الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

الرقم التسلسلي: ....
السلسلة: ....

أطروحة

لنيل شهادة الدكتوراه الطور الثالث (ل.م.د)

تخصص: الفيزياء النظرية

بعنوان:

الدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في الكوسمولوجيا الكلاسيكية و الجاذبية الكوانتية الحلقية

مقدمة من طرف:

بن الشيخ سارة

بتاريخ: 2018/02/04

أمام اللَّجنة:

الرئيس:	بلعلوي نذير	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
المقـــرر:	نور الدين مباركي	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
الأعضاء:	منير بوساهل	أستاذ التعليم العالي	جامعة محمد بوضياف	المسيلة
	حبيب عيساوي	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
	سليمان زعيم	أستاذ التعليم العالي	جامعة الحاج لخضر	باتـــنة

إلى روح فلذة كبدي **صبيحي محمد إسلام**

شكر وتقدير

أولاً أحمد **الله تعالى** الذي وفقني في إكمال هذه الأطروحة بعد عناء كبير.

بعدها أشكر **والديا العزيزان** اللّذان تعدى عطفهما كل المسافات وحنانهما فاق كل التصورات اللّذان كانا ومازالا خير عون لي في الحياة" رَبِّي ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا".

كذلك أتقدم بشكر إلى إخوتي جميعاً **أميرة، أمين، عبير، إيمان** على دعمهما لي المتواصل بشكل خاص أخي **موسى** الذي ساعدني كثيراً على إتمام انجاز هذه الأطروحة.

كما أشكر أستاذنا الفاضل **نور الدين مباركي** الذي لم يبخل علينا بتوجيهاته ونصائحه القيمة الّتي كانت عونا لنا في إتمام هذه الأطروحة.

أقدم بالشكر للأستاذ **بلعلوي ندير** على قبوله ترؤس لجنة المناقشة. أقدم تشكراتي أيضا للأساتذة **عيساوي حبيب، منير بوساهل** و **سليمان زعيم** على قبولهم المشاركة في لجنة المناقشة.

فهرس المحتويات

المحور الأول

مقدمة عامة

المحور الأول

مقدمة عامة

علم الكون أو ما يسمي بالكوسمولوجيا هو علم يهتم بدراسة الكون بمجمله بكل ما فيه من مادة وطاقة إِعتمادا على المكتسبات النظرية والتجريبية كما أنَّه يحاول معرفة أصل الكون، فهم وضعه الحالي والتنبؤ بمستقبله. وبالتالي فإنه يمكننا القول أنَّ هدف الكوسمولوجيا يكمن في فهم والتحكم في جميع القوانين التي من المفترض أن تكون سبب في تماسك كوننا حتى الآن. حاليا يعتبر تفسير تسارع التمدد الكوني الحالي وفهم طبيعته و مصدره من أكبر التحديات لذى علماء الكون، حيث تم اكتشاف هذا الأخير سنة 1998 من قبل مشروعين مستقلين هما مشروع المستعر الكوني الأعظم (the Supernova Cosmology Project) و فريق البحث للمستعر الأعظم الأعلى z (the High-Z Supernova Search Team) فكلا المشروعين استعملا المستعرات الأعظمية البعيدة ذوات النوع Ia لقياس التسارع الكوني [3-1]، فهذا الاكتشاف كان غير متوقع لأن علماء الكون في ذلك الوقت كانوا يتوقعون أن يكون التسارع متباطئا بسبب التجاذب الناتج عن المادة الموجودة في الكون. كما تم أيضا تأكيد التسارع الكوني من قبل أشعة الخلفية الكونية الغير متجانسة [8-4] والمنشآت ذات المعايير الكبيرة [10-9]. واحدة من بين التفسيرات البديلة لهذه الأرصاد هي وجود عناصر جديدة غريبة غير معروفة لا يمكن الكشف عنها ذات ضغط سالب تدعى بالطاقة المظلمة. لقد تم تحديد معالم هذه العناصر اعتمادا على الأرصاد المذكورة سابقا، فقد افترض أنَّها تشكل 74% من المادة والطاقة الكونية الاجمالية ولديها معادلة حالة من الشكل $p = \omega\rho$ حيث $\omega < -1/3$. غير قابلة للتجمع، متجانسة مكانيا، توجد بكميات صغيرة في الكون المبكر وتهيمن على الكون الحالي. فبدمج تحاليل كل من ESSENCE SNe Ia و the SuperNova Legacy Survey SNe Ia فقد تم تقييد $\omega = -1.07 \pm 0.09$ [11].

إن أبسط مترشح للطاقة المظلمة هو الثابت الكوني معرف بـ $\omega = -1$ ، من الرغم من أن عدد من الأرصاد يفضلونه [11] إلا أنه ما زال يعاني من مشكلتي الصقل (the fine-tuning problem) والمصادفة (coincidence problem) [12-17]. فلتخلص من المشكلتين السابقتين فقد تم ادراج مجموعة من الحقول السلمية واحدة من بين هذه الحقول تعرف باسم الجوهرة (quintessence) حيث $-1 < \omega < -1/3$ [18-23] و التي يتم التعبير عنها عن طريق حقل سلمي اعتيادي يكون مرتبط بالجاذبية بشكل ضئيل بحيث يكون كمونه مهيمن على طاقته الحركية، ومع ذلك، فإن الارصاد الحديثة تسمح بإمكانية ان تكون $\omega < -1/3$ و بالتالي فقد تم اقتراح نموذج جديد من الحقول السلمية تكون طاقتها الحركية سالبة لكي تحقق الشرط السابق والتي تدعى بالحقول الشبحية (phantom) [24], ولكن هذا النموذج يعاني من مشكلة النقطة الشاذة المستقبلية (future singularity) والتي تدعى بالإنشقاق الكبير (Big Rip) [25-27] ، فمن مميزاتها أن كل من الكثافة الطاقوية، الضغط و معامل القياس الكوني يتباعدون عند زمن معين و هذا مرفوض من الناحية الفيزيائية ولذلك فقد تم اقتراح العديد من الأفكار لتجنب هذا الشواذ، على سبيل المثال: اختيار كمونات و شروط ابتدائية معينة لكي يؤول النموذج في آخر الزمان إلى كون دي-ستر (de-Sitter universe) [28] أو بإدخال التأثيرات الكوانتية [29]. يوجد العديد من نماذج الحقول السلمية نذكر منها مثلا حقل quintom والذي هو عبارة عن مزيج بين الطاقة المظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) والشبح (phantom)، حقل K-essence يتميز بكون الحد الخاص بالطاقة الحركية غير اعتيادي (non-canonical) مما يؤدي بتسارع الكون في الأزمان المتأخرة، حقلي tachyonic و dilatonic هذان الأخيران تم اقتراحهما من قبل نظرية الأوتار وبعض الموائع المثالية التي تتميز بمعادلة حالة خاصة تعرف باسم غاز شابلين (Chaplygin gas) [30,31]. بينت أيضا الأرصاد الفلكية أن الوسط الكوني ليس مائعا مثاليا بل يمكن أن يحتوي على لزوجة تؤثر وتساهم في تطور الكون [32]. لقد تم لأول مرة ادخال اللزوجة في علم الكون من قبل كل من: Landau ,Eckart و Lifshitz [33,34]. يجدر الإشارة إلى أنَّه يتم اهمال اللزوجة الجزية (shear viscosity) في نموذج الأكوان المتجانسة و متوحدة الخواص مع الاتجاه و تؤخذ فقط بعين الاعتبار اللزوجة السائبة (bulk viscosity) حيث تم دراسة تأثيرها على التطور الكوني في عدة مراجع على سبيل المثال في المراجع [35,40] فقد تم مناقشة امكانية استعمال المادة ذات الضغط اللزج كبديل للطاقة المظلمة وذلك للحصول على التسارع الحالي للكون و هذا بعكس

ما قد تم طرحه في المرجع [41]، حيث تم هناك تبيين أن السيناريو الذي تكون فيه المادة اللزجة هي المهيمنة هو نموذج غير جيد لتفسير الكون الحالي على الاقل تحت معاملات اللزوجة السائبة المستعملة في المرجع المذكور آنفا. من جهة أخري فان سيناريو الطاقة المظلمة ذات اللزوجة السائبة حاليا شغل اهتماما كبيرا [46,42] فعلى وجه الخصوص في المرجع [47] تم توضيح أنه يمكن تجنب حدوث الإنشقاق الكبير وذلك بتبني سيناريو الطاقة المظلمة ذات اللزوجة السائبة. بحث بعض المؤلفين في إمكانية وجود تفاعل بين المادة المظلمة الغير مضغوطة والطاقة المظلمة اللزجة حيث وجدوا أن الكون سيدخل في حالة نهائية مستقرة تهيمن فيها كل من المادة والطاقة المظلمتين، على حد سواء يكون الكون فيها متسارع وذلك باختيار معاملات معينة [50,48]. علاوة على ذلك، يعتقد أن آثار الجاذبية الكمية هي الأخرى تلعب دورا كبيرا في تطور الكون. وبالتالي فانه يفضل دراسة خصائص النماذج الكونية في إطار نظرية الجاذبية الكمية. ففي هذه الأطروحة سوف نعتمد على نظرية الكوسمولوجيا الكمية الحلقية [54,51]، والتي تعتبر تكميم اعتيادي لزمنكان متجانس ترتكز أساسا على تقليص التناظر لنموذج الجاذبية الكمية الحلقية [60,55]. في الحقيقة فان تأثير الكوسمولوجيا الكمية الحلقية يكمن في تعديل معادلة فريدمان وذلك بإضافة حد مصحح من الشكل التالي $-\frac{\rho^2}{\rho_c}$ والذي يعبر على الطبيعة المتقطعة للهندسة الكمية للزمنكان [62,61]. فعندما يصبح هذا التصحيح مهيمنا، يبدأ الكون في الارتداد ثم بعدها يبدأ بتوسع إلى الوراء. فواحدة من النجاحات الكبيرة في الكوسمولوجيا الكمية الحلقية هي اِستبدال الانفجار العظيم الشاذ (big bing singularity) بالارتداد الكبير (big bounce) [54,51] ويمكن أيضا تجنب جميع النقاط الشاذة المستقبلية. فيما يخص هذه الأخيرة ففي المراجع [66,63] تم تبيين أن تصحيحات الكوسمولوجيا الكمية الحلقية تجعل معامل هابل يهتز في المستقبل بين قيمتين محددتين وهذا يقود الى عدم تباعد كل من معامل القياس الكوني والكثافة الطاقوية بل أن كليهما سوف يهتزان أيضا ضمن قيمة محددة وبالتالي فسوف يتم تجنب أي نقطة شاذة. فالهدف من هذه الأطروحة هو استعمال بعض النظريات لبناء نموذج كوني يتوافق والأرصاد الحالية وبالتالي امكانية التنبؤ بمصيره في المستقبل، هنا سوف نستعمل الدراسة الديناميكية مع الأخذ بعين الاعتبار التصحيحات الكوسمولوجيا الكمية الحلقية واللزوجة في الطاقة المظلمة في نموذج واحد وذلك لتقصي إذا ما كانت تظهر بعض السمات المثيرة للاِهتمام عند أخذ التأثيرين معا وذلك لفهم أفضل لتطور الكون ومصيره حيث سوف نعمل ضمن نموذجي الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) بطريقة منفصلة.

سوف نذكر بأن نظرية الأنظمة الديناميكية أثبتت ناجعتها لربح فهم أفضل. حيث أنَّ هذه المقاربة لا تتطلب معرفة الحلول بدقة. في الحقيقة فدون معرفة الشروط الابتدائية يمكننا تحديد مصير كوننا والتنبؤ بجميع سيناريوهاته الممكنة بالإضافة إلى الحالات المقاربة (الأوقات المبكرة والمتأخرة لكوننا) للنماذج الكونية. سوف نقوم بتنظيم اطروحاتنا كالآتي:

في المحور 2: سوف نتحدث بطريقة موجزة حول مبادئ الكسمولوجيا الكلاسيكية. سنستهلها بموجز صغير حول نموذج أينشتاين للكون المستقر والذي قام بتحقيقه بإضافة ما يسمى بالثابت الكوني وسنرى كيف بعدها انهار هذا النموذج بعد اكتشاف هابل للتوسع الكوني سنة 1929 حيث علق أينشتاين على هذا الاكتشاف بأن اضافته للثابت الكوني كان أكبر خطأ في حياته, كما سنتكلم باختصار حول العالم الهولندي ويليام دي-ستر سنة 1917 الذي كان أول من أقترح نموذج كوني يكون فيه الكون في حالة توسع و ذلك بفرض أن تكون الطاقة السوداء هي المهيمنة بعدها سوف نتكلم حول نموذج FRW و هو نموذج جيد لوصف كوننا الحالي و الذي انبثق منه ما يعرف بنموذج الانفجار الكبير حيث أن هذا الأخير تمكن بالتنبؤ ببداية الكون و مراحل تشكله حتى صار على هيأته الحالية حيث سنبين نجاحات و مشاكل هذا النموذج. بعد ذلك سنتحدث حول ما يعرف بالتضخم الكوني وكيف تمكن من حل نماذج الانفجار الكبير وبعدها سنقدم جدولا نستعرض فيه أهم الحقب التاريخية التي مر بها كوننا حتى الآن. وفي الأخير سنتكلم عن المادة السوداء.

في المحور3: سنقدم في البداية مقدمة صغيرة حول الجاذبية الكوانتية الحلقية وبعدها سنقوم بالتذكير حول ميكانيك هاملتون ولاغرانج لكي يتسنى لنا بسهولة صياغة النسبية العامة عن طريق الهاميلتونيا بعدها سنتحدث عن صياغة ADM للنسبية العامة والتي تعتبر أولى المحاولات لصياغة النسبية العامة عن طريق الهاميلتونيا أو ما يسمى بتوريق الزمنكان ولكن باستعمال هذه الصيغة ستوجهنا مشكلة عند القيام بالتكميم لذلك فقد تم الاستعانة بمتغيرات اخري تدعى بمتغيرات أشتيكار (Ashtekar's variables) التي سنقوم بالتحدث عنها هي أيضا، بعدها سنتكلم عن الجاذبية الحلقية الكوانتية الاعتيادية (Canonical LQG) فهذه الأخيرة تعتمد بشكل أساسي على متغيرات اشتكار كما سنرى و في الأخير سنتحدث عن الكوسمولوجيا الحلقية الكوانتية المتجانسة التي ستقودنا نحو معادلة فريدمان المعدلة عند إضافة التأثيرات الهندسية.

في المحور4: سنقوم باقتراح نموذجا كونيا نقوم فيه بإدماج كلا من التصحيحات الخاصة بالجاذبية الكوانتية الحلقية والطاقة المظلمة ذات اللزوجة السائبة وذلك للإستقصاء أكثر حول تطور كوننا والنهاية

التي من الممكن أن يؤول إليها. بحيث سنقوم بدراسة كلا من نموذجي الطاقة المظلمة من نوع الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) على حدا، في كلا من المرجعين الكلاسيكي والكوانتي. للوصول إلى هذا المبتغى سوف نعتمد على نظرية الأنظمة الديناميكية. لذلك فسنتحدث أولا حول كل من: نظرية الأنظمة الديناميكية، نظرية Lyapunov ، نظرية المشعب المركزي (Centre manifold theory) بعدها سنبدأ في الدراسة الديناميكية للنموذج الكوني المقترح أعلاه بداية في المرجع الكلاسيكي ثم في المرجع الكوانتي بعدها نقوم بمقارنة النتائج بينهما بحيث في كلا المرجعين سوف نقوم باقتراح متغيرات عديمة البعد مناسبة لنظامنا بعدها سنحاول إيجاد جمل المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا المتعلقة بالمتغيرات السابقة و في الأخير نقوم باستعمال برنامج المابل (Maple) للحصول على النقاط الحرجة و التي سنقوم بتحديد استقراريها اعتمادا على إشارة و طبيعة القيم الذاتية لمصفوفة النظام جاكوبي J عند كل نقطة. وفي نهاية هذا المحور سنقوم باختبار مدى صلاحية نموذجنا الكوني المقترح وذلك عن طريق تقدير نسبة توافقه والتجريب حيث أننا سنقوم بالاعتماد على النتائج التجريبية لـ $H(\zeta)/(1+\zeta)$ الموجودة في المرج [95].

في المحور 5: سوف نقوم في هذا المحور بالدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة الظلماء اللَّزجة في مرجع الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية ولكن في هذه المرة سنأخذ اللُّزوجة بصياغة أعم بحيث سنقوم بالخطوات السابقة التي عملنا بها في النموذج السابق.

المحور الثاني

علم الكون الكلاسيكي

المحور الثاني

علم الكون الكلاسيكي

الكون المستقر (نموذج أينشتاين)

في عام 1917 قدم آينشتاين أول نموذج رياضي نسبي للكون مبني على النسبية العامة يعتبر هذا النموذج نقطة الانطلاق في علم الكونيات النسبية. حيث كان يعتقد في ذلك الوقت أنَّ الكون مستقر خاصة وأن الأرصاد الفلكية وقتها كانت محدودة مقتصرة فقط على نجوم مجرتنا حيث كانت هناك أدلة رصدية تبرر فرضية أنَّ الكون مستقر لذلك قام آينشتاين بإضافة الثابت الكوني لمعادلاته النسبية لمقاومة آثار الجاذبية التي تتسبب في انهيار الكون على نفسه وبالتالي تحقيق النموذج المستقر (اي ان الكون لا يتمدد ولا يتقلص). يمكن وصف فضاء أينشتاين رياضيا على أنَّه عبارة عن كرة ثلاثية الأبعاد ذات نصف قطر ثابت أو بعبارة أخرى هو عبارة عن حدود كرة رباعية الأبعاد. كما أنَّ الوقت في نموذج أينشتاين ليس له بداية وهو لا نهائي في كلا الاتجاهين. وبالتالي فحسب فلسفة أينشتاين فالكون كان موجوداً وسيظل موجودا دائما فللمزيد من التفاصيل أنظر الى المرجع [67].

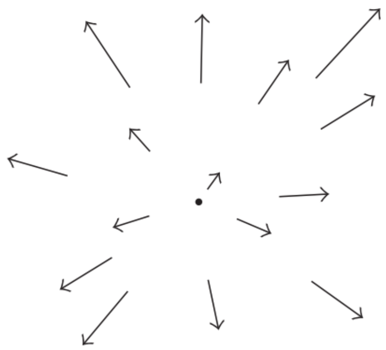
تمدد الكون وقانون هابل

في عام 1929 صرح إدوارد هابل (Edwin Hubble) عن مراقباته التلسكوبية للمجرات خارج مجرتنا درب التبانة حيث أوضح فيها أن هذه المجرات تبتعد عن الراصد بسرعة تتناسب طرديا مع

المسافة التي تفصل بينهما وبالتالي كلما كانت أبعد، تحركت بشكل أسرع [68]، وهذا ما يبن أنَّ الكون يتوسع بالضبط كما تنبأت به معادلات أينشتاين قبل تصحيحها من طرفه بإضافته بما يسمى بالثابت الكوني وبالتالي إلغاء فرضية الكون المستقر حيث قال أينشتاين بعد اكتشاف هابل أنَّ اضافته للثابت الكوني كان أكبر خطأ في حياته (the biggest blunder in my life) توصل هابل إلى هذه النتيجة بعد أن لاحظ الضوء المنبعث من أية مجرة ينزاح نحو الطيف الأحمر بمعنى أن الضوء سيستطيل عندما ينتقل من مجرة إلى الراصد بفعل تمدد الكون، وبالتالي فإنه يصل إلى الراصد بطول موجي أطول من ذلك الذي انبعث به وهذا ما يعرف باسم مفعول دوبلر. نعرف الانزياح نحو الأحمر بـ:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} - 1 \qquad (2.1)$$

حيث λ_{obs}، λ_{em} الطولين الموجبين للضوء عند نقطة الانبعاث (مجرة) والراصد على التوالي.



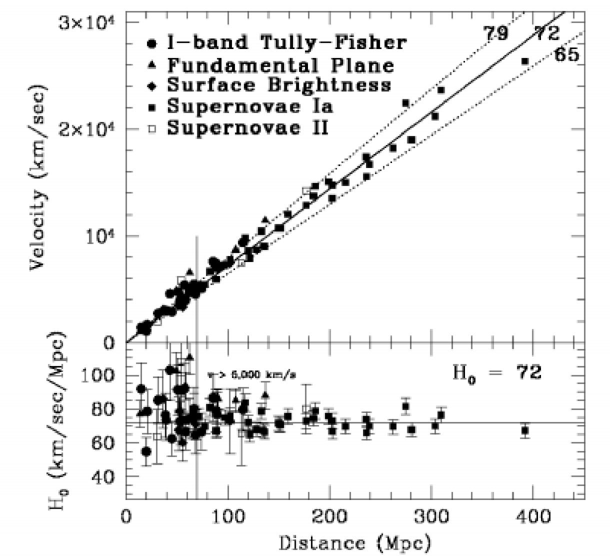
الشكل 1.2: وفقا لقانون هابل فانه كلما كانت المجرة أبعد تراجعت بشكل أسرع.

تتلخص طبيعة تمدد الكون في معادلة تُعرف باسم قانون هابل .وينص هذا القانون على أن السرعة الظاهرية v لأي مجرة آخذة في الابتعاد عن الراصد تتناسب طرديًا مع المسافة r التي تفصل بينهما . حيث يعرف ثابت التناسب باسم ثابت هابل ويُرمز إليه بالرمز H أو H_0. يُكتب قانون هابل على النحو التالي:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r} \qquad (2.2)$$

الترميز 0 يشير إلى القيمة الحالية للمقدار المعني. يمكن نمذجت علاقة هابل في المنحنى البياني الموضح في الشكل 2.2 [69] رغم أننا نسمي ثابت هابل بالثابت إلا أنَّ قيمته تتغير من زمن إلى آخر.

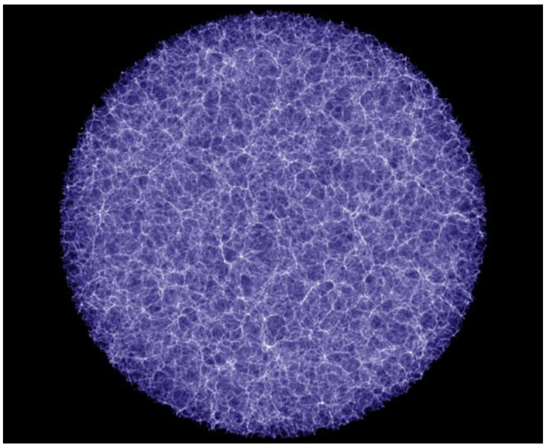
حيث قام فريدمان وفريقه بتقديره ب: $H_0 = 72 \pm 8\, Kms^{-1}Mpc^{-1}$ [69] وRiess وفريقه قاموا بتقديره ب: $H_0 = 74.2 \pm 3.6\, Kms^{-1}Mpc^{-1}$ [70]، بينما الارصاد الحديثة من قبل Beutler وفريقه قدرته ب: $H_0 = 67 \pm 3.2 Kms^{-1}Mpc^{-1}$ [71].



الشكل 2.2: المخطط البياني لهابل من تلسكوب هابل [69].

المبادئ الكونية

تنص على أنَّ الكون يصبح مصقولا (smoothed) على المقاييس الكبيرة أي متجانسا (homogeneous) ومتماثل الخواص مع الإتجاه (isotropic). فالتجانس معناه أن الشروط الفيزيائية تكون متماثلة عند كل نقطة في الكون، ومتماثل الخواص مع الإتجاه، معناه أن الشروط الفيزيائية تكون نفسها في جميع الإتجاهات. أي لا تتميز منطقة فيه عن الأخرى وبالتالي عدم وجود مركز للكون. إن المبادئ الكونية ليست محفوظة على المقاييس الصغيرة أقل من 10^4pc, مثلا في التشكيلة داخل المجرة الواحدة أو العنقود الواحد ......إلخ. بينما يبدو الكون مصقولا على مقاييس أكبر من 100Mpc. فالدليل على المبادىء الكونية يمكن أن نستمده من قانون هابل بالإضافة إلى توحد درجة حرارة أشعة الخلفية الكونية.



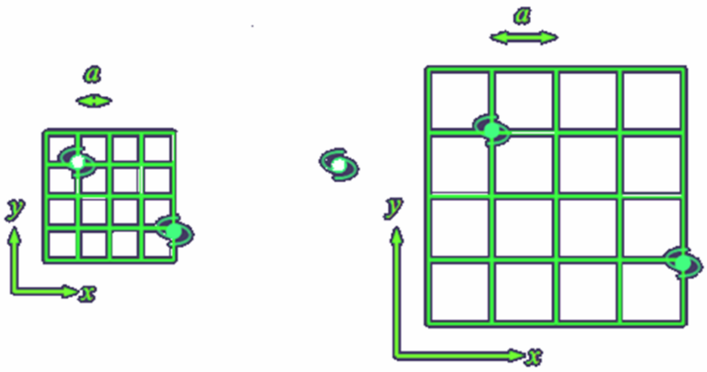
الشكل 3.2: تحاكي توزيع المادة في الكون على المقاييس الكبيرة باستعمال كمبيوتر خارق في جامعة دارهم (Durham)، إنجلترا.

معامل القياس الكوني (Scale Factor) والاحداثيات المنسحبة (Comoving coordinates)

نظرا لكون الكون متجانسا فهذا يفرض علينا استعمال نظام إحداثيات مختلفة تدعى بالإحداثيات المنسحبة، حيث أن هذه الإحداثيات تنسحب مع التوسع الكوني. وبما أن هذا الأخير يكون موحد فإنَّ العلاقة بين المسافة الحقيقية $\vec{r}$ والمسافة المنسحبة $\vec{x}$ تكتب على الشكل التالي:

$$\vec{r} = \mathrm{a}(\mathrm{t})\vec{x} \qquad (2.3)$$

حيث: a(t) يدعى بمعامل القياس الكوني يتعلق بالزمن فقط ويقيس معدل التوسع الكوني.



الشكل 4.2: الإحداثيات المنسحبة تتحرك مع توسع الكون، إصطلاحا إذا تحرك ملاحظا مع التوسع الكوني فإنَّه سيظل ثابتا بالنسبة للإحداثيات المنسحبة بمعنى أنَّ موضعه على شبكة الإحداثيات المنسحبة لا يتغير.

نموذج دي-ستر

في عام 1917 أعلن الفلكي الهولندي ويليم دي-ستر (Willem de-Sitter) أنه يمكن اقتراح نموذجا كونيا مختلف عن نموذج آينشتاين يكون فيه الكون في توسع أسي حيث تهمل المادة العادية وتهيمن الطاقة المظلمة. في هذه الحالة يعطى معامل القياس الكوني كالآتي: $a(t) = e^{Ht}$ ومعامل التباطؤ يكون: $q = -1$.

مترية FLW

يتم تشفير نظرية النسبية العامة في معادلات آينشتاين التالية:

$$G_{\mu\vartheta} = R_{\mu\vartheta} - \frac{1}{2} R g_{\mu\vartheta} + \Lambda g_{\mu\vartheta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\vartheta} \qquad (2.4)$$

حيث: $G_{\mu\nu}$ يمثل تنسور آينشتاين، $R_{\mu\nu}$ يمثل تنسور Ricci، R يمثل سلمي Ricci، $g_{\mu\nu}$ مترية الزمنكان، $T_{\mu\nu}$ تنسور الطاقة، G يمثل ثابت نيوتن للجاذبية و c سرعة الضوء. تعتبر المترية $g_{\mu\nu}$ هي المتغير الديناميكي في النسبية العامة بحيث تحدد حركة المادة، وبالتالي فلتشكيل أبسط نموذج كوني يجب علينا أولا افتراض أن الفضاء الثلاثي الأبعاد متجانسا ومتماثل الخواص مع الاتجاه وذلك ممكننا حسب معادلات آينشتاين لأنَّ الخواص الهندسية للفضاء تحدد من خلال توزيع المادة فيه. فللوصول إلى مترية زمنكانية يكون فيها نظام الإحداثيات (t, x^i) متجانس ومتماثل الخواص مع الإتجاه، يجب علينا اختيار إحداثية الزمن بحيث تكون كل شريحة زمنكانية عند t ثابت متجانسة ومتساوية الخواص مع الاتجاه أي تكون الخواص الفيزيائية عند كل شريحة هي نفسها عند كل موضع وفي كل الاتجاهات. فتساوي الخواص مع الإتجاه يوافق: $g_{0i} = 0$, والتجانس يوافق $g_{00} = -1$. بالإضافة إلى أنَّه يجب أن تكون المسافة بين نقطتين متقاربتين متناسبة مع معامل المقياس الكوني $a(t)$. فبجمع كل هذه الشروط يمكننا كتابة الانتقال العنصري الموافق كالآتي:

$$ds^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + a^2(t) dl^2(x, y, z) \qquad (2.5)$$

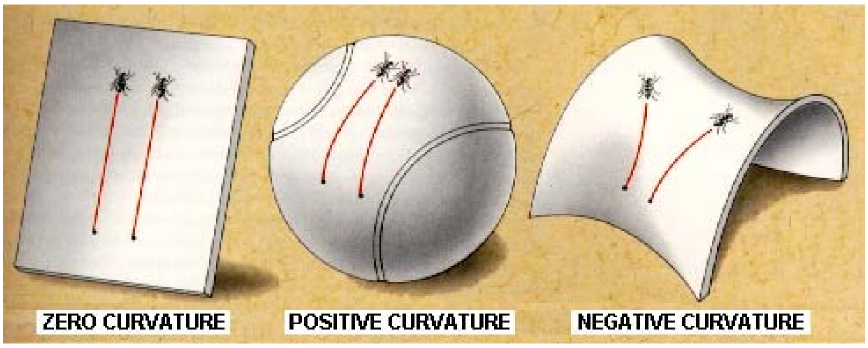
يمكننا تحديد عبارة $dl^2(x, y, z)$ بدلالة الاحداثيات الكروية كالآتي (لمزيد من التفاصيل أنظر إلى المرجع [73,72]):

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)] \quad (2.6)$$

بحيث $k = +1,0,-1$ يدعى بمعامل الانحناء وهو يوافق كون مفتوح، مسطح ومغلق على التوالي.
وبالتالي يمكن كتابة العبارة النهائية للانتقال العنصري كالتالي:

$$ds^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2)\right] \quad (2.7)$$

وهذه ما يعرف بمترية FLW نسبة إلى كل من Friedmann–Lemaître–Walker والتي تمثل حل لمعادلات أينشتاين، تقوم بوصف كون متجانس ومتساوي الخواص مع الاتجاه سواءا كان في تمدد أو تقلص حيث تم اقتراح هذا النموذج بصفة منفصلة.



الشكل 5.2: ثلاثة نماذج مختلفة لانحناء الفضاء قد يكون له انحناء معدوم (كون مسطح)، موجب (كون مغلق) أو سلبي (كون مفتوح).

ديناميك كون FRW

سنتحدث عن كيفية استخراج المعادلات الكونية بطريقة موجزة فاللمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى المراجع التالية: [73,72]

معادلة فريدمان (The Friedman equation)

لقد تم صياغتها لأول مرة من قبل الفيزيائي الروسي ألكسندر فريدمان (Alexander Friedmann) عام 1922، بحيث تحدد لنا هذه المعادلة كيفية توسع أو تقلص الكون انطلاقا من المادة المحتواة فيه

(تصف كيفية تطور معامل القياس الكوني مع الزمن) يمكن استخراجها انطلاق من النسبية العامة أو من ميكانيك نيوتن. تعطى هذه المعادلة كالآتي:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \qquad (2.8)$$

معادلة الانحفاظ (The conservation equation)

المعادلة الثانية التي نحتاجها من أجل تحديد ديناميك الكون تعرف باسم معادلة الانحفاظ، حيث تحدد لنا كيفية تغير كثافة المادة في الكون مع التوسع الكوني. تعتبر كنتيجة مباشرة للقانون الأول للديناميك الحرارية. تعطى معادلة الانحفاظ كالآتي:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \qquad (2.9)$$

حيث ρ هي كثافة المادة الكونية، p هو ضغط المادة الكونية و c سرعة الضوء.

معادلة التسارع (The acceleration equation)

يمكننا تشكيل معادلة ثالثة انطلاقا من معادلتي فريدمان والانحفاظ والتي تقوم بوصف تسارع معامل القياس الكوني. نقوم باشتقاق معادلة فريدمان بالنسبة للزمن فنجد:

$$\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} = \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho} + kc^2\frac{\dot{a}}{a^3} \qquad (2.10)$$

نقوم بتعويض معادلة الانحفاظ في المعادلة السابقة فنجد:

$$\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} = -8\pi G\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + kc^2\frac{\dot{a}}{a^3} \qquad (2.11)$$

نقوم باستعمال معادلة فريدمان مرة أخري فنتحصل على:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \qquad (2.12)$$

تعرف هذه الأخيرة بمعادلة التسارع والتي تتعلق بالاشتقاق الثاني لمعامل القياس الكوني (يمكننا الجزم بأنها تكافئ : $F = m\gamma$).

معادلة الحالة وحل المعادلات الكونية

تخبرنا معادلات فريدمان كيف يتم تحديد توسع الكون من خلال كثافة المادة التي يحتويها ومعادلة الانحفاظ تخبرنا كيف تتغير كثافة المادة مع توسع الكون. فلحل هذه المعادلات وتحديد $a(t)$ يجب تعيين الكثافة ρ، الانحناء k، وايجاد علاقة تربط بين ρ وP بحيث معادلة الحالة توفر هذه العلاقة بين الضغط والكثافة. فبفرض أن الكون متجانس يمكننا كتابة معادلة الحالة كالآتي:

$$P = \omega\rho \tag{2.13}$$

حيث ω يعرف بمعامل الحالة. فبتعويض معادلة الحالة في معادلة الانحفاظ نجد:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega) \tag{2.14}$$

وبحل المعادلة السابقة بالنسبة الى ρ نتحصل على:

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \tag{2.15}$$

يمكننا استخدام هذه العلاقة التي تربط بين معامل القياس الكوني والكثافة للتقصي على تطور الكون عند احتوائه على أنواع معينة من المادة فمثلا:

- **الاشعاعات:** يمكن اعتبار أي جسيم اشعاعا لما تكون كتلة راحته أصغر من طاقته الحركية، مثالا على ذلك غاز نسبي يتكون من فوتونات أو نيوترينوات خفيفة جدا. باستعمال النظرية الحركية بالنسبة للإشعاعات يمكن تبيين أن: $\omega = \frac{1}{3}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\rho \propto a^{-4} \tag{2.16}$$

- **المادة:** بعكس الاشعاعات فان جميع الجسيمات التي تكون فيها كتلة الراحة خاصتها أكبر بكثير من طاقتها الحركية تعتبر مادة، حيث يمكن تصنيفها الى مادة باريونية اعتيادية (ordinary baryonic matter) أو مادة مظلمة (dark matter) والتي لا يمكن الكشف عنها إلا من خلال تأثير الجاذبية فقط (سنتحدث عنها بشكل مطول لاحقا) بما أن المادة عديمة الضغط $P \equiv 0$ فان $\omega = 0$ وبالتالي:

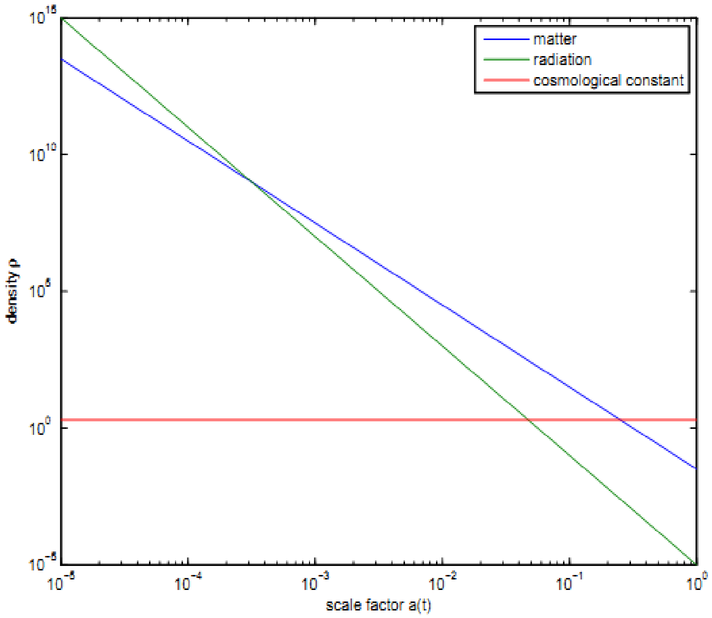
$$\rho \propto a^{-3} \tag{2.17}$$

كلتا الحالتان السابقتان توافقان توسع متباطئ وهذا عكس ما أثبتته الأرصاد الفلكية فكوننا يتوسع بتسارع أي $\ddot{a}(t) > 0$ وبالتالي فمعامل الحالة لكي يكون لدينا تسارع يجب أن يكون:

$$\omega < -\frac{1}{3} \tag{2.18}$$

فمن أجل تفسير التسارع الحالي للكون، فنحن بحاجة الى افتراض وجود طاقة غريبة مهيمنة على الكون، يطلق عليها اسم "الطاقة المظلمة " (لها قوة طاردة، ضغط سلبي) حيث معادلة حالتها تحقق المعادلة (2.18). يعتبر الثابت الكوني Λ أبسط نموذج للطاقة المظلمة حيث: $\omega = -1$.

التفسير البياني



الشكل 6.2: منحنى بياني يوضح تطور الكثافة بدلالة الزمن. الاشعة تهيمن على الكون القديم وبعدها تهيمن المادة وفي الأخير الثابت الكوني يسيطر على تطور الكون الحالي.

معامل الكثافة Ω

هو مقدار عديم البعد يستعمل للتعبير عن كمية المادة الموجودة في الكون، انطلاقا من المعادلة (2.8) يمكن ملاحظة أنَّه من أجل قيمة معطاة للثابت الكوني H توجد كثافة معينة بحيث $k = 0$ تعرف بالكثافة الحرجة $\rho_c(t)$، تعرف على النحو التالي:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{2.19}$$

نظرا لكون الثابت الكوني H يتغير مع الزمن فان الكثافة الحرجة دالة تتعلق بالزمن. يمكن تعريف معامل الكثافة لأي عنصر في الكون كالآتي:

$$\Omega_x(\mathrm{t}) = \frac{\rho_x}{\rho_c} \tag{2.20}$$

هنا x يمكن أن تكون باريون، مادة مظلمة، اشعاع ......الخ. يعطى معامل الكثافة العام كالآتي:

$$\Omega = \sum\nolimits_{\mathrm{x}} \Omega_{\mathrm{x}} \tag{2.21}$$

إذن يمكن كتابة معادلة فريدمان كالآتي:

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2H^2} \tag{2.22}$$

انطلاقا من المعادلة السابقة يمكننا استنتاج أن:

- $\Omega = 1$ لما $k = 0$ هذه حالة خاصة لأنَّه عندما $\Omega = 1$ في البداية فإنَّها سوف تظل دائما ثابتة عند هذه القيمة.
- $\Omega \neq 1$, من أجل كون مفتوح ($kc^2 = -1$) يكون لدينا $\Omega < 1$ و من أجل كون مغلق ($kc^2 = -1$) يكون $\Omega > 1$.

$\rho > \rho_c$	$\Omega > 1$	kc^2= +1	مغلق	ينهار
$\rho = \rho_c$	$\Omega = 1$	kc^2= 0	منبسط	يتمدد الى الأبد
$\rho < \rho_c$	$\Omega < 1$	kc^2= -1	مفتوح	يتمدد الى الأبد

جدول 1.2: العلاقة بين الكثافة والانحناء.

نموذج الانفجار العظيم

إنَّ تتبع الكون المتجانس وأحادي الخواص مع الاتجاه يعطينا فكرة عن بداية تطوره، فعندما نرجع بالزمن إلى الوراء فإننا نلاحظ أنَّ كوننا يصبح أكثر حرارة وأقل حجما. فانطلاقا من البيان الشكل 5.2 يمكننا ملاحظة أنَّه برجوع تدريجيا نحو الوراء نلاحظ أنَّ كثافة الإشعاع تنمو بشكل أسرع من كثافة المادة حتى تصبح هي المهيمنة في أوقات مبكرة كما نلاحظ ان معامل القياس الكوني ينعدم في زمن معين من الماضي. بالإضافة إلى ذلك فإنَّ حرارة الاشعاع تتناسب عكسيا مع معامل القياس الكوني أي:

$$\mathrm{T} \propto \frac{1}{a} \rightarrow aT = constan \qquad (2.23)$$

من خلال العلاقة السابقة نلاحظ أنه لما $T \leftarrow \infty$ فان $a \leftarrow 0$ ومنه نستنتج أنَّ كوننا قد بدأ كمنطقة من الزمكان حارة شديدة الكثافة بدأ يتمدد انطلاقا منها، أطلق العالم الفلكي Fred Hoyle على هذا السيناريو في تصريح إذاعي سنة 1950 مصطلح الـ"بيغ بانغ" أو الانفجار العظيم للمرة الأولى ساخرًا من الفكرة. نجح نموذج الانفجار العظيم في التنبؤ بكثير من الظواهر التي لوحظت في الكون الحالي: كتمدد الكون، وفرة العناصر الكيميائية الخفيفة (على سبيل المثال، الهيدروجين ~ 75٪، الهيليوم ~

25٪ ، الليثيوم (أثر)، البريليوم (أثر)) وأشعة الخلقية الكونية. ومع ذلك، فهذا النموذج لديه مشاكل. (سنستعرض هنا هذه المشاكل بشكل موجز لمزيد من التفاصيل انظر [73])

- ✓ **مشكلة التسطح:** النقطة الرئيسة هنا هي إذا كانت Ω_0 حاليا قريبة من الوحدة فهذا يعني انها يجب أن تكون قريبة جدا من الوحدة في الكون المبكر. إذن فمشكلة التسطح تكمن في الإجابة على السؤال التالي: لماذا لاتزال الكثافة الكونية قريبة من الكثافة الحرجة منذ عشرة مليارات السنين بعد الانفجار العظيم؟
- ✓ **مشكلة الأفق:** هي مشكلة فهم السبب وراء تساوي درجة حرارة إشعاع الخلفية الكونية في المناطق منفصلة في حدود $10^{-3}\%$.
- ✓ **مشكلة الهياكل ذات المعايير الكبيرة:** إنَّ الاضطرابات التي تنهار بفعل الجاذبية من أجل تكوين المجرات يجب أن تكون لديها منشأ أتت منه.
- ✓ **مشكل أحادية القطبية:** تتنبأ نظرية الانفجار الكبير بوجود عدد كبير جدا من الجسيمات الثقيلة والمستقرة ذات مغناطيسية أحادية القطبية "magnetic monopoles" والتي من المفترض قد تكون قد أُنتجت في الكون المبكر. في المقابل فانه لم يتم ملاحظة مثل هذه الجسيمات قط، حتى إذا كانت موجودة، فهي قليلة جدا بالمقارنة بما تنبأت به نظرية الإنفجار الكبير.

النجاحات	المشاكل
تفسير التمدد الكوني	مشكلة التسطح
التنبؤ بأشعة الخلقية الكونية	مشكلة الأفق
التخليق النووي الابتدائي	مشكلة الهياكل ذات المعايير الكبيرة
	مشكل أحادية القطبية

جدول 2.2: نجاحات ومشاكل نظرية الانفجار العظيم

التضخم الكوني (Cosmological Inflation):

تم اقتراح نظرية التضخم لأول مرة من طرف ألان غوث (Alan Guth) سنة 1980 والتي تم عن طريقها حل جميع المشاكل الناتجة عن نظرية الإنفجار العظيم. فبإضافة التضخم إلى نظرية الإنفجار

العظيم يمكننا وصف التمدد الكوني بطريقة جيدة. يفترض التضخم أنَّ الكون يخضع إلى تمدد أسي في الجزء الأول من الثانية عند طاقة قريبة من مقياس بلانك. بوصف أدق فإنَّ التضخم يوافق تسارع معامل المقياس الكوني أي $\ddot{a} > 0$. باستعمال معادلة التسارع (2.12) وشرط التضخم السابق فإنَّه يجب أن يحقق كل من الضغط والكثافة الطاقوية الشرط التالي:

$$\mathrm{p} < -\frac{\rho c^2}{3} \tag{2.24}$$

بما أنَّ الكثافة دوما تكون موجبة فانه من خلال المتراجحة السابقة يمكن استنتاج أنَّ الضغط يجب أن يكون سالبا. إنَّ نماذج التضخم الكوني تبنى على أساس أنَّ الكون في بداية التضخم يحتوي فقط على حقل سلمي يدعى انفلاتون (inflaton) حيث أنَّ هذا الأخير هو واحد من أحد افراد عائلة الجسيمات ذوات السبين المعدوم والتي تتميز بكون معادلة حالتها تملك ضغطا سالبا. فوجود مثل هذه الجسيمات لم يتم اختراعه من قبل علماء الكون لتفسير التضخم بل في الحقيقة قد تم التنبؤ بها من طرف نظريات الجسيمات الدقيقة لعدة سنوات كجسيمات مسؤولة عن تحطيم تناظر القوى الأساسية. فمن أجل دراسة خصائص حقبة التضخم نأخذ بعين الاعتبار الثابت الكوني بحيث تعرف معادلة الحالة الخاصة به كالآتي:

$$p = -\rho \tag{2.25}$$

دعونا نفترض أنَّ هناك جسيمات تسمى في انفلاتون (inflaton) التي لديها معادلة حالة تعرف بالمعادلة السابقة (2.25). انطلاقا من معادلة الانحفاظ لهذه المادة يتبين أنَّ كثافتها تبقى ثابتة مع مرور الزمن $\rho_{\text{inflaton}} = \text{constant}$ والتي بعدها تهيمن على جميع أنواع المواد المتواجدة في الكون، بحيث كثافة المواد النسبية والغير نسبية تتناقص كالآتي $\rho_{rel} \propto a^{-4}$ و $\rho_{nonrel} \propto a^{-3}$ على التوالي. كذلك الحد الخاص بالانحناء يهمل، في هذه الحالة تصبح معادلة فريدمان كالآتي:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{rel} + \rho_{nonrel} + V) - \frac{kc^2}{a^2} \rightarrow \frac{8\pi GV}{3} = constante \tag{2.26}$$

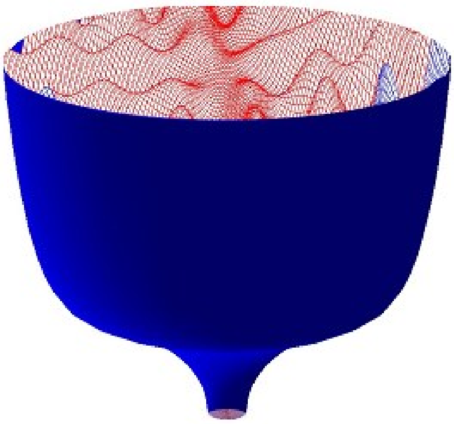
وبالتالي:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi GV}{3} \rightarrow a \propto \exp(\sqrt{\frac{8\pi GV}{3}}t) \qquad (2.27)$$

كما نلاحظ فالتوسع الكوني يتطور بطريقة أسية. في أبسط نماذج التضخم، يصبح الكون تهيمن عليه كثافة (ثابتة) جسيمات افلاتون لفترة قصيرة جدا. نظريا تبدأ فترة التضخم في وقت مبكر جدا عند: $t_i \approx 10^{-36}\mathrm{s}$ وتنتهي عند $t_f \approx 10^{-34}s$. في هذه الفترة فإن معامل القياس الكوني يتغير كالآتي:

$$a(t) = a_f e^{\beta(t-t_f)}, \qquad \beta \equiv \sqrt{\frac{8\pi GV}{3}} \qquad (2.28)$$

بحيث: $a_f \equiv \mathrm{a}(t_f)$ تعبر عن قيمة معامل القياس الكوني عند نهاية التضخم. ينتهي التضخم باضمحلال جسيمات أفلاتون، بالتالي يتم تحرير الطاقة الموجودة داخلها إلى أن تتحول إلى جسيمات نسبية عادية.



الشكل 7.2: تقوم الاضطرابات الصغيرة بتضخم إلى أن تصل إلى المقاييس المايكروسكوبية والتي تعتبر بذرة لنمو المنشاءات الكونية.

المراحل الزمنية لنشأة الكون حسب نموذج الانفجار العظيم

سنقوم باستعراض أهم المراحل التي مر بها كوننا باختصار في الجدول التالي [74]:

الحقبة	T	ρ^4	T
بداية التضخم الكوني	$0\sim$	$10^{18}Gev$	ثا10^{-42}
نهاية التضخم الكوني، بداية الانفجار العظيم البارد.	$0\sim$	$10^{13\pm3}Gev$	ثا$10^{-32\pm6}$
بداية الانفجار العظيم الساخن	$10^{6\pm3}Gev$	$10^{6\pm3}Gev$	ثا$10^{-18\pm6}$
المرحلة الانتقالية للقوة الكهربائية الضعيفة	$100Gev$	$100Gev$	10^{-10}
المرحلة الانتقالية للكواركات-هيدرونات	$100Mev$	$100Mev$	ثا10^{-4}
$\gamma, \nu, e, \bar{e}, n, p$كلهم في توازن حراري	$1Mev$	$10Mev$	ثا10^{-2}
انفصال γ , اندثار e, ē	$1Mev$	$1Mev$	1ثا
التصنيع النووي	$0.1Mev$	$0.1Mev$	100ثا
التوازن بين المادة والاشعاع	$1ev$	$1ev$	سنة10^4
تشكل الذرة وانفصال الفوتونات	$0.1ev$	$0.1ev$	سنة10^5
بداية تشكل البنيان الأولي	حاليا	$10^{-3}ev$	سنة10^9
حاليا	2.785K	$3 \times 10^{-3}h^{\frac{1}{2}}\Omega_0{}^{\frac{1}{4}}ev$	الآن

جدول 3.2: ملخص حول أهم الحقبات التي مر بها كوننا حسب النموذج القياسي.

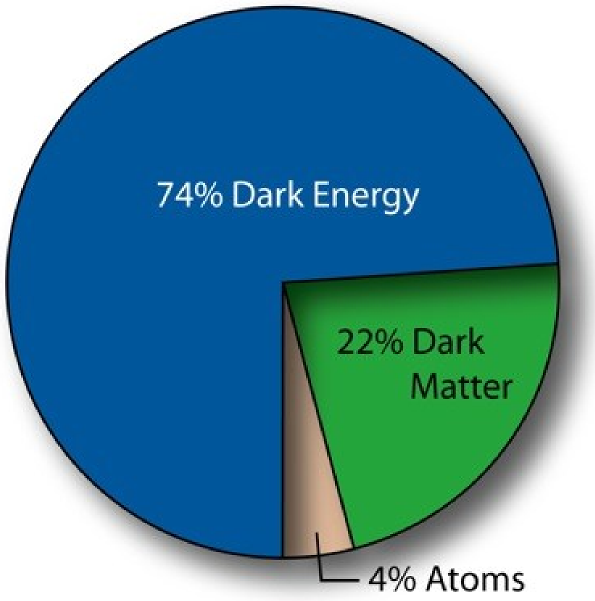
المادة المظلمة

من المتعارف عليه أن كوننا حتى الآن يحتوي على نسبة 4% فقط من المادة العادية المرئية والتي تتكون أساسا من الذرات أما النسب المتبقية فهي غير مرئية وطبيعتها مجهولة حيت تم افتراض أنَّ حوالي 22% من الكون يحتوي على المادة المظلمة والنسبة المتبقية تحتوي على ما يسمى بالطاقة

المظلمة. ولكن السؤال الذي يمكن أن يطرح نفسه هو: ما الفرق بين المادة المظلمة والطاقة المظلمة؟ بالنسبة للطاقة المظلمة فقد تطرقنا اليها في المحور الأول. أما المادة المظلمة سميت بذلك لعدم امتصاصها أو انبعاثها للأشعة الكهرومغناطيسية فهي مادة افترضت لتفسير جزء كبير من مجموع الكتلة الكونية. لا يمكن رؤيها بصفة مباشرة فهي لا تتفاعل مع الاشعاعات الكهرومغناطيسية بل يمكن أن تتفاعل فقط عن طريق الجاذبية وبالتالي فيمكن الاستدلال على وجودها وعلى خصائصها من آثار الجاذبية التي تمارسها على المادة المرئية، حتى الآن فإنَّه لم يتم الكشف عن هذه المادة بصفة مباشرة فواحدة من بين الطرق الغير مباشرة للكشف عنها هي العدسات الجاذبية (gravitational lensing) انظر[75]. تلعب المادة المظلمة دوراً مركزيا في تشكل وتطور البنى الكونية الكبيرة كالمجرات وعناقيد المجرية. ولها تفسيرات على عدم توحد الخواص الملاحظة في أشعة الخلفية الكونية. لقد تم التيقن عن وجود المادة المظلمة لأول مرة وبصفة رسمية من قبل الفلكي السويسري Fritz Zwicky عام 1933 [77,76] الذي قام بنشر نتائجه حول دراسته لعنقود مجرات 'كوما' حيث قدم أدلة على أن معظم المادة في العناقيد غير مرئي. حيث قال أنَّ الجاذبية يجب أن تبقي المجرات مجتمعة مع بعضها البعض في العنقود وإلا فإنها سوف تبتعد عن بعضها البعض بسبب فعل حركتها الخاصة. قام زويكي بتطبيق نظرية فيريال حيث قام بحساب سرعات المادة المرئية داخل العنقود عن طريق مفعول دوبلر وبيَّن أنَّ السرعات النسبية للمجرات داخل عنقود كوما كانت كبيرة جداً لإبقاء المجرات مجتمعة بفعل الجاذبية داخل العنقود. وبالتالي فقد استنتج زويكي على أنَّه يجب أن تكون هناك مادة غير مرئية تتفاعل عن طريق الجاذبية تجعل المجرات مجتمعة فيما بينها حيث أطلق عليها اسم المادة المظلمة.

الشكل 8.2: عنقود كاما، التي قدمت أول دليل على وجود المادة المظلمة (مصدر: الناسا).

إنَّ البحث عن مترشح لتمثيل جزيئات المادة المظلمة ما زال جاريا [78–81] حيث تنبأ علماء فيزياء الجسيمات الدقيقة بأن تكون جسيمات المادة المظلمة ثقيلة جدا لكي تكون متسقة مع البنى الكونية [82]. تتفاعل عبر الجاذبية وممكن عبر القوة الضعيفة حيث تم ترشيح عدة جزيئات نذكر منها: الأجسام الفلكية (النجوم الآفلة الثقوب السوداء, MACHOs, RAMBOs .....), النوترونات, Axions , الجسيمات الثقيلة المتفاعلة عبر القوة الضعيفة (WIMPs), سيناريو الجاذبية البديلة (Alternative Gravity Scenarios), قطاع التفاعلات المظلمة (Dark Interactions Sector). كما يمكن تصنيف المادة المظلمة إلى عائلات مختلفة: واحدة منها خاصة بالمادة المظلمة الغير نسبية وتدعى بالمادة الظلماء الباردة ((cold dark matter (CDM) والأخرى خاصة بالمادة المظلمة النسبية وتدعى بالمادة المظلمة الساخنة ((hot dark matter (HDM) ويوجد نوع آخر يدعى بالمادة المظلمة الدافئة ((warm dark matter (WDM). لمزيد من التفاصيل أرجع الى المراجع التالية: [85,83]



الشكل9.2: رسم بياني يوضح محتويات الكون (Image: NASA/WMAP Science Team).

المحور الثالث

الكوسمولوجيا الكمية الحلقية

المحور الثالث

الكوسمولوجيا الكمية الحلقية

لماذا نحن بحاجة الى الجاذبية المكممة

دعونا ننظر إلى معادلة آينشتاين:

$$R_{\mu\vartheta} - \frac{1}{2} R g_{\mu\vartheta} + \Lambda g_{\mu\vartheta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\vartheta} \qquad (3.1)$$

هناك سؤال نظري يطرح نفسه يقول بما أنَّ الطرف الثاني الذي يحتوي على تنسور المادة قد تم وصفه بطريقة جيدة عن طريق تكميمه فمن الأجدر ايضا تكميم الطرف الأول (الجاذبية) هذا من جهة و من جهة أخرى فإنَّ النظريات الحالية عاجزة على وصف السلوك الكوانتي للجاذبية و بالتالي فنحن بحاجة إلى نظرية تكون قادرة على وصف الظواهر التي تلعب فيها كل من الجاذبية والنظرية الكمية دورا كبيرا مثالا على ذلك: مركز الثقوب السوداء،الكون المبكر(الانفجار العظيم)، النقاط الشادة في الأوقات المتأخرة للكون.

ما هي الجاذبية الكمية الحلقية

من الجانب الرياضي يمكن تعريفها كالآتي: هي نطاق اعتيادي (canonical framework) تكمم فيه النسبية العامة بحيث لا نعتمد فيه على نظرية الإضطراب (non-perturbative theory) و تكون الخلفية مستقلة (background independent). فالمقصود من النطاق الاعتيادي هو فصل

الزمان و المكان ثم تعيين المتغيرات الديناميكية التي تتطور بمرور الزمن ففي حالة النسبية العامة المتغيرات الديناميكية الخاصة بها هي عبارة عن دوال الموجة التي تعبر عن الحالات الكوانتية للهندسة. نظرية غير اِضطرابية تعني أن بناء النظرية لا يستند الى دراسة التغيرات الصغيرة للمترية حول المترية الزمنكانية المسطحة فبدل من ذلك فان الجاذبية الكمية الحلقية تقوم بتعريف الإثارات الأساسية (basic excitations) لحقل الجاذبية بطريقة عشوائية بعيدا عن المترية المسطحة ووصف الزمنكان الكوانتي مباشرة عند سلم بلانك حيث تكون الهندسة كوانتية.

أما **من الناحية الفلسفية** فقد قدم روفيلي في المرجع [86] وصفا بسيطا وجيدا لها وذلك عن طريق مقارنتها مع نظرية الأوتار. وضح آينشتاين في سنة 1915 أن الجاذبية أيضا يمكن وصفها عن طريق نظرية الحقول لكي تتوافق مع النسبية الخاصة فلقد وفق بشكل كبير في إيجاد شكل ومعادلات حقل الجاذبية ولكن عند قيامه بذلك اصطدم بنتيجة مذهلة، فآينشتاين وجد أن حقل الجاذبية والخلفية الفضائية (background space) التي قام نيوتن قبل 300 سنة بتقديمهما هما شيء واحد وبالتالي فان التسارع المعرف في القانون الثاني لنيوتن هو ليس بالنسبة الى خلفية فضائية مطلقة (ثابتة) بل هو بالنسبة إلى حقل الجاذبية المحيط به بتعبير آخر نستطيع القول إنَّه في النسبية العامة لا توجد حقول تنتشر على زمنكان بل توجد حقول تنتشر على حقول. إنَّ العبارات الرياضية الخاصة بنظرية الحقول الكمية كلها تعتمد على الخلفية الفضائية وبالتالي، فهناك استراتيجيتان يمكن الاعتماد عليهما لبناء نظرية الجاذبية الكمية فالأولى تبنتها نظرية الأوتار حيث تم تجاهل اكتشاف آينشتاين وذلك بإدخال خلفية فضائية وهمية عن طريق تقسيم حقل الجاذبية الى مركبتين الأولى نعتبرها كخلفية فضائية والأخرى تدرس كحقل كمي. أما الإستراتيجية الثانية فقد اعتمدت من طرف النظرية الحلقية الكمية والتي أخذت اكتشاف آينشتاين بعين الاعتبار وبالتالي مواجهة مشكلة أنَّه لا توجد خلفية فضائية في الطبيعة أي إعادة بناء نظرية الحقول الكمية من الصفر في شكل لا تتطلب فيه خلفية فضائية.

صياغة النسبية العامة عن طريق الهاميلتونيا

ميكانيك لاغرانج

يرمز للاغرانج نظام ما بالرمز L تكتب عبارتها على الشكل التالي:

$$L = T + U \tag{3.2}$$

حيث: U ,T هما الطاقتين الحركية والكامنة على التوالي للنظام. يتم التعبير عن دالة لاغرانج بدلالة الإحداثيتين $(q , \dot{q})$ حيث $q \in R^n$ تمثل شعاع الموضع و $\dot{q} \in R^n$ تمثل شعاع السرعة.

معادلات الحركة

بعدم وجود قيود: تتم صياغة معادلات الحركة في ميكانيك لاغرانج وفق معادلة Euler-Langrange التالية:

$$L = T + U \tag{3.3}$$

بوجود قيود: ليكن لدينا القيد التالي $f(q, t)=0$ فان معادلة Euler-Langrange تصبح كالآتي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} = 0 \tag{3.4}$$

حيث: λ_α تدعى بمضاعفات لاغرانج (Lagrange multipliers)

ميكانيك هاملتون

نلاحظ أنَّ معادلات الحركة المتحصل عليها من ميكانيك لاغرانج هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة لإحداثيات الموضع ولكن من الأحسن ان تكون لدينا معادلات من الدرجة الأولى بدل الثانية و هذا ما تم في ميكانيك هاملتون حيث اعيدت صياغة ميكانيك لاغرانج إلى معادلات تفاضلية من الدرجة الاولى عن طريق تحويل Legendre حيث يقوم بالانتقال من الفضاء المماسي (tangent space) المعرف بالإحداثيات $(q , \dot{q})$ نحو الفضاء المرافق له (cotangent space) و المعرف بالإحداثيات (q , p) و الذي يسمى بفضاء الطور(phase sace) حيث p تمثل كمية الحركة (conjugate momentum) المرافقة لـ q و تعرف كما يلي:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{3.5}$$

يمكننا الآن كتابة هاملتونيا نظام ما بدلالة لاغرانج كالآتي:

$$\mathcal{H}(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \tag{3.6}$$

معادلات الحركة

بعدم وجود قيود: معادلة الحركة في ميكانيك هاملتون تصبح عبارة عن زوجين من المعادلات تكتبان كما يلي:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \tag{3.7}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{3.8}$$

عندما تكون الهاملتونيا متعلقة بالزمن فإننا نتحصل على معادلة اضافية:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.9}$$

ملاحظة: من أجل الأنظمة التي تكون فيها الهاملتونيا لا تتعلق بالزمن، فإنَّ الهاملتونيا ماهي إلا الطاقة الكلية للنظام.

بوجود قيود: ليكن لدينا القيد التالي $g(q_i, p_i, t)=0$ فان معادلات الحركة تصبح كالآتي:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_i} \tag{3.10}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \tag{3.11}$$

عارضتا بواصو (Poisson bracket)

لتكن $A(q_i, p_i)$ و $B(q_i, p_i)$ عبارة عن دالتين بدلالة إحداثيات فضاء الطور. تعرف عارضتا بواصو لهاتين الدالتين كما يلي:

$$\{A, B\} = \sum_i (\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{p_i} - \frac{\partial A}{\partial\, p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}) \tag{3.12}$$

بالإعتماد على عارضتا بواصو يمكننا ايجاد المقادير المحفوظة لنظام ما دون النظر إلى التناظرات الموجودة فيه بحيث نقول عن المقدار $A(q_i, p_i)$ أنَّه محفوظ لما:

$$\{A, H\} = 0 \tag{3.13}$$

معادلة الحركة: لتكن الدالة f دالة تتعلق ب q, p والزمن t: $f(q\ ,\ p\ ,\ t)$ فمعادلة الحركة للدالة f بدلالة عارضتا بواصون تكتب كما يلي:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{3.14}$$

صياغة ADM للنسبية العامة

ترجع أول محاولة لصياغة النسبية العامة عن طريق الهاملتونيا إلى كل من: Richard Arnowitt, Stanley Deser و Charles Misner غالبا ما يطلق عليها اسم صياغة ADM [86] و لكن في بعض المراجع يشار إليها بصياغة هاملتونيا أو بتوريق الزمنكان، هنا سنعتمد على المرجع [87]. تتطلب هذه الصياغة تقسيم الزمنكان إلى مكان وزمان $\Sigma \times R$ وذلك بفرض وجود دالة زمنية t وحقل شعاعي (vector field) t^μ على المتشعب الزمنكاني M بحيث المساحات Σ_t ذات t ثابت تكون عبارة مساحات كوشي متماثلة الفضاء (spacelike Cauchy surfaces) تحقق:

$$t^\mu \nabla_\mu t = 1 \tag{3.15}$$

وبالتالي فيمكننا القول أنَّ t^μ يعبر عن تدفق الزمن (flow of time) عبر الزمنكان أي أنَّه يقوم بربط سطحين فضائيين، فعندما ننتقل من السطح الفضائي Σ_1 عند اللحظة t نحو السطح الفضائي Σ_2 عند

اللحظة الزمنية $t + \delta t$ فإنَّ جميع الأشعة التي تتولد على السطح الفضائي Σ_1 ينتهي بها المطاف عند Σ_2.
يمكننا تقسيم t^μ إلى مركبتين أفقية وأخرى عمودية على Σ_t كالآتي:

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu \qquad (3.16)$$

هنا n^μ يمثل الشعاع العمودي على السطح الفضائي بحيث $n^\mu n_\mu = 1$, N يدعى بـ lapse function فهذا الأخير يقيس معدل تدفق الزمن الذاتي (proper time) τ بالنسبة إلى إحداثيات الزمن t عند الانتقال عموديا الى Σ_t على طول n^μ.

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu \qquad (3.17)$$

وبالتالي يمكننا كتابة:

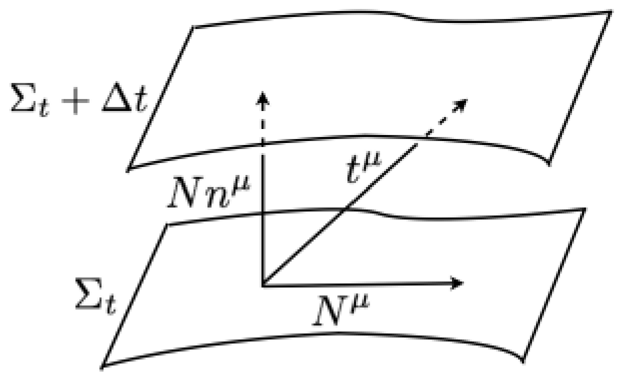
$$\mathrm{N} = -t^\mu n_\mu = (n^\mu \nabla_\mu t)^{-1} \qquad (3.18)$$

و N^μ يمثل الشعاع المماسي للسطح الفضائي يدعى بـ shift vector بحيث يربط الإحداثيات الفضائية بين سطحين متجاورين:

$$x_2^i = x_1^i - \mathrm{N}^i(t, x_i)\mathrm{d}t \qquad (3.19)$$

يمكننا الآن أن ننسب لكل سطح مترية فضائية h_{ij} تقوم بقياس المسافة بين نقطتين تنتميان إلى نفس السطح كالآتي:

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j \qquad (3.20)$$



الشكل 1.3: ADM 3+1 توريق الزمنكان في النسبية العامة.

في النسبية العامة يمكننا قياس طول القوس بين نقطتين ينتميان إلى الزمنكان عن طريق مترية ذات أربعة أبعاد $g_{\mu\vartheta}$ ففي حالة ما تكون المسافة قريبة جدا بين النقطتين x_1،x_2 فإن الانتقال العنصري ds بينهما يعطى بالعلاقة التالية:

$$ds = g_{\mu\vartheta} dx_\mu dx_\vartheta \qquad (3.21)$$

والآن نحاول كتابة الانتقال العنصري ds بدلالة المقادير الجديدة، N^i, N h_{ij} عوض عن $g_{\mu\vartheta}$, نعلم أن:

$$ds^2 = (\text{احداثية المسافة})^2 - (\text{زمن الذاتي})^2 \qquad (3.22)$$

وبالتالي بتعويض العلاقتين (3.17) و (3.19) في العلاقة (3.22) نجد:

$$ds = h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right) - (N\, dt)^2 \qquad (3.23)$$

بمطابقة العلاقة (3.21) بالعلاقة (3.23) نجد:

$$g_{\mu\vartheta} = \begin{pmatrix} N_j N^j - N^2 & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix} \qquad (3.24)$$

كما أنه يمكن ايجاد:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-det g_{\mu\vartheta}} = \sqrt{N^2 det h_{ij}} \ = N\sqrt{h} \qquad (3.25)$$

كتابة معادلات المجال بدلالة المتغيرات الجديدة

تعطى لاغرانج النسبية العامة بالعلاقة:

$$L = \sqrt{-g}R \qquad (3.26)$$

حيث R عبارة عن الانحناء السلمي. فلكي نكون قادرين على ايجاد اشتقاق الزمن $\mathcal{L}_t h_{ij}$ ($\mathcal{L}_t$ يعرف باشتقاق لي Lie-derivative) نقوم بالاستعانة بمقدار الانحناء الخارجي K_{ij} (the extrinsic curvature)، المعرف بالعبارة التالية:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} N^{-1}\left(\mathcal{L}_t h_{ij} - \mathcal{L}_N h_{ij}\right) \tag{3.27}$$

يمكننا الآن كتابة عبارة دالة لاغرانج L بدلالة الانحناء الخارجي كالآتي:

$$L = \sqrt{h} N\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2\right) \tag{3.28}$$

وبتعويض (3.27) في (3.28) نجد:

$$L = \sqrt{h} N \left(R^{(3)} + (\frac{1}{4} N^{-2}\left(\mathcal{L}_t h_{ij} - \mathcal{L}_N h_{ij}\right)\left(\mathcal{L}_t h^{ij} - \mathcal{L}_N h^{ij}\right) - K_i^i K_i^i\right) \tag{3.29}$$

ليكن: $\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_t h_{ij}}$, $\pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}}$ و $\pi_N^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i}$ عبارة عن كميات الحركة المرافقة لكل من h_{ij},

N_i و N .

على الترتيب. نلاحظ أن:

$$\pi_N^i = \pi_N = 0, \qquad \pi^{ij} = \sqrt{h}\left(K^{ij} - K h^{ij}\right) \tag{3.30}$$

ومنه فيمكننا الاستنتاج أن كلN_i و N عبارة عن مضاعفات لاغرانج (Lagrange multipliers) أي أن هذه المتغيرات تمثل قيود للنظام وهي ما يعرف بالقيود الأولية 1-form. بعكس h_{ij} الذي يمكن اعتبارها متغير الحالة، وبالتالي فان دالة هاملتون تكتب على الشكل التالي:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - L \tag{3.31}$$

بتعويض كل من المعادلة (3.27) و (3.28) في المعادلة السابقة نجد:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}(2K_{ij}N + \mathcal{L}_N h_{ij}) - \sqrt{h} N\left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} + K^2\right) \tag{3.32}$$

لدينا:

$$\mathcal{L}_N h_{ij} = D_i N_j + D_j N_i \tag{3.33}$$

ويمكن كتابة عبارة الانحناء الخارجي K_{ij} بدلالة π^{ij} و h^{ij} كالآتي:

$$K_{ij} = h^{1/2}(\frac{1}{2}\pi_{kl} h^{kl} h_{ij} - \pi_{ij}) \tag{3.34}$$

وبالتالي فبتعويض المعادلتين السابقتين (3.33) و (3.34) في عبارة هاملتون (3.32) نجد:

$$\mathcal{H} = \sqrt{h}N\left(-R^{(3)} + h^{-1}\pi_{ij}\pi^{ij} - \tfrac{1}{2}h^{-1}\pi^2\right) - 2N_jD_i\left(\sqrt{h}\,\pi^{ij}\right) + 2D_i\left(\sqrt{h}\,N_j\pi^{ij}\right) \tag{3.35}$$

وبما أنَّ كل من N و N^i عبارة عن مضاعفات لاغرانج أي $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} = 0$ فاننا سوف نتحصل على القيود التالية:

قيد هاملتون (*Hamilton constraint*) أو القيد السلمي (scalar constraint):

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = -R^{(3)} + h^{-1}\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 = 0 \tag{3.36}$$

و**قيد (*diffeomorphism constraint*) أو القيد الشعاعي (vector constraint):**

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N_j} = D_i\left(h^{1/2}\pi^{ij}\right) \tag{3.37}$$

تجدر الإشارة إلى أنَّه من الممكن اهمال الحد الأخير في عبارة هاملتون وبالتالي فإنَّه يمكننا كتابة:

$$\mathcal{H} = \sqrt{h}N\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} - 2\sqrt{h}N_j\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N_j} = 0 \tag{3.38}$$

ومنه يمكننا القول أنَّ دالة هاملتون في النسبية العامة عبارة عن المجموع الخطي للقيود الأولية. نقوم الآن بتكميم صيغة ADM للنسبية العامة وذلك باتباع طريقة ديكارت للتكميم. نقوم أولا بحساب عارضتا بواصو للمتغيرات الديناميكية h_{ij} و π^{ij} فنجد:

$$\left\{h_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_j^k\delta_i^l)\delta^3(x-y) \tag{3.39}$$

والآن نجعل المتغيرات السابقة عبارة عن مؤثرات كالآتي:

$$h_{ij} \to \hat{h}_{ij}$$

$$\pi^{kl} \to -i\hbar\frac{\delta}{\delta h_{ij}}$$

بما أنَّ دائما $H = 0$ فان معادلة شرونتنغر (Schrodinger equation) تكتب كالآتي: $\hat{H}|\psi\rangle = 0$ أي:

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial N}|\psi\rangle = 0, \qquad \frac{\partial \widehat{H}}{\partial N_i}|\psi\rangle = 0 \tag{3.40}$$

تدعى هذه المعادلات بمعادلات Wheeler-DeWitt حتى الآن لم يتم إيجاد حل فيزيائي لها لذلك فقد تم الإستعانة بمتغيرات أخرى تدعى بمتغيرات أشتيكار (Ashtekar's variables) كما سنرى لاحقا.

متغيرات أشتيكار

عوض عن وصف هندسة النسبية العامة عن طريق $g_{\mu\vartheta}$ نقوم بصياغتها بالصياغة ذات التشكيلة الأولية (1-form formalism) والمعرفة بما يسمى بـ Tetrad $e_\mu^I(x)$ وارتباط لورنز (Lorenz connection)$\omega_\mu^{IJ}(x)$ تجدر الإشارة إلى أنَّ ϑ , μ عبارة عن رموز زمنكانية تعود إلى نظام الإحداثيات x_μ الموجودة على. بينما I , J هي رموز Minkowski (داخلية) تعود إلى الإحداثيات الموجودة على الفضاء المماسي لـ. $e_\mu^I(x)$ يمكن تعريفه على أنَّه الانتقال الخطي بين نظام الإحداثيات على ونظام الإحداثيات على الفضاء المماسي له وبالتالي فإنَّه يربط بين المترية $g_{\mu\vartheta}$ والمترية المستوية $\eta_{\mu\vartheta}$ لزمنكان Minkowski. وبتعبير أدق فانه يعرف على أنَّه المعلم المتعامد الموضعي على المتشعب الزمنكاني. بينما $\omega_\mu^{\alpha\beta}$ فهي عبارة عن الانتقال المتوازي للمعلم السابق (Tetrad) عبر. وبالتالي فيمكننا تعريف ارتباط لورنز بدلالة $e_\mu^\alpha(x)$ كالآتي:

$$\omega_{\mu\ J}^{I} = e^{\vartheta I}\nabla_\mu e_{\vartheta J} \tag{3.41}$$

يمكن الآن كتابة $g_{\mu\vartheta}$ بالمتغيرات الجديدة كما يلي:

$$g_{\mu\vartheta} = \eta_{IJ} e_\mu^I(x) e_\vartheta^J(x) \tag{3.42}$$

يمكن تعريف أداء (*action*) النسبية العامة بدلالة المقادير السابقة والتي تدعى بأداء بلاتيني-هوست (*Palatini-Holst action*) كالآتي [*88*]:

$$S[e,\omega] = -\frac{1}{l_P^2}\int_M \frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL}e^I\wedge e^J\wedge F^{KL}[\omega] + \frac{1}{\gamma}e^I\wedge e^J\wedge F_{IJ}[\omega] \qquad (3.43)$$

يعرف $F^{IJ}[\omega] = d\omega^{IJ} + \omega_K^I \wedge \omega^{KJ}$ على أنَّه تنسور الاِنحناء ذو الدرجة التشكيلة الثانية (2-form formalism) للإرتباط ω ، تعطى عبارته التحليلية كالآتي:

$$F_{\mu\vartheta}^{IJ} = \partial_\mu\omega_\vartheta^{IJ} - \partial_\vartheta\omega_\mu^{IJ} + \omega^I{}_{K\mu}\omega_\vartheta^{KJ} - \omega^J{}_{K\mu}\omega_\vartheta^{KI} \qquad (3.44)$$

∧ يعبرعن الجداء العبارات التفاضلية على $\mathcal{M}$، l_P عبارة عن طول بلانك

$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.62 \times 10^{-35}m$ و γ يدعى بمعامل إمرزي (Immirzi parameter) . يمكننا الآن كتابة كثافة tetrad كالآتي:

$$E_a^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\epsilon^{ijk}e_b^je_c^k \qquad (3.45)$$

يجدر التنويه إلى أنَّ كل من: i, j, k عبارة عن رموز فضائية داخلية تأخذ القيم من 1 الى 3 ,كذلك a, b,c هي رموز فضائية ترجع إلى نظام الإحداثيات الموجود على Σ. يمكننا كتابة المترية الفضائية العكسية بدلالة المقدار السابق كالآتي:

$$h\, h^{ab} = E_i^aE_j^b\delta^{ij} \qquad (3.46)$$

نقوم بتعريف المقدار التالي:

$$K_a^i \equiv \frac{1}{\sqrt{\det(E)}}K_{ab}E_j^b\delta^{ij} \qquad (3.47)$$

بحيث: $K_a^i = \omega_a^{0i}$. انَّ كل من E_a^i , K_a^i ينتميان إلى المجموعة su(2) ذوات التشكيلة الثانية على Σ. كذلك يمكن ملاحظة أنَّ المقدارين السابقين عبارة عن متغيرين مترافقين:

$$\begin{gathered}\{K_b^j(x), E_i^a(y)\} = \delta_i^j\delta_b^a\delta^{(3)}(x-y) \\ \{E_j^a(x), E_i^b(y)\} = \{K_a^j(x), K_b^i(y)\} = 0\end{gathered} \qquad (3.48)$$

في الواقع، يمكننا اِستبدال الاِنحناء الخارجي K_a^i بِارتباط ذات التشكيلة الأولى (1-form) يأخذ قيمه من المجموعة su(2) ويكون مرافقا لـ E_i^a يدعى اِرتباط اشتيكار صيغته من الشكل:

$$A_a^i = \Gamma_a^i(E) + \gamma K_a^i \qquad (3.49)$$

حيث Γ_a^i عبارة عن ارتباط سبين والذي هو حل لمعادلة Cartan's structure التالية:

$$\partial_{[a} e_{b]}^i + \epsilon^i{}_{jk} \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k = 0 \qquad (3.50)$$

يمكننا كتابة حل المعادلة السابقة بدلالة مركبات triad كالآتي:

$$\Gamma_a^i(E) = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_k e_j^b (\partial_{[a} e_{b]}^k + \delta^{kl}\delta_{ms} e_l^c e_a^m \partial_b e_c^s) \qquad (3.51)$$

إذن يمكن كتابة:

$$\{A_b^j(x), E_i^a(y)\} = k\gamma \delta_i^j \delta_b^a \delta^{(3)}(x-y) \qquad (3.52)$$

نقوم الآن بإعادة كتابة قيود النسبية بدلالة المتغيرات السابقة كالآتي:

$$G_i = D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j E_k^a \qquad (3.53)$$

$$V_b = E_j^a F_{ab} - (1+\gamma^2) K_a^i G_i \qquad (3.54)$$

$$s = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det(E)}} (\epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1+\gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j) \qquad (3.55)$$

حيث: $F_{ab} = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k$ عبارة عن انحناء الارتباط A_a^i. وبالتالي يمكن كتابة الهاملتونيا بإضافة قيد غوص اليها كالآتي:

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2k}\int dx^3 (NC + N^a C_a + \lambda^i G_i) \qquad (3.56)$$

الجاذبية الحلقية الكوانتية الاِعتيادية (Canonical LQG)

تعتمد الصيغة الاعتيادية للجاذبية الكوانتية الحلقية بشكل أساسي على متغيرات اشتكار A_a^i و E_a^i ومعادلة هاملتونيا (3.56) ولكن في هذه الصيغة سوف لن نستعمل متغيرات اشتكار بحد ذاتهم كزوجين مترافقين ولكن سنستعين بتدفقاتهم (fluxes) وهولونوماتهم (holonomies) وذلك لسببين أولا، في أي نظرية حقل نحتاج إلى تشويه المتغيرات للتخلص من دوال ديراك، والهولونومي يسمح بوجه

التحديد بالقيام بذلك دون إدخال الخلفية المترية (background metric). ثانيا، لأن هذا يذكرنا بحلقات ويلسون (Wilson loops) وهذا يتفق مع الطريقة المعتادة لقياس الإنحناءات في النسبية العامة من خلال عبور شعاع على طول منحنى مغلق. يتم تعريف التدفقات كالآتي:

$$F_S^f = \int_S d^2 x n_a E_i^a f^i \qquad (3.57)$$

حيث: S هي مساحة كيفية، f^i دالة معرفة على S و n_a شعاع عمودي على S. كما يمكن تعريف الهولونومات كما يلي:

$$h_l = \mathcal{P}exp \int_l A_a^i \tau_i dx^a \qquad (3.58)$$

حيث: $\mathcal{P}$ عبارة عن مؤثر المسار، l منحنى كيفي و $\tau_i = \frac{i}{2}\sigma_i$ متريات باولي.

الكوسمولوجيا الحلقية الكوانتية المتجانسة

هنا سنحاول الوصول إلى معادلات فريدمان المعدلة عند إضافة التأثيرات الهندسية حيث سنعتمد على المرجع [89]. فتحت تأثير التناظرات الناتجة عن فرضية الكون المتجانس ومتساوي الخواص في الإتجاه يمكن اختيار متغيرات اشتكار قطرية تكتب على الشكل التالي:

$$A_a^i = c\delta_a^i \ , \qquad E_i^a = p\delta_i^a \qquad (3.59)$$

حيث:

$$|p| = a^2 \ , \qquad c = \gamma \dot{a} \qquad (3.60)$$

هنا النقطة ترجع إلى الإشتقاق بالنسبة للزمن الكوني t (cosmic time), بحيث: $dt = N dx^0$ و $\dot{a} = \frac{1}{N}\frac{da}{dx^0}$ نفرض أن p موجب.

نحاول الآن كتابة الهاملتونيا (3.56) بدلالة p و c. أولا نلاحظ أن كلا من القيدان C_a وG_i ينعدمان. وبما أننا فرضنا أن الكون متجانس فان الهاملتونيا المتبقية تصبح ثابتة على الفضاء كله مما يتسبب في تباعد التكامل (3.56) عندما نكامل على حجم غير منته وبالتالي يجدر علينا المكاملة على حجم

محدود Σ فبما أنَّنا اِفترضنا أنَّ الكون متجانس فإنَّنا نستطيع دراسة جزء فقط محدود من الكون لأنَّه سيكون نفسه في كل مكان. ليكن كل من V_0 وV الاحداثية والحجم الفيزيائي لـ Σعلى التولي حيث يعرفان كالآتي:

$$V_0 = \int_{\Sigma} d^3x \tag{3.61}$$

$$V = \int_{\Sigma} \det(q_{ab})\, d^3x = V_0 a^3 = V_0 p^{3/2} \tag{3.62}$$

يمكن كتابة الهاملتونيا الكلية بدلالة c, p كالآتي:

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2k}\int_{\Sigma} dx^3\, NC = -\frac{3NV_0}{k\gamma^2}\sqrt{p}c^2 \tag{3.63}$$

بما أنَّ كل من A_a^i و E_a^i متغيران مترافقان فان c, p أيضا متغيران مترافقان بحيث يمكن كتابة عارضة بواصو الخاصة بهما اِنطلاقا من المعادلة (3.52) كالآتي:

$$\{\mathrm{c}, p\} = \frac{k\gamma}{3V_0} \tag{3.64}$$

يمكن تعريف هاملتونيا المادة الموجودة في الكون كالآتي:

$$\mathcal{H}_m = \int_{\Sigma} \mathrm{N} \det(q_{ab})\rho\, d^3x = NV\rho = NV_0 p^{3/2}\rho \tag{3.65}$$

حيث ρ تعبر عن كثافة الطاقة. يمكن دمج كل من $\mathcal{H}_G$ و $\mathcal{H}_m$ كالآتي:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_m = NV_0(-\frac{3}{k\gamma^2}\sqrt{p}c^2 + p^{3/2}\rho) \tag{3.66}$$

$$H^2 = (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{c^2}{\gamma^2 p} = \frac{k}{3}\rho \tag{3.67}$$

نقوم الآن بإعادة صياغة معادلة فريدمان مع الأخذ بعين الإعتبار التصحيح الكوانتي. نقوم أولا بكتابة الهاملتونيا بدلالة كل من التدفقات F_S^f وهولونومات h_{l_k} . نكتب المقدارين السابقين بدلالة c, p فيكون لدينا:

$$F_S^f = p\int_S d^2xn_aE_i^af^i \tag{3.68}$$

و

$$\begin{aligned} h_{l_k} &= \mathcal{P}exp\int_{l_k} A_a^i\tau_i dx^a \\ &= e^{|l_k|c\tau_k} \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}|l_k|c\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}|l_k|c\right)\tau_k \end{aligned} \tag{3.69}$$

إنَّ أبسط هلونومي مغلق يمكن تشكيله سوف يكون على طول حافة مربع ιφ مع أضلاع موجهة معرفة عن طريق الإحداثيات الموجهة ι و φ ومنه يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} h_{\blacksquare_{ij}} &= h_{l_i}h_{l_j}{h_{l_i}}^{-1}{h_{l_j}}^{-1} \\ &= 1 - 2\sin\left(\frac{1}{2}|l|c\right)^4 + \sin(|l|c)^2\left(\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i\right) \\ &\quad + 4\cos\left(\frac{1}{2}|l|c\right)\sin\left(\frac{1}{2}|l|c\right)^3\left(\tau_i - \tau_j\right) \end{aligned} \tag{3.70}$$

حيث l_i و l_j عبارة عن أضلاع المربع، و $|l| = |l_i| = |l_j|$ هم أطوال أضلاع المربع. نقوم الآن بكتابة شدة حقل الارتباط (the connection field strength) F_{ab}^k بدلالة نهاية الحلقة المغلقة كالآتي

$$\begin{aligned} F_{ab}^k &= -2\lim_{|l|\to 0}\frac{tr[\tau_k(h_{\blacksquare_{ab}} - 1)]}{|l|^2} \\ &= \lim_{|l|\to 0}[\frac{sin(|l|c)^2}{|l|^2}\epsilon_{ab}^k \end{aligned} \tag{3.71}$$

في النسبية الكمية الحلقية مؤثر المساحة لديه قيمة حدية صغري $\bar{\mu}$ غير معدومة وبالتالي فان $|l|$ لن تنعدم بل إنَّها سوف تؤول إلى $\bar{\mu}$. وبالتالي فانه يجب تعويض $\frac{sin(\bar{\mu}\, c)^2}{\bar{\mu}^{\,2}}\epsilon_{ab}^k$ بـ F_{ab}^k للتعبير عن الإنحناء في الهاملتونيا وهذا يوافق التغيير التالي:

$$c^2 \to \frac{sin(\bar{\mu}\, c)^2}{\bar{\mu}^{\,2}}\epsilon_{ab}^k \tag{3.72}$$

وبالتالي فان الهاملتونيا المعدلة تصبح كالآتي:

$$H = NV_0(-\frac{3}{k\gamma^2}\sqrt{p}\frac{sin(\bar{\mu}\, c)^2}{\bar{\mu}^{\,2}} + p^{3/2}\rho) \tag{3.73}$$

لنقم بتعريف المعامل λ بأنه الجدر التربيعي لأصغر مساحة في النسبية الكمية الحلقية، بحيث:

$$\bar{\mu} = \frac{\lambda}{\sqrt{p}} \tag{3.74}$$

وبالتالي فإنَّ العبارة النهائية للهاملتونيا بدلالة λ تكون كالآتي:

$$\mathcal{H} = NV_0 p^{3/2}(\frac{3}{k\gamma^2\lambda^2}sin(\bar{\mu}\, c)^2 + \rho) \tag{3.75}$$

إنطلاقا من قيد الهاملتونيا $\mathcal{H} = 0$ يكون لدينا:

$$sin(\bar{\mu}\, c)^2 = \frac{k\gamma^2\lambda^2}{3}\rho \tag{3.76}$$

بعد ذلك نحسب مشتقة p بالنسبة للزمن الذاتي:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{N}\{\mathrm{p}, H\} \\ &= \frac{2p}{\gamma\lambda} sin(\bar{\mu}\, c)\, cos(\bar{\mu}\, c) \end{aligned} \tag{3.77}$$

نقوم الآن بحساب معامل هابل:

$$H = \frac{\dot{p}}{2p} = \frac{1}{\gamma\lambda} sin(\bar{\mu}\, c)\, cos(\bar{\mu}\, c) \tag{3.78}$$

ومربعه يكون كالآتي:

$$H^2 = \frac{k}{3}\, \rho\, (1 - \frac{\gamma^2\lambda^2 k}{3} \rho) \tag{3.79}$$

فبوضع:

$$\rho_c = \frac{3}{\gamma^2\lambda^2 k} \tag{3.80}$$

يكون لدينا معادلة فريدمان المعدلة في النسبية الكمية الحلقية كالآتي:

$$H^2 = \frac{k}{3}\, \rho\, (1 - \frac{\rho}{\rho_c}) \tag{3.81}$$

بحيث: ρ_c تسمى بالكثافة الحرجة *في* LQG ويعرف γ بمعامل Barbero- Immirzi العديم الأبعاد (في LQG تارموديناميك الثقب الأسود قدرت قيمته بـ $\gamma = 0.2375$) لنقوم بالتذكير بأنَّه يتم اِهمال التصحيح الكوانتي لما: $\rho \ll \rho_c \sim \rho_{Pl}$ (ρ_{Pl} ترمز للطاقة عند معيار بلانك) وتكون مهيمنة لما $\rho \sim \rho_c$ فبوجه الخصوص عندما تكون $\rho = \rho_c$ فإنَّ الطرف الأيمن للمعادلة (3.81) يعدم وهذا ينتج عنه $\dot{a} = 0$ مما يقود إلى ما يعرف بالارتداد الكوانتي (quantum bounce).

المحور الرابع

الدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة المظلمة ذات اللُّزوجة الثابتة في الكوسمولوجيا الكلاسيكية و الجاذبية الكوانتية الحلقية

المحور الرابع

الدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة المظلمة ذات اللزوجة الثابتة في الكوسمولوجيا الكلاسيكية والجاذبية الكوانتية الحلقية

نظرية الأنظمة الديناميكية

بصفة عامة فإنه من صعب جدا حل المعادلات الكونية بدقة حتى وإن وجد حلا تحليليا فإنه لن يكون وحيدا بل سيكون مرفقا بمجموعة كبيرة من الحلول لذلك فبدلا من ذلك فإننا سنلجأ إلى طريقة بديلة عن طريق نظرية الأنظمة الديناميكية وذلك باستخراج المعلومات الكافية حول الخصائص المقاربة للنموذج وبالتالي فمعرفة النقاط الحرجة في فضاء الطور الموافقة لنموذج كوني معين تعتبر معلومة مهمة جدا. فبغض النظر على الشروط الابتدائية المختارة فان مدارات (مسارات) النظام الديناميكي تتطور دوما بمرور الزمن بجوار النقاط الحرجة فمثلا إذا كانت النقطة جاذبة فإن جميع المدارات سوف تتجه نحوها أي بمعرفة خصائص هذه المدارات يمكن تحديد سلوك النظام. يعبر عن الأنظمة الديناميكية عن طريق جمل المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا أي تلك التي لا تتعلق بالزمن بصفة مباشرة وبما أنَّ معظم النماذج الكونية يتم وصفها عن طريق جمل معادلات تفاضلية مستقلة ذاتيا لذلك فإن نظرية الأنظمة الديناميكية هي وسيلة ناجعة لتقديم دراسة عميقة في الكوسمولوجيا.

حيث من أجل ND فضاء طور تكتب المعادلات السالفة الذكر على الشكل التالي:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2 \dots \dots .. x_n) \tag{4.1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2 \dots \dots .. x_n) \tag{4.2}$$

.... (4.3)

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2 \dots \dots .. x_n) \tag{4.4}$$

حيث: $x_1, x_2 \dots \dots .. x_n$ هم عبارة عن المتغيرات الديناميكية للنظام (المقادير الفيزيائية).

<u>ملاحظات:</u>

- إذا كانت جملة المعادلات التفاضلية للنظام الديناميكي تتعلق مباشرة بالزمن نقول عنه أنَّه نظام ديناميكي غير مستقل ذاتيا (non-autonomous systems)

- مسارات النظام الديناميكي المستقل ذاتيا لا تتقاطع أبدا مع بعضها البعض وبالتالي فإنَّ الحلول تكون وحيد على عكس مسارات النظام الديناميكي الغير مستقل ذاتيا تتقاطع مع بعضها البعض لأن حلوله ليست وحيدة.

- كل نظام ديناميكي غير مستقل ذاتيا ذو الدرجة N يمكن أن يختزل إلى نظام ديناميكي مستقل ذاتيا ذو درجة N+1

فضاء الحالة (فضاء الطور)

هو فضاء متعدد الأبعاد بحيث كل مقدار فيزيائي يمثل بمحور ويتم فيه عرض جميع حالات النظام (الحلول أي مجموعة المقادير الفيزيائية التي تعتبر مهمة لوصف النظام) الممكنة حيث كل حل يمثل بمنحني يكون مرفقا بسهم يوضح اتجاه تطوره (سلوكه) بمرور الزمن (الحل يترك مسار بمرور الوقت) وتدعى مجموعة مسارات جميع حلوله بـــ phase portrait.

النقاط الحرجة

تعريف: نقول أنَّ جملة المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا (3.1) .... (3.4) تقبل نقاط حرجة إذا وفقط إذا كان:

$$f_1(\mathrm{x}_{1c}, \mathrm{x}_{2c} \dots \dots . . \mathrm{x}_{nc}) = 0 \tag{4.5}$$

$$f_2(\mathrm{x}_{1c}, \mathrm{x}_{2c} \dots \dots . . \mathrm{x}_{nc}) = 0 \tag{4.6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{4.7}$$

$$f_n(\mathrm{x}_{1c}, \mathrm{x}_{2c} \dots \dots . . \mathrm{x}_{nc}) = 0 \tag{4.8}$$

من التعريف نستنتج أنَّ النقاط الحرجة هي نقاط ثابتة لا تتغير بمرور الزمن.

الأنظمة الديناميكية الخطية

تعريف: نقول عن النظام الديناميكي $\dot{x} = f(x)$ ذو الدرجة N أنَّه خطي إذا كانت الدالة $f(x)$ خطية عند x أي لما $f(x) = Ax$ حيث A هي عبارة عن مصفوفة ثابتة N×N تسمى بمصفوفة جاكوبي.
انَّ بحساب القيم الذاتية لمصفوفة النظام الديناميكي جاكوبي عند النقاط الحرجة يمكننا تحديد استقرار هذه النقاط وبالتالي التعرف على سلوك النظام. حيث تعطى مصفوفة جاكوبي للنظام الديناميكي ذو الدرجة N عند النقطة الحرجة $(\mathrm{x}_c, \mathrm{y}_c)$ كالأتي:

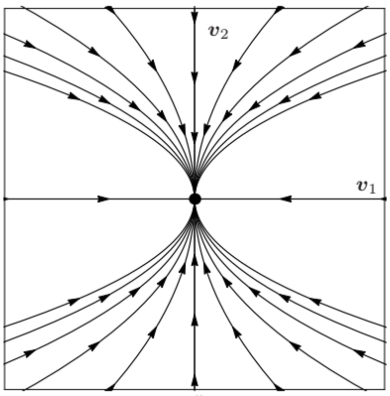
$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\mathrm{x}_1} & \frac{df_1}{d\mathrm{x}_2} \dots \dots & \dots . . \frac{df_1}{d\mathrm{x}_n} \\ . . & \dots . . & . . \\ \frac{df_n}{d\mathrm{x}_1} & \frac{df_n}{d\mathrm{x}_2} \dots \dots & \frac{df_n}{d\mathrm{x}_n} \end{pmatrix}_{(\mathrm{x_c}, \mathrm{y_c})} \tag{4.9}$$

تصنيف النقاط الحرجة

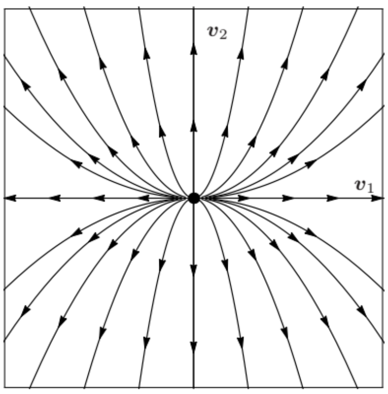
يمكن تصنيف النقاط الحرجة لنظام ديناميكي حسب اشارة طبيعة واشارة القيم الذاتية $\lambda_i(\mathrm{i} = 1,2)$ لمصفوفة جاكوبي كما هو مبين في الجدول التالي [90]:

القيم الذاتية	طبيعة النقاط الحرجة
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ حقيقية وجميعها سالبة	**مستقرة** 'جادبة' نلاحظ ان جميع مسارات النقاط تتجه نحو النقطة الحرجة
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ حقيقية ومختلفة في الإشارة	**غير مستقرة** ′نقطة سرج جزء من المسارات تتجه نحو النقطة الحرجة والجزء الأخر يبتعد عنها
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ حقيقية وجميعها موجبة	**غير مستقرة** نلاحظ ان جميع مسارات النقاط تبتعد عن النقطة الحرجة يمكن اعتبارها انها كانت جاذبة في الماضي
على الأقل أحد القيم معدوم والبقية جميعها سالبة	النظرية الخطية للأنظمة الديناميكية تصبح عاجزة على وصف النظام لذا فيجب اللجوء الى نظرية بديلة عنها
على الأقل أحد القيم معدوم والبقية جميعها موجبة أو مختلفة في الاشارة	**غير مستقرة**
مركبة وجميع أجزاؤها الحقيقية سالب	بؤرة **مستقرة**
مركبة وجميع أجزاؤها الحقيقية موجبة أو مختلفة في الاشارة	بؤرة **غير مستقرة**
مركبة وأجزاؤها الحقيقية معدومة	الحل متدبدب يسمى مركز

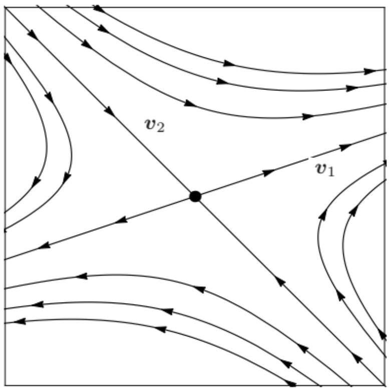
جدول 1.4: شروط استقرار النقاط الحرجة اعتمادا على القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي للنظام الديناميكي الخطي.



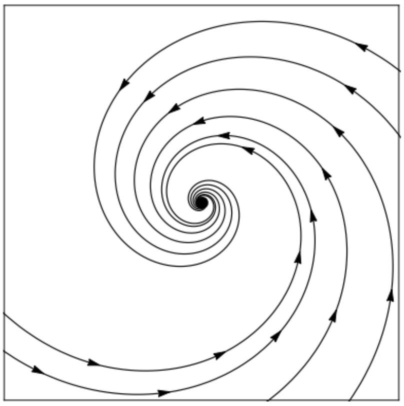
نقطة مستقرة جادبة



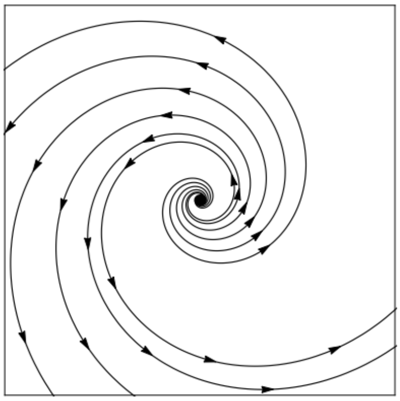
نقطة غير مستقرة مباعدة



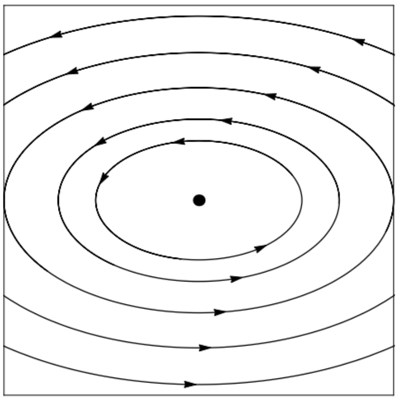
نقطة سرج



بؤرة ***مستقرة***



بؤرة غير **مستقرة**



حل متذبذب مركز

نظرية Lyapunov

تعتبر نظرية ليابونوف واحدة من أحد نظريات الاستقرار أهمية حيث تقدم طريقة لتحديد استقرار النقاط الحرجة عندما تعجز النظرية الخطية على ذلك [91-92]. لتطبيق نظرية ليابونوف للاستقرار يجب تشكيل ما يعرف بدالة ليابونوف [90] التي تحقق مجموعة من الشروط ولكن للأسف لا توجد طريقة منهجية لإيجاد هذه الدالة إنما نعتمد على التجريب والتخمين لإيجادها.

<u>تعريف:</u> ليكن لدينا النظام الديناميكي التالي $\dot{x} = f(x)$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ ولتكن x_c نقطة حرجة نقول عن الدالة المستمرة $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ في الجوار U للنقطة الحرجة x_c أنَّها دالة ليابونوف للنقطة الحرجة إذا كان:

1- V(x) تقبل الاشتقاق على $U \backslash \{x_c\}$

2- $\forall x \in U \backslash \{x_c\}$,$V(x) > V(x_c)$

3- $\dot{V}(x) = \frac{\partial}{\partial t}V(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}f_i(x) \leq 0$ ، $\forall x \in U\backslash\{x_c\}$

نظرية: لتكن x_c نقطة حرجة اللنظام الديناميكي $\dot{x} = f(x)$ حيث: $f(x): U \to \mathbb{R}^n$ و U هو المجال الذي يحوي النقطة x_c فاذا كانت $V(x)$ هي دالة ليابونوف اذن:

1- إذا كانت $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f$ سالبة (Negative semi-definite) فان x_c هي نقطة ثابتة مستقرة.

2- إذا كانت $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f$ سالبة تماما (Negative definite) فان x_c هي نقطة ثابتة مستقرة بالمقاربة.

3- إذا كانت $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f$ سالبة (Negative semi-definite)، $\forall x$ $k\alpha ki \to \infty$ و $\varsigma(\xi) \to \infty$ فان x_c هي نقطة ثابتة مستقرة عموما

4- إذا كانت $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f$ سالبة تماما (Negative definite) $\forall x$ $k\xi k \to \infty$ و $\varsigma(\xi) \to \infty$ فان x_c هي نقطة ثابتة مستقرة عموما بالمقاربة

سوف نكتفي بالحديث عن نظرية ليابونوف بهذا القدر فقط لأنَّنا لن نطبقها في أُطروحتنا هذه فللمزيد من التفاصيل أُنظر إلى المراجع [91-93].

نظرية المشعب المركزي (Centre manifold theory)

كما أشرنا سابقا فإنَّ النظرية الخطية تسقط عندما يكون الجزء الحقيقي لأحد القيم الثابتة لمصفوفة جاكوبي معدوما وبالتالي فإننا سنتعرف بالإضافة إلى نظرية ليابونوف على نظرية أخرى بديلة تحل محل النظرية الخطية عند عجزها تدعى بنظرية المشعب المركزي [93] و هي نظرية تسمح لنا بتبسيط النظام الديناميكي عن طريق تقليص أبعاده. حيث أنَّنا سوف نستعين بها في أطروحتنا هذه في الملحقين B و E ليكن لدينا النظام الديناميكي الغير خطي ذو الدرجة n التالي:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.10}$$

حيث: $f: U \to \mathrm{R}^n$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق و U المجال الذي يحوي المركز x = 0. لنفرض أنّ المركز عبارة عن نقطة توازن (هو الحل الثابت بالنسبة للمعادلة التفاضلية) لـ (3.10) . يمكن كتابة مصفوفة جاكوبي في هذه الحالة على الشكل التالي:

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\backslash_{x=0} \qquad (4.11)$$

هنا سنتهتم بالحالة أين يكون أحد القيم الذاتية للمصفوفة A معدوما أي عندما تعجز النظرية الخطية في تحديد اِستقرار المركز سنقوم بالاستعانة بنظرية المشعب المركزي في تحديد اِستقرار المركز.

لتطبيق نظرية المشعب المركزي يجب أولا كتابة النظام الديناميكي على الشكل القطري وذلك بالقيام بالتحويل التالي:

$$\binom{X}{Y} = Tx \qquad (4.12)$$

باستعمال هذه الإحداثيات الجديدة يمكننا كتابة النظام (3.10) على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mathrm{CX} + \mathrm{F(X,Y)} \\ \dot{Y} &= \mathrm{PY} + \mathrm{G(X,Y)} \end{aligned} \qquad (4.13)$$

حيث: $(X, Y) \in R^c{\times}R^s$ و C مصفوفة c × c الجزء الحقيقي لقيمها الذاتية معدوم، P مصفوفة s × s الجزء الحقيقي لقيمها الذاتية ذو إشارة سالبة و G , F لهما نفس خواص f مستمرتين وقابلتين للاِشتقاق بالإضافة إلى ذلك يحققان الشروط التالية:

$$F(0) = G(0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial X}(0,0) = \frac{\partial G}{\partial X}(0,0)=0 , \qquad \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = \frac{\partial G}{\partial Y}(0,0) = 0$$

<u>**تعريف:**</u> نقول عن المشعب انه مشعب مركزي لـ (3.13) إذا قدم موضعيا على الشكل التالي:

$$W^c(0) := \{(\mathrm{x};\ \mathrm{y}) \in R^c \times R^c / \mathrm{y} = \mathrm{h(x)}, |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \qquad (4.14)$$

من أجل δ صغيرة كفاية و h(x) دالة مستمرة وقابلة للاِشتقاق وحل للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\mathcal{N} = \mathrm{Dh(x)}\ [\mathrm{Cx} + \mathrm{F}\ (\mathrm{x}, \mathrm{h(x)})] - \mathrm{Ph(x)} - \mathrm{G(x, h(x))} = 0 \qquad (4.15)$$

والآن يمكننا القول أنّ ديناميك المشعب المركزي يوصف عن طريق النظام المختزل للمعادلات التفاضلية ذو الدرجة k التالية:

$$\dot{x} = \mathrm{Cu} + \mathrm{F}\,(\mathrm{u}, \mathrm{h}(\mathrm{u})) \qquad (4.16)$$

من أجل كل $\mathrm{x} \in R^c$, $|u| < \delta$.

اختبار لحسن التلاؤم CHI-SQUARE

إنّ مقياس الإحصاء الذي يعرف باسم χ2، أو CHI-SQUARE، هو كمية تستخدم عادة لِإختبار ما إذا كان النموذج النظري يتوافق والمعطيات التجريبية.

تعريف χ2 : يمكن تعريف χ^2 رياضيا كالآتي:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (4.17)$$

حيث تمثل O_i القيم التجريبية و E_i تمثل القيم النظرية. وتوجد: δ = κ – 1 درجة من الحرية.

مجال القيم الحرجة								
0.01	**0.025**	**0.05**	**0.10**	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	درجات الحرية
6.635	5.024	3.841	2.706	0.016	0.004	0.001	-	**1**
9.210	7.378	5.991	4.605	0.211	0.103	0.051	0.020	**2**
11.345	9.348	7.815	6.251	0.584	0.352	0.216	0.115	**3**
13.277	11.143	9.088	7.779	1.064	0.711	0.484	0.297	**4**
15.086	12.833	11.071	9.236	1.610	1.145	0.831	0.554	**5**
16.812	14.449	12.592	10.645	2.204	1.635	1.237	0.872	**6**
18.475	16.013	14.067	12.017	2.833	2.167	1.690	1.239	**7**
20.090	17.535	15.507	13.362	3.490	2.733	2.180	1.646	**8**
21.666	19.023	16.919	14.684	4.168	3.325	2.700	2.088	**9**
23.209	20.483	18.307	15.987	4.865	3.940	3.247	2.558	**10**
24.725	21.920	19.675	17.275	5.578	4.575	3.816	3.053	**11**
26.217	23.337	21.026	18.549	6.304	5.226	4.404	3.571	**12**
27.688	24.736	22.362	19.812	7.042	5.892	5.009	4.107	**13**
29.141	26.119	23.685	21.064	7.790	6.571	5.629	4.660	**14**
30.578	27.488	24.996	22.307	8.547	7.261	6.262	5.229	**15**
32.000	28.845	26.296	23.542	9.312	7.962	6.908	5.812	**16**
33.409	30.191	27.587	24.769	10.085	8.672	7.564	6.408	**17**
34.805	31.526	28.869	25.989	10.865	9.390	8.231	7.015	**18**
36.191	32.852	30.144	27.204	11.651	10.117	8.907	7.633	**19**
37.566	34.170	31.410	28.412	12.443	10.851	9.591	8.260	**20**
38.932	35.479	32.671	29.615	13.240	11.591	10.283	8.897	**21**
40.289	36.781	33.924	30.813	14.042	12.338	10.982	9.542	**22**
41.638	38.076	35.172	32.007	14.848	13.091	11.689	10.196	**23**
42.980	39.364	36.415	33.196	15.659	13.848	12.401	10.856	**24**
44.314	40.646	37.652	34.382	16.473	14.611	13.120	11.524	**25**
45.642	41.923	38.885	35.563	17.292	15.379	13.844	12.198	**26**
46.963	43.194	40.113	36.741	18.114	16.151	14.573	12.879	**27**
48.278	44.461	41.337	37.916	18.939	16.928	15.308	13.565	**28**
49.588	45.722	42.557	39.087	19.768	17.708	16.047	14.257	**29**
50.892	46.979	43.773	40.256	20.599	18.493	16.791	14.954	**30**

جدول 2.4: توزيع حسن التلاؤم $\chi 2$ CHI-SQUARE.

السلوك الديناميكي لنموذج الطاقة الظلماء ذات اللزوجة الثابتة في الكوسمولوجيا الكلاسيكية

في هذه الفقرة سوف نتتبع تطور نموذج FRW الكوني المسطح في مرجع الكوسمولوجيا الكلاسيكية حيث نفترض أنَّ هذا الكون سيكون مملوء بالمادة المظلمة المعدومة الضغط وعلى الطاقة المظلمة ذات لزوجة سائبة (bulk viscosity) ثابتة ولديها قيمة ثابتة لـ ω . سنقوم بدراسة أسهل حالة أين تنتشر الطاقة الظلماء بصفة مستقلة عن المادة الظلماء (لا يوجد اي تفاعل بينهما) سنقوم بإجراء دراستنا حول

سيناريوهات الجوهرة (quintessence) والشبح (phantom) بشكل منفصل. في الكوسمولوجيا الكلاسيكية تعطى المعادلة الأولى لفريدمان كما يلي:

$$H^2 = \frac{\rho}{3} \tag{4.18}$$

حيث: $H = \frac{\dot{a}}{a}$ يمثل ثابت هابل و ρ هي الكثافة الكلية للطاقة $\rho = \rho_{DM} + \rho_{DE}$ هنا النقطة تدل على الاشتقاق بالنسبة للزمن الكوني t فيما يلي سنأخذ $\kappa = 8\pi G = 1$ (G يمثل ثابت نيوتن) ونفرض أنَّ الطاقة المظلمة تحقق معادلة الحالة الاعتيادية التالية: $p = \omega\rho$ حيث ω تنتمي إلى المجالين $-1/3 > \omega > -1$ و $\omega < -1$ اللذين يوافقان نموذجي الجوهرة (quintessence) والشبح (phantom) على التوالي. بوجود اللزوجة السائبة يمكننا كتابة الضغط الفعال للطاقة المظلمة اللزجة كما يلي[18] :

$$P_{DE}^{eff} = P_{DE} + \Pi \tag{4.19}$$

حيث $P_{DE} = \omega\rho_{DE}$ يمثل ضغط الطاقة المظلمة و $\Pi = -3\zeta H$ يمثل الضغط اللزج. والحد ζ يعبر عن معامل اللزوجة فنتيجة عن التغير الموجب للانتروبيا في العملية الغير عكوسه يجب أن يكون $\zeta > 0$ [72] فيما يلي سنفرض أنَّ ζ ثابت. الآن نستطيع كتابة معادلة الإنحفاظ للمادة المظلمة والطاقة المظلمة كما يلي:

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = 0 \tag{4.20}$$

و

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H((1+\omega)\rho_{DE} - 3\zeta H) = 0 \tag{4.21}$$

بإشتقاق المعادلة (4.18) وبتعويض المعادلتين (4.20) و (4.21) نحصل على معادلة Raychaudhuri:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_{DM} + (1+\omega)\rho_{DE} - 3\zeta H) \tag{4.22}$$

بإستعمال المعادلتين (4.18) و (4.22) يمكننا كتابة معامل معادلة الحالة الفعال ω_{eff} كما يلي:

$$\omega_{eff}=\frac{P_{eff}}{\rho_{total}}=-1-\frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2} \tag{4.23}$$

لكي نقوم بتحليل السلوك الديناميكي للنظام السابق لابد من اِدخال المتغيرات التالية العديمة البعد:

$$x=\frac{\rho_{DE}}{3H^2},\qquad y=\frac{1}{\frac{\zeta}{H}+1} \tag{4.24}$$

تجدر الإشارة إلى أنَّ المتغير y تم أخذه من المرجع [94]. من الواضح جدا أنَّ الطور الفضائي عبارة عن منطقة محدودة بحيث: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ بدلالة هذه المتغيرات يمكننا كتابة المعادلتين (4.18) و (4.22) كما يلي:

$$\frac{\rho_{DM}}{3H^2}+x=1 \tag{4.25}$$

و

$$\frac{\dot{H}}{H^2}=-\frac{3}{2}\left(2+\omega x-\frac{1}{y}\right) \tag{4.26}$$

كما أنَّ معامل التباطؤ $q=-1-\frac{\dot{H}}{H^2}$ ومعامل معادلة الحالة الفعال ω_{eff} يصبحان كمايلي:

$$q=2+\frac{3}{2}(\omega x-\frac{1}{y}) \tag{4.27}$$

و

$$\omega_{eff}=1+\omega x-\frac{1}{y} \tag{4.28}$$

بإستعمال المعادلات (4.20) ، (4.21) ، (4.25) و (4.26) نتحصل على المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا التالية:

$$x'=3(x-1)(\omega x-\frac{1}{y}+1) \tag{4.29}$$

و

$$y' = \frac{3}{2}\mathrm{y}\,(\mathrm{y}-1)\left(2+\omega x-\frac{1}{y}\right) \qquad (4.30)$$

إنَّ الفتحة الموجودة في المعادلات السابقة تدل على الإِشتقاق بالنسبة إلى (the e-folding number) $N = \ln a$ حيث يمثل الزمن الكوسمولوجي. الآن نقوم بالبحث عن النقاط الحرجة للنظام السابق وذلك بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{aligned} &3(\mathrm{x}-1)\left(\omega x-\frac{1}{y}+1\right)=0 \\ &\frac{3}{2}\mathrm{y}\,(\mathrm{y}-1)\left(2+\omega x-\frac{1}{y}\right)=0 \end{aligned} \qquad (4.31)$$

بإستعمال برنامج المابل (Maple) وبالتقيد بالشروط الفيزيائية $(0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1)$ سنتحصل على ثلاث نقاط الحرجة التالية: $P_1(0,1)\,,\ P_2(1,1)$ و $P_3\left(1\,,\frac{1}{2+\omega}\right)$ كما عرفنا سابقا فان تحديد إستقرارية هذه النقاط يتوقف على إشارة و طبيعة القيم الذاتية $\mu_i(i=1,2)$ لمصفوفة النظام جاكوبي J عند كل نقطة.

$$\mathrm{J}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_c,y_c)} \qquad (4.32)$$

حيث $f\equiv x'$ ، $g\equiv y'$ والآن سنقوم بتلخيص خواص جميع النقاط الحرجة المتحصل عليها في الجدول 3.4 والجدول 4.4:

القيم الذاتية	y_c	x_c	النقاط الثابتة
$\mu_2=-3\omega\,,\quad \mu_1=\frac{3}{2}$	1	0	P_1
$\mu_2=3\omega\,,\quad \mu_1=\frac{3}{2}(1+\omega)$	1	1	P_2
$\mu_2=-\frac{3}{2}(1+\omega)\quad,\mu_1=-3$	$\frac{1}{2+\omega}$	1	P_3

جدول 3.4: القيم لذاتية لمصفوفة جاكوبي عند كل نقطة حرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكوسمولوجيا الكلاسيكية.

النقاط الثابتة	q	ω_{eff}	الاستقرار
P_1	$\frac{1}{2}$	0	غير مستقرة
P_2	$\frac{1}{2}(1+3\omega)$	ω	نقطة سرج لما $-1 < \omega$ مستقرة لما $\omega < -1$
P_3	1-	1-	موجودة فقط لما $\omega < -1$ (مستقرة)

جدول 4.4: استقرارية وقيم بعض العوامل المتعلقة بالنقاط الحرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكسمولوجيا الكلاسيكية.

من خلال الجدولين السابقين يمكننا ملاحظ التالي:

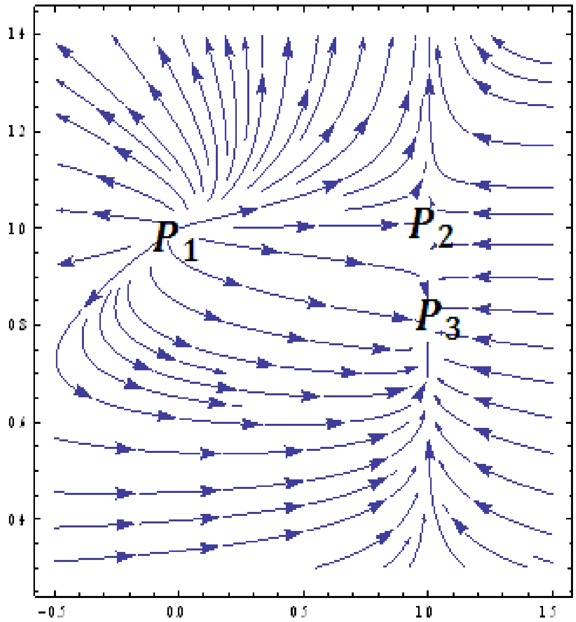
1- عند النقطة الحرجة P_1 : نلاحظ أن معاملي التباطؤ ومعادلة الحالة الفعال يأخذان القيم التالية: $q = 1/2$ ، $\omega_{eff} = 0$ فالأول يوافق تمدد متباطىء للكون والثاني يدل على هيمنة المادة المظلمة على الكون. فعند هذه النقطة تأخذ القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي القيم التالية: $\mu_1 = 3/2$ و $\mu_2 = -3\omega$ نلاحظ أنَّ كلتا القيمتين الذاتيتين تأخذان الإشارة الموجبة سواء في نموذج الشبح (phantom) او الجوهرة (quintessence) وهذا ما يدل حسب الجدول 3.4 على أن هذا الحل ليس مستقر وهو متوافق والأرصاد وهذا شييء منطقي لأنَّ كوننا مر على هذه الحقبة في الماضي وهي حقبة مهمة جدا ومطلوبة لتشكل البنى الكونية الحالية.

2- بما أنَّ $\omega_{eff} = \omega$ ، $y = 1/(\zeta/H + 1) = 1$ اذن فالنقطة الحرجة P_2 توافق إما الحل الذي تكون فيه الطاقة المظلمة مهيمنة وغير لزجة وذلك عندما تكون $\zeta = 0$ أو الحل الذي تكون فيه المادة المظلمة مسيطرة وذات طبيعة لزجة وذلك لما $H \to \infty$. ونظرا لأنَّ $q = \frac{1}{2}(1 + 3\,\omega)$ فإنَّ هذا الحل يوافق تمدد متسارع للكون. إنَّ القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي الموافقة لهذا الحل هي كالآتي: $\mu_1 = \frac{3}{2}(1 + \omega)$ و $\mu_2 = 3\omega$ نلاحظ أنَّه من أجل الطاقة المظلمة الجوهرة (quintessence) $(-1 < \omega < -1/3)$ القيم الذاتية تكون إشارتها مختلفة وبالتالي فإنها توافق نقطة حرجة غير مستقرة 'سرج' أما من أجل الطاقة المظلمة ذو طبيعة الشبح (phantom) $\omega < -1$ فان كلتا القيمتين الذاتيتين تأخذان الإشارة السالبة و بالتالي فإنَّ

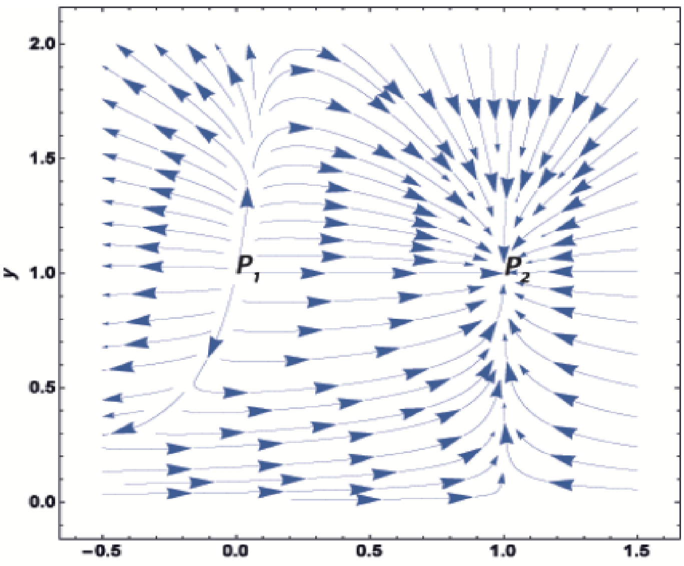
P_2 في هذه الحالة تكون مستقرة حيث أنَّها توافق الانشقاق الكبير (big rip singularity attractor) ذو طبيعة جاذبة و هذا على عكس ما ورد في المرجع [47] حيث بينوا هناك أننا لو إفترضنا أنَّ عبارة اللزوجة عبارة عن مجموع خطي حيث أنَّ الحد الأول يكون عبارة عن ثابت و الحد التأني يكون متناسب مع $\theta = 3\frac{a}{\dot{a}}$ مع اختيار مناسب لمختلف العوامل فإننا سنتجنب مشكلة الإنشقاق الكبير الذي من الممكن مصادفته في آخر الزمان عندما تكون لدينا طاقة مظلمة ذو طبيعة الشبح (phantom).

3- نلاحظ أن النقطة الحرجة P_3 لا تمثل حلا فيزيائيا بالنسبة لنموذج الشبح (phantom) لأنَّ y في هذه الحالة لا تكون محصورة في المجال [1- , 1] فهي مقبولة فقط عندما تكون لدينا الطاقة المظلمة الجوهرة (quintessence) فنلاحظ عندها أن: $q = -1$, $\omega_{eff} = -1$ وهي نفس مميزات كون ديستر (*de-Sitter universe*). وبما أنَّ كلتا القيمتين الذاتيتين لمصفوفة جاكوبي تكون لديها إشارة سالبة $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -\frac{3}{2}(1+\omega)$ فإن هذا الحل مستقر وبالتالي فيمكننا القول عنه أنَّه حل من نوع ديستر لزج جاذب في أواخر الزمن.

وبالتالي فإنَّه من خلال التحليل السابق يمكننا إستنتاج أنَّه إذا فرضنا أن الطاقة المظلمة لديها لزوجة ثابتة فان هذا سيؤثر فقط على نموذج الجوهرة (quintessence) حيث أننا سنتحصل على حل مثير

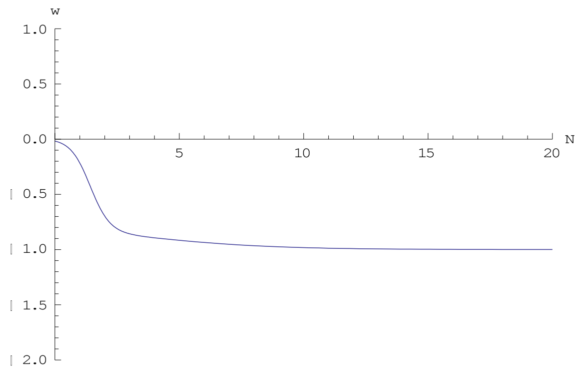


الشكل 1.4: مخطط فضاء الحالة الخاص بنموذج الشبح (phantom) في الحالة الكلاسيكية بأخذ $\omega = -4/3$.

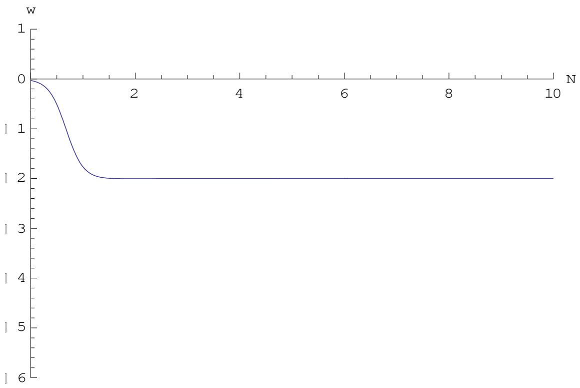


الشكل 2.4: مخطط فضاء الحالة الّخاص بنموذج الجوهرة (quintessence) في الحالة الكلاسيكية بأخذ $\omega = -7/20$.

للإِهتمام مستقر من نوع ديستر. ومع ذلك فإنَّنا بهذا الإفتراض لا يمكننا تجنب مشكلة الإِنشقاق الكبير الذي قد تحدث في آخر الزمن. الشكل 1.4 والشكل 2.4 يعرضان رسم بياني يوضح (phase portrait) للنموذج الكلاسيكي للشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) لما: $\omega = -4/3$ و $\omega = -3/4$ على التوالي. إنَّ سلوك ω_{eff} بدلالة N للطاقة الكلية للكون لنموذج الكوسمولوجيا الكلاسيكية في حالتي الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) موضح في الشكل 3.4 والشكل 4.4 على التوالي. فنلاحظ أنَّ في حالة الشبح (phantom) تؤول ω_{eff} إلى قيمة ثابتة أقل من -1 بينما في حالة الجوهرة (quintessence) فإننا نلاحظ أن ω_{eff} في آخر الزمن تبتعد عن منطقة الجوهرة (quintessence) وتقترب إلى -1 إذن فيمكننا القول أنَّه بغض النظر عن الشروط الابتدائية لكلتا الحالتين فإن الكون سيدخل حالة نهائية تكون فيها الطاقة المظلمة هي المهيمنة.



الشكل 3.4: تطور ω_{eff} بدلالة الزمن الكوني N لنموذج الجوهرة (quintessence) في الحالة الكلاسيكية بأخذ $\omega = -4/3$.



الشكل 4.4: تطور ω_{eff} بدلالة الزمن الكوني N لنموذج الشبح (phantom) في الحالة الكلاسيكية بأخذ $\omega = -4/3$.

السلوك الديناميكي لنموذج الطاقة المظلمة ذات اللزوجة الثابتة في الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية

سنقوم الآن بتمديد دراستنا السابقة وذلك عن طريق إدخال مفعول الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية. ففي هذه الحالة ستكتب معادلة فريدمان المعدلة من أجل الفضاء المسطح كالآتي:

$$H^2 = \frac{\rho}{3}(1 - \frac{\rho}{\rho_c}) \tag{4.34}$$

فبإشتقاق المعادلة (4.34) وبإستعمال المعاداتين (4.20) و (4.21) نتحصل على معادلة Raychaudhuri المعدلة التالية:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_{DM} + (1 + \omega)\rho_{DE} - 3\zeta H)(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}) \tag{4.35}$$

بإستعمال المعادلة (4.34) و (4.35) يمكن كتابة المعادلة الحالة الفعالة للطاقة الكلية للكون كالآتي:

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}(\frac{\rho_c - \rho}{(\rho_c - 2\rho}) \tag{4.36}$$

الآن من أجل تحليل السلوك الديناميكي للكون يجب علينا إضافة متغير آخر عديم البعد إلى المتغيرات الموجودة سابقا x وy: $z = \rho/\rho_c$. في هذه الحالة فإنه يمكن كتابة معادلة فريدمان المعدلة (4.34) والمعادلة (4.35) كالآتي:

$$(\frac{\rho_{DM}}{3H^2} + x)(1 - z) = 1 \tag{4.37}$$

و

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \omega x - \frac{1}{y} + 1\right)(1 - 2z) \tag{4.38}$$

كذلك يمكن كتابة معاملي التباطؤ ومعادلة الحالة الفعال كما يلي:

$$q = -1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \omega x - \frac{1}{y} + 1\right)(1 - 2z) \tag{4.39}$$

و

$$\omega_{eff} = \left(\omega x - \frac{1}{y} + 1\right)(1 - z) \tag{4.40}$$

بإستعمال المعادلات (4.20)، (4.21)، (4.37) و (4.38) نتحصل على المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا التالية:

$$x' = 3(\mathrm{x}\,(1-2\mathrm{z})-1)(\omega x-\frac{1}{y}+1) - \frac{3xz}{1-z} \qquad (4.41)$$

$$y' = \frac{3}{2}\mathrm{y}(\mathrm{y}-1)\left(\frac{1}{1-z}+\omega x-\frac{1}{y}+1\right)(1-2z) \qquad (4.42)$$

و

$$z' = -3z-3z(1-z)\,(\omega x-\frac{1}{y}+1) \qquad (4.43)$$

الآن نقوم بالبحث عن النقاط الحرجة للنظام السابق وذلك بحل جملة المعادلات التالية:

$$3(\mathrm{x}\,(1-2\mathrm{z})-1)\left(\omega x-\frac{1}{y}+1\right)-\frac{3xz}{1-z}=0 \qquad (4.44)$$

$$\frac{3}{2}\mathrm{y}(\mathrm{y}-1)\left(\frac{1}{1-z}+\omega x-\frac{1}{y}+1\right)(1-2z)=0 \qquad (4.45)$$

و

$$-3z-3z(1-z)\left(\omega x-\frac{1}{y}+1\right)=0 \qquad (4.46)$$

بإستعمال برنامج مابل (Maple) وبالتقيد بالشروط الفيزيائية $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ سنتحصل على ثلاث نقاط الحرجة التالية: $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,1,0)$ و $P_3\left(1\,,\frac{1}{2+\omega}\,,0\right)$ فخواص إستقرارية هذه النقاط يتوقف على إشارة وطبيعة القيم الذاتية (x_c, y_c, z_c) لمصفوفة النظام جاكوبي J عند كل نقطة.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\mathrm{x_c},\mathrm{y_c},\mathrm{z_c})} \qquad (4.47)$$

حيث $\mathrm{h}\equiv \mathrm{z}'$. خواص النقاط الحرجة المتحصل عليها تلخص في الجدول 5.4 والجدول 6.4 كما يلي:

النقاط الحرجة	x_c	y_c	z_c	القيم الذاتية
P_1	0	1	0	$\mu_3 = -3,\ \mu_2 = -3\omega,\ \mu_1 = \frac{3}{2}$
P_2	1	1	0	$\mu_3 = -3(1+\omega),\ \mu_2 = 3\omega,\ \mu_1 = \frac{3}{2}(1+\omega)$
P_3	1	$\frac{1}{2+\omega}$	0	$\mu_3 = 0,\ \mu_2 = -\frac{3}{2}(1+\omega),\ \mu_1 = -3$

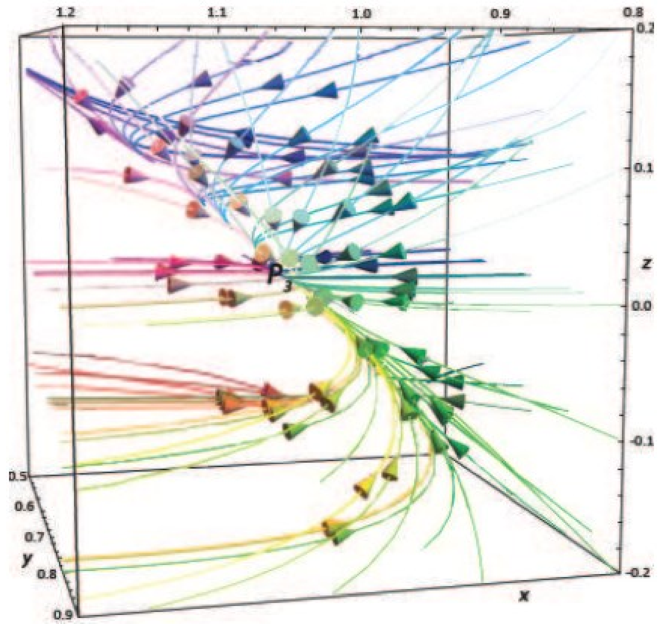
جدول 5.4: القيم لذاتية لمصفوفة جاكوبي عند كل نقطة حرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية.

النقاط الحرجة	q	ω_{eff}	الاستقرار
P_1	½	0	نقطة سرج
P_2	$\frac{1}{2}(1+3\omega)$	ω	نقطة سرج
P_3	-1	-1	موجودة فقط لما $\omega < -1$ (مستقرة)

جدول 6.4: إستقرارية وقيم بعض العوامل المتعلقة بالنقاط الحرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكسمولوجيا الكوانتية الحلقية.

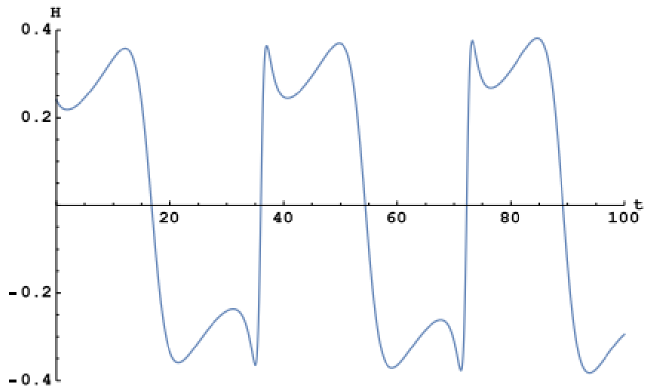
من خلال الجدولين السابقين نلاحظ أننا تحصلنا على نفس النقاط الحرجة للحالة الكلاسيكية (ولكن في 3 أبعاد) و لكن خواص الإستقرار تقريبا مختلفة بحيث النقطة P_1 (الحل الذي تكون فيه المادة المظلمة هي المهيمنة) تصبح نقطة سرج بعدما كانت غير مستقرة في الحالة الكلاسيكية و هذا نظرا لإختلاف إشارة القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي عند هذه النقطة $\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = -3\omega$, $\mu_3 = -3$ ورغم ذلك فهي تبقى غير مستقرة كما في الحالة الكلاسيكية سواء كانت لدينا طاقة مظلمة من نوع الشبح (phantom) أو من نوع الجوهرة (quintessence) مع تمدد متباطىء للكون. بالنسبة للنقطة الحرجة P_2 (الحل الذي تكون فيه الطاقة المظلمة غير لزجة وتكون مسيطرة على الكون) حيث القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي عند هذه النقطة هي كالآتي: $\mu_1 = \frac{3}{2}(1+\omega)$, $\mu_2 = 3\omega$ و

$\mu_3 = -3(1 + \omega)$ فنلاحظ أنَّه لما يكون لدينا الطاقة المظلمة من نوع الشبح (phantom) $(\omega < -1)$ فإنَّ إِستقرار هذه النقطة يختلف عن الحالة الكلاسيكية بحيث تتحول من نقطة مستقرة إلى نقطة من نوع سرج وذلك لكونها تمتلك قيم ذاتية مختلفة في الإشارة و بالتالي فانه يمكننا القول أنَّ التأثيرات الكوانيية تقوم بكسر إستقرارية النقطة P_2 إذن فان في حالة الشبح مشكلة النقطة الشاذة المستقبلية التي توافق الإنشقاق الكبير(big rip) لن تحدث في هذا السيناريو. أما بالنسبة لحالة الجوهرة (quintessence) فإنَّ النقطة P_2 تبقى سرج. أما بالنسبة لنوع التمدد فإننا نلاحظ أنَّه من أجل كلتا الحالتين يكون لدينا تمدد متسارع في جوار هذه النقطة. و الآن ننتقل الى آخر نقطة P_3 (الطاقة الظلماء تكون لزجة ومهيمنة على الكون) فهي من نوع ديستر $(q = -1 , \omega_{\text{eff}} = -1)$ يبقى هذا الحل موجود فقط من أجل طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) (شروط فيزيائية) , فالقيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي الموافقة لهذه النقطة هي كالآتي: $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -\frac{3}{2}(1 + \omega)$ و $\mu_3 = 0$ فبما أن إحدى القيم الذاتية معدومة و البقية سالبة فإنَّنا لا يمكننا تحديد إستقرار هذه النقطة بإِستعمال النظرية الخطية بدلا من ذلك فانه يتوجب علينا إيجاد دالة ليابونوف و لكن في حالتنا فإنَّ إيجاد هذه الأخيرة تعتبر مهمة صعبة لذلك فبدلا عنها فإننا نستعين *بنظرية المشعب* المركزي لتحديد استقرار النقطة P_3 فبالإِعتماد على الملحق B فإننا نجد هذه النقطة مستقرة. الشكل 5.4 يوضح phase portrait في ثلاث أبعاد مع النقطة P_3 لنموذج الطاقة المظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) في الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية.

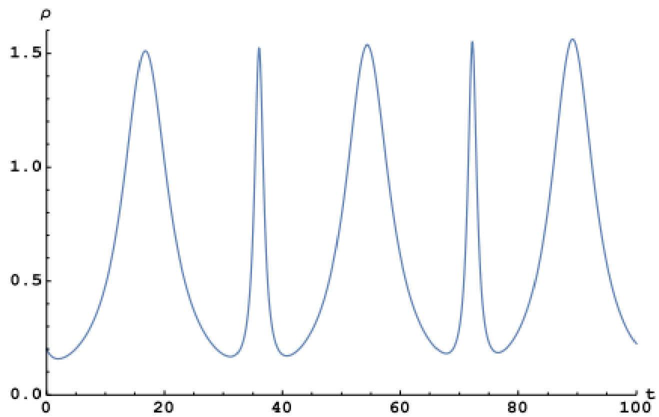


الشكل 5.4: 3D phase portrait يوضح النقطة الحرجة المستقرة في نموذج الجوهرة (quintessence) في الكوسمولوجيا الكمية الحلقية مع أخذ $\omega = -4/3$.

الشكل 6.4 والشكل 7.4 يوضحان منحني تطور معامل هابل والكثافة الطاقوية بأخذ $\omega_{eff} = 1.2$ و $\rho_c = 1.5$. حيث نلاحظ في البداية يتزايد كل من H و ρ مع الزمن حتى يبلغان النهاية العظمى عند النقطة $\rho = \rho/2$, $H = H_{max}$ في هذه المرحلة يخضع الكون إلى تسارع فبعد هذه النقطة نلاحظ أنَّ الكون سيتمدد ولكن بتباطؤ حتى يبلغ النقطة أين تكون ρ أعظمية و $H = 0$ وهذا ما يميز الإِرتداد الكبير (the big bounce) بعدها نلاحظ أنَّ تطور الكون يعيد سابقه. اذن نستطيع القول أنَّ الكون سيظل يتأرجح إلى الأبد من دون أن يبلغ أي نقطة شاذة.



الشكل 6.4: التطور الزمني لمعامل هابل في النموذج الكسمولوجيا الكمية الحلقية في حالة الشبح مع أخذ $\omega_{eff} = -1.2$ و $\rho_c = 1.5$.



الشكل 7.4: التطور الزمني للكثافة الطاقوية في النموذج الكسمولوجيا الكمية الحلقية في حالة الشبح مع أخذ $\omega_{eff} = -1.2$ و $\rho_c = 1.5$.

توافق النموذج مع التجريب

سنقوم الآن باختبار مدى صلاحية نموذجنا الكوني المقترح أي في حالة ما تكون لدينا الطاقة المظلمة ذات طبيعتي الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) ذو اللزوجة السائبة وذلك عن طريق تقدير نسبة توافقه والتجريب حيث أنَّنا سنقوم بالاعتماد على النتائج التجريبية لـ $H(\zeta)/(1+\zeta)$ الموجودة في المرجع [95] فلتحقيق ذلك سنقوم أولا بإيجاد العبارة النظرية الخاصة بمعامل هابل H

بدلالة الإِنزياح نحو الأحمر ζ. بإستعمال المعادلات (4.18)، (4.20) و (4.21) نقوم بإيجاد المعادلة التفاضلية التي تصف معامل الكثافة الكلية $\Omega(z) = \frac{\rho}{\rho_{crit}^{0}}$ ذو اللزوجة السائبة بدلالة الإِنزياح نحو الأحمر التالية:

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} - \frac{3(1+\omega)}{1+z}\Omega(z) + \frac{\lambda}{1+z}\Omega^{\frac{1}{2}}(z) - \frac{\lambda\, \iota_c}{1+z}\Omega^{\frac{3}{2}}(z) + 3\omega(1 - \Omega_{0DE})(1+z)^2 = 0 \tag{4.48}$$

حيث:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \qquad \iota_c = \frac{\rho_0}{\rho_c}, \qquad \lambda = \frac{9\zeta}{{\rho_0}^{1/2}} \tag{4.49}$$

هنا G , H_0, ρ , Ω_{0DE} و z يمثلون على التوالي كل من: ثابت نيوتن، معامل هابل المرصود، كثافة الطاقة الكلية، معامل كثافة الطاقة المظلمة الحرجة والانزياح نحو الأحمر. يمكن كتابة معامل هابل كالآتي:

$$H = H_0\left(1 - \frac{\iota_c}{2}\Omega(z)\right)\Omega^{\frac{1}{2}}(z) \tag{4.50}$$

بإستعمال طريقة التكرار بالنسبة للمعامل λ (المتناسب مع معامل اللزوجة ζ) فإن حل المعادلة (4.48) يعطى على الشكل التالي:

$$\Omega_{DE}(z) = \sigma(z,\omega) + \lambda(1+z)^{3(1+\omega)}(1 - (1+z)^{3\omega}\Phi(z,\omega)) \tag{4.51}$$

حيث :

$$\sigma(z,\omega) = \Omega_{0DE}(1+z)^{3(1+\omega)} + (1 - \Omega_{0DE})(1+z)^3 \tag{4.52}$$

و

$$\Phi(z,\omega) = \eta(\omega)(F_1\left(1,\tau_1,\frac{-1}{2},2,\tau_2,\tau_3\right) - \frac{\tau_c}{2}(1+\gamma)F_1\left(1,\tau_1,\frac{-3}{2},2,\tau_2,\tau_3\right)) \tag{4.53}$$

مع:

$$\tau_1 = \frac{1-4\omega}{2\omega} \quad \tau_2 = 1-(1+z)^{3\omega}, \quad \tau_3 = \tau_2 \Omega_{0DE} \tag{4.54}$$

$$\eta(\omega) = \frac{1-\Omega_{0DE}}{3\omega}\gamma^{\frac{1-2\omega}{\omega}}(1+\gamma)^{\frac{1}{2}} \tag{4.55}$$

$$\gamma = \frac{\Omega_{0DE}}{1-\Omega_{0DE}} \tag{4.56}$$

تدعى الدالة $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)$ الموجودة في المعادلة (29) بمعادلة *Appell hypergeometric* والتي تعرف بالعلاقة التالية:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 du u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} \tag{4.57}$$

والآن نقوم بمقارنة نموذجنا والأرصاد، وذلك باستعمال مجموعة من قياسات مختلفة لـ $H(z)/(1-z)$ تتكون من 28 قيمة اِنطلاقا من الجدول 1 الموجود في المرجع [95] بحيث تكون قيمة الاِنزياح نحو الأحمر منحصرة ضمن المجال $0.07 < z < 2.3$. للقيام بذلك سوف نستعين بدالة اختبار لحسن التلاؤم المتوسطي (CHI-SQUARE) χ^2_{min} المعرفة كالآتي:

$$\chi^2_{min} = \sum_i^{28}\left(\frac{H(z_i)-H_i^{obs}}{H_i^{obs}}\right) \tag{4.58}$$

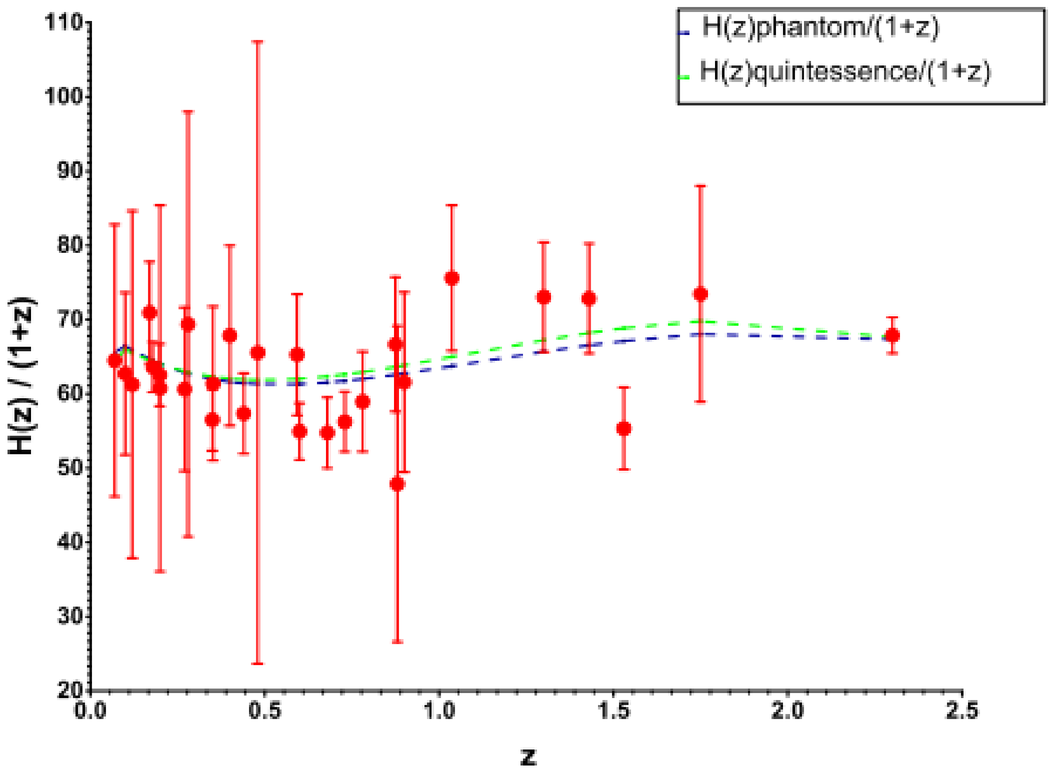
حيث $H_i^{obs}, H(z_i)$ يمثلان القيمة النظرية والمرصودة على التوالي لمعامل هابل. كما يمكن تعريف التوزيع χ^2 عن طريق درجات الحرية كالآتي:

$$\chi^2_{d.o.f} = \frac{\chi^2_{min}}{n-p} \tag{4.59}$$

حيث n هو مجموع البيانات المستعملة، p عدد المعاملات الحرة المقدرة. يمكن تحديد قيم χ^2 بدلالة عدد درجات الحرية إعتمادا على الجدول 1. يجدر الإشارة إلى أنَّ قائمة القيم المقدرة في الجدول 1 الموجود في المرجع [94] تضم أحدث النتائج من تحليل بيانات معطاة والتي تم تعيينها اِنطلاقا من مجموعة من مختلف التقنيات، حيث أنَّ هذه البيانات تم اِستعمالها لتحديد القيود المتعلقة بثلاث نماذج كونية للطاقة المظلمة التالية:

- النموذج القياسي ΛCDM حيث تم اِعتبار الطاقة المظلمة عبارة عن مائع متجانس كثافتها ثابتة مع الزمن ومعامل معادلة حالتها: $\omega = -1$.
- النموذج XCDM حيث تم اِعتبار عبارة كثافة الطاقة المظلمة عبارة عن دالة متناقصة ببطيء مع الزمن ومعامل معادلة حالتها: $\omega =< \frac{-1}{3}$.
- النموذج ΦCDM حيث تم اِعتبار الطاقة المظلمة عبارة عن حقل عددي Φ ذات كمون متناقص تدريجيا $V(\Phi) \propto \Phi^{-\alpha}$ (α عبارة عن ثابت موجب) .

والآن نرجع إلى نموذجنا في حالتي الطاقة المظلمة ذات طبيعتي الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) ذو اللزوجة السائبة وجدنا حسن التلاؤم (best fit) والأرصاد لـ $H(z)/(1 - z)$ يوافق: $\chi^2_{min} \approx 16.04 - 16.05$ والذي يكافئ بالتقريب حوالي 96% على مستوى التلاؤم (confidence level) وذلك بعد تقييد المعاملات التالية كالآتي: $\Omega_{0DE} = 0.73$, $H_0 = 70Kms^{-1}Mpc^{-1}$, $\omega \approx -0.914$, $\lambda \approx 0.1$ و $\Omega_{0DE} = 0.73$, $H_0 = 71.15Kms^{-1}Mpc^{-1}$, $\omega \approx -1.02$ و $\lambda \approx 0.4$ لنموذجي الجوهرة (quintessence) والشبح (phantom) على التوالي. يمكننا ملاحظة أنَّ نتائجنا على توافق كبير مع بيانات $H(z)$ المرصدة.



الشكل 8.4: تطور $H(z)/(1+z)$ بدلالة الانزياح نحو الأحمر لتوضيح مقدار تناسب نموذجنا مع النتائج التجريبية الموجودة في المرجع [95] حيث الخط الأخضر المتقطع يعبر عن الجوهرة (quintessence) والأزرق المتقطع يعبر عن الشبح (phantom).

المحور الخامس

الدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة اللَّزجة في الكوسمولوجيا الكلاسيكية الكوانتية الحلقية

المحور الخامس

الدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية

سوف نقوم في هذا المحور بالدراسة الديناميكية لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية ولكن في هذه المرة سنأخذ اللزوجة بصياغة أعم على الشكل التالي:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \tag{5.1}$$

فبِإشتقاق المعادلة (4.34) وبِإستعمال المعاداتين (4.20) و (4.21) نتحصل على معادلة Raychaudhuri المعدلة التالية:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_{DM} + (1+\omega)\rho_{DE} - 3\zeta H)(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}) \tag{5.2}$$

لكي نقوم بتحليل السلوك الديناميكي لهذا النموذج سوف نقوم بِإقتراح المتغيرات الديناميكية التالية العديمة البعد:

$$x = \frac{\rho_{DE}}{3H^2}\,, \qquad y = \frac{1}{\frac{\zeta_0}{H} + 1}\,, z = \rho/\rho_c \tag{5.3}$$

بما أنَّ الحد ($\ddot{a}/\dot{a}$) الموجود في المعادلة (5.1) يمكننا كتابته على الشكل التالي:

$\left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}\right) = H + \dot{H}/H$ وبِاستعمال المعادلة (4.38) يمكننا كتابة عبارة معامل الزوجة كما يلي:

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{\frac{2\zeta_0}{H} + 2\zeta_1 - \left(\left(\frac{1-4z}{1-z}\right) + 3\omega x(1-2z)\right)\zeta_2}{2 - 3(1-2z)\zeta_2} \tag{5.4}$$

يمكن كتابة معاملي التباطؤ ومعادلة الحالة الفعال كما يلي:

$$q = \frac{3(1-2z) + \left[-2 + 3\left(\omega x - \frac{1}{y} + 1 - \zeta_1\right)(1-2z)\right](1-z)}{(1-z)[2 - 3(1-2z)\zeta_2]} \tag{5.5}$$

$$\omega_{eff} = \frac{(1-4z)\zeta_2 + 2\left(\omega x - \frac{1}{y} + 1 - \zeta_1\right)(1-z)}{2 - 3(1-2z)\zeta_2} \tag{5.6}$$

بِاستعمال المعادلات (4.20)، (4.21)، (4.37) و (4.38) نتحصل على المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا التالية:

$$x' = \frac{3(x(1-2z)-1)\left(2-2\zeta_1+\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)\zeta_2\right)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)y}\left(y + \frac{2\omega xy - 2}{\left(2-2\zeta_1+\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)\zeta_2\right)}\right) - \frac{3xz}{1-z} \tag{5.7}$$

$$y' = \frac{3(y-1)(1-2z)\left(1+(1-\zeta_1-\zeta_2)(1-z)\right)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)(1-z)}\left(y + \frac{(\omega xy - 1)(1-z)}{1+(1-\zeta_1-\zeta_2)(1-z)}\right) \tag{5.8}$$

$$z' = \frac{-3z-3(1-z)\left(2-2\zeta_1+\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)\zeta_2\right)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)y}\left(y + \frac{2\omega xy - 2}{\left(2-2\zeta_1+\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)\zeta_2\right)}\right) \tag{5.9}$$

بِاستعمال برنامج المابل (Maple) وبالتقيد بالشروط الفيزيائية ($0\leq x \leq 1,\ 0\leq y \leq 1,\ 0\leq z \leq 1$) سنتحصل على النقاط الحرجة التالية: $P_1\left(\frac{2\zeta_1-\zeta_2}{2\omega}, 1,0\right)$, $P_2(1,1,0)$ ، $P_3\left(1, \frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega}, 0\right)$ و

$P_4\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{1+\omega},1,\frac{-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega}{\zeta_1+\zeta_2}\right)$ فخواص إستقرارية هذه النقط يتوقف على إشارة وطبيعة القيم الذاتية لمصفوفة النظام جاكوبي J عند كل نقطة (x_c, y_c, z_c).

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{pmatrix}_{(x_c,y_c,z_c)}$$

خواص النقاط الحرجة المتحصل عليها تلخص في الجدول 1.5 والجدول 2.5 كما يلي:

النقاط الحرجة	الوجود	ω_{eff}	q
P_1	$2\omega \le 2\zeta_1-\zeta_2 \le 0$	0	½
P_2	دائما موجودة	$\frac{\zeta_2+2(\omega-\zeta_1)}{2-3\zeta_2}$	$\frac{1+3(\omega-\zeta_1)}{2-3\zeta_2}$
P_3	$\zeta_1+\zeta_2 \le 1+\omega$	-1	-1
P_4	غير موجودة	/	/

جدول 1.5: إستقرارية وقيم بعض المعاملات المتعلقة بالنقاط الحرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكسمولوجيا الكوانتية الحلقية

النقاط الحرجة	μ_1	μ_2	μ_3	الاستقرار
P_1	-3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3(-2\zeta_1+\zeta_2+2\omega)}{-2+3\zeta_2}$	نقطة سرج
P_2	$-\frac{6(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2}$	$\frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2}$	$-\frac{3(-2\zeta_1+\zeta_2+2\omega)}{-2+3\zeta_2}$	نقطة سرج
P_3	0	-3	$\frac{3(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)}{-2+3\zeta_2}$	مستقرة لما $\zeta_1+\zeta_2<1+\omega\ ,\zeta_2<2/3$ غير مستقرة لما $\zeta_1+\zeta_2<1+\omega\ ,\zeta_2>2/3$

جدول 2.5: القيم لذاتية لمصفوفة جاكوبي عند كل نقطة حرجة P_i لنموذج الطاقة المظلمة اللزجة في مرجع الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية.

من خلال الجدولين السابقين نلاحظ أن:

1- عند النقطة الحرجة P_1 : نلاحظ أنَّ معاملي التباطؤ ومعادلة الحالة الفعالة يأخذان القيم التالية: $q = 1/2$, $\omega_{eff} = 0$ على التوالي فالأول يوافق تمدد متباطئ للكون والثاني يدل على هيمنة المادة المظلمة على الكون. فهذه النقطة تكون موجودة لما $0 \leq 2\zeta_1 - \zeta_2 \leq 2\omega$ تأخذ القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي الخاصة بها القيم التالية: $\mu_1 = 3/2$ و $\mu_2 = -3$ $\mu_3 = \frac{3(-2\zeta_1+\zeta_2+2\omega)}{-2+3\zeta_2}$ نلاحظ أنَّ لها قيم مختلفة في الإشارة سواء في نموذج الشبح (phantom) أو الجوهرة (quintessence) وهذا ما يدل على أن هذا الحل ليس مستقر وهو متوافق والأرصاد وهذا شيىء منطقي لأن كوننا مر على هذه الحقبة في الماضي وهي حقبة مهمة جدا ومطلوبة لتشكل البنى الكونية الحالية.

2- بالنسبة للنقطة P_2 فهي توافق أما الحل الذي تكون فيه الطاقة المظلمة مهيمنة وغير لزجة وذلك عندما تكون $\zeta = 0$ أو الحل الذي تكون فيه المادة المظلمة مسيطرة وذات طبيعة لزجة وذلك لما $H \to \infty$. معاملي التباطؤ ومعادلة الحالة الفعال في هذه الحالة يأخذان القيم التالية: $q = \frac{1+3(\omega-\zeta_1)}{2-3\zeta_2}$, $\omega_{eff} = \frac{\zeta_2+2(\omega-\zeta_1)}{2-3\zeta_2}$ على التوالي وبالتالي فهذا الحل يوافق كون يتوسع بتسارع. القيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي عند هذه النقطة هي كالآتي:
$\mu_1 = -\frac{6(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2}$, $\mu_2 = \frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2}$ و $\mu_3 = -\frac{3(-2\zeta_1+\zeta_2+2\omega)}{-2+3\zeta_2}$. نلاحظ أنَّ هذه القيم مختلفة في الإشارة وبالتالي فهي توافق نقطة سرج أي أن التأثيرات الكوانيية تقوم بكسر إستقرارية النقطة P_2. إذن فان في حالة الشبح مشكلة الإنشقاق الكبير (Big Rip) لن تحدث في هذا السيناريو.

3- النقطة P_3 (الطاقة المظلمة تكون لزجة ومهيمنة على الكون) والتي تعتبر من نوع ديستر ($\omega_{eff} = -1$, q=-1) فهي موجودة من أجل $\zeta_1 + \zeta_2 \leq 1 + \omega$, فالقيم الذاتية لمصفوفة جاكوبي الموافقة لهذه النقطة هي كالآتي: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -3$ و $\mu_3 = \frac{3(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)}{-2+3\zeta_2}$ نلاحظ أنَّ واحد من هذه القيم معدوم والبقية موجبة و ذلك لما: $\zeta_2 > 2/3$, $\zeta_1 + \zeta_2 < 1 + \omega$ وبالتالي فهذه النقطة غير مستقرة. وتكون سالبة لما: $\zeta_1 + \zeta_2 < 1 + \omega, \zeta_2 < 2/3$ ففي هذه

الحالة لا يمكننا تحديد إستقرار هذه النقطة بالإِستعمال النظرية الخطية بدلا من ذلك فإننا سوف نستخدم نظرية المشعب المركزي لتحديد إستقرارها. بالإِعتماد على الملحق E نجد أنَّ هذه النقطة مستقرة.

4- النقطة P_4 هي نقطة غير فيزيائية.

من خلال المناقشة السابقة يمكننا القول أنَّ كوننا سوف ينتهي به المطاف إلى حقبة تهيمن فيها الطاقة المظلمة من نوع ديسترسواءا في نموذج الشبح (phantom) أو الجوهرة (quintessence).

المحور السادس

الخلاصة

المحور السادس

الخلاصة

في هذه الأطروحة قمنا بإقتراح نموذجين كونيين أدمجنا في كليهما كلا من التصحيحات الخاصة بالجاذبية الكوانتية الحلقية والطاقة المظلمة ذات اللزوجة السائبة معتمدين على نظرية الأنظمة الديناميكية بحيث قمنا بدراسة كلا من نموذجي الطاقة المظلمة من نوع الشبح (phantom) والجوهرة (quintessence) على حدا. فالفرق بين النموذجين يكمن في عبارة معامل لزوجة الطاقة المظلمة ففي الأول فرضناه ثابتا بينما في النموذج الثاني أخذناه بعبارته العامة فتحصلنا على النتائج التالية:

في النموذج الأول: وجدنا في مرجع الكوسمولوجيا الكلاسيكية عندما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الشبح $(\omega < -1)$ نقطتين حرجتين أحداهما تمثل حل غير مستقر للمادة المظلمة حيث تكون مهيمنة والأخرى توافق حل شاد للانشقاق الكبير بينما عندما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) $(-1 < \omega < 1)$ فإننا وجدنا ثلاث نقاط حرجة اثنان منهن غير مستقرة والأخرى مستقرة توافق حل ديستر (de-Sitter) تكون فيه الطاقة المظلمة مهيمنة. إذن يمكننا القول أنَّ اللُّزوجة السائبة لها تأثير فقط على الطاقة المظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) مما يؤدي إلى وجود حل مثير للاهتمام مستقر لزج جاذب في آخر الزمان من نوع ديستر. بينما بإضافة تأثير

الهندسة الكوانتية الحلقية فإنَّنا وجدنا نفس الحلول التي تحصلنا عليها في مرجع الكوسمولوجية الكلاسيكية (في ثلاث أبعاد) ولكن خواص إستقرار هذه الحلول تختلف تقريبا. حيث أنَّ الحل الذي يميز هيمنة المادة المظلمة كان غير مستقر في الحالة الكلاسيكية وظل غير مستقر (سرج) في الحالة الكوانتية الحلقية. في الواقع فانه من أجل الحل الذي تكون فيه الطاقة المظلمة من نوع شبح (phantom) مهيمنة فان تأثيرات الهندسية الكوانتية الحلقة تقوم بكسر إستقرار هذا الحل مما يترتب عليه إختفاء النقطة الشاذة التي قد تحدث في المستقبل (الإنشقاق الكبير) بينما عندما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) فإنَّ استقرار الحلول التي توافق طاقة مظلمة مهيمنة على الكون في المرجع كلاسيكي تكون نفسها في المرجع الكوانتيي الحلقي. إذن يمكننا القول أنَّنا لو أخذنا بعين الإعتبار اللزوجة السائبة ذات معامل ثابت وتأثيرات الهندسية الكوانتية في تطور الكون فإننا سنلاحظ من أجل نموذج الجوهرة (quintessence) أنَّ كوننا سيدخل في حقبة تكون فيها الطاقة المظلمة اللزجة من نوع ديستر هي المهيمنة بينما بالنسبة لنموذج الشبح فإنَّ كوننا سيدخل في نظام متذبذب (oscillatory regime) بحيث تختفي جميع النقاط الشاذة التي يمكن أن تعترضنا في بدايات أو أواخر الكون. وبالتالي فيمكننا إستنتاج أنَّه إذا أردنا التقصي حول ما نراه انطلاقا من الأرصاد الكونية ومحاولة تفسيره فإنَّه ليس من المجدي أخد بعين الاعتبار كلا من تأثرات الجاذية الكوانتية وتأثيرات اللزوجة ذات معامل ثابت معا. لإختبار نموذجنا قمنا أولا بتشكيل العبارة التحليلية لمعامل هابل بدلالة الانزياح نحو الأحمر وبعدها قارنا نتائجنا مع النتائج الأرصاد الحديثة فوجدنا تناسب بينهما بنسبة 96%.

في النموذج الثاني: وجدنا ثلاث نقاط شاذة: الأولى عبارة على نقطة سرج تكون فيها المادة المظلمة مهيمنة، الثانية عبارة عن حل تكون فيه الطاقة المظلمة ذات لزوجة معدومة هي المهيمنة بحيث هذه النقطة تكون سرج وبالتالي في حالة ما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الشبح فان مشكلة النقطة الشاذة المستقبلية (الانشقاق الكبير) تضمحل. أما النقطة الأخيرة فهي حل تكون فيه الطاقة المظلمة من نوع ديستر هي المهيمنة بحيث هذه الأخيرة تكون موجودة ومستقرة تحت شروط معينة. إذن فبالمقارنة مع النموذج السابق (أين يكون معامل لزوجة الطاقة المظلمة ثابت) من أجل حالة الشبح (phantom) نلاحظ أنَّ كوننا سيستقر في الأخير في حقبة تكون الطاقة المظلمة اللزجة من نوع ديستر هي المهيمنة بدل عن النظام المتذبذب.

الملحقات

الملحق A

كيفية ايجاد المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا للنظام الديناميكي ومعامل معادلة الحالة الفعال الخاصة بالحالة الكلاسيكية

إِيجاد المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا للنظام الديناميكي

لقد قمنا باختيار المتغيرات الديناميكية العديمة البعد التالية:

$$x = \frac{\rho_{DE}}{3H^2}, \qquad y = \frac{1}{\frac{\zeta}{H}+1} \tag{A.1}$$

فهدفنا يكمن في الوصول إلى نظام المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا التالي:

$$x' = f(x, y) \tag{A.2}$$

$$y' = g(x, y) \tag{A.3}$$

بحيث تدل الفتحة الموجودة في المعادلات السابقة على الاشتقاق بالنسبة إلى (the e-folding number) $N = \ln a$. لنبدأ الآن اشتقاق x بالنسبة الى N :

أولا يمكن كتابة:

$$\frac{dx}{dN} = \frac{dt}{dN}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_{DE}}{3H^2}\right) \qquad (A.4)$$

بحيث لدينا: $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{H}$. ومنه يكون لدينا:

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\dot{\rho}_{DE}}{3H^2} - 2x\frac{\dot{H}}{H^2} \qquad (A.5)$$

بتعويض المعادلة (4.22) في المعادلة (A.5) نجد:

$$\frac{dx}{dN} = -3(1+\omega)x - 2x\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{3\zeta}{H} \qquad (A.6)$$

الآن لنقوم بمحاولة كتابة $\frac{\dot{H}}{H^2}$ بدلالة المتغيرات الديناميكية x و y:

بقسمة المعادلة (*4.22*) على H^2 نجد:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\rho_{DM}}{3H^2} + (1+\omega)x - \frac{\zeta}{H}\right) \qquad (A.7)$$

انطلاقا من المعادلة (*4.18*) يمكننا كتابة:

$$\frac{\rho_{DM}}{3H^2} + x = 1 \qquad (A.8)$$

لدينا: $\frac{\zeta}{H} = \frac{1}{y} - 1$ وبتعويض المعادلة (A.8) في المعادلة (A.7) وبتعويض الناتج في المعادلة (A.6) نتحصل على أول معادلة من معادلات النظام الديناميكي:

$$x' = 3(x-1)\left(\omega x - \frac{1}{y} + 1\right) \qquad (A.9)$$

الآن سنقوم بتشكيل المعادلة المتبقية في النظام الديناميكي. بنفس الطريقة نقوم باشتقاق y بالنسبة إلى N بحيث يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\frac{\zeta}{H} + 1}\right) \qquad (A.10)$$

ومنه:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{\zeta}{H} \frac{1}{(\frac{\zeta}{H} + 1)^2} \frac{\dot{H}}{H^2} \tag{A.11}$$

علما أنَّ: $\frac{\zeta}{H} = \frac{1-y}{y}$ وبتعويض المعادلة (A.7) في المعادلة (A.10) نجد:

$$y' = \frac{3}{2} y\,(y - 1) \left(2 + \omega x - \frac{1}{y}\right) \tag{A.12}$$

إِيجاد معامل معادلة الحالة الفعال

لدينا:

$$\omega_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho} \tag{A.13}$$

بقسمة المعادلة (*4.18*) على المعادلة (*4.22*) طرفا لطرف نجد:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} (1 + \frac{P_{eff}}{\rho}) \tag{A.14}$$

ومنه:

$$\omega_{eff} = 1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \tag{A.15}$$

وبتعويض المعادلة (A.7) في المعادلة (A.15) نجد:

$$\omega_{eff} = 1 + \omega x - \frac{1}{y} \tag{A.16}$$

إِيجاد المعادلات التفاضلية المستقلة ذاتيا للنظام الديناميكي

لقد قمنا باختيار المتغيرات الديناميكية التالية:

$$x = \frac{\rho_{DE}}{3H^2}, \qquad y = \frac{1}{\frac{\zeta}{H} + 1}, \qquad z = \rho/\rho_c \tag{A.17}$$

والآن نحاول تشكيل النظام الديناميكي التالي:

$$x' = f(x, y, z) \tag{A.18}$$

$$y' = g(x, y, z) \tag{A.19}$$

$$z' = h(x, y, z) \tag{A.20}$$

نقوم باشتقاق x بالنسبة الى N فيكون لدينا:

$$\frac{dx}{dN} = -3(1+\omega)x - 2x\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{3\zeta}{H} \tag{A.21}$$

الآن لنقوم بمحاولة كتابة $\frac{\dot{H}}{H^2}$ بدلالة المتغيرات الديناميكية x , y و z. بقسمة المعادلة (15) على H^2 نجد:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\rho_{DM}}{3H^2} + (1+\omega)x - \frac{\zeta}{H}\right)(1-2z) \tag{A.22}$$

اِنطلاقا من المعادلة (14) يمكننا كتابة:

$$\frac{\rho_{DM}}{3H^2} + x = \frac{1}{1-z} \tag{A.23}$$

لدينا: $\frac{\zeta}{H} = \frac{1}{y} - 1$ وبتعويض المعادلة (A.23) في المعادلة (A.22) وبتعويض الناتج في المعادلة (A.21) نتحصل على أول معادلة من معادلات النظام الديناميكي المطلوبة:

$$x' = 3(x(1-2z)-1)\left(\omega x - \frac{1}{y} + 1\right) - \frac{3xz}{1-z} \tag{A.24}$$

نقوم بالبحث عن المعادلة التفاضلية $y' = g(x, y, z)$. بنفس الطريقة نقوم بإشتقاق y بالنسبة إلى N بحيث يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{\zeta}{H}\frac{1}{\left(\frac{\zeta}{H}+1\right)^2}\frac{\dot{H}}{H^2} \tag{A.25}$$

فعلما أنَّ: $\frac{\zeta}{H} = \frac{1-y}{y}$ وبتعويض المعادلة (A.22) في المعادلة (A.25) نجد:

$$y' = \frac{3}{2}\mathrm{y}(\mathrm{y}-1)\left(\frac{1}{1-z} + \omega x - \frac{1}{y} + 1\right)(1-2z) \qquad \text{(A.26)}$$

والآن سنقوم بالبحث عن المعادلة التفاضلية الأخيرة $\mathrm{h}(x,\mathrm{y},\mathrm{z}) = z'$. نقوم بإشتقاق y بالنسبة إلى N بحيث يكون لدينا:

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{H}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right) \qquad \text{(A.27)}$$

ومنه يكون لدينا:

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{H}\left(\frac{\dot{\rho}_{DM} + \dot{\rho}_{DE}}{\rho_c}\right) \qquad \text{(A.28)}$$

فبتعويض المعادلة (3) و (4) في المعادلة (A.28) نجد:

$$\frac{dz}{dN} = -3\left(z + \omega\frac{\rho_{DE}}{\rho_c} - \frac{3H\zeta}{\rho_c}\right) \qquad \text{(A.29)}$$

والآن يجب كتابة $\frac{\rho_{DE}}{\rho_c}$ و $-\frac{3\mathrm{H}\zeta}{\rho_c}$ بدلالة المتغيرات الديناميكية x , y و z

لدينا:

$$x.z = \frac{\rho_{DE}}{3\mathrm{H}^2}\frac{\rho}{\rho_c} \qquad \text{(A.30)}$$

وبتعويض المعادلة (14) في المعادلة *(A.30)* نجد:

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_c} = xz(1-z) \qquad \text{(A.31)}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$-\frac{3H\zeta}{\rho_c} = \frac{-3\mathrm{H}^2}{\rho_c}\frac{\zeta}{H} \qquad \text{(A.32)}$$

و منه:

$$-\frac{3H\zeta}{\rho_c} = \frac{-3\mathrm{H}^2}{\rho_{DE}}\frac{\rho_{DE}}{\rho_c}\ (-\frac{\zeta}{H}) \tag{A.33}$$

وبتعويض المعادلة (A.31) في المعادلة (A.33) نجد:

$$-\frac{3H\zeta}{\rho_c} = z(1-z)(1-\frac{1}{y}) \tag{A.34}$$

وفي الأخير بتعويض المعادلة (A.31) والمعادلة (A.34) في المعادلة (A.29) نجد:

$$z' = -3z - 3z(1-z)\ (\omega x - \frac{1}{y} + 1) \tag{A.35}$$

إيجاد معامل معادلة الحالة الفعال

لدينا:

$$\omega_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho} \tag{A.36}$$

بقسمة المعادلة (4.31) على المعادلة (4.22) طرفا لطرف نجد:

$$\frac{\dot{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}^2} = -\frac{3}{2}(1 + \frac{P_{eff}}{\rho}\ )(\frac{1-2z}{1-z}) \tag{A.37}$$

ومنه:

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}(\frac{1-z}{1-2z}) \tag{A.38}$$

وبتعويض المعادلة (A.22) في المعادلة (A.38) نجد:

$$\omega_{eff} = \left(\omega x - \frac{1}{y} + 1\right)(1-z) \tag{A.39}$$

الملحق B

تحديد إستقرار النقطة P_3 في حالة ما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) في مرجع الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية إعتمادا على نظرية المشعب المركزي

نقوم الآن بتطبيق نظرية المشعب المركزي لتحديد إستقرار النقطة P_3 عندما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) كما ذكرنا سابقا فهذه النظرية تقوم بتبسيط النظام الديناميكي وذلك عن طريق تقليص أبعاده. دعونا الأن نقوم بإسترجاع نظامنا الديناميكي:

$$x' = 3(\mathrm{x}\,(1-2\mathrm{z})-1)(\omega x-\frac{1}{y}+1) - \frac{3xz}{1-z} \tag{B.1}$$

$$y' = \frac{3}{2}\mathrm{y}(\mathrm{y}-1)\left(\frac{1}{1-z}+\omega x-\frac{1}{y}+1\right)(1-2z) \tag{B.2}$$

$$z' = -3z-3z(1-z)\,(\omega x-\frac{1}{y}+1) \tag{B.3}$$

لتطبيق النظرية المذكورة أعلاه يجب أولا القيام بتحويل المتغير لإحداثيات النقطة $P_3(1, \frac{1}{2+\omega}, 0)$ وذلك للحصول على نقطة توازن عند المركز. حيث نضع: $\bar{x} = x - 1$ و $\bar{y} = y - \frac{1}{2+\omega}$ في هذه الحالة و بعد القيام بنشر تايلور عند الرتبة 1 فان المعادلات: (B.1)-(B.3) تصبح كالآتي:

$$\bar{x}' = 3((\bar{x}-1)(1-2z)-1)(\omega\bar{x}-1+(2+\omega)^2\,\bar{y}) - 3z(1+\bar{x})(1+z) \qquad \text{(B-4)}$$

$$\bar{y}' = \frac{3}{2}(1-2z)\ (\bar{y}+\frac{1}{2+\omega}-1)(\bar{y}+\frac{1}{2+\omega})(\,z+\omega\bar{x}+(2+\omega)^2\bar{y}) \qquad \text{(B-5)}$$

و

$$z' = -3z\,(1+(1-z)(\omega\bar{x}-1+(2+\omega)^2\bar{y})\,) \qquad \text{(B. 6)}$$

فتكتب مصفوفة جاكوبي للنظام السابق كما يلي:

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -\frac{3\omega(1+\omega)}{2(2+\omega)^2} & -\frac{3}{2}(1+\omega) & -\frac{3\omega(1+\omega)}{2(2+\omega)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7)}$$

لتكن T المصفوفة العكسية بحيث أعمدتها تمثل الأشعة الذاتية للمصفوفة M.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1+\omega}{(2+\omega)^2} \\ -\frac{\omega(1+\omega)}{(-1+\omega)(2+\omega)^2} & 0 & \frac{\omega(1+\omega)}{(-1+\omega)(2+\omega)^2} \\ \frac{\omega(1+\omega)}{(-1+\omega)(2+\omega)^2} & 1 & \frac{-(1+\omega)}{(-1+\omega)(2+\omega)^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.8)}$$

كما ذكرنا سابقا فلتطبيق نظرية المشعب المركزي يجب علينا القيام بالتحويل التالي وذلك لإعادة كتابة النظام الديناميكي على الشكل القطري:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(B.9)}$$

بهذه الإحداثيات الجديدة يمكن كتابة نظامنا الديناميكي على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}(1+\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X,Y,Z) \\ G_1(X,Y,Z) \\ G_2(X,Y,Z) \end{pmatrix} \qquad \text{(B-10)}$$

بالمطابقة مع جملة المعادلات (3.13) يكون لدينا:

$$C = 0, \qquad P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}(1+\omega) \end{pmatrix} \qquad \text{(B.11)}$$

$$F(X,Y,Z) = -6\frac{(2+\omega)^2}{1+\omega}XY - 3(2+\omega)^2 XZ - 3\left(\frac{(2+\omega)^2}{1+\omega}\right)^2 X^3 + \mathcal{O}(X^4) \qquad \text{(B-12)}$$

$$G(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} G_1(X,Y,Z) \\ G_2(X,Y,Z) \end{pmatrix} \qquad \text{(B.13)}$$

حيث:

$$G_1(X,Y,Z) = \frac{-3\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)(-1+\omega)}X^2 + 6\frac{(2+\omega)^2}{1+\omega}Y^2 + 3(2+\omega)^2 YZ$$

$$+\frac{6\omega(2+\omega)^4}{(1+\omega)^2(-1+\omega)}X^3 + \mathcal{O}(X^4) \qquad \text{(B.14)}$$

$$G_2(X,Y,Z) = \frac{3\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)(-1+\omega)}X^2 - \frac{3(4+3\omega)(2+\omega)}{1+\omega}Y^2 - \frac{3}{2}\omega(2+\omega)Z^2 - \frac{3\omega(2+\omega)}{1+\omega}XY -$$

$$\frac{3}{2}\omega(2+\omega)XZ - \frac{3(2+\omega)(3\omega^2+9\omega+4)}{2(1+\omega)}YZ - \frac{3(2+\omega)^4}{(1+\omega)(-1+\omega)}X^3 + \mathcal{O}(X^4) \qquad \text{(B-15)}$$

الآن ليكن:

$$h = \begin{pmatrix} a_2X^2 + a_3X^3 \\ b_2X^2 + b_3X^3 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.16)}$$

بالتعويض في المعادلة (3.15) يكون لدينا:

$$\mathcal{N} =$$

$$\begin{pmatrix} -3\left(a_2 + \frac{\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)(-1+\omega)}\right)X^2 - 3\left(a_3 - \frac{2\omega(2+\omega)^4}{(1+\omega)^2(-1+\omega)}\right)X^3 + \mathcal{O}(X^4) \\ \frac{-3(1+\omega)}{2}\left(b_2 - \frac{2\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1+\omega)}\right)X^2 + \left(\frac{-3(1+\omega)}{2}b_3 - \frac{3\omega(2+\omega)}{1+\omega}a_2 - \frac{3}{2}\omega(2+\omega)b_2 - \frac{3(2+\omega)^4}{(1+\omega)(-1+\omega)}\right)X^3 + \mathcal{O}(X^4) \end{pmatrix}$$

$$= 0 \qquad \text{(B-17)}$$

بحل المعادلة السابقة بالنسبة ل a_2 , a_3 , b_2 و b_3 يكون لدينا:

$$\mathcal{O}(X^2): \qquad a_2 = \frac{-\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)(-1+\omega)} \qquad a_3 = \frac{2\omega(2+\omega)^4}{(1+\omega)^2(-1+\omega)} \tag{B.18}$$

$$\mathcal{O}(X^3): \qquad b_2 = \frac{2\omega(2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1+\omega)}, \qquad b_3 = \frac{4\omega(2+\omega)^4}{(1+\omega)^3(-1+\omega)} \tag{B.19}$$

إذن يعطى النظام الديناميكي للمعادلة (3.16) المقلصة بـ:

$$X' = -3(\frac{(2+\omega)^4}{1+\omega})^2 X^3 + \mathcal{O}(X^4) \tag{B.20}$$

بما أن معامل X^3 سالب فان النقطة P_3 مستقرة حسب نظرية المشعب المركزي.

الملحق C

إِيجاد المعادلة التفاضلية التي تصف معامل الكثافة الخاص بالطاقة المظلمة ذو اللزوجة السائبة ζ بدلالة الانزياح نحو الأحمر

ننطلق من معادلتي الحالة لكل من المادة والطاقة المظلمتين (4.20) و (4.21) على التوالي:

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = 0 \qquad \text{(C-1)}$$

و

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H((1+\omega)\rho_{DE} - 3\zeta H) = 0 \qquad \text{(C-2)}$$

من المعادلة (C.1) وعلما أن: $\frac{d}{dt} = aH\frac{d}{da}$ يمكننا كتابة:

$$\frac{d\rho_{DM}}{\rho_{DM}} = -3\frac{da}{a} \qquad \text{(C-3)}$$

وبحل المعادلة التفاضلية السابقة تحت الشروط الإبتدائية التالية: لما $a = a_0$ فان $\rho_{DM} = \rho_{0DM}$ نجد:

$$\rho_{DM} = \rho_{0DM}(\frac{a}{a_0})^{-3} \qquad \text{(C-4)}$$

والآن بجمع (C.1) و (C.2) نجد:

$$a\frac{d\rho}{da} + 3(1+\omega)\rho - 9\zeta H - 3\omega\rho_{0DM}(\frac{a}{a_0})^{-3} = 0 \qquad \text{(C-5)}$$

بتعويض المعادلة (4.31) في المعادلة السابقة وبكتابتها بدلالة المتغير التالي $\frac{a}{a_0}$ عديم الأبعاد نجد:

$$(\frac{a}{a_0})\frac{d\rho}{d(\frac{a}{a_0})} + 3(1+\omega)\rho - 9\zeta\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(1-\frac{\rho}{\rho_c})} - 3\omega\rho_{0DM}(\frac{a}{a_0})^{-3} = 0 \qquad \text{(C-6)}$$

بوضع: $\tilde{a} = \frac{a}{a_0}$ وعلما أن $\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$ وبالتالي: $d\tilde{a} = -\frac{1}{(1+z)^2}d$ فإنَّ المعادلة (C.6) تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{3(1+\omega)}{1+z}\rho + \frac{9\zeta}{1+z}\rho^{\frac{1}{2}} - \frac{9\zeta}{2\rho_c(1+z)}\rho^{\frac{3}{2}} + 3\omega\rho_{0DM}(1+z)^2 = 0 \qquad \text{(C-7)}$$

والآن بصياغة المعادلة (C.7) *بدلالة* معامل الكثافة الكلية $\Omega(z) = \frac{\rho}{\rho^0_{crit}}$ ذو اللزوجة السائبة نجد:

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} - \frac{3(1+\omega)}{1+z}\Omega(z) + \frac{9\zeta}{(1+z)\rho_0^{1/2}}\Omega(z)^{\frac{1}{2}} - \frac{9\zeta\rho_0^{1/2}}{2\rho_c(1+z)}\Omega(z)^{3/2} + 3\omega\frac{\rho_{0DM}}{\rho_0}(1+z)^2 = 0$$
(C.8)

بوضع:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \qquad \iota_c = \frac{\rho_0}{\rho_c}, \qquad \lambda = \frac{9\zeta}{{\rho^0_{crit}}^{1/2}}$$

وعلما أن $\Omega_{0DE} = 1 - \Omega_{0DM}$ يمكننا كتابة المعادلة كالآتي:

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} - \frac{3(1+\omega)}{1+z}\Omega(z) + \frac{\lambda}{1+z}\Omega^{\frac{1}{2}}(z) - \frac{\lambda\,\iota_c}{1+z}\Omega^{\frac{3}{2}}(z) + 3\omega(1-\Omega_{0DE})(1+z)^2 = 0 \qquad \text{(C.9)}$$

الملحق D

كيفية إيجاد العبارة: $\frac{\zeta}{H} = \frac{\frac{2\zeta_0}{H}+2\zeta_1-[\left(\frac{1-4z}{1-z}\right)+3\omega x(1-2z)]\zeta_2}{2-3(1-2z)\zeta_2}$

سننطلق من عبارة معامل اللزوجة بصيغته العامة التالية:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H + \zeta_2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \tag{D-1}$$

نقوم بقسمة الطرفين على H فنتحصل على مايلي:

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{\zeta_0}{H} + \zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\zeta_2 \tag{D-2}$$

بحيث لدينا:

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \tag{D-3}$$

نقوم الآن بتعويض عبارة $\frac{\dot{H}}{H^2}$ المعرفة عن طريق المعادلة (4.38) في المعادلة (D.2) نجد:

$$(1 - \frac{3}{2}(1-2z)\zeta_2)\frac{\zeta}{H} = \frac{\zeta_0}{H} + \zeta_1 + (1 - \frac{3}{2}\omega x(1-2z) - \frac{3(1-2z)}{2(1-z)})\zeta_2 \tag{D-4}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{\frac{2\zeta_0}{H} + 2\zeta_1 - [\left(\frac{1-4z}{1-z}\right) + 3\omega x(1-2z)]\zeta_2}{2 - 3(1-2z)\zeta_2} \qquad \text{(D-5)}$$

الملحق E

تحديد إستقرار النقطة P_3 في حالة ما تكون لدينا الطاقة الظلماء من نوع الجوهرة (quintessence) في مرجع الكوسمولوجيا الكوانتية الحلقية إعتمادا على نظرية المشعب المركزي

نقوم الآن بتطبيق نظرية المشعب المركزي لتحديد إستقرار النقطة P_3 عندما تكون لدينا طاقة مظلمة من نوع الجوهرة (quintessence). دعونا الآن نقوم بإسترجاع نظامنا الديناميكي:

$$x' = \frac{6(x\,(1-2z)-1)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)}\left(\omega x + 1 - \frac{1}{y} - \zeta_1 + \frac{1-4z}{2(1-z)}\zeta_2\right) - \frac{3xz}{1-z} \qquad (E.1)$$

$$y' = \frac{3(y-1)(1-2z)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)(1-z)}\Big(\big(1+(1-\zeta_1-\zeta_2)(1-z)\big)y + (\omega xy - 1)(1-z)\Big) \qquad (E.2)$$

و

$$z' = -3z - \frac{6z(1-z)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)}\left(\omega x + 1 - \frac{1}{y} - \zeta_1 + \frac{1-4z}{2(1-z)}\zeta_2\right) \qquad (E.3)$$

لتطبيق النظرية المذكورة أعلاه يجب أولا القيام بتحويل المتغير لإحداثيات النقطة $P_3(1\,,\frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega}\,,0)$ وذلك للحصول على نقطة توازن عند المركز. حيث نضع $\bar{x} = x - 1$ و $\bar{y} = y - \frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega}$ في هذه الحالة و بعد القيام بنشر تايلور عند الرتبة 1 فإنَّ المعادلات (E.1)- (E.3) تصبح كالآتي:

$$\bar{x}' = \frac{6((\bar{x}-1)(1-2z)-1)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)}\Big(\omega\bar{x} - 1 + \zeta_2 + (2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2\bar{y} + \frac{(1-4z)(1+z)}{2}\zeta_2\Big) - 3z(1+\bar{x})(1+z) \tag{E.4}$$

$$\bar{y}' = \frac{3(\bar{y}+\frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega}-1)(1-2z)(1+z)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)}\begin{pmatrix} (1+(1-\zeta_1-\zeta_2)(1-z))\left(\bar{y}+\frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega}\right) \\ +(\omega x(\bar{y}+\frac{1}{2-\zeta_1-\zeta_2+\omega})-1)(1-z) \end{pmatrix}$$

(E-5)

و

$$z' = -3z - \frac{6z(1-z)}{(2-3(1-2z)\zeta_2)}\begin{pmatrix} \omega\bar{x} - 1 + \zeta_2 + (2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2\bar{y} \\ +\frac{(1-4z)(1+z)}{2}\zeta_2 \end{pmatrix} \tag{E-6}$$

فتكتب مصفوفة جاكوبي للنظام السابق كما يلي:

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -\frac{3\omega(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{(-2+3\zeta_2)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} & -\frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2} & -\frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{(-2+3\zeta_2)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(E-7)

لتكن T المصفوفة العكسية بحيث أعمدتها تمثل الأشعة الذاتية للمصفوفة M

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1+\omega}{(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} \\ -\frac{\omega(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{(1+\zeta_1-2\zeta_2-\omega)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} & 0 & \frac{\omega(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{(1+\zeta_1-2\zeta_2-\omega)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} \\ \frac{\omega(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{(1+\zeta_1-2\zeta_2-\omega)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} & 1 & \frac{1+\zeta_1+\omega-\zeta_2(2+3\omega)}{(1+\zeta_1-2\zeta_2-\omega)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2} \end{pmatrix}$$

(E-8)

كما ذكرنا سابقا فلتطبيق نظرية المشعب المركزي يجب علينا القيام بالتحويل التالي وذلك لإعادة كتابة النظام الديناميكي على الشكل القطري:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ z \end{pmatrix} \tag{E-9}$$

بهذه الإحداثيات الجديدة يمكن كتابة نظامنا الديناميكى على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X,Y,Z) \\ G_1(X,Y,Z) \\ G_2(X,Y,Z) \end{pmatrix} \tag{E-10}$$

بالمطابقة مع جملة المعادلات (3.13) يكون لدينا:

$$C = 0, \qquad P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}{-2+3\zeta_2} \end{pmatrix} \tag{E-11}$$

$$F(X,Y,Z) = -3\frac{(-8\zeta_2+4+39{\zeta_2}^2)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^4}{(1+\omega)^2(-2+3\zeta_2)}X^3 - \frac{6(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2X\left(a_2X^2+a_3X^3\right)}{1-\zeta_1-\zeta_2+\omega} + \frac{6(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2ZX}{-2+3\zeta_2} + \mathcal{O}(X^4) \tag{E-12}$$

$$G(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} G_1(X,Y,Z) \\ G_2(X,Y,Z) \end{pmatrix} \tag{E-13}$$

حيث:

$$\begin{aligned} G_1(X,Y,Z) = {} & \frac{-3\omega(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)}X^2 \\ & + \frac{6\omega(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^4}{(1+\omega)^3(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)}X^3 + \mathcal{O}(X^4) \end{aligned} \tag{E-14}$$

$$\begin{aligned} & G_2(X,Y,Z) = \\ & \frac{3(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)\left(3{\zeta_2}^2\omega+{\zeta_2}^2-9\zeta_2\omega+3\omega\zeta_1\zeta_2-3\omega^2\zeta_2-5\zeta_1\zeta_2-2\zeta_2+10\zeta_1-4{\zeta_1}^2+6\omega\zeta_1-2\omega-2\omega^2\right)}{(-2+3\zeta_2)^2(1+\omega)}ZX + \\ & \frac{3(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(3{\zeta_2}^2\omega-{\zeta_2}^2-9\zeta_2\omega+3\omega\zeta_1\zeta_2-3\omega^2\zeta_2-5\zeta_1\zeta_2-2\zeta_2+10\zeta_1-4{\zeta_1}^2+6\omega\zeta_1-2\omega-2\omega^2)}{(1+\omega)(-2+3\zeta_2)(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}XY - \\ & \frac{6\left(4+2\zeta_1-22\zeta_2+8\omega^2+2\omega^3-41\zeta_1{\zeta_2}^2\omega-21\zeta_1{\zeta_2}^2\omega^2+24{\zeta_1}^2\omega{\zeta_2}^2+30\omega{\zeta_2}^3\zeta_1\right)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^3}{\left((1+\omega)\right)^3(-2+3\zeta_2)^2(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)}X^3 + \\ & \frac{3(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^2(30{\zeta_2}^3-11{\zeta_2}^2-15{\zeta_2}^2\zeta_1-2\zeta_1\zeta_2-2\zeta_2+6{\zeta_2}^2\omega-4\omega+14\omega\zeta_2)(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)}{\left((1+\omega)\right)^2(-2+3\zeta_2)^2(-1+\zeta_1+\zeta_2-\omega)} + \\ & \mathcal{O}(X^4) \end{aligned} \tag{E-15}$$

الآن ليكن:

$$h = \begin{pmatrix} a_2X^2 + a_3X^3 \\ b_2X^2 + b_3X^3 \end{pmatrix} \tag{E-16}$$

بالتعويض في المعادلة (3.15) يكون لدينا:

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{E-17}$$

حيث:

$$\mathcal{N}_1 = \left(-3a_2 - \frac{3\omega(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)}\right)X^2 + \left(-3a_3 + \frac{6\omega(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^4}{(1+\omega)^3(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)}\right)X^3$$

(E-18)

بحل المعادلة السابقة بالنسبة لـ a_2 و b_2 يكون لدينا:

$$\mathcal{O}(X^2): \quad a_2 = \frac{-\omega(1-\zeta_1-\zeta_2+\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)} \tag{E-19}$$

$$\mathcal{O}(X^3): \quad b_2 = \frac{(30{\zeta_2}^3-11{\zeta_2}^2-15{\zeta_2}^2\zeta_1-2\zeta_1\zeta_2-2\zeta_2+6{\zeta_2}^2\omega-4\omega+14\zeta_2\omega)(2-\zeta_1-\zeta_2+\omega)^2}{(1+\omega)^2(-1-\zeta_1+2\zeta_2+\omega)(-2+3\zeta_2)} \tag{E-20}$$

إذن يعطى النظام الديناميكي للمعادلة (3.16) المقلَّصة بـ:

$$X' = -6\frac{(-5\zeta_2+2+12{\zeta_2}^2)(-2+\zeta_1+\zeta_2-\omega)^4}{(1+\omega)^2(-2+3\zeta_2)^2}X^3 + \mathcal{O}(X^4) \tag{E-21}$$

بما أن إشارة $-5\zeta_2 + 2 + 12{\zeta_2}^2$ سالبة فان النقطة P_3 مستقرة حسب نظرية المشعب المركزي.

الملحق F

المنشورات

1. D. Aberkane, N. Mebarki, S. Benchikh, Viscous Modifed Chaplygin Gas in Classical and Loop Quantum Cosmology, CHIN. PHYS. LETT. Vol. 34, No. 6 (2017) 069801.

2. S. Benchikh, N. Mebarki, D. Aberkane, Dynamical Study of a Constant Viscous Dark Energy Model in Classical and Loop Quantum Cosmology, CHIN. PHYS. LETT. Vol. 33, No. 5 (2016) 059501.

3. N. Mebarki and S. Benchikh, Loop quantum effects on a viscous dark energy cosmological model, Proceedings of Sciences PoS FFP14, 2 (2014).

CHIN. PHYS. LETT. Vol. 34, No. 6 (2017) 069801

Viscous Modified Chaplygin Gas in Classical and Loop Quantum Cosmology *

D. Aberkane**, N. Mebarki, S. Benchikh

Laboratoire de Physique Mathematique et Subatomique, Mentouri University, Constantine 25000, Algeria

(Received 25 January 2017)

We investigate the cosmological model of viscous modified Chaplygin gas (VMCG) in classical and loop quantum cosmology (LQC). Firstly, we constrain its equation of state parameters in the framework of standard cosmology from Union 2.1 SNe Ia data. Then, we probe the dynamical stability of this model in a universe filled with VMCG and baryonic fluid in LQC background. It is found that the model is very suitable with ($\chi^{2/d.o.f} = 0.974$) and gives a good prediction of the current values of the deceleration parameter $q_0 =\in (-0.60, -0.57)$ and the effective state parameter $\omega_{\rm eff} \in (-0.76, -0.74)$ that is consistent with the recent observational data. The model can also predict the time crossing when ($\rho_{\rm DE} \approx \rho_{\rm matter}$) at $z = 0.75$ and can solve the coincidence problem. In LQC background, the Big Bang singularity found in classical cosmology ceases to exist and is replaced by a bounce when the Hubble parameter vanishes at $\rho_{\rm tot} \approx \rho_{\rm c}$.

PACS: 98.80.−k, 95.36.+x, 98.80.Qc DOI: 10.1088/0256-307X/34/6/069801

Recently, Type Ia Supernovae observational data[1−3] with cosmic microwave background anisotropies[4−6] and large galaxy surveys[7,8] have shown that the universe is undergoing an accelerated expansion phase. The existence of an exotic kind of energy, called dark energy, with negative pressure that drives the universe to expand was proposed along with several models describing its nature and dynamical behavior.[9,10] Brief reviews of all the models are summarized in Refs. [11,12]. The modified Chaplygin gas (MCG) is considered as a dark energy candidate with the equation of state (EoS) as follows:

$$p = A\rho - \frac{B}{\rho^{\alpha}}, \tag{1}$$

where A, B and α are the EoS parameters. It is a combined model that unifies both dark energy and dark matter and gives a suitable negative pressure that drives the acceleration of the universe. The MCG was also found to be consistent with the evolution of the universe over a wide range of epochs[13] and it is preferred by recent observational data because of its small minimum χ^2 value.[14] Its EoS parameters were constrained using different observational data.[15−17] Similarly, viscous modified Chaplygin gas (VMCG) with the generalized EoS

$$p = A\rho - \frac{B}{\rho^{\alpha}} - (D-1)H\xi_0\rho^{\nu} \tag{2}$$

was investigated in Ref. [18], as it is possible to assume that the expansion process is a collection of states out of thermal equilibrium that gives rise to bulk viscosity. A variety of bulk cosmological models have been explored by several researchers.[19−29] In this Letter, we consider a VMCG with the bulk viscous pressure

$$P = -3\xi_0 H\rho_{\rm mcg}^{1/2}. \tag{3}$$

We constrain its EoS parameters using SCP Union 2.1 data set,[30] and then we study its dynamical behavior when coupled to baryonic matter in the framework of loop quantum cosmology (LQC),[31−34] which is a non-perturbative and background-independent type of quantization of gravity[35,36] used to probe some cosmological problems. In addition to predicting an inflationary phase of the early universe[37−40] and late time cosmic acceleration,[41] LQC is proved to be very successful in avoiding Big Bang and Big Rip singularities[42] and the semi-classical approximation in LQC formalism can be validly used at late time and at large scale.[43]

The EoS of the VMCG is given by

$$P_{\rm eff} = A\rho_{\rm mcg} - \frac{B}{\rho_{\rm mcg}^{\alpha}} - 3\xi_0 H\rho_{\rm mcg}^{1/2}, \tag{4}$$

where $\rho_{\rm mcg}$ is the energy density of MCG, A and B are constants, α is a positive constant, ξ_0 a positive bulk viscosity coefficient, and $H = \frac{\dot{a}}{a}$ is the Hubble expansion parameter. The dot stands for the cosmic time derivative.

We consider a flat Friedmann–Robertson–Walker (FRW) universe filled with VMCG, the conservation equation and the Friedmann equation are given by

$$\dot{\rho}_{\rm mcg} + 3H(\rho_{\rm mcg} + P_{\rm eff}) = 0, \tag{5}$$

$$H^2 = \frac{\rho_{\rm mcg}}{3}. \tag{6}$$

Using Eqs. (4)–(6) we obtain the energy density of VMCG in terms of the scale factor a,

$$\rho_{\rm mcg} = \Big(\frac{K}{a^{3(\alpha+1)(1+A-\sqrt{3}\xi_0)}} + \frac{B}{1+A-\sqrt{3}\xi_0}\Big)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{7}$$

where K is an integration constant. The dynamical stability of Eq. (5) depends on its equilibria and their stability. Using the field Eq. (6) we obtain the equilibria point $\rho_{\rm mcg} = (\frac{B}{1+A-\sqrt{3}\xi_0})^{\frac{1}{1+\alpha}}$, which will only be stable if ($\alpha > -1, 1 + A - \sqrt{3}\xi_0 > 0$). This result indicates that at large scale ($a \longrightarrow \infty$) the energy density is only stable for a positive choice of B and ($\alpha > -1, 1 + A - \sqrt{3}\xi_0 > 0$) and is given by

$$\rho_{\rm mcg} = \Big(\frac{B}{1+A-\sqrt{3}\xi_0}\Big)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{8}$$

*Supported by the Algerian Ministry of Education and Research and DGRSDT.
**Corresponding author. Email: aberkanedallal@yahoo.com

The deceleration parameter is defined by

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{9}$$

From Eqs. (5) and (6) the deceleration parameter can be written as

$$q = -1 + \frac{1}{2}\Big[(1 + A - \sqrt{3}\xi_0) - \frac{B}{\rho_{\rm mcg}^{\alpha+1}}\Big]. \tag{10}$$

The state parameter of the MCG in the presence of bulk viscosity is given by

$$\omega = \frac{p_{\rm mcg}}{\rho_{\rm mcg}} = A - \frac{B}{\rho^{\alpha+1}}. \tag{11}$$

The effective state parameter and the adiabatic sound speed for VMCG are given by

$$\omega_{\rm eff} = \frac{P_{\rm eff}}{\rho_{\rm mcg}} = A - \sqrt{3}\xi_0 - \frac{B}{\rho^{\alpha+1}}, \tag{12}$$

$$c^2 = \frac{\delta P_{\rm eff}}{\delta \rho_{\rm mcg}} = \frac{\dot{P}_{\rm eff}}{\dot{\rho}_{\rm mcg}} = A - \sqrt{3}\xi_0 + \alpha\frac{B}{\rho^{\alpha+1}}, \tag{13}$$

where a small non-negative sound speed ($c^2 \leq 1$) for matter component is necessary for forming the large scale structure of the universe.

At large scale the values of deceleration parameter, state parameter, effective state parameter and the adiabatic sound speed are

$$q = -1,\ \omega = -1 + \sqrt{3}\xi_0,\ \omega_{\rm eff} = -1$$
$$c^2 = (\alpha + 1)(A - \sqrt{3}\xi_0) + \alpha. \tag{14}$$

In the presence of a baryonic matter with $\Omega_{\rm mcg} = \frac{\rho_{\rm mcg}}{3H_0^2}$ and $a = \frac{1}{1+z}$, the conservation Eq. (5) can be written as

$$(1+z)\frac{d\Omega_{\rm mcg}(z)}{dz} = 3((A+1)\Omega_{\rm mcg}(z) - \grave{B}\Omega_{\rm mcg}^{-\alpha}(z)$$
$$- \sqrt{3}\xi_0\Omega_{\rm mcg}^{1/2}(z)\sqrt{\Omega_{\rm 0m}(1+z)^3 + \Omega_{\rm mcg}(z)}), \tag{15}$$

where $\Omega_{\rm 0m}$ is the present value of the baryonic matter density, z is the redshift parameter, H_0 is the present Hubble parameter, and $\grave{B} = B/(3H_0^2)^{\alpha+1}$. The Hubble parameter in terms of redshift parameter z is given by

$$H(z) = H_0[\Omega_{\rm 0m}(1+z)^3 + \Omega_{\rm mcg}(z)]^{1/2}. \tag{16}$$

We constrain the EoS parameters of the VMCG model $(H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)$ using Supernovae Type Ia observational data that consists of 580 data points and belongs to Union 2.1 (2012) data. The best fit values of the parameters are obtained by the minimization of the χ^2 function.

The luminosity distance $d_{\rm L}$ and the distance modulus for Supernovas are given by

$$d_{\rm L}(z, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)$$
$$= (1+z)H_0\int_0^z \frac{d\grave{z}}{H(\grave{z}, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)}, \tag{17}$$

$$\mu(z, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)$$
$$= 5\log_{10}\Big[\frac{d_{\rm L}(z, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)}{1MPc}\Big] + 25. \tag{18}$$

The χ-square function measures the goodness-of-fit of the model to the data and is defined as

$$\chi^2(H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0) = \sum[(\mu(z, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)$$
$$- \mu_{\rm obs}(z, H_0, A, \grave{B}, \alpha, \xi_0))^2]/\sigma_z^2, \tag{19}$$

where $\mu_{\rm obs}(z)$ is the observed distance modulus at redshift z, and σ_z^2 is the variance of the measurement.

To reduce the number of free parameters we marginalize assuming a constant prior over H_0 by constructing a probability density function for the parameters $(A, \grave{B}, \alpha, \xi_0)$

$$P(A, \grave{B}, \alpha, \xi_0) = \int cte \cdot \exp(-\chi^2/2) \cdot P(H_0)dH_0$$
$$= cte \cdot \exp(-\bar{\chi}^2/2), \tag{20}$$

where $\bar{\chi}^2$ is the new χ^2 function free from H_0, and $P(H_0)$ is the prior probability density function of the present Hubble constant H_0.

As the number of free parameters is still large, we first fix the viscous coefficient that is assumed to be positive, and then we constrain the EoS parameters $(A, \grave{B}, \alpha)$. We find that only small values of ξ_0 corresponding to $\omega \approx -1$ are consistent with the observational data. The best fit values of the EoS parameters are listed in Table 1, where $\grave{B}$ and α have approximately the same values for different choices of ξ_0. The contour plot of the confidence levels 68.27%, 90% and 95.45% for both $(A, \grave{B})$ are shown in Fig. 8.

The deceleration parameter, the effective state parameter and the adiabatic sound speed are given in terms of the redshift parameter (z) by

$$q(z) = -1 + \frac{1}{2}\Big[3 + \frac{\omega_{\rm eff}(z)\rho_{\rm mcg}(z)}{H^2(z)}\Big], \tag{21}$$

$$c^2(z) = A - \frac{3}{2}\xi_0\frac{H(z)}{\sqrt{\rho_{\rm mcg}(z)}}$$
$$- \frac{1}{2}\xi_0\frac{\sqrt{\rho_{\rm mcg}(z)}}{H(z)} + \alpha\frac{B}{\rho_{\rm mcg}^{\alpha+1}(z)}, \tag{22}$$

$$\omega_{\rm eff}(z) = \frac{P_{\rm eff}}{\rho_{\rm mcg}} = A - 3\xi_0\frac{H(z)}{\sqrt{\rho_{\rm mcg}(z)}} - \frac{B}{\rho_{\rm mcg}^{\alpha+1}(z)}. \tag{23}$$

In Fig. 1, the sound speed is plotted in terms of redshift parameter z using the best fit data listed in Table 1. In the early universe, the sound speed has negative values introducing fast exponential growth of instabilities that can be explained by the fact that VMCG is an effective coupled dark energy/dark matter fluid, and in such models instabilities can occur when the coupling strength is strong compared with the gravitational strength.[44] Moreover, when the coupling becomes moderate in the transition from a matter dominated universe to a dark energy dominated universe, the sound speed c^2 changes the sign to take positive values and the perturbations grow much slower until the universe is dominated by dark energy. At large scale, the sound speed takes a positive value near zero leading to stable oscillating perturbations and structure predictions consistent with observations.

Figures 2 and 3 show respectively the variation of the effective state parameter and the deceleration parameter with redshift z at the best fit values of Table 1. It is obvious that the current value of $\omega_{\rm eff}$ varies between -0.76 and -0.74 for different values of ξ_0 admitting an accelerated universe. At matter dominated era, $\omega_{\rm eff}$ takes values of the range $\omega_{\rm eff} > -1/3$ permitting a deceleration phase. When the deceleration parameter crosses the zero to negative values, $\omega_{\rm eff}$ takes values less than -0.33 and the VMCG behaves like quintessence scalar field.

Table 1. Summary of the best estimates of the EoS parameters for the VMCG and their 1σ error using Union 2.1 SNe Ia data, and $d.o.f$ denotes the degrees of freedom.

EoS parameter	ξ_0	α	A	B	$\bar{\chi}^2$	$\bar{\chi}^2/d.o.f$
Best	0.01	$0.551^{+0.283}_{-0.218}$	$-0.167^{+0.175}_{-0.191}$	$0.543^{+0.214}_{-0.232}$	562.191	0.974
Fit	0.02	$0.548^{+0.285}_{-0.219}$	$-0.149^{+0.182}_{-0.188}$	$0.543^{+0.215}_{-0.232}$	562.191	0.974
Values	0.0001	$0.549^{+0.283}_{-0.218}$	$-0.186^{+0.168}_{-0.199}$	$0.543^{+0.214}_{-0.232}$	562.191	0.974

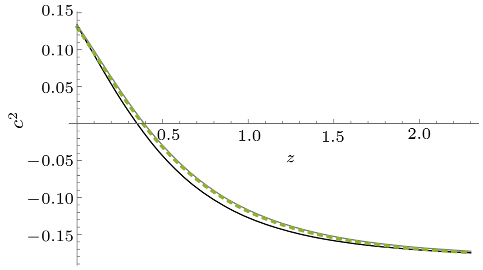


Fig. 1. The sound speed c^2 as a function of the redshift z at best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ (gray line), $\xi_0 = 0.02$ (black line) and $\xi_0 = 0.0001$ (dashed line).

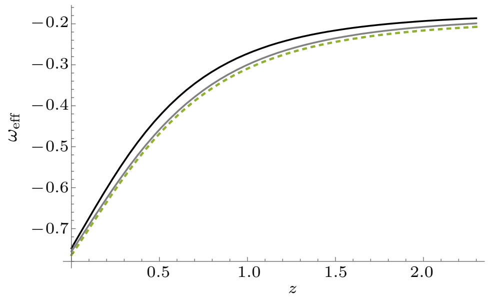


Fig. 2. The evolution of the effective state parameter $\omega_{\rm eff}$ at best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ (gray line), $\xi_0 = 0.02$ (black line) and $\xi_0 = 0.0001$ (dashed line).

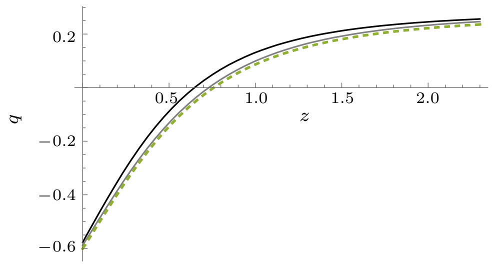


Fig. 3. The variation of the deceleration parameter q at best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ (gray line), $\xi_0 = 0.02$ (black line) and $\xi_0 = 0.0001$ (dashed line).

In Fig. 3, for all best values of Table 1, the current deceleration parameter varies between -0.60 and -0.57, which is consistent with $q_0 \in (-0.7, -0.4)$ given by the standard Λ-CDM cosmology.[16] Moreover, a transition from decelerated $q < 1/2$ to accelerated $q < 0$ universe is realized when q crosses the zero, and thus the universe passes from matter-dominated universe to dark-energy-dominated universe where ($\rho_{\rm DE} \approx \rho_{\rm matter}$) and undergoes an accelerated phase. The crossing happened at approximately $z = 0.75$ for both $\xi_0 = 0.01$ and $\xi_0 = 0.0001$ and at $z = 0.65$ for $\xi_0 = 0.02$.

To probe the behavior of the model in the early universe, where $a \longrightarrow 0$, we calculate the curvature scalar R in a flat universe, defined by

$$R = 6\Big(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\Big), \tag{24}$$

where the dot stands for the derivative with respect to the cosmic time and $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$. The curvature scalar can then be written as

$$R = 3\Big(H^2 - A\rho_{\rm mcg} + \frac{B}{\rho^{\alpha}_{\rm mcg}} + 3\xi_0 H \rho^{1/2}_{\rm mcg}\Big). \tag{25}$$

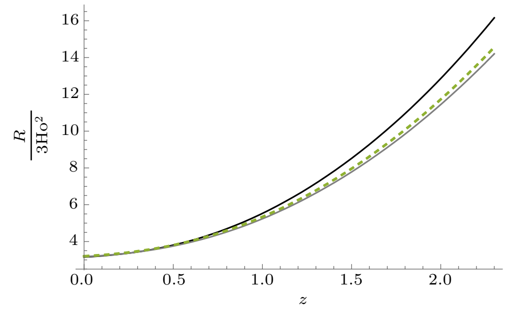


Fig. 4. The evolution of the curvature scalar at best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ (gray line), $\xi_0 = 0.02$ (black line) and $\xi_0 = 0.0001$ (dashed line).

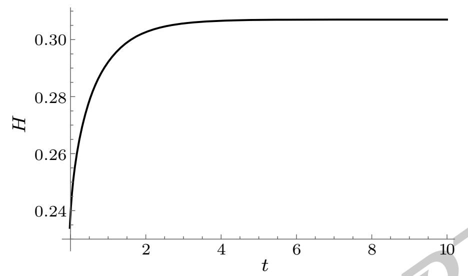


Fig. 5. The evolution of H with time. Parameters are set at the best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ with $H_0 = 0.24$, $\rho_{\rm c} = 1.5$, $\rho_{\rm mcg0} = 0.01$ and $\rho_{\rm m0} = 0.0005$.

In Fig. 4, the curvature scalar evolution is plotted in terms of redshift parameter z at the best values of Table 1. At $a \longrightarrow 0$, $R \longrightarrow \infty$, which indicates the presence of Big Bang singularity.

In the LQC framework, the modified flat Friedmann equation[45] is given by

$$H^2 = \frac{\rho}{3}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_{\rm c}}\Big), \tag{26}$$

where ρ is the total energy density, $\rho_c = \frac{\sqrt{3})}{16\pi^2\gamma^3 G^2 h}$ is the critical density in LQG, and γ is the dimensionless Barbero–Immirzi parameter. The quantum correction is negligible when $\rho \ll \rho_c \sim \rho_{Pl}$, but it dominates dynamics when $\rho \sim \rho_c$. We assume a universe filled with VMCG and baryonic matter, thus the conservation equations can be written as

$$\dot{\rho}_{\rm mcg} + 3H(\rho_{\rm mcg} + P_{\rm eff}) = 0, \tag{27}$$
$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \tag{28}$$

We introduce the following dimensionless variables

$$x = \frac{\rho_{\rm mcg}}{3H^2},\ y = \frac{p_{\rm mcg}}{3H^2},\ z = \frac{\rho}{\rho_c}, \tag{29}$$

where the phase space is bounded by $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$ and a negative y (a negative pressure is needed to generate accelerated expansion). The modified Friedmann equation and the effective state parameter can be expressed in term of the dimensionless variables as

$$\Big(x + \frac{\rho_m}{3H^2}\Big)(1 - z) = 1, \tag{30}$$
$$\omega_{\rm eff} = \frac{y}{x} - \sqrt{3}\xi_0 x^{-1/2}. \tag{31}$$

From Eqs. (26) and (29) we obtain

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\Big(y - \sqrt{3}\xi_0 x^{1/2} + \frac{1}{1-z}\Big)(1 - 2z). \tag{32}$$

From Eqs. (27)–(30) and (32) we can write the autonomous system as

$$\begin{aligned}
\acute{x} =& 3(x(1-2z) - 1)(y - \sqrt{3}\xi_0 x^{1/2}) - 3x\Big(\frac{z}{1-z}\Big)\\
\acute{y} =& -3(A(\alpha+1)x - \alpha y) - 3\Big(A(1+\alpha)\\
&- y\Big(1 - 2z + \frac{\alpha}{x}\Big)\Big)(y - \sqrt{3}\xi_0 x^{1/2})\\
&+ 3y\Big(\frac{1-2z}{1-z}\Big)\\
\acute{z} =& -3z - 3z(1-z)(y - \sqrt{3}\xi_0 x^{1/2}),
\end{aligned} \tag{33}$$

where the prime denotes the derivative with respect to the e-folding number $N = \ln a$. This autonomous system does not depend on the EoS parameter B, and its critical points (x_c, y_c, z_c) are found numerically at the best values of Table 1. Their properties are determined by the sign and nature of the eigenvalues $\nu_i (i = 1, 3)$ of the Jacobi matrix J,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial\acute{x}}{\partial x} & \frac{\partial\acute{x}}{\partial y} & \frac{\partial\acute{x}}{\partial z}\\ \frac{\partial\acute{y}}{\partial x} & \frac{\partial\acute{y}}{\partial y} & \frac{\partial\acute{y}}{\partial z}\\ \frac{\partial\acute{z}}{\partial x} & \frac{\partial\acute{z}}{\partial y} & \frac{\partial\acute{z}}{\partial z}\end{pmatrix}_{(x_c, y_c, z_c)}. \tag{34}$$

Table 2. The eigenvalues of the Jacobian matrix around given critical points P_i for the autonomous system Eq. (33).

	Critical points	Eigenvalues	$\omega_{\rm eff}$
$\xi_0 = 0.01,\ A = -0.167$	$P_1(1, -0.98, 0)$	$(-2.99, -2.43(\alpha+1), -0.008)$	-1
	$P_2(1, -0.167, 0)$	$(-0.55, 2.44(\alpha+1), -2.44)$	-0.184
$\xi_0 = 0.02,\ A = -0.149$	$P_1(1, -0.96, 0)$	$(-2.98, -2.36(\alpha+1), -0.016)$	-1
	$P_2(1, -0.149, 0)$	$(-0.55, 2.5(\alpha+1), -2.44)$	-0.184
$\xi_0 = 0.01,\ A = 1$	$P_1(1, -0.98, 0)$	$(-2.99, -5.93(\alpha+1), -0.008)$	-1
	$P_2(0.0003, 0.0003, 0)$	$(-3, 3(\alpha+1), -1.5)$	0
	$P_3(1, 1, 0)$	$(-2.49, 5.94(\alpha+1), -5.94)$	0.99

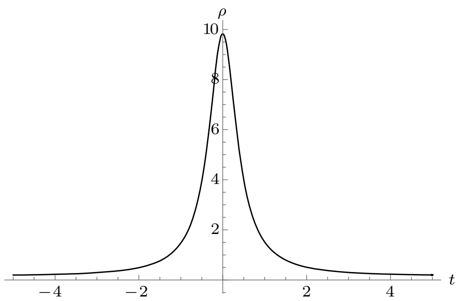


Fig. 6. The evolution of the total energy density ρ with time. Parameters are set at the best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ with $\rho_c = 10$.

When we fix the values of both ξ_0 and A, the critical points are the same, independent of the choice of α as listed in Table 2. For $(\xi_0 = 0.01, A = -0.167, \alpha = 0.551)$ and $(\xi_0 = 0.02, A = -0.149, \alpha = 0.548)$ the only physical and stable critical points P_1 with negative eigenvalues describe an accelerated-VMCG-dominated universe with $\omega_{\rm eff} \approx -1$ exactly as predicted in the classical case. Moreover, the values of the critical points corresponding to an accelerated-VMCG-dominated universe change only with ξ_0. However, those describing a decelerated-matter-dominated universe and a decelerated-VMCG-dominated universe depend on both (ξ_0, A). For $(\xi_0 = 0.01, A = 1, \alpha)$ the critical points are $P_1(1, -0.98, 0)$ a stable critical point because it has negative eigenvalues as α is a positive constant and it corresponds to an accelerated-VMCG-dominated universe, and $P_2(0.0003, 0.0003, 0)$ and $P_3(1, 1, 0)$ unstable saddle points due to the opposite signs of their eigenvalues corresponding respectively to a decelerated-matter-dominated universe and a decelerated-VMCG-dominated universe.

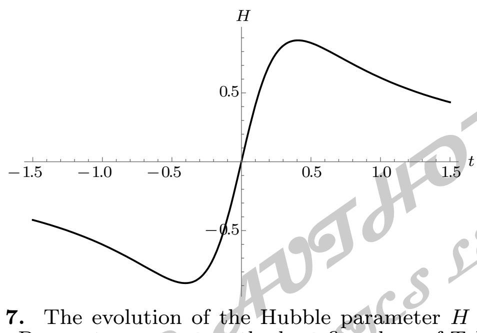


Fig. 7. The evolution of the Hubble parameter H with time. Parameters are set at the best fit values of Table 1 for $\xi_0 = 0.01$ with $\rho_c = 10$ and $\rho_{\rm mcg0} + \rho_{\rm m0} = 10$.

From Fig. 5 the universe undergoes an accelerated expansion till a final de Sitter universe.

In classical cosmology, the model suffers from Big Bang singularity. This problem does not occur in loop quantum cosmology scenario. From Fig. (6) and (7), when $\rho_{\rm tot} \approx \frac{1}{2}\rho_{\rm c}$, the Hubble parameter takes a maximum value and when $\rho_{\rm tot}$ takes its maximum value $\rho_{\rm c}$, the Hubble parameter vanishes, thus the universe undergoes a contraction then enters the bounce.

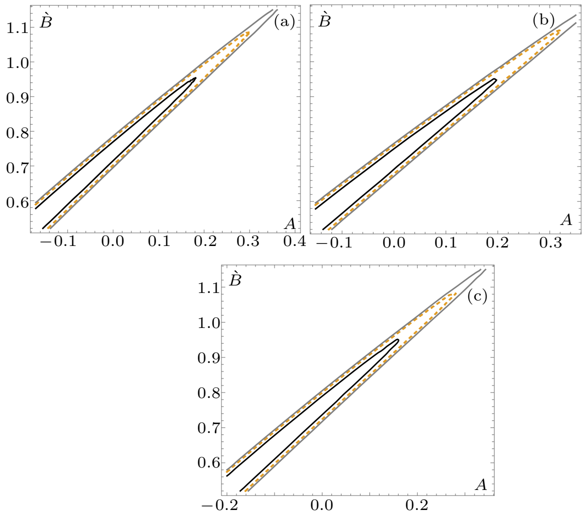


Fig. 8. Contour plot of 68.27% CL (black), 90% CL (dashed) and 95.45% CL (gray) regions for VMCG parameters A and $\dot{B}$ when (a) $\xi_0 = 0.01$, (b) $\xi_0 = 0.02$ and (c) $\xi_0 = 0.0001$.

In summary, we have investigated the model of VMCG. The observational data of Union 2.1 constrained the viscous coefficient to $\xi_0 \ll 1$, otherwise the perturbation instabilities at the present time will grow exponentially leading to a non-consistent model. With small values of ξ_0, the model is found to be suitable to describe the current universe and gives good predictions at the present time for both state and deceleration parameters $\omega_{\rm eff0} =\in (-0.76, -0.74)$, $q_0 =\in (-0.60, -0.57)$. The value of the state parameter is in agreement with $q_0 = -0.53^{(+0.17)}_{(-0.13)}$ at (68% C.L.; SN Ia+SALT2 fitter+ BAO/CMB) given by Ref. [46] and $q_0 = -0.54^{(+0.05)}_{(-0.07)}$ at (68% C.L.; SN Ia+BAO/CMB+H(z)+uniform prior with $q_f = -1$) given by Ref. [47]. The present value of the effective state parameter of VMCG is also consistent with $\omega_0 = -1.04^{(+0.72)}_{(-0.69)}$ at (95% C.L.; Planck+WP+BAO) for dynamic state parameter estimated in Ref. [48] and $\omega_0 = -0.91^{(+0.16)}_{(-0.20)}$ (SNLS3 team) of Refs. [49,50]. The perturbation instabilities, at the matter-dominated era, are dropped down in present and late time as the coupling between dark energy and dark matter is decreasing. At large scale, the VMCG has no future singularities and its equation of state is nearly equivalent to cosmological constant ($\omega_{\rm eff} = -1$), while the sound speed takes a constant value different from zero as a difference between a dynamical fluid model and an inert cosmological constant model. The VMCG discussed here reproduces the main results of the standard model without assuming a priori the existence of cosmological constant, and the problems related to fine-tuning and coincidence problems are solved and the value of the redshift where ($\rho_{\rm DE} \approx \rho_{\rm matter}$) for both $\xi_0 = 0.01$ and $\xi_0 = 0.0001$ is $z = 0.75$. This value is in agreement with $z_t = 0.64^{(+0.13)}_{(-0.07)}$ given by Ref. [46] for models with the final de Sitter phase, $z_t = 0.71 \pm 0.03$ of the Λ-CDM model of Ref. [16], $z_t = 0.74 \pm 0.05$ given by Ref. [51] and z_t at (more than 68% C.L.;SN Ia + BAO/CMB(WMAP9)+H(z)+uniform prior with $q_f = -1$) of Ref. [47]. At LQC background and at small scale the Big Bang singularity problem is solved and replaced by a bounce, at large scale the stability of the model does not depend on the EoS parameter B and viscous modified chaplygin gas universe solutions only depend on ξ_0.

References

[1] Riess A G et al 1998 *Astron. J.* **116** 1009
[2] Perlmutter S J et al 1999 *Astrophys. J.* **517** 565
[3] Riess A G et al 2004 *Astron. J.* **607** 665
[4] Spergel D N et al 2007 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170** 377
[5] Bennett C L et al 2003 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148** 1
[6] Masi S et al 2002 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **48** 243
[7] Tegmark M et al 2004 *Phys. Rev.* D **69** 103501
[8] Scranton R et al 2003 *Phys. Rev. Lett.* (submitted)
[9] Tsujikawa S 2010 *Astrophys. Space Sci. Library* **370** 331
[10] Bamba K et al 2012 *Astrophys. Space Sci.* **342** 155
[11] Copeland E J et al 2006 *Int. J. Mod. Phys.* D **15** 1753
[12] Padmanabhan T 2005 *Curr. Sci.* **88** 1507
[13] Debnath U et al 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 5609
[14] Lu J B et al 2008 *Phys. Lett.* B **662** 87
[15] Paul B C and Thakur P 2013 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2013** 052
[16] Lu J B et al 2015 *J. High Energy Phys.* **1502** 071
[17] Chakraborty S et al 2012 *Eur. Phys. J.* C **72** 2101
[18] Benaoum H B 2012 *Adv. High Energy Phys.* **2012** 357802
[19] Singh N I and Devi S R 2011 *Astrophys. Space Sci.* **334** 231
[20] Barrow J D 1986 *Phys. Lett.* B **180** 335
[21] Padmanabhan T and Chitre S M 1987 *Phys. Lett.* A **120** 433
[22] Pavon D et al 1991 *Class. Quantum Grav.* **8** 347
[23] Maartens R et al 1995 *Class. Quantum Grav.* **12** 1455
[24] Lima J A S et al 1996 *Phys. Rev.* D **53** 4287
[25] Mohanthy G and Pradhan B D 1992 *Int. J. Theor. Phys.* **31** 151
[26] Mohanty G and Pattanaik R R 1991 *Int. J. Theor. Phys.* **30** 239
[27] Singh J K 2005 *Nuovo Cimento* **1208** 1251
[28] Singh J K and Shreeram 1996 *Astrophys. SpaceSci.* **236** 277
[29] Benchikh S et al 2016 *Chin. Phys. Lett.* **33** 059501
[30] Suzuki et al 2012 *Astrophys. J.* **746** 85
[31] Bojowald M 2005 *Living Rev. Relativ.* **8** 11
[32] Bojowald M 2008 *Living Rev. Relativ.* **11** 4
[33] Ashtekar A 2009 *J. Phys.: Conf. Ser.* **189** 012003
[34] Singh P 2008 *J. Phys.: Conf. Ser.* **140** 012005
[35] Thiemann T 2003 *Lect. Notes Phys.* **631** 41
[36] Ashtekar A et al 2003 *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 233
[37] Bojowald M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 261301
[38] Bojowald M and Vandersloot K 2003 *Phys. Rev.* D **67** 124023
[39] Tsujikawa S et al 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 5767
[40] Bojowald M and Kagan M 2006 *Phys. Rev.* D **74** 044033
[41] Gorgi M A 2016 *Phys. Lett.* B **760** 769
[42] Sami M et al 2006 *Phys. Rev.* D **74** 043514
[43] Bojowald M 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** L109
[44] Bean R et al 2008 *Phys. Rev.* D **78** 023009
[45] Ashtekar A 2009 *Gen. Relativ. Gravitation* **41** 707
[46] Giostri R et al 2012 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1203** 027
[47] Vargas dos S M et al 2016 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1602** 066
[48] Plank Collaboration 2013 *Astron. Astrophys. Manuscript* **571** A16
[49] Conley A et al 2011 *Astrophys. J. Supp.* **192** 1
[50] Sullivan M et al 2011 *Astrophys. J.* **737** 102
[51] Farooq O and Ratra B 2013 *Astrophys. J. Lett.* **325** L7

CHIN. PHYS. LETT. Vol. 33, No. 5 (2016) 059501

Dynamical Study of a Constant Viscous Dark Energy Model in Classical and Loop Quantum Cosmology *

Sara Benchikh**, Noureddine Mebarki, Dalel Aberkane

Laboratoire de Physique Mathematique et Subatomique, Mentouri University, Route Ain El Bey, Constantine 25000, Algeria

(Received 2 December 2015)

Dynamical behaviors and stability properties of a flat space Friedmann–Robertson–Walker universe filled with pressureless dark matter and viscous dark energy are studied in the context of standard classical and loop quantum cosmology. Assuming that the dark energy has a constant bulk viscosity, it is found that the bulk viscosity effects influence only the quintessence model case leading to the existence of a viscous late time attractor solution of de-Sitter type, whereas the quantum geometry effects influence the phantom model case where the big rip singularity is removed. Moreover, our results of the Hubble parameter as a function of the redshift are in good agreement with the more recent data.

PACS: 95.85.−e, 04.60.Pp, 95.36.+x DOI: 10.1088/0256-307X/33/5/059501

One of the greatest challenges in cosmology is the attempt to understand the nature and the origin of the present accelerated expansion of our universe, which has been confirmed by several recent observations, such as type Ia supernovae (SNe Ia),[1,2] cosmic microwave background (CMB) anisotropy[3–5] and large scale structure (LSS).[6,7] One alternative and possible explanation of these observations is the assumption of the existence of a new unknown undetected component with a negative pressure called dark energy (DE). It could possess an equation of state (EoS) in the form $p = \omega\rho$ with $\omega < -1/3$. The simplest DE candidate is the cosmological constant with $\omega = -1$, though favored by a number of observations[8] it still suffers from the fine-tuning and the coincidence problems.[9,10] To overcome these two problems, a variety of scalar field models have been introduced. One of them is known as the quintessence with $-1 < \omega < -1/3$,[11–13] described by an ordinary scalar field where its potential is dominant with respect to its kinetic energy. However, the recent observations allow the possibility of $\omega < -1$.[8] Thus a new class of scalar field models with negative kinetic energy, called the phantom field,[14] has been suggested to satisfy $\omega < -1$. The problem with this model in the standard Friedmann–Robertson–Walker (FRW) cosmology is that it leads to a future singularity, i.e., the so-called big rip.[15,16] Several ideas have been proposed to avoid this singularity, such as choosing certain potentials and initial conditions for which the de-Sitter universe solution turns out to be a late time attractor of the model[17] or by introducing terms of quantum effects in the action.[18] The astrophysical observations also indicate that the universe medium is not a perfect fluid[19] and its viscosity can be involved in the evolution and dynamics of the universe. In isotropic and homogeneous universes, the shear viscosity is ignored, only bulk viscosity could play a role in realistic models and its effects on the cosmological evolution have been studied from various viewpoints.[20–26] Moreover, it is commonly believed that quantum gravity effects would play an important role in the evolution of the universe. Thus it is preferred to study the properties of cosmological models in the framework of a quantum gravity theory. In this study, we work with a loop quantum cosmology (LQC) effective model,[27–29] which is a canonical quantization of homogeneous space times based upon a reduced symmetry model of loop quantum gravity.[30–32] In fact, the effects of LQC consist of modifying the standard Friedmann equations by adding a correction term of the form $-\rho^2/\rho_c$ encoding the discrete quantum geometric nature of the space time.[33] When this correction term becomes dominant, the universe begins to bounce and then expands backwards. One of the major successes in LQC is that the big bang singularity can be replaced by a large bounce[27–29] and the future singularities can be avoided. It is important to mention that all strong singularities (big rip) are absent in LQC for isotropic and homogenous universes (like FRW) where the Ricci scalar and similarly other curvature invariants are bounded for all the events where the energy density diverges.[34,35] As shown in Ref. [36], where a dynamical study of a phantom scalar field dark energy interacting with dark matter was carried out in LQC, the big rip singularity can be avoided and the role of the loop quantum gravity effect was to break the stability of the initially phantom field climbing up the potential and leave that of the rolling down the potential. Furthermore, weak

*Supported by the Algerian Ministry of Education and Research, and DGRSDT.
**Corresponding author. Email: benchikhsara@gmail.com

sudden singularities may exist in LQC for potentials that are not bounded from below (above) for a canonical phantom scalar field. In this Letter, we use a dynamical study by combining LQC corrections and bulk viscous DE in one model to investigate whether there are some interesting features arising from the two effects taken together to a better understanding of the evolution and the fate of our universe, when we work with quintessence and phantom DE models separately. Finally, we compare the Hubble parameter derived from the viscous quintessence and phantom scenarios of our model as a function of the redshift with the most recent data.

Now we investigate the evolution of a flat space FRW universe model filled with pressureless DM and viscous DE in the framework of SC. We study the simple case, where DE evolves independently of DM (without interactions), the quintessence and phantom models are examined separately. In SC, the first Friedman equation is given by

$$H^2=\frac{\rho}{3}, \tag{1}$$

where $H=\frac{\dot{a}}{a}$ is the Hubble parameter (a is the scale parameter), and ρ is the total energy density $\rho=\rho_{\rm DM}+\rho_{\rm DE}$. Here the dot stands for the derivative with respect to the cosmic time t. In what follows, we take the natural unit $\kappa=8\pi G=1$ (G is the Newton constant) and DE is assumed to obey the usual EoS: $P=\omega\rho$ with a constant value of ω in the intervals $-1<\omega<-\frac{1}{3}$ and $\omega<-1$ corresponding to the quintessence and phantom models, respectively. In the presence of a bulk viscosity, the effective pressure of the viscous DE is defined by[37,38]

$$P_{\rm eff}=P_{\rm DE}+\varPi, \tag{2}$$

where $P_{\rm DE}=\omega\rho_{\rm DE}$ is the pressure of the DE, and $\varPi=-3\zeta H$ is the viscous pressure. The term ζ is a bulk viscous coefficient. We require that $\zeta>0$, as a consequence of the positive entropy variation in an irreversible process.[39] In what follows, we assume that ζ is constant. Now the conservation equations for DM and DE can be expressed as

$$\dot{\rho}_{\rm DM}+3H\rho_{\rm DM}=0, \tag{3}$$

and

$$\dot{\rho}_{\rm DE}+3H((1+\omega)\rho_{\rm DE}-3\zeta H)=0. \tag{4}$$

Differentiating Eq. (1) and employing Eqs. (3) and (4) we obtain the modified Raychaudhuri equation

$$\dot{H}=-\frac{1}{2}(\rho_{\rm DM}+(1+\omega)\rho_{\rm DE}-3\zeta H). \tag{5}$$

Using Eqs. (1) and (5), we can define an EoS effective coefficient as

$$\omega_{\rm eff}=\frac{P_{\rm eff}}{\rho}=-1-\frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{6}$$

To analyze the dynamical behavior of the above system, we introduce the following dimensionless variables

$$x=\frac{\rho_{\rm DE}}{3H^2},\quad y=\frac{1}{\frac{\zeta}{H}+1}. \tag{7}$$

Obviously the phase space is the bounded plane region where $0\le x\le 1$ and $0\le y\le 1$, in terms of these variables, Eqs. (1) and (5) can be rewritten as

$$\frac{\rho_{\rm DM}}{3H^2}+x=1, \tag{8}$$

and

$$\frac{\dot{H}}{H^2}=-\frac{3}{2}\Big(2+\omega x-\frac{1}{y}\Big). \tag{9}$$

The deceleration parameter $q=-1-\frac{\dot{H}}{H^2}$ and $\omega_{\rm eff}$ become

$$q=2+\frac{3}{2}\Big(\omega x-\frac{1}{y}\Big), \tag{10}$$

and

$$\omega_{\rm eff}=1+\omega x-\frac{1}{y}. \tag{11}$$

Using Eqs. (3), (4), (8) and (9) we obtain the following autonomous system of ordinary differential equations (ASODE)

$$x'=3(x-1)\Big(\omega x-\frac{1}{y}+1\Big), \tag{12}$$

and

$$y'=\frac{3}{2}y(y-1)\Big(2+\omega x-\frac{1}{y}\Big). \tag{13}$$

The prime denotes a derivative with respect to the e-folding number $N=\ln a$, representing the cosmological time, in our case (the physical regions $0\le x\le 1$ and $0\le y\le 1$), three equilibrium critical points are found $P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$ and $P_3\Big(1,\frac{1}{(2+\omega)}\Big)$. Their properties are determined by the sign and nature of the eigenvalues $\mu_i(i=1,2)$ of the Jacobi matrix J,

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}_{(x_c,y_c)}.$$

where $f\equiv x'$ and $g\equiv y'$. Now if the real parts of all the $\mu_i(i=1,2)$ at a certain critical point are negative, it is a stable node. Otherwise, it is an unstable node. On the other hand, if at least one of the eigenvalues is zero and the others are positive or with opposite signs, the critical point is unstable. However, if the other eigenvalues are negative the linearized theory of the dynamical system may not describe correctly the nonlinear system. In this case, we must use the center manifold theorem (CMT).[40,42] The properties of the obtained critical points are summarized in Tables 1 and 2. It is important to notice: (1) At the critical point P_1, the deceleration and EoS effective parameters are $q=\frac{1}{2}$ and $\omega_{\rm eff}=0$, respectively. Thus it corresponds to a dark matter-dominated solution and a decelerated expansion. The related eigenvalues of the linearized stability matrix (LSME) are $\mu_1 = \frac{3}{2}$ and $\mu_2 = -3\omega$. Notice that both the eigenvalues have positive signs whether we are in the quintessence or phantom case. Therefore P_1 is unstable in concordance with the observation where this phase of a conventional dark matter-dominance is required for the formation of the observed amount of the cosmic structure. (2) The critical point P_2 corresponds either to a non-viscous dark energy-dominated solution if $\zeta = 0$, or to the viscous dark energy-dominated solution if $H \to \infty$. The deceleration and EoS effective parameters in this case are given by $q = \frac{1}{2}(1 + 3\omega)$ and $\omega_{\rm eff} = \omega$. This solution corresponds to an accelerated expansion. The LSMEs are $\mu_1 = \frac{3}{2}(1+\omega)$ and $\mu_2 = 3\omega$. Notice that for a quintessence dark energy, this critical point has eigenvalues with opposite signs and it is then an unstable saddle point. However, for a phantom dark energy, it has negative eigenvalues. Then P_2 is a stable point corresponding to a big rip singularity attractor. (3) The critical point P_3 is not a physical solution in the case of the phantom model ($0 \le y \le 1$). It exists just for the quintessence dark energy (physical condition), where it is characterized by $q = -1$ and $\omega_{\rm eff} = -1$. That is due to the presence of the viscosity, the EoS effective parameters tend to -1. The eigenvalues of the Jacobian matrix at the critical point are $\mu_1 = -3$ and $\mu_2 = -\frac{3}{2}(1+\omega)$. Therefore, it is a stable solution corresponding to a viscous late time attractor of the de-Sitter type.

Table 1. The eigenvalues of the linearization matrix around given critical points P_i for a viscous SC.

Fixed-points	$x_{\rm c}$	$y_{\rm c}$	Eigenvalues
P_1	0	1	$\mu_1 = \frac{3}{2}$, $\mu_2 = -3\omega$
P_2	1	1	$\mu_1 = \frac{3}{2}(1+\omega)$, $\mu_2 = 3\omega$
P_3	1	$\frac{1}{2+\omega}$	$\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -\frac{3}{2}(1+\omega)$

Table 2. Stability and relevant parameters of the critical points P_i for a viscous SC.

Fixed-points	q	$\omega_{\rm eff}$	Stability
P_1	$\frac{1}{2}$	0	Unstable
P_2	$\frac{1}{2}(1+3\omega)$	ω	Saddle if $\omega > -1$, stable if $\omega < -1$
P_3	-1	-1	Existed just for $\omega > -1$ (stable)

We extend the previous study by including the LQC effects. In this case, the modified flat space Friedmann equation can be written as[33]

$$H^2 = \frac{\rho}{3}\Big(1 - \frac{\rho}{\rho_{\rm c}}\Big). \tag{14}$$

where $\rho_{\rm c} \equiv \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3 G^2 \hbar}$ is the critical density in LQC, and γ is the dimensionless Barbero–Immirzi parameter (it is suggested that $\gamma = 0.2375$ by the black hole thermodynamics in LQC), we remind that the quantum correction is negligible when $\rho \ll \rho_{\rm c} \sim \rho_{\rm Pl}$ ($\rho_{\rm Pl}$ stands for the density at the Planck scale) and it dominates dynamics when $\rho \sim \rho_{\rm c}$. In particular, when $\rho = \rho_{\rm c}$ the right side of Eq. (14) vanishes yielding to $\dot{a} = 0$ and leading to a quantum bounce. Differentiating Eq. (14) and using Eqs. (3) and (4) we obtain the following modified Raychaudhuri equation

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_{\rm DM} + (1+\omega)\rho_{\rm DE} - 3\zeta H)\Big(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{\rm c}}\Big). \tag{15}$$

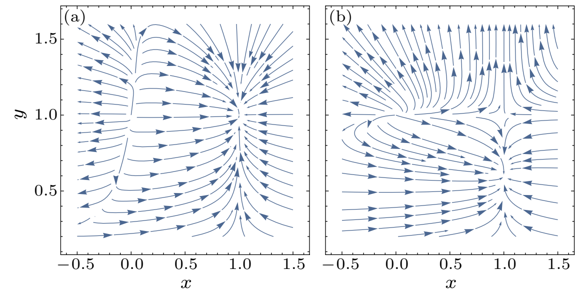


Fig. 1. Phase-plane diagrams for the SC model in the phantom case (a) with $\omega = -4/3$ and in the quintessence case (b) with $\omega = -7/20$.

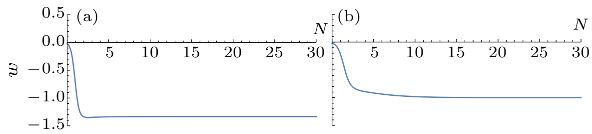


Fig. 2. The evolution of $\omega_{\rm eff}$ with the cosmological time N in the SC: (a) the phantom model with $\omega = -4/3$ and (b) the quintessence model with $\omega = -3/4$. We notice that, regardless of the initial conditions for both the cases, the universe will enter a final state dominated by a dark energy.

Using Eqs. (14) and (15) the effective EoS for the total cosmic energy in LQC can be expressed as

$$\omega_{\rm eff} = -1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}\Big(\frac{\rho_{\rm c} - \rho}{\rho_{\rm c} - 2\rho}\Big). \tag{16}$$

To analyze the dynamical behavior of the universe, one has to add a new variable to the already existing variables x and y: $z = \frac{\rho}{\rho_{\rm c}}$. In this case, the effective modified Friedman Eqs. (14) and (15) can be rewritten as

$$\Big(\frac{\rho_{\rm DM}}{3H^2} + x\Big)(1 - z) = 1, \tag{17}$$

and

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1-z} + \omega x - \frac{1}{y} + 1\Big)(1 - 2z). \tag{18}$$

Similarly for the deceleration and EoS parameters, one has

$$q = -1 + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1-z} + \omega x - \frac{1}{y} + 1\Big)(1 - 2z), \tag{19}$$

and

$$\omega_{\rm eff} = \Big(\omega x - \frac{1}{y} + 1\Big)(1 - z). \tag{20}$$

Using Eqs. (3), (4), (17) and (18) we obtain the following ASODEs

$$x' = 3((1-2z)x-1)\Big(\omega x - \frac{1}{y}+1\Big) - \frac{3xz}{1-z}, \tag{21}$$

$$y' = \frac{3}{2}y(y-1)\Big(\frac{1}{1-z}+\omega x - \frac{1}{y}+1\Big)(1-2z), \tag{22}$$

$$z' = -3z - 3z(1-z)\Big(\omega x - \frac{1}{y}+1\Big). \tag{23}$$

Now for the physical solutions with $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$, we obtain the following critical points $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,1,0)$ and $P_3(1,1/(2+\omega),0)$. Their stability properties are determined by the eigenvalues of the Jacobi matrix M at these points (x_c,y_c,z_c),

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x_c,y_c,z_c)},$$

where $h\equiv z'$.

Table 3. The eigenvalues of the linearization matrix around a given critical points P_i for a viscous LQC.

Fixed-points	x_c	y_c	z_c	Eigenvalues
P_1	0	1	0	$\mu_1=\frac{3}{2}$, $\mu_2=-3\omega$, $\mu_3=-3$
P_2	1	1	0	$\mu_1=\frac{3}{2}(1+\omega)$, $\mu_2=3\omega$, $\mu_3=-3(1+\omega)$
P_3	1	$\frac{1}{2+\omega}$	0	$\mu_1=-3$, $\mu_2=-\frac{3}{2}(1+\omega)$, $\mu_3=0$

Table 4. Stability and relevant parameters of the critical points for a viscous LQC.

Fixed-points	q	$\omega_{\rm eff}$	Stability
P_1	$\frac{1}{2}$	0	Saddle
P_2	$\frac{1}{2}(1+3\omega)$	ω	Saddle
P_3	-1	-1	Existed just for $\omega>-1$ (Stable)

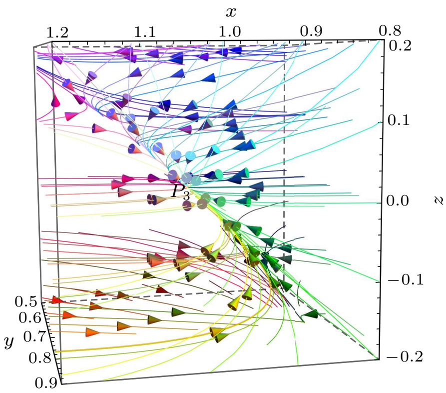


Fig. 3. The 3D phase portrait showing the stable critical point P_3 for the LQC model in the quintessence case with $\omega=-3/4$.

The properties of the resulted equilibrium points are summarized in Tables 3 and 4. We find the same critical points as in the classical case (in three-dimensional space), while their stability properties are almost different. In fact, the critical point P_1 (the dark matter-dominated solution) becomes a saddle (which was an unstable point in SC). This is essentially due to the different signs of the Jacobian matrix eigenvalues $\mu_1=\frac{3}{2}$, $\mu_2=-3\omega$ and $\mu_3=-3$. Likewise the classical case, this point is still unstable for both phantom and quintessence dark energy with a decelerated expansion. For the critical point P_2 (no viscous dark energy-dominated solution) where the LSMEs are $\mu_1=\frac{3}{2}(1+\omega)$, $\mu_2=3\omega$ and $\mu_3=-3(1+\omega)$, the stability for the phantom model ($\omega<-1$) is different from the classical case. In fact, this point is converted from a stable point to a saddle point due to the fact that it possesses eigenvalues with opposite signs. Hence, the quantum correction effect breaks the stability of the point P_2. Therefore, the problem of the future singularity (big rip) does not occur in this scenario. For the quintessence case this point remains a saddle. For both the cases, we have an accelerated expansion in the vicinity of this point. The critical point P_3, which is of the de Sitter type (viscous dark energy-dominated solution), still exists just for the quintessence model, the corresponding LSMEs are $\mu_1=-3$, $\mu_2=-\frac{3}{2}(1+\omega)$ and $\mu_3=0$. Since the Jacobian matrix M has one of the eigenvalues zero and the others are negative, we cannot guarantee its stability properties directly from the eigenvalues, instead we use the center manifold theorem which allows us to simplify the dynamical system by reducing its dimensionality.[40] We find that this point is stable (see the supplemental material).

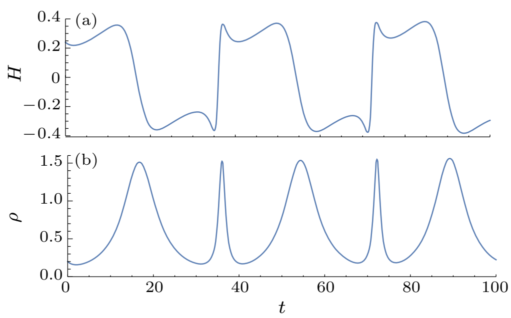


Fig. 4. (a) Time evolution of the Hubble parameter and (b) time evolution of the total energy density for the LQC model in the phantom case with $\omega=-1.2$ and $\rho_c=1.5$. Notice that at the beginning both H and ρ increase with time when the universe undergoes acceleration until reaching a turning point at $\rho=\rho_c/2$ and $H=H_{\max}$. Beyond this point, the universe will expand but with a deceleration until a stopping phase. When ρ reaches its maximum value $\rho_{\max}\sim\rho_c$ and $H=0$, the universe will undergo contraction until a bounce. After that the evolution of the universe mimics the previous one. Therefore the universe will oscillate forever without reaching any singularities.

In summary, in the context of both classical SC and LQC a dynamical system of a pressureless DM and viscous phantom or quintessence DE, where the viscosity coefficient is taken to be a constant, is studied. We find that in SC for the phantom dark energy ($\omega < -1$) case, there are two critical points: one is the unstable dark matter dominated solution, and the other corresponds to a big rip singularity solution whereas for the quintessence ($-1 < \omega < -1/3$) case we have obtained three critical points, two of them are unstable and the other one is stable corresponding to the de-Sitter viscous dark energy. That is, the bulk viscosity has an effect only on the quintessence model, leading to the existence of an interesting stable solution which is a viscous late time attractor of the de-Sitter type. However, by including the loop quantum geometry effects, we obtain the same critical points as in the classical Einstein cosmology (except at 3D phase space) while their stability properties are almost different. The dark matter-dominated solution for both the phantom and quintessence models is unstable in the SC case but it becomes saddle in LQC. In fact, for the phantom dominated universe solution, the quantum geometry effects break its stability and as a consequence, a future singularity (big rip) disappears. However, for the quintessence case, the stability of the nodes that corresponds to a quintessence dominated universe in LQC are the same as that in SC. Thus if we take into account the bulk viscosity and quantum geometry effects in the evolution of our universe, we have noticed that for the quintessence model our universe will enter an era dominated by a viscous dark energy of the de-Sitter type, however, for the phantom model the universe will enter an oscillatory regime, where the early and late time singularities are avoided.

References

[1] Riess A G et al 1998 *Astron. J.* **116** 1009
[2] Tonry J L et al 2003 *Astrophys. J.* **594** 1
[3] Masi S et al 2002 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **48** 243
[4] Bennett C L et al 2003 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148** 1
[5] Komatsu E et al 2011 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **192** 18
[6] Tegmark M et al 2004 *Phys. Rev.* D **69** 103501
[7] Seljak U et al 2005 *Phys. Rev.* D **71** 103515
[8] Wood-Vasey W M et al 2007 *Astrophys. J.* **666** 694
[9] Weinberg S 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 1
[10] Carroll S M 2001 *Living Rev. Relativ.* **4** 1
[11] Fujii Y 1982 *Phys. Rev.* D **26** 2580
[12] Ratra B and Peebles J 1988 *Phys. Rev.* D **37** 321
[13] Chiba T, Sugiyama N and Nakamura T 1997 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **289** L5
[14] Caldwell R R 2002 *Phys. Lett.* B **545** 23
[15] Caldwell R R, Kamionkowski M and Weinberg N N 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 071301
[16] Nesseris S and Perivolaropoulos L 2004 *Phys. Rev.* D **70** 123529
[17] Singh P, Sami M and Dadhich N 2003 *Phys. Rev.* D **68** 023522
[18] Nojiri S and Odintsov S D 2004 *Phys. Rev.* D **70** 103522
[19] Jaffe T R, Banday A J, Eriksen H K, Gorski K M and Hansen F K 2005 *Astrophys. J.* **629** L1–L4
[20] Zimdahl W, Schwarz D J, Balakin A B and Pavon D 2001 *Phys. Rev.* D **64** 063501
[21] Balakin A B, Pavon D, Schwarz D J and Zimdahl W 2003 *New J. Phys.* **5** 85
[22] Avelino A and Nucamendi U 2010 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2010** 009
[23] Avelino A, Garcia-Salcedo R, Gonzalez T, Nucamendi U and Quiros I 2013 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2013** 012
[24] Meng X and Ma Z 2012 *Eur. Phys. J.* C **72** 2053
[25] Amirhashchi H 2013 *Astrophys. Space Sci.* **345** 439
[26] Meng X H, Ren J and Hu M G 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 379
[27] Ashtekar A, Bojowald M and Lewandowski J 2003 *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** 233
[28] Bojowald M 2008 *Living Rev. Relativ.* **11** 4
[29] Ashtekar A and Singh P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 213001
[30] Rovelli C 1998 *Living Rev. Relativ.* **1** 1
[31] Thiemann T 2003 *Lect. Notes. Phys.* **631** 41
[32] Ashtekar A and Lewandowski J 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** R53
[33] Ashtekar A, Pawlowski T and Singh P 2006 *Phys. Rev.* D **74** 084003
[34] Singh P 2014 *Bull. Astron. Soc. India* **42** 121
[35] Mebarki N and Benchikh S 2014 *Proc. Sci. PoS.* **FFP14** 2
[36] Fu X, Yu H and Wu P 2008 *Phys. Rev.* D **78** 063001
[37] Eckart C 1940 *Phys. Rev.* D **58** 919
[38] Landau L D and Lifshitz E M 1987 *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press)
[39] Zimdahl W and Pavon D 2000 *Phys. Rev.* D **61** 108301
[40] Khalil H K 1996 *Progress in Nonlinear Systems* (NJ: Prentice Hall)
[41] Chan N 2012 *PhD Dissertation* (London: London University)
[42] Xiao K and Zhu J Y 2011 *Phys. Rev.* D **83** 083501

PROCEEDINGS OF SCIENCE

Loop Quantum Effects on a Viscous Dark Energy Cosmological Model

N.Mebarki[1]
Laboratoire de Physique Mathematique et Subatomique, Mentouri University
Route Ain El Bey, Constantine 25000, Algeria
E-mail: nnmebarki@yahoo.fr

S.Benchick
Laboratoire de Physique Mathematique et Subatomique, Mentouri University
Route Ain El Bey, Constantine 25000, Algeria
E-mail: benchikhsara@gmail.com

A novel effective cosmological model with bulk viscosity and loop quantum geometry effects is proposed. It is found that the bulk viscosity affects the quintessence scenario leading to the existence of a De Sitter type viscous late time attractor whereas the loop quantum effects influence the phantom case where the big rip singularity is removed.

Frontiers of Fundamental Physics 14
FFP14
15-18 July 2014
Aix Marseille University (AMU) Saint-Charles Campus, Marseille

[1] Speaker

PoS(FFP14)170

1. Introduction

One of the greatest challenges in modern cosmology is the attempt to understand the nature and the origin of the present acceleration expansion of our universe [1,2,3,4], which has been confirmed by several recent observations such asType Ia Supernovae (SNeIa) [5], cosmic microwave background (CMB) anisotropy[6] and large scale structure (LSS) [7]. Confirmed observations indicates that dark energy (DE) dominates our present universe and the viability of the bulk viscous dark energy scenario to take part in explaining the presently accepted cosmological paradigm is justified [8]. Moreover, it is believed that quantum gravity effects may play an important role in the evolution of the universe. Thus, it is preferred to study the properties of cosmological models in the framework of a quantum gravity theory. In this paper, we work with a Loop Quantum Cosmology (LQC) effective model, which is a canonical quantization of an homogeneous space-time based on a reduced symmetry model of loop quantum gravity [9,10,11]. In fact, the effects of loop quantum gravity consist of modifying the standard Friedmann equations by adding a correction term of the form $-\rho^2/\rho_c$ encoding the discrete quantum geometric nature of the space time. When this correction term becomes dominant, the universe starts to bounce and then expands backwards. One of the major successes in LQC is that the big bang singularity can be replaced by a big bounce and future singularities can be also avoided [12,13].The goal of this paper is to combine both loop quantum cosmology effects and bulk viscous dark energy in one model trying to find more hints behind cosmic observations.Our paper is organized as follows: In section 2, we present the dynamical behavior of a universe filled with pressureless dark matter and viscous scalar field within the standard classical cosmology (SC). Then, we extend our study by taking into account the LQC effects and finally, in section 3, we draw our conclusions.

2.Formalism

In SC, the first Friedmann equation is given by

$$H^2 = (\rho_{DM} + \rho_{DE})/3 \tag{1}$$

and in the presence of a constant bulk viscosity, the modified Raychaudhuri equation reads:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho_{DM} + (1+\omega)\rho_{DE} - 3\zeta H) \tag{2}$$

where H, ζ, ρ_{DM}, ρ_{DE} and ω are the Hubble parameter, bulk viscous coefficient, dark matter and energy density and equation of state (EoS) effective parameter respectively. To analyze the dynamical behavior of the above system, we introduce the following dimensionless variables:

$$x = \rho_{DE}/3H^2 \quad , \qquad y = 1/(\zeta/H + 1) \tag{3}$$

and obtain the autonomous ordinary differential equations (ODE):

$$x' = 3(\mathrm{x} - 1)(\omega x - 1/y + 1) \tag{4}$$

and

$$y' = \frac{3}{2}\mathrm{y}\,(\mathrm{y} - 1)(2 + \omega x - 1/y) \tag{5}$$

where the prime denotes the derivative with respect to the e-folding number $N = \ln a$ (a is the cosmological scale factor).Three equilibrium critical points $P_1(0,1), P_2(1,1)$ and $P_3(1\,,/(2+\omega))$ are found. The first one P_1 corresponds to the dark matter-dominated solution. In this case, the deceleration and effective EoS parameters are $q = 1/2$ and $\omega_{eff} = 0$ respectively. Thus, we have a decelerated expansion. The related eigenvalues of the obtained linearized Jacobi stability matrix (LJSME) for the above system are $\mu_1 = 3/2$ and $\mu_2 = -3\omega$ and both have positive signs either we are in the quintessence or phantom case. Therefore, P_1 is unstable and this phase of a conventional dark matter dominance is needed for the observed cosmic structure formation. The second critical point P_2 corresponds either to no viscous dark energy-dominated solution if $\zeta = 0$, or viscous dark energy-dominated solution if $H \to \infty$. In this case, the deceleration and effective EoS parameters are given by: $q = (1 + 3\omega)/2$ and $\omega_{eff} = \omega$ respectively. This solution corresponds to an accelerated expansion. The LJSME are $\mu_1 = 3(1 + \omega)/2$ and $\mu_2 = 3\omega$. Notice that for a quintessence dark energy ($-1 < \omega < -1/3$), this critical point has eigenvalues with opposite signs indicating that it is an unstable saddle point. However, for a phantom dark energy ($\omega < -1$), it has negative eigenvalues. Then, P_2 is stable corresponding to a big rip singularity attractor. Contrary to ref.[14], one can shown that if we assume the bulk viscosity as a linear combination of the two terms; one is constant, and the other is proportional to the scalar expansion $\theta = 3H$ and by a proper choice of the parameters, the big rip problem can be prevented. The third critical point P_3 exists just for the quintessence dark energy scenario and it is not a physical solution in the case of the phantom case. It is of De Sitter viscous dark energy-dominated solution type characterized by $\zeta = H(1 + \omega)$, $q = -1$ and $\omega_{eff} = -1$. In this case the cosmic expansion is accelerating, due to the presence of the viscosity. The LJSME are $\mu_1 = -3$ and $\mu_2 = -3(1 + \omega)/2$.We have found that it is stable because it has negative eigenvalues and regardless of the initial conditions for both cases, the universe will enter a final state dominated by dark energy. Figs.(1) and (2) display the portrait phase plane diagrams for the classical SC model in the phantom and quintessence cases with $\omega = -10/3$ and $\omega = -3/4$ respectively.

Now, due to the loop quantum effect, the modified flat space Friedmann equations can be written as [11]:

$$H^2 = \rho(1 - \rho/\rho_c)/3 \tag{6}$$

and

$$\dot{H} = -(\rho_{DM} + (1 + \omega)\rho_{DE} - 3\zeta H)(1 - 2\rho/\rho_c)/2 \tag{7}$$

where $\rho_c \equiv \sqrt{3}/(16\pi^2\gamma^3 G^2 h)$ is the critical density in LQG, γ the Barbero Immirzi parameter where its value is determined by the black hole entropy calculation, h and G are the Planck and Newton gravitational constants respectively. To make a dynamical analyzis, one has to add another new dynamical variable $z = \rho/\rho_c$ to obtain the following autonomous system of ODE:

$$x' = 3(x(1 - 2z) - 1)(\omega xy - 1 + y)/y - 3xz/(1 - z) \tag{8}$$

$$y' = \frac{3}{2}(y - 1)(y/(1 - z) + \omega xy - 1 + y)(1 - 2z) \tag{9}$$

and

$$z' = -3z - 3z(1 - z)(\omega xy - 1 + y)/y \tag{10}$$

For the physical solutions where $0<x<1$, $0<y<1$and $0<z<1$, we obtain the same critical points as in SC but their stability properties are different. The equilibrium critical points are: $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,1,0)$ and $P_3(1, 1/(2 + \omega), 0)$. We have found that P_1(the dark matter-dominated solution) becomes a saddle point (it was unstable in the SC case). The three LJSME are $\mu_1 = 3/2$, $\mu_2 = -3\omega$ and $\mu_3 = -3$ and have different signs, but still this point is unstable for both phantom and quintessence dark energy. As it is in the SC case, we have a decelerated expansion. For the critical point P_2 (viscous dark energy-dominated solution) the LJSME are $\mu_1 = 3(1 + \omega)/2, \mu_2 = 3\omega$ and $\mu_3 = -3(1 + \omega)$ Its stability for the phantom scenario ($\omega < -1$) is different, from the SC case. In fact, this point is converted from a stable to a saddle point because it possesses eigenvalues with opposite signs. Hence, for the phantom scenario case, the quantum correction effect breaks the stability of the point P_2 and therefore, the problem of the future singularity (big rip) does not occur. For the quintessence case, this point remains a saddle point. For both cases, we have near the vicinity of this point an accelerated expansion. For the critical point P_3 which is of De Sitter type (viscous dark energy-dominated solution), it exists just for the quintessence scenario and the LJSME are : μ_1 = -3,$\mu_2 = -3(1+\omega)/2$ and μ_3 = 0. We have also an accelerated expansion. Notice that since the Jacobian matrix has one of the eigenvalues zero and the others are negative, the critical point is not hyperbolic. Thus, we cannot guaranty its stability properties directly from the eigenvalues. Instead, we have either to find the Lyapunov's functions which is in general a very hard task to do and there is no systematic way to find and construct these functions satisfying a number of conditions or to use the center manifold theorem (as it is in our dynamical study) which allows us to simplify the dynamical system by reducing its dimensionality.

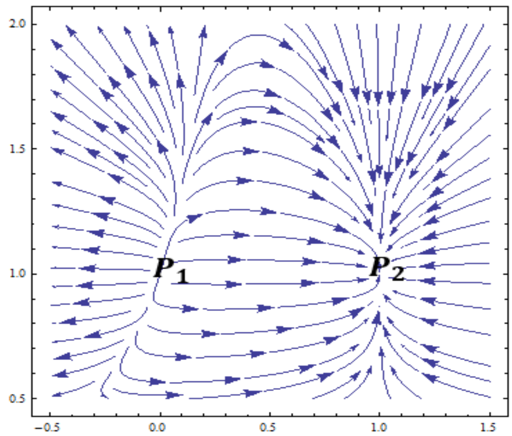


FIG.1: Phase-plane diagram for SC model in the phantom scenario with ω=-10/3

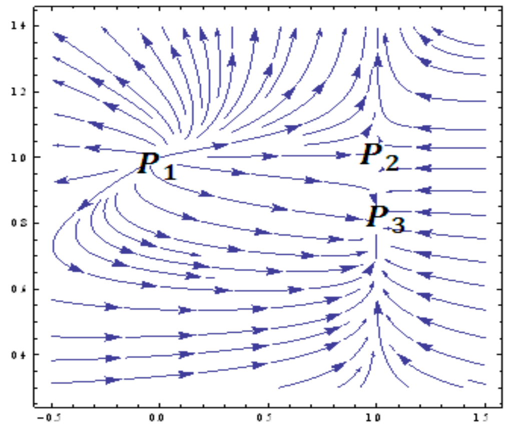


FIG.2: Phase-plane diagram for SC model in the quintessence scenario with ω=-3/4

3.Conclusion:

We have studied in the context of both classical SC and LQC a dynamical system of a pressureless DM and viscous phantom or quintessence DE. The viscosity coefficient is taken to be a constant.We have found that in SC for phantom dark energy ($\omega < -1$), there are two critical points one is unstable dark matter dominated solution, and the other one corresponds to a big rip singularity solution whereas for quintessence (-1< ω < -1/3), there are three critical points, two of them are unstable and the other one is stable corresponding to a De Sitter viscous dark energy. That is, the bulk viscosity has an effect only on quintessence model, which leads to the existence of an interesting viscous late time attractor stable solution of De Sitter type. However, by including the quantum geometry effects, we have obtained the same critical points but with almost different stability properties. In fact, the dark matter-dominated solution for both phantom and quintessence models which was unstable in the SC case becomes a saddle point in LQC. Thus, if we take into account the bulk viscosity and quantum geometry effects together in the evolution of the universe one has: for the quintessence model our universe will enter an era dominated by a viscous dark energy and accelerate forever, and for the phantom case the universe will enter an oscillatory regime (more study are under investigation).

References

[1] S. Tsujikawa, Dark energy: *investigation and modeling*, invited review chapter on dark energy for a book "Dark Matter and Dark Energy: a Challenge for the 21st Century",[astro-ph./ 1004.1493

[2] W. M. Wood-Vasey et al. *Astrophys. J.*.**666** (2007) 694[astro-ph/0701041].

[3] Paul J. Steinhardt, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **361** (2003),2497.

[4] H.Aissaoui, N.Mebarki and H.Bouhalouf*, FRW Like Cosmological Model and Accelerated Expansion of the Universe from Non Commutative Seiberg-Witten Geometry* , in proceedings of *Third Algerian Workshop On Astronomy and Astrophysics*, 12-13 June 2010, Constantine, Algeria, AIP Conf.Proc. **1295** (2010) 164.

[5] A.G. Riess, et al., *Astron. J.* **116** (1998) 1009 , J. L. Tonry et al, *Astrophys. J.* **594**, (2003)1, [astro-ph/0305008]

[6] C.Bennett et al., *ApJS*, **148** (2003) 1

[7] M.Tegmark et al. , *Phys. Rev. D*, **69** (2004) 103501

[8] Nojiri, S., Odintsov, S. D.: *Phys. Lett. B* **562** (2003)147.

[9] A.Ashtekar and P. Singh, *Class. Quant. Grav*. **28** (2011) 213001,[gr-qc/1108.0893]

[10] M. Bojowald, *Living Rev. Rel*. **11** (2008),4

[11] A.Ashtekar,T.Pawlowski and P. Singh, *Phys.Rev.D*.**74** (2006) 084003, [grqc/0607039]

[12]K. Xiao and J.Y. Zhu, *Int.J.Mod.Phys.A***25** (2010) 4993, [gr-qc/1006.5377]

[13]D.Samart and B. Gumjudpai, *Phys.Rev.D***76** (2007) 043514, [gr-qc/0704.3414]

[14] X.-H. Meng, J. Ren, and M.-G. Hu, *Comun..Theor. Phys.,* **47** (2007) 379

المراجع

المراجع

المحور الأول

[1] A. G. Riess, et al., Astron. J 116,1009 (1998).

[2] S. Perlmutter, et al., Astrophys. J 517,565 (1999).

[3] J. L. Tonry, et al., Astrophys. J 594,1 (2003).

[4] S. Masi, et al., Prog. Part. Nucl. Phys 48, 243 (2002).

[5] C. L. Bennett, et al., Astrophys. J. Suppl 148, 1 (2003).

[6] D. N. Spergel, et al., Astrophys. J. Suppl 170, 377 (2007).

[7] E. Komatsu, Astrophys. J. Suppl 180, 330 (2009).

[8] E. Komatsu, et al., Astrophys. J. Suppl 192, 18 (2011).

[9] M. Tegmark, et al., Phys. Rev. D 69, 103501 (2004).

[10] U. Seljak, et al., Phys. Rev. D 71, 103515 (2005).

[11] W. M. Wood-Vasey, et al., Astrophys.J 666, 694 (2007).

[12] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys 61, 1 (1989).

[13] V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D 9, 373 (2000).

[14]. S. M. Carroll Living Rev. Rel 4, 1 (2001).

[15] T. Padmanabhan, Phys. Rept 380, 235 (2003).

[16] P. J. E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys 75, 559 (2003).

[17] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006).

[18] Y. Fujii, Phys. Rev. D 26, 2580 (1982).

[19] C. Wetterich, Nucl. Phys. B 302, 668 (1988).

[20] B. Ratra and J. Peebles, Phys. Rev D 37, 321 (1988).

[21] T. Chiba, N. Sugiyama and T. Nakamura, Mon. Not. Roy. Astron. Soc 289, L5 (1997).

[22] R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett 80, 1582 (1998).

[23] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett 82 ,896 (1999).

[24] R. R. Caldwell, Phys. Lett. B 545, 23 (2002).

[25] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N.N. Weinberg, Phys. Rev. Lett 91, 071301 (2003).

[26] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D 70, 123529 (2004).

[27] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 71, 063004 (2005).

[28] P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, Phys. Rev.D 68, 023522 (2003).

[29] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev.D 70, 103522 (2004).

[30] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006).

[31] Z. K. Guo, Y. S. Piao, X. Zhang, and Y. Z. Zhang, Phys. Lett. B 608, 177(2005).

[32] T. R. Jaffe, A. J. Banday, H. K. Eriksen, K. M. Gorski and F. K. Hansen, Astrophys.J629: L1-L4 (2005).

[33] C. Eckart, Phys. Rev. D 58, 919 (1940).

[34] L. D. Landau and E.M. Lifshitz: Fluid Mechanics, 2nd., Fluid Mechanics, 2nd., Pergamon Press, Oxford, sect. 49, (1987).

[35] W. D. Zimdahl, J. Schwarz, A.B. Balakin and D. Pavon, Phys. Rev. D 64, 063501 (2001).

[36] A.B. Balakin., D. Pavon, D.J. Schwarz and W. Zimdahl, New. J. Phys 5, 85 (2003).

[37] G. M. Fuller, G. J. Mathews and J. R. Wilson, Phys. Rev. D 75, 043521 (2007).

[38] A. Avelino and U. Nucamendi, J. Cosmol. Astropart. Phys 2009, 006, (2009).

[39] A. Avelino and U. Nucamendi, J. Cosmol. Astropart. Phys 2010, 009, (2010).

[40] A. Montiel and N. Bretn, J. Cosmol. Astropart. Phys 2011, 023, (2011).

[41] A. Avelino, R. Garcia-Salcedo, T. Gonzalez, U. Nucamendi and I. Quiros, J. Cosmol. Astropart. Phys 2013, 012 (2013).

[42] X. Meng and Z. Ma, Eur. Phys. J. C 72, 1 (2012).

[43] H. Amirhashchi, Astrophys. Space Sci 345, 439 (2013).44] B. Pourhassan, Int. J. ,

1350061 (2013).

[45] K. Nozari, N. Behrouz and A. Sheykhi, Int. J. Theor. Phys 52, 2351 (2013).

[46] W. Li and L. Xu, Eur. Phys. J. C 74, 2706 (2014).

[47] X. H. Meng, J. Ren and M. G. Hu, Commun. Theor. Phys 47, 379 (2007).

[48] M. R. Setare and A. Sheykhi, Int. J. Mod. Phys. D 19, 1205 (2010).

[49] C. Ju-Hua, Z. Sheng and W. Yong-Jiu, Chin. Phys. Lett 28, 029801 (2011).

[50] H. Amirhashchi, Astrophys. Space Sci 351, 641 (2014).

[51] A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, Adv. Theor. Math. Phys 7, 233 (2003).

[52] M. Bojowald, Living Rev. Rel 8, 11 (2005).

[53] M. Bojowald, Living Rev. Rel 11, 4 (2008).

[54] A. Ashtekar, P. Singh, Class. Quant. Grav 28, 213001 (2011).

[55] C. Rovelli, Living Rev. Rel 1, 1 (1998).

[56] T. Thiemann, Lect. Notes. Phys 631, 41 (2003).

[57] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quant. Grav 21, R53 (2004).

[58] C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[59] A. Corichi, J. Phys. Conf. Ser 24, 1 (2005).

[60] T. Thiemann, Lect. Notes. Phys 721, 185 (2007).

[61]. A. Ashtekar, T. Pawlowski and P. Singh, Phys. Rev. D 74, 084003 (2006).

[62] A. Ashtekar, AIP Conf. Proc 861, 3 (2006).

[63] N. Mebarki and S. Benchikh, Proceedings of Sciences PoS FFP14, 2 (2014).

[64] M. Sami, P. Singh and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 74, 043514 (2006).

[65] D. Samart and B. Gumjudpai, Phys. Rev. D 76, 043514 (2007).

[66] K. Xiao and J. Y. Zhu, Phys. Rev. D 83, 083501 (2011).

المحور الثاني

[67] Calder, Nigel, Einstein's universe, New York: Wings Books; Avenel, NJ: Distributed by Outlet Book Company, (1982 © 1979)

[68] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences 15 (1929)

[69] W. L. Freedman, Astrophys. J. 553 (2001)

[70] A. G. Riess, Astrophys. J. 699 (2009)

[71] F. Beutler, arXiv : 1106.3366 [astro-ph.CO] (2011)

[72] A. R. Liddle, "An Introduction to Modern Cosmology", Second Edition, University of Sussex, UK (2003).

[73] J. Lidsey, http://cosmology-lectures.angelfire.com/.

[74] A. R. Liddle, D. H. Lyth, "Cosmological Inflation and Large-Scale Structure", ISBN 052166022X. Cambridge, UK: Cambridge University Press, (2000).

[75] Y. Mellier, arXiv:astro-ph/9901116, (1999).

[76]. F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” Helvetica Physica Acta 6 (1933).

[77] F. Zwicky, Astrophysical Journal 86 (1937).

[78] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, Phys.Rept. 267 (1996).

[79] G. B. Gelmini, Int.J.Mod.Phys. A23 (2008).

[80] N. Fornengo, Adv.Space Res. 41 (2008).

[81] G. Bertone, arXiv:0710.5603 [astro-ph], (2007).

[82] A. R. Liddle and D. H. Lyth, “Cosmological Inflation and Large-Scale Structure,” Cambridge University Press, (2000).

[83] P. Niessen, arXiv:astro-ph/0306209, (2003).

[84] E. Zackrisson, ‘Introduction to Dark Matter’, Excerpts from the Ph.D. Thesis Quasars and Low Surface Brightness Galaxies as Probes of Dark Matter (Uppsala University 2005).

[85] S .Perlmutter, Unit 10: Dark Matter, physics for 21st century, www.learner.org.

المحور الثالث

[86] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, in Gravitation: An Introduction to Current Research, edited by L. Witten (John Wiley, NewYork, 1962).

[87] T. Boot. ‘The Road to Loop Quantum Gravity’, INSPIRE: thesis (2008).

[88] S. Holst, Phys. Rev. D53 (1996).

[89] L. Linsefors. ‘Consistency and observational consequences of loop quantum cosmology’, thesis (2017).

المحور الرابع

[90] N. Chan, ‘Dynamical systems in cosmology’, PhD thesis, University College London (2012).

[91] J. P. LaSalle, and S. Lefschetz, ‘Stability by Liapunov’s Direct Method’, Academic Press, NewYork (1961).

[92] M. Malisoff and F. Mazenc, in Constructions of Strict Lyapunov Functions, Communication and Control Engineering Series, Springer, London (2009).

[93] H.K. Khalil, in nonlinear systems, eds. Englewood Cliffs (NJ: Prentice Hall 1996).

[94] A. Avelino, R. Garcia-Salcedo, T. Gonzalez, U. Nucamendi and I. Quiros, J. Cosmol. Astropart. Phys (2013).

[95] O. Farooq and B. Ratra, ApJ 766, L7 (2013).

Dynamical Study of a Viscous Dark Energy Model in Classical and Loop Quantum Cosmology

Abstract

In this thesis we have suggested two cosmological models.in the first one we have studied the dynamical behaviors and stability properties of a flat space FRW universe filled with pressureless dark matter and viscous dark energy in the context of standard classical and loop quantum cosmology. Assuming that the dark energy has a constant bulk viscosity, it is found that the bulk viscosity effects influence only the quintessence model case leading to the existence of a viscous late time attractor solution of de-Sitter type, whereas, the quantum geometry effects influence the phantom model case where the big rip singularity is removed. Moreover, compared with the more recent data, our results of the Hubble parameter as a function of the redshift are in a good agreement. However, in the second model we have studied the dynamical behaviors and stability properties of a flat space FRW universe filled with pressureless dark matter and viscous dark energy in the context of loop quantum cosmology. Assuming that the dark energy has bulk viscosity in the general form, we have found there exists under some appropriate parameters a stable late time viscous dark energy dominated solution of de Sitter type. the problem of future singularity (big rip) will never occur in this scenario.

Keywords: Bulk Viscosity, Loop Quantum Gravity, Dark Energy, Dark matter.

Étude dynamique d'un modèle d'une visqueuse d'énergie sombre dans le contexte de la cosmologie standard classiques et la cosmologie quantique des boucles

Résumé

Dans cette thèse on a proposé deux modèles cosmologiques. Dans le premier, on a étudié le comportement dynamique et les propriétés de stabilité d'un FRW univers qui est plat et qui est rempli de la matière sombre et d'une visqueuse énergie sombre dans le contexte de la cosmologie standard classiques et la cosmologie quantique des boucles. En assumant que l'énergie sombre est dotée d'une seconde viscosité qui est constante, on a trouvé que l'effet de cette viscosité n'influence que le modèle de quintessence et nous ramène à une existence de solution stable d'un univers dominé par une énergie sombre visqueuse de type de de Sitter, alors que, les effets de la géométrie quantique influencent le modèle d'une énergie fantôme où la singularité de la grande déchirure est supprimée. D'autan plus, en comparant nos résultats concernant le paramètre Hubble en fonction de décalage spectral avec des observations récentes on trouvé qu'ils sont compatibles. Dans le second modèle, on a étudié comportement dynamique et les propriétés de stabilité d'un FRW univers qui est plat et qui est rempli de la matière sombre et d'une visqueuse énergie sombre dans le contexte de la cosmologie quantique des boucles. En assumant que l'énergie sombre est dotée d'une seconde viscosité avec une terme générale, on a trouvé qu'il existe sous certains paramètres appropriés une solution stable d'énergie sombre visqueuse de type de de Sitter. Le problème de la grande déchirure n'apparaît jamais dans ce scénario.

Mots clés : seconde viscosité, gravité quantique des boucles, énergie sombre, matière sombre.

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بِاقتراح نموذجين كونيين. حيث في النموذج الأول قمنا بالدراسة الديناميكية لفضاء FRW المسطح الذي يحتوي على المادة المظلمة والطاقة المظلمة اللَّزجة بفرض أنَّ هذه الأخيرة لها معامل لزوجة ثابت في مرجع الكوسمولوجيا الكلاسيكي والكوانتي. فوجدنا أنَّ أثار اللُّزوجة السائبة لها تأثير فقط على الطاقة المظلمة من نوع الجوهرة (quintessence) مما يؤدي إلى وجود حل مثير للاِهتمام مستقر لزج جاذب في آخر الزمان من نوع ديستر بينما الأثار الهندسية الكوانتية لها تأثير على نموذج الشبح (phantom) بحيث تؤدي إلى اِختفاء النقطة الشاذة التي قد تحدث في المستقبل (الانشقاق الكبير). وعلاوة على ذلك، قمنا بمقارنة هذا النموذج مع بيانات الأرصاد الحديثة فوجدنا توافق كبير بينهما. أمَّا في النموذج الثاني فقد قمنا بنفس الدراسة في النموذج الأول ولكن بأخذ معامل اللُّزوجة بعبارته العامة فوجدنا أنَّ كوننا سيستقر في الأخير في حقبة تكون الطاقة المظلمة اللَّزجة من نوع ديستر هي المهيمنة سواءا في نموذج الشبح (phantom) أو الجوهرة (quintessence).

الكلمات الفتاحية: اللُّزوجة السائبة، الجاذبية الحلقية الكمية، الطاقة المظلِّمة، المادة المظلِّمة.