REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :156/Ds/2018
N° d'ordre :11/Phy/2018

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences en Physique

Spécialité : Physique Théorique

THEME

INTEGRALE DE CHEMIN ET PROBLEME DEPENDANT DU TEMPS

PAR

BOUCHEMLA NEDJMA

Soutenue le : 13/09/2018.

Devant le jury :

Présidente :	Mme	**B. BENTAG**	Professeur	Université Frères Mentouri Constantine
Rapporteur :	Mr	**L. CHETOUANI**	Professeur	Université Frères Mentouri Constantine
Examinateurs :	Mr	**A. BOUMALI**	Professeur	Université Larbi Tebessi Tébessa
	Mr	**M. AOUACHRIA**	Professeur	Université Hadj Lakhdar Batna
	Mr	**S. ZAIM**	Professeur	Université Hadj Lakhdar Batna
	Mme	**N. BOUDIAF**	M.C .A	Université Frères Mentouri Constantine

Dédicaces

Je dédie ce travail, à l'âme de mon père,

À ma mère,

À mon chèr mari

À mes enfants Lina, Dina et Imad

À mes frangins et frangines

Et à ma belle famille.

Remerciements

En premier lieu, je remercie **Mr CHETOUANI LYAZID** professeur à l'université Frères Mentouri de Constantine à qui je dois beaucoup. En tant que directeur de thèse, il m'a guidé dans mon travail et m'a aidé à trouver des solutions pour avancer.

Je remercie très sincèrement **Mme B. BENTAG** qui m’a fait l’honneur d’être présidente de Jury.
Mes remerciements vont aussi vers **Mr A. BOUMALI**, **Mme N. BOUDIAF**, **Mr M. AOUACHRIA et Mr S. ZAIM,** d’avoir accepté la soutenance de cette thèse achevant ainsi un projet particulièrement important de ma vie.
Je souhaite remercier avec un soin particulier **Mr BENAICHE SALIM** en temps qu’amie, mari et collègue pour son soutien et sa patience, J’ai toujours pu compter sur lui dans les moments difficiles.

Bouchemla Nedjma

Table des matières

Introduction générale

Durant le siècle passé, la science a connue une èvolution importante et plus particulièrement en physique dont son rôle est essentiel pour la description et la compréhension des phénomènes naturels. Mais le pas le plus important nous semble se trouver dans l'explication et la description du mouvement du monde infiniment petit, là où les lois de *Newton* de la mécanique classique cessent de gouverner ce monde microscopique.

Historiquement cet essor a commencé en fin de 19ème siècle et au début de 20ème siècle après l'apparition de nombreuses expériences, l'effet photo-électrique, le rayonnement du corps noir, l'effet Compton... Grâce à ces observations et face aux ambiguïtés rencontrées les physiciens ont mis en place un cadre plus adéquat et notamment la recherche d'un formalisme mathématique valable pouvant régir cette nouvelle science.

C'est ainsi que plusieurs travaux ont été effectués et qui ont connus un succès tels que les travaux de *M. Planck*, *L.De Broglie* et *A.Einstein*, permettant l'apparition des nouveaux concepts fondamentaux constituant la base de la mécanique quantique. Les scientifiques ont alors élaboré plusieurs formalismes repondant aux exigences de la nouvelle mécanique dont parmi les plus importants nous pouvons citer trois formalismes.

Le premier est celui de *W.K.Heisenberg* en 1926, connu par "*la mécanique des matrices*", où l'idée de la notion de trajectoire est abandonnée en introduisant des opérateurs pour quantifier le mouvement d'un système, tout en s'appuyant sur la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. C'est la première théorie de la mécanique quantique connue sous le nom de quantification canonique ou théorie des matrices.

Le deuxième, sans l'idée des opérateurs, *E.Schrödinger* utilise le concept des fonctions d'onde pour décrire l'état d'un système en utilisant les équations différentielles relatif à l'hamiltonien du système, ce formalisme constitue "*la mécanique ondulatoire*".

Enfin, suite à l'observation faite par *P.Dirac* en1933 du rôle primordial joué en mécanique classique par le Lagrangien et qu'il est plus utile que l'Hamiltonien pour décrire un système physique, il conclut que l'amplitude de transition élémentaire est proportionnelle à la quantité $exp(\frac{i}{\hbar}S)$ où S est l'action classique du système [1]. A partir de cette idée, *R.Feynman* propose une nouvelle méthode de quantification qui repose sur le Lagrangien pour décrire un système ne possédant pas nécessairement d'Hamiltonien. Dans le cadre du problème posé par les corrections en électrodynamique quantique relative à la masse de l'électron, *Feynman* dans son travail de thèse en 1942 [2] inclut le principe de moindre action en utilisant un concept mathématique simple, dit "*intégrale de chemin",* Cette méthode dite aussi « *Feynman path integral* » [3] représente la troisième approche de la mécanique quantique.

Le principe de base de cette approche de *Feynman* consiste à définir d'une manière générale, la phase de l'amplitude correspondante à un chemin donné, elle est égale à l'action classique le long de chemin divisée par la constante de *Planck* $\hbar$. La somme de toutes les amplitudes sur toutes les trajectoires possibles (infinités) constitue ce que l'on nomme l'intégrale de chemin. Cette somme constitue la base de ce formalisme.

C'est ainsi que plusieurs domaines de la physique, comme la mécanique quantique relativiste, la physique statistique et la théorie quantique des champs utilisent maintenant cette nouvelle approche [4].

Cependant, malgré le succès dans l'utilisation des intégrales de chemin dans plusieurs domaines de la physique, la difficulté principale constituée par l'atome d'hydrogène (potentiel coulombien) dû à l'absence d'une forme Gaussienne est heureusement résolue par *I.Duru* et *H.Kleinert* en 1978 grâce à l'introduction de l'idée de transformation spatio-temporelle, i.e. une reparamétrisation les chemins suivie par une transformation ponctuelle, depuis, de nombreux travaux ont alors été traités et résolus [4],[5],[6],[7],[8] ce qui constutue un succés pour ce formalisme.

Nous savons par ailleurs que les transformations canoniques [9] ont un rôle important en mécanique classique, ils interviennent également dans ce formalisme de manière élégante, car pour une meilleure compréhension du mouvement d'un système, il est parfois utile de changer de système coordonnées .

Les transformations canoniques sont utilisées lorsqu'on change de système où H et $\mathcal{H}$ sont les Hamiltoniens (ancien et nouvel) régissant les mouvements dans l'ancien et le nouveau systèmes de coordonnées $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ respectivement. En utilisant le fait que le principe du moindre action doit être vérifié dans les systèmes, ancien et nouveau et ceci se traduit du fait que les deux quantités $p\dot{q} - H$ de l'ancien système, et $P\dot{Q} - \mathcal{H}$ du nouveau espace des phases, sont reliées par une fonction arbitraire dite *fonction génératrice*. Au niveau de la formulation des intégrales de chemins, les transformations canoniques sont en principe utilisables. Les transformations canoniques généralisées GCT [10], [11] représentées par une régularisation temporelle et d'une transformation canonique sont un exemple de l'utilisation de ces transformations dans les intégrales de chemins pour traiter les systèmes dépendant du temps.

Notre travail de thèse entre dans le cadre de cette approche : elle est consacrée au traitement des systèmes où la masse et le potentiel sont variables et se subdivise en quatre chapitres.

Dans le premier, des généralités sur le formalisme des intégrales de chemins dans l'espace à une dimension sont présentées et suivie d'une présentation sur les transformations spatio-temporelles de *Duru-Kleinert* ainsi qu'une présentation sur les transformations canoniques généralisées.

Le deuxième chapitre porte sur l'étude des systèmes non relativistes à une dimension où la masse est dépendante uniquement de la position, en utilisant la méthode des transformations spatio-temporelles de *Duru-Kleinert* et en déterminant la fonction de Green correspondante à une forme hermitique.

Dans le troisième chapitre, nous considérons par l'étude les systèmes à masse variable, où la masse dépend non seulement du temps mais également de la position. La dépendance spatiale, nous impose de prendre en considération la forme hermitique, la plus générale, pour l'opérateur hamiltonien, ce qui explique le choix d'une forme symétrique pour cet operateur. l'introduction d'une transformation $x \rightarrow g(y, t)$ entraine l'apparition d'un potentiel effectif de nature purement quantique au niveau de l'action.

Le quatrième chapitre est consacré l'étude des systèmes dissipatifs de forme non quadratique où la masse et le potentiel dépondent non seulement du temps mais également de la position. Le problème d'ordre nous impose de choisir une forme symétrique pour l'opérateur Hamiltonien décrivant le système en question, nous introduisons la méthode des transformations canonique généralisée dite "GCT" par le moyen de deux transformations canoniques successives qui, au niveau du propagateur, font apparaitre un facteur de phase dépendant seulement de la masse en plus de l'oscillateur harmonique avec fréquence qui varie avec le temps. La régularisation par l'intégrale de chemin introduite simplement afin de rendre notre système conservatif et est suivie d'une transformation ponctuelle, donnant naissance encore à un potentiel effectif au niveau de l'action.

Chapitre 1

Intégrale de chemin pour une particule non relativiste de masse constante à une dimension

1.1 Introduction

Le système physique, représenté par un hamiltonien relatif a une particule non relativiste de masse constante à une dimension, a été étudié et traité par l'approche des intégrales de chemin suite à la suggestion de *Dirac* et à la formulation dû à *Feynman* en définissant un outil mathématique dit *« propagateur de Feynman »*, qui contient toutes les informations physiques sur le système en question. Cependant, cette méthode à rencontré des difficultés vue que le traitement d'une certaine classe de potentiel, tel que le potentiel coulombien relatif à l'atome d'hydrogène, n'a pas pu être déterminé et que sa solution n'a pu être obtenu par cette approche que grâce aux travaux de *H.Kleinert* et *I. Duru*. C'est ainsi que cette classe de potentiel a été exactement traité.

Dans ce qui suit, nous présentons la méthode des intégrales de chemin [3] ainsi que la méthode de *Duru-Kleinert* relative à la tansformation spatio-temporelle [4], et la procédure des transformation canoniques généralisées [9],[10],[11].

1.2 Le propagateur

1.2.1 Définition

L'amplitude totale de la probabilité de transition du point A au point B est définie comme le propagateur (kernel) et est notée $K(B, A)$. Par définition c'est la somme de toutes les amplitudes partielles $\Psi[x(t)]$ associées aux différentes trajectoires possibles, autrement dit, c'est la somme des contributions de tous les chemins.

$$K(B, A) = \sum_C \Psi_C[x(t)], \tag{1.1}$$

où la contribution de chaque chemin est égale à une exponentielle avec une phase proportionnelle à l'action :

$$\Psi_C\left[x(t)\right] = N\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_C\left[x(t)\right]\right] \tag{1.2}$$

N étant une constante de normalisation, et S_C est l'action associée au chemin C.

Comme les chemins sont très proches les uns des autres, la somme peut être remplacée par une intégrale, nous obtenons alors l'expression du propagateur

$$K(B,A) = \int_{x(t_A)}^{x(t_B)} Dx(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_C\left[x(t)\right]\right], \tag{1.3}$$

où $Dx(t)$ représente la mesure.

1.2.2 Forme discrète du propagateur

Feynman a définit le propagateur qui décrit le mouvement d'une particule de masse m entre les points $A(x_A, t_A)$ et $B(x_B, t_B)$ sous la forme suivante [3]

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int Dx(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T L(x,\dot{x},t)dt\right], \tag{1.4}$$

où $T = t_B - t_A$ et le Lagrangien L est donné par

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x), \tag{1.5}$$

en subdivisant l'intervalle de temps T en $(N+1)$ intervalles élémentaires égaux tel que

$$T = \left(t_n - t_{n-1}\right)(N+1) = \varepsilon\,(N+1)\,, \tag{1.6}$$

le propagateur exprimé dans (1.4) prend la forme suivante

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}}\prod_{n=1}^{N}\left[\int dx_n\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}A_N\right], \tag{1.7}$$

avec l'action élémentaire

$$A_N = \left[\frac{m}{2\varepsilon}\Delta x_n^2 - \varepsilon V(x_n)\right], \tag{1.8}$$

où $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, $x_B = x(t_{N+1})$ et $x_A = x(t_0)$.

1.2.3 Propagateur dans l'espace des pahses

L'opérateur d'évolution [12] intervient dans la définition du propagateur pour décrire l'évolution d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$ allant de la position x_A a l'instant t_A pour arrivé à x_B à l'instant t_B tel que

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \Theta(t_B - t_A) \langle x_B | \hat{U}(t_B - t_A) | x_A \rangle \ , \tag{1.9}$$

avec $\Theta(t_B - t_A)$ est la fonction de Heaviside définie par

$$\Theta(t_B - t_A) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour} \ \ t_B > \ t_A \\ 0 \quad \text{pour} \ \ \ t_B < \ t_A \end{cases} . \tag{1.10}$$

En subdivisant l'intervalle de temps $T = t_B - t_A$ en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux égaux

$$T = \varepsilon(N+1). \tag{1.10}$$

nous pouvons, décomposer l'opérateur d'évolution en $(N+1)$ opérateurs élémentaires

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \langle x_B | \hat{U}(t_{N+1} - t_N)\hat{U}(t_N - t_{N-1})...\hat{U}(t_n - t_{n-1})...\hat{U}(t_1 - t_0) | x_A \rangle , \tag{1.11}$$

où $t_{N+1} = t_B$, $t_0 = t_A$, et Insérer N relation de fermeture entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n | x_n \rangle \langle x_n | = 1 \ , \qquad n = 1, 2, 3... \tag{1.12}$$

le propagateur peut être écrit sous la forme d'un produit de $(N+1)$ propagateurs élémentaires

$$\begin{aligned} K(x_B,t_B;x_A,t_A) &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\,\hat{U}(t_n-t_{n-1})\,|x_{n-1}\rangle \\ &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right)|x_{n-1}\rangle\,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

où $\hat{H}$ represente l'opérateur hamiltonien de la particule et est donné par

$$\hat{H}(x,p,t)=\hat{T}(p,t)+\hat{V}(x,t), \tag{1.14}$$

où $\hat{T}(p,t)$ est l'opérateur énergie cinétique et $\hat{V}(x,t)$ l'opérateur énergie potentielle.

Utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [13]

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}}=e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{T}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^2\hat{X}}, \tag{1.15}$$

où l'opérateur $\hat{X}$ représente le développement suivant

$$\hat{X}=\frac{1}{2}\left[\hat{V},\hat{T}\right]-\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{1}{6}\left[\hat{V},\left[\hat{V},\hat{T}\right]\right]-\frac{1}{3}\left[\left[\hat{V},\hat{T}\right],\hat{T}\right]\right)+...., \tag{1.16}$$

en insèrant les deux relations de fermeture suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_n\,|x_n\rangle\,\langle x_n|=1\quad, \tag{1.17}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dp_n\,|p_n\rangle\,\langle p_n|=1 \tag{1.18}$$

nous obtenons pour l'opérateur d'évolution infinitésimale dans (1.13)

$$\left\langle x_n \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{H}(t_n)} \right| x_{n-1} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left\langle x_n \right| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{V}(x,t_n)} \left| x_{n-1} \right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}[p_n(x-x_{n-1})-\varepsilon T(\hat{p},t_n)]}, \tag{1.19}$$

et en tenant compte de l'élément de matrice

$$\left\langle x_n \right| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{V}(x,t_n)} \left| x \right\rangle = \delta(x_n - x) e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(x_n,t_n)}, \tag{1.20}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \left\langle x_n \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{H}(t_n)} \right| x_{n-1} \right\rangle \;\; = \;\; & \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} p_n(x_n - x_{n-1}) \right. \\ & \left. -\varepsilon \left(T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n) \right) \right], \end{aligned} \tag{1.21}$$

la substitution de (1.21) dans l'expression du propagateur (1.13) donne la forme finale du propagateur

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} A_n, \tag{1.22}$$

où A_n est l'action

$$A_n = p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon \left[T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n) \right], \tag{1.23}$$

et en définissant la fonction de Green via la transformation de Fourier

$$G(x_B, x_A, E) = \int_{0}^{+\infty} dT \exp\left[\frac{i}{\hbar} ET \right] K(x_B, t_B; x_A, t_A) \tag{1.24}$$

nous obtenons

$$G(x_B, x_A, E) = \int_0^{+\infty} dT \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} A_n^E\right), \tag{1.25}$$

avec l'action

$$A_n^E = \left[p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon(T(p_n, t_n) + V(x_n, t_n) - E)\right]. \tag{1.26}$$

1.3 Procédure de transformation spatio-temporelle

Pour certains systèmes, l'évolution dirècte du propagateur n'a pas été facile[1], le problème majeur résidait dans la singularité au niveau du potentiel. *I.Duru* et *H. Kleinert* ont formulé, en 1978, une méthode dite méthode des transformations spatio-temporelles[4] qui est essentiellement une régularisation du chemin, qui permet de contourner le problème de singularité au moyen de certaines fonctions arbitraires notées $f_l(x)$ et $f_r(x)$ dites fonctions régulatrices, suivie par une transformation ponctuelle $x \rightarrow y$ définie par $x = g(y)$, cette dernière, et par un choix appropriée de la transformation, permet de retrouver la forme gaussienne au niveau de l'intégrale de chemin et par conséquent permet la résolution exacte du problème en question.

1.3.1 Fonction de Green

Considérons une particule, non relativiste, repérée par la position initiale x_A a l'instant t_A et finale x_B a l'instant t_B, l'intégrale de chemin de *Feynman* décrivant l'évolution de ce système dans le potentiel $V(x)$ est donné par (1.22) ou encore en forme continue

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int Dx(t) \int Dp(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p\dot{x} - H)\, dt\right\}, \tag{1.28}$$

où

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{1.27}$$

Faisons intervenir la transformation temporelle en commençant par écrire l'opérateur résolution $\hat{R}$

$$\hat{R} = f_r \frac{i\hbar}{f_l(E - H) f_r} f_l, \tag{1.28}$$

où f_l et f_r sont tel que $f_l(x) f_r(x) = f(x)$. Nous associons a cet opérateur (1.28), une fois exprimer dans la représentation de Schwinger[14], un élément de matrice appeler

[1] Le potentiel de l'atome d'Hydrogène et le Potentiel Coulombien.

Amplitude de transition pour une énergie fixée ou bien simplement fonction de Green

$$
\begin{aligned}
G\left(x_B, x_A; E\right) &= \left\langle x_B\right| \hat{R}\left|x_A\right\rangle = \left\langle x_B\right| f_r \frac{i\hbar}{f_l\left(E-H\right) f_r} f_l\left|x_A\right\rangle \\
&= f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right) \int_0^{\infty} dS \left\langle x_B\right| e^{-\frac{i}{\hbar} f_l(x)(H-E) f_r(x)}\left|x_A\right\rangle, \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

en suivant la procédure habituelle de subdivision l'intervalle de temps en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux tel que $S=(N+1)\varepsilon_s$ et en insérant N relations de fermeture $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left|x_n\right\rangle\left\langle x_n\right| = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} dp_n \left|p_n\right\rangle\left\langle p_n\right| = 1$ et en intégrant sur les variables p_n suite au remplacemant de l'expression de l'opérateur Hamiltonien nous obtenons la forme finale de la fonction de Green calculable suite au choix des fonction $f_l(x)$ et $f_r(x)$

$$
\begin{aligned}
G\left(x_B, x_A; E\right) = {} & \left[f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right)\right]^{\frac{1}{4}} \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} dS \prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
& \times \prod_{n=1}^{N}\left[\frac{dx_n}{\sqrt{f\left(x_n\right)}}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m\Delta x_n^2}{2\varepsilon_s\sqrt{f\left(x_n\right) f\left(x_{n-1}\right)}}\right.\right. \\
& \left.\left. -\varepsilon_s\left(V(x)-E\right)\sqrt{f\left(x_n\right) f\left(x_{n-1}\right)}\right]\right\}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Transformation ponctuelle et corrections

La transformation ponctuelle $x \to F(y)$ et le choix approprier des fonctions $f_l(x)$ et $f_r(x)$ permet de dériver des corrections au niveau de la mesure, de l'action et au niveau du prés-facteur, Ces corrections se déduisent aisément en prenant en considération l'ordre du développement de Taylor effectué.

En prenant en considération que $f_l(x)$ et $f_r(x)$ ont la forme la plus générale $f_l(x) = f^{1-\lambda}(x)$ et $f_r(x) = f^{\lambda}(x)$ où λ est un parrametre arbitraire, et en considérant les notation suivantes

$$
e_1 = F' = \frac{1}{\bar{e}} \quad, e_2 = F'' \quad, e_3 = F'''..., \qquad (1.31)
$$

les corrections en questions prennent les formes suivantes

- La correction sur la mesure

$$C_{mesure} = -\overline{e}e_2\ \Delta y + \frac{1}{2}\overline{e}e_3\ \Delta y^2 + ... \tag{1.32}$$

- La correction sur le pré-facteur

$$C_f = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right)\left(-\frac{f'}{f}\ \Delta y + \frac{1}{2}\ \frac{f''}{f}\Delta y^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda\right)\ \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \Delta y^2 + ... \tag{1.33}$$

- La correction sur l'action

$$\begin{aligned} C_{action} \ &= \ \frac{iM}{\hbar}\frac{(\Delta y)^2}{2\varepsilon_s}\left\{-\left((\overline{e}e_2) - \lambda\frac{f'}{f}\right)\ \Delta y\ + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{3}\ (\overline{e}e_3) + \frac{1}{4}(\overline{e}e_2)^2 + \frac{1}{2}\left(-\lambda\frac{f\ ''}{f} + \lambda(\lambda+1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) - \lambda\overline{e}e_2\frac{f'}{f}\right](\Delta y)^2\right\} \\ &-\frac{iM^2}{2\hbar^2}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_s^2}\left((\overline{e}e_2) - \lambda\frac{f'}{f}\right)^2\ \Delta y^2 + ... \end{aligned} \tag{1.34}$$

1.3.3 Potentiel effectif

une correction totale s'obtient en combinant les trois corrections et se manifeste au niveau de l'action comme un potentiel effectif de nature purement quantique

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{4}\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{8}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right), \tag{1.35}$$

où il a été tenu compte de l'estimation suivante

$$\langle(\Delta q)^{2n}\rangle = \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M}\right)^n (2n-1)!!, \tag{1.36}$$

et la fonction de Green prend la forme finale

$$\begin{aligned} G\left(x_B,x_A;E\right) &= \left[f_l\left(x_A\right)\right) f_r\left(x_B\right)\right)]^{\frac{1}{4}} \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty dS\prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\prod_{n=1}^{N}\int dq_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\Delta q_n^2}{2\varepsilon_s}-\varepsilon_s\left(V\left(F\left(y\right)\right)+V_{eff}-E\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.4 Procédure des transformations canoniques géneralisées

Plusieurs systèmes physiques sont difficiles à décrire et à résoudre par la méthode de Schrödinger, de plus, si le système est dépendant du temps, cette méthode devient encore plus difficile et inadéquate pour décrire ce type de système, il est donc plus commode d'utiliser d'autres méthodes. Les systèmes dépendants du temps sont donc classés dans la catégorie des systèmes qu'on peut traiter de façon moins difficiles en utilisant la méthode des transformations canoniques généralisées [10], [11] où, à travers un calcul classique et en utilisant le formalisme hamiltonien, qui est plus adéquat aux transformations canoniques, nous arrivons a établir la relation générale qui existe entre les propagateurs dans l'ancien et le nouveau système de coordonnée.

Ces transformations ce résume en une transformation d'espace (transformation canonique) suivie par une transformation temporelle, elles sont définies tel que

$$\begin{aligned} x &= Q\rho\left(t/t_0\right), \\ p &= \frac{P}{\rho\left(t/t_0\right)}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\frac{ds}{dt} = \rho^{-2}\left(t/t_0\right), \tag{1.39}$$

où $\rho\left(t/t_0\right)$ est une fonction arbitraire sans dimention.

1.4.1 Propagateur

Dans le formalisme des intégrales de chemin, le propagateur s'écrit formellement sous une forme continue comme

$$K\left(x_f, t_f; x_i, t_i\right) = \int DxDp \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left(p\dot{x} - H\right)dt\right\}, \tag{1.40}$$

Ou encore en utilisant la prescription du mid-point

$$\begin{aligned} K\left(x_f, t_f; x_i, t_i\right) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ & \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} p\left(x_n - x_{n-1}\right) - \varepsilon H\left(p_n, \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.41}$$

où $x_n = x\left(t_n\right)$ et $\varepsilon = t_n - t_{n-1} = \frac{t_f - t_i}{N}$

1.4.2 Première transformation canonique

En effectuant la transformation canonique (1.38) l'hamiltonien du système $H = \frac{p^2}{2m} + V\left(x, t\right)$ se transforme comme

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m\rho^2} - \frac{PQ\dot{\rho}}{t_0 \rho} + V\left(\rho Q, t\right),$$

en utilisant [9]

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{1.42}$$

$$\mathcal{H} = H + \frac{dF_2}{dt} \tag{1.43}$$

$$p\dot{x} - H = P\dot{Q} - \mathcal{H} + \frac{dF}{dt} \tag{1.44}$$

où $F = -PQ + F_2$, et la fonction génératrice responsable de la transformation est

$$F_2\left(x, P, t\right) = PQ = P\frac{x}{\rho}, \tag{1.45}$$

d'où $F = 0$.

L'action se transforme donc comme

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{t_i}^{t_f} \{p\dot{x} - H(x,p,t)\}\, dt \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ P\dot{Q} + \frac{PQ\dot{\rho}}{t_0\rho} - \left(\frac{P^2}{2m\rho^2} + V(\rho Q, t)\right), \right\} dt, \qquad (1.46)
\end{aligned}
$$

donc le propagateur (1.40) se transforme comme

$$
\begin{aligned}
K(x_f,t_f;x_i,t_i) &= \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}} \int DQDP \\
&\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \left\{ P\dot{Q} - \left(\frac{P^2}{2m\rho^2} - \frac{PQ\dot{\rho}}{t_0\rho} + V(\rho Q, t)\right)\right\} dt \right\}, \quad (1.47)
\end{aligned}
$$

1.4.3 Transformation temporelle

Remarquons que le terme cinétique dans (1.47) a une forme inadéquate, vu que le terme de masse est variable, utilisant a ce niveau la transformation temporelle définit dans (1.39) pour le rendre constant, le propagateur prend la forme suivante

$$
\begin{aligned}
K(x_f,t_f;x_i,t_i) &= \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}} \int DQDP \\
&\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{s_i}^{s_f} \left(P\dot{Q} - \left(\frac{P^2}{2m} - \frac{PQ\ \frac{d\bar{\rho}}{dt}}{t_0\bar{\rho}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + \bar{\rho}^2 V\left(\bar{\rho}Q, \int^{s} \bar{\rho}^2 \left(\frac{\sigma}{t_0}\right) d\sigma \right)\right)\right) ds \right\}, \qquad (1.48)
\end{aligned}
$$

où $s_i = \int^{t_i} \frac{d\sigma}{\rho^2\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)}$,$s_f = \int^{t_f} \frac{d\sigma}{\rho^2\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)}$, $\Delta s = s_n - s_{n-1} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_n\bar{\rho}_{n-1}} = \frac{\Delta t}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\bar{s}_n}{t_o}\right)$.

1.4.4 Deuxième transformation canonique

A ce niveau et en regardant l'expression (1.48), nous remarquons que le propagateur n'est toujours pas sous sa forme standard (1.40) a cause de la présence du terme $\frac{PQ\ \frac{d\bar{\rho}}{dt}}{t_0\bar{\rho}}$, cependant, une seconde transformation canonique est nécessaire pour le ramener a la forme standard donc nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P - \frac{mQ\ \frac{d\bar{\rho}}{dt}}{t_0\bar{\rho}} \\ \mathcal{Q} &= Q \end{aligned} \tag{1.49}$$

la fonction géneratrice responsable de la transformation est donc

$$F_2'(Q,P,s) = PQ - \frac{mQ^2 \frac{d\bar{\rho}}{dt}}{2t_0\bar{\rho}}, \tag{1.50}$$

suite a cette deuxième transformation canonique, le nouvel hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(Q,\mathcal{P},s) = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 Q^2 + \bar{\rho}^2 V\left(\bar{\rho}Q, \int^{s} \bar{\rho}^2\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)d\sigma\right), \tag{1.51}$$

où

$$\Omega^2 = \frac{1}{t_0^2}\left[\frac{\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}}{\bar{\rho}} - 2\left(\frac{\frac{d\bar{\rho}}{dt}}{\bar{\rho}}\right)^2\right] = \frac{\rho^3}{t_0^2}\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}, \tag{1.52}$$

et avec une mesure invariante, le propagateur s'écrit finalement sous une forme standard

$$\begin{aligned} K(x_f,t_f;x_i,t_i) &= \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar t_0}\left(\frac{\frac{d\bar{\rho}_f}{dt}}{\rho_f}Q_f^2 - \frac{\frac{d\bar{\rho}_i}{dt}}{\rho_i}Q_i^2\right)\right] \\ &\quad \int DQD\mathcal{P}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{s_i}^{s_f}\left(\mathcal{P}\dot{Q} - \mathcal{H}'(Q,\mathcal{P},s)\right)ds\right\}, \end{aligned} \tag{1.53}$$

La transformation canonique géneralisée appliquée sur (1.40) a fait apparaitre , au niveau du propagateur (1.53), une phase et un terme quadratique qui sont tous les deux dépendants uniquement de la transformation canonique génralisée.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté,en premier lieu, la formulation des intégrale de chemin qui est une formulation de la mécanique quantique et qui s'appuit essentiellement sur des notions de la mecanique classique tel que l'action et le chemin. En deuxième lieu, nous avons exposé la méthode des transformations spatio-temporelle souvent indispensables à l'étude des systèmes de la physique quantique non relativiste. En troisième lieu, nous avons présenter la méthode des transformation canoniques généralisées qui est une méthode plus adéquate pour l'étude des systèmes dépendants du temps.

Chapitre 2

Intégrale de chemin pour les systèmes non relativistes à masse variable dépendante de la position à une dimension

2.1 Introduction

Il existe beaucoup de problèmes en physique où l'on peut assimiler l'évolution d'un phénomène par une équation du type Schrödinger, Klein-Gordon ou même de Dirac, relative à une particule de masse variable dans l'espace. Le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique, représentant (en physique du solide) le réseau cristallin, est assimilé au mouvement d'une particule libre avec une masse effective, qui dépend essentiellement des caractéristiques du réseau. Si l'échantillon est composé de plusieurs parties représentant de différents matériaux, la masse prendra évidement des valeurs différentes dans chaque structure. Pour cela, pour différents modèles de distribution de la masse, fonction de la position, des solutions aux équations de Schrödinger, Klein-Gordon et Dirac ont été obtenues. Vu, la difficulté et la complexité du problème, on se limite souvent à des modèles à une dimension, en choisissant des potentiels connus en mécanique quantique, auxquels on associe des distributions de masse appropriées de telle sorte que l'équation étudiée peut par des transformations adéquates, se ramener à une équation équivalente qu'on peut résoudre par les méthodes usuelles.

En ce qui nous concerne, nous présentons le problème de la masse variable dans le cadre non relativiste par l'approche des integrales de chemin, ce problème n'a pas été suffisamment étudié, par rapport a la grande littérature qui lui a été consacrée [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], nous considérons donc le problème des système quantique a masse variable dépendante de la position à une dimension dans le cadre non relativiste en adoptant la procédure des transformations spatio-temporelle de Duru-Kleinert, en partant d'un hamiltonien quantique bien symétrisé.

2.2 Opérateur Hamiltonien hermitique

Considérons un système quantique dont la masse dépond de la position à une dimension $m = m(x)$ et qui évolue dans le potentiel $V(x)$. Il est clair que la partie cinétique peut étre écrite de differentes façons, car en representation position où l'opérateur impulsion est donné par $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ on peut avoir par exemple

$$\frac{P^2}{m(x)} = -\hbar^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx},$$

ou encore

$$\frac{P^2}{m(x)} = \frac{-\hbar^2}{2}\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}(x)}\frac{d}{dx}\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}(x)}$$

et d'autres formes car dans le cas de masse variable, il n'existe pas de règle exacte, pour écrire la partie cinetique. Dans la littérature, il existe plusieurs propositions[22] et la forme générale pour un operateur Hamiltonien hermitique est celle donnée par *Von Roos* [23],[24] sous la forme suivante

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(x)\,\hat{p}m^{\beta}(x)\,\hat{p}m^{\gamma}(x) + m^{\gamma}(x)\,\hat{p}m^{\beta}(x)\,\hat{p}m^{\alpha}(x)\right] + V(x)\,, \tag{2.1}$$

où les paramètres α, β et γ sont des nombres réels et sont tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = -1. \tag{2.2}$$

Pour chaque choix différents des paramètres α, β et γ, il correspond un hamiltonien different et par conséquent un spèctre d'énergie different. C'est pour cette raison que les parramètres de l'équation (2.2) sont appelés "paramètres d'ambiguité ".

Simplifions l'étude du problème de masse variable, en considérant le cas simple de l'hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}\frac{1}{m(x)}\hat{p} + V(x)\,, \tag{2.3}$$

où les paramètres sont fixés à $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = -1$.

Pour surmonter le problème d'ordre qui apparait dans la forme de l'Hamiltonien (2.3), nous utilisons la relation de commutation canonique suivante

$$\left[\hat{p}, \{m(x)\}^{\alpha}\right] = -i\hbar\alpha m'(x)\,\{m(x)\}^{\alpha-1}\,, \tag{2.4}$$

qui nous permet de trouver l'Hamiltonien du système sous la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\hbar^2}{4}\left[-\frac{m''(x)}{m(x)^2} + \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right] + V(x), \tag{2.5}$$

où $m'(x) = \frac{dm(x)}{dx}$. Remarquons l'apparition d'un nouveau terme en $\hbar^2$ qui est purement quantique.

2.3 Fonction de Green et potentiel effectif

Suivant la procédure habituelle de construction du propagateur, en passant par l'opérateur résolution R exprimé en représentation de Schwinger et en utilisant les fonctions régulatrices $f_l(x)$ et $f_r(x)$ tel que $f_l(x).\ f_r(x) = f(x)$ et avec un choix bien déterminé de $f_l(x)$ et $f_r(x)$ où $f_l(x) = f_r(x) = f^{\frac{1}{2}}(x)$, la fonction de Green s'écrit

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) \quad &= \quad \sqrt{f(x_B)f(x_A)} \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty dS \left[\prod_{n=1}^{N} \int dx_n\right] \\ &\times \prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{1}{2i\pi\hbar\varepsilon_s\sqrt{f(x_n)f(x_{n-1})/m(x_n)m(x_{n-1})}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{(\Delta x)^2}{2\varepsilon_s}\sqrt{\frac{m(x_n)}{f(x_n)}}\sqrt{\frac{m(x_{n-1})}{f(x_{n-1})}} - \varepsilon_s W\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$W = f(x)\left(V(x_n) - E\right) + \frac{\hbar^2}{4}f(x_n)\left(\frac{m''(x_n)}{m^2(x_n)} - \frac{3}{2}\frac{m'^2(x_n)}{m^2(x_n)}\right), \tag{2.7}$$

nous remarquons que le terme cinétique a une forme inhabituelle contenant une masse dépendante de l'espace, pour simplifier la forme du terme cinétique nous posons

$$g(x) = \frac{f(x)}{m(x)}, \tag{2.8}$$

Cette dépendance spatiale, nous l'éliminons par une transformation de coordonnées $x \rightarrow y$ définie par

$$x = F(y) \tag{2.9}$$

qui engendre

-une 1ére correction au niveau du jacobien de la transformation, les trois corrections sont

$$C_{mes} = -\frac{F''}{F'}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}(\Delta y)^2 + \cdots \ , \tag{2.10}$$

-une 2ème correction sur le prè-facteur

$$C_f = \frac{F''}{F'}\Delta y + \left(\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}\right)(\Delta y)^2 + ..., \tag{2.11}$$

- et une 3ème correction au niveau de l'action

$$C_{act} = \frac{i}{\hbar}\frac{\Delta y^2}{2\varepsilon_s}\left(-\frac{1}{6}\frac{F'''}{F'} + \frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)(\Delta y)^2 + ... \tag{2.12}$$

Ces 3 corrections se combinent pour donner une correction totale

$$C_T = \frac{i}{\hbar}\frac{\Delta y^4}{2\varepsilon_S}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}\right] + \frac{i}{\hbar}\frac{\Delta y^6}{2\varepsilon_S}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\frac{F'''}{F'} + \frac{1}{4}\left(\frac{F'''}{F'}\right)^4\right] + ... \tag{2.13}$$

qui se traduit par un potentiel suplémentaire dans l'action dit potentiel effectif

$$V_{eff} = -\hbar^2\left[\frac{1}{4}\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{8}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right]. \tag{2.14}$$

A la limite quand $N \longrightarrow \infty$, nous déduisant la formule finale de la fonction de Green relative au problème de masse variable

$$G\left(x_B,x_A,E\right)=\left[m_Bm_AF_B'F_A'\right]^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}dS\int Dy\left(s\right)e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^S ds\left(\frac{\dot{y}^2}{2}-W\right)}, \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned} W &= \left(F'\right)^2\left[m\left(V-E\right)+\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{m''}{m}-\frac{3}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right)\right] \\ &\quad +\hbar^2\left(\frac{1}{4}\frac{F'''}{F'}-\frac{3}{8}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

et $m=m\left(x\right)=m\left(F\left(y\right)\right),\ m'=m'\left(x\right)=m'\left(F\left(y\right)\right),\ m''=m''\left(x\right)=m''\left(F\left(y\right)\right)$ et $V=V\left(x\right)=V\left(F\left(y\right)\right).$

2.4 Applications

2.4.1 Première application : $m\left(x\right)=cx^2$ et $V\left(x\right)=\frac{A}{cx^4}+\frac{B}{cx^2}, c\neq 0.$

Dans cette exemple, considérons une particule d'une masse croissante quadratiquement en présence d'un potentiel singulier [25]. Le choix de $f_l=f_r=\sqrt{m}$, permet de ramener le potentiel en question a la forme d'une barrière centrifuge, dans ce cas une transformation d'espace est inutile vu que la solution du cas d'un OH avec barrière centrifuge est déjà connue, donc pour

$$m\left(x\right)=cx^2 \quad , \quad V\left(x\right)=\frac{A}{cx^4}+\frac{B}{cx^2}, \tag{2.17}$$

la transformation effectuée est une transformation identique

$$x=F\left(y\right)=y, \tag{2.18}$$

la fonction de Green (2.15) prend la forme suivante

$$G\left(x_B, x_A, E\right) = c x_B x_A \int_0^\infty dS \int Dx\left(s\right) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^s ds\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - cEx^2 + \frac{A+\hbar^2}{x^2} + B\right)}. \tag{2.19}$$

Avec ce choix, nous déduisons que la fonction de Green relative au problème de masse dépendante de la position est réduite à celle d'une particule de masse constante égale à 1 et soumise à l'action d'une force harmonique et une barrière centrifuge [26],[27]. Afin d'extraire le spectre des énergies et les fonctions d'onde correspondantes, nous intégrons sur les x

$$\begin{aligned} G\left(x_B, x_A, E\right) &= c x_B x_A \left(x_B x_A\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dS \frac{\omega e^{\frac{i}{\hbar}\frac{B}{\omega}\omega s}}{i\hbar} I_\nu\left(\frac{\omega x_A x_B}{i\hbar \sin\left(\omega S\right)}\right) \\ & \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\omega\left(x_B^2 + x_A^2\right)\cot\left(\omega S\right)\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec $cE = \frac{1}{2}\omega^2$ et I_ν est la fonction de Bessel modifiée où

$$\nu = \left(-\frac{2A}{\hbar^2} - \frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.21}$$

A l'aide de la formule Hill-Hardy

$$\frac{Z^{\frac{-\nu}{2}}}{1-Z} e^{\frac{-1}{2}(X+Y)\frac{1+Z}{1-Z}} I_\nu\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{1-Z}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)} e^{\frac{-1}{2}(X+Y)} Z^n \left(XY\right)^{\frac{\nu}{2}} L_n^\nu\left(X\right) L_n^\nu\left(Y\right)$$

qui donne la fonction de Green en fonction des *Polynômes de Laguerre*, et en choisissant

$$X = \frac{\omega}{\hbar} x_A^2 \quad , \quad Y = \frac{\omega}{\hbar} x_B^2 \quad , \quad Z = e^{-2i\omega S} , \tag{2.22}$$

nous obtenons

$$E_n = -\frac{B^2}{2c\left(2n+\nu+1\right)^2 \hbar^2} \qquad \text{avec } \ n = 0, 1, 2.. \tag{2.23}$$

et les fonction d'onde correspondantes convenablement normalisées

$$\Psi_n(x) = \left[\frac{2\omega B}{\hbar^3}\frac{x^3 n!}{(2n+\nu+1)^2\,\Gamma(n+\nu+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega}{\hbar}x_A^2\right]^{\frac{\nu}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\left(x_A^2\right)\right)L_n^{\nu}\left(\frac{\omega}{\hbar}x_A^2\right) \tag{2.24}$$

et qui sont en parfait accord avec la littérature [25]

2.4.2 Deuxième application : $m(x) = m_0 e^{cx}$ et $V(x) = V_0 e^{cx}$

Considérons une particule ayant une masse de forme exponentielle, en présence d'un potentiel de même forme [25], tel que

$$m(x) = m_0 e^{cx} \quad , \quad V(x) = V_0 e^{cx}, \tag{2.25}$$

il est clair que le potentiel diverge a l'infinie, une transformation de la forme

$$x = F(y) = \ln y^{\frac{2}{c}}, \tag{2.26}$$

permet d'éviter cette divergence. Nous obtenons pour les différent termes de la fonction de Green (2.15)

$$G(x_B, x_A, E) = \frac{2}{c}\frac{m_0 e^{\frac{c}{2}(x_B+x_A)}}{(y_B y_A)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty} dS e^{\frac{i}{\hbar}\frac{4m_0\omega E}{c^2\omega}S}\int Dy(s)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{s} ds\left(\frac{\dot{y}^2}{2}-\frac{4m_0V_0}{c^2}y^2-\frac{\hbar^2}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{y^2}\right)}. \tag{2.27}$$

Nous remarquons aussi que cette nouvelle action est exactement celle relative à une particule de masse égale à 1, soumise à l'action d'une force harmonique et une barrière centrifuge [26],[27].

Le spectre des énergies et les fonctions d'onde correspondantes se déduisant aisément.

l'intégration sur les variables x_n donne

$$\begin{aligned} G\left(x_B, x_A, E\right) &= \frac{2}{c}\frac{m_0 e^{\frac{c}{2}\left(x_B+x_A\right)}}{\left(y_B y_A\right)^{\frac{1}{2}}}\left(y_B y_A\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\infty} dS e^{\frac{i}{\hbar}\frac{4m_0\omega E}{c^2\omega}S}\frac{\omega e^{\frac{i}{\hbar}\frac{4m_0 E}{c^2}S}}{i\hbar\sin\left(\omega S\right)} I_\nu\left(\frac{\omega y_B y_A}{i\hbar\sin\left(\omega S\right)}\right) \\ & \exp\left(\frac{i\omega}{2\hbar}\left(y_B^2+y_A^2\right)\cot\left(\omega S\right)\right), \end{aligned} \tag{2.28}$$

où I_ν son les fonctions de Bessel modifier avec

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.29}$$

A l'aide de la formule de Hill-Hardy, nous obtenons pour le choix

$$X = \frac{\omega}{\hbar}y_A^2 \qquad , \qquad Y = \frac{\omega}{\hbar}y_B^2 \qquad , \qquad Z = e^{-2i\omega S}, \tag{2.30}$$

la fonction de Green suivante

$$\begin{aligned} G\left(x_B, x_A, E\right) &= \frac{2m_0 e^{\frac{c}{2}\left(x_B+x_A\right)}}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega}{\hbar}q_B^2\right]^{\frac{\nu}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\left(q_B^2\right)\right)L_n^\nu\left(\frac{\omega}{\hbar}q_B^2\right) \\ & \times\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega}{\hbar}q_A^2\right]^{\frac{\nu}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\left(q_A^2\right)\right)L_n^\nu\left(\frac{\omega}{\hbar}q_A^2\right) \\ & \times\int\limits_0^{\infty} e^{-i\omega S\left(1+\nu-\frac{4m_0 E}{\hbar c^2\omega}+2n\right)}dS. \end{aligned} \tag{2.31}$$

où le spectre des énergies est alors

$$E_n = \sqrt{\frac{\nu}{2m_0}}\hbar c\left(2n+1+\nu\right), \quad n = 1, 2, 3.... \tag{2.32}$$

et les fonction d'onde correspondantes convenablement normalisées

$$\Psi_n\left(x\right) = \left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\omega}{2\hbar}e^{cx}\right]^{\frac{\nu}{2}}\exp\left(\frac{cx}{2}-\frac{\omega}{2\hbar}e^{cx}\right)L_n^\nu\left(\frac{\omega}{\hbar}e^{cx}\right). \tag{2.33}$$

et qui sont en parfait accord avec la littérature [25].

2.5 Conclusion

Le formalisme des intégrales de chemin a montré que c'est un formalisme équivalent aux autres approches.

La méthode de Duru-Kleinert a été appliquée pour les systèmes ayant une masse variable à une dimension (la partie cinétique ayant une masse variable) et par un choix approprier pour l'opérateur hamiltonien, cette dernière a engendrer l'apparition d'un terme supplémentaire dépendant de la masse et ses dérivées Ce terme en $\hbar^2$ est donc de nature quantique, et par conséquent la dépendance spatiale au niveau du terme cinétique a été absorbée.

La transformation spatio-temporelle a ramené le problème en question a celui d'un oscillateur harmonique en présence d'une barrière centrifuge dans les deux cas traités, le spectre des énergie et les fonctions d'onde normalisées ont été trouvées et sont en parfait accord avec la littérature.

Chapitre 3

Intégrale de chemin pour les systèmes à masse variable dépendante de la position et du temps (traitement dans l'espace des configurations par la méthodes des transformations spatio-temporelles)

3.1 Introduction

Jusqu'à maintenant, et par l'approche des intégrales de chemin, seuls les problèmes relativistes et non relativistes de masse dépendante de la position et du temps ont été traités[28] [29], en utilisant la procédure des transformations spatio-temporelle en particulier. Notre objectif dans ce chapitre est de considérer, toujours par l'approche des intégrales de chemin, le problème le plus général qui est celui des systèmes à masse variable dépendante non seulement de la position mais également dépendante du temps, ce type de système est dit dissipatif, nous voulons voir si la méthode de Duru-Kleinert peut étre généraliser en considérant ce type de système.

3.2 Hérmiticité

La forme la plus générale pour un hamiltonien hermitique est

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left(\hat{m}^{\alpha}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\gamma} + \hat{m}^{\gamma}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\alpha}\right) + \hat{V}, \tag{3.1}$$

où les parramètres d'ambiguité vérifient la condition $\alpha + \beta + \gamma = -1$.

Nous pouvons toujours, en utilisant les relations de commutations $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$,ramener l'hamiltonien précédent à la forme hermitique suivante

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right) + \hat{V}, \tag{3.2}$$

avec la correction quantique qui est absorbée dans le potentiel. En choisissant les parramètre d'ambiguité α, β et γ tel que $\alpha = -1$ et $\beta = \gamma = 0$ et avec bien sure $\hat{m} = m\left(\hat{x}, \hat{t}\right)$ et $\hat{V} = V\left(\hat{x}, \hat{t}\right)$.

3.3 Propagateur

Symboliquement, le noyau propagateur vérifie l'équation suivante

$$\left(\hat{H}-\hat{E}\right)\hat{K}=-i\hbar\ , \tag{3.3}$$

et son expression, formellement, est alors

$$\hat{K}=\frac{i\hbar}{\hat{E}-\hat{H}}, \tag{3.4}$$

ou encore

$$\hat{K}=\hat{f}^{\frac{1}{2}}\frac{i\hbar}{\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}-\hat{H}\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}}\hat{f}^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

où nous avons choisis dés le début $f_l=f_r=f^{\frac{1}{2}}$ avec, biensure, $\hat{f}=f\left(\hat{x},\hat{t}\right)$ est une fonction régulatrice arbitraire que nous choisissons par la suite, elle est introduite de manière symétrique et son choix dépend de la forme du potentiel ainsi que celle de la masse. le propagateur -élément de matrice du noyau- prend la nouvelle forme suivante

$$K\left(x_{b,}t_b;x_a,t_a\right)=\hat{f}_b^{\frac{1}{2}}\hat{f}_a^{\frac{1}{2}}\int_{S_a}^{\infty}dS_b\left\langle x_bt_b\right|e^{\frac{i}{\hbar}(S_b-S_a)\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\hat{E}-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+\hat{V}\right]+i0^+\right)\right]\hat{f}^{\frac{1}{2}}}\left|x_at_a\right\rangle \tag{3.6}$$

où $i0^+$ a été ajouté pour régulariser l'intégrale.

Décomposons l'exponentielle$(N+1)$ fois avec $\varepsilon_s=\frac{S_b-S_a}{N+1}=\Delta s$,

$$K=\hat{f}_b^{\frac{1}{2}}\hat{f}_a^{\frac{1}{2}}\int_{S_a}^{\infty}dS_b\left\langle x_bt_b\right|e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+\hat{V}\right]\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}}\underbrace{\ldots}_{(N+1)\ fois}e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+\hat{V}\right]\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}}\left|x_at_a\right\rangle \tag{3.7}$$

à l'aide de N relations de fermetures

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n dt_n \left|x_n t_n\right\rangle \left\langle x_n t_n\right| &= 1, && (3.8)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} dp_n dE_n \left|p_n E_n\right\rangle \left\langle p_n E_n\right| &= 1, && (3.9) \end{aligned}$$

nous éliminons les opérateurs $\hat{x}, \hat{t}, \hat{p}, \hat{E}$ en utilisant les relations définissant leurs actions sur les kets correspondants

$$\hat{x}\left|xt\right\rangle = x\left|xt\right\rangle, \; \hat{t}\left|xt\right\rangle = t\left|xt\right\rangle, \;\; \hat{p}\left|pE\right\rangle = p\left|pE\right\rangle, \;\; \hat{E}\left|pE\right\rangle = E\left|pE\right\rangle, \tag{3.10}$$

et nous déterminons le propagateur infinitésimal

$$\left\langle x_n t_n\right| e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}\sqrt{f}-\frac{1}{4}\sqrt{f}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+\hat{V}\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}} \left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\simeq\;& \left\langle x_n t_n\right| 1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}-\frac{1}{4}\sqrt{f}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+V\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle,\\
\simeq\;& \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle\\
&-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \left\langle x_n t_n\right| \hat{f}^{\frac{1}{2}}\left(\hat{E}-\frac{1}{4}\sqrt{\hat{f}}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right)+V\right)\hat{f}^{\frac{1}{2}}\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle,\\
=\;& \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle\\
&-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\left\{\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\left\langle x_n t_n\right|\hat{E}\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle \hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\right.\\
&-\frac{\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}}{4}\left(\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}\right)\left\langle x_n t_n\right|\hat{p}^2\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle\\
&-\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\left\langle x_n t_n\right| V\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

et à l'aide du produit scalaire $\left\langle xt \,|pE\right\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}}{(2\pi\hbar)^2}$ pour le changement de base $\left|xt\right\rangle \to \left|pE\right\rangle$

$$\begin{aligned}
\sqrt{f_n}\left\langle x_n t_n\right|\hat{E}\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle\sqrt{f_{n-1}} &= \int\frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2}\left\langle x_n t_n\right|\hat{E}\left|E_n,p_n\right\rangle\left\langle E_n,p_n\right.\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle, \\
&= \int\frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2}E_n e^{-\frac{i}{\hbar}\left[E_n(t_n-t_{n-1})-p_n(x_n-x_{n-1})\right]}, \qquad (3.12)\\
\text{et}\quad \left\langle x_n t_n\right|\hat{p}^2\left|x_{n-1}t_{n-1}\right\rangle &= \int\frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2}p_n^2 e^{-\frac{i}{\hbar}\left[E_n(t_n-t_{n-1})-p_n(x_n-x_{n-1})\right]}, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

nous obtenons alors la forme suivante pour le propagateur

$$K=\hat{f}_b^{\frac{1}{2}}\hat{f}_a^{\frac{1}{2}}\int_{S_a}^{\infty}dS_b\int\prod_{n=1}^{N}dx_n dt_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}A_{n,n-1}}, \qquad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned}
A_{n,n-1} &= -E_n\left(t_n-t_{n-1}\right)+p_n\left(x_n-x_{n-1}\right)\\
&\quad+\varepsilon_s\left\{E_n\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}-\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_n-1}\right)p_n^2-\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}V_{n-1}\right\},\\
&= -E_n\left[\left(t_n-t_{n-1}\right)-\varepsilon_s\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\right]+p_n\left(x_n-x_{n-1}\right)\\
&\quad-\varepsilon_s\left\{\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_n-1}\right)p_n^2+\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}V_{n-1}\right\}, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

est l'action infinitésimale avec $x_n=x\left(s_n\right),t_n=t\left(s_n\right)$ et $x_a=x\left(s_a\right),x_b=x\left(s_b\right),t_a=t\left(s_a\right)$ et $t_b=t\left(s_b\right)$.

Intégrons sur les p_n et posons pour simplifier

$$\begin{aligned}
M_{n,n-1} &= \frac{2m_n m_{n-1}}{\hat{f}_n^{\frac{1}{2}}\hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}}\left(m_{n-1}+m_n\right)}\\
&= \frac{2m\left(x_n,t_n\right)m\left(x_{n-1},t_{n-1}\right)}{\sqrt{f\left(x_n,t_n\right)f\left(x_{n-1},t_{n-1}\right)}\left[m\left(x_n,t_n\right)+m\left(x_{n-1},t_{n-1}\right)\right]}, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

et intégrons sur les E_n, il apparait alors une fonction de Dirac qui exprime que t et s

sont reliés par la relation $\dfrac{dt}{ds} = f$

$$
\begin{aligned}
K \quad = \quad & \hat{f}_b^{\frac{1}{2}} \hat{f}_a^{\frac{1}{2}} \int_{S_a}^{\infty} dS \prod_{n=1}^{N} dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \delta \left[\Delta t_n - \varepsilon_s \hat{f}_n^{\frac{1}{2}} \hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}} \right] \sqrt{\frac{M_{n,n-1}}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \\
& \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{M_{n,n-1} \left(\Delta x_n\right)^2}{2\varepsilon_s} - \varepsilon_s \hat{f}_n^{\frac{1}{2}} \hat{f}_{n-1}^{\frac{1}{2}} V_{n-1} \right] \right\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

l'action se met donc sous la forme standard mais en présence d'une masse variable $M_{n,n-1}$.

3.4 Transformation

Effectuons maintenant la transformation ponctuelle définie par

$$x \to y: \qquad x = g(y,t), \tag{3.18}$$

alors

$$M_{n,n-1} = \frac{2m\left(g\left(y_n,t_n\right),t_n\right)m\left(g\left(y_{n-1},t_{n-1}\right),t_{n-1}\right)}{\sqrt{f\left(g\left(y_n,t_n\right),t_n\right)f\left(g\left(y_{n-1},t_{n-1}\right),t_{n-1}\right)}\left[m\left(g\left(y_n,t_n\right),t_n\right)+m\left(g\left(y_{n-1},t_{n-1}\right),t_{n-1}\right)\right]} \tag{3.19}$$

est une fonction des 4 variables $(y_n, t_n, y_{n-1}, t_{n-1})$ ou encore de $\left(\bar{y}_n, \bar{t}_n, \frac{\Delta y_n}{2}, \frac{\Delta t_n}{2}\right)$. Nous avons introduit la notation suivante

$$\bar{u}_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, \qquad \Delta u_n = u_n - u_{n-1}. \tag{3.20}$$

Avec la nouvelle variable y, nous avons d'abord

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_n - x_{n-1} \\ &= g\left(y_n,t_n\right) - g\left(y_{n-1},t_{n-1}\right) \\ &\simeq \Delta y \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \Delta t \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + \frac{(\Delta y)^3}{24}\frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3} + ... \end{aligned} \tag{3.21}$$

et le carré est alors

$$(\Delta x)^2 \simeq (\Delta y)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\right)^2 + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\right)^2 + 2\Delta y \Delta t \frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + \frac{(\Delta y)^4}{12}\frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}. \tag{3.22}$$

Développons $M_{n,n-1}$ en série de Taylor

$$M_{n,n-1} \simeq \bar{M} + \Delta y M_{\bar{y}} + \Delta t M_{\bar{t}} + \frac{(\Delta y)^2}{2} M_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{(\Delta t)^2}{2} M_{\bar{t}\bar{t}} + \Delta t \Delta y M_{\bar{t}\bar{y}},$$

et comme $M_{n,n-1}$ invariant dans le changement de $(\Delta t, \Delta y)$ par $(-\Delta t, -\Delta y)$,

$$M_{n,n-1} \simeq \bar{M} - \Delta y M_{\bar{y}} - \Delta t M_{\bar{t}} + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 M_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 M_{\bar{t}\bar{t}} + \Delta t \Delta y M_{\bar{t}\bar{y}},$$

et après addition, nous avons le developement

$$M_{n,n-1} \simeq \bar{M} + \frac{(\Delta y)^2}{2} M_{\bar{y}\bar{y}} \ . \tag{3.23}$$

3.4.1 Corrections

En tenant compte de l'estimation $(\Delta y)^2 \simeq \varepsilon_s$, nous retenons seuls les termes qui contribuent à l'action et qui sont de l'ordre de ε_s, nous avons alors respectivement les développements autour du mid-point

Correction du terme cinétique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon_s} M_{n,n-1} (\Delta x)^2 &= \frac{1}{2\varepsilon_s} \left(\bar{M} + \frac{(\Delta y)^2}{2} M_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{(\Delta t)^2}{2} M_{\bar{t}\bar{t}} + \Delta t \Delta y M_{\bar{t}\bar{y}} + ... \right) \\ &\quad \times \left((\Delta y)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \right)^2 + 2 \Delta y \Delta t \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\Delta y)^4}{12} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + ... \right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon_s} M_{n,n-1} (\Delta x)^2 \quad \simeq \quad & \frac{1}{2\varepsilon_s} \left((\Delta y)^2 \bar{M} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 + (\Delta t)^2 \bar{M} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \right)^2 + 2\Delta y \Delta t \bar{M} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \right. \\
& \left. + \frac{(\Delta y)^4}{12} \bar{M} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{1}{4\varepsilon_s} (\Delta y)^4 M_{\bar{y}\bar{y}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \\
= \quad & \frac{(\Delta y)^2}{2\varepsilon_s} \bar{M} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \Delta y \bar{M} \bar{f}_n \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + \frac{\varepsilon_s}{2} \bar{M} \bar{f}_n^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \right)^2 \\
& + \frac{1}{24\varepsilon_s} (\Delta y)^4 \bar{M} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{4\varepsilon_s} (\Delta y)^4 M_{\bar{y}\bar{y}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right)^2 \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Correction de la racine

$$
\sqrt{\frac{M_{n,n-1}}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M} + \frac{(\Delta y)^2}{2} M_{\bar{y}\bar{y}}}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M}}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{4} \frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} \right). \qquad (3.26)
$$

Correction de la mesure (jacobien relatif à la transformation $x \to y$)

$$
dx = g\prime dy, \qquad (3.27)
$$

$$
\prod_{n=1}^{N} dx_n = \prod_{n=1}^{N} g\prime_n dy_n = \frac{1}{(g\prime_b g\prime_a)^{1/2}} \prod_{n=1}^{N+1} (g\prime_n g\prime_{n-1})^{1/2} \prod_{n=1}^{N} dy_n \quad , \qquad (3.28)
$$

avec

$$
\prod_{n=1}^{N+1} (g\prime_n g\prime_{n-1})^{1/2} = \bar{g}'_n \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y_n}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'} \right)^2 - \frac{\bar{g}'''_n}{\bar{g}'_n} \right] \right] \quad , \qquad (3.29)
$$

est le développement autour du mid-point, alors le propagateur devient

$$
\begin{aligned}
K &= \left(f_b f_a\right)^{\frac{1}{2}} \left(g\prime_b g\prime_a\right)^{\frac{-1}{2}} \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int \prod_{n=1}^{N+1} dy_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \\
&\quad \prod_{n=1}^{N+1} \delta\left[\Delta t_n - \varepsilon_s \bar{f}_n\right] \left(1 + C_{Racine}\right)\left(1 + C_{measure}\right)\left(1 + C_{action}\right) \\
&\quad \times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\left(\Delta y_n\right)^2}{2\varepsilon_s} \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2 + \Delta y_n \bar{M}_n \bar{f}_n \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}_n} \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\varepsilon_s}{2} \bar{M} \bar{f}_n^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\right)^2 - \varepsilon_s \bar{f}_n \bar{V}_n \right] \right\}, \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

où les corrections sont respectivement données par

$$
\begin{aligned}
C_{measure} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}'}\right)^2 - \frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}\right], \qquad (3.31) \\
C_{racine} &\simeq \frac{1}{4}\left(\Delta y\right)^2 \frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}, \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{action} &= e^{\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_s}\left(\frac{1}{6}\bar{M}\frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + M_{\bar{y}\bar{y}}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\right)^2\right)} - 1 \\
&\simeq \frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_s}\left(\frac{1}{6}\bar{M}\frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}^3}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}} + M_{\bar{y}\bar{y}}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\right)^2\right). \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

3.5 Potentiel effectif

En combinant ces 3 produits, alors la correction totale devient

$$
\begin{aligned}
1+C_{tot.} &= \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'}\right)^2-\frac{\bar{g}'''}{\bar{g}'}\right]\right]\left(1+\frac{(\Delta y)^2}{4}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\right) \\
&\times\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_s}\left(\frac{1}{6}\bar{M}g'''g'+M_{\bar{y}\bar{y}}g'^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\text{ -}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\} \\
&\simeq e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\text{ -}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\}} = e^{\text{-}\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s V_{eff}}
\end{aligned}
$$

où

$$
V_{eff}=\text{-}\frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\text{ -}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\}, \tag{3.34}
$$

où il a été tenu compte des estimations suivantes

$$
\begin{aligned}
&< \Delta t_n >= \int d\left(\Delta t_n\right).\Delta t_n.\delta\left[\left(t_n-t_{n-1}\right)-\varepsilon_s\sqrt{f_n f_{n-1}}\right] \\
&= \varepsilon_s\sqrt{f_n f_{n-1}}=\varepsilon_s\bar{f}_n \qquad (3.35) \\
&< \left(\Delta t_n\right)^2 >= \int d\left(\Delta t_n\right).\Delta t_n^2.\delta\left[\left(t_n-t_{n-1}\right)-\varepsilon_s\sqrt{f_n f_{n-1}}\right] \\
&= \varepsilon_s^2\bar{f}_n^2. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

$$
< \left(\Delta y_n\right)^2 >= \frac{i\varepsilon_s\hbar}{\bar{M}_n\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2} \quad , \; < \left(\Delta y_n\right)^4 >= 3\left(\frac{i\varepsilon_s\hbar}{\bar{M}_n\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2}\right)^2, \tag{3.37}
$$

Remarquons que le terme $\Delta y\bar{M}\bar{f}_n\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}$ se trouvant dans l'action est d'ordre $\sqrt{\varepsilon_s}$ aussi il n'a pas été concerné par le developpement.

Finalement notre propagateur est

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{f_b f_a}{g\prime_b g\prime_a}} \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int \prod_{n=1}^{N} dy_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dE_n}{2\pi\hbar} \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}\left(g'\right)^2}{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[-E_n \left[\Delta t_n - \varepsilon_s \bar{f}_n\right] + \frac{\left(\Delta y_n\right)^2}{2\varepsilon_s} \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2 \right.\right. \\ &+ \Delta y_n \bar{M}_n \bar{f}_n \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \frac{\partial g}{\partial \bar{t}_n} - \varepsilon_s \bar{f}_n \bar{V}_n + \frac{1}{2} \varepsilon_s \bar{M}_n \bar{f}_n^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}_2}\right)^2 \\ &\left.\left. + \varepsilon_s \frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} \text{-} \frac{1}{8} \left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2 \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

ou encore sous forme continue

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{f_b f_a}{g\prime_b g\prime_a}} \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int Dt\left(s\right) Dx\left(s\right) DE\left(s\right) \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int ds \left[-E\left[\dot{t} - f\right] + \frac{\dot{y}^2}{2} M g'^2 + \dot{y} M f g' \frac{\partial g}{\partial t} \right.\right. \\ &\left.\left. - fV + \frac{1}{2} M f^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} \text{-} \frac{1}{8} \left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2 \right\} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

et en simplifiant

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{\frac{f_b f_a}{g\prime_b g\prime_a}} \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int Dt\left(s\right) Dx\left(s\right) DE\left(s\right) \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int ds \left[-E\left[\dot{t} - f\right] + \frac{1}{2} M g'^2 \left(\dot{y} + f \frac{\dot{g}}{g'}\right)^2 \right.\right. \\ &\left.\left. - fV + \frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} \text{-} \frac{1}{8} \left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2 \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Il serait utile comme nouvelle étape de réduire les intégrations. Pour cela, considérons le cas special où les potentiels

-vecteur $\mathcal{A} = f\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{g'}$

- scalaire $\mathcal{V} = fV - \frac{\hbar^2}{\bar{M}(g')^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} \text{-}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\}$

-et la fonction f

sont indépendant du temps. Dans ce cas aprés avoir reécrit l'exposant sous une forme appropriée, nous avons

$$\int\int\prod_{n=1}^{N}dt_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dE_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E_n\left(t_n-t_{n-1}-\varepsilon_s\bar{f}_n\right)}...$$

$$=\int\int\prod_{n=1}^{N}dt_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dE_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(t_n(E_n-E_{n+1})+t_{N+1}E_{N+1}-t_0E_1-\sum_{n=1}^{N+1}\varepsilon_sE_n\bar{f}_n\right)}...$$

$$=\int\int\prod_{n=1}^{N}dt_n\prod_{n=1}^{N}\frac{dE_n}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(t_n(E_n-E_{n+1})+t_{N+1}E_{N+1}-t_0E_1-\sum_{n=1}^{N+1}\varepsilon_sE_n\bar{f}_n\right)}...$$

$$\begin{aligned}
&= \int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dE_n}{2\pi\hbar}\delta\left(E_n-E_{n+1}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\left(t_{N+1}E_{N+1}-t_0E_1-\sum_{n=1}^{N+1}\varepsilon_sE_n\bar{f}_n\right)}...\\
&= \int\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E\left(t_b-t_a-\int_{S_a}^{S_b}dsf(y)\right)}\\
&= \delta\left(t_b-t_a-\int_{S_a}^{S_b}dsf\left(y\left(s\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

qui est une une integrale simple, les fonctions $\delta\left(E_n-E_{n+1}\right)$ exprimant que l'energie se conserve $\left(E_1=E_2=E_3.... =E\right)$ dans le systeme de cordonnées (y,t).

Supposons en outre que le terme de masse $M\left(\frac{\partial g}{\partial\bar{y}}\right)^2$ relatif à l'énergie cinétique est constant, alors le propagateur (3.39) prend la forme continue suivante

$$K=\sqrt{\frac{f_bf_a}{g\prime_bg\prime_a}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\int_{S_a}^{\infty}dS_b\int Dy\left(s\right)$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{S_a}^{S_b} ds\left[\frac{\dot{y}^2}{2}Mg'^2+\dot{y}Mfg'\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(f\left(V-E\right)-\frac{1}{2}Mf^2\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}\right)^2+\frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\text{-}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\}\right)\right]\right\}, \quad (3.41)$$

qui est l'expression de notre propagateur relative au problème de masse et de potentiel dependants du temps et de la position.

3.6 Application a l'oscillateur harmonique généralisé :

Considérons le cas simple [30] déja traité exactement en resolvant l'équation de *Schrödinger*

$$m\left(x,t\right)=\frac{m_0}{e^{-\nu t}-k_0^2x^2} \qquad \text{et} \qquad V\left(x,t\right)=\frac{1}{2}m\left(x,t\right)\omega^2x^2. \quad (3.42)$$

En modifiant au préalable k_0^2 en $-k_0^2$ afin d'éviter le problème de singularité. Choisissons la transformation de forme séparable en y et t :

$$x=g\left(y,t\right)=\frac{1}{\mathrm{i}k_0}e^{-\nu t/2}\sinh y \quad (3.43)$$

Dans ce cas, en fonction de y et t

$$m\left(y,t\right)=\frac{m_0}{e^{-\nu t}+k_0^2x^2}=\frac{m_0e^{\nu t}}{\cosh^2 y} \quad (3.44)$$

et

$$V\left(y,t\right)=\frac{1}{2}\frac{m_0e^{\nu t}}{\cosh^2 y}\omega^2\frac{1}{\text{-}k_0^2}e^{-\nu t}\sinh^2 y=\frac{\text{-}1}{2k_0^2}m_0\omega^2\tanh^2 y \quad (3.45)$$

$$g\prime=\frac{1}{\mathrm{i}k_0}e^{-\nu t/2}\cosh y$$

$$\dot{g} = -\frac{\nu}{2}\frac{1}{\mathrm{i}k_0}e^{-\nu t/2}\sinh y$$

$$\frac{g''}{g'} = \tanh y$$

$$\frac{g'''}{g'} = 1$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{yy} &= \frac{1}{4}\frac{m}{f}\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) + \frac{1}{4f}\left(m'' - 2\frac{m'^2}{m}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\frac{m_0 e^{\nu t}}{\cosh^2 y}}{f}\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4f}\left(-2\frac{m_0 e^{\nu t}}{\cosh^3 y}\ \cosh y + 6\frac{m_0 e^{\nu t}}{\cosh^4 y}\ (\sinh y)^2 - 2\frac{\left(-2\frac{m_0 e^{\nu t}}{\cosh^3 y}\ \sinh y\right)^2}{\frac{m_0 e^{\nu t}}{\cosh^2 y}}\right) \\
&= \frac{m_0 e^{\nu t}}{2f\cosh^2 y}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) - 1\text{-}\tanh y^2\right] \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}} &= \frac{\frac{1}{2f}m_0 e^{t\nu}\frac{1}{\cosh^2 y}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) - 1\text{-}\tanh y^2\right)}{\frac{m_0 e^{\nu t}}{f\cosh^2 y}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) - 1\text{-}\tanh y^2\right) \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

$$M g\prime^2 = \frac{\text{-}m_0}{k_0^2 f} \qquad (3.48)$$

le potentiel vecteur

$$\mathcal{A} = f\frac{\frac{\partial g}{\partial t}}{g'} = -\frac{\nu}{2}f\tanh y \qquad (3.49)$$

le potentiel scalaire

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= fV-\frac{\hbar^2}{\bar{M}\left(g'\right)^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{M_{\bar{y}\bar{y}}}{\bar{M}}\text{-}\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2\right\} \\ &= f\frac{1}{2}\frac{\text{-}m_0}{k_0^2}\omega^2\tanh^2 y+\frac{\hbar^2 f k_0^2}{m_0}\left(-\frac{1}{8}\left(\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)+\frac{1}{8}\tanh^2 y+\frac{1}{4}\right)\end{aligned} \tag{3.50}$$

d'où l'action A_n s'écrit en choisissant $f=1$

$$A_n=\frac{1}{2\varepsilon_s}Mg'^2\Delta y^2+Mfg'\dot{g}\Delta y+\varepsilon_s\frac{1}{2}Mf^2\dot{g}^2 \tag{3.51}$$

$$-\varepsilon_s fV-\varepsilon_s\frac{\hbar^2}{Mg'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{M_{yy}}{M}+\frac{1}{8}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\right)$$

$$=\frac{m_0\nu}{2k_0^2}\ln\cosh y|_{y_a}^{y_b}+\frac{1}{2\varepsilon_s}\frac{m_0}{\left(ik_0\right)^2}\Delta y^2$$

$$-\varepsilon_s\left\{-\frac{1}{2}\frac{m_0}{k_0^2}\left[\omega^2-\frac{\nu^2}{4}\right]\tanh^2 y+\frac{1}{8}\frac{\hbar^2k_0^2}{m_0}\tanh^2 y+\frac{\hbar^2k_0^2}{4m_{\grave{a}}}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m_0\nu}{2k_0^2}\ln\cosh y|_{y_a}^{y_b}+\frac{1}{2\varepsilon_s}\frac{m_0}{\left(ik_0\right)^2}\Delta y^2 \\ &\quad+\varepsilon_s\left\{-\frac{\frac{m_0}{2k_0^2}\Omega^2-\frac{\hbar^2k_0^2}{8m_0}}{\cosh^2 y}+\frac{1}{2}\frac{m_0}{k_0^2}\Omega^2-\frac{3}{8}\frac{\hbar^2k_0^2}{m_0}\right\} \\ &= \frac{m_0\nu}{2k_0^2}\ln\cosh y|_{y_a}^{y_b}+\frac{1}{2\varepsilon_s}\frac{m_0}{\left(ik_0\right)^2}\Delta y^2 \\ &\quad+\varepsilon_s\left\{-\frac{\hbar^2k_0^2}{2m_0}\frac{\frac{m_0}{2k_0^2}\Omega^2-\frac{1}{4}}{\cosh^2 y}+\frac{1}{2}\frac{m_0}{k_0^2}\Omega^2-\frac{3}{8}\frac{\hbar^2k_0^2}{m_0}\right\}\end{aligned} \tag{3.52}$$

le propagateur s'exprime donc en fonction du propagateur de Poschl-Teller modifié K_{PTM} [5] tel que

$$
\begin{aligned}
K_{OH} &= k_0 \exp\left\{\frac{\nu\left(t_b+t_a\right)}{4}\right\}\cosh^{\frac{1}{2}} y_b \cosh^{\frac{1}{2}} y_a \\
&\times \exp\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{m_0 y}{2k_0^2}\ln\cosh y|_{y_a}^{y_b} + \varepsilon_s\left(\frac{1}{2}\frac{m_0}{k_0^2}\Omega^2 - \frac{3}{8}\frac{\hbar^2 k_0^2}{m_0}\right)\right\} K_{PTM}\ ,
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

avec

$$
\Omega^2 = \omega^2 - \frac{\nu^2}{4} \tag{3.54}
$$

et

$$
K_{PTM}(y_b, t_b; y_a, t_a) = \int Dy\left(t\right)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\left\{\frac{m_0\dot{y}^2}{2k_0^2} + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_0}\frac{\frac{m_0\Omega^2}{2k_0^2} - \frac{1}{4}}{\cosh^2 y}\right\}
$$

le spectre des énergies est finalement

$$
E_n = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_0}\left[n^2 + n + 1\right] + \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3.55}
$$

3.7 Conclusion

dans ce chapitre, nous avons traiter, par l'approche des intégrales de chemin, le mouvement d'une particule de masse dépendante de la position à une dimesion et du temps se mouvant dans un potentiel aussi dépendant de la position et du temps, nous avons déterminer le propagateur ainsi que le spectre des énergies. Nos resultats sont en accord avec la reférence [30].

Chapitre 4

Intégrale de chemin pour les systèmes à masse variable dépendante de la position et du temps (Traitement dans l'espace des phases par la méthode des transformations canoniques géneralisées)

4.1 Introduction

Parmi, les hamiltoniens connus, dépendant du temps et décrivant les systèmes dissipatifs, les plus simples ont des formes quadratiques et le traitement, en général, est analytique et exact et qui nécessite uniquement la détermination de l'invariant et ceci via une certaine équation auxiliaire [31]. Le modele de l'oscillateur de Caldirola-Kanai [32] connu pour son succés peut être cité comme exemple et le modele indépendant du temps de Bateman[33] constitue cependant une autre alternative de considerer la dissipation .

Par l'approche path integral et dans l'espace des phases, le traitement des systèmes dépendant du temps peut être effectué lorsque la masse est constante, à l'aide de la transformation dite GCT[34]. C'est ainsi que les problèmes de l'oscillateur harmonique à fréquence variable et du puits avec un paroi mobile se deplaçant avec une vitesse v constante ont pu être traités par cette approche .

Lorsque la masse et le potentiel dépendent seulement de la position, avec une transformation spatio-temportelle , le traitement se ramène à celui d'une masse constante, mais le potentiel est corrigé par un terme purement quantique en $\hbar^2$ dépendant uniquement de la transformation.

Notre but dans ce chapitre est de considerer des systèmes non quadratiques et plus particulierement des hamiltoniens où la masse et le potentiel dependent non seulement du temps mais également de la position. Ces systèmes dissipatifs en question sont décrits par l'hamiltonien ayant pour expression (classique) suivante

$$H_{cl}\left(x,p,t\right)=\frac{1}{2}\frac{p^{2}}{m\left(x,t\right)}+V\left(x,t\right) \tag{4.1}$$

En mécanique quantique et en raison de la noncommutativité des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ l'hamiltonien , devient

$$\hat{H}=\frac{1}{4}\left(\hat{m}^{\alpha}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\gamma}+\hat{m}^{\gamma}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\alpha}\right)+\hat{V} \tag{4.2}$$

où les paramètres α, β, γ sont tels que $\alpha + \beta + \gamma = -1$

Il est clair qu'à l'aide du commutateur $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, cette forme hermitique peut être toujours ramené à la forme symetrique suivante

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right) + \hat{V} \tag{4.3}$$

où la correction quantique est absorbée dans le potentie V.

Notre but dans ce chapitre est de considérer par l'approche path integral, les systèmes décrit par l'hamiltonien symétrique ci dessus (4.3) où la masse et le potentiel dependent tous deux de la position et du temps ($m = m(x, t)$ et $V = V(x, t)$) et de montrer comment déterminer le propagateur.

4.2 Propagateur

Nous savons que le propagateur relatif à un systeme dissipatif s'exprime au moyen du T-produit chronologique, puisque m et V sont ici dependants du temps. Afin d'eviter ce T-produit, écrivons que le noyau $\hat{K}$ verifie l'équation symbolique

$$\left(\hat{E} - \hat{H}\right)\hat{K} = i\hbar \tag{4.4}$$

et $\hat{K}$ a pour expression formelle

$$\hat{K} = \frac{i\hbar}{\hat{E} - \hat{H}} \tag{4.5}$$

Le propagateur à déterminer, étant l'élément de matrice du noyau $\hat{K}$ dans l'espace (x, t) prend alors la forme suivante

$$K(x_b t_b; x_a, t_a) = \int_{S_a}^{\infty} dS_b \left\langle x_b t_b\right| e^{\frac{i}{\hbar}(S_b - S_a)\left(\hat{E} - \hat{H}\right)} \left|x_a t_a\right\rangle \tag{4.6}$$

où, implicitement $i0^+$ est ajouté dans l'exposant de l'exponentielle pour regulariser l'intégrale.

Pour passer à la formulation path integral, procédons suivant la méthode habituelle en décomposant d'abord l'exponentielle $(N+1)$fois avec $\Delta s_n = \frac{S_b - S_a}{N+1}$

$$K\left(x_{b,}t_b; x_a, t_a\right) = \int_{S_a}^{\infty} dS_b \left\langle x_b t_b\right| e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} ... e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} \left|x_a t_a\right\rangle \tag{4.7}$$

et à l'aide de N relations de fermeture $\int dx_n dt_n \left|x_n t_n\right\rangle \left\langle x_n t_n\right| = 1$

et $\int dp_n dE_n \left|p_n E_n\right\rangle \left\langle p_n E_n\right| = 1$ et des relations suivantes

$$\hat{x}\left|xt\right\rangle = x\left|xt\right\rangle, \qquad \hat{t}\left|xt\right\rangle = t\left|xt\right\rangle, \qquad \hat{p}\left|pE\right\rangle = p\left|pE\right\rangle, \qquad \hat{E}\left|pE\right\rangle = E\left|pE\right\rangle \tag{4.8}$$

éliminons les opérateurs $\hat{x}, \hat{t}, \hat{p}, \hat{E}$ par leurs actions sur les kets respectifs, et considérons le propagateur infinitésimal $\left\langle x_n t_n\right| e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle$

$$\begin{aligned}
&\simeq \left\langle x_n t_n\right| 1 + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left(\hat{E} - \hat{H}\right) \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\simeq \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\quad + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left\langle x_n t_n\right| \left(\hat{E} - \hat{H}\right) \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \qquad (4.9) \\
&= \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\quad + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left\{ \left\langle x_n t_n\right| \hat{E} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle - \left\langle x_n t_n\right| \hat{H} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \right\} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

en adoptant les notations suivantes $\bar{u}_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, \Delta u_n = u_n - u_{n-1}, u_n = u\left(s_n\right), t_b = t_{N+1}, x_b = x_{N+1}, t_a = t_0, x_a = x_0, m_n = m\left(x_{n,} t_n\right)$ et $V_n = V\left(x_{n,} t_n\right)$

Le changement de base $\left|xt\right\rangle \to \left|pE\right\rangle$ s'effectuant à l'aide du produit scalaire

$$\left\langle xt \left|pE\right\rangle\right. = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}}{\left(2\pi\hbar\right)^2}, \tag{4.11}$$

les élements de matrice s'expriment alors simplement sous forme d'intégrales

$$\begin{aligned}
\langle x_n t_n | \hat{E} | x_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} \langle x_n t_n | \hat{E} | E_n, p_n \rangle \langle E_n, p_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle \\
&= \int \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} E_n e^{-\frac{i}{\hbar}[E_n(t_n - t_{n-1}) - p_n(x_n - x_{n-1})]} \qquad (4.12) \\
\langle x_n t_n | \hat{p}^2 | x_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} p_n^2 e^{-\frac{i}{\hbar}[E_n(t_n - t_{n-1}) - p_n(x_n - x_{n-1})]} \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

et finalement l'expression du propagateur K est

$$\begin{aligned}
K &= \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int \prod_{n=1}^{N} dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} \\
&\quad \times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[-E_n(\Delta t_n - \Delta s_n) + p_n \Delta x_n - \Delta s_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}} \right) p_n^2 + V_n \right\} \right]} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Comme l'intégration sur la variable E_n est simplement une fonction de Dirac δ

$$\int dE_n e^{\frac{i}{\hbar} E_n(\Delta t_n - \Delta s_n)} = 2\pi\hbar\delta\left(\Delta t_n - \Delta s_n\right) \qquad (4.15)$$

i.e. que le temps t et le paramètre s ne sont pas indépendant mais reliés par la relation $\varepsilon_t = \Delta t_n = \Delta s_n$ ou du point de vue infinitesimal $dt = ds$, alors $t = s + cte$.

En intégrant sur les t_n

$$\int \prod_{n=1}^{N} dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \delta\left(\Delta t_n - \Delta s_n\right) = \delta\left(t_b - t_a - (s_b - s_a)\right) \qquad (4.16)$$

et sur s_b avec $(t_b > t_a)$

$$\int_{S_a}^{\infty} dS_b \delta\left(t_b - t_a - (s_b - s_a)\right) = \theta\left(s_b - s_a - (t_b - t_a)\right)\Big|_{S_a}^{\infty} = 1 - \theta\left(-\left(t_b - t_a\right)\right) = 1 \qquad (4.17)$$

nous obtenons le propagateur (4.14) avec la forme qui est standard

$$K\left(x_b, t_b; x_a, t_a\right) = \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \mathcal{A}_{\Delta t_n}} \qquad (4.18)$$

où

$$\mathcal{A}_{\Delta t_n} = p_n \Delta x_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}} \right) p_n^2 + V_n \right\} \tag{4.19}$$

est l'action infinitésimale relative à l'intervalle $[t_{n-1,} t_n]$.

4.3 Transformations canoniques

4.3.1 Première transformation canonique

Considerons maintenant la transformation canonique $(x, p, t) \overset{F_2(x,P,t)}{\longrightarrow} (Q, P, t)$ définie par

$$x = Q\rho(t) \qquad\qquad p = \frac{P}{\rho(t)} \tag{4.20}$$

où $F_2(x, P, t)$ est la fonction génératrice responsable de la transformation [9] , égale à

$$F_2(x, P, t) = P \frac{x}{\rho(t)} = PQ \tag{4.21}$$

qui s'obtent par intégration des équations de la mécanique classique suivantes

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{P}{\rho} \qquad\qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{4.22}$$

En outre, le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}(Q, P, t)$ qui regit le mouvement dans le système (Q, P, t) se déduit de l'ancien $H(x, p, t)$ en utilisant la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m(x,t)} p^2 + V(x,t) - Px \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} \\ &= \frac{1}{2\rho^2} \frac{P^2}{m(Q\rho(t), t)} + V(Q\rho(t), t) - PQ \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

et l'action lors du passage du systeme $(x, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$ change comme suit

$$pdx - dtH = PdQ - dt\mathcal{H} + dF, \tag{4.24}$$

où

$$F = -PQ + F_2 \tag{4.25}$$

qui, dans notre cas est nul $F = 0$.

Dans l'approche path intégral, nous savons que les chemins sont continus mais non differentiables. Aussi nous modifions les differentielles ∂ par Δ pour tenir compte de ce changement .

Dans l'intervalle de temps $[t_{n-1}, t_n]$ nous choisissons par exemple le temps t_n comme reference.Nous obtenons respectivement pour p, Q, et pour la mesure les expressions suivantes

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\Delta F_2}{\Delta x_n} = \frac{F_2\left(x_n, P_n, t_n\right) - F_2\left(x_{n-1}, P_n, t_n\right)}{x_n - x_{n-1}} \\ &= \frac{P_n \frac{x_n}{\rho(t_n)} - P_n \frac{x_{n-1}}{\rho(t_n)}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{P_n}{\rho\left(t_n\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{\Delta F_2}{\Delta P_n} = \frac{F_2\left(x_n, P_{n+1}, t_n\right) - F_2\left(x_n, P_n, t_n\right)}{P_{n+1} - P_n} \\ &= \frac{P_{n+1} \frac{x_n}{\rho(t_n)} - P_n \frac{x_n}{\rho(t_n)}}{P_{n+1} - P_n} = \frac{x_n}{\rho\left(t_n\right)}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} DxDp &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N} \rho_n dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dP_n}{2\pi\hbar\sqrt{\rho_n \rho_{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_b \rho_a}} DQDP, \end{aligned} \tag{4.27}$$

nous obtenons alors la nouvelle forme du propagateur

$$K=\frac{1}{\sqrt{\rho_a\rho_b}}\int\prod_{n=1}^{N}dQ_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dP_n}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\mathcal{A}'_{\Delta t_n}\right) \tag{4.28}$$

avec $\mathcal{A}'_{\Delta t_n}$ la nouvelle action est

$$\mathcal{A}'_{\Delta t_n}=P_n\Delta Q_n-\Delta t_n\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_n^2 m(Q_n\rho_n,t_n)}+\frac{1}{\rho_n^2 m\left(Q_{n-1}\rho_{n-1},t_{n-1}\right)}\right)P_n^2\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n+\frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)P_n+V\left(Q_n\rho_n,t_n\right)\end{array}\right\}. \tag{4.29}$$

où la regle de passage(4.24) de l'hamiltonien classique à l'hamiltonien quantique est également appliquée aux variables de la fonction génératrice puisque elle est fonction de P et Q.

Pour le terme $V\left(Q_n\rho_n,t_n\right)$, independent de P, et à cause de la presence de Δt_n il est évident que le calcul ne dépend pas du choix d'un point de l'intervalle $[t_{n-1},t_n]$.

4.3.2 Deuxième transformation canonique

L'action (4.29) est écrite sous une forme compliquer où nous remarquons la présence du terme suplémentair en P_n, $\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n+\frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_n}Q_{n-1}\right)P_n\right\}$, l'étape suivante consiste à éliminer ce terme, pour cela nous nous proposons d'éffectuer une seconde transformation canonique $(Q,P)\overset{\mathcal{F}_2(Q,\mathcal{P},t)}{\rightarrow}(Q,\mathcal{P})$ définie par

$$\mathcal{P}=P-\rho\dot{\rho}mQ \qquad\qquad Q=Q \tag{4.30}$$

Comme du point de vue mécanique classique $Q=\frac{\partial\mathcal{F}_2(Q,\mathcal{P},t)}{\partial\mathcal{P}}$ et $P=\frac{\partial\mathcal{F}_2(Q,\mathcal{P},t)}{\partial Q}$, il est facile de s'assurer que la nouvelle fonction génératrice $\mathcal{F}_2$ solution de ces deux equations est

$$\mathcal{F}_2\left(Q,\mathcal{P},t\right)=Q\mathcal{P}+\rho\dot{\rho}\int^{Q}um\left(u,t\right)du. \tag{4.31}$$

et que le nouvel Hamiltonien est égal à

$$\mathcal{H}'=\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V+\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^Q dum\left(u,t\right)u\right)}{\partial t}. \tag{4.32}$$

La nouvelle action élémentaire est dans ce cas

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{dt} &= PdQ-dt\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2 m}P^2-PQ\frac{\dot{\rho}}{\rho}+V\right\}\\
&= \mathcal{P}dQ-dt\left\{\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V+2\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^Q dum\left(u,t\right)u\right)}{\partial t}-\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right\}\\
&= \mathcal{P}dQ-dt\left\{\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^Q dum\left(u,t\right)u\right)}{\partial t}-\rho\dot{\rho}m\left(Q,t\right)Q\dot{Q}\right\}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

où $\mathcal{F}\left(Q,t\right)=-\mathcal{P}Q+\mathcal{F}_2=\rho\dot{\rho}\int^Q um\left(u,t\right)du$ est indépendante de $\mathcal{P}$ avec $\frac{d\mathcal{F}}{dt}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial Q}\dot{Q}$.

Dans l'approche path intégral, nous avons respectivement

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\mathcal{F}_2\left(Q_n,\mathcal{P}_n,t_n\right)-\mathcal{F}_2\left(Q_{n-1},\mathcal{P}_n,t_n\right)}{Q_n-Q_{n-1}}\\
&= \frac{Q_n\mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_n\int^{Q_n}um\left(u,t_n\right)du-Q_{n-1}\mathcal{P}_n-\rho_n\dot{\rho}_n\int^{Q_{n-1}}um\left(u,t_n\right)du}{Q_n-Q_{n-1}}\\
&= \mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_n\frac{\int_{Q_{n-1}}^{Q_n}um\left(u,t_n\right)du}{Q_n-Q_{n-1}}\\
&\simeq \mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_nQ_nm\left(Q_n,t_n\right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

et

$$Q_n=\frac{\mathcal{F}_2\left(Q_n,\mathcal{P}_{n+1},t_n\right)-\mathcal{F}_2\left(Q_n,\mathcal{P}_n,t_n\right)}{\mathcal{P}_{n+1}-\mathcal{P}_n}=Q_n, \tag{4.35}$$

avec une mesure restant inchangée (invariante).

$$DQDP = DQd\mathcal{P} \tag{4.36}$$

La nouvelle action cependant devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{\Delta t_n} &= P_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_n^2 m_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m_{n-1}} \right) P_n^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1} \right) P_n + V_n \right\} \\
&= \mathcal{P}_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_n^2 m_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m_{n-1}} \right) \mathcal{P}_n^2 - \frac{m}{2} \dot{\rho}_n^2 Q_n^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \left(\rho \dot{\rho} \int^{Q_n} dum\,(u,t)\, u \right)}{\partial t_n} + V_n \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\rho_n \dot{\rho}_n m_n Q_n + \rho_{n-1} \dot{\rho}_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1} \right) \Delta Q_n
\end{aligned} \tag{4.37}$$

et le nouveau propagateur est

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathcal{P}_n}{2\pi\hbar} \\
&\quad \times \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathcal{P}_n \Delta Q_n \right. \\
&\quad - \Delta t_n \left[\frac{1}{4\rho_n^2} \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}} \right) \mathcal{P}_n^2 - \frac{m}{2} \dot{\rho}_n^2 Q_n^2 + \frac{\partial \left(\rho \dot{\rho} \int^{Q} dum\,(u,t)\, u \right)}{\partial t} + V_n \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\rho_n \dot{\rho}_n m_n Q_n + \rho_{n-1} \dot{\rho}_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1} \right) \Delta Q_n \right],
\end{aligned} \tag{4.38}$$

où le dernier terme relatif à la fonction generatrice a été également symétrisé comme auparavant.

La presence de $\Delta Q_n \simeq (\Delta t_n)^{1/2}$, nous permet d' utiliser les approximations suivantes en négligeant les termes d'ordre superieur en Δt_n, puisque seuls les termes d'ordre Δt_n

contribuent à l'action .Ainsi

$$\rho_n\dot{\rho}_n \simeq \rho_{n-1}\dot{\rho}_{n-1}, \tag{4.39}$$

nous avons aprés developpement autour du mid-point

$$\frac{1}{2}\left(\rho_n\dot{\rho}_n m_n Q_n + \rho_{n-1}\dot{\rho}_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1}\right)\Delta Q_n$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{1}{2}\rho_n\dot{\rho}_n\left(m_n Q_n + m_{n-1}Q_{n-1}\right)\Delta Q_n \\
&\simeq \frac{1}{2}\rho_n\dot{\rho}_n\left(\bar{m}_n\bar{Q}_n + \frac{\Delta Q_n}{2}\frac{\partial\left(m_n Q_n\right)}{\partial\bar{Q}_n} + \frac{\Delta t_n}{2}\frac{\partial\left(m_n Q_n\right)}{\partial t_n} + \ldots\right. \\
&\quad \left. + \bar{m}_n\bar{Q}_n - \frac{\Delta Q_n}{2}\frac{\partial\left(m_n Q_n\right)}{\partial\bar{Q}_n} - \frac{\Delta t_n}{2}\frac{\partial\left(m_n Q_n\right)}{\partial t_n}\right)\Delta Q_n \\
&\simeq \rho_n\dot{\rho}_n\bar{m}_n\bar{Q}_n\Delta Q_n \\
&\simeq \left.\left(\rho_n\dot{\rho}_n m_n Q_n\right)\right|_{mid-pointn}\Delta Q_n
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Ce resultat peut etre obtenu plus simplement en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)P_n^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)P_n \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left[P_n^2 - 2\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}P_n\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left[\left(P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left(P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)^2}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

et aprés un shift

$$P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} \to P_n \tag{4.42}$$

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dP_n}{2\pi\hbar} \\
&\exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\left(P_n + \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n \rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} \right) \Delta Q_n \right. \\
&\left. -\Delta t_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m_n \rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2} \right) P_n^2 - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1} \right)^2}{\frac{1}{m_n \rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} + V_n \right\} \right] \quad (4.43)
\end{aligned}
$$

il apparait le terme $\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n \rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} \Delta Q_n$, qui devient après quelques approximations que nous autorise la presence de ΔQ_n

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n \rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} \Delta Q_n &\simeq \rho_n \dot{\rho}_n \frac{(m_n + m_{n-1})^2 - (m_n - m_{n-1})^2}{4\bar{m}_n} \bar{Q}_n \Delta Q_n \\
&\simeq \left. (\dot{\rho}_n \rho_n m_n Q_n) \right|_{mid-point} \Delta Q_n \quad (4.44)
\end{aligned}
$$

En reportant les expressiosn précedentes, le propagateur devient

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dP_n}{2\pi\hbar} \\
&\exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathcal{P}_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_n^2 m(\rho_n Q_n, t_n)} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m\left(\rho_{n-1} Q_{n-1}, t_{n-1}\right)} \right) \mathcal{P}_n^2 \right. \right. \\
&\left. - \frac{m(\rho_n Q_n, t_n)}{2} \dot{\rho}_n^2 Q_n^2 + V_n \right) \\
&\left. - \left. \left(\dot{\rho}_n \rho_n m(\rho_n Q_n, t_n) Q_n \right) \right|_{mid-point} \Delta Q_n \right], \quad (4.45)
\end{aligned}
$$

Il est remarquable de noter que suite aux deux transformations, il apparait dans l'action trois termes supplémentaires

- l' oscillateur harmonique avec masse et frequence variables $\frac{m}{2}\dot{\rho}_n^2 Q_n^2$

-et le terme $\sum_{n=1}^{N+1} \left(\dot{\rho}_n \rho_n m\left(\rho_n Q_n, t_n\right) Q_n\right)\big|_{mid-point} \Delta Q_n$ dépendant uniquement de la masse

4.3.3 Conditions necessaires pour avoir un système conservatif :

Considérons maintenant les systemes dependant du temps et de la position et tels qu'ils deviennent aprés ces deux transformations conservatifs dans le système de coordonnées $(Q, \mathcal{P}, t)$

Il en resulte alors deux conditions nécessaires;

1- les produits $\rho^2\ m$, $\dot{\rho}^2 m$ et le potentiels V doivent être fonction uniquement de la variable Q

$$\begin{aligned} \rho^2 m\left(x,t\right) &= M\left(Q\right) \quad , & (4.46)\\ \dot{\rho}^2 m &= cte\ M\left(Q\right), & (4.47)\\ V\left(x,t\right) &= V\left(Q\right), & (4.48) \end{aligned}$$

2- a partir de (4.46) et (4.47) nous pouvons avoir une autre condition sur ρ tel que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = cte \ \text{ soit } \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\nu}{2} \Longrightarrow \rho\left(t\right) = e^{-\frac{\nu t}{2}}. \tag{4.49}$$

Notons dans ce cas, que le dernier terme de (4.45) prend à la limite $\Delta t_n \rightarrow 0$ (suivant

Itô) la forme suivante

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1}\left(\rho_n\dot{\rho}_n m_n Q_n\right)\big|_{mid-point}\Delta Q_n &= -\frac{\nu}{2}\sum_{n=1}^{N+1}e^{-\nu t_n}\int_{Q_{n-1}}^{Q_n}dQQm\left(e^{\frac{\nu\bar{t}_n}{2}}x\right)\\
&= -\frac{\nu}{2}\sum_{n=1}^{N+1}\int_{Q_{n-1}}^{Q_n}dQQM\left(Q\right)\\
&= -\frac{\nu}{2}\int_{Q_a}^{Q_b}dQQM\left(Q\right)\\
&= -\frac{\nu}{2}\int_{Q_a==x_a\exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{Q_b=x_b\exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)}dQQM\left(Q\right), \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

i.e que ce terme est une simple intégrale qui ne dépend que des points initial (t_a, x_a) et final (t_b, x_b).

Ainsi notre propagateur s'ecrit en remplaçant (4.46) , (4.47) , (4.48) , (4.49) et (4.50)dans(4.45)

$$\begin{aligned}
K &= e^{-\frac{\nu}{4}(t_b+t_a)}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a\exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b\exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)}M(Q)QdQ}\int\prod_{n=1}^{N}dQ_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d\mathcal{P}_n}{2\pi\hbar}\\
&\quad\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\mathcal{P}_n\Delta Q_n-\Delta t_n\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{M\left(Q_n\right)}+\frac{1}{M\left(Q_{n-1}\right)}\right)\mathcal{P}_n^2\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\frac{\nu^2}{8}M\left(Q_n\right)Q_n^2+V\left(Q_n\right)\right)\right]\right\}, \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

4.3.4 Propagateur dans l'espace des configurations

Nous pouvons rester dans l'espace des phases en utlisant pour celà la reference [35]mais il nous est paru plus simple de passer à l'espace des configurations. Pour celà intégrons l'expression (4.52) sur les $\mathcal{P}_n$,

$$K = e^{-\frac{\nu}{4}(t_b+t_a)} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q) Q dQ} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{n,n-1}}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}}$$
$$\exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\mathcal{M}_{n,n-1} (\Delta Q_n)^2}{2\varepsilon_t} - \Delta t_n \left\{ -\frac{\nu^2}{4} \frac{M(Q_n)}{2} Q_n^2 + V(Q_n) \right\} \right], \quad (4.52)$$

où nous avons posé pour simplifier

$$\mathcal{M}_{n,n-1} = \frac{2M_n M_{n-1}}{M_{n-1} + M_n} = \frac{2M(Q_n) M(Q_{n-1})}{M(Q_n) + M(Q_{n-1})} \quad (4.53)$$

4.3.5 Transformation ponctuelle

Effectuons maintenant la transformation ponctuelle definie par

$$Q \to y : \qquad Q = g(y) \quad (4.54)$$

alors

$$\mathcal{M}_{n,n-1} = \frac{2M(g(y_n)) M(g(y_{n-1}))}{M(g(y_n)) + M(g(y_{n-1}))} \quad (4.55)$$

est une fonction de deux variables$(y_n, y_{n-1},)$ ou encore de $\left(\bar{y}_n, \frac{\Delta y_n}{2}\right)$.

Avec la nouvelle variable y, nous avons d'abord

$$\Delta Q_n = Q_n - Q_{n-1} \simeq \Delta y_n \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + \frac{(\Delta y_n)^3}{24} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} + ... \quad (4.56)$$

et pour son carré

$$(\Delta Q_n)^2 \simeq (\Delta y_n)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 + \frac{(\Delta y)^4}{12} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \quad (4.57)$$

Développons en série de Taylor $\mathcal{M}_{n,n-1}$ au voisinage du mid point

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n + \Delta y_n \frac{\partial \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \quad (4.58)$$

et changeons Δy_n en $-\Delta y_n$,

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n - \Delta y_n \frac{\partial \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \tag{4.59}$$

et comme $\mathcal{M}_{n,n-1}$ ne doit pas etre modifié, il vient par addition

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \tag{4.60}$$

4.3.6 Potentiel effectif

Nous avons les developpements suivants pour

- le terme cinetique

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon_t} \mathcal{M}_{n,n-1} (\Delta Q_n)^2 &= \frac{1}{2\varepsilon_t} \left(\bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \right) \times \left((\Delta y_n)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta y_n)^4}{12} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + ... \right) \\
&\simeq \frac{1}{2\varepsilon_t} \left((\Delta y_n)^2 \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 + \frac{(\Delta y_n)^4}{12} \bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon_t} (\Delta y_n)^4 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \\
&= \frac{(\Delta y_n)^2}{2\varepsilon_t} \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 + \frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_t} \left(\frac{1}{6} \bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

- la racine

$$\sqrt{\frac{\bar{M}_n}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M}_n}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \left(1 + \frac{(\Delta y_n)^2}{4} \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \right) \tag{4.62}$$

- et le Jacobien relatif à la transformation $Q \to y$

$$dQ = g\prime dy \tag{4.63}$$

$$\prod_{n=1}^{N} dQ_n = \prod_{n=1}^{N} g\prime_n dy_n = \frac{1}{\left(g\prime_b g\prime_a\right)^{1/2}} \prod_{n=1}^{N+1} \left(g\prime_n g\prime_{n-1}\right)^{1/2} \prod_{n=1}^{N} dy_n \tag{4.64}$$

avec

$$\left(g\prime_n g\prime_{n-1}\right)^{1/2} = \bar{g}'_n \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2 - \frac{\bar{g}'''_n}{\bar{g}'_n}\right]\right] \tag{4.65}$$

alors le propagateur (4.53) devient

$$\begin{aligned} K &= \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g\prime_b g\prime_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q) Q dQ} \\ & \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} dy_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}_n \bar{g}'^2_n}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \left(1 + C_{jacobian}\right)\left(1 + C_{measure}\right)\left(1 + C_{action}\right) \\ & \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\left(\Delta y_n\right)^2}{2\varepsilon_t}\bar{M}_n \bar{g}'^2_n \right.\right. \\ & \left.\left. -\varepsilon_t\left\{-\frac{\nu^2}{4}\frac{\bar{M}_n}{2}\bar{g}_n^2 + V\left(\bar{g}_n\right)\right\}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

où les corrections sont respectivement données par

$$C_{jacobian} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'_n}\right)^2 - \frac{\bar{g}'''_n}{\bar{g}'_n}\right], \tag{4.67}$$

$$C_{measure} \simeq \frac{1}{4}\left(\Delta y_n\right)^2 \frac{\frac{\partial^2 \bar{M}_n}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} C_{action} &= e^{\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + \frac{\partial^2 \bar{M}_n}{\partial \bar{y}_n^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2\right)} - 1 \\ &\simeq \frac{i}{\hbar}\frac{\left(\Delta y_n\right)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3}\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{4.69}$$

En combinant le produit des trois corrections, on a alors la correction totale

$$\begin{aligned} 1+C_{tot.} &= \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}\right]\right] \\ &\quad\times\left(1+\frac{(\Delta y_n)^2}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\ &\quad\times\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)\right) \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} 1+C_{tot} &\simeq \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}\right]+\frac{(\Delta y_n)^2}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\ &\quad\times\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)\right) \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned} &\simeq 1-\frac{(\Delta y_n)^2}{8}\left(\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}-2\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n\left(\bar{y}_n\right)}\right) \\ &\quad+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\simeq 1-\frac{1}{8}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\left(\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}-2\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\ &\quad+\frac{i}{\hbar}\frac{3}{4\varepsilon_t}\left(\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right) \end{aligned}$$

$$= \quad 1 - \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \quad \left(\frac{1}{8} \left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'} \right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'} - \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \right)$$

$$- \frac{i\varepsilon_t \hbar}{1} \left(\frac{1}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \frac{1}{6} \bar{M}_n \bar{g}_n''' \bar{g}_n' + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \bar{g}_n'^2 \right)$$

$$= \quad 1 - \frac{1}{8} \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'} + \frac{1}{4} \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n g_n'^2} \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n (\bar{y}_n)}$$

$$- \frac{i\varepsilon_t \hbar}{1} \frac{1}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \left(\frac{1}{8} \frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'} + \frac{3}{4} \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}$$

$$1 + C_{tot} \simeq e^{\frac{-i}{\hbar} \varepsilon_t \frac{\hbar^2}{2 \bar{M}_n g_n'^2} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'} \right)^2 + \frac{\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \right)},$$

$$1 + C_{tot} = \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \varepsilon_t \frac{\hbar^2}{8 \bar{M}_n g_n'^2} \left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'} \right)^2 + \frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n} - 2 \left(\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n} \right)^2 \right] \right]. \tag{4.72}$$

où il a été tenu compte des estimations suivantes

$$< (\Delta y_n)^2 >= \frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \qquad < (\Delta y_n)^4 >= 3 \left(\frac{i\varepsilon_t \hbar}{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2} \right)^2 \tag{4.73}$$

pour obtenir le potentiel effectif.

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2}{8 \bar{M}_n g_n'^2} \left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'} \right)^2 + \frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n} - 2 \left(\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n} \right)^2 \right], \tag{4.74}$$

Finalement notre propagateur est

$$
\begin{aligned}
K \;=\; & \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g\prime_b g\prime_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \int \prod_{n=1}^{N} dy_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}_n \bar{g}_n^{\prime 2}}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \\
& \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left\{\frac{(\Delta y_n)^2}{2\varepsilon_t}\bar{M}_n \bar{g}_n^{\prime 2} - \varepsilon_t\left[V(\bar{g}_n) - \frac{\nu^2}{8}\bar{M}_n \bar{g}_n^2\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. + \frac{\hbar^2}{8\bar{M}_n g_n^{\prime 2}}\left[\left(\frac{\bar{g}_n^{\prime\prime}}{\bar{g}_n^{\prime}}\right)^2 + \frac{\bar{M}_n^{\prime\prime}}{\bar{M}_n} - 2\left(\frac{\bar{M}_n^{\prime}}{\bar{M}_n}\right)^2\right]\right]\right\}\right]. \qquad (4.75)
\end{aligned}
$$

ou encore sous forme continue

$$
\begin{aligned}
K \;=\; & \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g\prime_b g\prime_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \\
& \times \int Dy(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\dot{y}^2}{2} M g^{\prime 2} - dt\left(V(g(y)) - \frac{\nu^2}{4}\frac{M(g(y))}{2} g(y)^2\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. + \frac{\hbar^2}{8Mg^{\prime 2}}\left[\left(\frac{g^{\prime\prime}}{g^{\prime}}\right)^2 + \frac{M^{\prime\prime}}{M} - 2\left(\frac{M^{\prime}}{M}\right)^2\right]\right)\right]\right\} \qquad (4.76)
\end{aligned}
$$

Cette expression du propagateur, relative à notre systeme où la masse et le potentiel dependent tous deux du temps et de la position, represente notre principal resultat.

4.4 Applications

4.4.1 Cas1 : Particule libre avec masse variable

Dans ce cas prenons la masse sous la forme $m(x,t) = m_0 e^{\gamma t + \lambda x}$ avec $V = 0$. Dans l'espace (x,s) le propagateur (4.18) s'écrit

$$
K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left(p_n \Delta x_n - \Delta s_n \left\{\frac{1}{4m_0}\left(\frac{1}{e^{\lambda x_n}} + \frac{1}{e^{\lambda x_{n-1}}}\right)p_n^2\right\}\right)} \qquad (4.77)
$$

où nous avons posé $\varepsilon_s = \Delta s_n {=} \Delta t_n e^{-\gamma t_n}$ ou encore $ds = dt e^{-\gamma t}$ avec $S_b - S_a = \frac{e^{-\gamma t_a} - e^{-\gamma t_b}}{\gamma}$.

Effectuons directement une transformation $x \to y$ définie par $x = g(y) = \frac{2}{\lambda} \ln y$, car la transformation canonique est inutile dans ce cas vue que le système est libre, ce qui nous permet d'avoir la condition suivantes

$$\rho(t) = cste = 1, \tag{4.78}$$

le propagateur (4.46) se réduit suite à cette condition à

$$K = \frac{1}{\sqrt{g\prime_b g\prime_a}} \int Dy(s)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{S_a}^{S_b} ds \left[\frac{\dot{y}^2}{2} M g'^2 - \left\{\frac{\hbar^2}{8Mg'^2}\left[\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \frac{M''}{M} - 2\left(\frac{M'}{M}\right)^2\right]\right\}\right]} \tag{4.79}$$

où

$$\begin{aligned} M &= m_0 e^{\lambda x} = m_0 e^{\lambda \frac{2}{\lambda}\ln y} = m_0 y^2 \quad , \quad M\prime = 2m_0 y \quad , M'' = 2m_0 \\ g\prime &= \frac{2}{\lambda y}, \quad , \quad g" = -\frac{2}{\lambda y^2} \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$K = \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_a y_b} \int Dy(s)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{S_a}^{S_b} ds \left[\frac{4m_0}{\lambda^2}\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\hbar^2}{\frac{4m_0}{\lambda^2}} \frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}{y^2}\right]} \tag{4.81}$$

en utilisant[5]

$$\begin{aligned} K &= \frac{2m_0}{i\lambda\hbar}\frac{y_a y_b}{S_b - S_a} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{4m_0}{\lambda^2}\cdot\frac{y_b^2 + y_a^2}{2(S_b - S_a)}} I_{\sqrt{7/8}}\left(\frac{4m_0}{i\hbar\lambda^2}\frac{y_b y_a}{S_b - S_a}\right) \\ K &= \frac{2m_0\gamma}{i\hbar\lambda}\frac{e^{\frac{\lambda}{2}(x_b + x_a)}}{e^{-\gamma t_a} - e^{-\gamma t_b}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{2m_0\gamma}{\lambda^2}\frac{e^{\lambda x_b} + e^{\lambda x_a}}{e^{-\gamma t_a} - e^{-\gamma t_b}}} I_{\sqrt{7/8}}\left(\frac{4m_0\gamma}{i\hbar\lambda^2}\frac{e^{\frac{\lambda}{2}(x_b + x_a)}}{e^{-\gamma t_a} - e^{-\gamma t_b}}\right) \end{aligned} \tag{4.82}$$

4.4.2 Cas 2 : Oscillateur Harmonique Généralisé

Dans ce cas, prenons la masse sous la forme $m(x,t) = \frac{m_0}{e^{-\nu t} - k_0^2 x^2}$ et $V(x,t) = \frac{1}{2} m(x,t)\,\omega^2 x^2$.Ce cas simple est une géneralisation de l'oscillateur standard. Il admet une solution exacte et analytique par l'équation de *Schrödinger* [30].

Par l'approche path integral, en changeant au préalable k_0^2 en $-k_0^2$ afin d'éviter le problème de singularité, nous avons réspectivement

$$\begin{aligned}
\rho &= e^{-\frac{\nu t}{2}} \quad ; \qquad x = \frac{Q}{e^{\frac{\nu t}{2}}} \qquad ; \qquad Q = g(y) = \frac{1}{k_0}\cos y \\
g(y) &= \frac{1}{k_0}\cos y; \quad g\prime = -\frac{1}{k_0}\sin y\,; \qquad \frac{g''}{g'} = \frac{-\cos y}{-\sin y} = +\cot y \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(y,t) &= \frac{m_0}{e^{-\nu t} - k_0^2 x^2} = \frac{m_0 e^{\nu t}}{1 - k_0^2\left(xe^{\nu t/2}\right)^2} = \frac{m_0 e^{\nu t}}{1 - k_0^2 Q^2} = \frac{m_0 e^{\nu t}}{1 - k_0^2\left(\frac{1}{k_0}\cos y\right)^2} \\
&= m_0 \frac{e^{\nu t}}{\sin^2 y} \quad ; \quad M = \frac{m_0}{1 - k_0^2 Q^2} = m_0 \frac{1}{\sin^2 y} \quad ; \qquad (4.84) \\
V(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{m_0}{1 - k_0^2 Q^2}\omega^2 Q^2 = \frac{m_0 \omega^2}{2k_0^2}\cot y^2 \qquad (4.85) \\
Mg\prime^2 &= \frac{m_0}{k_0^2} \quad ; \quad \frac{M'}{M} = \frac{-2m_0 \frac{\cos y}{\sin^3 y}}{m_0 \frac{1}{\sin^2 y}} = -2\cot y \quad ; \qquad (4.86) \\
\frac{M''}{M} &= -2\frac{\frac{-\sin y}{\sin^3 y} \text{-}3 \; \frac{\cos^2 y}{\sin^4 y}}{\frac{1}{\sin^2 y}} = 2\text{+}6 \; \cot^2 y \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{8\bar{M}(g')^2}\left[\left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'}\right)^2 + \frac{\bar{M}''}{M} - 2\left(\frac{\bar{M}'}{\bar{M}}\right)^2\right] &= \frac{\hbar^2}{8\frac{m_0}{k_0^2}}\left[(\cot y)^2 + 2 + 6\cot^2 y - 2\left(-2\cot y\ \right)^2\right] \\
&= \frac{1}{8}\frac{\hbar^2 k_0^2}{m_0}\left[7(\cot y)^2 + 2 - 8\left(\cot y\ \right)^2\right] \\
&= \frac{1}{8}\frac{\hbar^2 k_0^2}{m_0}\left(-\cot^2 y + 2\right) \qquad (4.88) \\
\frac{i\nu}{\hbar}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right) == Q_a}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right) = Q_b} \frac{m_0}{1 - k_0^2 Q^2} Q dQ &= \log\left(\frac{1 - k_0^2 Q_b^2}{1 - k_0^2 Q_b^2}\right)^{\frac{i\nu m_0}{4\hbar k_0^2}} \qquad (4.89)
\end{aligned}$$

Avec ces remplacements nous obtenons le propagateur exprimé en fonction de K_{PT}

$$\begin{aligned}
K_{OH} &= k_0 e^{\frac{\nu}{2}(t_b + t_a) - \frac{i}{\hbar}(t_b - t_a)\left(\frac{3}{8}\frac{\hbar^2 k_0^2}{m_0} - \frac{m_0 \Omega^2}{2k_0^2} + i\hbar\frac{\nu}{4}\right)} \left(1 - k_0^2 x_b^2 e^{\nu t_b}\right)^{\frac{i\nu m_0}{4\hbar k_0^2} - \frac{1}{4}} \left(1 - k_0^2 x_a^2 e^{\nu t_a}\right)^{-\frac{i\nu m_0}{4\hbar k_0^2} - \frac{1}{4}} \\
&\quad \times K_{PT}(y_b, t_b; y_a, t_a) \qquad (4.90)
\end{aligned}$$

où

$$K_{PT}\left(y_b,t_b;y_a,t_a\right)=\int Dy\left(t\right)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\frac{m_0}{k_0^2}\frac{\dot{y}^2}{2}-\frac{\hbar^2k_0^2}{2m_0}\frac{\left(\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\sin^2 y}\right] \tag{4.91}$$

est le propagateur relatif au potentiel symetrique de Pöschl-Teller(PT) . Nous avons posé $\Omega^2=\omega^2-\frac{\nu^2}{4}$.

Le propagateur relatif au potentiel de PT est connue[5]

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty dTe^{\frac{i}{\hbar}ET}\int Dx\left(t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{\sin^2 x}\right)}\\
=\;&\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{\sin x'\sin x''}\Gamma\left(\lambda-L_E\right)\Gamma\left(L_E+\lambda+1\right)P_{L_E}^{-\lambda}\left(\cos x_<\right)P_{L_E}^{-\lambda}\left(-\cos x_>\right) && (4.92)\\
=\;&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_n\left(x_b\right)\Psi_n\left(x_b\right)}{\frac{\hbar^2}{2m}\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2-E} && (4.93)
\end{aligned}$$

avec $L_E=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $\lambda>0$ et $\Psi_n\left(x\right)=\left(\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{n!}\right)^{1/2}\sqrt{\sin x}P_{n+\lambda}^{-\lambda}\left(\cos x\right)$

Les états liés sont données par les pôles de la fonction $\Gamma\left(\lambda-L_E\right)$i.e.

$$\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=-n\quad\text{avec}\quad n=0,1,2...$$

et les energies sont $E_{nPT}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2$

Dans notre cas : $m\to\frac{k_0^2}{m_0}$ et $\lambda\to\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}$,nous obtenons alors le spectre des énergies

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{\hbar^2k_0^2}{2m_0}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}\right)^2+\frac{3}{8}\frac{\hbar^2k_0^2}{m_0}-\frac{m_0\Omega^2}{2k_0^2}\\
&= \frac{\hbar^2k_0^2}{2m_0}\left(n^2+n+1\right)+\hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right). && (4.94)
\end{aligned}$$

et les fonctions d'onde correspondantes à ces energies sont données par

$$\begin{aligned}\Psi_n(x,t) &= \sqrt{k_0}e^{\frac{\nu}{2}t}\left(1-k_0^2x^2e^{\nu t}\right)^{\frac{i\nu m_0}{4\hbar k_0^2}-\frac{1}{4}}\left[\frac{n+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}+\frac{1}{2}}{n!}\Gamma\left(n+2\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}+1\right)\right]^{1/2}\\ &\times\sqrt{\sin x}P_{n+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}}^{-\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}}\left(k_0Q=\cos y\right),\end{aligned}\tag{4.95}$$

ou bien en les exprimant en fonction de la fonction hypergeométrique F en utilisant la relation $P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$ [37] et à l'aide de la relation $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z)$ [37], nous avons encore

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)}\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}\ {}_2F_1\left(1-\mu+\nu,1-\mu-\nu-1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

et grace encore à la propritété ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)={}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;z)$ [37], nous obtenons exactement la forme de la fonction d'onde

$$\begin{aligned}\Psi_n(x,t) &= \sqrt{k_0}\,(-1)^{\frac{i\nu m_0}{4\hbar k_0^2}}\frac{2^{-\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}}}{\Gamma\left(1+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}\right)}\left[\frac{n+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}+\frac{1}{2}}{n!}\Gamma\left(n+2\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2}+1\right)\right]^{1/2}\\ & e^{\frac{\nu}{2}t}\left(k_0^2x^2e^{\nu t}-1\right)^{\frac{m_0}{2\hbar k_0^2}\left(\Omega+\frac{\nu}{2}\right)}\ {}_2F_1\left(-n,n+1+\frac{2m_0\Omega}{\hbar k_0^2};1+\frac{m_0\Omega}{\hbar k_0^2};\frac{1-k_0xe^{\frac{\nu t}{2}}}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.96}$$

Pour une discussion sur ce cas se refere à [36]

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité suivant l'approche path integral des systèmes non conservatifs où la masse et le potentiel dependent tous deux de la position et du temps et décrit par des hamiltonien où l'ordre pour les opérateurs position et impulsion $\hat{p}$ et $\hat{x}$ est choisi symétrique . A l'aide de deux transformations canoniques nous avons déterminé le propagateur et fait apparaitre, en plus de l'oscillateur avec masse et frequence variable, une phase qui depend de la forme de la masse pour certaines formes de masses lorsque le système est conservatif.

Enfin comme application, nous avons traité deux cas où la masse est variable et dependent de la position et du temps et où le potentiel

- est nul $(V = 0)$ pour la particule libre

-et égal $\frac{1}{2}m(x,t)\,\omega^2 x^2$ pour l'oscillateur généralisé

Conclusion générale

Dans ce mémoire, dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, et au moyen de l'approche des intégrales de chemins de *Feynman*, nous avons considéré par l'étude, les systèmes quantiques à masse et variable dépendant de la position et du temps.

Comme première étape, nous avons construit la fonction de Green relative au système quantique a masse variable dépendante de la position à une dimension, suivant la méthode des transformations spatio-temporelles de Duru-Kleinert, ou nous avons introduit une condition nécessaire pour rendre la masse figurant dans le terme cinétique constante, et cette transformation s'est manifestée comme un potentiel effectif au niveau de l'action, le calcul a été testé sur deux cas, le premier correspond au cas d'une masse variable de forme croissante quadratiquement en présence d'un potentiel singulier et le deuxième est celui d'une particule ayant une masse de forme exponentielle, en présence d'un potentiel de même forme. Le spectre des énergies et les fonctions d'ondes correspondantes ont été déduites dans les deux cas.

Comme deuxième étape, nous avons construit le propagateur relatif à une particule de masse dépendante de la position à une dimension et du temps, où nous avons traité le problème dans l'espace des configurations à l'aide de la technique des transformations spatio-temporelles de Duru-Kleinert où l'évolution est décrite dans l'espace temps, après avoir construit le propagateur relatif au système, nous avons effectuer la régularisation nécessaire suivie par la transformation ponctuelle qui a engendré des corrections, ces dernières se sont manifestées par un nouvel potentiel effectif dépendant seulement de la position. Nos résultats ont été testés sur le cas d'un oscillateur harmonique généralisé avec masse variable dans l'espace temps, le spectre des énergies a été déduit.

Et comme étape finale, et à cause du résultat déjà trouvé dans la partie précédente, nous avons considérer par l'étude, le même problème avec un traitement dans l'espace des phases où nous avons utiliser la technique des transformations canoniques généralisées associées à une transformation ponctuelle nécessaire, nous avons fait apparaitre en plus de l'oscillateur avec masse et fréquence variable, une phase qui dépend de la forme de la masse, et nous avons testé nos résultats sur deux cas, le premier relatif a la particule libre où la masse est variable dans l'espace temps et le second est relatif a l'oscillateur harmonique généralisé avec masse variable dans l'espace temps, le spectre des énergies et les fonctions d'onde correspondantes on été convenablement déduites.

Appendices :

- Appendice 1 : Calcul de $\bar{M}_{yy} = \frac{\partial^2 M}{\partial \bar{y}^2}$

$$
\begin{aligned}
M_{n,n-1} &= 2\frac{m_n m_{n-1}}{\sqrt{f_n f_{n-1}}\left(m_{n-1}+m_n\right)} = \frac{1}{\sqrt{f_n}}\frac{1}{\sqrt{f_{n-1}}}.\frac{2}{\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}} \\
&= \frac{2m\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n+\frac{\Delta t_n}{2}\right)m\left(\bar{y}_n-\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n-\frac{\Delta t_n}{2}\right)}{\left[m\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n+\frac{\Delta t_n}{2}\right)+m\left(\bar{y}_n-\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n-\frac{\Delta t_n}{2}\right)\right]} \\
&\quad \times\frac{1}{\sqrt{f\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n+\frac{\Delta t_n}{2}\right)f\left(\bar{y}_n-\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n-\frac{\Delta t_n}{2}\right)}}
\end{aligned}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
f_n &= f\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2},\bar{t}_n+\frac{\Delta t_n}{2}\right) = f\left(\bar{y}_n,\bar{t}_n\right)+\frac{\Delta y_n}{2}\left.\frac{\partial f\left(y,t\right)}{\partial y}\right|_{\bar{y}_n,\bar{t}_n} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left.\frac{\partial^2 f\left(y,t\right)}{\partial y^2}\right|_{\bar{y}_n,\bar{t}_n}+\frac{\Delta t_n}{2}\left.\frac{\partial f\left(y,t\right)}{\partial t}\right|_{\bar{y}_n,\bar{t}_n}...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{f_n}} &\simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{f}}}\left(1-\frac{\Delta y_n}{4}\frac{\bar{f}'_n}{\bar{f}_n}-\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2\frac{\bar{f}''_n}{\bar{f}_n}+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\frac{\bar{f}'^2_n}{\bar{f}^2_n}+...\right) \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{f}}}\left(1-\frac{\Delta y_n}{4}\frac{\bar{f}'_n}{\bar{f}_n}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{3}{8}\frac{\bar{f}'^2_n}{\bar{f}^2_n}-\frac{1}{4}\frac{\bar{f}''_n}{\bar{f}_n}\right]+...\right)
\end{aligned}
$$

aussi nous avons

$$
\frac{1}{\sqrt{f_{n-1}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{f}}}\left(1+\frac{\Delta y_n}{4}\frac{\bar{f}'_n}{\bar{f}_n}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{3}{8}\frac{\bar{f}'^2_n}{\bar{f}^2_n}-\frac{1}{4}\frac{\bar{f}''_n}{\bar{f}_n}\right]+...\right)
$$

et le produit

$$
\frac{1}{\sqrt{f_n}}\frac{1}{\sqrt{f_{n-1}}} \simeq \frac{1}{\bar{f}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{f}'^2_n}{\bar{f}^2_n}-\frac{\bar{f}''_n}{\bar{f}_n}\right]\right]
$$

de la meme manière nous avons pour $\frac{1}{m_{n-1}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m_{n-1}} &\simeq \frac{1}{\bar{m}}\left\{1+\frac{\Delta y_n}{2}\frac{\bar{m}'}{\bar{m}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\frac{\bar{m}'^2}{\bar{m}^2}..\right\} \\
&\simeq \frac{1}{\bar{m}}\left\{1+\frac{\Delta y_n}{2}\frac{\bar{m}'}{\bar{m}}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{m}'^2}{\bar{m}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}\right]...\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}} &\simeq \frac{2}{\bar{m}}1+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{m}'^2}{\bar{m}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}\right].. \\
\frac{2}{\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}} &\simeq \bar{m}\left[1-\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{m}'^2}{\bar{m}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}\right]\right]
\end{aligned}
$$

finalement

$$
\begin{aligned}
M_{n,n-1} &\simeq \frac{\bar{m}}{\bar{f}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left(\frac{\bar{f}_n'^2}{\bar{f}_n^2}-\frac{\bar{f}_n''}{\bar{f}_n}\right)\right]\left[1-\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left(\frac{(\bar{m}')^2}{\bar{m}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}\right)\right] \\
&\simeq \frac{\bar{m}}{\bar{f}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left(\frac{\bar{f}_n'^2}{\bar{f}_n^2}-\frac{\bar{f}_n''}{\bar{f}_n}\right)-\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left(\frac{(\bar{m}')^2}{\bar{m}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}\right)\right] \\
&\quad \frac{\bar{m}_n}{\bar{f}}\left\{1+\frac{(\Delta y_n)^2}{8}\left[\frac{\bar{f}_n'^2}{\bar{f}_n^2}-\frac{\bar{f}_n''}{\bar{f}_n}+\frac{\bar{m}''}{\bar{m}}-2\frac{(\bar{m}')^2}{\bar{m}^2}\right]\right\} \\
&\equiv \bar{M}+\frac{(\Delta y_n)^2}{2}\bar{M}_{yy}
\end{aligned}
$$

où

$$
\bar{M}=\frac{\bar{m}_n}{\bar{f}} \qquad \bar{M}_{yy}=\frac{1}{4}\frac{\bar{m}}{\bar{f}}\left(\frac{\bar{f}_n'^2}{\bar{f}_n^2}-\frac{\bar{f}_n''}{\bar{f}_n}\right)+\frac{1}{4\bar{f}}\left(\bar{m}''-2\frac{(\bar{m}')^2}{\bar{m}}\right)
$$

Appendice 2

Dans cet appendice, on donne l'expression de $\frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2}$

Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{n,,n-1} &= 2\frac{M_n M_{n-1}}{M_{n-1}+M_n} = \frac{2M\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2}\right)M\left(\bar{y}_n-\frac{\Delta y_n}{2}\right)}{M\left(\bar{y}_n+\frac{\Delta y_n}{2}\right)+M\left(\bar{y}_n-\frac{\Delta y_n}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{\frac{1}{M_n}+\frac{1}{M_{n-1}}}
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_{n-1}} &\simeq \frac{1}{\bar{M}_n}\left\{1+\frac{\Delta y_n}{2}\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\frac{\bar{M}_n'^2}{\bar{M}_n^2}..\right\} \\
&\simeq \frac{1}{\bar{M}_n}\left\{1+\frac{\Delta y_n}{2}\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n}+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{M}_n'^2}{\bar{M}_n^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}\right]...\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_n}+\frac{1}{M_{n-1}} &\simeq \frac{2}{\bar{M}_n}\left\{1+\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{M}_n'^2}{\bar{M}_n^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}\right]...\right\} \\
\frac{2}{\frac{1}{M_n}+\frac{1}{M_{n-1}}} &\simeq \bar{M}_n\left[1-\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\frac{\bar{M}_n'^2}{\bar{M}_n^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}\right]\right]
\end{aligned}$$

le developpement de $\mathcal{M}$ est alors le suivant

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{n,n-1} &\simeq \bar{M}_n\left[1-\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left(\frac{\left(\bar{M}_n'\right)^2}{\bar{M}_{nn}^2}-\frac{1}{2}\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}\right)\right] \\
&= \bar{M}_n+\frac{1}{2}\left(\Delta y_n\right)^2\left(\frac{\bar{M}_n''}{4}-\frac{\left(\bar{M}_n'\right)^2}{2\bar{M}_n}\right) \\
&\equiv \bar{M}_n+\frac{\left(\Delta y_n\right)^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}
\end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}=\frac{1}{4}\left(\bar{M}_n''-2\frac{\left(\bar{M}_n'\right)^2}{\bar{M}_n}\right)$$

Bibliographie

[1] Dirac P. M. A, “The Principles of Quantum Mechanics”, Third Edition, Oxford at the Clarendon Pressse, London, 1958.

[2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys 20 (1948) 367.

[3] R. P. Feynman and A. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integrals”, McGraw-Hil, NewYork, 1965.

[4] H.Kleinert, Path integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics, second edition, World scientific,singapore,new jersy,1995.

[5] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of *Feynman* Path Integrals (Springer-Verlag, Berlin, 1998).

[6] I. H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. B84 (1979) 185.

[7] I. H. Duru and H. Kleinert, Fortscher. Phys. 30 (1982) 401.

[8] F. W. Wiegel, Introduction to Path In-tegral Methods in Physics and Polymer Science World Scientific, Singapore, 1990.

A. Inomata, H. Kuratsuji, and C. C. Gerry, Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1) ,World Scientific, Singapore, 1992.

M. C. Gutzwiller et al,Path Integrals from meV to MeV, Proceedings of the 1985 Bielefeld Conference, World Scientific, Singapore, 1986.

M. S. Swanson, Path Integrals and Quantum Processes ,Academic, New York, 1992.

D. C. Khandekar, S. U. Lawande, and K. V. Bhagwat,Path-Integral Methods and their Applications ,World Scientific, Singapore, 1993.

T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann, J. Math. Phys. 32 (1991) 441 .

L. Chetouani, L. Guechi,T.F. Hammann, A. Lecheheb, J. Math. Phys. 34 (1993) 1257 .

L. Chetouani, L. Dekar ,T.F. Hammann, Phys. Rev.A, 52 (1995) 82

[9] H.Goldstein, "Classical Mechanics", Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts,1980.

[10] Munier, J. R. Burgan, M. Feix, and E. Fijalkow, J. Math. Phys. 22, (1981) 1210 / D. Ter Haar, Problems in QuantumMechanics (Pion, London, 1975).

[11] L. Chetouani, L. Guechi and Theophile F. Hammann, Phys. Rev. A 40, (1989) 1157.

[12] A. Messiah, Mecanique Quantique, Edition Dunod, Paris, 1964.

L. Landau et E. Lifchitz, Mecanique Quantique, Edition Mir, Moscou, 1967.

[13] R. M. Wilcox, J. Math. Phys. 8, (1967)962–982 .

[14] J.Schwinger, phys. Rev. 82, (1951) ,664.

[15] A. Ganguly and L. M. Nieto ; J. Phys. A **40**,7265 (2007)

[16] L. Dekar, L. Chetouani and T. F. Hammann ; J. Math. Phys. 39 , 2551(1998) ; Phys. Rev. A **59** ,107(1999)

[17] A.D. Alhaidari ; Phys. Rev. A **66**, 042116(2002)

[18] A. Ganguly and L. M. Nieto ; Modern Phys. Lett. A **17** ,2057(2002)

[19] A. Schulze-Halberg ; J. Phys. A **28**, 5079(1995)

[20] C. Tezcan and R. Sever ; J. Math. Chem.**42**, 387(2007)

[21] K. C. Yung and J

[22] D. J. BenDaniel and C. B. Duke, Phys. Rev, 152, (1966)683 / T. Gora and F. Williams, Phys. Rev. 177, (1969)1179 / Q. G. Zhu and H. Kroemer, Phys, Rev, B 27, (1983)3519 / R. A. Morrow and K. R. Brownstein, Phys, Rev, B 30, (1984)678 ./ R. A. Morrow, Phys. Rev. B 35, (1987)8074 ./ J. Thomsen, G. T. Einevoll and

P. C. Hemmer, Phys-Rev. B 39, (1989). / T. Li and K.J. Kuhn, Phys. Rev.B 47, (1993)12760 . / O. Mustafa and S.H. Mazharimousavi, Int. J. Theor. Phys, (2007)46 . / O. Mustafa and S. H. Mazharimousavi, Phys. Lett. A 373,(2009) 325 . T. Tanaka, J. Phys. A : Math. Theor. 39, (2006)219 ./ O. Von Roos, Phys. Rev. B 27, (1983) 7547 ./O. Von Roos and H. Mavromatis, Phys. Rev. B 31, (1985) 2294.

[23] O. Von Roos, Phys. Rev. B 27, (1983) 7547 .

[24] O. Von Roos and H. Mavromatis, Phys. Rev. B 31, (1985) 2294.

[25] A.de Souza Durta, Exact solvability of potentiels with spatially dependant effective masses.arXiv :quant-ph/0306065 v1 10 jun 2003. A. de Souza Dutra ; Phys. Lett A **275**, (2000) 25.

[26] D. C. Khandekar, S. U. Lawande, and K. V. Bhagwat,Path-Integral Methods and their Applications ,World Scientific, Singapore, 1993.

[27] A. Inomata, H. Kuratsuji, and C. C. Gerry, Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1) ,World Scientific, Singapore, 1992.

[28] L. Chetouani, L. Dekar and T. F. Hammann, Phys. Rev. A 52, (1995) 82.

[29] N. Bouchemla et L. Chetouani, Acta Physica polonica B 40, (2009) 2711.

[30] A. Jannussis et al, Journal of Physical Socity of Japan, 53 (1984) 957-962.

[31] H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. 10, 1458 (1969)

[32] P. Caldirola, Nuov. Cimento, 18, 393 (1941) ; E. Kanai, Progress of Th. Phys. 3, 440 (1948)

[33] H. Bateman, Phys.Rev. 38, 815 (1931)

H. Feshbach and Y. Tikochinsky, Transactions of the New York Academy of Sciences, 38 , 44 (1977)

M. Blasone, Ann. of Phys 312, 354 (2004)

[34] L. Chetouani, L. Guechi and T. F. Hammann, Phys. Rev. A 40, 1157 (1989)

[35] Namik K . Pak and I. Sokmen, Phys. Rev. A 30, 1629 (1984).

[36] Jannussis P. Filippakis, Th. Filippakis and K. Vlachos, V. Zisis, Lett. Nuov. Cimento, 31,298, (1981)

[37] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of Integrals and Prducts(Academic, New York,1965).

Vol. 40 (2009) ACTA PHYSICA POLONICA B No 10

PATH INTEGRAL SOLUTION FOR A PARTICLE WITH POSITION DEPENDENT MASS

N. Bouchemla, L. Chetouani

Département de Physique, Faculté de Sciences Exactes
Université Mentouri, Constantine, Algéria
lyazidchetouani@gmail.com

(Received July 10, 2009; revised version received August 12, 2009)

The problem of the particle with variable mass is considered by the approach of path integral. The Green's function related to this problem is reduced to that of a particle with a constant mass. As examples, simple cases are considered.

PACS numbers: 03.65.Db, 03.65.Ge

1. Introduction

We know that a simple description of the motion of a particle interacting with an external environment consists of replacing the mass by a so-called effective mass, this effective mass is in general variable and dependent on the position.

From the classical point of view it is known that the Lagrangian or the Hamiltonian which can be constructed and associated to the equation of motion relating the particles with variable masses, is not unique. Among various Lagrangians or Hamiltonians, there exists a form where the kinetic energy has the standard form in $\frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2$ or in $p^2/(2m(x))$ (mass being variable).

From the quantum point of view and at the level of the Hamiltonian, the replacement of the classical variables x and p by operators $\hat{x}$ and $\hat{p}$ poses the problem of the order. Thus, the Hamiltonian operator and the Schrödinger equation are not unique and it is not possible, in spite of the limit $\hbar \to 0$ that all the Hamiltonian operators give the classical Hamiltonian, to remove this ambiguity of the order in $\hat{H}$, except some physical conditions such as, for example, the hermiticity condition.

The problem of variable mass can be formulated by the path integral approach where the associated propagator takes the standard form of $\sum\limits_{\text{path}} \exp(\frac{i}{\hbar}S(\text{path}))$ (S being the action). For this purpose it is necessary to start with a Hamiltonian operator where the order is fixed, and then to use the usual process: application of the Trotter formula, elimination of operators $\hat{x}$ and $\hat{p}$. The order problem in $\hat{H}$ is then transposed in the path integral on the various ways of carrying out the discretization (post-point or mid-point, ...). For example, if $\hat{H}$ is chosen [1] following the Weyl order, it will appear in the path integral formulation the Lagrangian of classical mechanics where the mid-point plays a central role. In addition, in some cases of potentials it is necessary to introduce regulating functions or to change the parameterization of paths by using a new time "s" instead of the usual time t in order to obtain a regular expression. This procedure completed with a transformation on the coordinates enabled to solve practically all the problems of standard quantum mechanics [2].

In this paper we propose, using the path integral approach, to consider the problem of position dependent mass which is not sufficiently studied, despite the large literature which has been devoted to it [3–9].

Also, our aim in this paper is to show, by using the path integral formalism, how to transform the problem of a particle having a variable mass into a problem of particle with a constant mass and to establish the effective potential V_{eff} in $\hbar^2$ which was induced.

For this purpose, we adapt the procedure of Duru–Kleinert related to particles having a constant mass in order to determine the corrections induced by the regularization and the transformation on the coordinate.

Finally, let us note that the problem of variable mass has been also studied by the so-called supersymmetric approach and that connection with the mass constant problem was shown by using the transformations on the coordinates and on the wave functions [10].

2. Green's function

First, let us consider the Green's function operator G, solution of the formal equation

$$(E-\hat{H})\,\hat{G}=i\hbar I\,, \tag{1}$$

where

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}\,, \tag{2}$$

is the Hamiltonian operator with the kinetic term

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(x)\,\hat{p}m^{\beta}(x)\,\hat{p}m^{\gamma}(x)+m^{\gamma}(x)\,\hat{p}m^{\beta}(x)\,\hat{p}m^{\alpha}(x)\right]\,, & (3)\\ \alpha+\beta+\gamma &= -1\,, & (4)\end{aligned}$$

and V is the potential term, α, β and γ are parameters.

In order to make the kinetic term constant, we choose two arbitrary regulating functions $f_{\rm l}(x)$, $f_{\rm r}(x)$ whose product is $f(x)$ and we introduce them as follows

$$f_{\rm l}(E-\hat{H})f_{\rm r}f_{\rm r}^{-1}G=i\hbar f_{\rm l}\,, \tag{5}$$

then, we obtain for G, an equivalent expression

$$G=f_{\rm r}\frac{i\hbar}{f_{\rm l}(E-\hat{H})f_{\rm r}}f_{\rm l}\,. \tag{6}$$

In the configurations space, the Green's function becomes

$$\begin{aligned} G\left(x_b,x_a;E\right) &= \langle x_b|\,f_{\rm r}\frac{i\hbar}{f_{\rm l}(E-\hat{H})f_{\rm r}}f_{\rm l}\,|x_a\rangle \\ &= f_{\rm r}(x_b)f_{\rm l}(x_a)\langle x_b|\,\frac{i\hbar}{f_{\rm l}(E-\hat{H})f_{\rm r}}\,|x_a\rangle \\ &= f_{\rm r}(x_b)f_{\rm l}(x_a)\int_0^\infty dS\,\langle x_b|\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)S\right)|x_a\rangle\,, \end{aligned} \tag{7}$$

where in the last line, the exponential form is introduced in order to pass to the path integral formulation.

Let us subdivide the time interval S into N intervals having a length each one equal to $\sigma=S/N$,

$$\begin{aligned} G\left(x_b,x_a;E\right) = f_{\rm r}(x_b)f_{\rm l}(x_a)\int_0^\infty dS\lim_{N\to\infty}\langle x_b|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)\sigma\right) \\ \times\exp\left(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)\sigma\right)\ldots\exp\left(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)\sigma\right)|x_a\rangle\,, \end{aligned} \tag{8}$$

and with the completeness relation

$$\int dx_n\,|x_n\rangle\langle x_n|=1\,, \tag{9}$$

G becomes

$$\begin{aligned} G\left(x_b,x_a;E\right) &= f_{\rm r}(x_b)f_{\rm l}(x_a)\int_0^\infty dS\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n \\ &\quad\times\prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)\sigma\right)|x_{n-1}\rangle\,. \end{aligned} \tag{10}$$

First, let us consider the term $[f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)]$, by using the commutation relations since the mass is not constant

$$[\,m^{\alpha}\,(x)\,,\hat{p}\,] = i\hbar\,\alpha m'\,(x)\,m^{\alpha-1}\,(x)\;, \tag{11}$$

the kinetic term is arranged by moving $\hat{p}$

$$\begin{aligned} & f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x) \\ & = f_{\rm l}(x)\left[\tfrac{1}{4}\left[m^{\alpha}\hat{p}m^{\beta}\hat{p}m^{\gamma}+m^{\gamma}\hat{p}m^{\beta}\hat{p}m^{\alpha}\right]+V(x)-E\right]f_{\rm r}(x)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

The term $\langle x_n|\exp(-\frac{i}{\hbar}f_{\rm l}(x)(\hat{H}-E)f_{\rm r}(x)\sigma)|x_{n-1}\rangle$ is then calculated and in the exponent, it appears the following expression

$$\begin{aligned} \to f_{\rm l}(x_n)\Big\{ & \tfrac{1}{4}\Big[m^{\alpha}(x_n)\hat{p}^2m^{\beta}\,(x_{n-1})m^{\gamma}(x_{n-1})+m^{\gamma}(x_n)\hat{p}^2m^{\beta}(x_{n-1})m^{\alpha}(x_{n-1}) \\ & +i\hbar\beta\Big\{m^{\alpha}(x_n)\hat{p}m'(x_{n-1})m^{\beta-1}(x_{n-1})m^{\gamma}(x_{n-1}) \\ & +\;m^{\gamma}(x_n)\hat{p}m'(x_{n-1})m^{\beta-1}(x_{n-1})m^{\alpha}(x_{n-1})\Big\}\Big] \\ & +V(x_{n-1})-E\Big\}f_{\rm r}(x_{n-1})\,, \end{aligned} \tag{13}$$

in the 2nd step, and in order to eliminate the operators, we introduce the completeness relation

$$\int dp_n\,|p_n\rangle\langle p_n| = 1\,, \tag{14}$$

with the scalar product

$$\langle\,p_n\,|x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}p_nx_n} \tag{15}$$

and after having performed the integrations on the canonical variables p_n, the Green's function in the general case of the problem with position dependent mass becomes

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a;E) = {} & f_{\rm r}(x_b)f_{\rm l}(x_a)\int\limits_0^{\infty} dS\,\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N}dx_n \\ & \times\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar\sigma f_{\rm l}(x_n)f_{\rm r}(x_{n-1})\left(m_n^{\alpha}m_{n-1}^{\beta}m_{n-1}^{\gamma}+m_n^{\gamma}m_{n-1}^{\beta}m_{n-1}^{\alpha}\right)\Big/2}} \\ & \times e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\left\{\Delta x_n-\frac{i\hbar\beta\sigma f_{\rm l}(x_n)f_{\rm r}(x_{n-1})}{2}\frac{\left(m_n^{\alpha}m'_{n-1}m_{n-1}^{\beta-1}m_{n-1}^{\gamma}+m_n^{\gamma}m'_{n-1}m_{n-1}^{\beta-1}m_{n-1}^{\alpha}\right)}{2}\right\}^2}{\frac{(m_n^{\alpha}m_{n-1}^{\beta}m_{n-1}^{\gamma}+m_n^{\gamma}m_{n-1}^{\beta}m_{n-1}^{\alpha})}{2}2\sigma f_{\rm l}(x_n)f_{\rm r}(x_{n-1})}\right]} \\ & \times e^{\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\sigma f_{\rm l}(x_n)f_{\rm r}(x_{n-1})\{E-V(x_{n-1})\}\right]}. \end{aligned} \tag{16}$$

Let us simplify the study of the variable mass problem by considering the simple case of the following Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,\hat{p}\frac{1}{m(x)}\,\hat{p} + V(x)\,, \tag{17}$$

i.e. we fix the parameters as follows

$$\alpha = \gamma = 0\,, \qquad \beta = -1\,, \tag{18}$$

since the regulating functions are arbitrary, we choose

$$f_{\mathrm{r}}(x) = f_{\mathrm{l}}(x) = f^{1/2}(x)\,. \tag{19}$$

Thus the kinetic term can be rearranged

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)}\,\hat{p}\frac{1}{m(x)}\,\hat{p}\sqrt{f(x)} &= \sqrt{f(x)}\,\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\,\hat{p}\sqrt{f(x)} \\ &= \sqrt{\frac{f(x)}{m(x)}}\,\hat{p}^2\sqrt{\frac{f(x)}{m(x)}} + \frac{\hbar^2}{2}f(x) \\ &\quad \times \left(\frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m^3(x)} - \frac{m''(x)}{m^2(x)}\right)\,, \end{aligned} \tag{20}$$

and following this rearrangement, it appears a potential in $\hbar^2$ and G takes the following form

$$\begin{aligned} G\left(x_b, x_a; E\right) &= \sqrt{f(x_b)f(x_a)}\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dS\int\prod_{n=1}^{N} dx_n \\ &\quad \times \exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\sqrt{f(x_n)}(E - V(x_{n-1}))\sqrt{f(x_{n-1})}\,\sigma \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\,\exp\frac{i}{\hbar}\frac{\sigma}{2}\left(\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\hat{p}^2\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}\right) \\ &\quad \times \exp -\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2}{4}\sigma f(x_n)\left(\frac{m''(x_n)}{m^2(x_n)} - \frac{3}{2}\frac{m'^2(x_n)}{m^3(x_n)}\right)|x_{n-1}\rangle, \end{aligned} \tag{21}$$

then after elimination of the operators

$$\begin{aligned}
G(x_b,x_a;E) \;=\; & \sqrt{f(x_b)f(x_a)}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty dS\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right] \\
& \times\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\sqrt{f(x_n)}(E-V(x_{n-1}))\sqrt{f(x_{n-1})}\,\sigma\right) \\
& \times\prod_{n=1}^{N+1}\int\frac{dp_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p_n\left(x_n-x_{n-1}\right)\right)\right) \\
& \times\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\sigma}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}p_n^2\right)\right]\right) \\
& \times\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[-\,\sigma\,\frac{\hbar^2}{4}\,f(x_n)\left(\frac{m''(x_n)}{m^2(x_n)}-\frac{3}{2}\frac{m'^2(x_n)}{m^3(x_n)}\right)\right]\right), \qquad (22)
\end{aligned}$$

and by using the integrals

$$\int dp\exp(-ap^2+bp)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right), \qquad (23)$$

in order to eliminate the variables p_n, we obtain finally

$$\begin{aligned}
& G\left(x_b,x_a;E\right)=\sqrt{f(x_b)f(x_a)}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty dS\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right] \\
& \times\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar\sigma\sqrt{f(x_n)f(x_{n-1})/m(x_n)m(x_{n-1})}}} \\
& \times\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{\Delta x^2}{2\sigma}\sqrt{\frac{m(x_n)m(x_{n-1})}{f(x_n)fr(x_{n-1})}}\right] \\
& \times\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\sigma f(x_n)\left\{(E-V(x_n))-\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{m''(x_n)}{m^2(x_n)}-\frac{3}{2}\frac{m'^2(x_n)}{m^3(x_n)}\right)\right\}\right]. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Let us make the change on the regulating function $f\longrightarrow g$

$$g(x)=\frac{f(x)}{m(x)}\,. \qquad (25)$$

With this change G becomes

$$\begin{aligned} G(x_b, x_a; E) &= \left[m(x_b)\, g^{1/2}(x_b) m(x_a) g^{1/2}(x_a)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty ds \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{g(x_n)}} \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\Delta x^2}{2\sigma\sqrt{g(x_n) g(x_{n-1})}} - \sigma W_1(x_n)\right], \end{aligned} \tag{26}$$

where

$$W_1(x) = g(x)\left[m(x)(V(x) - E) + \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m^2(x)}\right)\right]. \tag{27}$$

At this level, we notice that the kinetic term still has an inconvenient form containing a space dependent mass. This space dependence can be removed by a coordinate transformation

$$x = F(y). \tag{28}$$

Obviously, this transformation generates three corrections:
— the first related to the measure,
— the second, to the action
— and the third correction related to the factor in front of the Green's function.

The postpoint expansion of Δx_n reads at each n

$$\Delta x = F(y_n) - F(y_{n-1}) = \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\Delta y^3 + \dots. \tag{29}$$

The choice of F is arbitrary, we impose the following condition

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = g, \tag{30}$$

thereafter, the mass being in the kinetic term is constant $(= 1)$.

First, let us develop the exponential with the kinetic term. We have

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta x^2}{2\sigma\sqrt{g(x_n) g(x_{n-1})}}\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta y^2}{2\sigma}\right)\left[1 + C_{\mathrm{act}}\right], \tag{31}$$

where

$$C_{\rm act} = \frac{i}{\hbar}\frac{\Delta y^2}{2\sigma}\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F/\partial y^3}{\partial F/\partial y}\Delta y^2 + \ \dots\right\}$$

is the first correction.

The measure induce also a correction

$$\prod_{n=1}^{N}\int dx_n = \prod_{n=2}^{N+1}\int d\left(\Delta x_n\right) = \prod_{n=2}^{N+1}\int Jd\left(\Delta y_n\right)\ ,$$

where J is the Jacobian of the transformation

$$J = \frac{\partial \Delta x}{\partial \Delta y} = \frac{\partial F}{\partial y}\left(1 + C_{\rm meas}\right)$$

and

$$C_{\rm meas} = -\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F/\partial y}{\partial F/\partial y}\Delta y^2 + \ \dots$$

is the 2nd correction.

Also, the prefactor in the Green's function contribute by a correction C_f which is obtained in the development of

$$\left(\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + C_f\ ,$$

where

$$C_f = \frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\Delta y + \left[\left(\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F/\partial y}{\partial F/\partial y}\right]\Delta y^2 + \dots$$

is the 3rd correction.

By combining this three corrections we obtain the total correction $C_{\rm T}$ defined by

$$1 + C_{\rm T} = \left(1 + C_{\rm meas}\right)\left(1 + C_f\right)\left(1 + C_{\rm act}\right)\ . \tag{32}$$

The corrections terms are evaluated perturbatively using the expectation values

$$\left\langle (\Delta y)^{2n}\right\rangle = \left(i\frac{\hbar\sigma}{m}\right)^n (2n-1)\ , \tag{33}$$

and $C_{\rm T}$ is replaced by the following effective potential

$$V_{\rm eff} = -\hbar^2\left[\frac{1}{4}\frac{\partial^3 F/\partial y^3}{\partial F/\partial y} - \frac{3}{8}\left(\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\right)^2\right]\ . \tag{34}$$

The Green's function relating to the nonrelativistic problem with position dependent mass is finally the following

$$G\left(x_b, x_a; E\right) = \left(m_b F_b' m_a F_a'\right)^{1/2} \int_0^\infty dS \left(\int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^S ds \left(\frac{\dot{y}^2}{2} - W_2 \right)} \right), \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} W_2 \; = \; & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \left[m(x)(V(x)-E) + \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{m''(x)}{m(x)} - \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m^2(x)}\right)\right] \\ & + \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{\partial^3 F/\partial y^3}{\partial F/\partial y} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 F/\partial y^2}{\partial F/\partial y}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (36)$$

In order to illustrate our calculations, let us make two applications.

2.1. Applications

Let us consider the cases treated in [12]

1st case: $m(x) = cx^2$ and $V(x) = A/(cx^4) + B(cx^2)$.

With this choice, the Green's function relating to the problem with position dependent mass can be reduced to that of a particle of mass $= 1$ and subjected to the action of the combination of a harmonic force and a centrifugal barrier.

In this case, it is sufficient to choose an identical transformation

$$x = y = F(y)$$

the Green's function has the following expression

$$\begin{aligned} G\left(x_b, x_a; E\right) &= \left(c x_b x_a\right) \left[\int_0^\infty dS \left(\int Dx(s)\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^S \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - cEx^2 + \frac{A+g}{x^2} + B\right) ds} \right) \right] \\ &= \left(c x_b x_a\right) \left(x_b x_a\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega}{i\hbar}\right) \\ &\times \int_0^\infty dS \left[\frac{e^{\left(\frac{i}{\hbar}\frac{B}{\omega}\omega S\right)}}{\sin(\omega S)} \exp\left(\frac{i\omega}{2\hbar}\left(x_b^2 + x_a^2\right)\cot(\omega S)\right) I_\nu\left(\frac{\omega x_b x_a}{i\hbar \sin(\omega S)}\right)\right], \end{aligned} \quad (37)$$

where I_ν is the Bessel function with $\nu = \left[-2A/\hbar^2 - 7/4\right]^{\frac{1}{2}}$.

In order to extract the energy spectrum and the corresponding wave functions, let us separate the variables x_b, x_a and S with the help of the Hill Hardy formula [13] by putting

$$X = \frac{\omega}{\hbar} x_a^2, \qquad Y = \frac{\omega}{\hbar} x_b^2, \qquad Z = e^{-2i\omega S}. \quad (38)$$

Then

$$\begin{aligned}
G\left(x_b, x_a; E\right) &= c\left(x_b x_a\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \\
&\times \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x_a^2\right)\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}x_a^2\right]^{\upsilon/2} L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}x_a^2\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x_b^2\right)\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}x_b^2\right]^{\upsilon/2} L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}x_b^2\right) \\
&\times \int_0^{\infty} \exp -i\omega S\left(1+2n+\upsilon-\frac{\beta}{\hbar\omega}\right)dS\,,
\end{aligned} \tag{39}$$

and which is reduced as

$$\begin{aligned}
G\left(x_b, x_a; E\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{c\ x_a^3\ n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}x_a^2\right]^{\upsilon/2} \\
&\times \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x_a^2\right) L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}x_a^2\right)\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{c\,x_b^3\,n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}x_b^2\right]^{\upsilon/2} \\
&\times \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x_b^2\right) L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}x_b^2\right)\int_0^{\infty} \exp -i\omega S\left(1+2n+\upsilon-\frac{\beta}{\hbar\omega}\right)dS\,,
\end{aligned} \tag{40}$$

with $cE = -\frac{1}{2}\omega^2$.

Let us integrate on S

$$\int_0^{\infty} \exp -i\omega S\left(1+2n+\upsilon-\frac{\beta}{\hbar\omega}\right)dS = \frac{1}{i\omega\left(1+2n+\upsilon-\frac{\beta}{\hbar\omega}\right)}\,, \tag{41}$$

from the poles, we obtain the energy spectrum

$$E_n = -\frac{\beta^2}{2c(2n+\upsilon+1)^2\hbar^2}\,, \qquad \text{with} \qquad n = 0, 1, 2\ \ldots\,, \tag{42}$$

and using the standard form of the Green's function

$$G\left(x_b, x_a; E\right) = i\hbar\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_n^*(x_b)\ \Psi_n(x_a)}{E-E_n}\,, \tag{43}$$

we can extract from residues, the corresponding wave functions:

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= \left[\frac{2\omega\beta}{\hbar^3}\frac{x^3}{(2n+\upsilon+1)^2}\frac{n!}{\Gamma(n+\upsilon+1)}\right]^{1/2}\left[\frac{\omega}{\hbar}x^2\right]^{\upsilon/2}\\ &\quad\times\exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}x^2\right)L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}x^2\right)\end{aligned}$$

suitably normalized.

2nd case: $m = m_0\exp(cx)$ and $V = V_0\exp(cx)$.

With the transformation $x \to y$ defined by

$$x = F(y) = \ln y^{2/c}\,, \tag{44}$$

the Green's function becomes

$$\begin{aligned}G(x_b, x_a; E) &= \frac{2}{c}\frac{m_0\exp(c/2\ (x_b+x_a))}{(y_by_a)^{1/2}}\int_0^\infty dS\\ &\times\left[\int Dy(s)\exp\frac{i}{\hbar}\int_0^S\left(\frac{\dot{y}^2}{2}+\frac{4E_0m_0}{c^2}-\frac{4V_0m_0}{c^2}y^2+\left(\frac{\hbar^2}{2}-\frac{\hbar^2}{8}\right)\frac{1}{y^2}\right)ds\right],\end{aligned} \tag{45}$$

which has the same form as the Green's function relating to a particle of mass $=1$ subjected to the action of a harmonic force and a centrifugal barrier.

The Green's function being known

$$\begin{aligned}G(x_b, x_a; E) &= \frac{2}{c}\frac{m_0\exp(c/2\,(x_b+x_a))}{(y_by_a)^{1/2}}\left(\frac{\omega}{i\hbar}\right)[y_by_a]^{\frac{1}{2}}\\ &\times\int_0^\infty dS\,\frac{\exp(i/\hbar)(4E_0m_0/c^2)S}{\sin(\omega s)}\\ &\times\exp\frac{i\omega}{2\hbar}\left(y_b^2+y_a^2\right)\cot(\omega S)I_\upsilon\left[\frac{\omega y_by_a}{i\hbar\sin(\omega s)}\right],\end{aligned} \tag{46}$$

with

$$\upsilon = \frac{i}{\sqrt{2}}\,. \tag{47}$$

By using the same formula of separation of variables [13] the Green's function is finally written:

$$
\begin{aligned}
G\left(x_b, x_a; E\right) = & \frac{2m_0 \exp\left[c/2\left(x_b + x_a\right)\right]}{c} \\
\times & \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-\omega}{2\hbar} y_a^2\right) \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2} \left[\frac{\omega}{2\hbar} y_a^2\right]^{\upsilon/2} L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar} y_a^2\right) \\
\times & \exp\left(\frac{-\omega}{2\hbar} y_b^2\right) \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2} \left[\frac{\omega}{2\hbar} y_b^2\right]^{\upsilon/2} L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar} y_b^2\right) \\
\times & \int_0^{\infty} dS \exp\left[-i\omega\left(1 + 2n + \upsilon - \frac{4Em_0}{\hbar\omega c^2}\right) s\right] .
\end{aligned} \tag{48}
$$

It is then easy to extract the energies spectrum,

$$
E_n = \sqrt{\frac{v_0}{2m_0}}\, \hbar c\, \left(2n + 1 + \upsilon\right) , \qquad n = 0, 1, 2\, \ldots , \tag{49}
$$

as well as the corresponding wave functions which are also normalized

$$
\Psi_n(x) = \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{n!}{\Gamma\left(n+\upsilon+1\right)}\right]^{1/2} \left[\frac{\omega}{2\hbar}\, e^{cx}\right]^{\upsilon/2} \exp\left(\frac{cx_b}{2} - \frac{\omega}{2\hbar}\, e^{cx}\right) L_n^{\upsilon}\left(\frac{\omega}{\hbar}\, e^{cx}\right) , \tag{50}
$$

with $\omega = (2\sqrt{2m_0 v_0})/c$.

3. Conclusion

In this paper we showed how to treat the problem of a particle having a position dependent mass (variable mass) by the use of Duru and Kleinert procedure related to particles having a constant mass and to determine the corrections induced by the combination of the path-dependent time reparametrization and a coordinate transformation. We have also shown how to transform a problem of position dependent mass into a problem of constant mass and how to obtain the relation which exists between the two Green's functions (variable mass and constant mass). For that, in order to regularize the kinetic energy we introduced the functions $\left(f_{\mathrm{r}} = f_{\mathrm{l}} = f^{1/2}\right)$ and we tacked account the terms in $(\Delta y)^2$ (order of σ) and after transformation we obtained for the classical trajectory in a time interval σ, an unique action (or Lagrangian).

Our Green's function obtained is thus completely symmetrical in respect to the initial and final points (this is not the case of propagator [1] for example).

Finally, for the general case of variable mass depend on the position and of time the study is in progress and the results can be found elsewhere.

REFERENCES

[1] J. Sa Borges, L.N. Epele, H. Fanchiotti, C.A. Garcia Canal, F.R.A. Simão, *Phys. Rev.* **A38**, 3101 (1988).

[2] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics*, Second Edition, World Scientific, Singapore, New Jersey 1995.

[3] A. Ganguly, L.M. Nieto, *J. Phys. A* **40**, 7265 (2007).

[4] L. Dekar, L. Chetouani, T.F. Hammann, *J. Math. Phys.* **39**, 2551 (1998); *Phys. Rev.* **A59**, 107 (1999).

[5] A.D. Alhaidari, *Phys. Rev.* **A66**, 042116 (2002).

[6] A. Ganguly, L.M. Nieto, *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 2057 (2002).

[7] A. Schulze-Halberg, *J. Phys. A* **28**, 5079 (1995).

[8] C. Tezcan, R. Sever, *J. Math. Chem.* **42**, 387 (2007).

[9] K.C. Yung, J.H. Yee, *Phys. Rev.* **A50**, 104 (1994).

[10] A. de Souza Dutra, M. Hott, C.A.S. Almeida, *Eur. Phys. Lett.* **62**, 8 (2003).

[11] T. Tanaka, *J. Phys. A* **39**, 219 (2006).

[12] A. de Souza Dutra, C.A.S. Almeida, *Phys. Lett.* **A275**, 25 (2000).

[13] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals and Products*, Academic, New York 1965, p. 1015, Eqs (8)–(814).

Path Integral and time dependant systems

ABSTRACT :

We know that the path integral formulation is currently a modern way of comprehension and analysis of the physical phenomena since the only tools necessary to this formalism are the usual rudiments of the classical mechanics such as the action and trajectory, we want to test the simplicity of this formulation, on two problems:

The first concerns quantum systems with variable mass and potential (depending solely on the position), and the second one with the quantum systems with variable mass and variable potential both dependent on time in addition to position. For the first problem a hermetic form is chosen for the Hamiltonian operator, and after construction of the propagator and application of a space-time transformation, the Green function is obtained. Particular masses were also considered, which made it possible to make comparison with other results obtained differently. For the second problem depends on time, the Green function is also obtained, first by construction and then by a combination of canonical transformation and point transformation and finally for a choice of particular (non-quadratic) forms for the potential V and for the mass m, the dissipative system is then reduced to the conservative one.

Note that this problem has been considered in two different ways by the Hamiltonian formulation (canonical transformation) and Lagrange formulation. The results obtained differ in both cases. Further clarification on the procedure will be needed.

Keywords:

Path Integral, Space-time transformation, Generalized Canonical Transformations, time dependant systems.

تكامل المسارات و الانضمة المتعلقة بالزمن

ملخص:

نحن نعلم أن تكامل المسارات هو حاليا وسيلة حديثة لفهم و تحليل الظواهر الفيزيائية لأن الأدوات الوحيدة اللازمة لهذه الشكليات هي المبادئ المعتادة للميكانيك الكلاسيكي مثل الفعل و المسار ,هذه البساطة، أردنا اختبارها في هذه الرسالة حول اشكاليتين : الأولى تتعلق بالنظم الكمومية ذات الكتلة والكمون المتغيرين بدلالة الموضع ، والثانية تتعلق بالنظم الكمومية دات الكتلة و الكمون المتغيرين بدلالة الزمن و الموقع.

للاشكالية الأولى يتم في البداية اختيار شكل مؤثر Hamiltonien ، وبعدها بناء propagateur وتطبيق التحويل الزماني- المكاني ، يتم الحصول على دالة Green. النتائج المتحصل عليها تم تطبيقها في بعض الحالات اين تم اختيار عبارة الكتلة ، مما مكن من إجراء مقارنة مع النتائج الأخرى التي تم الحصول عليها بشكل مختلف. بالنسبة للاشكالية الثانية فهي تعتمد على الزمن ، يتم الحصول على دالة Green أيضا ، أولا عن طريق البناء ومن ثم عن طريق مزيج من التحول القانوني والتحويل النقطي وأخيرا لاختيار أشكال معينة (غير تربيعية) للكمون وللكتلة ، و بالتالي تحويل système dissipatif الى système conservatif

هذه الاشكاليك تمت دراستها بطريقتين مختلفتين الاولى عن طريق الصياغة الهاميلتونية و الثانية عن طريق صياغة لاغرانج. النتائج التي تم الحصول عليها تختلف في كلتا الحالتين. سيكون هناك حاجة إلى مزيد من التوضيح حول الإجراء.

الكلمات المفتاحية : تكامل المسار ، التحويل المكاني -الزماني ، التحولات القانونية المعممة, الانضمة المتعلقة بالزمن.

RESUME :

Nous savons que l'intégrale de chemin est actuellement un moyen moderne de compréhension et d'analyse des phénomènes physiques puisque les seuls outils nécessaires à ce formalisme sont les rudiments habituels de la mécanique classique tels que l'action, trajectoire, cette simplicité de ce formalisme, nous avons voulu la tester dans cette thèse sur deux problèmes:

Le premier concernant les systèmes quantique à masse et potentiel variable dépendant uniquement de la position, et le deuxième concernant les systèmes quantique à mase et potentiel variable dépendant tous deux du temps en plus de la position.

Pour le 1^{er} problème au départ une forme hermétique est choisie pour l'opérateur Hamiltonien, et après construction du propagateur et application d'une transformation spatio-temporelle, la fonction de Green est obtenue. Des masses particulières ont été en outre considérées, ce qui a permis de faire la comparaison avec d'autres résultats obtenues différemment.

Pour le $2^{ème}$ problème dépendent du temps, la fonction de Green est également obtenue, d'abord par construction et ensuite par combinaison de transformation canonique et transformation ponctuelle et finalement pour un choix des formes particulières (non quadratiques) pour le potentiel V et pour la masse m, le système dissipatif est alors réduit à celui conservatif.

Notons que ce problème a été considéré de deux manières différentes par la formulation hamiltonienne (transformation canonique) et lagrangienne. Les résultats obtenus sont en accord dans les deux cas.

Mots clé : Intégrale de chemin, Transformation spatio-temporelle, Transformations canoniques généralisées, systèmes dépendants du temps.