\hbar} \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} \left\{ \vec{\alpha} \vec{\Omega} \vec{\alpha} \vec{E} - \vec{\alpha} \vec{E} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \right\} \\ &= \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \left\{ \vec{\Omega} \vec{E} + i \vec{\Sigma} (\vec{\Omega} \times \vec{E}) - \vec{E} \vec{\Omega} - i \vec{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{\Omega}) \right\}, \\ &= \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \left\{ [\vec{\Omega}, \vec{E}] + 2i \vec{\Sigma} (\vec{\Omega} \times \vec{E}) \right\} \end{aligned} \quad (1.0. 4)$$

A.2 Sur l'équation de DKP, sa limite non relativiste

A.2.1 Relations de commutation et de tenseur, produit matriciel utilisé en algèbre de DKP

En utilisant l'algèbre DKP (3.4. 124, 3.4. 125), on a

$$F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) = F_{00} \beta^0 \beta^0 \beta^0 + F_{ij} \beta^i \beta^0 \beta^j + F_{\rho\mu} \beta^\mu g^{0\rho}, \quad (1.0. 10)$$

$$F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) = -2(\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - i \beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H} - i (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H}, \quad (1.0. 11)$$

avec , $F_{\rho\mu} \beta^\mu g^{0\rho} = -\vec{E} \vec{\beta}$, $\Sigma_{ij} = \beta^i \beta^0 \beta^j - \beta^j \beta^0 \beta^i$, $i, j = 1, 2, 3$.

Pour les relations de commutation utiles, on a

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\alpha} \vec{\pi}] = -\beta_0 \vec{\pi}^2, \quad (1.0. 12)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0] = -\vec{\alpha} \vec{\pi}, \quad (1.0. 13)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, A_0(\vec{x})] = -i \vec{\beta} \vec{\nabla} A_0 = -i \vec{\beta} \vec{\nabla} A_0, \quad (1.0. 14)$$

$$\left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \frac{\partial(\vec{\beta} \vec{\pi})}{\partial t} \right] = ie \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}), \quad (1.0. 15)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, ((\vec{\nabla} A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta}] = [\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\kappa}] = 0, \text{ avec } ((\vec{\nabla} A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta} = \vec{\kappa} \in \mathbb{R}, \quad (1.0. 16)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\beta} \vec{E}) (\beta^0)^2] = i \vec{\Sigma} (\vec{\beta} \times \vec{E}) (\beta^0)^2 + (\vec{\beta} \vec{E}) \{2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi}\}, \quad (1.0. 17)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2] = -\vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}), \quad (1.0. 18)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\beta} \vec{\pi} \vec{\alpha} \vec{\pi}] = -\beta_0 \vec{\pi}^2, \quad (1.0. 19)$$

$$[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\beta} \vec{\nabla} A_0] = \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \vec{\nabla} A_0). \quad (1.0. 20)$$

Annexe B

Le spin en mécanique quantique

Le spin^{1 2} est un opérateur vectoriel $S = (S_1, S_2, S_3)$, sa la longueur est mesurée en unités de \hbar , dont l'état quantique est représenté par un ket $|m\rangle$ d'un espace de Hilbert à $2S + 1$ dimensions, sachant que S_1, S_2, S_3 avoir une forme de bloc en diagonale. Le nombre quantique m_s représente physiquement la projection du vecteur S sur l'axe de quantification oz . Où l'opérateur de spin en termes d'opérateurs de création et d'annihilation donné par Eq.(3.5.192).

Tandis que $S = 3/2$, $\dim[S] = 2(\frac{3}{2}) + 1 = 4$, ce qui mène à

$$-3/2 \leq m_S \leq +3/2, \text{ donc } m_S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \quad (2.0. 1)$$

où

$$S_3 |m\rangle = m_s \hbar |m\rangle, \text{ et } m = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s, \quad (2.0. 2)$$

et $S_{\pm} = S_1 \pm iS_2$, physiquement ces deux opérateurs augmentent ou diminuent m d'une unité

$$\begin{aligned} S_+ &= \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m+1)} |m+1\rangle \\ S_- &= \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} |m-1\rangle \end{aligned}, \quad (2.0. 3)$$

ainsi que

$$[S_1, iS_2] = 2\hbar S_3, \text{ et } S^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle \quad (2.0. 4)$$

sachant que $\{S^2, S_3, S_{\pm}\}$ est un ECOC³.

1. Nombre quantique de spin s , est $s = n / 2$, où n peut être n'importe quel entier non négatif, les valeurs autorisées de s sont $0, 1/2, 1, 3/2, 2$.

2. C'est une des propriétés internes des particules, et c'est la seule observable quantique qui ne présente pas d'équivalent classique.

3. Un ECOC : est l'abréviation d'ensemble complet d'observables qui commutent.

Pour que $S = 1/2$, $\dim[S] = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$, avec $\vec{\sigma}$ sont trois matrices de Pauli de 2×2 , il existe seulement deux états de spin distincts, caractérisés par $m_s = \pm \frac{1}{2}$, et

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad (2.0. 5)$$

qui forme la représentation fondamentale de SU (2).

Dans ce qui suit, nous donnons quelques valeurs de spin pour particules élémentaires⁴ et composites⁵ [83]

Spin	Particules correspondantes	Champ	Grandeur	Rotation
0	Boson de Higgs (de masse $>115 \text{ GeV}/c^2$), phonon	Scalaire	Scalaire	Quelconque
1/2	Électron, muon, positron, neutrinos.. (leptons), quarks	Spinoriel	Spineur	2 tours
1	Photon, gluon (int forte), bosons W^\pm , Z^0 (in faible)...	Électromagnétique	Vecteur	1 tour
3/2	Gravitino (son existence n'est qu'une hypothèse)	Gravitationnel	Spin-vecteur	2/3 tour
2	Graviton	Gravitationnel	Tenseur	1/2 tour
>2	?	?	Spin-tenseur	1/ s_3 tour

TABLE B.1 – Spin des particules élémentaires

Spin	Particule composite
0	Mésons π et k , noyaux composés (nombre paire de protons et de neutrons) : ^{12}C , ^{16}O , ^{28}Si
1/2	Certains noyaux composés (nombre impair de protons et de neutrons) : ^{13}C , ^{29}Si
>1/2, et >1	Certains noyaux quadripolaires : ^{14}N , ^{35}Cl , ^{63}Cu
3/2	Baryon Ω^- -hypérons, alliage d'Yttrium, de Platine et de Bismuth

TABLE B.2 – Spin des particules composites

Remarque :

(i) Un boson est une particule de spin s entier et est décrit par un champ de grandeurs invariante sous une rotation d'angle $\frac{360^\circ}{s_3}$. (ii) Un fermion est une particule de spin s demi-entier (invariante sous les rotations d'angle $\frac{360^\circ}{s_3}$). Les fermions de spin $s = 1/2$ sont décrit par un champ de spineurs. Un spineur est une grandeur exotique qui change de signe pour une rotation d'un tour (360°). Il faut donc effectuer deux tours (720°) pour qu'un spineur retourne à sa configuration d'origine!

4. Pour le phonon, les oscillations ne portent aucun moment angulaire, mais seulement un moment linéaire. Pour cette raison, le phonon est une quasiparticule de spin 0.

5. Tableaux des propriétés des particules

Publications Scientifiques

Les travaux présentés dans cette thèse de doctorat ont fait l'objet de six publications dans des revues internationales. Les références de ces articles sont :

1. Haouam, I. and Chetouani, L. (2018) The Foldy-Wouthuysen Transformation of the Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space. *Journal of Modern Physics*, 9, 2021-2034. doi : <https://doi.org/10.4236/jmp.2018.911127>.
2. Haouam, I. The Non-Relativistic Limit of the DKP Equation in Non-Commutative Phase-Space. *Symmetry* 2019, 11, 223. doi : <https://doi.org/10.3390/sym11020223>
3. Haouam, I. (2019) Continuity Equation in Presence of a Non-Local Potential in Non-Commutative Phase-Space. *Open Journal of Microphysics*, 9, 15-28. doi : <https://doi.org/10.4236/ojm.2019.93003>.
4. Haouam, I. (2018) The Phase-Space Noncommutativity Effect on the Large and Small Wave-Function Components Approach at Dirac Equation. *Open Access Library Journal*, 5, 1-10. doi : <https://doi.org/10.4236/oalib.1104108>.
5. Article 05 : Apparaîtra dans la revue *Journal of Physical Studies*. On the Fisk-Tait Equation For Spin-3/2 Fermions Interacting With an External Magnetic Field in Non-commutative Space-Time; [arXiv:1910.06763v1](https://arxiv.org/abs/1910.06763v1)
6. Article 06 : Soumis. Lewis-Riesenfeld Approach to the Solution of Dirac Equation in Time-Dependent Non-Commutative Phase-Space; [arXiv:1910.05833v1](https://arxiv.org/abs/1910.05833v1)

تطوير ومعالجة بعض مسائل ميكانيك الكم

ملخص: تمت دراسة معادلة شرودينغر في تفاعل مع كمون محلي وآخر غير محلي في فضاء الأطوار اللاتبادلي، كما تم إستخراج معادلة الاستمرارية الموافقة في الفضاء التبادلي واللاتبادلي حيث استنتجنا أن لاتبادلية فضاء الأطوار غير مناسبة لوصف كثافة التيار، حيث اضطررنا إلى تغيير وإعادة صياغة هذه الكثافة لحل هذا المشكل. معادلات كلين - غوردن وديراك وديكابي ومعادلة فيسك - تايت تم دراستهم في فضاء الأطوار اللاتبادلي أيضا، بالنسبة لمعادلة ديراك قمنا بدراستها وحلها على إعتبار لا تبادلية فضاء الأطوار متعلقة بالزمن حيث استخدمنا لذلك طريقة الثوابت لـ لويس - رايزنفلد. بالنسبة لمعادلة فيسك - تايت، وجدنا أن لاتبادلية الفضاء لا تجعل الشحنة الإجمالية المتحصل عليها عن طريق كثافة الإحتمال محددة، كما قمنا بإظهار وشرح العلاقة والترابط بين الفرميونات والبوزونات في فضاء فوك عن طريق تمثيل هوليستن - بريماكوف. الحد اللانسبي لمعادلتى ديراك وديكابي في وجود تفاعل كهرومغناطيسي وفي فضاء الأطوار اللاتبادلي تم إيجاداه وفحصه، تأثير لاتبادلية الفضاء على الحد اللانسبي تم حسب طريقتين، هما طريقة تحويل فولدي - وثايزن و طريقة المركبتين الكبيرة والصغيرة لدالة الموجة، مما أدى بنا الى الحصول على المعادلة اللانسبية اللاتبادلية لـ شرودينغر - باولي.

الكلمات المفتاحية: الحد اللانسبي، معادلة شرودينغر - باولي، معادلة ديراك، معادلة ديكابي، معادلة فيسك - تايت، تحويل فولدي - وثايزن، طريقة الثابت لـ لويس - رايزنفلد، فضاء الأطوار اللاتبادلي، كمون غير محلي، جداء مويال - وايل، تحويل تغير بوب، تمثيل هوليستن - بريماكوف.

Development and treatment of some problems of quantum mechanics

Abstract :

The Schrödinger equation in interaction with local and non-local potentials in non commutative phase-space has been studied, the corresponding continuity equation has also been extracted in both types of phase-space, where, it has been found that the non-commutativity is not suitable for describing the current density, where this current density has been modified to solve this problem. Also the Klein-Gordon, Dirac, DKP and Fisk-Tait equations have been studied in non-commutative phase space, where the Dirac equation in non-commutative time-dependent phase-space has been solved through the Lewis-Riesenfeld invariant method, and for the Fisk-Tait equation, it has been found that non-commutativity does not make the total charge obtained from the probability density defined, in addition the correspondence between fermions and bosons in the Fock space has been shown using the Holstein-Primakoff representation. The non-relativistic limit of the Dirac and DKP equations in interaction with an electromagnetic field in non-commutative phase-space was examined, the effect of the non-commutativity on the non-relativistic limit was made according to two methods , the method of transformation of Foldy-Wouthuysen and approach of the big and small components of the wave function, these led to obtain the non-commutative non-relativistic equation of Schrödinger-Pauli.

Keywords : Non-relativistic limit, Schrödinger-Pauli equation, Dirac equation, DKP equation, Fisk-Tait equation, Holstein-Primakoff representation, Foldy-Wouthuysen transformation, Lewis-Riesenfeld invariant method, non-commutative phase-space, non-local potential, Moyal-Weyl product, Bopp-shift transformation

Résumé :

L'équation de Schrödinger en interaction avec des potentiels local et non-local en espace de phase non-commutatif a été étudiée, et l'équation de continuité correspondante a été extraite dans les deux types d'espace, dont, on a constaté que la non-commutativité ne convient pas pour décrire la densité de courant, là où cette densité de courant a été modifiée pour résoudre ce problème. Aussi les équations de Klein-Gordon, de Dirac, de DKP et de Fisk-Tait ont été étudiées en espace de phase non-commutatif, dont l'équation de Dirac dans l'espace de phase non-commutatif dépendant du temps a été résolue à travers la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld, et pour l'équation de Fisk-Tait, on a trouvé que la non-commutativité ne fait pas la charge totale obtenue à partir de la densité de probabilité définie, de plus la correspondance entre les fermions et les bosons dans l'espace de Fock a été montrée utilisant la représentation de Holstein-Primakoff. La limite non relativiste des équations de Dirac et de DKP en présence d'une interaction électromagnétique dans l'espace de phase non-commutatif a été examinée, l'effet de la non-commutativité sur la limite non relativiste a été fait selon deux méthodes, la méthode de la transformation de Foldy-Wouthuysen et l'approche des grandes et petites composantes de la fonction d'onde, qu'ont conduit à obtenir l'équation non relativiste non-commutative de Schrödinger-Pauli.

Mots clés : Limite non relativiste, équation de Schrödinger-Pauli, équation de Dirac, équation de DKP, équation de Fisk-Tait, représentation de Holstein-Primakoff, la transformation de Foldy-Wouthuysen, la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld, espace de phase non-commutatif, potentiel non-local, produit star, transformation de décalage-Bopp

The Foldy-Wouthuysen Transformation of the Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space

Ilyas Haouam, Lyazid Chetouani

Département de Physique, Faculté des sciences exactes, Université des Frères Mentouri, Constantine, Algeria
Email: ilyashaouam@live.fr

How to cite this paper: Haouam, I. and Chetouani, L. (2018) The Foldy-Wouthuysen Transformation of the Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space. *Journal of Modern Physics*, 9, 2021-2034.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2018.911127>

Received: November 9, 2015

Accepted: September 11, 2018

Published: September 14, 2018

Copyright © 2018 by authors and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

A method of Foldy-Wouthuysen transformation for relativistic spin-1/2 particles in external fields is proposed; in the present work the basic properties of the Dirac hamiltonian in the FW representation in the noncommutative phase-space are investigated and the Schrödinger-Pauli equation is found, knowing that the used methods for extracting the full phase-space noncommutative Dirac equation are, the Bopp-shift linear translation method, and the Moyal-Weyl product (*-product).

Keywords

Foldy-Wouthuysen Transformation, Nonrelativistic Limit, Noncommutative Schrödinger-Pauli Equation, Phase-Space Noncommutativity, Noncommutative Dirac Equation, Moyal Product, Bopp-Shift Translation

1. Introduction

The Foldy-Wouthuysen transformation (FW) [1] is one of several methods used to investigate the low-energy limit of the relativistic Dirac equation (low-speed); due to a series of sequential unitary transformations [2], it has proven to be the favorite method to meaningfully obtain the nonrelativistic limit of the Dirac equation in which it gives the Schrödinger-Pauli equation [3] [4] [5]; in the FW representation for relativistic particles in external fields, the operators have the same form as in the nonrelativistic quantum theory, this is mainly because of the fact of the hamiltonian and all operators in this representation are block-diagonal, furthermore the basic characteristics of the FW representation are obviously described in [6] [7] [8] [9].

In the present work, the basic properties of the Dirac hamiltonian in the FW representation in the noncommutative phase-space are investigated and the Schrödinger-Pauli equation is found, where the common methods for extracting the full phase-space noncommutative Dirac equation are both of the linear translation method, which known as Bopp-Shift translation in which it matches between the commutative quantum mechanics and the noncommutative quantum mechanics (NCQM) [10], and the Moyal-Weyl product (*-product) [11] [12] [13] [14].

2. Phase-Space Noncommutativity

In the two-dimensional commutative phase-space, the coordinates x_i and the kinetic momentum p_i satisfy the usual canonical commutation relations

$$[x_i, x_j] = 0, [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \tag{1}$$

In the recent study results on the phase-space noncommutativity (PSNC) is shown that at very tiny scales (string scales) the space may not commute anymore, let us consider the operators of coordinates and kinetic momentum in a two-dimensional noncommutative phase-space \hat{x}_i and \hat{p}_i respectively, where the noncommutative phase-space operators satisfy the commutation relations

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\Theta_{ij}, [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}, [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar^{eff} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \tag{2}$$

with the effective Plank constant being

$$\hbar^{eff} = \hbar \left(1 + \frac{\Theta \cdot \eta}{4\hbar^2} \right), \tag{3}$$

where

$$\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \Theta_k, \Theta_k = (0, 0, \Theta), \eta_{ij} = \epsilon_{ijk} \eta_k, \eta_k = (0, 0, \eta),$$

Θ, η are noncommutative parameters, they are real-valued and antisymmetric constant matrices with dimension of $(\text{length})^2$ and $(\text{momentum})^2$, respectively.

The noncommutativity in phase-space can be realized in terms of Moyal-Weyl product (*-product) [15] [16] [17] which means that the noncommutativity information is encoded in the Moyal product, defined as

$$\begin{aligned} (f \star g)(\hat{x}) &= \exp \left[\frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_{x_a} \partial_{x_b} \right] f(x_a) g(x_b) \\ &= f(x) g(x) + \sum_{a=1} \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{i}{2} \right)^2 \Theta^{a_1 b_1} \dots \Theta^{a_n b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x). \end{aligned} \tag{4}$$

The noncommutative phase-space operators are related to the commutative phase-space one, due to the so-called Bopp-shift linear transformation [18] [19] [20], knowing that the latter induced from the *-product, and it is given by

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x - \frac{1}{2\hbar} \Theta p_y & \hat{y} &= y + \frac{1}{2\hbar} \Theta p_x \\ \hat{p}_x &= p_x + \frac{1}{2\hbar} \eta y & \hat{p}_y &= p_y - \frac{1}{2\hbar} \eta x \end{aligned} \tag{5}$$

If $\Theta = \eta = 0$ the noncommutative phase-space algebra reduces to the commutative one.

3. Nonrelativistic Limit of the Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space

3.1. The Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space

As it known by the use of the \star -product, we obtain the Dirac equation for the noncommutative quantum mechanics [21] [22]

$$H(\hat{x}, \hat{p}) \star \psi(\hat{x}) = E\psi, \quad (6)$$

knowing that the Dirac equation in interaction with the electromagnetic four-potential A_μ in commutative phase-space is

$$\left[c\alpha_i \left(p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right) + eA_0(x) + \beta mc^2 \right] \psi = E\psi(x), \quad (7)$$

where $\psi(x, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$ is the wave function (bi-spinor) in the Dirac representation.

At first we achieve the noncommutativity in space, by the mapping between the noncommutative coordinates \hat{x} and the commutative coordinates x using the \star -product, with the help of Equation (4) we find

$$H(\hat{x}, \hat{p}) \star \psi(\hat{x}) = \left[c\alpha_i \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(\hat{x}) \right) + eA_0(\hat{x}) + \beta mc^2 \right] \star \psi(\hat{x}). \quad (8)$$

Consider the electromagnetic potential $A_i(x) = hx$, where h is a constant, the derivations in the Equation (4) roughly turned off in the first order, then Equation (8) can be written as follows

$$\begin{aligned} H(\hat{x}, \hat{p}) \star \psi(\hat{x}) &= H(x, \hat{p})\psi(x) + \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left[c\alpha_i \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + eA_0(\hat{x}) + \beta mc^2 \right] \partial_b \psi(x) + O(\Theta^2) \\ &= E\psi(x), \end{aligned} \quad (9)$$

with $\partial_a (c\alpha_i \hat{p}_i) = \partial_a (\beta mc^2) = 0$, Equation (9) reduced to

$$H(x, \hat{p})\psi(x) - \frac{ie}{2} \theta_{ab} \partial_a \left[\hat{\alpha}_i (A_i(x)) - A_0(\hat{x}) \right] \partial_b \psi(x) = E\psi(x). \quad (10)$$

Now we achieve the noncommutativity in phase by the mapping between the noncommutative kinetic momentum \hat{p} and the commutative one p , using Equation (5) to get the following full noncommutative phase-space Dirac equation

$$\begin{aligned} H(\hat{x}, \hat{p}) \star \psi(\hat{x}) &= \left[c\alpha_i \left(p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j - \frac{e}{c} A_i(x) \right) + eA_0(x) + \beta mc^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{ie}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left(\alpha_i (A_i(x)) - A_0(x) \partial_b \right) \right] \psi(x) \\ &= E\psi(x), \end{aligned} \quad (11)$$

rewrite the Equation (11) in a more compact form (see **Appendix A** for the simplification):

$$\begin{aligned} \hat{H} \star \psi_{(NC)} &= \left[c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + eA_0 + \beta mc^2 + \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] \psi_{(NC)} \\ &= E \psi_{(NC)}, \end{aligned} \tag{12}$$

where $\psi_{(NC)} = \exp \left[\frac{-i \left(E + \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} \right) t}{\hbar} \right] \begin{pmatrix} \phi(\hat{x}) \\ \chi(\hat{x}) \end{pmatrix}$ is the wave function in noncommutative phase-space.

3.2. Foldy-Wouthuysen Transformation in Noncommutative Phase-Space

Deriving the Schrödinger-Pauli equation in noncommutative phase-space, which is the nonrelativistic limit of the Dirac equation in a simple way using the Foldy-Wouthuysen transformation, this one achieved by a series of successive unitary transformations performed on the phase-space noncommutative Dirac hamiltonian in Equation (12), knowing that it is only applicable to weak fields.

The Dirac hamiltonian in PSNC is given by

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + eA_0 + \beta mc^2 + \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} + \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta}, \tag{13}$$

in order to perform the FW transformation, we have to rewrite the Dirac hamiltonian Equation (13) to the form:

$$\hat{H} = \hat{\theta} + \hat{\epsilon} + \beta mc^2, \tag{14}$$

where the Dirac hamiltonian is divided into block diagonal and off diagonal parts denoted even operator $\hat{\epsilon}$ and odd operator $\hat{\theta}$ respectively¹.

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &= eA_0 - \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \\ \hat{\theta} &= c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} + \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (\vec{\alpha} \vec{A}) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta}, \end{aligned} \tag{15}$$

these are defined to satisfy

$$\beta \hat{\theta} = -\hat{\theta} \beta \text{ and } \beta \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \beta. \tag{16}$$

Because of the presence of the odd operators (of $\vec{\alpha}$ matrices), the Dirac hamiltonian is not block diagonalized, so that we try to eliminate odd operators from the Dirac hamiltonian, by applying *FW* transformation

$$\begin{aligned} \psi'_{(NC)} &= e^{i\hat{s}} \psi_{(NC)} \\ \hat{H}' &= e^{i\hat{s}} \hat{H} e^{-i\hat{s}}, \end{aligned} \tag{17}$$

¹Odd operators (off diagonal in Pauli-Dirac basis): $\alpha_i, \gamma_i, \dots$ even operators (diagonal in Pauli-Dirac basis): $\beta, \Sigma, 1, \dots$ suffice at the 4rd order of \hat{s} .

with \hat{s} is Hermitian and it is of the form

$$\hat{s} = \frac{-i}{2mc^2} \beta \hat{\theta}. \tag{18}$$

Using the Maclaurin series expansion of $e^{i\hat{s}}$ defined as $e^{i\hat{s}} = 1 + \frac{i\hat{s}}{1!} + \frac{(i\hat{s})^2}{2!} + \dots$ in the Equation (17) yields a transformed Dirac hamiltonian (*Campbell-Baker-Hausdorff expansion*) [23] [24]

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \hat{H} + i[\hat{s}, \hat{H}]_- + \frac{i^2}{2!} [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_- + \frac{i^3}{3!} [\hat{s}, [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_-]_- + \dots \\ & + \frac{i^n}{n!} [\hat{s}, [\hat{s}, \dots [\hat{s}, \hat{H}]_- \dots]_-]_- + \dots \end{aligned} \tag{19}$$

Writing our hamiltonian, restricting ourselves to terms up to order $1/(mc^2)^3$, thus we suffice at the 4rd order of \hat{S} ,

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \hat{H} + i[\hat{s}, \hat{H}]_- - \frac{1}{2} [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_- - \frac{i}{6} [\hat{s}, [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_-]_- \\ & - \frac{1}{24} [\hat{s}, [\hat{s}, [\hat{s}, [\hat{s}, \beta mc^2]_-]_-]_-]_- + \dots \end{aligned} \tag{20}$$

Using the properties mentioned in Equation (16) and with Equation (14) and Equation (18), knowing that

$$\beta [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_- = -[\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_- \beta, \tag{21}$$

we calculate the various commutators of \hat{s} and \hat{H}

$$i[\hat{s}, \hat{H}]_- = -\hat{\theta} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_- \tag{22}$$

$$\frac{i^2}{2!} [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_- = -\frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{2m^2 c^4} \hat{\theta}^3 + \frac{1}{8m^2 c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_-]_-, \tag{23}$$

$$-\frac{i}{6} [\hat{s}, [\hat{s}, [\hat{s}, \hat{H}]_-]_-]_- = \frac{1}{6m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{6m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 + \frac{1}{48m^3 c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_-]_-]_-, \tag{24}$$

with the same manner we continue, with taking into account only terms of the order $1/(m_0 c^2)^3$, we get

$$-\frac{1}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\beta} mc^2]_-]_-]_-]_- \approx \frac{1}{24m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4, \tag{25}$$

by collecting the terms of \hat{H}' Equations ((22), (25)), we find

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \hat{H} - \hat{\theta} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_- - \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{2m^2 c^4} \hat{\theta}^3 \\ & - \frac{1}{8m^2 c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_-]_- + \frac{1}{6m^2 c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{6m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 \\ & - \frac{1}{48m^3 c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]_-]_-]_- + \frac{1}{24m^3 c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{\epsilon} + \hat{\beta} \left\{ mc^2 + \frac{1}{2mc^2} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\theta}^4 \right\} + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}] - \frac{1}{3m^2c^4} \hat{\theta}^3 \\
 &\quad - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]] - \frac{1}{48m^3c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]]], \tag{27}
 \end{aligned}$$

as it shown in the Equation (27) the new hamiltonian is not free of the odd operator, the odd part not omit, so By further FW transformation we reduce the odd part of the transformed hamiltonian, so we perform a second transformation, remembering that the product of two even or odd operators is an even operator.

To reduce the odd part of the transformed hamiltonian, thus we chose

$$\hat{s}' = \frac{-i}{2mc^2} \beta \hat{\theta}', \tag{28}$$

in where

$$\hat{H}' = \hat{H} + \hat{\theta}' + \hat{\epsilon}' + \hat{\beta} mc^2, \tag{29}$$

with

$$\hat{\theta}' = \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}] - \frac{1}{3m^2c^4} \hat{\theta}^3 - \frac{1}{48m^3c^6} \hat{\beta} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]]], \tag{30}$$

$$\hat{\epsilon}' = \hat{\epsilon} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}, [\hat{\theta}, \hat{\epsilon}]], \tag{31}$$

$$\hat{H}'' = e^{i\hat{s}'} \hat{H}' e^{-i\hat{s}'}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}'' &= \hat{H}' + i [\hat{s}', \hat{H}'] - \frac{1}{2} [\hat{s}', [\hat{s}', \hat{H}']] - \frac{i}{6} [\hat{s}', [\hat{s}', [\hat{s}', \hat{H}']]] \\
 &\quad - \frac{1}{24} [\hat{s}', [\hat{s}', [\hat{s}', [\hat{s}', \beta mc^2]]]] + \dots \tag{33}
 \end{aligned}$$

We restrict ourselves to terms up to order $1/(mc^2)^3$, as in the first FW transformation (knowing that $\hat{\theta}' \sim \frac{1}{mc^2}$), so that the new hamiltonian is

$$\hat{H}'' = \hat{\beta} mc^2 + \hat{\epsilon}' + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}', \hat{\epsilon}'] + \frac{1}{2mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}'^2 - \frac{1}{2m^2c^4} \hat{\theta}'^3 - \frac{1}{8m^2c^4} [\hat{\theta}', [\hat{\theta}', \hat{\epsilon}']]. \tag{34}$$

The terms proportional to $\hat{\theta}'^3$ and $\hat{\theta}'^2$ contain large powers of $1/mc^2$, therefore they can be neglected, more precisely we take into account only terms of order that we restrict ourselves in the expansion, and thus Equation (34) is given by

$$\hat{H}'' \approx \hat{\beta} mc^2 + \hat{\epsilon}' + \frac{\hat{\beta}}{2mc^2} [\hat{\theta}', \hat{\epsilon}'] = \hat{\beta} mc^2 + \hat{\epsilon}' + \hat{\theta}'', \tag{35}$$

\hat{H}'' is not yet free of the odd operators, we apply a third FW transformation to eliminate $\hat{\theta}''$,

$$\hat{H}''' = e^{i\hat{s}''} \hat{H}'' e^{-i\hat{s}''}, \tag{36}$$

with

$$\hat{s}'' = \frac{-i}{2mc^2} \beta \hat{\theta}'', \tag{37}$$

so that

$$\hat{H}^m = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon}' = \hat{\beta}mc^2 + \hat{\epsilon} + \frac{1}{mc^2} \hat{\beta} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{8m^3c^6} \hat{\beta} \hat{\theta}^4 - \frac{1}{8m^2c^4} \left[\hat{\theta}, \left[\hat{\theta}, \hat{\epsilon} \right] \right]_- \quad (38)$$

Finally the transformed hamiltonian is completely free of odd operators, next we calculate the various terms of the Equation (38), according to Equation (15), we make use of the following known relations for three arbitrary vectors \vec{A} , \vec{B} and \vec{C} :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}, \quad (39)$$

the Equation (15) becomes

$$\hat{\theta} = c\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \left((\vec{x} \times \vec{\eta}) + \frac{e}{c} \vec{\nabla} \vec{A} (\vec{p} \times \vec{\Theta}) \right) = c\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, \quad (40)$$

with

$$\bar{\Omega} = \vec{x} \times \vec{\eta} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} \vec{A} (\vec{p} \times \vec{\Theta}), \quad (41)$$

yields

$$\hat{\theta}^2 = c^2 \left(\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right)^2 + \frac{2c}{\hbar} \bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \bar{\alpha} \bar{\Omega} + \frac{c^2}{\hbar^2} (\bar{\alpha} \bar{\Omega})^2, \quad (42)$$

using the following relation²

$$(\bar{\alpha} \vec{A})(\bar{\alpha} \vec{B}) = \bar{A} \bar{B} + i \bar{\Sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (43)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^2 = c^2 & \left(\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right)^2 + \frac{2c}{\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \bar{\Omega} + \frac{c^2}{\hbar^2} \bar{\Omega}^2 \\ & + ic^2 \bar{\Sigma} \cdot \left[\frac{i\hbar e}{c} \vec{B} + \frac{2}{\hbar} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \bar{\Omega} + \frac{1}{\hbar} \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \right], \end{aligned} \quad (44)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{8m^2c^4} \left[\hat{\theta}, \hat{\epsilon} \right]_- &= -\frac{i\hbar}{8m^2c^4} c\bar{\alpha} \vec{\nabla} A_0 \\ &+ \frac{1}{8m^2c^4} \left\{ \left[\frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta}, c\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega} \right] + \left[\frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, eA_0 \right]_- \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

for $A_0 = V$ we have $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$ and using Equation (45) we have

$$\begin{aligned} \left[\hat{\theta}, \left[\hat{\theta}, \hat{\epsilon} \right]_- \right]_- &= \frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \vec{\nabla} \vec{E} + \frac{ie\hbar^2c^2}{8m^2c^4} \bar{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ &+ \frac{e\hbar}{4m^2c^4} \bar{\Sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{p} + \left[\frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, \frac{i\hbar}{8m^2c^4} c\bar{\alpha} \vec{E} \right] \\ &+ \left[\hat{\theta}, \frac{1}{8m^2c^4} \left\{ \left[c\bar{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] + \left[\frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, eA_0 \right]_- \right\} \right]_- \end{aligned} \quad (46)$$

² $\alpha^i \alpha^j = \alpha^i \beta^2 \alpha^j = -\beta \alpha^i \beta \alpha^j = \gamma^i \gamma^j = -\frac{1}{2} (\{ \gamma^i, \gamma^j \} + [\gamma^i, \gamma^j]) = -g^{ij} + i\epsilon^{ijk} \Sigma^k = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \Sigma^k$

using Equation (43) we simplify Equation (46) (see **Appendix B**), to have

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{\theta}, \left[\hat{\theta}, \hat{\epsilon} \right]_- \right]_- &= \frac{e\hbar^2 c^2}{8m^2 c^4} \bar{\nabla} \bar{E} + \frac{ie\hbar^2 c^2}{8m^2 c^4} \bar{\Sigma} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{e\hbar}{4m^2 c^4} \bar{\Sigma} \cdot \bar{E} \times \bar{p} \\
 &+ \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \left(\left[\bar{\Omega}, \bar{E} \right]_- + 2i\bar{\Sigma}(\bar{\Omega} \times \bar{E}) \right) + \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), \right. \\
 &\left. \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- - c \left[\bar{\Omega}, V \right]_- \right] \\
 &+ \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} i\bar{\Sigma} \left\{ -2(\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \cdot \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right. \\
 &\times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) + 2c \left[\bar{\Omega}, V \right]_- \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 &\left. + \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- \right\}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Adding the various contributions Equations ((44), (47)), in Equation (38), with assuming $\frac{1}{8m^3 c^6} \hat{\theta}^4 \sim \frac{1}{8m^3 c^6} \bar{p}^4$, and For $\psi_{FW} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ the Schrödinger-Pauli equation is

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= \left\{ \hat{\beta} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 - \frac{1}{8m^3 c^6} \bar{p}^4 + \frac{1}{m\hbar} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) \bar{\Omega} + \frac{1}{2m\hbar^2} \bar{\Omega}^2 \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{i}{2m} \bar{\Sigma} \left(\frac{2}{\hbar} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) \times \bar{\Omega} + \frac{1}{\hbar^2} \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \right) \right) + eV - \frac{e\hbar}{2mc} \hat{\beta} \bar{\Sigma} \bar{B} - \frac{ie\hbar^2 c^2}{8m^2 c^4} \bar{\Sigma} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{E} \\
 &- \frac{e\hbar}{4m^2 c^4} \bar{\Sigma} \cdot \bar{E} \times \bar{p} + \frac{e}{\hbar} (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} - \frac{e\hbar^2 c^2}{8m^2 c^4} \bar{\nabla} \bar{E} - \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \left(\left[\bar{\Omega}, \bar{E} \right]_- + 2i\bar{\Sigma}(\bar{\Omega} \times \bar{E}) \right) \\
 &- \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} \left\{ \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- \right. \\
 &+ 2c \left[\bar{\Omega}, V \right]_- \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) - 2(\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 &\left. \left. \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right\} \right\}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

The reason of the explicit noncommutative terms entangled in the obtained Schrödinger-Pauli Equation (48), (in FW representation) is that the effect of the noncommutativity in the Dirac equation appears as a kind of potential which depends on noncommutativity parameters (η , and Θ), then after applying the nonrelativistic limit that potential is the responsible on generating a new terms and a modified known terms, which contain the noncommutative parameters (reduced in $\bar{\Omega}$), in Equation (48), where terms in the first parenthesis describe the NC nonrelativistic kinetic energy, and its first NC nonrelativistic correction (at least to the order of approximation we have considered), this is manifested as a terms contain phase-space NC parameters added to the known terms, then

successive two terms describe the electrostatic energy and the magnetic dipole energy, thereafter $-\frac{e\hbar}{4m^2c^4}\vec{\Sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{p}+\frac{e}{\hbar}(\vec{E}\times\vec{p})\cdot\vec{\Theta}$, represents the Θ -modified spin-orbit interaction term, in a spherically symmetric potential, with

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0, \vec{E}=-\vec{\nabla}V(r)=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}, \text{ and } \vec{r}\times\vec{p}=\vec{L},$$

$$\Theta\text{-modified spin-orbit term}=\frac{e\hbar}{4m^2c^4}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{\Sigma}\cdot\vec{L}-\frac{e}{\hbar}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{L}\cdot\vec{\Theta}. \quad (49)$$

Next term in Equation (48), $-\frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4}\vec{\nabla}\vec{E}-\frac{ic^2}{8m^2c^4}([\vec{\Omega},\vec{E}]_+ + 2i\vec{\Sigma}(\vec{\Omega}\times\vec{E}))$, represents the $\Theta\eta$ -modified Darwin term (attributed to the Zitterbewegung [25] [26] [27]), with $\vec{E}=-\vec{\nabla}V(r)$ and $\vec{A}=0$, $\vec{\Omega}=\vec{x}\times\vec{\eta}$,

$$\begin{aligned} &\Theta\eta\text{-modified Darwin term} \\ &= -\frac{e\hbar^2c^2}{8m^2c^4}\vec{\nabla}V - \frac{ic^2}{8m^2c^4}([\vec{x}\times\vec{\eta},\vec{\nabla}V]_+ + 2i\vec{\Sigma}(\vec{x}\times\vec{\eta}\times\vec{\nabla}V)). \end{aligned} \quad (50)$$

The other terms in the Equation (48) represent the NC Schrödinger-Pauli equation corrections.

Essentially the intriguing part of our result is the fact that noncommutative effects grant a $\Theta\eta$ -modified terms entangled in the obtained NC Schrödinger-Pauli equation.

Under the condition that space-space and momentum-momentum are all commutative (namely, $\eta=0$, $\Theta=0$) the results return to that of usual quantum mechanics.

4. Conclusions

In conclusion, the phase-space noncommutativity effect is introduced in the Dirac equation and subsequently the Foldy-Wouthuysen transformation is exploited to reduce the system in presence of electromagnetic field to a nonrelativistic regime, which gives the Schrödinger-Pauli equation.

Knowing that the phase-space noncommutativity effect is introduced by applying both of the Bopp-shift linear translation method, and the Moyal-Weyl product.

The usage of the FW representation in most cases allows one to reduce the problem of finding a classical limit of relativistic quantum mechanical equations to the replacement of operators in the hamiltonian of the quantum mechanical equations of motion by the respective classical quantities, even with noncommutativity in phase and space, and the effects of the latter are manifested in the various terms of the obtained hamiltonian.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

- [1] Foldy, L.L. and Wouthuysen, S.A. (1950) *Physical Review*, **78**, 29.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.29>
- [2] Greiner, W. (2000) *Quantum Mechanics an Introduction*, 4th Edition, Vol. I, Springer, Berlin.
- [3] Greiner, W. (1994) *Quantum Mechanics*. 3rd Edition, Springer, Berlin, Heidelberg.
- [4] Davydov, A.S. (1965) *Quantum Mechanics*. 2nd Edition, Pergamon, Oxford.
- [5] Messiah, A. (1968) *Quantum Mechanics*, Vol. II. Wiley, New York.
- [6] Costello, J.P. and McKellar, B.H.J. (1995) *American Journal of Physics*, **63**, 1119-1121. <https://doi.org/10.1119/1.18017>
- [7] Silenko, A.J. (2003) *Journal of Mathematical Physics*, **44**, 2952.
<https://doi.org/10.1063/1.1579991>
- [8] Silenko, A.J. (2008) *Physical Review A*, **77**, Article ID: 012116.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.012116>
- [9] Nikitin, A.G. (1998) *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **31**, 3297-3300.
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/14/015>
- [10] Delduc, F., Duret, Q., Gieres, F. and Lefrancois, M. (2008) *Journal of Physics Conference Series*, **103**, Article ID: 012020.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/103/1/012020>
- [11] Douglas, M.R. and Nekrasov, N.A. (2001) *Reviews of Modern Physics*, **73**, 977-1029. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.977>
- [12] Connes, A., Douglas, M.R. and Schwarz, A. (1998) *JHEP*, **9802**, 003.
<https://doi.org/10.1088/1126-6708/1998/02/003>
- [13] Seiberg, N. and Witten, E. (1999) *JHEP*, **9909**, 032.
<https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032>
- [14] Chaichian, M., Demichev, A. and Presnajder, P. (2000) *Nuclear Physics B*, **567**, 360.
[https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00664-1](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00664-1)
- [15] Mirza, B. and Mohadesi, M. (2014) *Communications in Theoretical Physics*, **42**, 664-668. <http://iopscience.iop.org/0253-6102/42/5/664>
- [16] Bastos, C., Bertolami, O., Dias, N.C. and Prata, J.N. (2008) *Journal of Mathematical Physics*, **49**, Article ID: 072101. <https://doi.org/10.1063/1.2944996>
- [17] Eftekharzadeh, A. and Hu, B.L. (2005) *Brazilian Journal of Physics*, **35**, 333-342.
<https://doi.org/10.1590/S0103-97332005000200019>
- [18] Li, K., Wang, J. and Chen, C. (2005) *Modern Physics Letters A*, **20**, 2165-2174.
<https://doi.org/10.1142/S0217732305017421>
- [19] Jiang, X., Long, C. and Qin, S. (2013) *Journal of Modern Physics*, **4**, 940-944.
<https://www.doi.org/10.4236/jmp.2013.47126>
- [20] Hassanabadi, H., Molaee, Z. and Zarrinkamar, S. (2014) *Advances in High Energy Physics*, **2014**, Article ID: 459345. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/459345>
- [21] Adorno, T.C., Baldiotti, M.C., Chaichian, M., Gitman, D.M. and Tureanu, A. (2009) *Physics Letters B*, **682**, 235-239. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.11.003>
- [22] Bertolami, O. and Queiroz, R. (2011) *Physics Letters A*, **375**, 4116-4119.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.09.053>
- [23] Schwabl, F. (1995) *Quantum Mechanics*. Springer, Berlin.
- [24] Kurlin, V. (2007) *Journal of Lie Theory*, **17**, 525-538. arXiv:math/0606330.

- [25] Hestenes, D. (1990) *Foundations of Physics*, **20**, 1213-1232.
<https://doi.org/10.1007/BF01889466>
- [26] Huang, K. (1952) *American Journal of Physics*, **20**, 479.
<https://doi.org/10.1119/1.1933296>
- [27] Barut, A.O. and Bracken, A.J. (1981) *Physical Review D*, **23**, 2454.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.2454>

Appendix A: Moving from Equation (11) to Equation (12)

The simplification to move from Equation (11) to Equation (12):

Using $\eta_{ij} = \eta\epsilon_{ij}$ and $\eta_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\eta_{ij}$, we find:

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{c}{2\hbar} \eta_{ij} X_j &= \frac{c}{2\hbar} (2\eta_k \epsilon_{kij}^{-1}) \alpha_i X_j \\ &= \frac{c}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} \alpha_i X_j, \end{aligned} \tag{51}$$

where $\epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}$, knowing that $(U \times V)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} U_\nu V_\lambda$,

$$\begin{aligned} \frac{c}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} \alpha_i X_j &= \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{X})_k \eta_k \\ &= \frac{c}{\hbar} (\vec{\alpha} \times \vec{X}) \cdot \vec{\eta}, \end{aligned} \tag{52}$$

with the same manner we prove that

$$\begin{aligned} &-ie\Theta_k \epsilon_{abk} \partial_a (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \partial_b \\ &= -ie \frac{\hbar}{\hbar} \Theta_k \epsilon_{abk} \partial_a (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \partial_b \\ &= \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\alpha} \vec{A} - A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta}. \end{aligned} \tag{53}$$

Appendix B: The Elimination of $\vec{\alpha}$ from the Two Last Terms in Equation (46)

Using The Equation (43) we find

$$\begin{aligned} \left[\frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} \right] &= \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} - \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} c \vec{\alpha} \vec{E} \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \\ &= \frac{c^2}{\hbar} \frac{i\hbar}{8m^2 c^4} \{ \vec{\alpha} \vec{\Omega} \vec{\alpha} \vec{E} - \vec{\alpha} \vec{E} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \} \\ &= \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \{ \vec{\Omega} \vec{E} + i\vec{\Sigma} (\vec{\Omega} \times \vec{E}) - \vec{E} \vec{\Omega} - i\vec{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{\Omega}) \} \\ &= \frac{ic^2}{8m^2 c^4} \{ [\vec{\Omega}, \vec{E}] + i2\vec{\Sigma} (\vec{\Omega} \times \vec{E}) \}. \end{aligned} \tag{54}$$

And for the second term

$$\begin{aligned} &\left[c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, \frac{-1}{8m^2 c^4} \left[\left(c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \right), \frac{e}{\hbar} (-\vec{E} \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8m^2 c^4} \left[\frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, eV \right] \right] \\ &= \left[c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, \frac{-1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\vec{\alpha} [\vec{\Omega}, V] \right] \\ &\quad + \left[c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega}, \frac{-1}{8m^2 c^4} \left[\left(c\vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{\Omega} \right), \frac{e}{\hbar} (\vec{\nabla} (A_0) \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] \right], \end{aligned} \tag{55}$$

we start with the 1st term of the above Equation (55)

$$\begin{aligned}
 & \left[c\bar{\alpha} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, \frac{-1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\bar{\alpha} [\bar{\Omega}, V]_- \right] \\
 &= -\bar{\alpha} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left(\frac{1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\bar{\alpha} [\bar{\Omega}, V]_- \right) \\
 & \quad + \left(\frac{1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\bar{\alpha} [\bar{\Omega}, V]_- \right) \bar{\alpha} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 &= \left[\frac{1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\bar{\alpha} [\bar{\Omega}, V]_-, \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right] \\
 & \quad + 2i \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{c}{\hbar} e\bar{\Sigma} ([\bar{\Omega}, V]_-) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right),
 \end{aligned} \tag{56}$$

using Equation (39), we continue with the 2nd term,

$$\begin{aligned}
 & \left[c\bar{\alpha} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega}, \frac{1}{8m^2 c^4} \left[\left(c\bar{\alpha} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\alpha} \bar{\Omega} \right), \frac{e}{\hbar} (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- \right] \\
 &= \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right. \right. \\
 & \quad - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left. \right\} - \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right. \\
 & \quad \left. - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right\} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left. \right\} \\
 & \quad + \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} i\bar{\Sigma} \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right. \\
 & \quad - \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 & \quad - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 & \quad \left. - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- \right\} \\
 & \quad - \left\{ \left[\left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right), (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right]_- \right\} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \left. \right\} \\
 & \quad + \frac{1}{8m^2 c^4} \frac{e}{\hbar} i\bar{\Sigma} \left\{ \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \right. \\
 & \quad - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 & \quad - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \\
 & \quad \left. - (\bar{E} \times \bar{p}) \cdot \bar{\Theta} \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \times \left(c \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \bar{\Omega} \right) \right\},
 \end{aligned} \tag{57}$$

finally we find

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8m^2c^4} \frac{e}{\hbar} \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right), \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right), (\vec{E} \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] \right] \\
 & + \frac{1}{8m^2c^4} \frac{e}{\hbar} i \vec{\Sigma} \left\{ \left[\left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right), (\vec{E} \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \right] \right\}, \quad (58) \\
 & - 2(\vec{E} \times \vec{p}) \cdot \vec{\Theta} \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \times \left(c \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \frac{c}{\hbar} \vec{\Omega} \right) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Article

The Non-Relativistic Limit of the DKP Equation in Non-Commutative Phase-Space

Ilyas Haouam 

Laboratoire de Physique Mathématique et de Physique Subatomique (LPMPS), Université Frères Mentouri, Constantine 25000, Algeria; ilyashaouam@live.fr

Received: 11 December 2018; Accepted: 31 January 2019; Published: 14 February 2019



Abstract: The non-relativistic limit of the relativistic DKP equation for both of zero and unity spin particles is studied through the canonical transformation known as the Foldy–Wouthuysen transformation, similar to that of the case of the Dirac equation for spin-1/2 particles. By considering only the non-commutativity in phases with a non-interacting fields case leads to the non-commutative Schrödinger equation; thereafter, considering the non-commutativity in phase and space with an external electromagnetic field thus leads to extract a phase-space non-commutative Schrödinger–Pauli equation; there, we examined the effect of the non-commutativity in phase-space on the non-relativistic limit of the DKP equation. However, with both Bopp–Shift linear transformation through the Heisenberg-like commutation relations, and the Moyal–Weyl product, we introduced the non-commutativity in phase and space.

Keywords: DKP equation; noncommutative DKP equation; Schrödinger equation; noncommutative SchrödingerPauli equation; phase-space noncommutativity; Foldy-Wouthuysen transformation; non-relativistic limit

1. Introduction

Lately, it has been very interesting to investigate the theoretical basis of the modern physics to explain the nature and the behavior of the matter and energy on the subatomic scale, sometimes referred to as quantum theories, such as the quantum gravity [1,2] or quantum general relativity (QGR) [3], quantum optics and information, the standard model and the gauge theories [4]. This investigation sometimes can be represented in terms of the low-energy regime through the examination of the non-relativistic properties in miscellaneous interactions such as the external electromagnetic fields (EMF), Dirac or DKP oscillator interaction [5,6], Lennard–Jones potential, Coulomb potential, square and step potential; the non-relativistic limit is about low speeds in front of the speed of the light, in more detail, it is for the regime of weak-energy in front of the mass-energy $\frac{pc}{mc^2} \ll 1$ [7], where the non-relativistic limit can be realized through numerous methods, among them the Foldy–Wouthuysen (FW) transformation [8], and Eriksen’s method [9] proposed in 1958. Based on the methodical derivation of the unitary transformation that makes the Hamiltonian a diagonal operator, it can be also used when an electromagnetic field is present. There is also the Cayley transformation, and the Cini–Touschek transformation, and the method of development in power of \hbar [10] and the Douglas–Kroll–Hess (DKH) approach [11,12], which was used mostly as part of relativistic quantum chemistry, and it depends on separating (block–diagonalize) relativistic Hamiltonians into two parts. One part describes electrons in the case of Dirac Hamiltonian, for example, while the other gives rise to the negative energy states. The non-relativistic limit of the relativistic equations was essentially investigated by converting the Hamiltonian from an odd form to an even form.

In this work, we investigated the non-relativistic limit of the DKP equation according to the Foldy–Wouthuysen transformation which occupies an extraordinary position in quantum physics

because of its unprecedented properties that drive us to obtain totally block-diagonalized operators (even Hamiltonians), keeping the properties of the operators in the FW representation like those of the classical representation. The fantastic benefit of the FW representation is the manageable form of operators and quantities; with these advantages, the FW representation gives the best chance to obtain a significant non-relativistic limit of the relativistic quantum mechanics. The transition to the non-relativistic limit generally is due to a replacement of the operators in our quantum-mechanical systems to its corresponding classical quantities. This implicit or explicit replacement used in all calculations was devoted to the Foldy–Wouthuysen transformation. Take into consideration that the Foldy–Wouthuysen transformation takes the original Hamiltonian to an even form in the case of presence (or absence) of the electromagnetic field, and the diagonalization of a Hamiltonian does not perform drive to the FW representation.

The Duffin–Kemmer–Petiau (DKP) equation introduced by R.J. Duffin, Nicholas Kemmer, and G. Petiau and it is a 1st-order relativistic wave equation provide a relativistic description of spin-0 and spin-1 particles in a single relativistic equation, the DKP equation has been considered in connection with various aspects including the nucleus elastic scattering, the Aharonov–Bohm (AB) effect [13], in cosmic string background, with meson–nuclear interaction, quantum chromodynamics (QCD), five-dimensional Galilean invariance [14]. From the corresponding DKP equation, we can derive the DKP oscillator and investigate the energy eigenvalues (spectrum), eigenfunctions, the influence of the topological defect on the equation of motion.

More precisely, in this work, we investigated the non-relativistic limit of the DKP equation using the FW transformation in a non-commutative phase space (NCPS). This study was presented and considered for the importance and benefits of non-commutative geometry (NCG) in both quantum mechanics and quantum fields, where the idea behind the non-commutativity in spacetime is highly motivated by quantum mechanics (QM) and the origin of the non-commutative geometry pertaining to the research of topological spaces (when commutative C^* -algebras of functions are replaced by non-commutative algebras). The concept of NCG was rekindled by Connes and others [15–18], who theorized the idea of a differential structure in the non-commutative setting. The non-commutative theory replaces the noncommutativity of the operators related to the space-time coordinates by a deformation of the algebra of the functions defined on the space-time. On the other hand, a non-commutative version of a field theory is obtained by replacing ordinary theory to a non-commutative one by replacing ordinary fields with non-commutative fields and ordinary products with Moyal–Weyl products. Precisely, Nathan Seiberg and Edward Witten in the past few years released their famous article [19], which was from the most cited article according to Spire (Stanford Physics Information Retrieval System), it prompted and encouraged a wide amount of interest in NCG, which became mainstream for a couple years. Taking into consideration that the notions of non-commutativity in phase space based principally on the Seiberg–Witten map, the star product, and the Bopp–Shift linear transformation.

Throughout this article, the fundamental properties of the DKP Hamiltonian in the Foldy–Wouthuysen representation in the non-commutative phase-space are studied and the Schrödinger and the Schrödinger–Pauli equations [20,21] are found. Knowing that the former extracted in case of only considering the noncommutativity in phase with the absence of the electromagnetic field, and the latter extracted in the case of presence of the external electromagnetic field and the non-commutativity considered in phase and in the space. Taking into account that we obtained the phase-space non-commutative DKP equation using both Bopp–Shift linear transformation through the Heisenberg-like commutation relations, and the Gronewold–Moyal product (\star -product).

2. Review of the Non-Commutative Geometry

Firstly, let us review the basic formulas of the NC algebra. At string scales, space does not commute as shown in the theory of NCG, so that we admit the operators of coordinates and

kinetic momentum in the (2+1)d non-commutative phase-space x_i^{nc} and p_i^{nc} , respectively, and the Heisenberg-like non-commutative commutation relations [22] appear as follows:

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\Theta_{ij}, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\eta_{ij}, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff} \delta_{ij}, (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

the effective Plank constant can be written as

$$\hbar^{eff} = \hbar \left(1 + \frac{\Theta\eta}{4\hbar^2}\right), \quad (2)$$

with

$$\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\Theta_k, \Theta_k = (0, 0, \Theta), \eta_{ij} = \epsilon_{ijk}\eta_k, \eta_k = (0, 0, \eta). \quad (3)$$

Θ_{ij} and η_{ij} are antisymmetric constant tensors, Θ , η are real-valued non-commutativity parameters, they are supposed to be very small, with the dimension of *length*², *momentum*², respectively.

For some investigations about non-commutative systems concerning the NC parameters, the experimental limit of about 100 nHz on possible sidereal variations (the highest energy variations supported by the experiment) gives estimated limits at about $\Theta \simeq 4.10^{-40}$ m², $\eta \simeq 1.76 \times 10^{-61}$ Kg²m²s⁻², and $\hbar^{eff} \simeq 10^{-67}$ (SI) [23]. These values agree with the higher limits on the basic scales of coordinate and momentum, and these bounds will be suppressed if the magnetic field used in the experiment is weak ($B \simeq 5$ mG).

In the (2+1)d commutative phase-space, the canonical variables x_i and p_i satisfy the following commutative algebra

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}(i, j = 1, 2). \quad (4)$$

The non-commutative geometry Equation (1) in turn is described at the level of fields and functions, by the Gronewold–Moyal product (\star -product) [24–26] defined as

$$\begin{aligned} (f \star g)(x, p) &= \exp\left[\frac{i}{2}\Theta_{ab}\partial_{x_a}\partial_{x_b} + \frac{i}{2}\eta_{ab}\partial_{p_a}\partial_{p_b}\right]f(x_a, p_a)g(x_b, p_b) = f(x, p)g(x, p) \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{a_1b_1} \dots \Theta^{a_nb_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x, p) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x, p) \\ &+ \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \eta^{a_1b_1} \dots \eta^{a_nb_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_n} f(x, p) \partial_{b_1} \dots \partial_{b_n} g(x, p). \end{aligned} \quad (5)$$

Because of the nature of the \star -product, the non-commutative field theories for the slowly varying fields or low energies ($\Theta E^2 < 1$) completely reduce to their commutative version.

The NCPS operators are linked to the commutative operators through the Heisenberg–Weyl algebra in terms of the aka Bopp-shift translation which was introduced from Equation (5) [27,28], and it is given by

$$x_i^{nc} = x_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}p_j, \quad p_i^{nc} = p_i + \frac{1}{2\hbar}\eta_{ij}x_j. \quad (6)$$

When also $\Theta = \eta = 0$, the NCPS algebra reduces to the commutative algebra.

3. Schrödinger Equation from the DKP Equation in the Non-Commutative Phase

The DKP equation (Kemmer equation) is a 1st-order relativistic wave equation provides a relativistic description of a free boson with nonzero mass m , and it is given by [29–31]

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (7)$$

where $\hbar = c = 1$ (natural units), and ψ is the boson wave function, and $\beta^\mu = (\beta^0, \vec{\beta})$ are the DKP square matrices being used to define the so-called DKP algebra which satisfy the following algebraic relation

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\nu\lambda}\beta^\mu, \quad (8)$$

the following relations can be implied

$$\begin{aligned}\beta_0\beta_k\beta_0 &= 0, k = 1, 2, 3, \\ \beta_0^3 &= \beta_0, \\ \beta_\mu a^\mu \beta_\nu \beta_\lambda a^\lambda &= \beta_\mu a^\mu a_\nu, \\ (\vec{\beta} \vec{a})\beta_0(\vec{\beta} \vec{a}) &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

where the Greek letters μ, ν, λ being 0, 1, 2, 3 and $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ being the metric tensor in Minkowski space-time, and repeated indices are automatically summed over, is employed. For example, $a_\mu b^\mu = a_0 b^0 - \vec{a} \vec{b}$, and Equation (8) has three irreducible representations: a 10d representation provides a description of spin-1 bosons, a 5d representation provides a description of spin-0 bosons (spinless particles), and a 1d representation which is a trivial representation.

In a small part of this paper (subsection III-A), we use the representation of order 5 which represents the particles with 0-spin. Therefore, β^μ are 5×5 matrices defined as:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Then, the stationary state ψ is a vector with a 5-component wave function, and it can be given by

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (11)$$

For spin-1 bosons, β^μ are 10×10 matrices, and the state ψ is a vector with a 10-component wave function, which can be given as

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T. \quad (12)$$

The Kemmer equation for spin-0 is almost related to the Klein–Gordon equation [32], and for spin-1 is associated with the Proca equations [33].

We have

$$\partial_\mu \psi = \beta_\mu \partial^\nu \beta_\nu \psi, \quad (13)$$

multiplying Equation (7) by β_0 and getting the zero component of Equation (13), we can denote

$$H_0(\vec{P}, \vec{x}) = \vec{\alpha} \vec{P} + \beta_0 m, \quad (14)$$

with

$$\alpha_k = \beta_0 \beta_k - \beta_k \beta_0. \quad (15)$$

Equation (7) can be also written in the form

$$\left(\vec{\beta} \vec{P} + m \right) = i\beta_0 \frac{\partial}{\partial t} \psi. \quad (16)$$

Substituting Equation (6) into Equation (14), the DKP Hamiltonian in a non-commutative phase becomes

$$H_0^{nc}(\vec{P}, \vec{x}) = \alpha^i (P^i + \frac{1}{2} \eta^{ij} x^j) + \beta_0 m, \quad (17)$$

with $\eta^{ij} = 2\eta^k e^{kij}$, and according to the definition of the vectorial product $(A \times B)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu \cdot B_\lambda$, we shall denote the DKP Hamiltonian in a non-commutative phase by

$$H_0^{nc}(\vec{P}, \vec{x}) = \vec{\alpha} \vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m. \quad (18)$$

The non-commutative phase parameter forms a tetrahedron with the position \vec{x} and the DKP vector $\vec{\beta}$.

The Foldy–Wouthuysen Transformation for a Free Boson in a Non-Commutative Phase

The Foldy–Wouthuysen transformation eliminates the odd part entirely from the wave equation Hamiltonian, and reduces it to an even part (diagonal form). The unitary FW transformation is presented by the following transformations:

$$\psi_{FW} = U_{FW} \psi = e^{iS} \psi, \quad (19)$$

with U_{FW} being a unitary operator, and S being the time-independent Hermitian operator

$$S = -i \frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \theta, \quad (20)$$

where θ is a function, taking into account that $\tan(2|\vec{P}|\theta) = \frac{|\vec{P}|}{m}$. The transformed Hamiltonian should contain no odd operators

$$\tilde{H}_0^{nc} = U_{FW} H_0^{nc} U_{FW}^\dagger, \quad (21)$$

by applying the transformation (21) to Equation (18), knowing that S is the non-explicitly time-dependent operator,

$$\tilde{H}_0^{nc} = e^{\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \theta} \left(\vec{\alpha} \vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m \right) e^{-\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \theta}, \quad (22)$$

as $U_{FW} U_{FW}^\dagger = 1$. In this case, Equation (22) is written as

$$\tilde{H}_0^{nc} = e^{2 \frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \theta} \left(\vec{\alpha} \vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + \beta_0 m \right), \quad (23)$$

knowing that, from Equation (8),

$$\left(\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = \sum_{i,j,k} P_i P_j P_k \frac{(\beta_i \beta_j \beta_k + \beta_k \beta_j \beta_i)}{2}, \quad (24)$$

$$2 \left(\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = - \sum_{i,j,k} P_i P_j P_k (\beta_i \delta_{ij} + \beta_k \delta_{ji}), \quad (25)$$

so that

$$\left(\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^3 = -|\vec{P}|^2 \left(\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \right), \quad (26)$$

noting that

$$\left(\frac{\vec{\beta} \vec{P}}{|\vec{P}|} \right)^2 = i^2, \quad (27)$$

where the unitary operator is

$$e^{\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \theta} = \cos(|\vec{P}| \theta) + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \sin(|\vec{P}| \theta), \quad (28)$$

Equation (23) becomes

$$\tilde{H}_0^{nc} = \left(\cos(2|\vec{P}| \theta) + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \sin(2|\vec{P}| \theta) \right) \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} + \beta_0 m \right), \quad (29)$$

using the property $(\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} = -(\vec{x} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{\eta} = (\vec{x} \times \vec{\eta}) \cdot \vec{\alpha}$ (mixed product property). Then, Equation (29) changes to

$$\tilde{H}_0^{nc} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{P} + \vec{x} \times \vec{\eta}) (\cos(2|\vec{P}| \theta) - \frac{m}{|\vec{P}|} \sin(2|\vec{P}| \theta)) + \beta_0 (m \cos(2|\vec{P}| \theta) + |\vec{P}| \sin(2|\vec{P}| \theta)). \quad (30)$$

In order to eliminate the odd part, we chose

$$\sin(2|\vec{P}| \theta) = \frac{|\vec{P}|}{E}, \quad \cos(2|\vec{P}| \theta) = \frac{m}{E}, \quad (31)$$

one arrives at

$$\tilde{H}_0^{nc} = \frac{\beta_0}{E} (\vec{P}^2 + m^2). \quad (32)$$

Last but not least, this satisfies the Schrödinger equation, and Equation (32) is similar to the case of commutative phase and space, so that we find that the effect of the non-commutativity in phase on the non-relativistic limit of the DKP Hamiltonian vanished, due to the fact that the non-commutativity parameter entangled explicitly into the non-diagonal part of the non-commutative Hamiltonian. In another way, the non-commutativity in phase affects the odd part of the DKP Hamiltonian. This is for the case of no interaction with potentials.

For the transformed wave function, we merely take the case of the spin-0 representation. We choose the wave function

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-iEt}. \quad (33)$$

From Equation (16), we rewrite the DKP equation in (2+1)d as follows:

$$\left(\beta^1 P_x^{nc} + \beta^2 P_y^{nc} + m \right) \psi = \beta_0 E \psi, \quad (34)$$

Substituting ψ into Equation (34) gives us

$$-m\psi_1 + E\psi_2 + P_x^{nc}\psi_3 + P_y^{nc}\psi_4 = 0, \quad (35)$$

$$E\psi_1 - m\psi_2 = 0, \quad P_y^{nc}\psi_1 + m\psi_4 = 0, \quad P_x^{nc}\psi_1 + m\psi_3 = 0, \quad m\psi_5 = 0. \quad (36)$$

It is clear that the five components $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)$ are not independent from each other. With $(\psi_2 = \frac{E}{m}\psi_1, \psi_3 = \frac{-P_x^{nc}}{m}\psi_1, \psi_4 = \frac{-P_y^{nc}}{m}\psi_1)$, and combining the above equations, we get the dynamical equation of component ψ_1

$$\left(-m^2 + E^2 - (P_x^{nc})^2 - (P_y^{nc})^2 \right) \psi_1 = 0. \quad (37)$$

This leads us to

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \left(\vec{P}^{nc}\right)^2}, \quad (38)$$

where see the Appendix A

$$\left(\vec{P}^{nc}\right)^2 = \vec{P}^2 - 2\vec{L}\overset{\rightarrow}{\eta} + 0\left(\eta^2\right). \quad (39)$$

Then, we find

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\overset{\rightarrow}{\eta}}, \quad (40)$$

so that, substituting Equation (40) into Equation (33), we obtain

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-i\sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\overset{\rightarrow}{\eta}}t}. \quad (41)$$

Then, our transformed wave function Equation (19) becomes

$$\psi_{FW} = \psi(\vec{x}) e^{\frac{\overset{\rightarrow}{\beta}\vec{P}}{|\vec{P}|} \theta - i\sqrt{m^2 + \vec{P}^2 - 2\vec{L}\overset{\rightarrow}{\eta}}t}, \quad (42)$$

unlike what happened with the Hamiltonian (18). Here, in the wavefunction Equation (42), the effect of the phase non-commutativity does not vanish because, in the calculations of the energy (Hamiltonian eigenvalue), in order to obtain the wavefunction, η was not entangled with an odd term for that it remains in the equation. In this part of the work, we say that FW transformation did not eliminate the effect of the phase non-commutativity from the Schrödinger equation as was expected.

4. Schrödinger–Pauli Equation from the DKP Equation in Non-Commutative Phase-Space

At first, defining the electromagnetic field $A_\mu = (A_0, \vec{A})$ by inserting the following covariant derivative in the DKP equation

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (43)$$

satisfies the commutation relation

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (44)$$

then, the DKP equation in the presence of an electromagnetic interaction (EMI) is

$$(i\mathcal{D} - m)\psi = 0, \quad (45)$$

with $\mathcal{D} = \beta_\mu D^\mu$. Then, the suitable physical form for ψ (when there is EMI) can be written as

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{m}} D_\mu \varphi \\ \sqrt{m} \varphi \end{pmatrix}. \quad (46)$$

We will explain the presence of an apparently abnormal term devoid of physical interpretation in the DKP Hamiltonian. This term is generated because of the consideration of the minimal coupling Equation (43) in the Kemmer equation, so that contracting Equation (45) on the left by $D_\mu \beta^\mu \beta^\nu$ leads to

$$i\beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu D_\rho D_\mu \psi = m D_\rho \beta^\rho \beta^\nu \psi. \quad (47)$$

After some algebraic considerations and simplifications, the above relation becomes

$$D^\mu \psi = \beta^\mu \beta^\nu D_\nu \psi + \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\mu g^{\nu\rho}) \psi. \quad (48)$$

Then, we multiply Equation (45) on the left by $-i\beta^0$ and making $\nu = 0$ in Equation (48), we obtain the Hamiltonian form of the Kemmer equation

$$i\partial_0 \psi = H\psi, \quad (49)$$

where

$$H = i [\beta^i, \beta^0] D_i + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) - eA_0 + m\beta_0. \quad (50)$$

Finally, the above equation becomes

$$H = \vec{\alpha} (\vec{P} - e\vec{A}) - eA_0 + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}). \quad (51)$$

The term proportional to $\frac{e}{2m}$ in Equations (48)–(51) is previously regarded by Kemmer himself in his own original research [34]. This term has no clear physical interpretation unlike the other terms in these equations which have physical interpretations similar to similar terms obtained in the Dirac equation interacting with the electromagnetic field.

Using the \star -product, we find the DKP equation in the non-commutative phase-space

$$H(\vec{P}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi. \quad (52)$$

Firstly, using Equation (5), we link the non-commutative coordinates x_i^{nc} to the commutative one x_i so that we achieve the non-commutativity in space

$$H(\vec{P}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \{ \vec{\alpha} (\vec{P} - e\vec{A}(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \} \star \psi(\vec{x}). \quad (53)$$

Considering $\vec{A}(\vec{x}) = k\vec{x}$, with k being a real constant so that the derivation in Equation (5) turns off in the first order $0(\Theta^2)$. Then, Equation (53)

$$H(\vec{P}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = H(\vec{P}, \vec{x}) \psi(\vec{x}) + \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left[-e\vec{\alpha} (\vec{A}(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right] \partial_b \psi(\vec{x}) + \mathcal{O}(\Theta^2) \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}). \quad (54)$$

where $\partial_a(m\beta_0) = \partial_a(\vec{\alpha} \vec{P}) = 0$, we obtain

$$H(\vec{P}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \vec{\alpha} (\vec{P} - e\vec{A}(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left[-e\vec{\alpha} \vec{A}(\vec{x}) - eA_0(\vec{x}) + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right] \partial_b \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}). \quad (55)$$

Secondly, using Equation (6), we link the non-commutative kinetic momentum P_i^{nc} to the commutative one P_i so that we achieve the the non-commutativity in phase into Equation (55), to find the DKP equation in the complete non-commutative phase-space

$$\alpha_i (P_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j - eA_i(\vec{x})) - eA_0(\vec{x}) + m\beta_0 + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + \frac{i}{2} \Theta_{ab} \partial_a \left[-e\alpha_i A_i(\vec{x}) - eA_0(\vec{x}) + i \frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right] \partial_b \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}), \quad (56)$$

with $\eta^{ij} = 2\eta^k \epsilon^{kij}$, and, according to the definition of the vectorial product $(A \times B)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu \cdot B_\lambda$, and, after minor simplification

$$H(\vec{P}, \vec{x}) \star \psi(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{P} - e\vec{\alpha}\vec{A}) + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i\frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha}\vec{A} + A_0 - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} \psi(\vec{x}) = i\beta^0 \partial_0 \psi(\vec{x}). \quad (57)$$

Foldy–Wouthuysen Transformation in Non-Commutative Phase-Space

We determine the Schrödinger–Pauli equation in NCPS, which means obtaining the non-relativistic limit from the DKP equation through the Foldy–Wouthuysen transformation, knowing that the FW transformation is suitable for weak fields. The DKP Hamiltonian in NCPS can be written in the form

$$H^{nc} = \vec{\alpha} \vec{\pi} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cdot \vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i\frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e \left(\vec{\nabla} \left(\vec{\alpha}\vec{A} + A_0 - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}, \quad (58)$$

with

$$\vec{\pi} = \vec{P} - e\vec{A}(\vec{x}). \quad (59)$$

For performing the Foldy–Wouthuysen transformation, we split our non-commutative DKP Hamiltonian Equation (58) to a block diagonal part (even operator ξ) and an off-diagonal part (odd operator \mathcal{O}), (Odd operators (off-diagonal matrices): $\alpha^i, \beta^i, \beta^0, \dots$, even operators (diagonal matrices): I_i, δ_{ij}, \dots)

$$H^{nc} = \mathcal{O} + \xi, \quad (60)$$

with

$$\xi = -eA_0 + e((grad A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta}, \quad (61)$$

$$\mathcal{O} = \vec{\alpha} \vec{\pi} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} + m\beta_0 + i\frac{e}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e \left(div \left(\vec{\alpha}\vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta}. \quad (62)$$

These are defined to satisfy $\xi \mathcal{O} = \mathcal{O} \xi$.

We consider that, if we multiply two odd operators (or even operators), we find an even operator, and, if multiplying an even operator with an odd operator, we obtain an odd operator. Then, using the Foldy–Wouthuysen transformation, we remove all odd operators. We may successively eliminate these odd terms from the DKP Hamiltonian in NCPS. Later, we will obtain a Hamiltonian completely free of odd operators. We further assume that ξ and \mathcal{O} can not be less in order than $\left(\frac{1}{m}\right)^0$.

From Equations (19)–(21) and satisfying Equation (49), in the case of time-dependent Hamiltonian and time-dependent operator S , we consider the canonical transformation

$$\psi_{FW} = e^{iS} \psi, \quad \tilde{H}^{nc} = e^{iS} H^{nc} e^{-iS} - ie^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS}, \quad (63)$$

while the Hermitian operator S may be considered small, and it is given by

$$S = -i \frac{\vec{\beta} \vec{\pi}}{m}, \quad (64)$$

so that we may perform an expansion in powers of $\frac{1}{m}$ of the DKP Hamiltonian (using the Baker–Campbell–Hausdorff formula [35–37])

$$\tilde{H}^{nc} = H^{nc} + \frac{\partial S}{\partial t} + i \left[S, H^{nc} + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] - \frac{1}{2!} \left[S, \left[S, H^{nc} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] - \frac{i}{3!} \left[S, \left[S, \left[S, H^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] \right] + \dots \quad (65)$$

and

$$\psi_{FW}^{nc} = \left(\frac{i}{\sqrt{m}} D_{\mu}^{nc} \varphi^{nc} \right). \tag{66}$$

We calculate our transformed Hamiltonian \tilde{H}^{nc} of Equation (65), where we will retain only the terms in the approximation $(\frac{1}{m})^4$. For this, we first calculate the following switches (see the Appendix B):

$$i \left[S, H^{nc} + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = i \left[S, \mathcal{O} + \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] = -\frac{e}{m} \vec{\beta} grad A_0 - \frac{1}{m} \beta_0 \vec{\pi}^2 + \frac{1}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] - \vec{\alpha} \vec{\pi} + \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H} + (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] + \frac{e}{m^2} \vec{\Sigma} (\vec{\beta} \times \vec{E}) (\beta^0)^2 - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \{ 2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \} + \frac{e}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] - \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \tag{67}$$

$$\frac{i}{2!} \left[S, \left[S, H^{nc} + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] = \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times grad A_0) - \frac{1}{2m^2} \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) - \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] - \frac{1}{2m} \beta_0 \vec{\pi}^2 - \frac{ie}{4m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right] - \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] \right] + \frac{e}{6m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \tag{68}$$

$$\frac{i}{3!} \left[S, \left[S, \left[S, H^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] \right] = \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times grad A_0) \right] - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] - \frac{1}{12m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] \right] - \frac{ie}{24m^4} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right] \right] - \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] \right] \right] + \frac{e}{48m^4} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \right] \tag{69}$$

the terms containing large powers of $\frac{1}{m}$ (up of $\frac{1}{m^4}$) in Equation (69) may be ignored. To be specific, we only consider terms of the order that we limit ourselves in the development. Hence, Equation (69) becomes

$$\frac{i}{3!} \left[S, \left[S, \left[S, H^{nc} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] \right] = \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times grad A_0) \right] - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] - \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} \right] \right] \right] - \frac{1}{12m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] - \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] \right] \right] + O(\frac{1}{m})^4 \tag{70}$$

By substituting Equations (67), (68) and (70) into Equation (65), with $\vec{x} \times \vec{\eta} = \vec{X}$, we arrive at

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{nc} = & (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \vec{\eta} - eA_0 + m\beta_0 + i\frac{eF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) + e((grad A_0) \times \vec{p}) \vec{\Theta} - \beta_0 \frac{\vec{\pi}^2}{2m} \\ & + e \left(div \left(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) \right) \times \vec{p} \right) \vec{\Theta} - \frac{i}{m} \vec{\beta} \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} - \frac{e}{m} \vec{\beta} grad A_0 + \frac{1}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \\ & + \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta^0 \vec{\Sigma} \vec{H} + (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] + \frac{e\vec{\Sigma}}{m^2} (\vec{\beta} \times \vec{E}) (\beta^0)^2 - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \{ 2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \} \\ & + \frac{e}{m} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2} (\vec{\pi} \times grad A_0) \\ & + \frac{\vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi})}{2m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \right] + \frac{ie}{4m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, -2(\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{S} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \right] \right] \\ & + \frac{e}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{i}{2m} F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] \right] - \frac{e}{6m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \right] \\ & - \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times grad A_0) \right] + \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}) \right] + \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{X} \vec{\alpha} \right] \right] \right] \\ & + \frac{1}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] + \frac{e}{12m^3} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (div(\vec{\alpha} \vec{A} - \frac{iF_{\rho\mu}}{2m} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho})) \times \vec{p}) \vec{\Theta} \right] \right] \right]. \end{aligned} \tag{71}$$

Precisely, we consider only terms until the order of $(\frac{1}{m})^2$. Therefore, terms up to or equal to $(\frac{1}{m})^3$ can be neglected, and, with Equation (A6), we obtain the following Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \vec{H}^{nc} = & m\beta_0 - e(A_0 + ((\vec{grad}A_0 + \text{div}(\vec{\alpha}\vec{A})) \times \vec{p})\vec{\Theta}) + \frac{\vec{\pi}^2}{2m}(\vec{\alpha}\frac{\vec{\pi}}{m} - \beta_0) - \frac{\vec{p}}{m}(i\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial t} + e.\vec{grad}A_0) \\ & - \frac{ie}{m}\left\{(\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - (\text{div}((\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2) \times \vec{p})\vec{\Theta}\right\} + \frac{e}{2m}\left\{\beta^0(\vec{\Sigma}\vec{H}) - (\text{div}(\beta^0\vec{\Sigma}\vec{H}) \times \vec{p})\vec{\Theta}\right\} \\ & + \frac{e}{2m}\left\{(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H} - (\text{div}((\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H}) \times \vec{p})\vec{\Theta}\right\} + \frac{e}{2m^2}\left[\vec{\beta}\vec{\pi}, (\beta^0\vec{\Sigma} + \vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H}\right] + \vec{X}\vec{\alpha} \\ - \frac{ie}{m^2}(\vec{\beta}.\vec{E})\left(2(\vec{\beta}\vec{\pi})(\beta^0)^2 - \vec{\beta}\vec{\pi}\right) & + \frac{e\vec{\Sigma}}{m^2}(\vec{\beta} \times \vec{E})(\beta^0)^2 - \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2}\vec{\pi} \times (\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{grad}A_0) + \frac{1}{2m}\left[\vec{\beta}\vec{\pi}, \left[\vec{\beta}\frac{\vec{\pi}}{m}, \vec{X}\vec{\alpha}\right]\right] \\ + \frac{e}{m}\left[\vec{\beta}\vec{\pi}, \left(\text{div}(\vec{\alpha}\vec{A} + (\frac{i}{m}(\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - \beta^0\frac{\vec{\Sigma}}{2m}\vec{H} - \frac{1}{2m}(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H})) \times \vec{p})\vec{\Theta}\right] + \frac{1}{m}\left[\vec{\beta}\vec{\pi}, \beta_0\frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \vec{X}\vec{\alpha}\right] \right. \\ & \left. + \frac{e}{2m^2}\left[\vec{\beta}\vec{\pi}, \left[\vec{\beta}\vec{\pi}, \left(\text{div}(\vec{\alpha}\vec{A} + (\frac{i}{m}(\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - \frac{1}{2m}\beta^0\vec{\Sigma}\vec{H} - \frac{1}{2m}(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H})) \times \vec{p})\vec{\Theta}\right)\right]\right] + 0(\frac{1}{m})^3. \end{aligned} \tag{72}$$

The above equation will be admitted basically as the non-commutative Schrödinger–Pauli Hamiltonian for a classical particle of zero or unity spin interacting with an EMF. The appearance of terms proportional to the explicit phase (even space) non-commutative terms involved in the Schrödinger–Pauli Hamiltonian because of the fact of the effect of the phase-space non-commutativity on the DKP equation, which means they appeared as terms containing the non-commutativity parameters (η, Θ) . Then, after using the classical limit via the unitary Foldy–Wouthuysen transformation, those terms that appeared being responsible for generating new terms and correction terms containing the non-commutativity parameters.

In the above Equations (71) and (72), Σ stands for the spin operator of the bosons (with the eigenvalues of 0 or 1), and H, E are the magnetic and the electric fields, respectively.

We denote and interpret the separate terms in our non-commutative Schrödinger–Pauli Hamiltonian as follows. We can identify each term separately, starting with non-diagonal term $m\beta_0$ as the rest energy (which can be eliminated simply from another FW transformation).

Then, $e(A_0 + ((\vec{grad}A_0 + \text{div}(\vec{\alpha}\vec{A})) \times \vec{p})\vec{\Theta}) = e\vec{\Phi}$ as the non-commutative electrostatic energy term, followed by $\frac{\vec{\pi}^2}{2m}(\vec{\alpha}\frac{\vec{\pi}}{m} - \beta_0) + \frac{1}{2m}[\vec{\beta}\vec{\pi}, [\vec{\beta}\frac{\vec{\pi}}{m}, \vec{X}\vec{\alpha}]]$, which are the non-commutative modified kinetic energy, with its NC correction term $\frac{1}{2m}[\vec{\beta}\vec{\pi}, \beta_0\frac{\vec{\pi}^2}{6m} + \vec{2X}\vec{\alpha}]$. Using the same steps which gave us Equation (16) through Equation (15), and, with $(\eta = 0, \vec{X}\vec{\alpha} \sim 0)$, the term of kinetic energy is totally diagonalized and can be written as:

$$\frac{\vec{\pi}^2}{2m}(\frac{\pi_0}{m}(2\beta_0^2 - 1)). \tag{73}$$

The most important result we care about is the existence of the orbital angular momentum and the spin couplings with the external magnetic field, but they are modified and affected by the non-commutativity influence as it is obvious in the terms

$$\frac{e}{2m}\{\beta^0(\vec{\Sigma}\vec{H}) - (\text{div}(\beta^0\vec{\Sigma}\vec{H}) \times \vec{p})\vec{\Theta}\}, \text{ and } \frac{e}{2m}\{(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H} - (\text{div}((\vec{\beta} \times \vec{\alpha})\vec{H}) \times \vec{p})\vec{\Theta}\}. \tag{74}$$

The following terms represent the diagonal spin-orbit coupling by the electric field, but they are affected and modified also by the NC influence

$$- \frac{e\vec{\Sigma}}{2m^2}\vec{\pi} \times (\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{grad}A_0) - \frac{ie}{m}\{(\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2 - (\text{div}((\vec{E}\vec{\beta})(\beta^0)^2) \times \vec{p})\vec{\Theta}\}. \tag{75}$$

The following terms can be explained by being analogous to the terms of Darwin for particles with spin-1/2 in interaction with an EMF

$$- \frac{ie}{m^2}(\vec{\beta}\vec{E})\{2(\vec{\beta}\vec{\pi})(\beta^0)^2 - \vec{\beta}\vec{\pi}\} + \frac{e\vec{\Sigma}}{m^2}(\vec{\beta} \times \vec{E})(\beta^0)^2. \tag{76}$$

The rest of the terms represent higher-order corrections: one of the FW transformation and of one of the PSNC influence.

Under the condition $\eta = \Theta = 0$, Equation (72) becomes

$$\begin{aligned} \hat{H}^{nc} = & m\beta_0 - eA_0 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} \left(\frac{1}{m} \vec{\alpha} \vec{\pi} - \beta_0 \right) + \frac{e}{2m} \beta^0 (\vec{\Sigma} \vec{H}) + \frac{e}{2m} (\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} \\ & - \frac{\vec{\beta}}{m} \left(i \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + e \cdot \text{grad} A_0 \right) - \frac{ie}{m^2} (\vec{\beta} \vec{E}) \left(2(\vec{\beta} \vec{\pi}) (\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \right) + \frac{e}{m^2} \vec{\Sigma} \left(\vec{\beta} \times \vec{E} \right) (\beta^0)^2 \\ & - \frac{ie}{m} (\vec{E} \vec{\beta}) (\beta^0)^2 - \frac{e}{2m^2} \vec{\Sigma} \vec{\pi} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} A_0 \right) + \frac{1}{2m^2} \left[\vec{\beta} \vec{\pi}, e(\beta^0 \vec{\Sigma} + \vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \vec{H} + \frac{\beta_0}{6} \vec{\pi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Equation (77) is similar to the Schrödinger–Pauli Hamiltonian extracted from the Dirac equation in interaction with an external electromagnetic field.

5. Conclusions

In previous sections, we have studied the non-relativistic limit of the DKP equation which provides description of the zero or unity spin particles in the DKP representation using the FW unitary transformation in NCPS, where we introduced the phase-space non-commutativity influence. Then, subsequently applying the FW transformation to take the system (in interaction with an EMF) to a non-relativistic regime, where we found the Schrödinger–Pauli equation (at least to the order of approximation we have considered), knowing that we investigated the non-relativistic limit of the DKP equation in two cases. In the first case, we considered only the non-commutativity in phase with the absence of the interaction with fields, but, for the second case, we considered the full NCPS in the presence of the external electromagnetic field.

In the first case, the concerned equation was the non-relativistic Schrödinger equation, knowing that the effect of the phase non-commutativity vanished in the DKP Hamiltonian but appeared in the corresponding wave-function. At the second case, the concerned equation was the phase-space non-commutative Schrödinger–Pauli equation, where the effect of the NCPS appeared widely in the obtained equation, and it modified most of the equation terms, and affected especially the spin and the orbital angular momentum terms that characterize the Pauli equation. Taking into account the fact that the non-commutativity influence was injected using both the Bopp-shift transformation through the Heisenberg-like commutation relations and the Gronewold–Moyal product. The use of the FW transformation always enables bringing the system of relativistic quantum mechanics to a non-relativistic regime, and it is confirmed by our present work that the FW transformation is applicable even when the non-commutativity is considered.

In the topic of the DKP theory, historically, the first authors who have studied the non-relativistic limit of the DKP equation were Nikitin and Fushchych in their paper, in which they used a different technique for diagonalizing the Hamiltonian as they pointed out in their paper [38], and others also have investigated the non-relativistic Kemmer equation through a Galilean covariance approach [14], in which they used the Galilean covariance to diagonalize the Kemmer Hamiltonian, without forgetting the authors Moshin and Tomazelli who have investigated the non-relativistic of the DKP equation in a commutative space [39].

We may compare our results with that of the other authors as follows:

Firstly, we compared our results with that of the authors Moshin and Tomazelli [39]. Under the condition ($\eta = \Theta = 0$), and by taking into account only terms until the order of $(\frac{1}{m})^2$ (terms up to or equal to $(\frac{1}{m})^3$ can be neglected), we found almost the same results.

Secondly, we made a comparison with the work of the author Silenko [40]. We found that the author has based research on the equation of the particle spin motion described by the Bargmann–Michel–Telegdi equation. Then, in order to check the wave equations for the spin-1 particles, the author took the Lagrangian that describes the spin effects for the particles of an arbitrary spin which interacted with an EMF. Note that, in the general form of his Hamiltonian, he considered an additional term with the odd and even terms in the Hamiltonian to make the application of the

FW transformation easier, so that Equation (19) is similar to that of ours with some exceptions, as in our transformed Hamiltonian in the case of the commutativity ($\eta = \Theta = 0$) (but with a second FW transformation to eliminate the first term of our transformed Hamiltonian). Our Hamiltonian is more detailed than that of Silenko, and it contains corrections that are related to the order of $(\frac{1}{m})^3$. The author has done two of the FW transformations. On the other hand, we made only one single FW transformation (it was enough for us to use a single transformation to find what was interesting).

Funding: This research received no external funding.

Conflicts of Interest: The author declares no conflict of interest.

Appendix A. The Simplification of Vector Squared of Non-Commutative Momentum

Starting with

$$(\vec{P}^{\rightarrow nc})^2 = (p_i + \frac{1}{2}\eta_{ij}x_j)^2 = p_i^2 + \frac{1}{2}\eta_{ij}p_i x_j + \frac{1}{2}\eta_{ij}x_j p_i + \frac{1}{4}\eta_{ij}\eta_{ik}x_j x_k, \quad (\text{A1})$$

considering only the 1st order of the phase non-commutativity $0(\eta^2)$.

With $\eta_{ij} = -\eta_{ji} = \eta\epsilon_{ij}$, $\eta_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\eta_{ij} \rightarrow \eta_{ij} = 2\eta_k\epsilon_{kij}$, knowing that $(\epsilon_{kij})^2 = 1$, and $(U \times V)_k = \epsilon_{kij}U_i V_j$, $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P}$, we simplify as follows:

$$\frac{1}{2}\eta_{ij}p_i x_j = \eta_k\epsilon_{kij}p_i x_j = (\vec{P} \times \vec{x})^{\rightarrow} \vec{\eta} = -\vec{L}^{\rightarrow} \vec{\eta}, \quad (\text{A2})$$

$$\frac{1}{2}\eta_{ij}x_j p_i = -\eta_k\epsilon_{kji}x_j p_i = -(\vec{x} \times \vec{P})^{\rightarrow} \vec{\eta} = -\vec{L}^{\rightarrow} \vec{\eta}. \quad (\text{A3})$$

Combining these results, we have

$$(\vec{P}^{\rightarrow nc})^2 = \vec{P}^{\rightarrow 2} - 2\vec{L}^{\rightarrow} \vec{\eta} + 0(\eta^2). \quad (\text{A4})$$

Appendix B. The Useful Commutation and Tensor Relations, Matrix Product

Using the DKP algebra Equations (8) and (9), we have

$$F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) = F_{00}\beta^0 \beta^0 \beta^0 + F_{ij}\beta^i \beta^0 \beta^j + F_{\rho\mu}\beta^\mu g^{0\rho}, \quad (\text{A5})$$

$$F_{\rho\mu} (\beta^\mu \beta^0 \beta^\rho + \beta^\mu g^{0\rho}) = -2(\vec{E}^{\rightarrow} \vec{\beta})(\beta^0)^2 - i\beta^0 \vec{\Sigma}^{\rightarrow} \vec{H} - i(\vec{\beta} \times \vec{\alpha})^{\rightarrow} \vec{H}, \quad (\text{A6})$$

with $F_{\rho\mu}\beta^\mu g^{0\rho} = -\vec{E}^{\rightarrow} \cdot \vec{\beta}$, $\Sigma_{ij} = \beta^i \beta^0 \beta^j - \beta^j \beta^0 \beta^i$, $i, j = 1, 2, 3$.

The useful commutation and vector relations

$$\left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, \vec{\alpha}^{\rightarrow} \vec{\pi} \right] = -\beta_0 \vec{\pi}^{\rightarrow 2}, \quad (\text{A7})$$

$$\left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, \beta_0 \right] = -\vec{\alpha}^{\rightarrow} \vec{\pi}, \quad (\text{A8})$$

$$\left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, A_0(\vec{x}) \right] = -i\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\nabla} A_0 = -i\vec{\beta}^{\rightarrow} \text{div} A_0, \quad (\text{A9})$$

$$\left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, \frac{\partial(\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi})}{\partial t} \right] = ie\vec{\Sigma}^{\rightarrow} (\vec{\pi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}), \quad (\text{A10})$$

$$\left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, ((\vec{\nabla} A_0) \times \vec{p})^{\rightarrow} \vec{\Theta} \right] = \left[\vec{\beta}^{\rightarrow} \vec{\pi}, \vec{\kappa} \right] = 0, \text{ with } ((\vec{\nabla} A_0) \times \vec{p})^{\rightarrow} \vec{\Theta} = \vec{\kappa} \in \mathbb{R}, \quad (\text{A11})$$

$$\left[\vec{\beta} \vec{\pi}, (\vec{\beta} E)(\beta^0)^2 \right] = i \vec{\Sigma} \left(\vec{\beta} \times E \right) (\beta^0)^2 + (\vec{\beta} E) \{ 2(\vec{\beta} \vec{\pi})(\beta^0)^2 - \vec{\beta} \vec{\pi} \}, \quad (\text{A12})$$

$$\left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \beta_0 \vec{\pi}^2 \right] = -\vec{\pi}^2 (\vec{\alpha} \vec{\pi}), \quad (\text{A13})$$

$$\left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\beta} \vec{\pi} \vec{\alpha} \vec{\pi} \right] = -\beta_0 \vec{\pi}^2, \quad (\text{A14})$$

$$\left[\vec{\beta} \vec{\pi}, \vec{\beta} \cdot \text{grad} A_0 \right] = \vec{\Sigma} (\vec{\pi} \times \text{grad} A_0). \quad (\text{A15})$$

References

- Kiefer, C. Quantum Gravity—A Short Overview. In *Quantum Gravity*; Fauser, B., Tolksdorf, J., Zeidler, E., Eds.; Birkhäuser: Basel, Switzerland, 2006. [\[CrossRef\]](#)
- Thiemann, T. Lectures on Loop Quantum Gravity. In *Quantum Gravity*; Giulini, D.J.W., Kiefer, C., Lämmerzahl, C., Eds.; Lecture Notes in Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2003; Volume 631. [\[CrossRef\]](#)
- Ashtekar, A. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.* **1986**, *57*, 2244. [\[CrossRef\]](#)
- Gross, D.J.; Wilczek, F. Ultraviolet behavior of Non-Abelian Gauge theories. *Phys. Rev. Lett.* **1973**, *30*, 1343–1346. [\[CrossRef\]](#)
- Nedjadi, Y.; Barrett, R.C. The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator. *J. Phys. A Math. Gen.* **1994**, *27*, 4301–4315. [\[CrossRef\]](#)
- Moshinsky, M.; Szczepaniak, A. The Dirac oscillator. *J. Phys. A Math. Gen.* **1989**, *22*, L817–L819. [\[CrossRef\]](#)
- Greiner, W. *Quantum Mechanics an Introduction*, 4th ed.; Springer: Berlin, Germany, 2000; Volume I.
- Foldy, L.L.; Wouthuysen, S.A. On the Dirac theory of Spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.* **1950**, *78*, 29. [\[CrossRef\]](#)
- De Vries, E. Foldy-Wouthuysen transformations and related problems. *Fortsch. Phys.* **1970**, *18*, 149–182. [\[CrossRef\]](#)
- Gosselin, P.; Bérard, A.; Mohrbach, H. Semiclassical diagonalization of quantum Hamiltonian and equations of motion with Berry phase corrections. *Eur. Phys. J. B* **2007**, *58*, 137–148. [\[CrossRef\]](#)
- Jansen, G.; Hess, B.A. Revision of the Douglas-Kroll transformation. *Phys. Rev. A* **1989**, *39*, 6016–6017. [\[CrossRef\]](#)
- Nakajima, T. The Douglas–Kroll–Hess approach. *Chem. Rev.* **2012**, *112*, 385–402. [\[CrossRef\]](#)
- Aharonov, Y.; Bohm, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.* **1959**, *115*, 485. [\[CrossRef\]](#)
- de Montigny, M.; Khanna, F.C.; Santana, A.E.D.; Santos, E.S.; Vianna, J.D.M. Letter to the editor: Galilean covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau equation. *J. Phys. A Math. Gen.* **2000**, *33*, L273. [\[CrossRef\]](#)
- Connes, A. A short survey of noncommutative geometry. *J. Math. Phys.* **2000**, *41*, 3832. [\[CrossRef\]](#)
- Chamseddine, A.H.; Connes, A.; Mukhanov, V. Quanta of geometry: Noncommutative aspects. *Phys. Rev. Lett.* **2015**, *114*, 091302. [\[CrossRef\]](#) [\[PubMed\]](#)
- Kastler, D. Noncommutative geometry and fundamental physical interactions: The Lagrangian level—Historical sketch and description of the present situation. *J. Math. Phys.* **2000**, *41*, 3867. [\[CrossRef\]](#)
- Madore, J. Introduction to non-commutative geometry. *Proc. Sci. (PoS)* **1998**, *001*, 1–19. [\[CrossRef\]](#)
- Seiberg, N.; Witten, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.* **1999**, *9*. [\[CrossRef\]](#)
- Bjorken, J.D.; Drell, S.D. *Relativistic Quantum Mechanics*; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1964.
- Messiah, A. *Quantum Mechanics*; Wiley: New York, NY, USA, 1968; Volume II.
- Kang, L.; Wang, J.; Chen, C. Representation of noncommutative phase space. *Mod. Phys. Lett. A* **2005**, *20*, 2165. [\[CrossRef\]](#)
- Bertolami, O.; Rosa, J.G.; de Aragão, C.M.L.; Castorina, P.; Zappalà, D. Noncommutative gravitational quantum well. *Phys. Rev. D* **2005**, *72*, 025010. [\[CrossRef\]](#)
- Yang, Z.H.; Long, C.Y.; Qin, S.J.; Long, Z.W. DKP oscillator with spin-0 in three-dimensional non-commutative phase space. *Int. J. Theor. Phys.* **2010**, *49*, 644–651. [\[CrossRef\]](#)

25. Haouam, I.; Chetouani, L. The Foldy-Wouthuysen transformation of the Dirac equation in noncommutative Phase-Space. *J. Mod. Phys.* **2018**, *9*, 2021–2034. [[CrossRef](#)]
26. Wang, J.; Li, K. The HMW effect in noncommutative quantum mechanics. *J. Phys. A Math. Theor.* **2007**, *40*, 2197. [[CrossRef](#)]
27. Haouam, I. The Phase-Space noncommutativity effect on the large and small wave-function components approach at Dirac equation. *Open Access Library J.* **2018**, *5*, e4108. [[CrossRef](#)]
28. Curtright, T.; Fairlie, D.; Zachos, C. Features of Time-independent Wigner functions. *Phys. Rev. D* **1998**, *58*, 025002. [[CrossRef](#)]
29. Petiau, G. Contribution à la Théorie des Equations d'Ondes Corpuscolaires. Ph.D. Thesis, University of Paris, Paris, France, 1936.
30. Nicholas, K. Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction. *Proc. R. Soc.* **1938**, *166*, 127. [[CrossRef](#)]
31. Duffin, R.J. On the characteristic matrices of covariant systems. *Phys. Rev.* **1939**, *54*, 1114. [[CrossRef](#)]
32. Capri, A.Z. *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Quantum Field Theory*; World Scientific: Singapore, 2002; p. 25, ISBN 981-238-136-8.
33. Casana, R.; Lunardi, J.T.; Pimentel, B.M.; Teixeira, R.G. Spin 1 fields in Riemann-Cartan Space-Times via Duffin-Kemmer-Petiau Theory. *Gen. Relativ. Gravit.* **2002**, *34*, 1941. [[CrossRef](#)]
34. Nicholas, K. The particle aspect of meson theory. *Proc. R. Soc. A* **1939**, *173*, 91. [[CrossRef](#)]
35. Schwabl, F. *Quantum Mechanics*; Springer: Berlin, Germany, 1995.
36. Li, Y.; Sauzin, D.; Sun, S. The Baker–Campbell–Hausdorff formula via mould calculus. *Lett. Math. Phys.* **2018**. [[CrossRef](#)]
37. Van-Brunt, A.; Visser, M. Special-case closed form of the Baker-Campbell-Hausdorff formula. *J. Phys. A Math. Theor.* **2015**, *48*, 225207. [[CrossRef](#)]
38. Nikitin, A.G.; Fushchych, W.I. Poincare invariant differential equations for particles of arbitrary spin. *Theor. Math. Phys.* **1978**, *34*, 203–212. [[CrossRef](#)]
39. Moshin, P.Y.; Tomazelli, J.L. On the non-relativistic limit of linear wave equations for zero and unity spin particles. *Mod. Phys. Lett. A* **2008**, *23*, 129–137. [[CrossRef](#)]
40. Alexander, J.S. Analysis of wave equations for spin-1 particles interacting with an electromagnetic field. *arXiv* **2004**, arXiv:hep-th/0404074.



© 2019 by the author. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Continuity Equation in Presence of a Non-Local Potential in Non-Commutative Phase-Space

Ilyas Haouam 

Laboratoire de Physique Mathématique et de Physique Subatomique (LPMPS), Université Frères Mentouri, Constantine, Algeria
Email: ilyashaouam@live.fr

How to cite this paper: Haouam, I. (2019) Continuity Equation in Presence of a Non-Local Potential in Non-Commutative Phase-Space. *Open Journal of Microphysics*, 9, 15-28.
<https://doi.org/10.4236/ojm.2019.93003>

Received: January 18, 2019

Accepted: August 26, 2019

Published: August 29, 2019

Copyright © 2019 by author(s) and Scientific Research Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

We studied the continuity equation in presence of a local potential, and a non-local potential arising from electron-electron interaction in both commutative and non-commutative phase-space. Furthermore, we examined the influence of the phase-space non-commutativity on both the locality and the non-locality, where the definition of current density in commutative phase-space cannot satisfy the condition of current conservation, but with the steady state, in order to solve this problem, we give a new definition of the current density including the contribution due to the non-local potential. We showed that the calculated current based on the new definition of current density maintains the current. As well for the case when the non-commutativity in phase-space considered, we found that the conservation of the current density completely violated; and the non-commutativity is not suitable for describing the current density in presence of non-local and local potentials. Nevertheless, under some conditions, we modified the current density to solve this problem. Subsequently, as an application we studied the Frahn-Lemmer non-local potential, taking into account that the employed methods concerning the phase-space non-commutativity are both of Bopp-shift linear transformation through the Heisenberg-like commutation relations, and the Moyal-Weyl product.

Keywords

Continuity Equation, Non-Local Potential, Non-Commutative Schrödinger Equation, Phase-Space Non-Commutativity, Frahn-Lemmer Potential, Moyal Product, Bopp-Shift Linear Transformation

1. Introduction

In physics sometimes the largest descriptive equations reach their limits. A considered number of physics equations are only approximations. What physicists

really want is not an approximation; they want equations that connect the world's behaviors directly to the foundations of reality such as the motion equations, the continuity equations, etc. We can consider that the continuity equation is one of the equations that describe the basic concepts, where it expresses the kinematical aspect of a symmetry and is a useful auxiliary equation.

In the last years, in the development of nanotechnology, the transport properties of nanodevices more and more become important, and it is very interesting to understand how the current flows inside the nanodevices, and how the current density gives the information about the heat dissipation for example [1], as well as in the elementary particle physics, for the quarks and the gluons which have a color charge [2] [3] (in the theory of quantum chromodynamics (QCD)), in which it is always conserved such as the electric charge. There is a continuity equation for such a color charge current (given at the gluon field strength tensor).

There are numerous quantities which are often or always conserved, such as the baryon number which is proportional to the number of quarks minus the number of antiquarks, also the lepton number, the isospin (term used to describe groups of particles which have nearly the same mass, such as the proton and the neutron), etc. Which means, in order to investigate their own conservation laws, we have to reach their continuity equations. Where the continuity equation is an equation that describes the transport of some quantity, furthermore there must be a quantity x that can flow or move (such as the energy, the particle charge...), with ρ_x being the volume density of this quantity, the way this quantity flows is described by its flux denoted J_x . Knowing that, the continuity equation is another form of the conservation law, will be meaningful if it is applied to a conserved quantity, and can be expressed in the integral form, or in the differential form by the divergence theorem, it is related always to the conservation of probability in quantum mechanics (QM).

In this paper, we derive the continuity equation for a particle subjected to non-local and local potentials [4] in non-commutative phase-space (NCPS). Why do we care about the non-local potential and the non-commutative geometry (NCG)? The reason behind that, the Schrödinger equation in the presence of a non-local potential has been the subject of many investigations for several years [5] [6] [7] such as, in the calculations of the transport properties of the nanodevices through the density functional theory and the Green's function theory [8] [9] yonder, there are many cases where the non-local potential is present. In the scattering theories of nucleons and nuclei [10], the non-locality is generated by the exchange interaction between the nucleons in the nucleus (considered in Hartree-Fock type calculations) [11]. In addition, the nuclear optical potential describing the movement between colliding nuclei is also non-local [12] [13]. In most nuclear structure and reaction calculations yet, the non-locality has been assumed to be small, and several approximation methods have been introduced in the local potential model for reproducing its contributions.

This work is realized in the NCG due to the importance and the advantages of

it in both quantum mechanics and quantum fields, and generally in physics today. Knowing that, the origin of the NCG is relative to the search for topological spaces (C^* -algebras) of functions that are replaced by non-commutative algebras, later the NCG concept was rekindled by A. Connes and others [14] [15] [16] [17], who theorized the idea of a differential structure in a non-commutative framework, by studying and defining the cyclic cohomology. Where they showed that, the notion of differential calculations on varieties had a non-commutative equivalent. Then, this type of geometry found great support by many mathematical results: Characterizations of commutative von Neumann algebras, Gelfand-Naïmark theorem on C^* -algebras, cyclic cohomology of $C^\infty(M)$ algebra, K theory of C^* -algebras, relations between Dirac operators and Riemannian metrics.

A non-commutative space theory replaces the non-commutativity of operators associated with space-time coordinates with a deformation in the algebra of functions defined on space-time, and the non-commutative version of the field theory is obtained by changing the commutative theory to the non-commutative one, this done by replacing ordinary fields with non-commutative fields and ordinary products with Moyal-Weyl products. To be more precise, N. Seiberg and E. Witten in the past few years made their famous article [18], which is from the most cited articles, encouraged a wide amount of interest in NCG, which became the mainstream for a couple of years.

It is worthwhile to mention that, the idea of NCPS is based essentially on the Seiberg-Witten map, the Bopp's shift method and the Moyal-Weyl product.

In this paper, our aim is not to solve the equations but to focus on extracting continuity equations. The plan of this paper is as follows: In Section 3, we derive the continuity equation for non-local and local potentials, taking as an application the Frahn-Lemmer non-local potential. In Section 4, we have the interesting result of our paper, which is represented in the non-commutative continuity equation for non-local and local potentials (with an application of the Frahn-Lemmer non-local potential).

2. Review of the Non-Commutative Geometry

The non-commutative geometry is the theory in which space may not commute anymore. Let us consider the operators of coordinates and momentum in a d dimensional non-commutative phase-space x_i^{nc} and p_i^{nc} respectively. Where the non-commutative phase-space operators satisfy the Heisenberg-like commutation relations [19]

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\Theta_{ij}, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\eta_{ij}, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, d), \quad (1)$$

the effective Planck constant being

$$\hbar^{eff} = \hbar(1 + \xi), \quad (2)$$

where $\xi = \frac{Tr(\Theta\eta)}{4\hbar^2}$, the consistency condition is $\xi \ll 1$. With Θ_{ij} , η_{ij} are

antisymmetric real constant ($d \times d$) matrices and δ_{ij} is the identity matrix. Theoretical predictions for non-commutative systems (concerning the non-commutative parameters) have been compared to experimental data (the maximum absolute energy shifts allowed by the experiment), leading to bounds on the noncommutative parameters [19] [20]:

$$\Theta \approx 4 \times 10^{-40} \text{ m}^2, \quad \eta \approx 1.76 \times 10^{-61} \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}. \quad (3)$$

These above bounds will be suppressed due to the weak magnetic field used in the experiments $B \approx 5 \text{ mg}$.

Since the system in which we study the effects of non-commutativity, is three dimensional, we limit our calculations to the following non-commutative algebra

$$[x_i^{nc}, x_j^{nc}] = i\epsilon_{ijk}\Theta_k, [p_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\epsilon_{ijk}\eta_k, [x_i^{nc}, p_j^{nc}] = i\hbar^{eff}\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

take into account that we neglect the uncertainty relation between x_i^{nc} and p_i^{nc} . With Θ_{ij} , η_{ij} are (3×3) antisymmetric matrices, and ϵ_{ijk} is Levi-Civita symbol and the summation convention is used. We have

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{321} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{231} = 1$. If $i = j$, $j = k$, $\epsilon_{ijk} = 0$, and Θ_k , η_k are the non-commutativity parameters. They are real-valued and antisymmetric constant matrices with the dimension of $(length)^2$ and $(momentum)^2$, respectively.

In the three dimensional commutative phase-space, the coordinates x_i and momentum p_i satisfy the usual canonical commutation relations

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (5)$$

The non-commutative geometry Equation (1) is described at the level of fields and actions by the Moyal-Weyl product (\star -product) [21] [22] [23]. Let f and g be two arbitrary functions from \mathcal{R}^D , we define \star -product as follows

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \exp\left[\frac{i}{2}\Theta_{ab}\partial_{x_a}\partial_{x_b}\right]f(x_a)g(x_b) \\ &= f(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{a_1b_1} \dots \Theta^{a_nb_n}\partial_{a_1} \dots \partial_{a_n}f(x)\partial_{b_1} \dots \partial_{b_n}g(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Note that in our calculations, we use the following \star -product properties:

The Complex conjugation

$$(f(x) \star g(x))^* = g^*(x) \star f^*(x). \quad (7)$$

The \star -product under the integral sign

$$\int(f \star g)(x)d^4x = \int(g \star f)(x)d^4x = \int(fg)(x)d^4x. \quad (8)$$

The non-commutative field theories for the low energies ($\Theta E^2 < 1$) or the slowly varying fields effectively reduce to their commutative version due to the nature of the \star -product.

The non-commutative phase-space operators are related to the commutative phase-space one through the commutative Heisenberg-Weyl algebra in terms of the known Bopp-shift linear transformation which was introduced from the Equation (6) [24] [25], and it is given by

$$x_i^{nc} = x_i - \frac{1}{2\hbar} \Theta_{ij} p_j, \quad p_i^{nc} = p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} x_j. \quad (9)$$

If $\Theta = \eta = 0$, the non-commutative phase-space framework will become commutative one.

3. Schrödinger Equation in Presence of a Nonlocal Potential in Commutative Phase-Space

In presence of a non-local potential $V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, the wave function obeys the following Schrödinger equation

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

A non-local potential operating on a wave function [26] has the form

$$\int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{s}) \psi(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t) d\mathbf{s}, \quad (11)$$

with $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{s}$, and $d\mathbf{r}' = d\mathbf{s}$, taking into account that

$Re[V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = Re[V_{NL}(\mathbf{r}', \mathbf{r})]$ (symmetric), and using the Taylor series $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \left(1 + \mathbf{s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{s}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\mathbf{s}^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \mathbf{r}^3} + \dots\right) \psi(\mathbf{r}) = e^{\frac{i\mathbf{s}\mathbf{p}}{\hbar}} \psi(\mathbf{r})$. We find

$$\int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{s}) e^{\frac{i\mathbf{s}\mathbf{p}}{\hbar}} d\mathbf{s} \psi(\mathbf{r}). \quad (12)$$

We can denote

$$\begin{aligned} & \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{s}) e^{\frac{i\mathbf{s}\mathbf{p}}{\hbar}} d\mathbf{s} \psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \int d\mathbf{s} e^{\frac{i\mathbf{s}\mathbf{p}}{\hbar}} V_{NL}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right) e^{\frac{i\mathbf{s}\mathbf{p}}{\hbar}} \psi(\mathbf{r}, t) = V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (13)$$

then simply Equation (10) takes the form

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

3.1. Frahn-Lemmer Non-Local Potential

In order to facilitate the calculations, and as an application concerning the non-local potential, we choose the Frahn-Lemmer potential [10] [27] defined as

$$V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{U}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|\right) \mathcal{H}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (15)$$

where \mathcal{U}, \mathcal{H} represent the local average value and the width of the non-locality respectively, knowing that, for simplicity we consider $\mathcal{U}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|\right) \approx \mathcal{V}_0$ and \mathcal{H} should be a normalized Gaussian function as

$$\mathcal{H}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{\beta^2}}, \quad (16)$$

which is normalized so that

$$\int \mathcal{H}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' = 1. \quad (17)$$

Then, our non-local potential takes the form [once the range parameter is very small, the non-local potential tends to $\approx \mathcal{V}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$]

$$V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathcal{V}_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^2}{\beta^2}}, \quad (18)$$

with β, \mathcal{V}_0 are the non-locality range (typically takes on a value of 0.85 Fm) and the depth of the nuclear potential (Wood-Saxon function type) respectively.

The following equation, obtained by putting Equation (17) into Equation (10)

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + \int \frac{\mathcal{V}_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{\beta^2}} \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (19)$$

Using Equation (13), we have

$$V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{s} e^{\frac{i\mathbf{p}\mathbf{s}}{2\hbar}} \frac{\mathcal{V}_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s} - \mathbf{r} + \mathbf{s}}{2}\right)^2}{\beta^2}} e^{\frac{i\mathbf{p}\mathbf{s}}{2\hbar}} = \frac{\mathcal{V}_0}{(\pi\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\mathbf{s})^2}{\beta^2} + \frac{i}{\hbar} \mathbf{s}\mathbf{p}}, \quad (20)$$

then, using the integral $\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-A^2 s^2 + B s} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{\frac{B^2}{4A^2}}$, with $A = \frac{1}{\beta}$, $B = \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}$ Equation (18) turns to

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + \mathcal{V}_0 e^{-\frac{\mathbf{p}^2 \beta^2}{4\hbar^2}} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (21)$$

what we need here is to show the form of the Schrödinger equation in interaction with the Frahn-Lemmer non-local potential, knowing that if we want to solve the above equation, we have to use the Fourier transform to switch for the momentum representation (P representation), there the calculations shall be very easy, knowing that the equation will be time-independently considered, with $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, Equation (20) becomes

$$E - \frac{(\hbar \mathbf{k})^2}{2m} = \mathcal{V}_0 e^{-\frac{k^2 \beta^2}{4}}. \quad (22)$$

This explains the connection between nuclear potential and momentum. In another way, the strength of the potential decreases rapidly with increasing momentum.

3.2. The Continuity Equation in Commutative Phase-Space

The Schrödinger equation in presence of a non-local potential $V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ and a local potential $V_L(\mathbf{r})$ is written as follows

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + V_L(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (23)$$

The complex conjugate of the above equation written as

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^\dagger(\mathbf{r},t)+\int V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'+V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\mathbf{r},t). \quad (24)$$

Here $*$, \dagger stand for the complex conjugation of the potentials and for the wave-functions successively.

In order to find the continuity equation, we have $\psi^\dagger(\mathbf{r},t)$ Equation (23) and $\psi(\mathbf{r},t)$ Equation (24), so that we obtain

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)+\int\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_{NL}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' \\ &+\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)=i\hbar\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi^\dagger(\mathbf{r},t)+\int\psi(\mathbf{r},t)V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' \\ &+\psi(\mathbf{r},t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t)=-i\hbar\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\mathbf{r},t). \end{aligned} \quad (26)$$

According to the subtraction of Equation (25) from Equation (26) we find

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)-\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r},t)) \\ &+\int(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_{NL}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',t)-\psi(\mathbf{r},t)V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t))d\mathbf{r}' \\ &+\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)-\psi(\mathbf{r},t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t) \\ &=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)). \end{aligned} \quad (27)$$

If we multiply the above equation by the charge carried by the particle, we obtain the continuity equation of the corresponding particle, as in the case of the electron, we multiply by $(-e)$.

Equation (27) may be contracted as

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\mathbf{J}+\rho_{NL}+\rho_L=0. \quad (28)$$

The obtained continuity Equation (28) contains new quantities, which are the non-local current density ρ_{NL} , and the local density ρ_L , that is because of the consideration of the non-local and the local interactions in the Schrödinger equation, where

$$\begin{aligned} \rho &=J^0=\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)=|\psi(\mathbf{r},t)|^2 \\ \mathbf{J} &=\frac{-\hbar^2}{2m}(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)-\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r},t)) \\ \rho_{NL} &=\int(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_{NL}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',t)-\psi(\mathbf{r},t)V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t)) \\ \rho_L &=\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t)-\psi(\mathbf{r},t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (29)$$

If the local potential $V_L(\mathbf{r})$ is Hermitian, implying that ρ_L vanishes, which means that its symmetry maintained, these results are similar to the calculations of Changsheng Li and his colleagues [28].

In the steady state $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, Equation (28) becomes

$$\nabla \mathbf{J} + \rho_{NL} = 0. \quad (30)$$

If the non-local potential $V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is a real diagonal matrix, the quantity ρ_{NL} vanishes; its symmetry is maintained also. The current calculated from \mathbf{J} is conserved since $\nabla \mathbf{J} = 0$. However, in presence of a non-local potential, the quantity ρ_{NL} is nonzero, and therefore $\nabla \mathbf{J} \neq 0$. As a result, the current calculated from the current density is not conserved. Therefore, we need to modify the conventional definition of the current density to include the contribution ρ_{NL} of ρ_L and induced by the non-local and the local potentials.

We define the new current density in presence of non-local and local potentials as

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{NL} + \mathbf{J}_L, \quad (31)$$

where $\mathbf{J}_L, \mathbf{J}_{NL}$ are the local current density and the non-local current density (We call it the non-local current density because it is merely due to the non-local potential) defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{NL} &= -\nabla \chi_{NL}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{J}_L &= -\nabla \varphi_L(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (32)$$

where χ_{NL}, φ_L determined by the following Poisson equation set

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi_{NL}(\mathbf{r}) + \rho_{NL} &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_L(\mathbf{r}) + \rho_L &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

by solving each Poisson equation with proper boundary conditions, we can calculate \mathbf{J}_{NL} and \mathbf{J}_L .

It is obvious that the newly defined current density satisfies $\nabla \mathbf{J}_{tot} = 0$ and therefore, the calculated current from this current density satisfies the current conservation.

Anywise, in absence of the interactions, the continuity equation takes its simple known form in the quantum mechanics

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (34)$$

4. Schrödinger Equation in Presence of a Nonlocal Potential in Non-Commutative Phase-Space

We introduce the non-commutativity in space through the \star -product, the Schrödinger equation in presence of non-local and local potentials in non-commutative space is written as

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) + \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \star \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + V_L(\mathbf{r}) \star \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (35)$$

taking into account that the \star -product under the integral sign become ordinary product as shown in Equation (8), leading to found out that the symmetry of the real part of the non-local potential maintained in the non-commutative framework.

For $V_L(\mathbf{r}) \sim h r$, with h is real-valued, and using Equation (6) we find

$$V_L(\mathbf{r}) \star \psi(\mathbf{r}, t) = V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) + i\Theta_{ab}\partial_a V_L(\mathbf{r})\partial_b \psi(\mathbf{r}, t) + 0(\Theta^2). \quad (36)$$

Then we introduce the non-commutativity in phase by the mapping $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}^{nc}$ through Bopp-shift translation Equation (9), we have

$$\frac{(\mathbf{p}^{nc})^2}{2m}\psi(\mathbf{r}, t) + \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \star \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + V_L(\mathbf{r}) \star \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (37)$$

where

$$(\mathbf{p}^{nc})^2 = \left(p_i + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} r_j \right)^2 = (p_i)^2 + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_i r_j + \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_j r_i + \frac{1}{4\hbar^2} \eta_{ij} \eta_{ik} r_j r_k, \quad (38)$$

we restrict ourselves only to the 1st order of the non-commutativity in phase $0(\eta^2)$, [for the equilibrium with the non-commutativity in space considered in this work].

With $\eta_{ij} = -\eta_{ji} = \eta \epsilon_{ji}$, and $\eta_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \eta_{ij}$ where $\eta_{ij} = 2\eta_k \epsilon_{kij}$, knowing that $(\epsilon_{kij})^2 = 1$, and $(U \times V)_k = \epsilon_{kij} U_i V_j$, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ then

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_i r_j &= \frac{1}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kij} p_i r_j = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) \boldsymbol{\eta} = -\frac{1}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} \\ \frac{1}{2\hbar} \eta_{ij} p_j r_i &= -\frac{1}{2\hbar} \eta_{ji} r_j p_i = -\frac{1}{\hbar} \eta_k \epsilon_{kji} r_j p_i = -\frac{1}{\hbar} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \boldsymbol{\eta} = -\frac{1}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (39)$$

substituting the above relations in Equation (38). Finally, we obtain

$$(\mathbf{p}^{nc})^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} + 0(\eta^2). \quad (40)$$

Substituting Equations (36)-(40) in Equation (37), we obtain

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{m\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} \psi(\mathbf{r}, t) + \int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + V_L(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) \\ + i\Theta_{ab} \partial_a V_L(\mathbf{r}) \partial_b \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (41)$$

4.1. The Frahn-Lemmer Non-local Potential in Non-Commutative Phase-Space

Knowing that $\int V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$ goes to $V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}, t)$, the Schrödinger equation in interaction with Frahn-Lemmer non-local potential and a local potential in non-commutative phase-space is given by

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{m\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} \psi(\mathbf{r}, t) + \mathcal{V}_0 e^{-\frac{(\mathbf{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta}) \beta^2}{4\hbar^2}} \psi(\mathbf{r}, t) + V_L(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) \\ + i\Theta_{ab} \partial_a V_L(\mathbf{r}) \partial_b \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (42)$$

for $\left(\mathbf{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta} \right) \ll \frac{4\hbar^2}{\beta^2}$, let us approximate as

$$e^{-\frac{(\mathbf{p}^2 - \frac{2}{\hbar} \mathbf{L} \boldsymbol{\eta}) \beta^2}{4\hbar^2}} = 1 - \frac{\mathbf{p}^2 \beta^2}{4\hbar^2} + \frac{\mathbf{L} \boldsymbol{\eta} \beta^2}{2\hbar^3}, \quad (43)$$

with $a = \frac{\hbar^2}{2m} + \mathcal{V}_0 \frac{\beta^2}{4}$, $b = \frac{\mathcal{V}_0 \beta^2}{2\hbar^3} - \frac{1}{m\hbar}$ and substituting Equation (43) into Equation (42), we obtain

$$\begin{aligned}
 & -a\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + b\mathbf{L}\eta\psi(\mathbf{r},t) + \mathcal{V}_0\psi(\mathbf{r},t) + V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \\
 & + i\Theta_{ab}\partial_a V_L(\mathbf{r})\partial_b\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t).
 \end{aligned} \tag{44}$$

The above equation is the non-commutative Schrödinger equation in interaction with Frahn-Lemmer non-local potential and a local potential. The non-commutativity in space influenced the local part, while the noncommutativity in phase touched the non-local part.

4.2. The Continuity Equation in Non-Commutative Phase-Space

The Schrödinger equation in presence of non-local and local potentials in non-commutative phase-space is given by the Equation (41), and its complex conjugate is given by

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^\dagger(\mathbf{r},t) - \frac{1}{m\hbar}\mathbf{L}\eta\psi^\dagger(\mathbf{r},t) + \int V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' \\
 & + V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t) - i\Theta_{ab}\partial_a V_L^*(\mathbf{r})\partial_b\psi^\dagger(\mathbf{r},t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\mathbf{r},t),
 \end{aligned} \tag{45}$$

from the multiplications $\psi^\dagger(\mathbf{r},t)$ Equation (41) and $\psi(\mathbf{r},t)$ Equation (45), it comes

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{m\hbar}\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\mathbf{L}\eta\psi(\mathbf{r},t) \\
 & + \int \psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_{NL}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' + \psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \\
 & + i\Theta_{ab}\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\partial_a V_L(\mathbf{r})\partial_b\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t),
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m}\psi(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi^\dagger(\mathbf{r},t) - \frac{1}{m\hbar}\psi(\mathbf{r},t)\mathbf{L}\eta\psi^\dagger(\mathbf{r},t) \\
 & + \int \psi(\mathbf{r},t)V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' + \psi(\mathbf{r},t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t) \\
 & - i\Theta_{ab}\psi(\mathbf{r},t)\partial_a V_L^*(\mathbf{r})\partial_b\psi^\dagger(\mathbf{r},t) = -i\hbar\psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\mathbf{r},t),
 \end{aligned} \tag{47}$$

then, by the subtraction of Equation (46) from Equation (47) we obtain

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r},t)) \\
 & + \frac{1}{m\hbar}(\psi(\mathbf{r},t)\mathbf{L}\eta\psi^\dagger(\mathbf{r},t) - \psi^\dagger(\mathbf{r},t)\mathbf{L}\eta\psi(\mathbf{r},t)) \\
 & + \int (\psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_{NL}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}',t) - \psi(\mathbf{r},t)V_{NL}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}',t))d\mathbf{r}' \\
 & + \psi^\dagger(\mathbf{r},t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r},t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r},t) \\
 & + i\Theta_{ab}(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\partial_a V_L(\mathbf{r})\partial_b\psi(\mathbf{r},t) + \psi(\mathbf{r},t)\partial_a V_L^*(\mathbf{r})\partial_b\psi^\dagger(\mathbf{r},t)) \\
 & = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)),
 \end{aligned} \tag{48}$$

contracting the above equation as follows

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} + \rho_{NL} + \rho_L^{nc} + \mathcal{C}^{nc} = 0, \quad (49)$$

Equation (48) will be recognized as the non-commutative continuity equation, denoting the separate terms in it as follows

$$\begin{aligned} \rho &= J^0 = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \\ \mathbf{J} &= \frac{-\hbar^2}{2m} (\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)) \\ \rho_{NL} &= \int (\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}, t)V_{NL}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}', t)) \\ \rho_L &= \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)V_L(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)V_L^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \\ \rho_L^\Theta &= i\Theta_{ab} (\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\partial_a V_L(\mathbf{r})\partial_b \psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)\partial_a V_L^*(\mathbf{r})\partial_b \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)) \\ \mathcal{C}^{nc} &= \frac{1}{m\hbar} (\psi(\mathbf{r}, t)\mathbf{L}\eta\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) - \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\mathbf{L}\eta\psi(\mathbf{r}, t)) \\ \rho_L^{nc} &= \rho_L + \rho_L^\Theta. \end{aligned} \quad (50)$$

It is obvious that the conservation of the current density in the non-commutative phase-space completely violated, which means that the current density does not satisfy the current conservation. Then we move to the interpretation of the separating terms, the existence of the quantities corresponding to the explicit Θ , η parameters, which are involved in the obtained Equation (50) due to the effect of the phase-space non-commutativity on the Schrödinger equation. Firstly, these quantities emerged merely as terms containing the parameters Θ , η consequently after extracting the non-commutative continuity equation, those terms being responsible for generating the new quantities collectively with the correction term that contains Θ parameter.

More accurately, the effect of the non-local potential on the continuity equation arises as a non-local quantity of density type, as well as for the locality effect, it appears as a local quantity of density type also, where the non-commutativity in phase formed only a correction term \mathcal{C}^{nc} , which appeared in the non-commutative continuity equation, but for the non-commutativity in space affected only the local quantity ρ_L^{nc} through a first-order correction. Once the local potential is null, the local density quantity with its non-commutative correction will disappear.

Comparing the continuity equation in commutative and in non-commutative cases, we find that the non-commutativity influence is very clear in the amount of the local potential, but for the non-locality amount vanishes, we find that the non-commutativity effect violates the conservation of the continuity equation.

In what follows, we modify the expression of the density current, in which, it will be conserved in the non-commutative phase-space:

If the local potential $V_L(\mathbf{r})$ is real, the quantity ρ_L^{nc} vanishes (similar to the commutative case), also when the non-local potential $V_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is a real diagonal matrix, the quantity ρ_{NL} vanishes. But the current calculated from \mathbf{J} is not conserved due to the phase non-commutativity correction \mathcal{C}^{nc} . However,

while ρ_{NL} and ρ_L are nonzero. As a result, the current density not conservative, as well as of the symmetry is not maintained in the non-commutative phase-space. Therefore, we need to modify the conventional definition of the current density to include the contribution of ρ_{NL} and ρ_L^{nc} , and in the steady state $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, Equation (49) becomes

$$\nabla J + \rho_{NL} + \rho_L^{nc} + C^{nc} = 0. \quad (51)$$

We make the following replacement

$$\mathbf{J} + \mathcal{K}^{nc} = \mathcal{J}^{nc}, \quad \text{with } C^{nc} = \mathcal{J}\mathcal{K}^{nc}, \quad (52)$$

with the condition $\nabla C^{nc} = 0$. We define the new global current density in presence of a non-local and a local potential where the non-commutativity is considered, as

$$\mathbf{J}_{tot}^{nc} = \mathcal{J}^{nc} + \mathbf{J}_{NL} + \mathbf{J}_L^{nc}, \quad (53)$$

where $\mathbf{J}_L^{nc}, \mathbf{J}_{NL}$ are the non-commutative local current density, and the non-local current density defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{NL} &= -\nabla \chi_{NL}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{J}_L^{nc} &= -\nabla \varphi_L^{nc}(\mathbf{r})' \end{aligned} \quad (54)$$

where $\chi_{NL}, \varphi_L^{nc}$ determined by the following Poisson equation set

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi_{NL}(\mathbf{r}) + \rho_{NL} &= 0 \\ \nabla^2 \varphi_L^{nc}(\mathbf{r}) + \rho_L^{nc} &= 0' \end{aligned} \quad (55)$$

by solving each Poisson equation through the proper boundary conditions, we obtain \mathbf{J}_{NL} and \mathbf{J}_L^{nc} . Therefore, the newly defined total current density satisfies $\nabla \mathbf{J}_{tot}^{nc} = 0$ and therefore, the calculated non-commutative current from this current density satisfies the current conservation.

5. Conclusions

In conclusion, the phase-space non-commutativity introduced in the Schrödinger equation and consequently, the continuity equation obtained in the case of commutativity and in the case of non-commutativity, without forgetting that the Schrödinger equation considered in interaction with non-local and local potentials, this, in turn, is responsible for causing new quantities of density type in the continuity equation. We found that the non-commutativity in phase-space is not suitable for describing the current density in presence of non-local and local potentials. Knowing that the phase-space non-commutativity effect introduced through both of the Bopp-shift linear translation method and the Moyal-Weyl product, under the condition that space-space and momentum-momentum are all commutative, the results in non-commutative phase-space return to that of the usual quantum mechanics.

The results of the present work can be used to investigate the conservation laws by involving the non-commutative geometry such as the non-commutative

CPT symmetry (with the Lorentz invariance), the conservation of weak isospin (with $SU(2)$, Gauge invariance). In the electromagnetism also such as the non-commutative Maxwell's equations, maybe also used in the non-commutative general relativity. We are out looking to investigate the Klein-paradox depending on these results.

Acknowledgements

The author would like to thank Jane Gao Managing Editor of JMP for his help and support.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

- [1] Galperin, M., Nitzan, A. and Ratner, M.A. (2007) Heat Conduction in Molecular Transport Junctions. *Physical Review B*, **75**, Article ID: 155312. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.155312>
- [2] Nayak, G.C. (2013) Holographic Aspects of a Relativistic Nonconformal Theory. *Advances in High Energy Physics*, **2013**, Article ID: 389541. <https://doi.org/10.1155/2013/389541>
- [3] Nayak, G.C. (2013) General Form of Color Charge of the Quark. *European Physical Journal C*, **73**, 2442. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2442-6>
- [4] Coz, M., Arnold, L.G. and MacKellar, A.D. (1970) Nonlocal Potentials and Their Local Equivalents. *Annals of Physics*, **59**, 219-247. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(70\)90401-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(70)90401-X)
- [5] Pattanayak, D.N. and Wolf, E. (1976) Scattering States and Bound States as Solutions of the Schrödinger Equation with Nonlocal Boundary Conditions. *Physical Review D*, **13**, 913-923. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.913>
- [6] Kidun, O., Fominykh, N. and Berakdar, J. (2002) Scattering and Bound-State Problems with Non-Local Potentials: Application of the Variable-Phase Approach. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35**, 9413. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/44/310>
- [7] Reeves, M. and Owen, L.W. (1969) Solution of a Schroedinger Equation with a Nonlocal Potential. *Journal of Computational Physics*, **4**, 572-578. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(69\)90021-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(69)90021-7)
- [8] Taylor, J., Guo, H. and Wang, J. (2001) Ab *Initio* Modeling of Quantum Transport Properties of Molecular Electronic Devices. *Physical Review B*, **63**, Article ID: 245407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.245407>
- [9] Balantekin, A.B., Beacom, J.F. and Cândido Ribeiro, M.A. (1998) Green's Function for Nonlocal Potentials. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, **24**, 2087. <https://doi.org/10.1088/0954-3899/24/11/010>
- [10] Perey, F. and Buck, B. (1962) A Non-Local Potential Model for the Scattering of Neutrons by Nuclei. *Nuclear Physics*, **32**, 353-380. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90345-0](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90345-0)
- [11] Fetter, A.L. and Walecka, J.D. (1971) Quantum Theory of Many-Particle Systems.

McGraw-Hill, New York.

- [12] Feshbach, H. (1958) Unified Theory of Nuclear Reactions. *Annals of Physics*, **5**, 357-390. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90007-1)
- [13] Satchler, G.R. (1983) Direct Nuclear Reactions. Clarendon, Oxford.
- [14] Connes, A. (2000) A Short Survey of Noncommutative Geometry. *Journal of Mathematical Physics*, **41**, 3832. <https://doi.org/10.1063/1.533329>
- [15] Chamseddine, A.H., Connes, A. and Mukhanov, V. (2015) Quanta of Geometry: Noncommutative Aspects. *Physical Review Letters*, **114**, Article ID: 091302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.091302>
- [16] Kastler, D. (2000) Noncommutative Geometry and Fundamental Physical Interactions: The Lagrangian Level—Historical Sketch and Description of the Present Situation. *Journal of Mathematical Physics*, **41**, 3867. <https://doi.org/10.1063/1.533330>
- [17] Madore, J. (1998) Introduction to Non-Commutative Geometry. *Proceedings of Science Corfu 98*, **16**, 1-19.
- [18] Seiberg, N. and Witten, E. (1999) String Theory and Noncommutative Geometry. *Journal of High Energy Physics*, **1999**, Article No. 32. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032>
- [19] Bastos, C. and Bertolami, O. (2008) Berry Phase in the Gravitational Quantum Well and the Seiberg-Witten Map. *Physics Letters A*, **372**, 5556-5559. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.06.073>
- [20] Bertolami, O., Rosa, J.G., de Aragão, C.M.L., Castorina, P. and Zappalà, D. (2005) Noncommutative Gravitational Quantum Well. *Physical Review D*, **72**, Article ID: 025010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.025010>
- [21] Yang, Z.H., Long, C.Y., Qin, S.J. and Long, Z.-W. (2010) DKP Oscillator with Spin-0 in Three-Dimensional Noncommutative Phase Space. *International Journal of Theoretical Physics*, **49**, 644-651. <https://doi.org/10.1007/s10773-010-0244-2>
- [22] Haouam, I. and Chetouani, L. (2018) The Foldy-Wouthuysen Transformation of the Dirac Equation in Noncommutative Phase-Space. *Journal of Modern Physics*, **9**, 2021-2034. <https://doi.org/10.4236/jmp.2018.911127>
- [23] Haouam, I. (2019) The Non-Relativistic Limit of the DKP Equation in Non-Commutative Phase-Space. *Symmetry*, **11**, 223. <https://doi.org/10.3390/sym11020223>
- [24] Haouam, I. (2018) The Phase-Space Noncommutativity Effect on the Large and Small Wave-Function Components Approach at Dirac Equation. *Open Access Library Journal*, **5**, e4108.
- [25] Curtright, T., Fairlie, D. and Zachos, C. (1998) Features of Time-Independent Wigner Functions. *Physical Review D*, **58**, Article ID: 025002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.025002>
- [26] Horiuchi, H. (1980) A Semi-Classical Treatment of Non-Local Potentials. *Progress of Theoretical Physics*, **64**, 184-203. <https://doi.org/10.1143/PTP.64.184>
- [27] Frahn, W.E. and Lemmer, R.H. (1957) Velocity-Dependent Nuclear Interaction. *II Nuovo Cimento*, **6**, 1221-1224. <https://doi.org/10.1007/BF02747404>
- [28] Li, C.S., Wan, L.H., Wei, Y.D. and Wang, J. (2008) Definition of Current Density in the Presence of a Non-Local Potential. *Nanotechnology*, **19**, Article ID: 155401. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/19/15/155401>