

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :
Série :

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITE : Physique Energétique

OPTION : Photo-thermique

THEME :

Contrôle de la couche limite laminaire d'un écoulement stationnaire, visqueux, compressible et subsonique autour d'un profil bidimensionnel

Par : NAHOUI Azzedine

Soutenue, le 18 /02 /2018

Devant le jury :

| | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|---|
| Président | N. ATTAF | Professeur | Université Frères MENTOURI Constantine 1 |
| Rapporteur | L. BAHI | Professeur | Université Frères MENTOURI Constantine 1 |
| Examineurs | M. H. BENHAMZA | Professeur | Université 8 Mai 1945 Guelma |
| | A. BRIMA | Professeur | Université Mohamed KHIDER Biskra |

Résumé

Une étude numérique d'une couche limite laminaire d'un écoulement stationnaire, visqueux, compressible et subsonique autour d'un profil NACA bidimensionnel a été menée sans et avec contrôle.

Le domaine d'écoulement a été scindé en deux zones, l'une proche paroi, la couche limite, siège des phénomènes de frottement et l'autre, une zone externe où l'écoulement est considéré potentiel.

L'écoulement potentiel est étudié par la méthode des panneaux pour la détermination de la distribution de la vitesse externe nécessaire au traitement de la couche limite.

La couche limite a été étudiée en utilisant le modèle de Prandtl et la méthode de KELLER en réduisant l'ordre des équations différentielles en premier ordre, l'écriture des équations algébriques, la linéarisation par la méthode de Newton via un processus de calcul itératif et enfin la résolution par la méthode d'élimination par blocks.

Les distributions des coefficients de pression et de portance ont été déterminées et examinées pour différents nombre de Mach et différents angles d'attaque avec une épaisseur relative variable.

Le contrôle thermique par chauffage pariétal ou par refroidissement pariétal a été étudié et les résultats ont démontré seulement l'efficacité du contrôle par refroidissement pariétal sur le recul du point de séparation avoisinant les 10% de la corde du profil.

Le contrôle dynamique par aspiration ou par soufflage a démontré son efficacité sur le recul du point de séparation, le recul a atteint les 10% de la corde du profil.

La superposition des procédures du contrôle thermique et dynamique ont démontré encore une fois plus d'efficacité sur le recul du point de séparation de la couche limite avec un gain de 15% de la corde du profil.

Mots clés : Couche limite laminaire, compressible, nombre de Mach, nombre de Reynolds, contrôle, point de séparation, aspiration, soufflage, refroidissement pariétal.

DEDICACES

Je dédie ce travail à l'âme de mon cher père et à ma chère maman.

Je dédie ce travail à ma petite famille, ma femme et mes enfants.

Je dédie ce travail à mes frères et ma sœur.

Je dédie ce travail à mes amis Fayçal, Maamar, Mourad et Mounir.

Je dédie ce travail à mes collègues de travail et en particulier M^r REFFAS Abdelbaki pour ses conseils et son soutien moral durant ces dernières années.

Je dédie ce travail à tous ceux qui veillent pour que ce pays puisse avancer.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu, de m'avoir donné l'effort et la patience pour que je puisse aller jusqu'au bout afin que ce travail puisse être réalisé.

Je remercie M^r **BAHI Lakhdar**, Professeur à l'université Frères MENTOURI Constantine 1, qui m'a proposé ce sujet et qui a su m'amener pédagogiquement jusqu'à la fin de réalisation de cette thèse.

Je remercie M^r **BAHI Lakhdar**, qui a montré une patience remarquable durant toutes ces années et qui m'a permis également de partager des débats scientifiques assez fructueux au sein du laboratoire de Physique Energétique.

Le sujet proposé est d'actualité et d'originalité remarquables, pour ces deux qualités, que M^r **BAHI Lakhdar** trouve ici, les expressions de ma sincère reconnaissance et mon profond respect.

Je remercie M^r **ATTAF Nadhir**, Professeur à l'université Frères MENTOURI Constantine 1, qui a accepté de présider le jury de ma soutenance, et qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

Je remercie M^r **BENHAMZA Mohamed El Hocine**, Professeur à l'université 8 Mai 1945 Guelma, et qui a accepté d'être membre de jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

Je remercie M^r **BRIMA Abdelhafid**, Professeur à l'université Mohamed KHIDER BISKRA, et qui a accepté d'être membre de jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

Merci à tous

Notation utilisée

Lettres latines

| | | |
|------------------|---|--|
| x et y | Cordonnées cartésiennes | [m] |
| $(x/c)_{sep}$ | Cordonnée du point de séparation | [-] |
| $(x/c)_{étendu}$ | Etendue de contrôle par aspiration ou soufflage | [-] |
| k_n | Pas de l'abscisse de la surface du profil | [-] |
| c | Corde du profil considéré | [m] |
| h | Facteur de forme | [-] |
| h_j | Pas de l'ordonnée perpendiculaire à la surface du profil | [-] |
| m_2 | Paramètre adimensionnel $m_2 = \frac{x}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$ | [-] |
| m_1 | Paramètre adimensionnel $m_1 = \frac{1}{2} \left(1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e \mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right)$ | [-] |
| u | Vitesse axiale de l'écoulement de la couche limite | [m.s ⁻¹] |
| v | Vitesse verticale de l'écoulement de la couche limite | [m.s ⁻¹] |
| C_p | Chaleur spécifique | [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹] |
| T | Température de l'écoulement de la couche limite | [K] |
| H | Enthalpie de l'écoulement de la couche limite | [J.kg ⁻¹] |
| p | Pression de l'écoulement de la couche limite | [N.m ⁻²] |
| u_e | Vitesse axiale de l'écoulement potentiel | [m.s ⁻¹] |
| T_e | Température de l'écoulement potentiel | [k] |
| H_e | Enthalpie de l'écoulement potentiel | [J.kg ⁻¹] |
| P_e | Pression de l'écoulement potentiel | [N.m ⁻²] |
| U_∞ | Vitesse axiale à l'infini | [m.s ⁻¹] |
| V_∞ | Vitesse verticale à l'infini | [m.s ⁻¹] |
| T_∞ | Température à l'infini | [k] |
| p_∞ | Pression à l'infini | [N.m ⁻²] |

| | | |
|--------------------------|---|--|
| H_∞ | Enthalpie totale | [J.kg ⁻¹] |
| T_w | Température à la paroi | [k] |
| C_{pw} | Chaleur spécifique à la paroi | [J.kg ⁻¹ .k ⁻¹] |
| K_w | Conductivité thermique à la paroi | [w.m ⁻¹ .k ⁻¹] |
| q_w^\bullet | Flux de chaleur à la paroi | [w.m ⁻²] |
| g_w | Enthalpie adimensionnelle à la paroi | [-] |
| p_w | Dérivée de l'enthalpie adimensionnelle à la paroi | [-] |
| M_∞ | Nombre de Mach | [-] |
| Pr | Nombre de Prandtl | [-] |
| R_x | Nombre de Reynolds | [-] |
| R_∞ | Nombre de Reynolds à l'infini | [-] |
| f | Fonction de courant | [-] |
| f' | Vitesse axiale adimensionnelle | [-] |
| f'' | Dérivée de la vitesse axiale adimensionnelle | [-] |
| JL | Nombre de points à travers la couche limite | [-] |
| N | Nombre de stations de calcul | [-] |
| g | Enthalpie totale adimensionnelle | [-] |
| p | Dérivée de l'enthalpie totale adimensionnelle | [-] |
| C_p | Coefficient de pression | [-] |
| CL | Coefficient de portance | [-] |
| A | Matrice du système linéaire | [-] |
| r | Vecteur des résultats | [-] |
| $(v_w/U_\infty)_{asp}$ | Débit d'aspiration | [-] |
| $(v_w/U_\infty)_{souff}$ | Débit de soufflage | [-] |
| F_L | Force de portance | [N] |
| p_i | Pression à l'intrados | [N.m ⁻²] |

| | | |
|------------|---|----------------------|
| p_e | Pression à l'extrados | [N.m ⁻²] |
| n_j | Vecteur unitaire perpendiculaire sur le panneau j | [-] |
| t_j | Vecteur unitaire parallèle sur le panneau j | [-] |
| l_j | Longueur du panneau j | [-] |
| r_j | Résidu de calcul | [-] |
| A_j | Matrice élémentaire | |
| B_j | Matrice élémentaire | |
| C_j | Matrice élémentaire | |
| Γ_j | Matrice élémentaire | |
| Δ_j | Matrice élémentaire | |
| w_j | Matrice élémentaire | |

Lettres grecques

| | | |
|---------------|---|--|
| η | Cordonnées cartésiennes | [-] |
| η_e | Distance perpendiculaire entre la paroi et l'écoulement potentiel | [-] |
| α | Angle d'attaque | [°] |
| ρ | Masse volumique de l'écoulement de la couche limite | [kg.m ⁻³] |
| μ | Viscosité dynamique de l'écoulement de la couche limite | [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹] |
| ρ_e | Masse volumique de l'écoulement | [kg.m ⁻³] |
| μ_e | Viscosité dynamique de l'écoulement potentiel | [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹] |
| ρ_∞ | Masse volumique à l'infini | [kg.m ⁻³] |
| μ_∞ | Viscosité dynamique à l'infini | [kg.m ⁻¹ .s ⁻¹] |
| τ_p | Contrainte pariétale | [N.m ⁻²] |
| Ψ | Fonction de courant | [] |
| δ | Vecteur des inconnus | [-] |
| δ/c | Epaisseur de la couche limite | [-] |

| | | |
|------------------|--------------------------------------|-----|
| Θ | Épaisseur de quantité de mouvement | [-] |
| θ_{asp} | Angle d'aspiration | [°] |
| θ_{souff} | Angle de soufflage | [°] |
| θ_j | Angle du panneau j avec l'horizontal | [°] |

Indices

| | |
|----------|---|
| i | Intrados |
| j | Panneau numéro j |
| L | Lift (Portance) |
| e | Extérieur (Hors la couche limite) ou Extrados |
| étendu | Etendue d'aspiration ou de soufflage |
| sep | Séparation |
| w | Wall (Paroi) |
| ∞ | Infini |
| asp | Aspiration |
| souf | Soufflage |

Sommaire

| | |
|-------------------|---|
| Introduction..... | 1 |
|-------------------|---|

Chapitre I - Modélisation mathématique

| | |
|--|---|
| Modélisation mathématique | 5 |
| 1. Hypothèses de modélisation de la couche limite | 5 |
| 2. Modèle mathématique | 5 |
| 2.1. Equations de la couche limite compressible..... | 5 |
| 2.1.1. Equations de la continuité | 5 |
| 2.1.2. Equations de la quantité de mouvement..... | 5 |
| 2.1.3. Equations de l'énergie | 5 |
| 2.2. Conditions aux limites..... | 6 |
| 3. Grandeurs de couche limite..... | 6 |
| 3.1. Epaisseur de la couche limite | 6 |
| 3.2. Epaisseur de la quantité de mouvement | 7 |
| 3.3. Coefficient du frottement | 7 |
| 4. Changement de repère | 7 |
| 4.1.3 Grandeurs de la couche limite dans le nouveau repère. | 8 |
| 4.2.1. Epaisseur de la couche limite. | 8 |
| 4.2.2. Epaisseur de quantité de mouvement | 8 |
| 4.2.4. Coefficient du frottement | 8 |

Chapitre II - Résolution numérique

| | |
|---|----|
| 1. Méthode de KELLEER | 9 |
| 1.1. Réduction de l'ordre des équations | 9 |
| 1.2. Ecriture des équations algébriques en utilisant les différences centrales..... | 10 |
| 1.3. Linéarisation des équations algébriques et mise en forme matricielle..... | 11 |
| 1.3.1. Méthode de Newton | 12 |
| 1.3.1. Mise en forme matricielle | 14 |
| 1.4. Résolution par la méthode d'élimination par blocks..... | 16 |
| 1.4.1. Balayage en avant..... | 16 |
| 1.4.2. Balayage en arrière..... | 16 |
| 2. Algorithme de résolution..... | 17 |

| | |
|---|----|
| 2.1. Etape d'initialisation | 17 |
| 2.2. Etape de calcul des paramètres de l'écoulement potentiel | 17 |
| 2.3. Etape de mise en marche du processus itératif..... | 17 |
| 3. Code de calcul | 17 |
| 3.1 Sous-programme Input..... | 18 |
| 3.2. Sous-programme Ivpl..... | 19 |
| 3.3. Sous-programme Coeff | 20 |
| 3.4. Sous-programme Solver..... | 20 |
| 3.5. Sous-programme Output | 20 |

Chapitre III - Détermination de la vitesse de l'écoulement potentiel

| | |
|--|----|
| Détermination de la vitesse de l'écoulement potentiel..... | 21 |
| 1. Introduction | 21 |
| 2. Modélisation mathématique | 21 |
| 2.1. Equation de l'écoulement potentiel compressible..... | 21 |
| 2.2.1. Condition de la tangence | 21 |
| 2.2.2. Condition de KUTTA-JOUWOUVSKI..... | 22 |
| 2.2.3. Transformation de Prandtl-Glauert | 22 |
| 3. Résolution numérique | 22 |
| 3.1. Discrétisation du domaine de calcul..... | 23 |
| 3.1.1. Nomenclature du panneau | 24 |
| 3.1.2. Définition de l'équation du potentiel | 24 |
| 3.2. Discrétisation des équations | 25 |
| 3.2.1. Condition de non-perméabilité du fluide | 25 |
| 3.2.2. Condition de KUTTA-JOUWOUSKI..... | 26 |
| 4. Implantation numérique de la méthode des panneaux | 28 |
| 4.1. Algorithme de calcul l'écoulement compressible | 28 |
| 5. Effets de compressibilité | 28 |
| 5.1. Distribution du coefficient de pression | 28 |
| 5.1.1 Comparaison des coefficients de pression | 29 |
| 5.1.2. Apparition des effets de la compressibilité | 29 |
| 5.1.3. Effet du nombre de Mach..... | 30 |
| 5.1.4. Effet de l'angle d'attaque | 31 |

| | |
|--|----|
| 5.2.5. Effet de l'épaisseur relative | 31 |
| 5.2. Distribution du coefficient de portance | 32 |
| 5.2.1. Effet de compressibilité..... | 32 |
| 5.2.2. Effet de l'épaisseur relative | 33 |
| 5.2.3. Distribution du nombre de Mach | 33 |
| Conclusion..... | 34 |

Chapitre IV- Validation et comparaison des écoulements compressible et incompressible

| | |
|---|----|
| 1. Validation du code de calcul élaboré | 35 |
| 1.1. Effet du nombre de Mach..... | 35 |
| 1.2. Point de séparation d'un écoulement non-similaire | 36 |
| 1.3. Distribution du coefficient de frottement local | 37 |
| 1.3.1. Nomenclature d'un profil aérodynamique | 37 |
| 1.3.2. Distribution du coefficient de frottement local | 37 |
| 2. Comparaison entre les couches limites compressible et incompressible | 38 |
| 2.1. Paramètres de cisaillement pariétaux | 38 |
| 2.2. Profils d'enthalpie totale | 39 |
| 2.3. Profils de la vitesse..... | 39 |
| 2.4. Coefficients du frottement local | 40 |
| 2.5. Epaisseurs de la couche limite | 41 |
| 2.6. Epaisseurs de quantité du mouvement | 41 |
| 3.1. Effets du nombre de Mach | 42 |
| 3.2. Profils de la vitesse..... | 42 |
| 3.3. Coefficients du frottement local | 43 |
| 3.4. Epaisseurs de la couche limite | 44 |
| 3.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 44 |
| 4. Effets du nombre de Reynolds | 45 |
| 4.1. Profils de l'enthalpie totale | 45 |
| 4.2. Profils de la vitesse..... | 46 |
| 4.3. Coefficients du frottement local | 46 |
| 4.4. Epaisseurs de la couche limite | 47 |
| 4.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 48 |

Chapitre V- Contrôle thermique

| | |
|---|----|
| 5.1. Effets du chauffage pariétal..... | 49 |
| 5.1.1. Profils de l'enthalpie totale | 49 |
| 5.1.2. Profils de la vitesse..... | 50 |
| 5.1.3. Coefficients du frottement local | 51 |
| 5.1.4. Epaisseurs de la couche limite | 51 |
| 5.1.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 52 |
| 5.2. Effets du refroidissement pariétal | 52 |
| 5.2.1. Profils de l'enthalpie totale | 53 |
| 5.2.2. Profils de la vitesse..... | 54 |
| 5.2.3. Coefficients du frottement local | 55 |
| 5.2.4. Epaisseurs de la couche limite | 55 |
| 5.2.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 56 |
| 5.3. Comparaison des effets thermiques..... | 57 |
| 5.3.1. Contrôle du point de séparation par chauffage pariétal..... | 57 |
| 5.3.2. Contrôle du point de séparation par refroidissement pariétal | 57 |
| 6. Comparaison des effets thermique | 58 |
| 6.1. Profils de l'enthalpie totale | 58 |
| 6.2. Profils de la vitesse..... | 59 |
| 6.3. Coefficients du frottement local | 59 |
| 6.4. Epaisseurs de la couche limite | 60 |
| 6.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 61 |

Chapitre VI - Contrôle dynamique

| | |
|--|----|
| 1. Effets des controles par aspiration et par soufflage..... | 62 |
| 1.1. Effets des controles par aspiration | 62 |
| 1.1.1. Etendue de l'aspiration..... | 62 |
| 1.1.2. Angle d'aspiration | 63 |
| 1.1.3. Débit d'aspiration | 64 |
| 1.2. Effets des controles par soufflage | 64 |
| 1.2.1. Etendue du soufflage | 65 |
| 1.2.2. Angle du soufflage | 65 |
| 1.2.3. Débit du soufflage | 66 |

| | |
|---|-----|
| 1.3. Comparaison des effets des controles par aspiration et par soufflage..... | 67 |
| 1.3.1. Profils de l'enthalpie totale | 67 |
| 1.3.2. Profils de la vitesse..... | 67 |
| 1.3.3. Coefficients du frottement local | 68 |
| 1.3.4. Epaisseurs de la couche limite | 69 |
| 1.3.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 69 |
| Chapitre VII- Superposition des procédures du contrôle thermique et dynamique | |
| 1. Effets du contrôle par aspiration associé au contrôle par refroidissement pariétal | 71 |
| 1.1. Profils de l'enthalpie totale | 71 |
| 1.2. Profils de la vitesse..... | 72 |
| 1.3. Coefficients du frottement local | 72 |
| 1.4. Epaisseurs de la couche limite | 73 |
| 1.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 74 |
| 2. Effets du contrôle par soufflage associé au contrôle par refroidissement pariétal | 74 |
| 2.1. Profils de l'enthalpie totale | 74 |
| 2.2. Profils de la vitesse..... | 75 |
| 2.3. Coefficients du frottement local..... | 76 |
| 2.4. Epaisseurs de la couche limite | 76 |
| 2.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 77 |
| 3. Effets des contrôles superposés..... | 78 |
| 3.1. Profils de l'enthalpie totale | 78 |
| 3.2. Profils de la vitesse..... | 78 |
| 3.3. Coefficients du frottement local..... | 79 |
| 3.4. Epaisseurs de la couche limite | 80 |
| 3.5. Epaisseurs de quantité du mouvement | 80 |
| Conclusion..... | 82 |
| Références | 84 |
| Annexe 01 | 88 |
| Annexe 02 | 92 |
| Annexe 03 | 98 |
| Annexe 04 | 99 |
| Annexe 05 | 105 |

| | |
|-----------------|-----|
| Annexe 06 | 110 |
| Annexe 07 | 113 |
| Abstract | 114 |
| ملخص..... | 115 |

Liste des figures

| | |
|---|----|
| Figure 2.1 Grille de discrétisation de KELLER..... | 10 |
| Figure 3.1 Discrétisation de la surface portante en panneaux..... | 23 |
| Figure 3.2 Nomenclature du profil aérodynamique par la méthode des panneaux..... | 24 |
| Figure 3.3 Nomenclature du système de coordonnées locales..... | 25 |
| Figure 3.4 Comparaison des coefficients de pression..... | 29 |
| Figure 3.5 Distribution du coefficient de pression..... | 30 |
| Figure 3.6 Effet de compressibilité sur la distribution du coefficient de pression..... | 30 |
| Figure 3.7 Effet de l'angle d'attaque sur la distribution du coefficient de pression..... | 31 |
| Figure 3.8 Effet de l'épaisseur relative sur la distribution du coefficient de pression,..... | 32 |
| Figure 3.9 Effet de compressibilité sur la distribution de coefficient de portance..... | 32 |
| Figure 3.10 Effet de l'épaisseur relative sur la distribution du coefficient de portance..... | 33 |
| Figure 3.11 Effet du nombre de Mach sur le coefficient de portance..... | 34 |
| Figure 4.1 Effet du nombre de Mach sur le coefficient du frottement global..... | 36 |
| Figure 4.2 Point de séparation d'un écoulement non-similaire, Plaque plane..... | 37 |
| Figure 4.3 Nomenclature d'un profil NACA 0012..... | 37 |
| Figure 4.4 Distribution du coefficient de frottement local..... | 38 |
| Figure 4.5 Distribution du paramètre de cisaillement pariétal..... | 38 |
| Figure 4.6 Distribution de l'enthalpie totale..... | 39 |
| Figure 4.7 Comparaison des profils de la vitesse..... | 40 |
| Figure 4.8 Comparaison des coefficients du frottement local..... | 40 |
| Figure 4.9 Comparaison des épaisseurs de la couche limite..... | 41 |
| Figure 4.10 Comparaison des épaisseurs de quantité du mouvement..... | 42 |
| Figure 4.11 Effet du nombre de Mach sur le profil de l'enthalpie totale..... | 42 |
| Figure 4.12 Effet du nombre de Mach sur le profil de la vitesse..... | 43 |
| Figure 4.13 Effet du nombre de Mach sur le coefficient du frottement local..... | 43 |

| | |
|--|----|
| Figure 4.14 Effet du nombre de Mach sur l'épaisseur de la couche limite..... | 44 |
| Figure 4.15 Effet du nombre de Mach sur l'épaisseur de quantité du mouvement..... | 45 |
| Figure 4.16 Effet du nombre de Reynolds sur le profil de l'enthalpie totale. | 45 |
| Figure 4.17 Effet du nombre de Reynolds sur le profil de la vitesse. | 46 |
| Figure 4.18 Effet du nombre de Reynolds sur le coefficient du frottement local. | 47 |
| Figure 4.19 Effet du nombre de Reynolds sur l'épaisseur de la couche limite..... | 47 |
| Figure 4.20 Effet du nombre de Reynolds sur l'épaisseur de quantité du mouvement..... | 48 |
| Figure 5.1 Effet du chauffage pariétal sur l'enthalpie totale..... | 49 |
| Figure 5.2 Effet du chauffage pariétal sur le profil de la vitesse. | 50 |
| Figure 5.3 Effet de chauffage pariétal sur le coefficient du frottement. | 50 |
| Figure 5.4 Effet de chauffage pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. | 51 |
| Figure 5.5 Effet de chauffage pariétal sur l'épaisseur de quantité du mouvement. | 52 |
| Figure 5.6 Effet du refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale..... | 52 |
| Figure 5.7 Effet du refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. | 53 |
| Figure 5.8 Effet du refroidissement pariétal sur le coefficient du frottement. | 54 |
| Figure 5.9 Effet de refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. | 54 |
| Figure 5.10 Effet de refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité du mouvement. | 55 |
| Figure 5.11 Contrôle du point de séparation par chauffage pariétal. | 55 |
| Figure 5.12 Contrôle du point de séparation par refroidissement pariétal. | 56 |
| Figure 5.13 Effets thermiques sur le profil de l'enthalpie totale..... | 57 |
| Figure 5.14 Effets thermiques sur le profils de la vitesse | 58 |
| Figure 5.15 Effets thermiques sur le coefficients du frottement local | 58 |
| Figure 5.16 Effets thermiques sur l'épaisseur de la couche limite..... | 59 |
| Figure 5.17 Effets thermiques sur l'épaisseur de quantité du mouvement | 60 |
| Figure 5.18 Effets thermiques sur l'épaisseur de quantité du mouvement | 60 |
| Figure 5.19 Effets thermiques sur l'épaisseur de quantité du mouvement | 61 |

| | |
|--|----|
| Figure 6.1 Schématisation du contrôle par aspiration. | 62 |
| Figure 6.2 Effet de l'étendue d'aspiration sur le point séparation. | 63 |
| Figure 6.3 Effet de l'angle d'aspiration sur le point séparation. | 63 |
| Figure 6.4 Effet du débit d'aspiration sur le point séparation. | 64 |
| Figure 6.5 Schématisation du contrôle par soufflage. | 65 |
| Figure 6.6 Effet de l'étendue du soufflage sur le point séparation. | 65 |
| Figure 6.7 Effet de l'angle du soufflage sur le point séparation. | 66 |
| Figure 6.8 Effet du débit du soufflage sur le point séparation. | 66 |
| Figure 6.9 Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur les distributions de l'enthalpie totale. | 68 |
| Figure 6.10 Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur les distributions de la vitesse. | 68 |
| Figure 6.11 Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur le coefficient du frottement. | 68 |
| Figure 6.12 Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur l'épaisseur de la couche limite. | 69 |
| Figure 6.13 Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur l'épaisseur de quantité de mouvement. | 70 |
| Figure 7.1 Effets des contrôles par aspiration superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale. | 71 |
| Figure 7.2 Effets des contrôles par aspiration superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. | 72 |
| Figure 7.3 Effets des contrôles par aspiration superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient du frottement local. | 73 |
| Figure 7.4 Effets des contrôles par aspiration superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. | 73 |
| Figure 7.5 Effets des contrôles par aspiration superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité de mouvement. | 74 |

| | |
|---|----|
| Figure 7.6 Effets des contrôles par soufflage superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale. | 75 |
| Figure 7.7 Effets des contrôles par soufflage superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. | 75 |
| Figure 7.8 Effets des contrôles par soufflage superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient de frottement local. | 76 |
| Figure 7.9 Effets des contrôles par soufflage superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite | 77 |
| Figure 7.10 Effets des contrôles par soufflage superposé au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité de mouvement | 77 |
| Figure 7.11 Effets du contrôle par aspiration et par soufflage superposés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale. | 78 |
| Figure 7.12 Effets du contrôle par aspiration et par soufflage superposés au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. | 79 |
| Figure 7.13 Effets du contrôle par aspiration et par soufflage superposés au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient de frottement local. | 79 |
| Figure 7.14 Effets du contrôle par aspiration et par soufflage superposés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. | 80 |
| Figure 7.15 Effets du contrôle par aspiration et par soufflage superposés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité de mouvement. | 81 |

Introduction

Face aux contraintes économiques, environnementales et du confort, l'intérêt du développement des techniques de contrôle pour améliorer les performances des ailes d'avion, des compresseurs, des turbines et des éoliennes, réduire leurs consommations et leurs pollution et améliorer leurs stabilités, a pris un essor considérable [1].

Les écoulements pratiques sont généralement turbulents, et ces écoulements turbulents résistent plus aux gradients de pression défavorables et engendrent plus de frottements que les écoulements laminaires.

Les écoulements laminaires présentent l'avantage d'être plus abordables mathématiquement que les écoulements turbulents, et l'inconvénient de résistent moins au phénomène de décollement.

Le décollement de la couche limite et les structures organisées qui en découlent conduisent à des pertes de performances et à la génération de bruit. Ceci a conduit au désir d'appliquer le contrôle en vue de diminuer voir supprimer la zone décollée [2-4].

Le contrôle d'écoulements consiste à manipuler l'écoulement afin de l'amener dans un état souhaité. C'est un défi important en aérodynamique, car les enjeux techniques et économique du contrôle d'écoulement sont multiples et interviennent dans de nombreux domaines, notamment dans l'industrie aéronautique et l'industrie automobile. Diverses méthodes de contrôle ont été envisagées afin de contrôler le décollement [5-6], et qui peuvent être classées en deux classes : les méthodes passives (le changement de l'état de surface, l'utilisation de corps profilé) et les méthodes actives (le soufflage, l'aspiration, les MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), les jets synthétiques) [7-15].

Pour agir sur les propriétés d'un écoulement, l'ajout ou le retrait de quantité de mouvement au fluide en proche paroi permet de fortement modifier la couche limite, notamment au début de la séparation ou la vitesse de l'écoulement à proximité de la paroi s'annule. Deux méthodes ont été alors développées : l'aspiration et le soufflage [9].

Plusieurs techniques ont été explorées telles que la modification de géométrie pour obtenir un gradient de pression favorable plus long, l'utilisation de l'aspiration pour stabiliser la couche limite, ou encore le refroidissement de la surface. Le soufflage a aussi été une technique explorée pour éviter la séparation de la couche limite.

Les premiers moyens de contrôle actifs étaient stationnaires et consistaient en un soufflage ou une aspiration continue.

Le principe de l'aspiration consiste à aspirer le fluide de faible vitesse, voisin de la paroi ; ce qui permet de conserver une vitesse plus importante à la paroi, et donc d'éviter l'apparition d'un gradient inverse. Une aspiration du fluide perpendiculairement à la paroi, avec une composante pariétale indépendante de x , peut engendrer une couche limite d'épaisseur constante.

Le soufflage ou l'aspiration continue permettent de supprimer les décollements mais ils sont trop complexes et coûteux du point de vue rendement. Le soufflage continu permet également pour des forts débits et une fois que l'écoulement est attaché de contrôler la circulation autour d'un profil [11-13].

Le principe du soufflage continu en paroi est d'ajouter directement de la quantité de mouvement à la couche limite ralentie à proximité de la surface et permet de retarder la séparation. Ceci peut être réalisé par un compresseur ou un ventilateur auxiliaire, mais aussi en détournant du fluide extérieur vers la surface. Par exemple la fente entre un bec de bord d'attaque et le profil peut créer un écoulement de fluide par la connexion de l'extrados à basse pression avec l'intrados à plus haute pression. Des essais expérimentaux sur différents systèmes aérodynamiques (profils, cylindres, rampes, cavités...) et des essais en vol (SCHLICHTING (1968), STANEWSKI (2001)) ont montré que cette technique permettait d'agir efficacement sur un écoulement, mais elle présente les mêmes défauts que le système d'aspiration.

Il est possible de contrôler le décollement en utilisant des actionneurs thermiques [15-19]. Ces derniers fournissent de la chaleur dans la zone proche de la paroi et produisent ainsi une force sur l'écoulement externe due au changement de densité du fluide (cas d'un gaz) ou de viscosité du fluide (cas d'un liquide) ; ce qui entraîne un profil plein en proche paroi et une augmentation de la quantité de mouvement près de la proche paroi rendant la couche limite plus résistante au décollement (Chang, 1976). Les recherches de Cassel (2001) mettent en évidence les effets bénéfiques de ce type de contrôle sur le décollement instationnaire de la couche limite. Cependant, le temps de réponse de ce type de contrôle est relativement élevé et bien évidemment très gourmand en énergie. Ainsi, leur utilisation pour le contrôle en aérodynamique est difficilement applicable avec les technologies actuelles [6].

Une autre méthode d'action sur la transition laminaire-turbulente est de chauffer ou de refroidir la surface en contact avec l'écoulement. Cette modification de condition limite a des conséquences sur la viscosité du fluide à la paroi. En effet, la viscosité dynamique μ augmente avec la température. Ainsi les forces de cisaillement s'exerçant sur le fluide augmentent et les profils de vitesse présentent un point d'inflexion. Dans le cas d'une température de paroi supérieure à la température de l'écoulement principal, le transfert de chaleur de la paroi vers le fluide rend la couche limite fortement instable. Le nombre de Reynolds critique sur une plaque plane verticale, qui correspond au début de la zone de transition, diminue donc pour des températures de paroi plus élevées [16-19].

A l'inverse, le fait d'imposer une température à la paroi inférieure à la température de l'écoulement amont permet de réduire les instabilités et donc de repousser la transition.

Le contrôle d'un écoulement peut avoir un impact important dans l'industrie. En effet, réduire et/ou supprimer les effets négatifs d'un écoulement (réduction de bruit, diminution de trainée) et améliorer les effets positifs (augmentation du mélange de fluide, de la portance) peuvent augmenter les performances et les possibilités d'utilisation. Le contrôle consiste à amener l'écoulement dans l'état souhaité (Léger (2003)). Pour cela l'action est menée dans de nombreuses configurations en proche paroi sur ses caractéristiques telles que la transition de l'état laminaire vers l'état turbulent et la séparation [14].

La couche limite est la couche d'air, qui est, juste en contact avec le profil considéré, est divisée en deux parties, l'une est contact direct avec le profil, est le siège des phénomènes physiques complexes et l'autre plus loin où les effets de viscosité sont négligeables [190].

Le contrôle de la couche limite est toujours sujet d'actualité, en effet, plusieurs recherches assez récentes traitent le contrôle comme alternative pour un monde plus propre et moins consommateur d'énergie.

La thèse comprend sept chapitres, un chapitre qui a traité la modélisation mathématique de la couche limite laminaire d'un écoulement visqueux, stationnaire, compressible et subsonique, autour d'un profil bidimensionnel. Le modèle mathématique traitant ce genre de problèmes est le modèle de Prandtl a fait l'objet du premier chapitre, un changement de repère a permis de réduire à la fois, le nombre d'équations et le nombre de variables. Un deuxième chapitre, qui a traité la résolution numérique basé la méthode de KELLER, en commençant par la réduction l'ordre des équations différentielles, l'écriture des équations algébriques,

linéarisation de ces équations par la méthode de NEWTON via l'introduction d'un processus itératif et la résolution par la méthode d'élimination par blocks.

Un troisième chapitre, qui a déterminé la distribution de la vitesse de l'écoulement externe basé sur la méthode des panneaux pour contribuer à la fois, en fournissant une condition aux limites nécessaire à la modélisation mathématique du problème de la couche limite.

Un quatrième chapitre a traité un certain nombre de résultats pour valider le code de calcul élaboré et a mis en comparaison les écoulements compressible et incompressible.

Un cinquième chapitre a traité le contrôle thermique que ce soit par chauffage pariétal ou par refroidissement pariétal.

Un sixième chapitre a traité le contrôle dynamique, que ce soit par aspiration ou par soufflage.

Un dernier chapitre qui a traité la superposition des procédures du contrôle thermique et dynamique.

Enfin, une conclusion générale, qui résume toutes les parties d'étude.

Modélisation mathématique

Pour pouvoir cerner un problème physique donné ou tout simplement le délimiter ou plus précisément délimiter son cadre d'étude, l'arrêt d'un certain nombre d'hypothèses et la modélisation mathématique sont d'importance capitale pour une telle étude. Les équations différentielles régissant le problème de la couche limite, associées aux conditions aux limites appropriées et sous certain nombre d'hypothèses ne constitue qu'en fait que le modèle de Prandtl. Les équations du modèle de Prandtl seront étudiées en détail par la suite.

1. Hypothèses de la couche limite

On considère un écoulement stationnaire, visqueux et compressible d'un fluide sans force de masse avec les hypothèses citées ci-dessous [20-23]

1. La vitesse de l'écoulement extérieur est de l'ordre U_∞
2. La longueur caractéristique est de l'ordre L (position de la bosse)
3. L'épaisseur caractéristique est de l'ordre δ , avec $\delta \ll L$
4. Le gradient de la pression est d'ordre ρU_∞^2

2. Modèle mathématique

2.1. Equations de la couche limite compressible

Les équations de la couche limite compressible selon les références [20-24] sont les suivantes

2.1.1. Equation de la continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

2.1.2. Equations de la quantité de mouvement

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

2.1.3. Equation de l'énergie

$$C_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.4)$$

Avec $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$

Une autre équation reliant certains paramètres du fluide considéré (Air) reconnue sous le nom d'équation pour un fluide parfait subit une transformation isobarique est donnée par la formule (1.5)

$$\rho_e T_e = \rho T \quad (1.5)$$

L'équation de l'énergie (1.4) peut être exprimée en fonction de l'enthalpie totale qui facilite la résolution du système d'équations de Prandtl, telle que

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.6)$$

Donc, les équations du modèle mathématique ne sont que (1.1), (1.2) et (1.6).

2.2. Conditions aux limites

- A la paroi,

$$u(x, y = 0) = 0$$

$$v(x, y = 0) = v_w = 0$$

$$T(x, y = 0) = T_w \text{ ou } H(x, y = 0) = H_w(x)$$

$$\text{Dans le cas adiabatique } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_w = - \frac{c_{pw}}{K_w} q_w^{\bullet}$$

- A l'extérieur de la couche limite,

$$u(x, y = \infty) = u_e(x)$$

$$T(x, y = \infty) = T_e(x) \text{ ou } H = H_e(x)$$

$$P(x, y = \infty) = P_e(x)$$

- A l'entrée, on définit le profil initial, tel que

$$u(x = 0, y) = u(y)$$

$$v(x = 0, y) = v(y)$$

$$T(x = 0, y) = T(y)$$

- A l'arrêt du calcul, on définit le point de séparation par

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (1.7)$$

3. Grandeurs de la couche limite

3.1. Epaisseur de la couche limite

L'épaisseur de la couche limite est définie comme étant la distance transversale où la composante transversale de la vitesse de l'écoulement de la couche limite atteint 99% de la vitesse de l'écoulement extérieur et cette épaisseur varie avec l'abscisse du profil et notée δ^* .

L'épaisseur de la couche limite est donnée par la formule suivante [21-24] :

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (1.8)$$

3.2. Epaisseur de la quantité du mouvement

L'épaisseur de la quantité du mouvement est défini comme étant la différence de la quantité du mouvement des écoulements visqueux et potentiel [21-24], telle que

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (1.9)$$

2.3. Coefficient du frottement

Le coefficient du frottement est défini à partir de la contrainte pariétale locale rapportée à la pression dynamique, tel que

$$Cf(x) = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_w / \left(\frac{1}{2} \rho U_e^2\right) \quad (1.10)$$

4. Changement du repère

Dans le repère cartésien (x, y) , la résolution du modèle mathématique n'est pas facile, donc on doit chercher à faciliter la résolution du problème par un changement du repère qui doit tenir en compte la géométrie du profil considéré, ou tout simplement, les coordonnées curvilignes (x, η) .

Dans le repère des coordonnées curvilignes, le modèle mathématique devient adimensionnel d'une part et d'autre part les nombres de variables et d'équations du problème se trouvent réduits et par conséquent une résolution relativement facile. A cet effet, on définit les transformations dites version de Falkner-Skan par,

$$d\eta = \left(\frac{u_e}{x \vartheta_e}\right)^{1/2} \frac{\rho}{\rho_e} dy \quad (1.11)$$

$$\Psi(x, y) = (\rho_e \mu_e u_e x)^{1/2} f(x, \eta) \quad (1.12)$$

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (1.13)$$

$$\rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.14)$$

Après ces transformations et le remplacement du terme $-\frac{dp}{dx} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx}$, les équations de Prandtl peuvent être réécrites telles que

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 (c - (f')^2) = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.15a)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 f S' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.15b)$$

Les paramètres qui figurent dans les équations suscitées sont définis par

$$C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} \quad (1.16a)$$

$$b = C \quad (1.16b)$$

$$c = \frac{\rho_e}{\rho} \quad (1.16c)$$

$$d = \frac{C u_e^2}{H_e} \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \quad (1.16d)$$

$$e = \frac{b}{Pr} \quad (1.16e)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e \mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right) \quad (1.16f)$$

$$m_2 = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (1.16g)$$

$$R_x = \frac{u_e x}{\nu_e} \quad (1.16h)$$

La lettre S figurant dans l'équation (1.15b) désigne le rapport des enthalpies totales des écoulements visqueux et extérieur.

Les conditions aux limites dans le nouveau repère se transforment en :

$$\eta = 0, \quad f' = 0, \quad f_w = \frac{-1}{\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}} \int_0^x \rho_w v_w dx, \quad S = S_w \quad \text{or} \quad S'_w = -\frac{c_{pw} c_w}{k_w} q_w^* \quad (1.17a)$$

$$\eta = \eta_e, \quad f' = 1, \quad S = \frac{H}{H_e} \quad (1.17b)$$

4.1. Grandeurs de la couche limite dans le nouveau repère

Les grandeurs de la couche limite dans le nouveau repère sont définies ci-dessous.

4.1.1. Epaisseur de la couche limite

$$\delta^* = \frac{x}{\sqrt{Rx}} \int_0^\infty (c - f') d\eta \quad (1.18)$$

4.1.2. Epaisseur de la quantité de mouvement

$$\theta = \frac{x}{\sqrt{Rx}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta \quad (1.19)$$

4.1.3. Coefficient du frottement

$$C_f = \frac{2C_w f'_w}{\sqrt{Rx}} \quad (1.20)$$

Résolution numérique des équations de la couche limite

Les méthodes de résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles telles que les équations de la couche limite sont multiples, parmi ces méthodes, la méthode de KELLER qui est plus appropriée pour ce genre d'équations que d'autres [21 & 26].

Elle présente certains avantages que d'autres méthodes tels que

1. Elle permet plus de variations aux variables indépendantes (espacement non-uniforme).
2. Elle permet une programmation facile même si le nombre d'équations couplées est élevé.
3. Elle permet une précision pour les termes du second ordre.

1. Méthode de KELLER

La solution d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles par la méthode de KELLER peut être obtenue en suivant les étapes présentées ci-dessous [21 & 26]. Réduire l'ordre de l'équation différentielle ou l'ordre des équations différentielles en équations du premier ordre.

- Ecrire les équations d'ordre un en équations algébriques, en utilisant les différences centrales.
- Linéariser les équations algébriques si elles ne sont pas linéaires, et les mettre en forme matricielle.
- Résoudre le système d'équations linéaire par la méthode d'élimination par blocks.

1.1. Réduction de l'ordre des équations différentielles

Les équations différentielles de la couche limite sont précédemment définies par

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 (c - (f')^2) = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.15a)$$

$$(eS' + df'f'')' + m_1 f S' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.15b)$$

Pour réduire l'ordre de ces équations en premier ordre, on introduit des nouvelles fonctions telles que

$$f' = u \quad (2.1)$$

$$u' = v \quad (2.2)$$

$$v' = p \quad (2.3)$$

$$(bv)' + m_1 f v + m_2 [c - u^2] = x \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$(ep + duv)' + m_1 f p = x \left(u \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

$$g = \frac{H}{H_e} \quad (2.6)$$

Les conditions aux limites (1.16a) et (1.16b) sont aussi concernées par ces nouvelles fonctions telles que

$$f(x, 0) = f_w(x), \quad u(x, 0) = 0$$

$$g(x, 0) = g_w(x) \quad \text{Or} \quad p'(x, 0) = p'_w(x) \quad (2.7)$$

$$u(x, \eta_e) = 1 \quad \& \quad g(x, \eta_e) = 1 \quad (2.8)$$

$$u_j^n(x) = 1 \quad \& \quad g_j^n(x) = 1 \quad (2.9)$$

Ainsi, on a un système de cinq équations différentielles du premier ordre avec leurs conditions aux limites.

1.2 Ecriture des équations algébriques en utilisant les différences centrales

Pour pouvoir mettre les équations différentielles régissant le problème, on fait appel au schéma de discrétisation de KELLER [27-28].

Le schéma de KELLER est implicite et inconditionnellement stable, il est très répandu le domaine de discrétisation des équations de la couche limite.

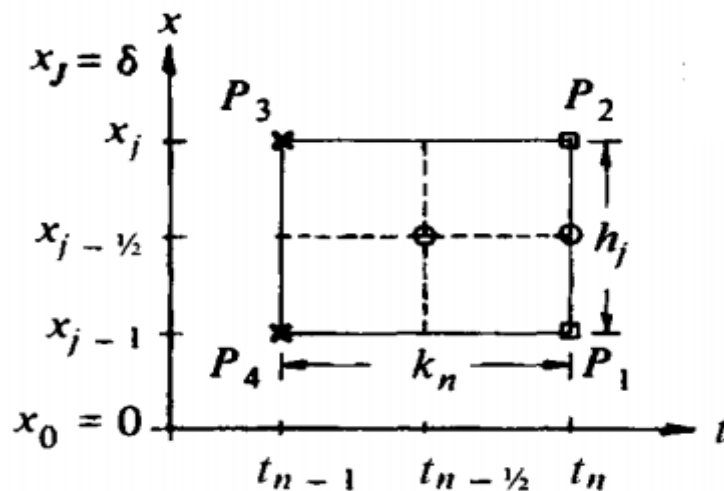


Figure 2.1 : Grille de discrétisation de KELLER, titrée de la référence [25]

Pour pouvoir discrétiser les équations différentielles (2.1-2.5), les équations (2.1-2.3) doivent être écrites au point-milieu $(x_n, \eta_{j-1/2})$ du segment P1P2 et les équations (2.4-2.5) doivent être écrites également au point du milieu de la grille de discrétisation $(x_{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$ telles que,

$$h_j^{-1}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-1/2}^n \quad (2.10a)$$

$$h_j^{-1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-1/2}^n \quad (2.10b)$$

$$h_j^{-1}(g_j^n - g_{j-1}^n) = p_{j-1/2}^n \quad (2.10c)$$

$$h_j^{-1}(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + \alpha_n) = u_{j-1/2}^n h_j^{-1}(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + \alpha_n)(fv)_{j-1/2}^n - (m_2^n + \alpha_n)(u^2)_{j-1/2}^n + \alpha_n(v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) = R_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.10d)$$

$$h_j^{-1}(e_j^n p_j^n - e_{j-1}^n p_{j-1}^n) + h_j^{-1}(d_j^n u_j^n v_j^n - d_{j-1}^n u_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + \alpha_n)(fp)_{j-1/2}^n - \alpha_n[(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.10e)$$

$$\alpha_n = \frac{x^{n-1/2}}{k_n}$$

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n((fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}) - m_2^n c_{j-1/2}^n$$

$$L_{j-1/2}^{n-1} = \{h_j^{-1}(b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}) + m_1(fv)_{j-1/2} + m_2(c_{j-1/2} - (u^2)_{j-1/2})\}^{n-1}$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n((fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1})$$

$$M_{j-1/2}^{n-1} = \{h_j^{-1}(e_j p_j - e_{j-1} p_{j-1}) + h_j^{-1}(d_j u_j v_j - d_{j-1} u_{j-1} v_{j-1}) + m_1(fv)_{j-1/2}\}^{n-1}$$

Les conditions aux limites pour l'abscisse $x = x^n$

$$f_0^n = f_w, f_0^n = f_w, f_0^n = f_w, \quad (2.11)$$

1.2. Linéarisation des équations algébriques et mise en forme matricielle

On suppose que les fonctions $f_j^{n-1}, u_j^{n-1}, v_j^{n-1}, g_j^{n-1}$ et p_j^{n-1} pour $0 \leq j \leq JL$, d'une station précédente sont connues, donc les équations (2.10a-e) et (2.11) forme un système de $5JL+5$ équations pour la résolution d'un système de $5JL+5$ inconnues $f_j^n, u_j^n, v_j^n, g_j^n$ et p_j^n . Pour résoudre ce système d'équations non-linéaires, on se propose de faire appel à la méthode de Newton [21 & 26].

1.3.1 Méthode de Newton

Le principe itératif sur lequel est basée la méthode de Newton consiste en l'introduction des itérations de telle sorte que les fonctions semblent $f_j^{n,(i)}, u_j^{n,(i)}, v_j^{n,(i)}, g_j^{n,(i)}, p_j^{n,(i)}$ pour l'itération i et au point (n, j) [21 & 26].

Dans un souci d'alléger l'écriture et minimiser l'encombrement, on se propose d'omettre les indices supérieurs et de se contenter seulement des indices de la station du calcul n et de l'itération i .

Les fonctions à la station de calcul (n, j) et à l'itération de l'ordre i prennent la forme,

$$\left[f_j^{(i)}, u_j^{(i)}, v_j^{(i)}, g_j^{(i)}, p_j^{(i)} \right] \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots \dots J, L$$

Les fonctions précédentes à l'itération $i + 1$, prennent les formes suivantes

$$f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \quad (2.12)$$

$$u_j^{(i+1)} = u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \quad (2.13)$$

$$v_j^{(i+1)} = v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \quad (2.14)$$

$$g_j^{(i+1)} = g_j^{(i)} + \delta g_j^{(i)} \quad (2.15)$$

$$p_j^{(i+1)} = p_j^{(i)} + \delta p_j^{(i)} \quad (2.16)$$

La substitution des équations (2.12-16) dans les équations (2.10a-e), on obtient, après avoir omettre les termes d'ordre quadratiques, des nouvelles équations qui sont définies par

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (2.17)$$

$$\delta u_j - \delta u_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_4)_{j-1} \quad (2.18)$$

$$\delta g_j - \delta g_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta p_j + \delta p_{j-1}) = (r_5)_{j-1} \quad (2.19)$$

$$(s_1)_j \delta v_j + (s_2)_j \delta v_{j-1} + (s_3)_j \delta f_j + (s_4)_j \delta f_{j-1} + (s_5)_j \delta u_j + (s_6)_j \delta u_{j-1} + (s_7)_j \delta g_j + (s_8)_j \delta g_{j-1} = (r_2)_j \quad (2.20)$$

$$(\beta_1)_j \delta p_j + (\beta_2)_j \delta p_{j-1} + (\beta_3)_j \delta f_j + (\beta_4)_j \delta f_{j-1} + (\beta_5)_j \delta u_j + (\beta_6)_j \delta u_{j-1} + (\beta_7)_j \delta g_j + (\beta_8)_j \delta g_{j-1} + (\beta_9)_j \delta v_j + (\beta_{10})_j \delta v_{j-1} = (r_3)_j \quad (2.21)$$

Les nouveaux termes de calcul qui apparaissent dans les équations citées ci-dessus sont définis par

$$(r_1)_j = f_{j-1}^{(i)} - f_j^{(i)} + h_j u_{j-\frac{1}{2}}^{(i)} \quad (2.22)$$

$$(r_4)_j = u_{j-1}^{(i)} - u_j^{(i)} + h_j v_{j-\frac{1}{2}}^{(i)} \quad (2.23)$$

$$(r_5)_j = g_{j-1}^{(i)} - g_j^{(i)} + h_j p_{j-\frac{1}{2}}^{(i)} \quad (2.24)$$

$$(r_2)_j = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \left[h_j^{-1} (b_j^{(i)} v_j^{(i)} - b_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)}) + (m_1^n + \alpha_n) (fv)_{j-1/2}^{(i)} - (m_2^n + \alpha_n) (u^2)_{j-1/2}^{(i)} + \alpha_n (v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^{(i)} - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{(i)}) \right] \quad (2.25)$$

$$(r_3)_j = T_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \left[h_j^{-1} (e_j^{(i)} p_j^{(i)} - e_{j-1}^{(i)} p_{j-1}^{(i)}) + h_j^{-1} (d_j^{(i)} u_j^{(i)} v_j^{(i)} - d_{j-1}^{(i)} u_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)}) + (m_1^n + \alpha_n) (fp)_{j-1/2}^{(i)} - \alpha_n \left[(ug)_{j-1/2}^{(i)} + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^{(i)} + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^{(i)} - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^{(i)} \right] \right] \quad (2.26)$$

Les résidus $(r_1)_j, (r_2)_j, (r_3)_j, (r_4)_j$ et $(r_5)_j$ exprimés par les équations (2.22-26) sont classés suivant l'ordre $(r_1)_j, (r_4)_j, (r_5)_j, (r_2)_j$ et $(r_3)_j$ afin éviter la forme singulière de la matrice, une fois ces équations sont mises en forme matricielle.

Les coefficients de l'équation de mouvement sont définis, suite à cette procédure, tels que

$$(s_1)_j = h_j^{-1} b_j^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.27)$$

$$(s_2)_j = -h_j^{-1} b_{j-1}^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.28)$$

$$(s_3)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} v_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.29)$$

$$(s_4)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} v_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} v_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.30)$$

$$(s_5)_j = -(m_2^n + \alpha_n) u_j^{(i)} \quad (2.31)$$

$$(s_6)_j = -(m_2^n + \alpha_n) u_{j-1}^{(i)} \quad (2.32)$$

$$(s_7)_j = 0 \quad (2.33)$$

$$(s_8)_j = 0 \quad (2.34)$$

L'ajout des nouveaux termes $(s_7)_j$ et $(s_8)_j$ est seulement pour un objectif de programmation.

Les coefficients de l'équation d'énergie sont également définis, tels que

$$(\beta_1)_j = h_j^{-1} e_j^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.35)$$

$$(\beta_2)_j = -h_j^{-1} e_{j-1}^{(i)} + \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} f_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.36)$$

$$(\beta_3)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} p_j^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.37)$$

$$(\beta_4)_j = \frac{m_1^n + \alpha_n}{2} p_{j-1}^{(i)} + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.38)$$

$$(\beta_5)_j = h_j^{-1} d_j^{(i)} v_j^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} (g_j^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1}) \quad (2.39)$$

$$(\beta_6)_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^{(i)} v_{j-1}^{(i)} - \frac{\alpha_n}{2} (g_{j-1}^{(i)} - g_{j-1/2}^{n-1}) \quad (2.40)$$

$$(\beta_7)_j = -\frac{\alpha_n}{2} (u_j^{(i)} - u_{j-1/2}^{n-1}) \quad (2.41)$$

$$(\beta_8)_j = -\frac{\alpha_n}{2} (u_{j-1}^{(i)} - u_{j-1/2}^{n-1}) \quad (2.42)$$

$$(\beta_9)_j = h_j^{-1} d_j^{(i)} u_j^{(i)} \quad (2.43)$$

$$(\beta_{10})_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^{(i)} u_{j-1}^{(i)} \quad (2.44)$$

Ainsi, on a obtenu le système d'équations linéaires (2.22-26) qui a une structure d'un bloc tri-diagonal et peut être écrit en forme matrice-vecteur [30], telle que $\vec{A} \delta = \vec{r}$.

1.3.2. Mise en forme matricielle

Le système d'équations précédent peut être écrits en forme matricielle, tel que

$$A \delta = r \quad (2.45)$$

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1 & A_1 & C_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & B_j & A_j & C_j & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & B_{jL1} & A_{jL1} & C_{jL1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & B_{jL} & A_{jL} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \dots \\ \delta_j \\ \dots \\ \delta_{jL-1} \\ \delta_{jL} \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_{jL-1} \\ r_{jL} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Les vecteurs δ_j et r_j sont définis par

$$\delta_j = \begin{bmatrix} \delta f_j \\ \delta u_j \\ \delta v_j \\ \delta g_j \\ \delta p_j \end{bmatrix} \text{ pour } 0 \leq j \leq JL$$

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{bmatrix} \quad r_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \\ (r_5)_j \end{bmatrix} \text{ pour } 0 \leq j \leq JL \quad r_{JL} = \begin{bmatrix} (r_1)_{JL} \\ (r_2)_{JL} \\ (r_3)_{JL} \\ (r_4)_{JL} \\ (r_5)_{JL} \end{bmatrix}$$

Les matrices A_j , B_j et C_j de dimensions 5×5 sont définies par

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & -\frac{h_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{h_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_{JL} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_{JL}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_3)_{JL} & (s_5)_{JL} & (s_1)_{JL} & (s_7)_{JL} & 0 \\ (\beta_3)_{JL} & (\beta_5)_{JL} & (\beta_9)_{JL} & (\beta_7)_{JL} & (\beta_1)_{JL} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j & (s_7)_j & 0 \\ (\beta_3)_j & (\beta_5)_j & (\beta_9)_j & (\beta_7)_j & (\beta_1)_j \\ 0 & -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq j \leq JL - 1$$

$$B_j = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j & (s_7)_j & 0 \\ (\beta_3)_j & (\beta_5)_j & (\beta_9)_j & (\beta_7)_j & (\beta_1)_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour } 1 \leq j \leq JL$$

$$C_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \text{ pour } 0 \leq j \leq JL - 1$$

La méthode de KELLER est une méthode de nature implicite qui génère une matrice tri-diagonale, avec des éléments matrices de dimensions, dans ce cas, 5x5.

1.4. Résolution par la méthode d'élimination par blocks

La résolution par la méthode d'élimination de blocs s'obtient en deux balayages

1.4.1. Balayage en avant

Dans cette phase, on calcule Γ_j , Δ_j et w_j par les formules de récurrence définies par

$$\Delta_0 = A_0 \tag{2.47}$$

$$\Gamma_j \Delta_{j-1} = B_j \quad \dots \dots \dots \quad 1 \leq j \leq JL \tag{2.48}$$

$$\Delta_j = A_j - \Gamma_j C_{j-1} \tag{2.49}$$

$$w_0 = r_0 \tag{2.50}$$

$$w_j = r_j - \Gamma_j w_{j-1} \tag{2.51}$$

1.4.2. Balayage en arrière

Dans cette phase, on calcule δ_j par les formules de récurrence suivantes

$$\Delta_{Jl} \delta_{Jl} = w_{Jl} \tag{2.52}$$

$$\Delta_j \delta_j = w_j - C_j \delta_{j+1} \quad \dots \dots \dots \quad j = Jl - 1, Jl - 2, \dots \dots \dots, 0 \tag{2.53}$$

2. Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution contient trois étapes

2.1. Etape d'initialisation

Dans cette étape, on doit choisir le profil, le nombre de points du contour, le nombre de Mach, le nombre de Reynolds, l'incidence, les paramètres de l'écoulement potentiel, pression et température, le nombre d'itération max, et enfin le nombre de Prandtl.

2.2. Etape de calcul des paramètres de l'écoulement potentiel

Le calcul de gradients m_2 et m_1 , l'enthalpie totale, les températures, les viscosités, les densités et les pressions de l'écoulement potentiel.

2.3. Etape de mise en marche du processus itératif

La mise en marche du processus itératif est organisé en sous-étapes, telles que

1. Initialisation du compteur d'itération.
2. Appel du sous-programme Input pour calculer les paramètres du fluide μ, T et P .
3. Test du nombre d'itération maximum, si le nombre d'itération max est atteint on doit arrêter le programme sinon on passe à l'étape suivante.
4. Appel du sous-programme Coef pour calculer les coefficients des équations dynamique et d'énergie.
5. Appel du sous-programme Solve pour déterminer les inconnus du problème.
6. Test de la convergence, si la convergence n'est encore pas satisfaite on doit incrémenter le nombre d'itération et on remonte à l'étape 2 pour refaire les étapes précédentes jusqu'à la satisfaction de la convergence.
7. Appel du sous-programme Output pour calculer les paramètres de la couche limite, tels que l'épaisseur de la couche limite, le coefficient du frottement...etc.
8. Test de la séparation de la couche limite, en effet, si la séparation est satisfaite on doit arrêter le programme sinon on doit passer à la station des calculs suivante tout en allant à l'étape 1.

3. Code du calcul

Le code de calcul comprend trois programmes, un programme qui détermine la géométrie du profil considéré, un deuxième qui détermine la distribution de la vitesse tout autour du profil et enfin le programme principal qui détermine les propriétés du fluide en vérifiant le critère

de convergence des itérations par le paramètre v_0 qui est la dérivée seconde de la fonction du courant rapportée à la vitesse de l'écoulement potentiel au niveau de la paroi.

Pour le cas laminaire, les calculs doivent être stoppés quand la précision de l'approximation du paramètre considéré après un certain nombre d'itérations aboutit à $|\delta v_0| < 10^{-5}$.

Pour le cas laminaire, les ordonnées varient selon une suite arithmétique de pas initial $h_1=0.2$, de raison égale à l'unité $k = 1$ et valeur finale de l'ordonnée $\eta_e = 8$.

Les paramètres μ, c, C, b, e et d qui apparaissent dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont fonctions de la température statique.

Ces paramètres sont calculés au niveau du programme principal par les équations, et la viscosité dynamique par la formule de Sutherland définie par

$$\mu = 1.45 \cdot 10^{-5} \frac{T^{1.5}}{T + 110.33}$$

Avec μ et T la viscosité dynamique et la température absolue de l'air respectivement.

Le programme principal ou le programme appelant comprend cinq sous-programmes, qui sont

3.1 Sous-programme Input

Le sous-programme spécifie les conditions aux limites pour l'équation d'énergie, le nombre total des stations de calcul, le local de la transition, le gradient de pression adimensionnel à la première station de calcul, les paramètres h_1 et k , les paramètres de l'écoulement potentiel, tels que, le nombre de Mach, la température statique, la pression statique, le nombre de Prandtl et la distribution de vitesse adimensionnelle en fonction de la distance de la surface du profil.

Les paramètres m_1 et m_2 sont calculés numériquement et le rapport $\frac{du_e}{dx}$ est calculé par la formule de Lagrange qui a fait impliquer trois points, sauf la première et la dernière station, tels que,

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_n = -\frac{u_e^{n-1}}{A_1}(x_{n+1} - x_n) + \frac{u_e^n}{A_2}(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + \frac{u_e^{n+1}}{A_3}(x_n - x_{n-1})$$

Avec

$$A_1 = (x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_{n-1})$$

$$A_2 = (x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)$$

$$A_3 = (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})$$

Pour la dernière station de calcul, on a

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_N = -\frac{u_e^{N-1}}{A_1}(x_N - x_{N-1}) + \frac{u_e^N}{A_2}(x_N - x_{N-2}) + \frac{u_e^N}{A_3}(2x_n - x_{N-2} - x_{N-1})$$

$$A_1 = (x_{N-1} - x_{N-2})(x_N - x_{N-1})$$

$$A_2 = (x_{N-1} - x_{N-2})(x_N - x_{N-1})$$

$$A_3 = (x_N - x_{N-1})(x_N - x_{N-2})$$

Les paramètres de l'écoulement potentiel sont calculés par les formules suivantes

$$\mu_\infty = 1.45 \cdot 10^{-5} \frac{T^{1.5}}{T+110.33} \quad (2.54a)$$

$$u_\infty = 20.04 M_\infty \sqrt{T_\infty} \quad (2.54b)$$

$$\rho_\infty = \frac{P_\infty}{287 T_\infty} \quad (2.54c)$$

$$H_\infty = 1004 T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} \quad (2.54d)$$

La température et la pression adimensionnelles de l'écoulement potentiel sont calculées par

$$\frac{T_e}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[\left(\frac{u_e}{u_\infty}\right)^2 - 1 \right]$$

$$\frac{p_e}{p_\infty} = \left(\frac{T_e}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Les grandeurs de μ et ρ de l'écoulement potentiel sont également calculées par des formules identiques aux formules (2.54.a-d)

La solution de l'équation d'énergie peut être obtenue soit la spécification de la température de la paroi ou soit par la spécification de flux thermique à la paroi.

3.2. Sous-programme Ivpl

Le sous-programme Ivpl génère le profil initial de la vitesse de l'écoulement compressible, en se basant sur le profil de vitesse de l'écoulement laminaire incompressible comme une bonne première approximation pour déclencher le processus itératif de calcul, le profil de vitesse de l'écoulement incompressible est

$$f_j = \frac{\eta_e}{4} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \left[3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right]$$

$$u_j = \frac{3}{2} \frac{\eta_j}{\eta_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^3$$

$$v_j = \frac{3}{2} \frac{1}{\eta_e} \left[1 - \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right]$$

$$g_j = 1 \text{ \& } p_j = 0$$

3.3. Sous-programme Coeff

Le sous-programme Coeff calcule les coefficients de l'équation dynamique et l'équation d'énergie $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}$

3.4. Sous-programme Solver

Le sous-programme Solver sert à résoudre le système d'équations algébriques par la méthode d'élimination par blocs en deux balayages.

3.5. Sous-programme Output

Le sous-programme Output donne des résultats de calcul, tels que, les distributions de vitesse, de température, l'épaisseur de la couche limite, le coefficient de frottement enfin l'épaisseur de la quantité de mouvement.

Détermination de la vitesse de l'écoulement potentiel

1. Introduction

L'étude de l'écoulement potentiel stationnaire compressible autour d'un profil bidimensionnel sert comme donnée pour la modélisation de l'écoulement stationnaire visqueux, la linéarisation du modèle mathématique de l'écoulement potentiel compressible par le biais de la transformation de Prandtl-Glauert a permis de se servir de l'écoulement potentiel incompressible, donc, le modèle mathématique n'est que l'équation de Laplace [31-37], avec les conditions de tangence et de KUTTA-JOUKOWSKI [38-39]. La méthode adoptée pour la résolution numérique du problème de l'écoulement est celle des panneaux qui est largement utilisée dans ce domaine.

2. Modélisation mathématique

La modélisation mathématique de l'écoulement potentiel consiste à le mettre en équations tout en spécifiant les conditions aux limites appropriées.

2.1. Equation de l'écoulement potentiel compressible

L'équation qui gère l'écoulement potentiel compressible est donnée par (voir annexe 4)

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

Avec le changement de paramètre suivant,

$$\beta^2 = 1 - M_\infty^2 \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) prend la forme

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

Dans le but de linéariser l'équation (3.3), on se propose de se servir des transformations de Prandtl-Glauert [40-41]. La linéarisation permet à l'équation de prendre la forme de l'équation de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4)$$

2.2.1. Condition de la tangence

On doit satisfaire la condition physique à savoir que la surface étant une ligne de courant, la vitesse normale à celle-ci doit être nulle. Ce qui suppose que le fluide ne traverse pas cette surface mais il est plutôt tangentiel à cette dernière [31 et 39].

$$v_{n,i} = 0, \text{ avec } i = 1, n \quad (3.5)$$

2.2.2. Condition de KUTTA-JOUKOWSKI

La condition de KUTTA-JOUKOWSKI consiste à égaliser les vitesses tangentielles au niveau des panneaux formant le bord de fuite et qui est traduite par l'équation.

$$v_{t,1} = v_{t,n}$$

2.2.3. Transformation de Prandtl-Glauert

La résolution du problème de l'écoulement potentiel compressible est difficile, c'est pourquoi on se propose de passer du cas compressible si difficile au cas incompressible, relativement facile, par le biais de la transformation de Prandtl-Glauert. Cette transformation fait impliquer des changements des coordonnées des variables du problème x,y et le potentiel Φ selon les équations [34].

$$x_{\text{incomp}} = x_{\text{comp}}$$

$$y_{\text{incomp}} = \beta y_{\text{comp}}$$

$$\Phi_{\text{incomp}} = \beta^2 \Phi_{\text{comp}}$$

Ces changements permettent de linéariser l'équation (3.3) en prenant la forme de l'équation de Laplace (3.4) qui est relativement facile à résoudre. Une fois les vitesses obtenues par le calcul de l'écoulement dans le repère incompressible, on passe aux vitesses dans le repère compressible par les équations suivantes

$$u_{\text{comp}} = \frac{u_{\text{incomp}}}{\beta^2} \quad (3.6)$$

$$v_{\text{comp}} = \frac{v_{\text{incomp}}}{\beta^2} \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) et (3.7) permettent la détermination des distributions de vitesses et de pression au centre de chaque panneau. Ainsi, l'écoulement est totalement modélisé. En effet, le modèle mathématique, qui n'est que l'équation de Laplace avec ses conditions aux limites.

3. Résolution numérique

La résolution mathématique consiste à discrétiser le modèle mathématique et le domaine physique à la fois par l'une des méthodes de discrétisation, où la méthode la plus utilisée dans ce domaine est celle des panneaux. Cette discrétisation permet de transformer l'équation différentielle (3.3) en un système d'équations algébriques, qui sera résolu par l'une des méthodes numériques directes.

La méthode des panneaux est l'une des méthodes numériques utilisées pour la détermination des champs de vitesse et de pression de l'écoulement potentiel. Elle est basée sur l'équation de LAPLACE, qu'est une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles et du second ordre. La linéarité de l'équation de LAPLACE permet d'appliquer le principe de superposition, donc le potentiel de l'écoulement total ϕ n'est que la superposition de certains écoulements élémentaires ϕ_e , Il en découle que :

$$\phi = \sum \phi_e \quad (3.8)$$

Les écoulements élémentaires composant l'écoulement total sont l'écoulement uniforme et les écoulements engendrés par des sources et des tourbillons et qui sont définis par

$$\phi_\infty = U_\infty(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) \quad (3.9)$$

$$\phi_s = \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r \cdot ds \quad (3.10)$$

$$\phi_t = - \int \frac{\delta(s)}{2\pi} \theta ds \quad (3.11)$$

Avec U_∞ la vitesse de l'écoulement à l'infini, q et δ sont les intensités de la source et du tourbillon par unité de longueur du panneau considéré.

Donc, l'équation du potentiel de l'écoulement prend la forme suivante

$$\phi = U_\infty(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha) + \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r \cdot ds - \int \frac{\delta(s)}{2\pi} \theta ds \quad (3.12)$$

3.1. Discrétisation du domaine de calcul

La surface du profil doit être divisée en un nombre fini de segments appelés panneaux, numérotés de un jusqu'à n dans le sens horaire tout en commençant par le bord de fuite pour y revenir.

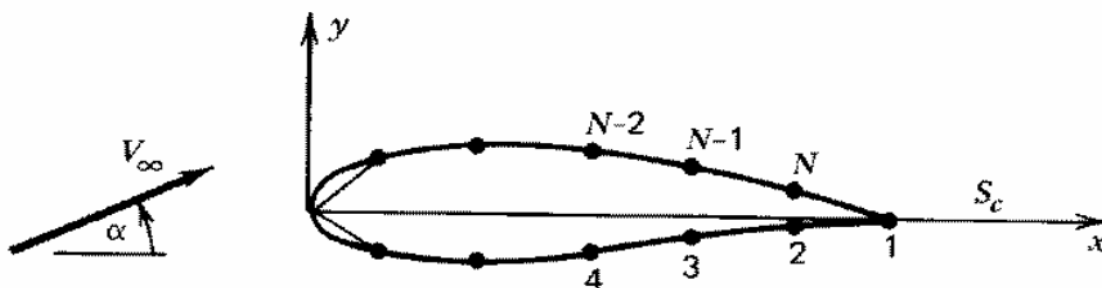


Figure 3.1 : Discrétisation de la surface portante en panneaux. Tirée de [32]

3.2.1. Nomenclature du panneau

Chaque panneau est délimité par deux nœuds de numéros successifs dont la longueur r et l'angle d'inclinaison Θ sont définis par

$$r_{i,i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{r_{i,i+1}}$$

$$\cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{r_{i,i+1}}$$

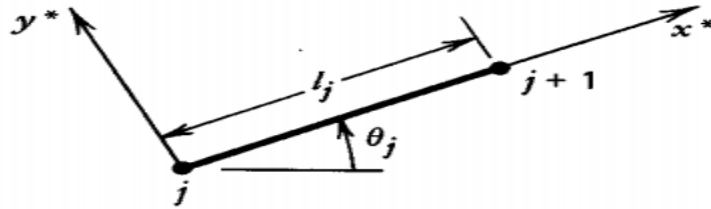


Figure 3.2 : Nomenclature du profil aérodynamique pour les méthodes de panneaux. Tirée de [32]

En milieu de chaque panneau, on définit un point de contrôle dont ses coordonnées sont définies par

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$\bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

3.2.2. Définition de l'équation du potentiel

Le potentiel de vitesse défini par l'équation (3.12) au niveau du panneau i prend la forme

$$\phi(i) = \phi_\infty(i) + \int_1^{n+1} q(s) \phi_s ds + \int_1^{n+1} \delta \phi_t ds \quad (3.13)$$

s : Est la distance le long du panneau i .

$q(s)$: L'intensité de la source du panneau i par unité de longueur.

δ : L'intensité du tourbillon du panneau par unité de longueur.

Comme la surface du profil est divisée en panneaux, et elle n'est plus continue, l'intégrale de l'équation (3.13) prend une nouvelle forme telle que

$$\phi(i) = \phi_\infty(i) + \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_0^{l_j} \phi_s ds \right) + \gamma \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j} \phi_t ds \right) \quad (3.14)$$

La surface portante est divisée en petits segments droites appelés panneaux. Plus le nombre de panneaux est important plus on se rapproche du profil réel.

Sur les panneaux, on distribue des sources de densités variables d'un panneau à un autre et de vorticité de densité constante le long du contour. Chaque panneau est caractérisé par son orientation avec l'horizontal θ_i et sa longueur l_i .

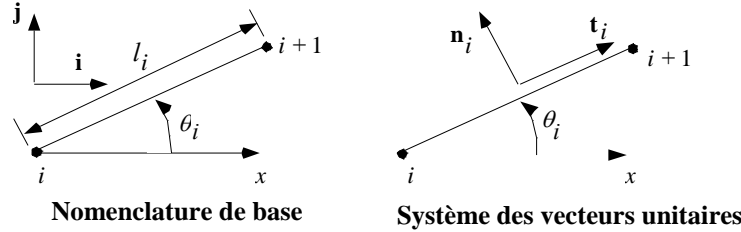


Figure 3.3 : Nomenclature du système de coordonnées locales.

Les vecteurs unitaires du système local (θ_i et l_i), l'angle que le panneau i et sa longueur, sont définis par les équations (3.15-18)

$$\vec{n}_i = -\sin\theta_i \vec{i} + \cos\theta_i \vec{j} \quad (3.15)$$

$$\vec{t}_i = \cos\theta_i \vec{i} + \sin\theta_i \vec{j} \quad (3.16)$$

$$\theta_i = \arcsin((y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)) \quad (3.17)$$

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (3.18)$$

3.2. Discrétisation des équations

3.2.1. Condition de la non-perméabilité du fluide

Pour satisfaire la condition de tangence, autrement dit, satisfaire la condition de nullité de la vitesse normale au niveau du panneau considéré et ainsi de suite pour tous les panneaux formant la surface du profil, on procède à la détermination du gradient du potentiel pour obtenir la vitesse puis on multiplie cette vitesse par le vecteur unitaire perpendiculaire du panneau i (produit scalaire).

$$\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla}\phi(i) = \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla}\phi_\infty(i) + \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_0^{l_j} \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla}\phi_s ds \right) + \gamma \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j} \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla}\phi_t ds \right) \quad (3.19)$$

Comme l'écoulement est potentiel, donc la vitesse est obtenue par une dérivation d'un potentiel, telle que

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$$

Cette équation peut être écrite sous plus explicitement telle que

$$u \vec{i} + v \vec{j} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j}$$

La condition limite de tangence peut être simplement écrite telle que

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (3.20)$$

L'équation sous forme d'intégrale (3.20) peut être reformulée telle que

$$-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0$$

En vertu de la condition de la non-pénétration du fluide à travers la surface portante solide, la vitesse normale aux panneaux est discrétisée selon l'équation suivante (3.21)

$$\sum_{j=1}^n [A_{ij}^n] + \gamma \sum_{j=1}^n [B_{ij}^n] + U_\infty \sin(\alpha - \theta_j) = 0 \quad (3.21)$$

Ce système d'équations contient n+1 inconnues. Donc, une autre équation est indispensable. C'est la raison pour laquelle, on fait appel à une autre condition supplémentaire, celle de KUTTA-JOUKOUSKI.

3.2.2. Condition de KUTTA-JOUKOUSKI

La condition KUTTA dite condition de tangence stipule que la pression au-dessus et en dessous du bord de fuite du profil aérodynamique doit être égale, et que l'écoulement doit laisser doucement le bord de fuite dans la même direction, cette condition est formulée par

$$\vec{t}_1 \cdot (\vec{\nabla} \phi)_1 = - \vec{t}_{n1} \cdot (\vec{\nabla} \phi)_n \quad (3.22)$$

Cette équation peut être explicitée en substituant le potentiel total par les potentiels élémentaires cités plus haut.

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 \cdot \vec{\nabla} \phi_\infty(i) + \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_0^{l_j} \vec{t}_1 \cdot \vec{\nabla} \phi_s ds \right) + \gamma \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j} \vec{t}_1 \cdot \vec{\nabla} \phi_t ds \right) = - \vec{t}_n \cdot \vec{\nabla} \phi_\infty(i) - \\ \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_0^{l_j} \vec{t}_n \cdot \vec{\nabla} \phi_s ds \right) - \gamma \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{l_j} \vec{t}_n \cdot \vec{\nabla} \phi_t ds \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

La condition de KUTTA-JOUKOWSKI est traduite par l'équation discrétisée suivante (3.24)

$$\sum_{j=1}^n [A_{1j}^t + A_{nj}^t] + \gamma \sum_{j=1}^n [A_{1j}^t + A_{nj}^t] + U_\infty (\cos(\alpha - \theta_1) + \cos(\alpha - \theta_n)) = 0 \quad (3.24)$$

Tous les coefficients figurant dans l'équation (3.24) sont définis par

$$A_{ij}^n = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad i \neq j$$

$$A_{ij}^t = \frac{1}{2\pi} \left[-\cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad i \neq j$$

$$A_{ij}^n = \frac{1}{2} \quad \& \quad A_{ij}^t = 0 \quad \text{si } i = j$$

$$B_{ij}^n = \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad i \neq j$$

$$B_{ij}^t = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{ij+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad i \neq j$$

$$B_{ij}^n = \frac{1}{2} \quad \& \quad B_{ij}^t = 0 \quad \text{si } i = j$$

Les équations (3.23) et (3.24) forment un système linéaire de n+1 équations et n+1 inconnus exprimé par

$$A_{ij} q_j = Rhs(j) \quad \text{Avec } j \text{ variant de } 1 \text{ à } n \quad (3.25)$$

$$q_{n+1} = \gamma$$

Le système d'équations (3.25) est linéaire et sa résolution s'obtient par l'une des méthodes numériques dites directes avec la définition des coefficients d'influence, tels que,

$$Rhs(j) = -U_\infty \sin(\alpha - \theta_j) \quad (3.26)$$

$$Rhs(n+1) = U_\infty (\sin(\alpha - \theta_1) + \sin(\alpha - \theta_n)) \quad (3.27)$$

Les coefficients contiennent les expressions de r_{ij} et β_{ij} qui sont définies par

$$r_{ij} = \sqrt{(\bar{x}_i - x_j)^2 + (\bar{y}_i - y_j)^2}$$

$$\beta_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{y}_i - y_{j+1}}{\bar{x}_i - y_{j+1}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\bar{x}_i - y_j}{\bar{x}_i - y_j} \right)$$

$$\beta_{ij} = \pi \quad \text{Si } i = j$$

Le côté droit de l'équation (3.25) des constantes est

$$Rhs(j) = -U_\infty \sin(\alpha - \theta_j)$$

$$Rhs(n+1) = U_\infty (\cos(\alpha - \theta_1) + \cos(\alpha - \theta_n))$$

Ainsi, tous les termes de l'équation (3.25) sont bien définis.

4. Implantation numérique de la méthode des panneaux

L'implantation de la méthode des panneaux [32] permet le calcul de l'écoulement autour des profils dont la structure de son programme proposé est définie par

1. Déclaration des données telles que la vitesse à l'infini, l'angle d'attaque, le nombre de Mach et le nombre de panneaux.
2. Une fois la géométrie du profil est choisie, on procède au calcul de coordonnées de chaque panneau, calcul des coordonnées du centre de chaque panneau auxquels les paramètres du problème doivent être calculés, les angles des panneaux avec l'horizontal et la longueur de chaque panneau.
3. Calcul des coefficients de la matrice d'influence et le vecteur des constantes du système d'équations (3.25).
4. Résolution du système d'équations (3.25).
5. Calcul des vitesses et de pression au niveau du centre de chaque panneau et des coefficients de pression et de portance.

4.1. Algorithme de calcul de l'écoulement compressible

1. Définir le profil à considérer dans le but d'étudier l'écoulement
2. Discrétiser le profil par division du contour en petits segments (panneaux)
3. Aplatir le contour par l'application de la transformation de Prandtl-Glauert.
4. Distribuer les singularités selon le profil portant ou non- portant
5. Discrétiser l'équation du potentiel de vitesse en appliquant la condition de tangence et celle de KUTTA-JOULOWSKI.
6. Résolution du système d'équations algébriques.
7. Obtention des vitesses axiales et transversales.
8. Calcul des vitesses axiales et transversales, en appliquant la transformation de Prandtl-Glauert inverse.
9. Calcul du coefficient de pression par le biais de l'écoulement incompressible.
10. Calcul du coefficient de portance en se servant de la différence de pression de l'intrados et de l'extrados.

5. Effets de la compressibilité

5.1. Distribution du coefficient de pression

Les effets de compressibilité constituent la partie essentielle de ce chapitre. Leur présence influe sur la distribution du coefficient de pression et celle du coefficient de portance en fonction du nombre de Mach, de l'angle d'attaque et de l'épaisseur relative du profil. La résolution directe des équations du modèle mathématique étant difficile, on se propose d'utiliser la transformation du Prandtl-Glauert qui permet le passage de l'écoulement compressible à l'écoulement incompressible dont la résolution est accessible. Les étapes de calcul sont organisées selon l'algorithme de calcul détaillé ci-dessus.

5.1.1. Comparaison des coefficients de pression

En comparant avec les résultats de la référence [38, 39] et ceux obtenus par le code de calcul élaboré, on obtient une très bonne concordance, ce qui constitue une première validation de notre code.

Au bord d'attaque, la pression est maximum, vu que toute l'énergie cinétique se transforme en énergie de pression suite à l'arrêt total de l'écoulement en ce point, il s'agit d'un point d'arrêt. Par la suite, l'écoulement contourne le profil en s'accéléralant sur la partie du profil, puis se décélère sur la partie arrière produisant une dépression sur l'avant et surpression sur l'arrière jusqu'au bord de fuite.

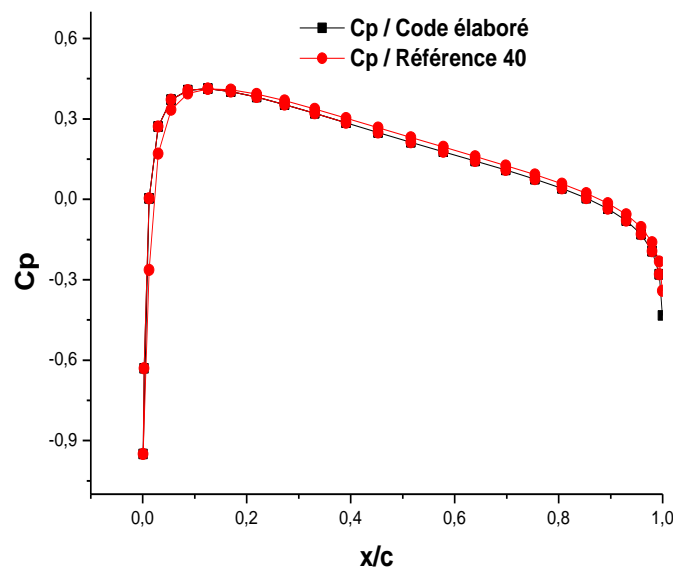


Figure 3.4 : Comparaison des coefficients de pression. NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$.

5.1.2. Apparition des effets de la compressibilité

On trouve que la distribution du coefficient de pression ne dépend pas du nombre de Mach en écoulement incompressible figure (3.4), de même mais en écoulement compressible, cette

distribution est insensible pour les nombres de Mach inférieurs ou égaux à 0.4. Les effets de compressibilité commencent à apparaître une certaine différence de celle de l'écoulement incompressible. La différence avec l'incompressible est d'autant grande que le nombre de Mach est élevé.

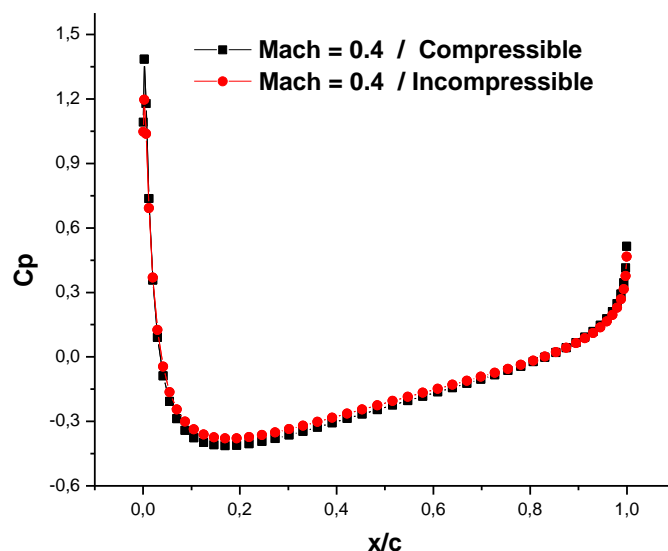


Figure 3.5 : Distribution du coefficient de pression. NACA 0012, $M_\infty = 0.4$, $\alpha = 0^\circ$.

5.1.3. Effet du nombre de Mach

En augmentant le nombre de Mach, les effets de compressibilité sur la distribution du coefficient de pression est d'autant plus grand que le nombre de Mach est élevé (figure 3.5).

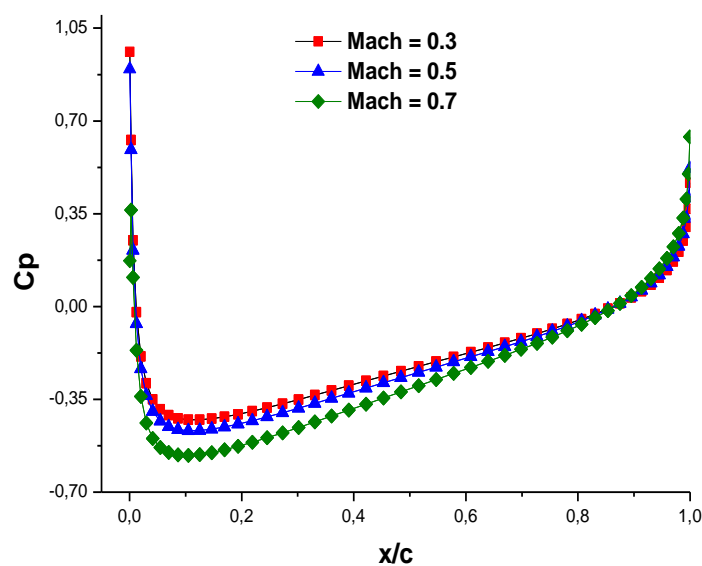


Figure 3.6 : Effet de la compressibilité sur la distribution du coefficient de pression. NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$.

5.1.4. Effet de l'angle d'attaque

Pour l'angle d'attaque nul, la distribution du coefficient de pression est la même sur l'intrados que sur l'extrados par raison de symétrie, mais, plus l'angle d'attaque est grand, et plus la dissymétrie du profil se manifeste, donc, l'écoulement s'accélère et la pression diminue sur l'extrados d'une part, mais d'autre part, sur l'intrados l'écoulement se décélère au fur et à mesure que la pression augmente.

Cette dissymétrie engendre une différence de distributions de pression de part et d'autre du profil dont la surface délimitée par les distributions représente la force par unité de surface créée par l'écoulement autour du profil. Cette surface est d'autant plus grande que l'angle d'attaque est grand, avec un déplacement du point de pression minimum vers le bord d'attaque.

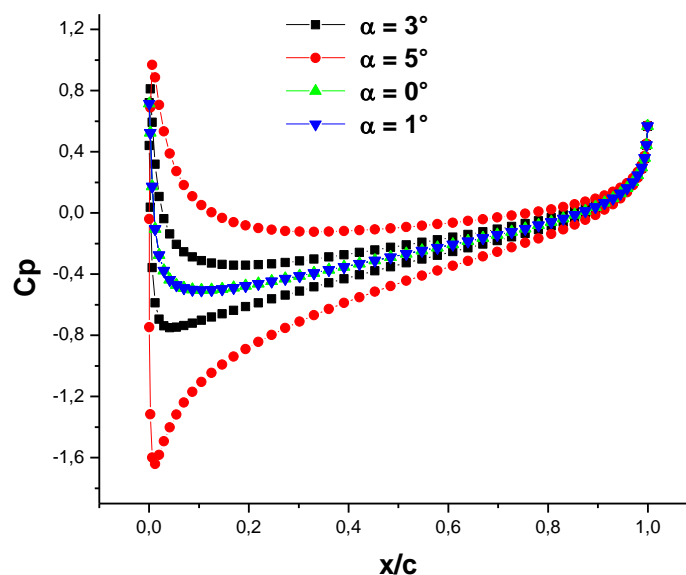


Figure 3.7 : Effet de l'angle d'attaque sur la distribution du coefficient de pression.
NACA 0012, $M_\infty = 0.4$.

5.1.5. Effet de l'épaisseur relative

Une comparaison des distributions du coefficient de pression d'un écoulement incompressible et compressible autour de deux profils NACA 0012 et 0018 pour un même angle d'attaque nul et un même nombre de Mach infini ($M_\infty = 0.6$), l'erreur de la distribution du coefficient de pression qu'on commet quand un écoulement compressible est traité comme incompressible.

Cette erreur est d'autant plus grande que l'épaisseur du profil est grande (NACA 0018).

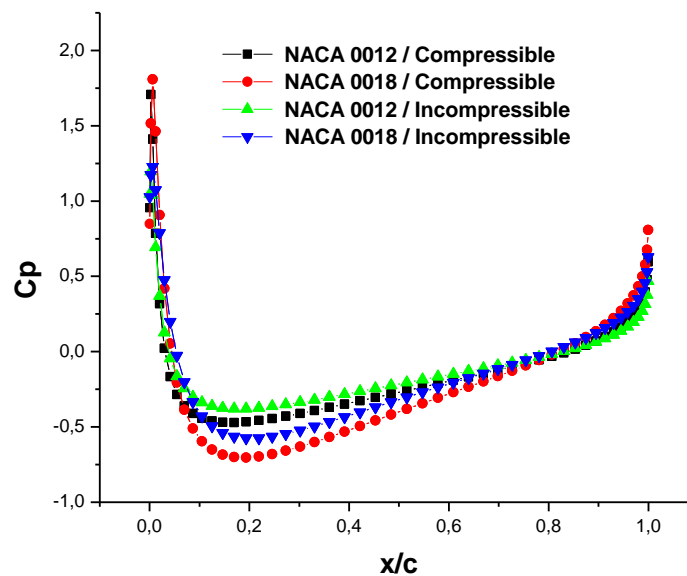


Figure 3.8 : Effet de l'épaisseur relative sur la distribution du coefficient de pression. NACA 0012, $M_\infty = 0.6$, $\alpha = 0^\circ$.

5.2. Distribution du coefficient de portance

5.2.1. Effet de compressibilité

Une comparaison entre les distributions des coefficients de portance en fonction de l'angle d'incidence pour deux écoulements compressible et incompressible, est faite.

La figure représentée ci-dessous démontre que coefficient de portance est fonction linéaire avec l'angle d'incidence, ce qu'est en accord avec les résultats de la référence [38].

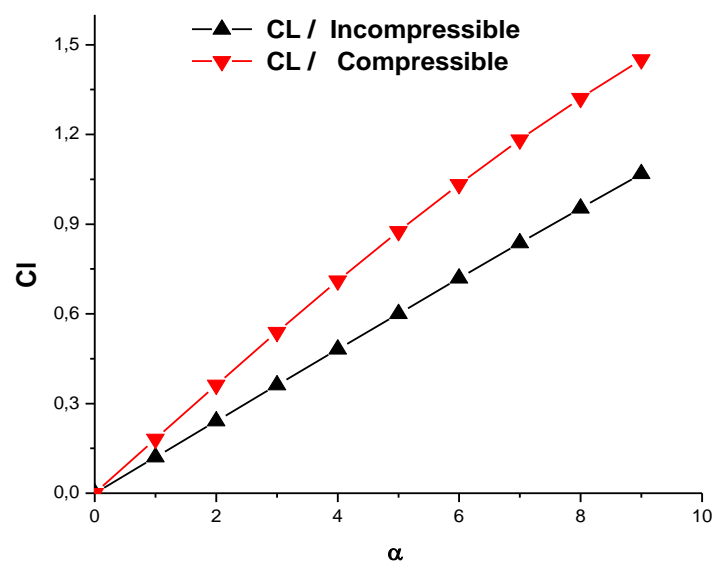


Figure 3.9 : Effet de compressibilité sur la distribution de coefficient de portance. NACA 0012, $M_\infty = 0.6$.

5.2.2. Effet de l'épaisseur relative

Les épaisseurs relatives des profils symétriques NACA 0012, 0015 et 0018 n'ont pas d'effet significatif sur la distribution du coefficient de portance pour les petits angles d'attaque, mais ce coefficient de portance devient plus sensible en augmentant l'angle d'attaque (3.10).

Plus l'épaisseur relative est élevée et plus le coefficient de portance est élevé.

L'écart entre les distributions des coefficients de portance est proportionnel à l'augmentation de la valeur de l'angle d'incidence.

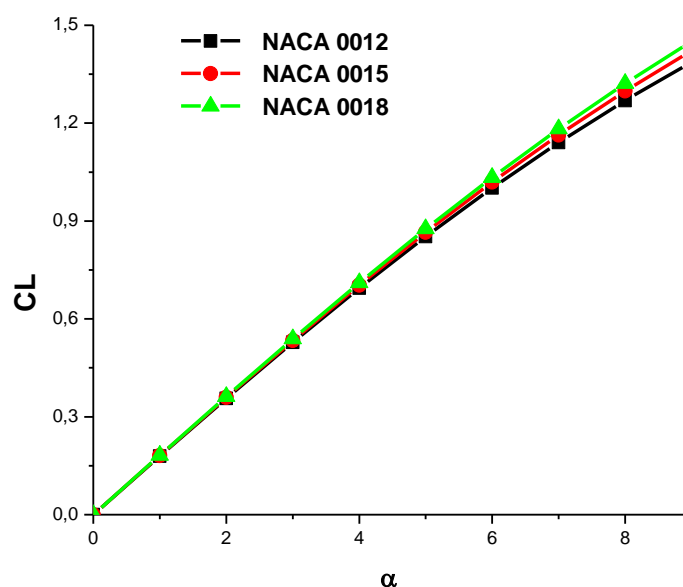


Figure 3.10 : Effet de l'épaisseur relative sur la distribution du coefficient de portance.
 $M_\infty = 0.6$.

5.2.3. Effet du nombre de Mach

Les effets du nombre de Mach sur les distributions du coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence sont examinés et représentés (figure 11).

Plus le nombre de Mach est élevé et plus la tangente de la droite représentant le coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence est élevée.

Donc, le nombre de Mach et l'angle d'incidence ont les effets positifs sur le coefficient de portance.

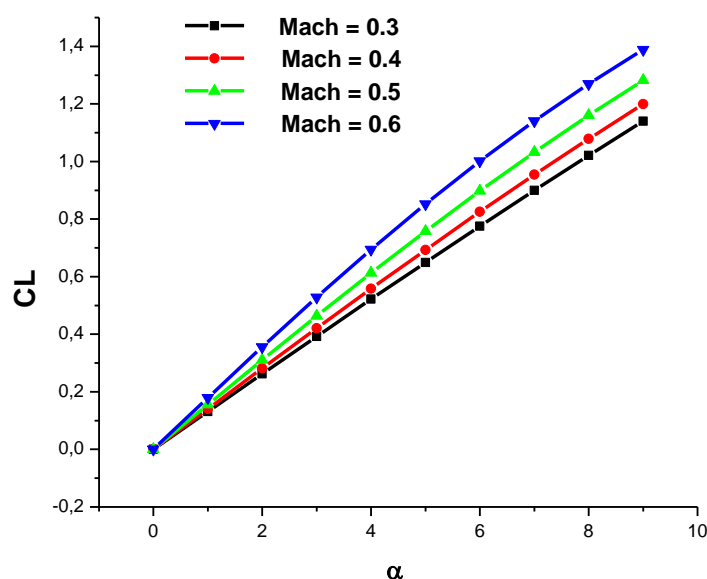


Figure 3.11 : Effet du nombre de Mach sur le coefficient de portance.
NACA 0012.

Conclusion

Une étude de l'écoulement potentiel compressible est faite par voie numérique, à partir de l'équation de LAPLACE dont la résolution mathématique, est basée sur la méthode des panneaux. Les distributions des coefficients de pression et de portance autour des profils symétriques de type NACA 00XX, ont été étudiées et présentées. L'effet du nombre de Mach, l'angle d'attaque et l'épaisseur relative sur l'écoulement, ont été examinés. Des comparaisons entre le traitement de l'écoulement incompressible et l'écoulement compressible, montrent que le nombre de Mach, est le principal paramètre qui exprime les effets de compressibilité, sur les caractéristiques aérodynamiques.

Une partie de ce présent travail a été publiée [43].

Validation et comparaison des écoulements compressible et incompressible

Dans cette partie d'étude, l'écoulement considéré est un écoulement visqueux, stationnaire, compressible et subsonique autour d'un profil bidimensionnel de type NACA 0012.

Les conditions de cette étude sont fixées à un nombre de Reynolds de 3.10^5 , un nombre de Mach de 0.5, un angle d'attaque nul et une station de calcul, arbitrairement choisie, pour l'enthalpie totale et de la vitesse à travers la couche limite à 26% de la corde du profil considéré.

A cet effet, on tente, dans un premier temps, de valider le code de calcul élaboré et ensuite de comparer les écoulements compressible et incompressible pour mettre en évidence les effets de compressibilité à travers certaines distributions telles que l'enthalpie totale, la vitesse, le coefficient de frottement local, l'épaisseur de la couche limite et enfin l'épaisseur de quantité de mouvement.

1. Validation du code de calcul élaboré

Pour s'assurer que le code de calcul élaboré est valide, on procède à quelques comparaisons avec des études antérieures, en effet, on examine la sensibilité du coefficient de frottement global au nombre de Mach dans le domaine subsonique compressible sans atteindre le régime transsonique .i.e. donc, sans l'apparition de l'onde de choc, la valeur du point de séparation d'un écoulement non similaire sur une plaque plane horizontale et enfin la distribution du coefficient de frottement en fonction de l'angle d'attaque.

1.1. Effet du nombre de Mach

Pour un nombre de Mach variant de zéro (écoulement incompressible) à une valeur où le nombre de Mach devient critique (début de l'écoulement transsonique), ces variations du nombre de Mach représentent les effets de la compressibilité sur le coefficient de frottement global.

La figure suivante montre la variation du coefficient de frottement global en fonction du nombre du nombre de Mach, le coefficient de frottement reste insensible aux variations du Mach et qu'il est de l'ordre de quelques centièmes.

La distribution du coefficient de frottement global en fonction du nombre de Mach est en bon accord avec des distributions similaires du coefficient de frottement global citées dans les références [42].

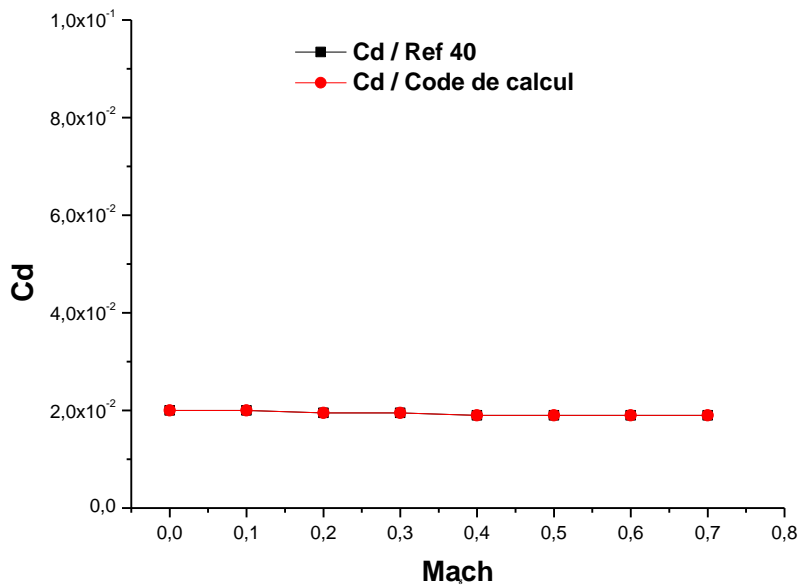


Figure 4.1 : Effet du nombre de Mach sur le coefficient du frottement global.
NACA0012, $\alpha = 3.75^\circ$, $R_\infty = 1.2 \cdot 10^5$.

1.2. Point de séparation d'un écoulement non-similaire

L'écoulement auto-similaire reste toujours collé tout le long de la paroi d'une plaque plane d'après étude faite sous prétexte que le gradient de pression ne sera jamais négatif et que l'écoulement ne sera jamais adverse, mais l'écoulement non-similaire sur le même profil, plaque plane horizontale, décolle à 96% de la corde selon la référence [21 & 25], ce résultat est bien vérifié par le code de calcul en question et la concordance des résultats est excellente.

L'écoulement laminaire non-similaire autour d'une plaque plane proposé par la référence [25] n'est que l'écoulement dit écoulement de HOWARTH (nombre de Prandtl égale à l'unité et une distribution polynomiale de la vitesse externe) dont la distribution de la vitesse externe varie linéairement avec l'abscisse adimensionnelle x/c , telle que

$$\frac{u_e}{u_\infty} = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{c} \right)$$

L'écoulement peut débuter, tout en négligeant l'épaisseur de la couche limite à $x = 0$ avec un gradient de pression adverse, donc la séparation peut avoir lieu. Pour des écoulements couplé et découplé, sans transfert de chaleur et sous certaines conditions citées plus bas, la séparation a lieu à 96% de la longueur de la corde [25].

La figure ci-dessous propose la distribution du paramètre de cisaillement pariétal (Wall Shear Parameter) qui indique lorsqu'il est nul le point de séparation de la couche limite. Ce résultat si positif constitue une sorte de validation du code de calcul.

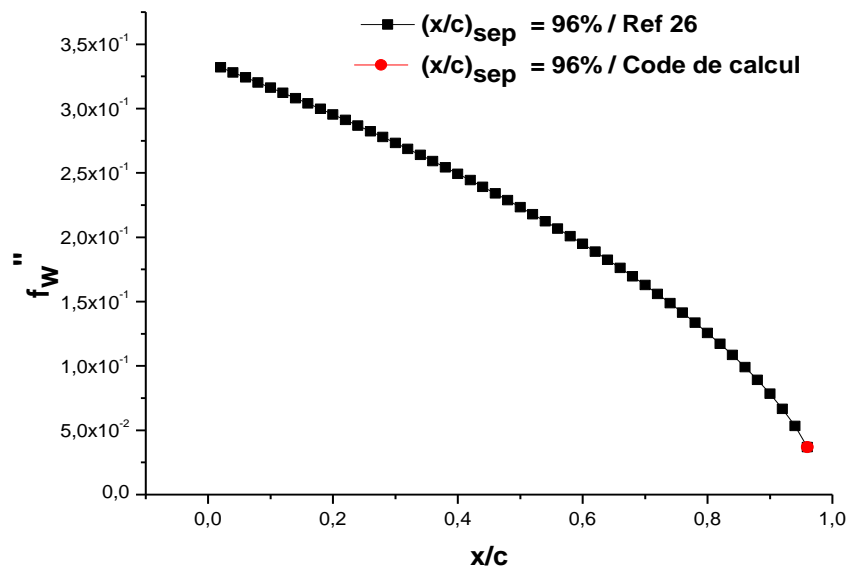


Figure 4.2 : Point de séparation d'un écoulement non-similaire, Plaque plane. $Pr = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 10^6$.

1.3. Distribution du coefficient de frottements autour d'un profil aérodynamique

1.3.1. Nomenclature d'un profil aérodynamique

Avant d'entamer la validation du code de calcul élaboré via la distribution du coefficient de frottements, il est utile de présenter un profil aérodynamique avec sa nomenclature.

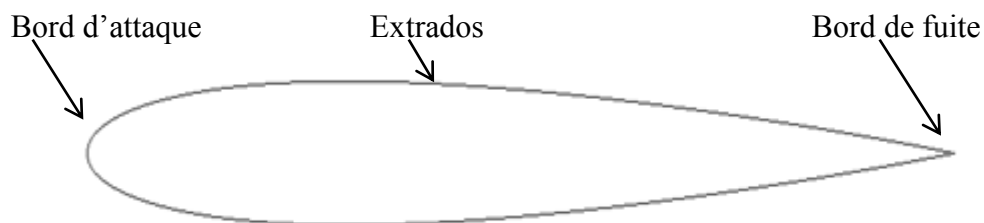


Figure 4.3 : Nomenclature d'un profil NACA 0012

1.3.2. Distribution du coefficient de frottement local

Une comparaison des distributions du coefficient de frottement sur l'extrados d'un profil NACA 0012 pour un nombre de Reynolds de $3 \cdot 10^5$ avec trois valeurs de l'angle d'attaque, en effet, 0° , 2° et 4° , en fonction de l'abscisse du profil est représentée.

On remarque une bonne concordance entre les distributions de la référence [22] et celles du code de calcul élaboré et que le point de séparation recule plus vers le bord d'attaque si on augmente plus la valeur de l'angle d'attaque, ce qui favorise la séparation de la couche limite.

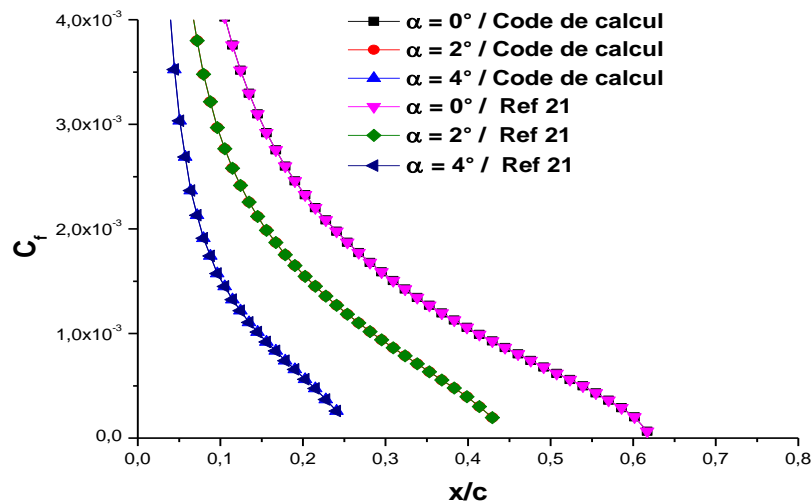


Figure 4.4 : Distribution du coefficient de frottement local. NACA 0012, $R_{\infty}= 3.10^5$.

2. Comparaison entre la couche limite compressible et incompressible

2.1. Paramètres de cisaillement pariétaux

Les distributions du paramètre de cisaillement pariétal des couches limites laminaires compressible et incompressible sont examinées et comparées. En effet, tout près du bord d'attaque, les évolutions de ces distributions sont bien confondues, mais plus loin du bord d'attaque, l'évolution pour le cas incompressible est plus rapide que celle du cas compressible, la vitesse de ce dernier cas est relativement élevée avec un recul du point de séparation par rapport au cas incompressible, où les particules fluides ont la tendance de s'arrêter.

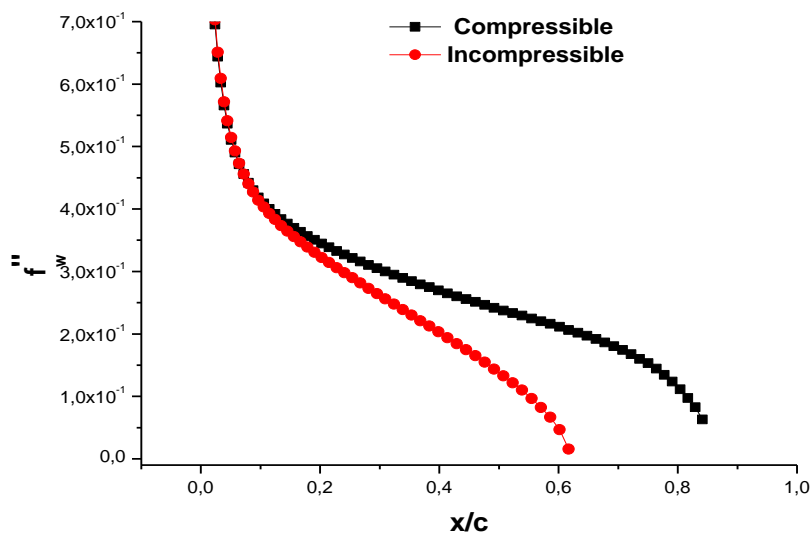


Figure 4.5 : Distribution du paramètre de cisaillement pariétal. NACA 0012, $M_{\infty} = 0.5$, $\alpha = 0^{\circ}$, $R_{\infty} = 3.10^5$.

2.2. Profils d'enthalpie totale

Les distributions de l'enthalpie totale dans les couches limites compressible et incompressible sont représentées pour une station arbitrairement choisie.

Les deux distributions décroissent dans une première partie, juste tout près de la paroi, où les vitesses sont encore faibles.

Loin de la paroi, elles croissent jusqu'à l'unité, valeur caractérisant la présence de l'écoulement potentiel.

Loin de la paroi, un écart important entre les deux distributions ne cesse de diminuer jusqu'à l'apparition de l'écoulement extérieur.

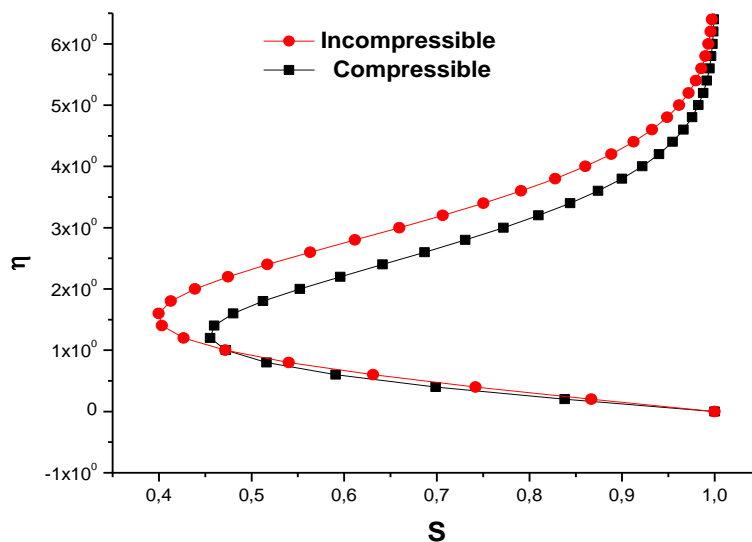


Figure 4.6 : Distribution de l'enthalpie totale. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

2.3. Profils de la vitesse

Les distributions de vitesses dans une couche limite laminaire compressible et incompressible sont calculées et présentées pour un écoulement autour d'un profil NACA 0012, un nombre de Mach égale à 0.5, un nombre de Reynolds égale 3.10^5 et d'un angle d'incidence $\alpha = 0^\circ$, pour une station arbitrairement choisie.

Les distributions de la vitesse pour les deux cas, compressible et incompressible, sont bien distinctes, en effet, la vitesse de l'écoulement compressible est relativement élevée par rapport au cas incompressible.

Donc, la compressibilité de l'écoulement ne fait que l'accélérer.

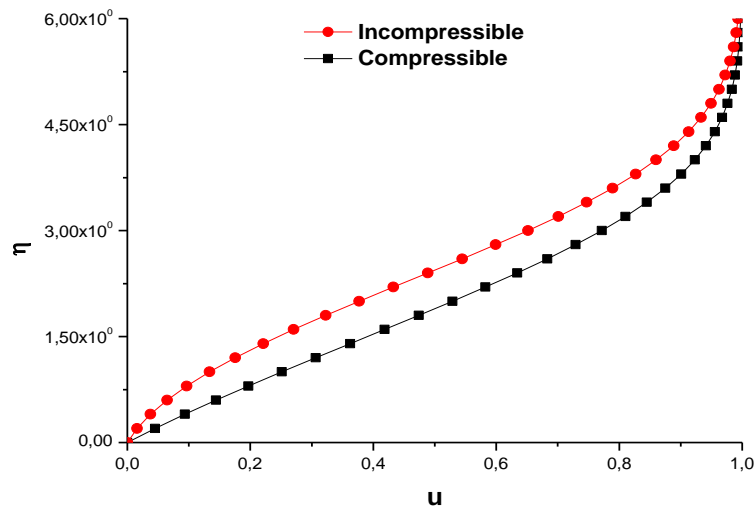


Figure 4.7 : Comparaison des profils de la vitesse. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

2.4. Coefficients du frottement local

Les distributions des coefficients de frottement local pour une couche limite compressible et une couche limite incompressible restent identiques sur une distance allant jusqu'à 20% de la corde du profil, mais les effets de la compressibilité permettent à la séparation de prendre du retard vers le bord de fuite pour qu'elle puisse apparaître, en effet, le point de séparation de la couche limite incompressible est alentour de 60 % de la corde, alors qu'il est à 84 % lorsque la couche limite est compressible.

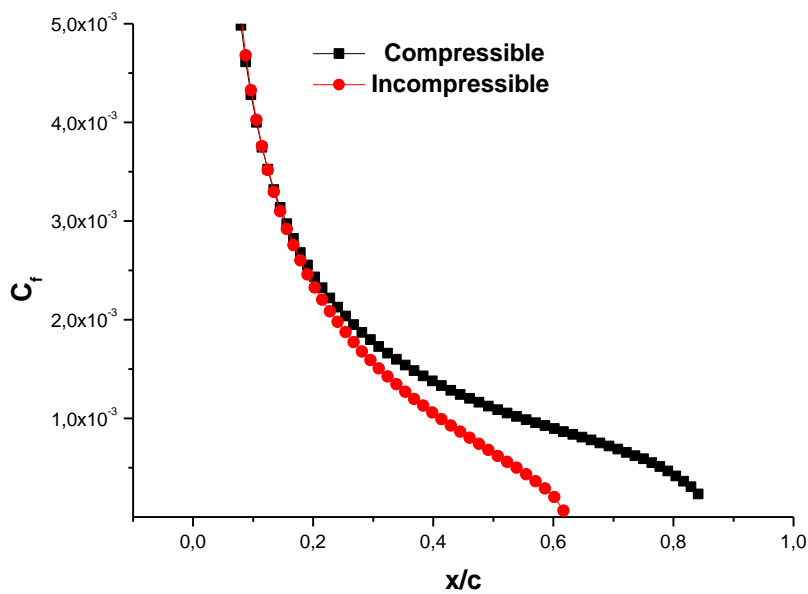


Figure 4.8 : Comparaison des coefficients du frottement local. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

Traiter un écoulement compressible comme étant incompressible, induit des erreurs conséquentes en négligeant les effets de compressibilité. Au-delà, les courbes sont distinctes avec une contrainte plus importante pour le cas compressible mais avec une zone de laminarité plus grande traduit par le recul du point de séparation vers le bord de fuite (figure 4.7) d'une abscisse $x/c = 61\%$ à $x/c = 84\%$ à une erreur sur la position du point de séparation correspondant d'environ 23%. L'erreur est d'autant plus importante que le nombre de Mach est élevé.

2.5. Epaisseurs de la couche limite

Une comparaison des épaisseurs d'une couche limite compressible et incompressible pour des nombres de Mach et de Reynolds donnés, est faite. En effet, l'épaisseur de la couche limite est plus importante dans le cas incompressible que dans le cas compressible, ceci s'explique par le fait que le traitement par la transformation de Prandtl-Glauert a fait aplatis le profil réel (cas compressible) que le profil considéré (cas incompressible) d'une part et d'autre part, les particules fluides se trouvent plus animées avec le cas compressible et par conséquence une zone laminaire plus importante.

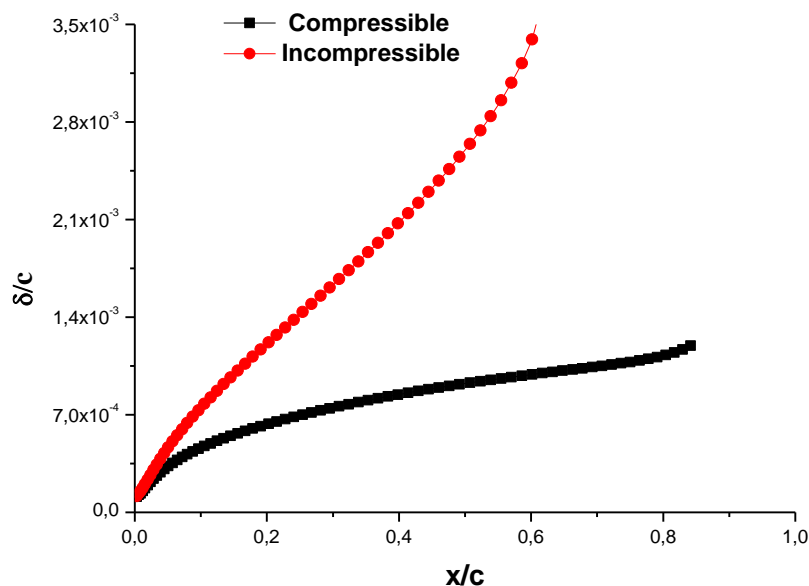


Figure 4.9 : Comparaison des épaisseurs de la couche limite. NACA 0012, $M_\infty = 0,5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

2.6. Epaisseurs de quantité du mouvement

Les distributions de l'épaisseur de quantité de mouvement des couches limites incompressible compressible sont identiques. Cette différence n'est qu'une sorte de déficit d'énergie qui pourrait être plus importante si l'écoulement avait changé du régime.

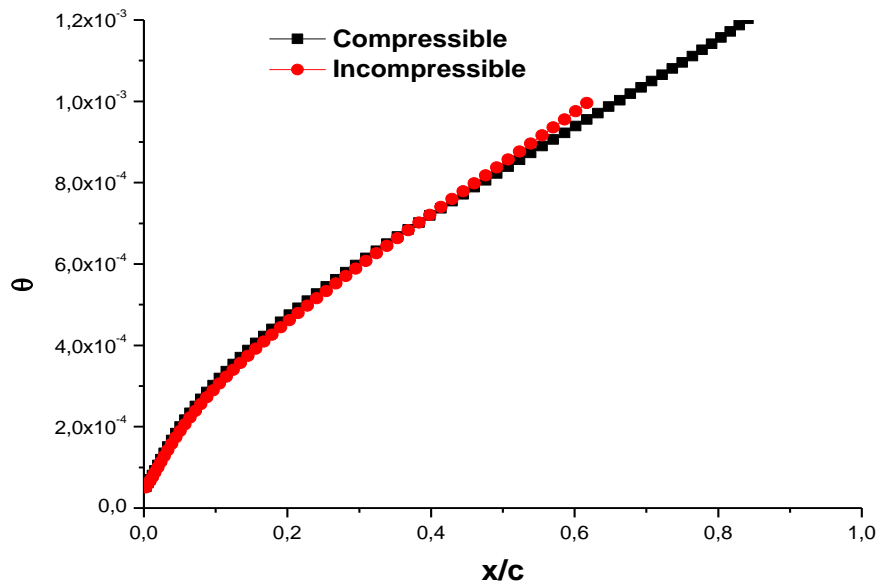


Figure 4.10 : Comparaison des épaisseurs de quantité du mouvement.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$. $R_\infty = 3.10^5$.

3. Effets du nombre de Mach

3.1. Profils de l'enthalpie totale

La variation du nombre de Mach dans le domaine subsonique, à travers la couche limite, n'a pas d'effet sur la distribution de l'enthalpie totale telle qu'il représenté sur la figure suivante.

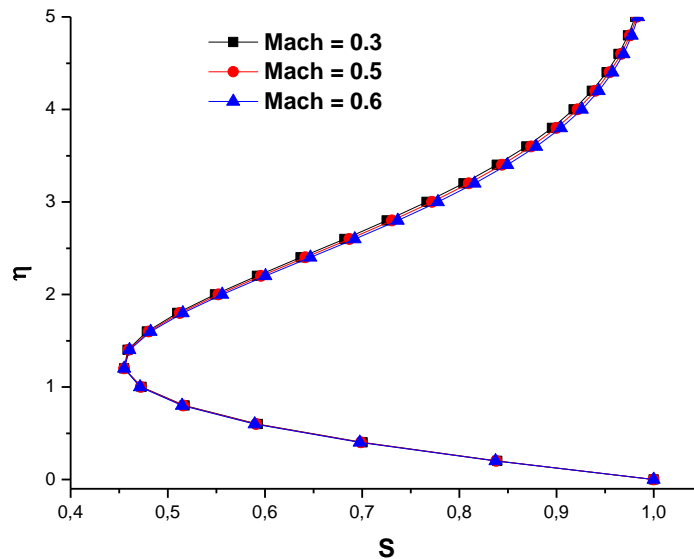


Figure 4.11 : Effet du nombre de Mach sur le profil de l'enthalpie totale. NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

3.2. Profils de la vitesse

Pour une station donnée, les distributions des vitesses à travers la couche limite, sont bien confondues, donc la variation du nombre de Mach n'a pas d'effet sur les distributions de la vitesse comme il est représenté sur la figure ci-dessous.

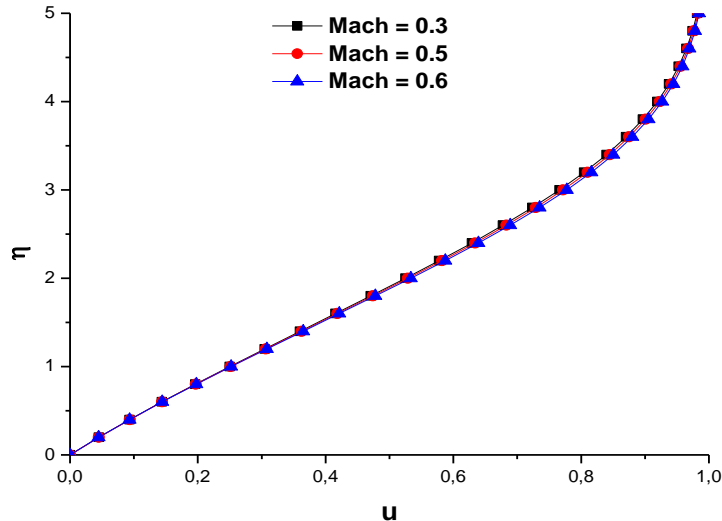


Figure 4.12 : Effet du nombre de Mach sur le profil de la vitesse. NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

3.3. Coefficients du frottement local

L'effet du nombre de Mach sur la distribution du coefficient de frottement local est examiné. En effet, la distribution du coefficient de frottement local est légèrement sensible à la variation du nombre du Mach. Donc, plus le nombre du Mach est élevé et plus la vitesse de l'écoulement extérieur est élevée. Cette vitesse fait augmenter le nombre de Reynolds, qui est inversement proportionnel au coefficient du frottement local.

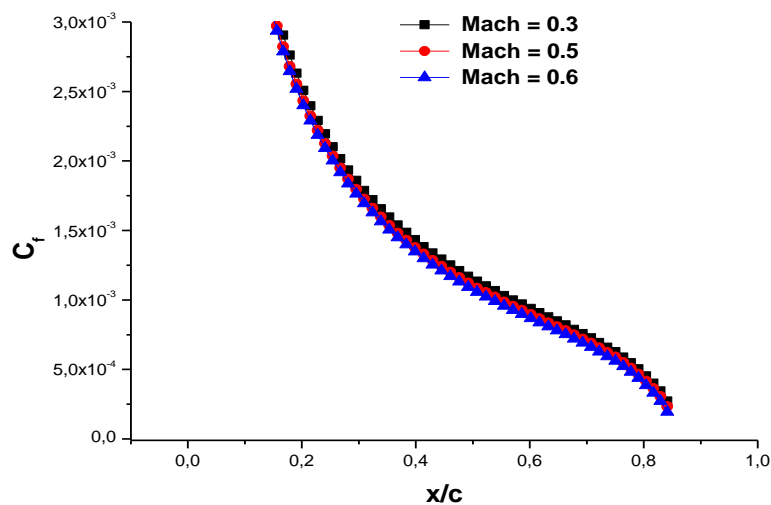


Figure 4.13 : Effet du nombre de Mach sur le coefficient du frottement local. NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

3.4. Epaisseurs de la couche limite

Suite aux variations du nombre de Mach, les distributions de l'épaisseur de la couche limite restent bien confondues près du bord d'attaque.

Loin du bord d'attaque, les distributions de l'épaisseur de la couche limite ne sont plus confondues, en effet, plus le nombre de Mach est important et plus l'épaisseur de la couche limite croit.

L'augmentation du nombre de Mach, est une sorte d'accélération des particules fluides, et cette accélération anime plus ces particules fluides, et par conséquent l'épaississement de la couche limite régresse un petit peu, et c'est la raison pour laquelle les distributions de l'épaisseur de la couche limite deviennent de plus en plus minces.

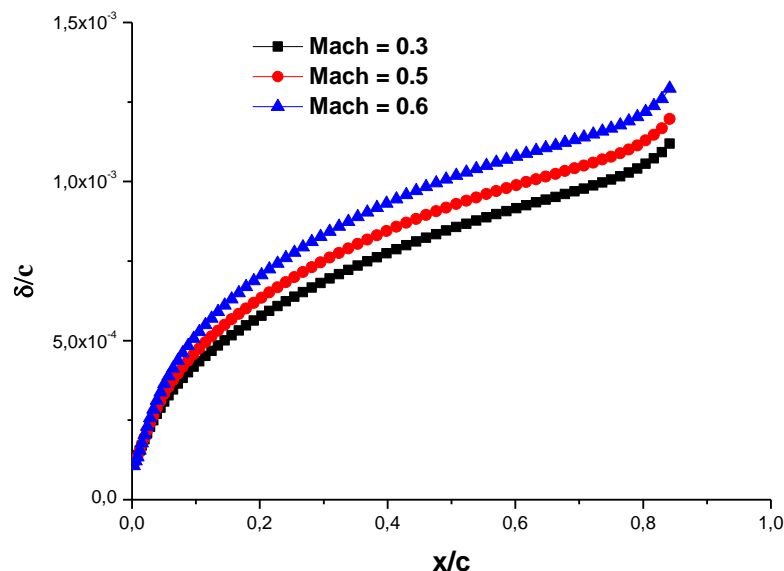


Figure 4.14 : Effet du nombre de Mach sur l'épaisseur de la couche limite.
NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

3.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

La distribution de l'épaisseur de quantité de mouvement est insensible à la variation du nombre de Mach, mais, on enregistre une décroissance de la valeur de cette épaisseur en fonction du nombre de Mach en allant vers le bord de fuite.

Donc, plus le nombre de Mach est important et plus l'épaisseur de quantité de mouvement est petite, cette différence représente une sorte de gain en quantité de mouvement qui pourrait être plus importante si l'écoulement était laminaire et plus importante si l'écoulement avait changé du régime.

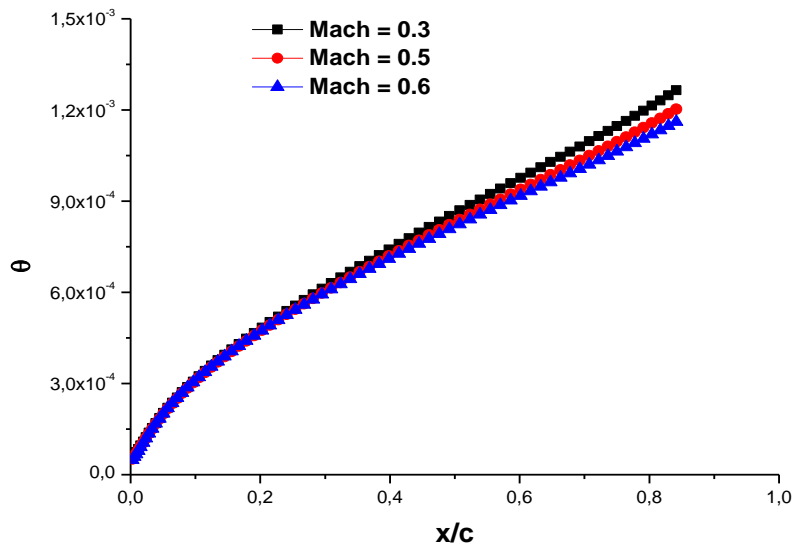


Figure 4.15 : Effet du nombre de Mach sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$, $R_{ex} = 3.10^5$.

4. Effets du nombre de Reynolds

4.1. Profils de l'enthalpie totale

La distribution de l'enthalpie totale à travers la couche limite pour une station arbitrairement choisie, reste insensible à toute variation du nombre de Reynolds. En maintenant le nombre du Mach, la variation du nombre de Reynolds n'est que la variation de la corde du profil, mais cette corde est prise comme une distance adimensionnelle. Donc, le nombre de Reynolds n'a aucun effet sur la distribution de l'enthalpie totale.

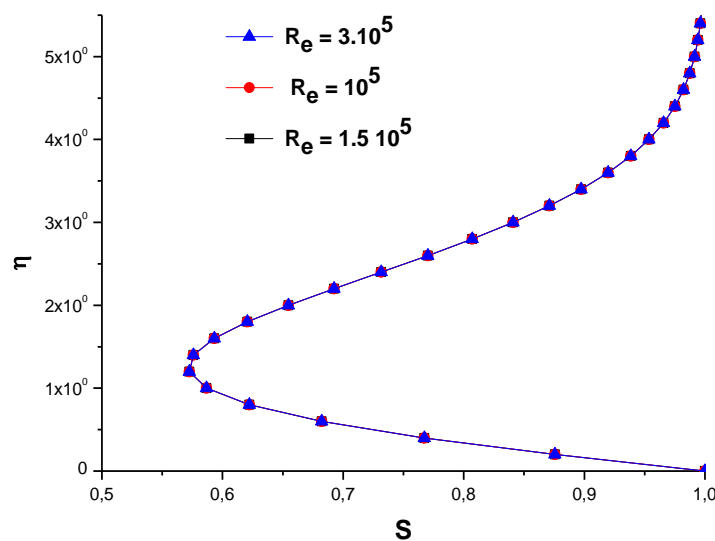


Figure 4.16 : Effet du nombre de Reynolds sur le profil de l'enthalpie totale.
NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$.

4.2. Profils de la vitesse

L'effet du nombre de Reynolds sur la distribution de la vitesse, à travers la couche limite, est examiné.

La variation du nombre de Reynolds, en maintenant le nombre de Mach, n'est qu'une, en réalité, une augmentation de la valeur de la corde du profil, qui n'a aucun effet direct sur la vitesse de l'écoulement.

Donc, le nombre de Reynolds n'a aucun effet sur la distribution de la vitesse.

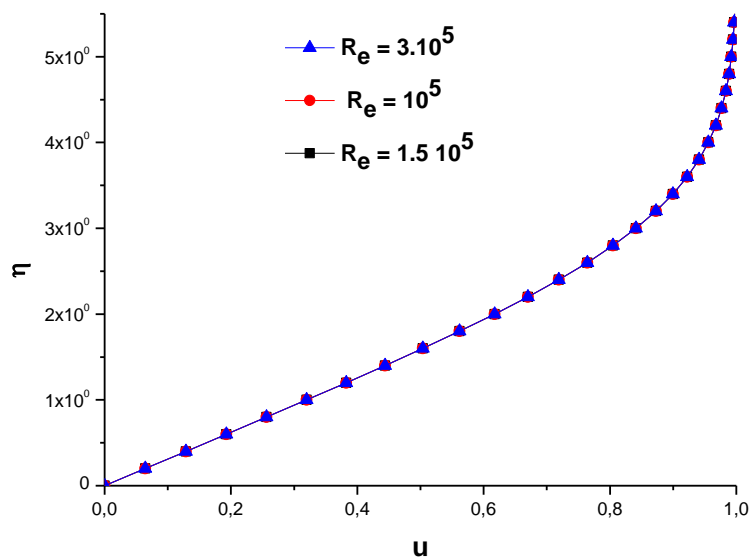


Figure 4.17 : Effet du nombre de Reynolds sur le profil de la vitesse.
NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$.

4.3. Coefficients du frottement local

Les formules utilisées pour le calcul du coefficient du frottement local montrent que les frottements sont inversement proportionnels au nombre de Reynolds, en effet, plus le nombre de Reynolds est important et plus les frottements sont minimes.

La figure suivante montre que pour trois nombres de Reynolds différents, trois distributions du coefficient de frottement local sont inversement proportionnelles à ces nombres de Reynolds.

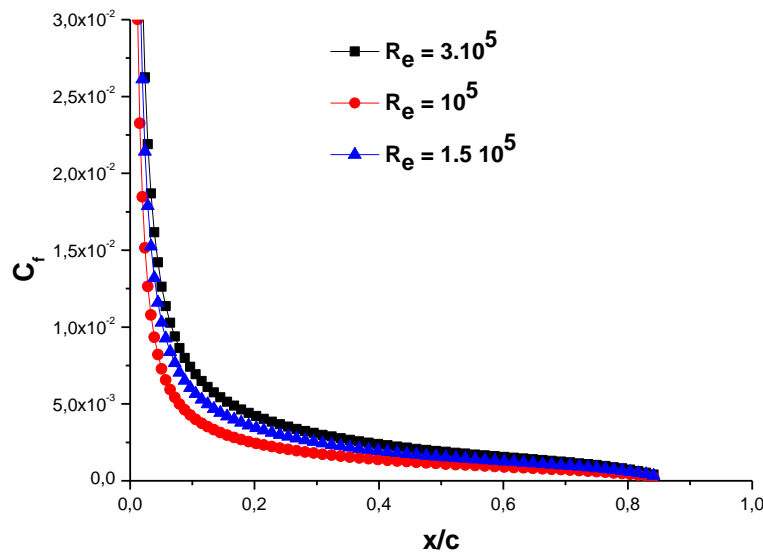


Figure 4.18 : Effet du nombre de Reynolds sur le coefficient du frottement local.
 NACA 0012, $M_\infty = 0,5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

4.4. Épaisseurs de la couche limite

Les effets du nombre de Reynolds sur la distribution de l'épaisseur de la couche limite sont examinés et représentés (4.19). Plus le nombre de Reynolds est élevé et plus l'épaisseur de la couche limite est petite. En effet, d'après la formule de l'épaisseur de la couche limite mentionnée ci-dessus, l'épaisseur de la couche limite est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds, c'est pourquoi les distributions de l'épaisseur de la couche limite prennent de telles formes.

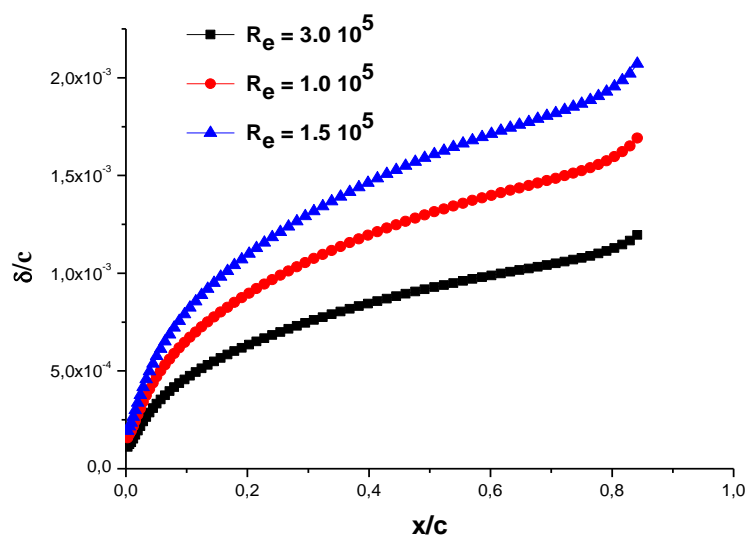


Figure 4.19 : Effet du nombre de Reynolds sur l'épaisseur de la couche limite.
 NACA 0012, $M_\infty = 0,5$, $\alpha = 0^\circ$.

4.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Les effets des variations du nombre de Reynolds sur les distributions de l'épaisseur de quantité du mouvement sont examinés et représentés sur la figure ci-dessous. En effet, plus le nombre de Reynolds est élevé et plus la distribution de la quantité de quantité de mouvement est petite. En effet, d'après la formule de l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite mentionnée ci-dessus, l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds, c'est pourquoi les distributions de l'épaisseur de quantité de mouvement prennent de telles formes.

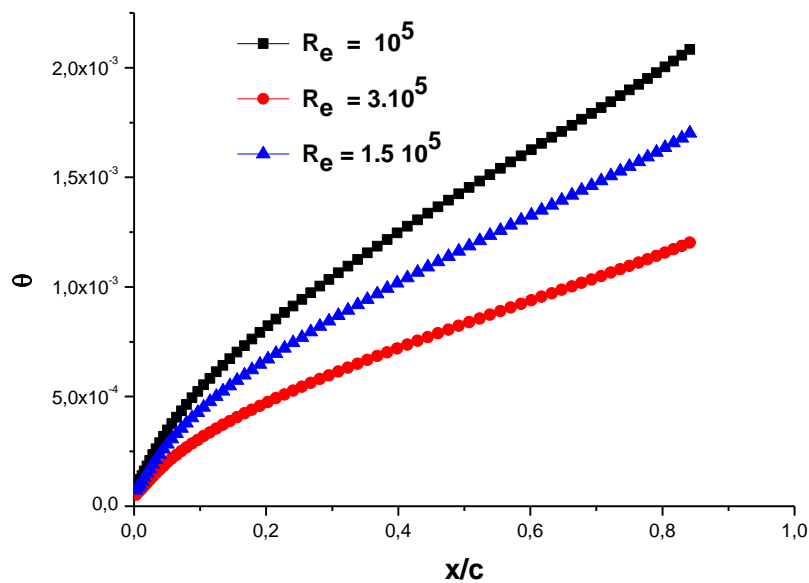


Figure 4. 20 : Effet du nombre de Reynolds sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$.

Contrôle thermique

5.1. Effets du chauffage pariétal

Le chauffage pariétal consiste à chauffer les particules fluides qui sont en contact direct avec la paroi et ces dernières chauffent à leur tour les particules des couches supérieures et ainsi de suite jusqu'à l'écoulement extérieur.

Donc, cette différence de température n'est qu'un gradient de température entre la paroi et l'écoulement extérieur qui se traduit par la diminution de la masse volumique et la viscosité, ce qui favorise plus le décollement de l'écoulement [12].

A cet effet, deux rapports de chauffage pariétal sont comparés au cas dit sans-contrôle avec l'examen des effets du chauffage pariétal sur les distributions de l'enthalpie totale, du profil de la vitesse à travers la couche limite, du coefficient de frottement local, de l'épaisseur de la couche limite, et enfin l'épaisseur de quantité de mouvement.

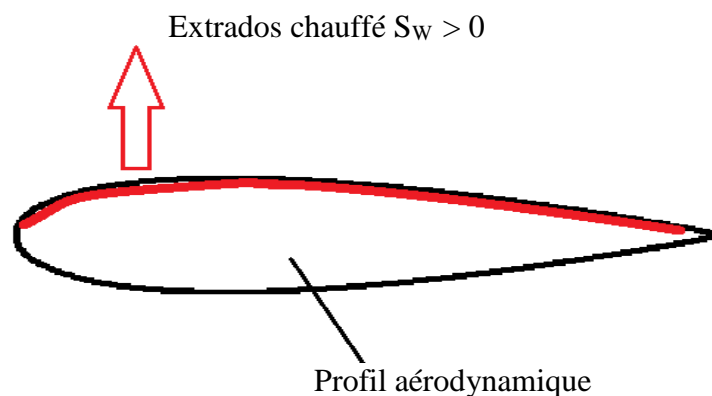


Figure 5.1 : Effet du chauffage pariétal sur l'extrados d'un profil aérodynamique.

5.1.1. Profils de l'enthalpie totale

Les distributions de l'enthalpie totale avec et sans contrôle par chauffage pariétal sont présentées pour une station arbitrairement choisie.

Les effets du chauffage se manifestent uniquement dans une petite zone de la couche limite près de la paroi.

Les rapports de chauffage ne peuvent se convertir qu'en énergie cinétique, plus les rapports de chauffage sont importants et plus les quantités converties en énergie cinétique sont importantes des quantités d'énergie doivent être absorbées par l'écoulement, ces quantités d'énergie converties en énergie cinétique sont aussi importantes que les rapports du chauffage pariétal.

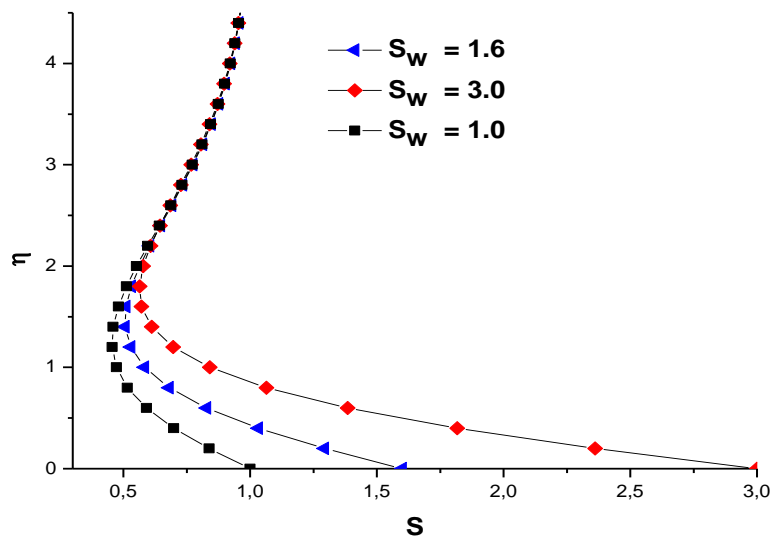


Figure 5.2 : Effet du chauffage pariétal sur l'enthalpie totale. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.1.2. Profils de la vitesse

Les distributions de la vitesse à travers la couche limite avec et sans contrôle par chauffage pariétal sont représentées pour une station arbitrairement choisie. Les effets du chauffage se manifestent dans une zone de la couche limite près de la paroi, des quantités d'énergie aussi bien importantes que les rapports de chauffage pariétal appliqués se convertissent en énergie cinétique en augmentant la vitesse des particules fluides, et une autre zone, où les effets du chauffage pariétal deviennent insignifiants comme dans le cas de l'écoulement extérieur

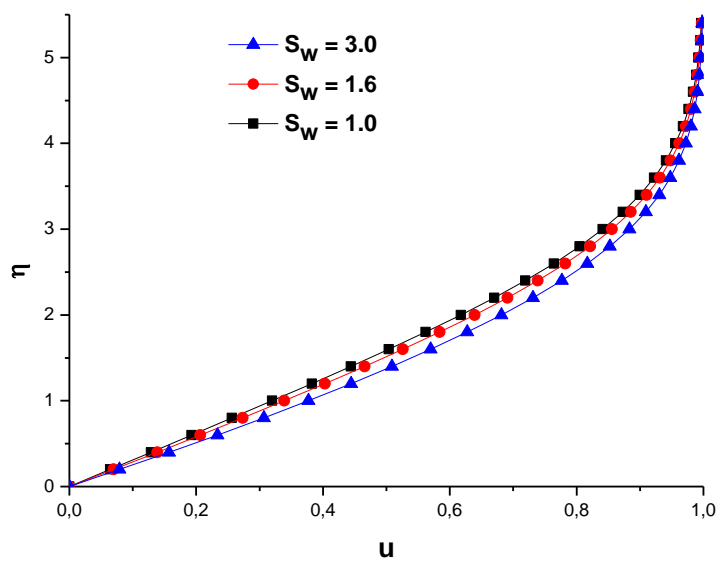


Figure 5.3 : Effet du chauffage pariétal sur le profil de la vitesse. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.1.3. Coefficients du frottement local

Les particules fluides, en parcourant le contour du profil, doivent faire face aux frottements qui sont dû à la rugosité du profil d'une part et d'autre part à la viscosité du fluide, ces deux éléments constituent les sources des frottements.

L'énergie cinétique apparue suite à l'application du contrôle par chauffage pariétal, constitue également une source supplémentaire des frottements.

Les distributions du coefficient de frottement local avec et sans contrôle par chauffage pariétal sont présentées.

Plus le rapport de chauffage est important et plus les frottements sont importants avec une décroissance plus rapide en allant vers une valeur nulle tout en indiquant le début de la séparation de la couche limite, donc le contrôle par chauffage pariétal accélère l'apparition de la séparation de la couche limite et cette accélération est proportionnelle aux rapports de chauffage pariétal appliqués.

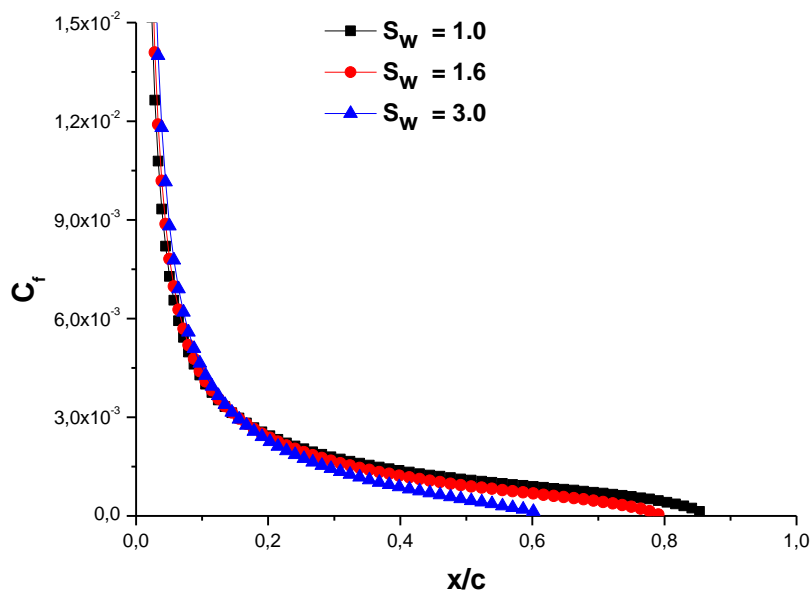


Figure 5.4 : Effet du chauffage pariétal sur le coefficient du frottement local.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.1.4. Epaisseurs de la couche limite

Le sur-épaississement de la couche limite survient de l'application du chauffage pariétal qui ne cesse de freiner les particules fluides suite à l'application du contrôle par chauffage pariétal qui augmente la vitesse à travers la couche limite.

Plus le rapport de chauffage est important et plus l'épaisseur de la couche limite augmente.

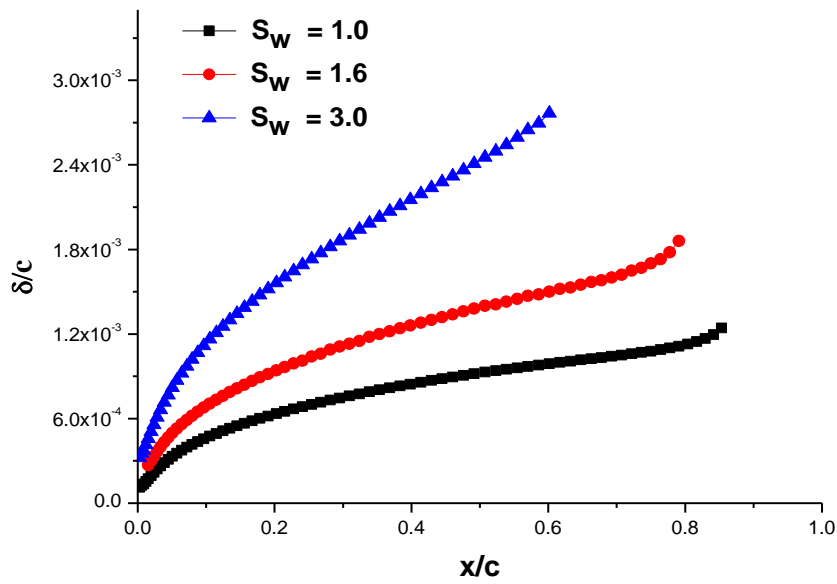


Figure 5.5 : Effet du chauffage pariétal sur l'épaisseur de la couche limite.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.1.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Le déficit en quantité de mouvement survient toujours, mais l'application du contrôle par chauffage pariétal, réduit ce déficit parce que le chauffage pariétal fournit de l'énergie à l'écoulement d'où l'épaississement de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Cet épaississement est en rapport inverse aux rapports du chauffage pariétal appliqué.

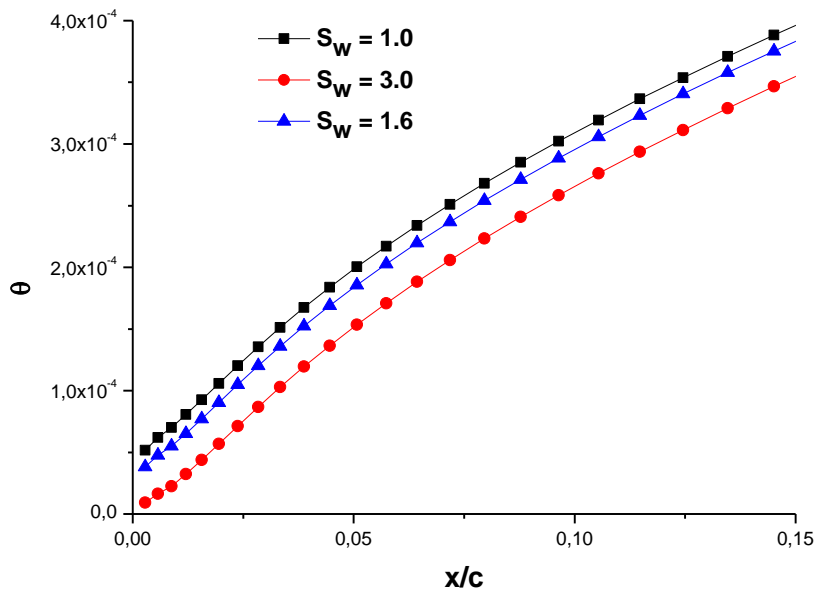


Figure 5.6 : Effet du chauffage pariétal sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.2. Effets du refroidissement pariétal

Le refroidissement pariétal fait refroidir les particules fluides qui sont en contact direct avec la paroi et ces dernières refroidissent également les particules fluides des couches supérieures et ainsi de suite jusqu'à l'écoulement extérieur.

Donc, un gradient de température se déclenche entre la paroi et l'écoulement extérieur et par conséquent des forces de flottabilité naissent en tirant l'écoulement de la couche limite vers la paroi.

Deux rapports de refroidissement pariétal appliqués et comparés au cas dit sans-contrôle et leurs effets sur les distributions du profil de l'enthalpie totale pour une station arbitrairement choisie, du profil de la vitesse à travers la couche limite, du coefficient de frottement local, de l'épaisseur de la couche limite, et enfin l'épaisseur de la quantité de mouvement.

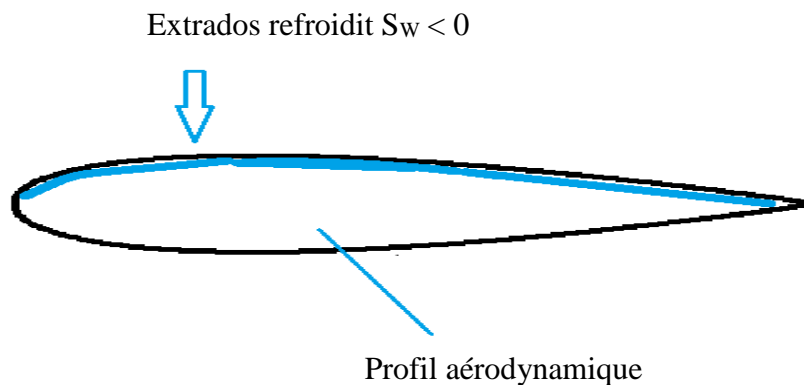


Figure 5.7 : Effet du refroidissement pariétal sur l'extrados d'un profil aérodynamique.

5.2.1. Profils de l'enthalpie totale

Les distributions de l'enthalpie totale avec et sans contrôle par refroidissement pariétal sont présentées pour une station arbitrairement choisie.

Les effets du refroidissement se manifestent uniquement dans une petite zone de la couche limite où des petites quantités d'énergie qui doivent être dégagées de l'écoulement et absorbées par la paroi, cette énergie dégagée se convertit en énergie cinétique en faisant accélérer les particules fluides.

Donc, plus le rapport du refroidissement est important et plus les particules fluides se retrouvent accélérer.

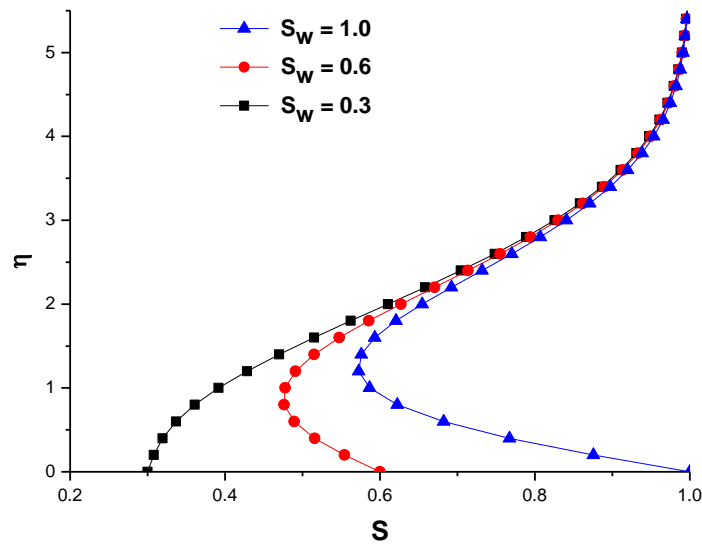


Figure 5.8 : Effet du refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.2.2. Profils de la vitesse

Les effets d'application du contrôle par refroidissement pariétal sur les distributions de la vitesse à travers la couche limite pour une station arbitrairement choisie sont représentés et comparés. La vitesse à travers la couche limite est proportionnelle au rapport de refroidissement pariétal. Donc, plus le rapport du refroidissement pariétal est élevé, plus la vitesse est élevée et plus le point de séparation de la couche limite recule vers le bord de fuite.

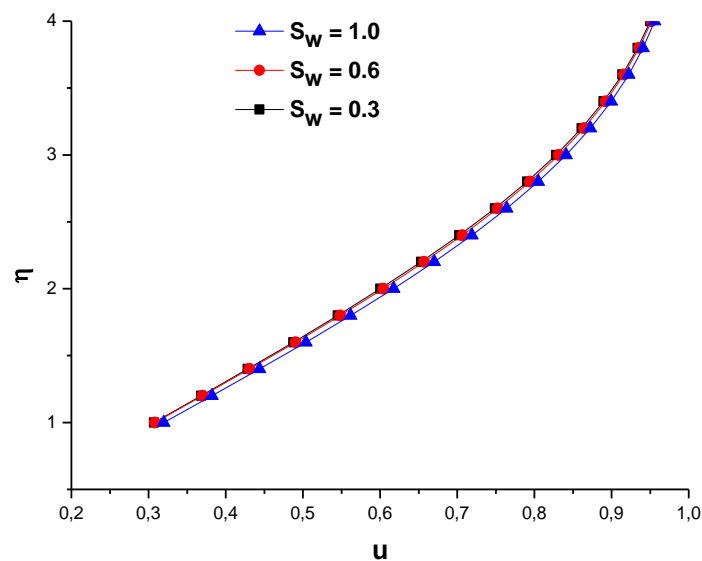


Figure 5.9 : Effet du refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.2.3. Coefficients du frottement local

Dans une première partie de la distribution du coefficient de frottement local, le contrôle par refroidissement pariétal appliqué n'a pas d'effet, mais plus loin du bord d'attaque, ces distributions du coefficient de frottement commencent à se séparer où l'effet du refroidissement prend de la place.

En effet, plus le refroidissement pariétal est important et plus la distribution du coefficient de frottement local le long de l'extrados du profil est importante.

Le contrôle par refroidissement pariétal fait relativement augmenter les frottements loin du bord d'attaque et juste bien avant l'apparition de la séparation tout en gagnant plus de laminarité.

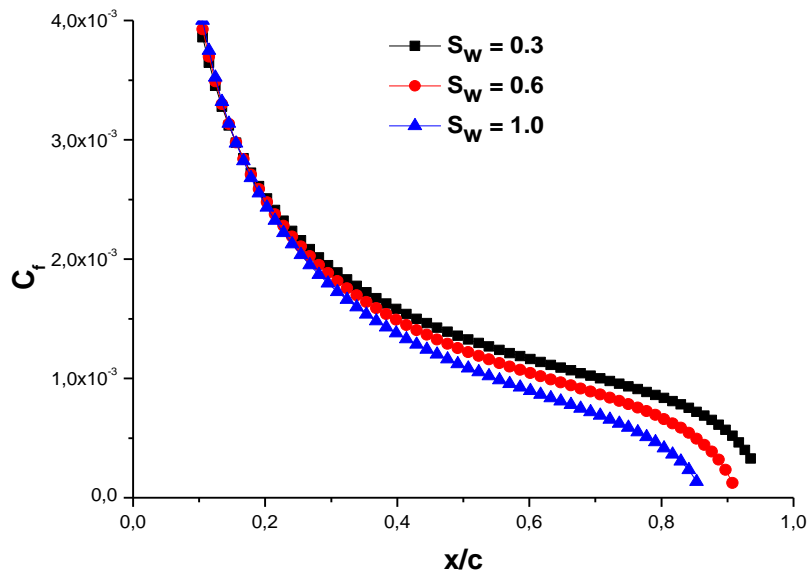


Figure 5.10 : Effet du refroidissement pariétal sur le coefficient du frottement.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.2.4. Epaisseurs de la couche limite

Les effets du contrôle par refroidissement pariétal sur les distributions de l'épaisseur de la couche limite sont représentés et comparés.

Le contrôle de la couche limite laminaire par refroidissement pariétal a fait mincir l'épaisseur de la couche limite. En effet, plus on refroidit l'écoulement et plus l'épaisseur de la couche limite devient mince.

Le contrôle par refroidissement fait, à la fois, mincir l'épaisseur de la couche limite et l'étendre.

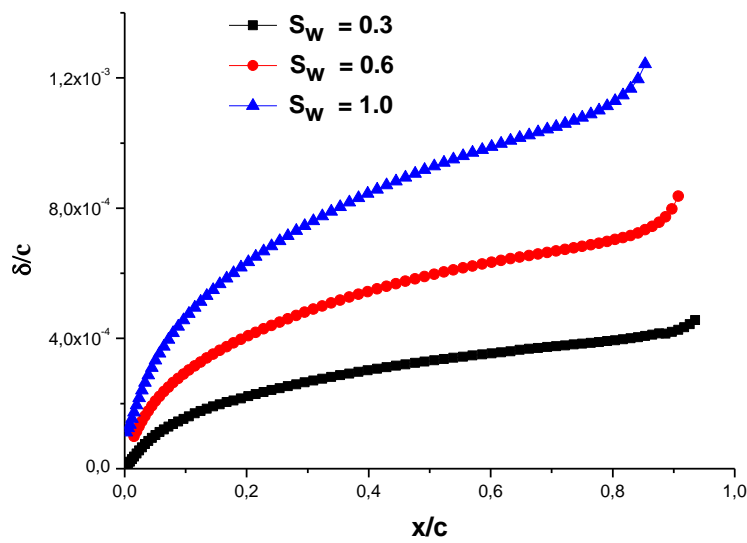


Figure 5.11 : Effet de refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.2.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Les distributions de l'épaisseur de quantité de mouvement avec et sans contrôle par refroidissement pariétal sont présentées et comparées.

Plus le rapport de refroidissement est important et plus les épaisseurs de quantité de mouvement sont épaisses. Cet épaissement est dû au refroidissement pariétal appliqué, qui fait augmenter le déficit en quantité de mouvement.

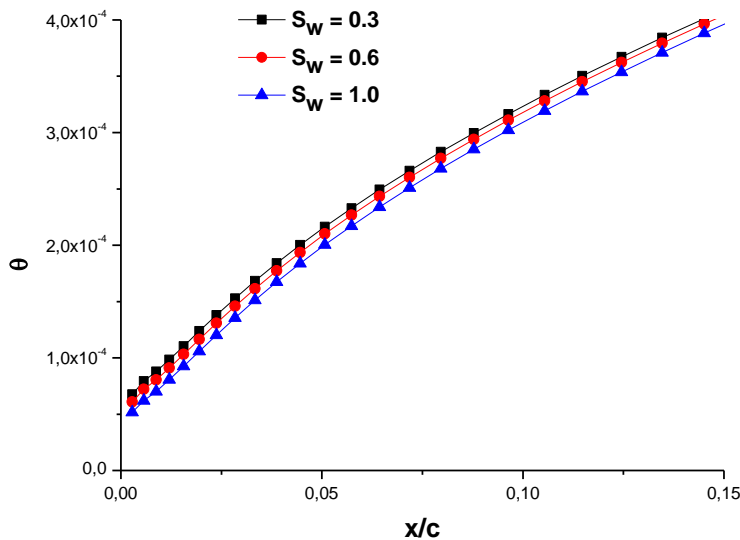


Figure 5.12 : Effet de refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.3. Contrôle du point de séparation de la couche limite

5.3.1. Contrôle du point de séparation par chauffage pariétal

Le contrôle par chauffage pariétal du point de séparation de la couche limite a fait avancer ce point vers le bord d'attaque, ce qui a entraîné une perte de laminarité de cette couche limite.

Donc l'effet du chauffage pariétal appliqué est nettement négatif sur le recul du point de séparation de la couche limite [12].

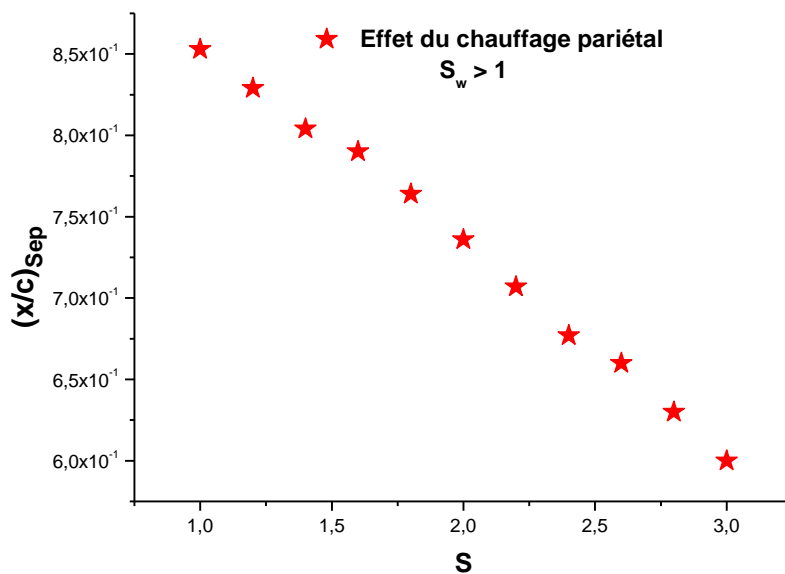


Figure 5.13 : Contrôle du point de séparation par chauffage pariétal.
NACA 0012, $M_\infty = 0,5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

5.3.2. Contrôle du point de séparation par refroidissement pariétal

Le contrôle du point de séparation de la couche limite laminaire a fait gagner plus de laminarité par refroidissement pariétal tout en reculant son point de séparation vers le bord de fuite.

Plus le refroidissement pariétal est important et plus le gain en laminarité est aussi important. Donc, l'effet du refroidissement pariétal sur le point de séparation est nettement positif.

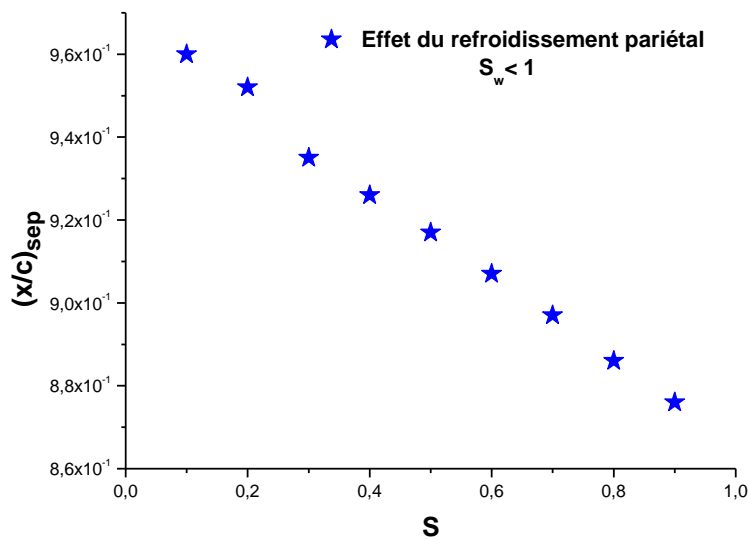


Figure 5.14 : Contrôle du point de séparation par refroidissement pariétal.
NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

6. Comparaison des effets thermiques

6.1. Profils de l'enthalpie totale

Une comparaison des effets des contrôles thermiques sur la distribution de l'enthalpie totale est faite. L'enthalpie totale à travers la couche limite, décroît rapidement sur une étendue plus importante pour le cas du chauffage pariétal, mais pour le cas du refroidissement pariétal, l'enthalpie totale décroît lentement puis les effets thermiques disparaissent. Donc, les effets thermiques influent sur la grandeur de l'enthalpie totale près de la paroi.

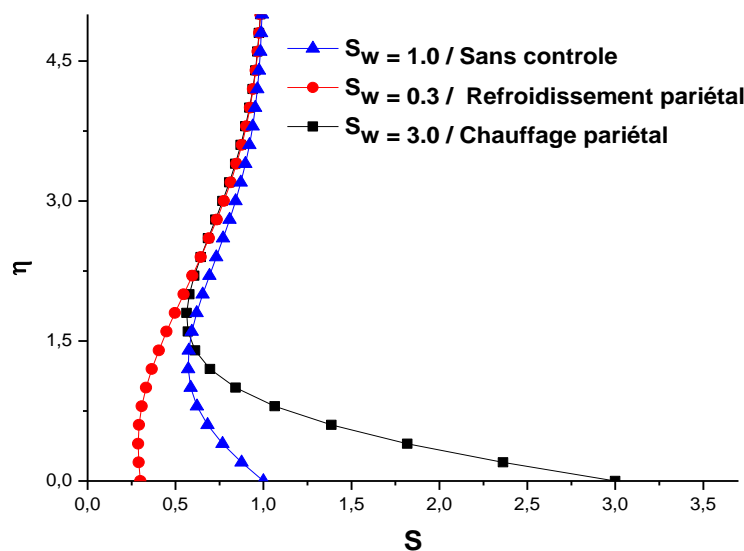


Figure 5.15 : Effets thermiques sur le profil de l'enthalpie totale.
NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

6.2. Profils de la vitesse

Pour une station arbitrairement choisie, la vitesse à travers la couche limite, suite à l'application du contrôle par chauffage pariétal, est relativement faible par rapport au cas de l'écoulement dit sans-contrôle, mais au contraire, la vitesse est relativement élevée suite à l'application de contrôle par refroidissement pariétal.

Donc, les effets thermiques influent sur la grandeur de la vitesse à travers la couche limite.

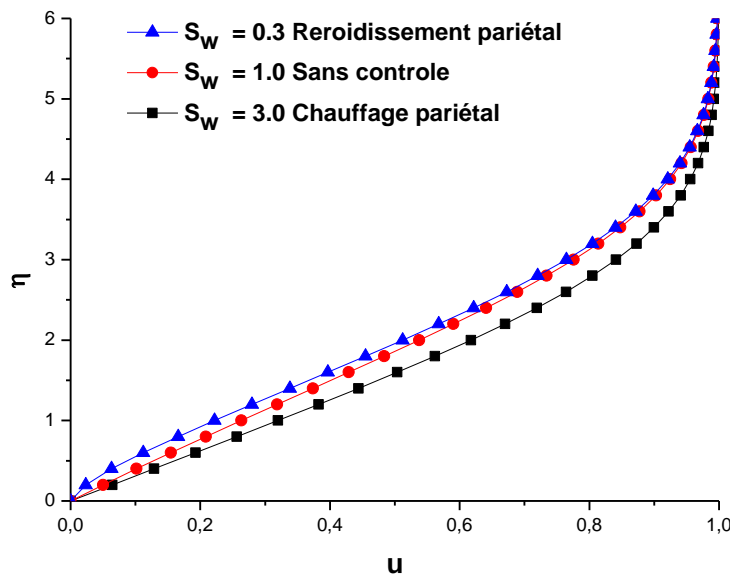


Figure 5.16 : Effets thermiques sur le profil de la vitesse. NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

6.3. Coefficients du frottement local

Une comparaison des effets du contrôle thermique sur la distribution du coefficient de frottement local est faite.

Les distributions du coefficient de frottement local peuvent être divisées en deux zones, pour la première zone, la différence entre distributions du coefficient de frottement local est presque nulle, mais pour la deuxième zone les frottements deviennent importants suite à l'application du contrôle par chauffage sur une étendue de laminarité aussi importante.

Les frottements deviennent également plus importants suite à l'application du contrôle par refroidissement pariétal sur une étendue de laminarité plus importante.

Donc, les effets du contrôle thermique influent sur le coefficient de frottement local dans le même sens mais avec plus d'effet pour le cas du refroidissement pariétal.

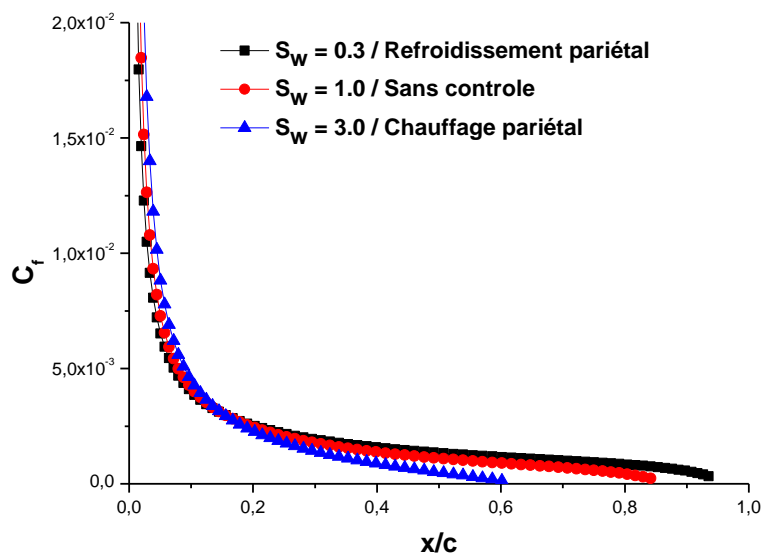


Figure 5.17 : Effets thermiques sur le coefficient du frottement local.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

6.4. Epaisseurs de la couche limite

Une comparaison des effets du contrôle par chauffage pariétal et par refroidissement pariétal sur la distribution de l'épaisseur de la couche limite est faite. Le contrôle de la couche limite laminaire par refroidissement pariétal a fait amincir l'épaisseur de la couche limite alors que le contrôle de la couche limite laminaire par chauffage pariétal a fait épaisser cette couche limite.

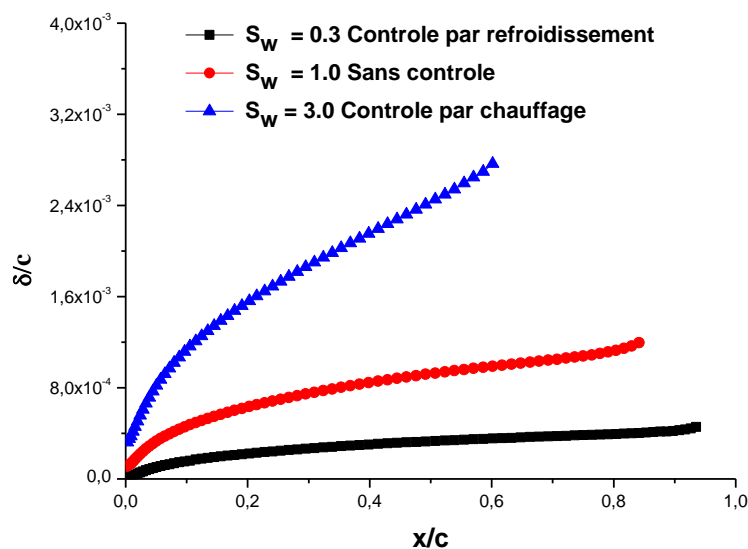


Figure 5.18 : Effets thermiques sur l'épaisseur de la couche limite,
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

6.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Le contrôle de la séparation de la couche limite par refroidissement pariétal a fait perdre de la quantité du mouvement alors que le contrôle par chauffage pariétal a fait diminuer le déficit en quantité de mouvement, c'est pourquoi les épaisseurs de quantité ont pris de telles distributions.

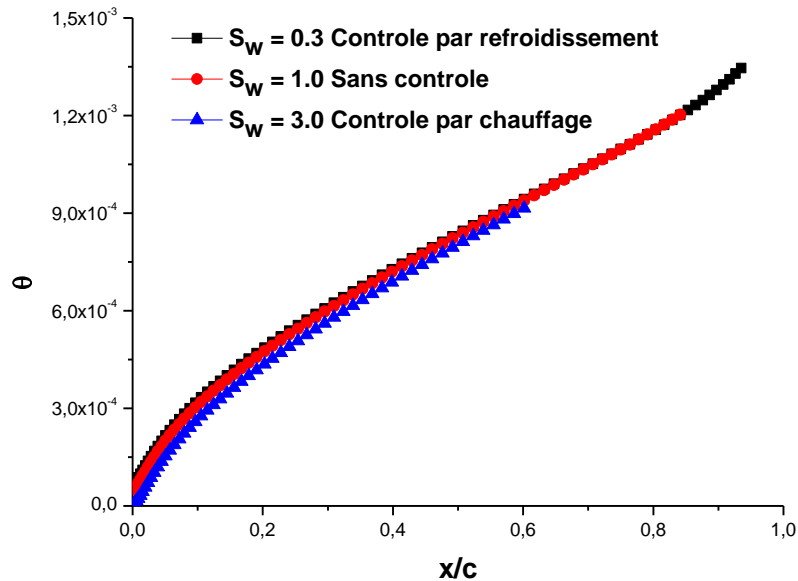


Figure 5.19 : Effets thermiques sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
 NACA 0012, $M_\infty = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $R_\infty = 3.10^5$.

On conclut que le contrôle par refroidissement pariétal de la séparation de la couche limite a fait étendre la zone laminaire de 10%. Le contrôle par chauffage pariétal a fait avancer le point de séparation de la couche limite vers le bord d'attaque en perdant de la zone laminaire.

Donc, selon les résultats obtenus, on doit sélectionner seulement le premier type de contrôle.

Contrôle dynamique

1. Effets des contrôles par aspiration et par soufflage

Dans cette partie d'étude, qui vise à quantifier les effets de nouveaux paramètres de contrôle dynamique tels que l'étendue, l'angle et le débit du soufflage ou de l'aspiration et de les optimiser pour un meilleur contrôle du point de séparation de la couche limite.

Pour éviter l'encombrement au niveau des titres de figures par la suite de cette étude, on préfère omettre la réécriture des termes "angle d'attaque", "nombre de Mach" et "nombre de Reynolds".

1.1. Effets du contrôle par aspiration

Le contrôle par aspiration consiste à aspirer de l'écoulement les particules fluides ralenties, qui sont en contact direct avec la paroi, et qui ne cessent de s'accumuler sur cette dernière. Eviter l'accumulation des particules fluides sur la paroi, c'est permettre à l'écoulement de s'accélérer et par conséquent éviter ou retarder la séparation de la couche limite [44-46].

Le contrôle par aspiration se met en évidence via l'étendue, angle et débit d'aspiration, qui sont représentés ci-dessous (figure 6.1).

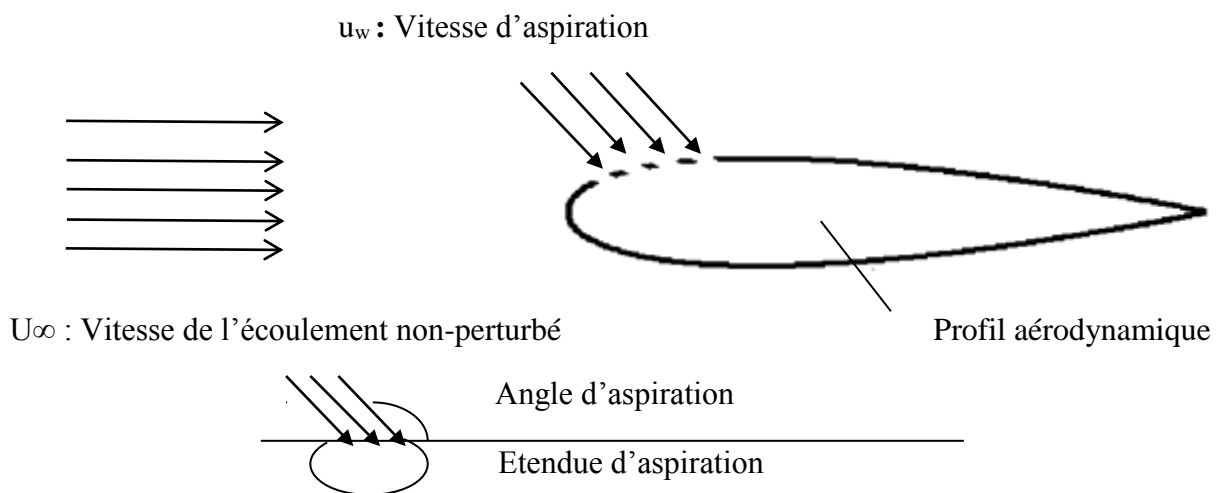


Figure 6.1 : Schématisation du contrôle par aspiration.

1.1.1. Etendue de l'aspiration

Pour des conditions du débit et de l'angle d'aspiration, arbitrairement choisies, l'effet de l'étendue d'aspiration est positif dès qu'on dépasse la valeur de 10%.

Plus les valeurs de l'étendue d'aspiration sont élevées et plus le recul du point de séparation de la couche limite vers le bord de fuite est important.

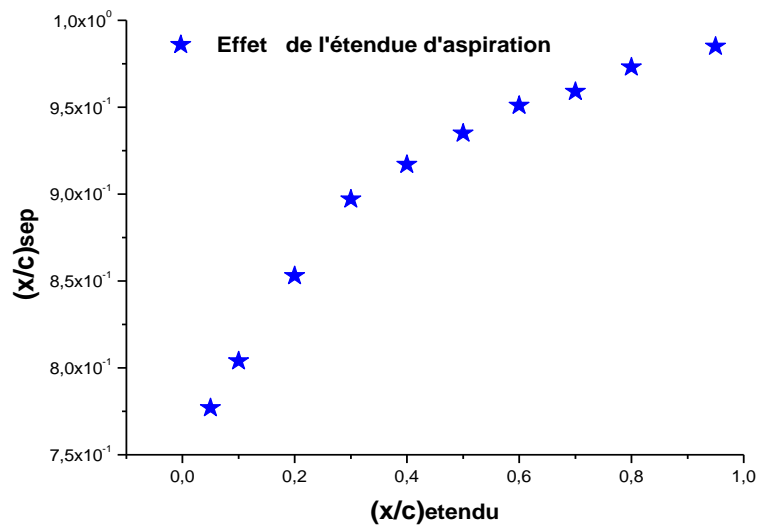


Figure 6.2 : Effet de l'étendue d'aspiration sur le point de séparation. $(v_w/U_\infty)_{\text{asp}}=10\%$, $\Theta_{\text{asp}}=70^\circ$.

1.1.2. Angle de l'aspiration

Pour des conditions du débit et de l'étendue d'aspiration, arbitrairement choisies, l'effet de l'angle d'aspiration est positif dès qu'on dépasse la valeur de 75° . Plus les valeurs de l'angle d'aspiration sont élevées et plus le recul du point de séparation de la couche limite vers le bord de fuite est important, mais au-delà de l'angle de 150° , l'effet de l'angle d'aspiration sur le point de séparation reste presque insensible à toute augmentation. Donc, il est inutile d'augmenter davantage la valeur de l'angle d'aspiration. L'angle d'aspiration de 150° est orienté vers le sens inverse de l'écoulement, c'est pourquoi on se contente d'un angle complémentaire de 30° dans le sens de l'écoulement considéré.

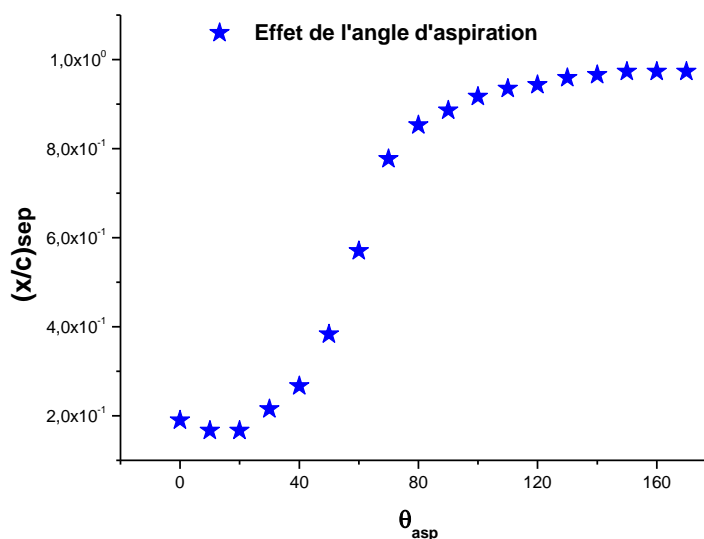


Figure 6.3 : Effet de l'angle d'aspiration sur le point de séparation. $x_{\text{etendu}} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 10\%$.

1.1.3. Débit de l'aspiration

Pour des conditions de l'étendue et de l'angle d'aspiration, arbitrairement choisies, mentionnées ci-dessous, l'effet du débit d'aspiration sur le point de séparation de la couche limite est examiné et représenté. Le débit est inversement proportionnel au recul du point de séparation de la couche limite, donc il est inutile d'augmenter le débit et se contenter des petits débits. Un débit de 10%, ou moins ont l'effet si positif sur le recul du point de séparation de la couche limite (figure 6.3).

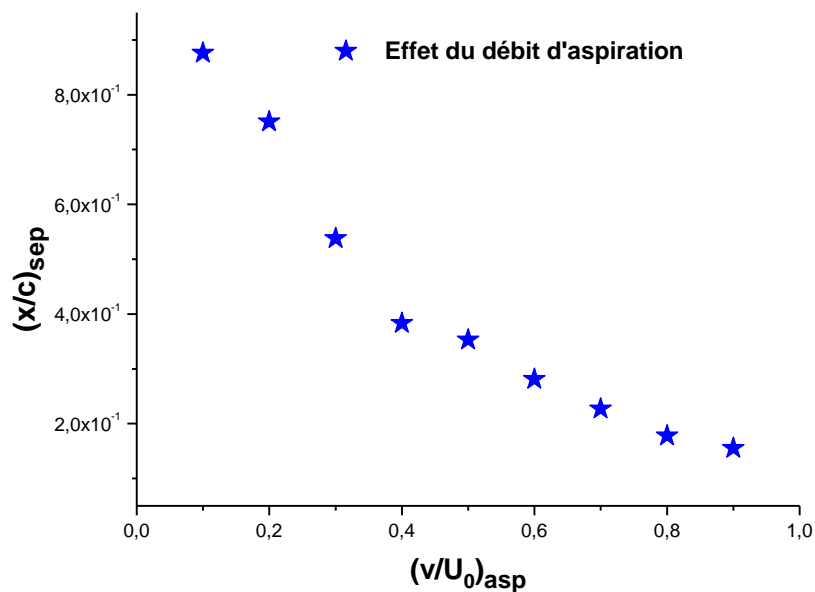


Figure 6.4 : Effet du débit d'aspiration sur le point de séparation.
 $x_{etendu} = 10\%$, $\theta_{asp} = 75^\circ$.

On conclut que l'étendue de 5%, l'angle de 150° et le débit d'aspiration de 10% sont les valeurs optimales pour que le contrôle par refroidissement pariétal soit bénéfique, donc il est toujours utile de prendre en compte ces valeurs sélectionnées pour la suite d'étude.

1.2. Effets du contrôle par soufflage

Le contrôle par soufflage consiste à faire doter les particules fluides qui sont en contact direct avec la paroi d'une certaine énergie cinétique [61-62].

Cette énergie cinétique peut contribuer à retarder ou éviter la séparation de la couche limite.

Le contrôle par soufflage se met en évidence via l'étendue, angle et débit du soufflage.

Ces grandeurs sont représentés ci-dessous (figure 6.5)

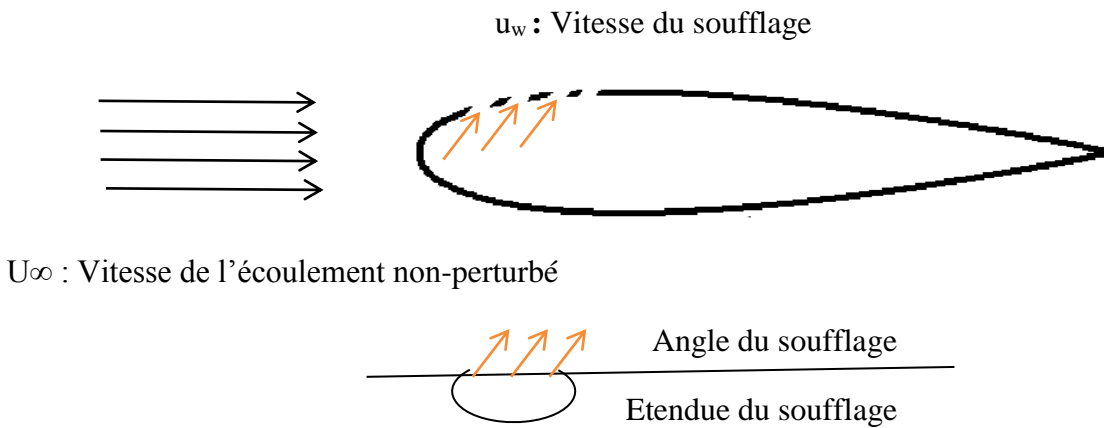


Figure 6.5 : Schématisation du contrôle par soufflage.

1.2.1. Etendue du soufflage

Pour des conditions du débit et de l'angle de soufflage, arbitrairement choisies, l'effet de l'étendue du soufflage sur le point de séparation de la couche limite est examiné et représenté (figure 6.6). Pour les valeurs de l'étendue de 30% à 100%, l'effet de l'étendue de soufflage est négatif, mais pour les valeurs de 0% à 30%, l'effet est nettement positif et plus précisément pour les valeurs inférieures ou égales à 5%.

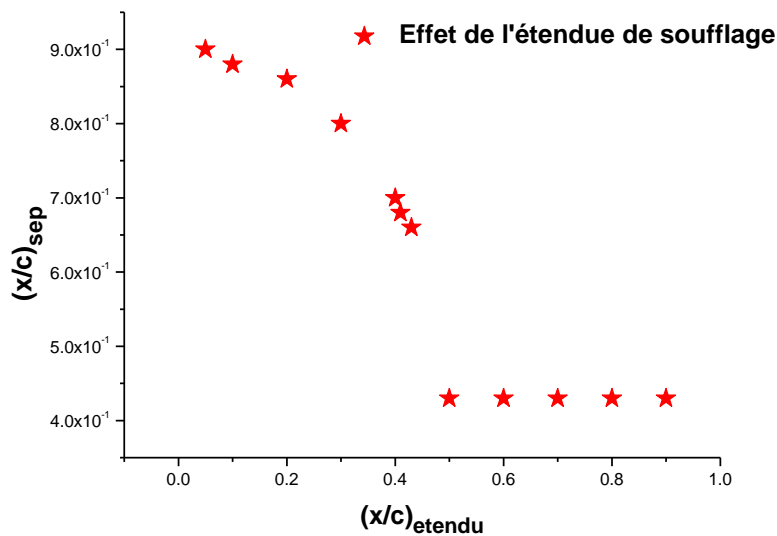


Figure 6.6 : Effet de l'étendue du soufflage sur le point de séparation. $(v_w/U_\infty) = 10\%$, $\theta_{\text{souff}} = 30^\circ$.

1.2.2. Angle du soufflage

Pour des conditions du débit et de l'étendue de soufflage, arbitrairement choisies, l'effet de l'angle de soufflage est négatif dès qu'on dépasse la valeur 65° , mais pour des valeurs inférieures, l'effet de l'angle de soufflage est nettement positif et plus précisément pour les angles qui sont inférieurs ou égaux à 10° .

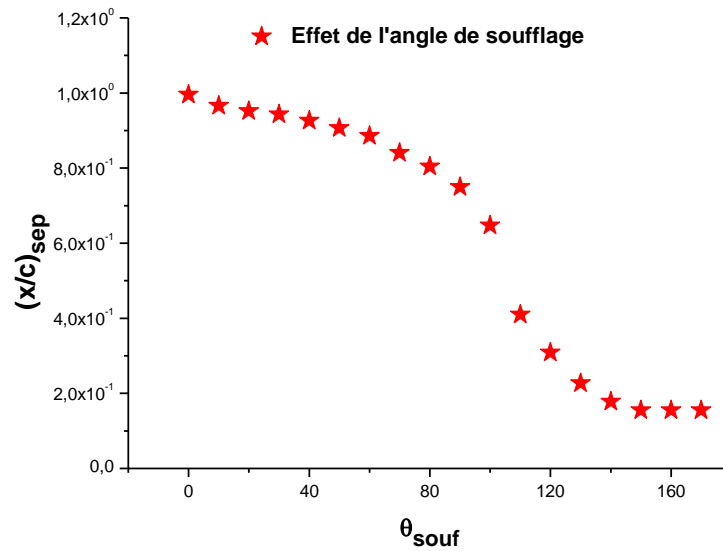


Figure 6.7 : Effet de l'angle du soufflage sur le point de séparation. $x_{\text{étendu}} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 10\%$.

1.2.3. Débit du soufflage

Pour une étendue et un angle de soufflage optimaux et dans un but de déterminer le débit optimal du contrôle par soufflage, on a procédé à l'examen d'une plage de débits appliqués. Pour des faibles débits d'ordre du centième et du millième, l'effet du débit de soufflage est insignifiant. Pour des débits d'ordre du dixième, et plus précisément allant de 10% jusqu'à 40%, l'effet sur le recul du point de séparation de la couche limite est significatif, mais au-delà de 40%, le point de séparation reste presque indifférent à toute augmentation du débit. Donc, toute augmentation du débit de soufflage s'avère non nécessaire et delà une économie d'énergie appliquée.

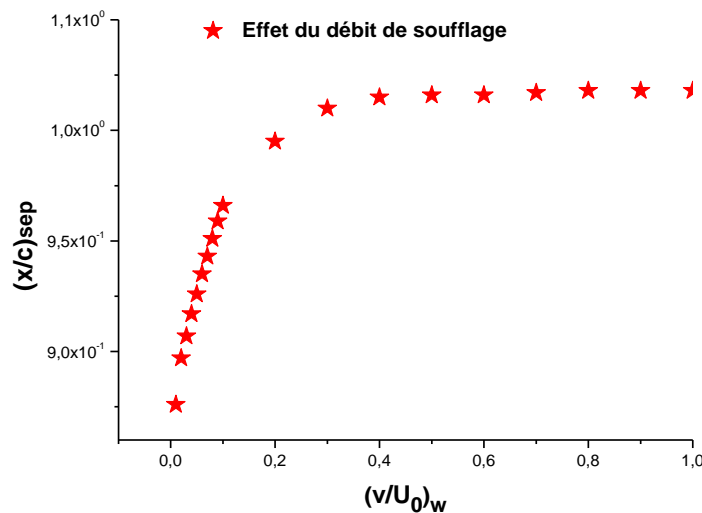


Figure 6.8 : Effet du débit du soufflage sur le point de séparation. $x_{\text{étendu}} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 10\%$.

On conclut qu'une étendue de 5%, un angle de 10° et un débit de soufflage de 10% représentent les valeurs optimales pour un contrôle bénéfique et positif. Pour éviter l'encombrement au niveau des titres de figures par la suite de cette étude, on préfère omettre la réécriture des termes "étendue" et "débit". Par ailleurs, pour comparer les effets des deux contrôles par aspiration et par soufflage, une étude a été menée.

1.3. Comparaison des effets du contrôle par aspiration et par soufflage

1.3.1. Profils de l'enthalpie totale

Suite à l'application des contrôles par aspiration et par soufflage, les distributions de l'enthalpie totale obtenues à travers la couche limite démontrent une différence entre les deux procédés. En effet, l'enthalpie totale est moins importante pour le cas du contrôle par aspiration que pour le cas du contrôle par soufflage. Cependant, l'enthalpie totale est importante dans le cas des deux contrôles, comparée au cas sans-contrôle. Donc, en absence de tout échange thermique entre l'écoulement et la paroi, la diminution de l'enthalpie totale est convertie uniquement en énergie cinétique.

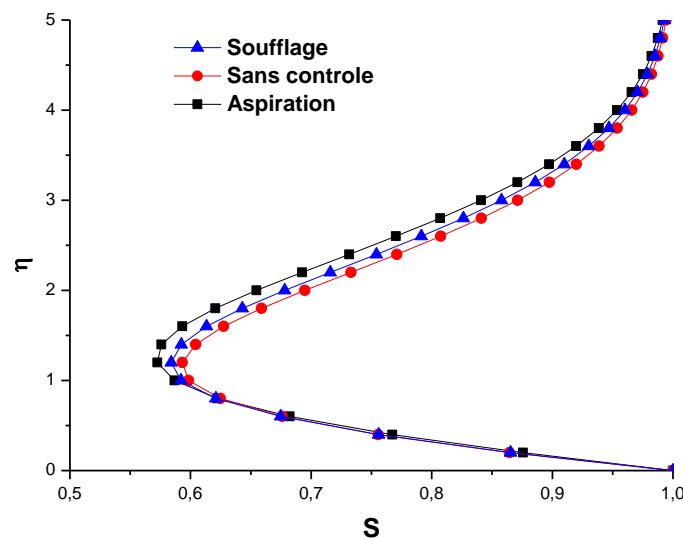


Figure 6.9 : Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur les distributions de l'enthalpie totale.

$$x_{etendu} = 5\%, (v_w/U_\infty) = 5\%, \theta_{asp} = 150^\circ, \theta_{souf} = 10^\circ.$$

1.3.2. Profils de la vitesse

Suite à l'application du contrôle par soufflage, la vitesse à travers la couche limite est inférieure à celle de l'écoulement dit sans-contrôle. Suite à l'application du contrôle par soufflage, la vitesse à travers la couche limite devient inférieure et encore plus inférieure par l'application du contrôle par aspiration. Donc, il en découle, que l'épaississement de la

couche limite est réduit suite au contrôle par soufflage et encore plus réduit avec le contrôle par aspiration.

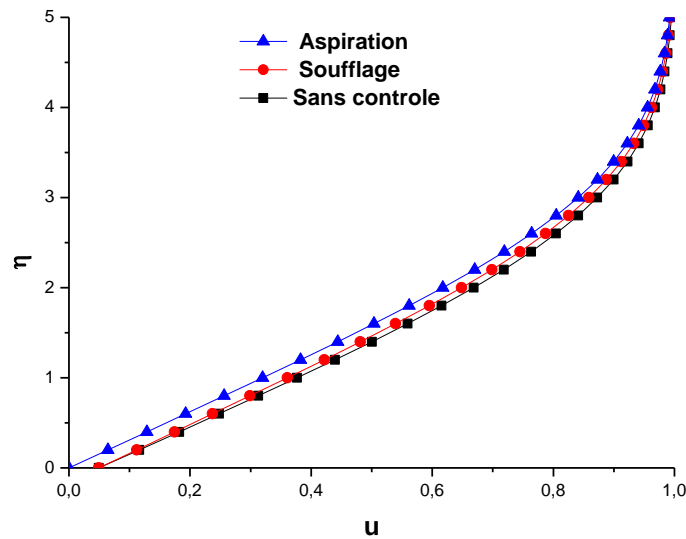


Figure 6.10 : Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur les distributions de la vitesse.

$$x_{etendu} = 5\%, (v_w/U_\infty) = 5\%, \theta_{asp} = 150^\circ, \theta_{souf} = 10^\circ.$$

1.3.3. Coefficient du frottement local

Les frottements sont relativement plus importants suite à l'application du contrôle par aspiration où la vitesse à travers la couche limite est inférieure que celle du cas du contrôle par soufflage. Donc, les frottements sont moins importants qu'avec le contrôle par soufflage et encore moins importants qu'avec le cas dit sans-contrôle.

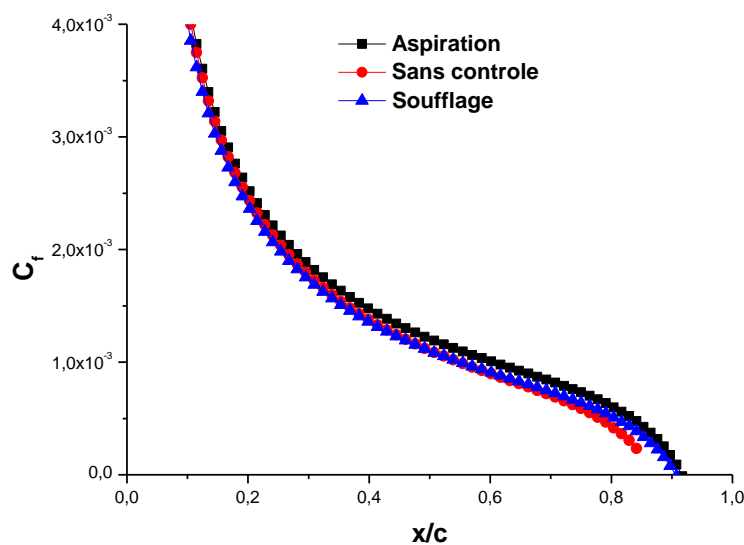


Figure 6.11 : Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur le coefficient du frottement local.

$$x_{etendu} = 5\%, (v_w/U_\infty) = 5\%, \theta_{asp} = 150^\circ, \theta_{souf} = 10^\circ.$$

1.3.4. Epaisseurs de la couche limite

Suite à l'application du contrôle par soufflage, l'épaisseur de la couche limite est devenue mince que celle du cas dit sans-contrôle, et ceci parce que les particules fluides se retrouvent plus animées par le contrôle par soufflage.

L'épaisseur de la couche limite devient encore plus mince avec le contrôle par aspiration qu'avec le contrôle par soufflage.

Donc, les deux procédures de contrôle ont l'effet positif sur la minceur de la couche limite.

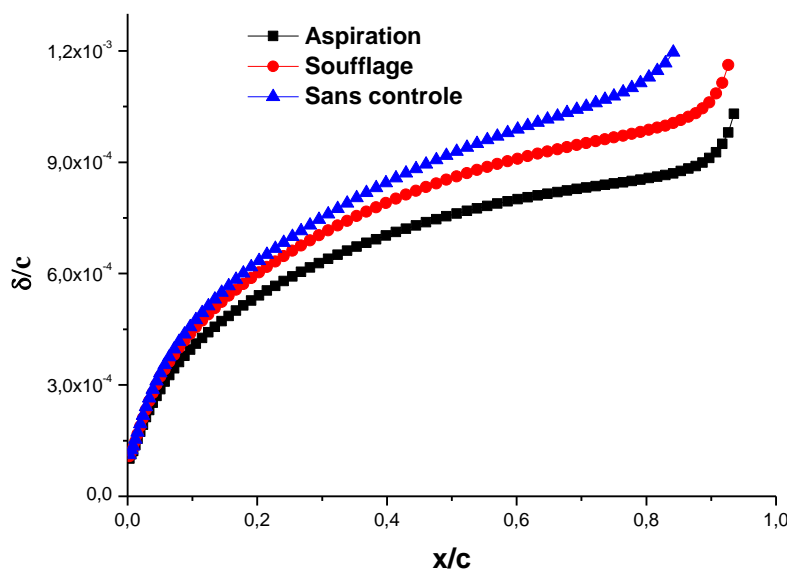


Figure 6.12 : Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur l'épaisseur de la couche limite.
 $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{souf} = 10^\circ$.

1.3.5. Epaisseurs de la quantité de mouvement

Le déficit en quantité de mouvement engendré par l'application du contrôle par aspiration est relativement moins important que celui engendré par l'écoulement dit sans-contrôle.

Le déficit en quantité de mouvement engendré par l'application du contrôle par soufflage est relativement plus important que celui engendré par l'écoulement dit sans-contrôle.

Ces deux déficits en quantité de mouvement dû à l'application des procédures de contrôle auraient été plus importants si l'écoulement avait changé de régime du laminaire au turbulent. Donc, l'effet du contrôle dynamique est aussi positif pour le cas du soufflage que pour le cas de l'aspiration.

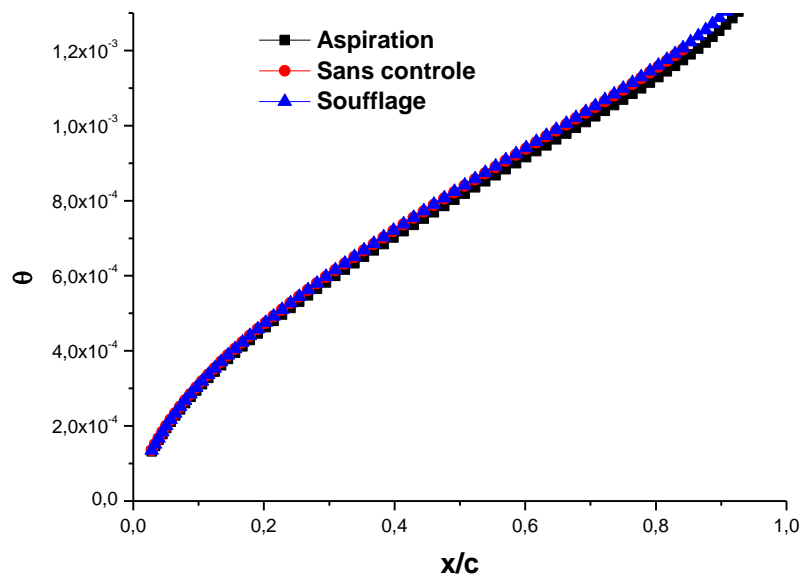


Figure 6.13: Effets des contrôles par aspiration et par soufflage sur l'épaisseur de quantité du mouvement.
 $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$, $\theta_{souf} = 10^\circ$.

Les résultats obtenus démontrent que le gain en zone laminaire par le contrôle par aspiration est presque de 10%, et seulement de 8% par soufflage.

Les effets des deux procédures du contrôle dynamique sont positifs, avec une légère avancée de l'aspiration par rapport au soufflage [47-53].

Combinaison de procédures du contrôle thermique et dynamique

Pour mieux profiter des avantages des procédures du contrôle thermique et dynamique, il pourrait être plus utile de les combiner et d'examiner les effets de leur combinaison. En effet, le contrôle par refroidissement pariétal combiné au contrôle par aspiration ou par soufflage fait l'objet de ce présent chapitre [54-57].

1. Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal

1.1. Profils de l'enthalpie totale

Suite à la combinaison des contrôles par refroidissement pariétal et par aspiration, les distributions de l'enthalpie totale sont bien différentes près de la paroi où les effets thermiques sont dominants. En effet, l'enthalpie totale est petite pour le cas du refroidissement pariétal combiné au contrôle par aspiration par rapport au cas du contrôle par aspiration ou cas du cas dit-sans contrôle, qui sont bien confondus.

Plus loin de la paroi, les distributions de l'enthalpie du cas de contrôle combiné rejoint le cas dit-sans contrôle, alors que l'enthalpie du cas du contrôle par aspiration devient petite par rapport autres cas. L'écart entre ces distributions décroît, à travers cette couche limite, jusqu'à l'apparition de l'écoulement extérieur. Donc, le contrôle combiné réduit les effets thermiques près de la paroi et les augmente plus loin, alors que l'aspiration les réduit plus loin de la paroi avec un écart plus significatif jusqu'à l'écoulement extérieur.

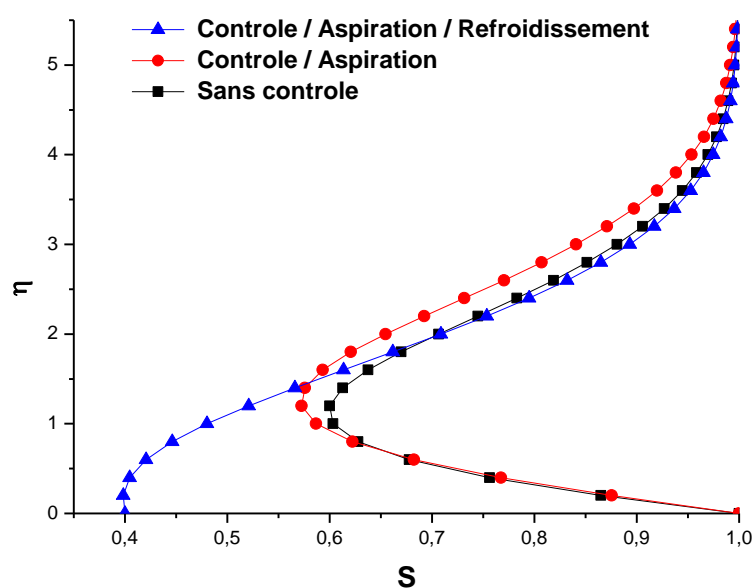


Figure 7.1 : Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur les distributions de l'enthalpie totale. $S_w = 40\%$, $x_{tendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

1.2. Profils de la vitesse

Les distributions de la vitesse à travers la couche limite sont presque confondues pour les deux cas, contrôle par aspiration et sans-contrôle, avec un petit ralentissement dû au contrôle par aspiration.

Le contrôle combiné a fait ralentir l'écoulement, à travers la couche limite, d'une manière remarquable tel qu'il montré sur la figure ci-dessous.

Ce ralentissement décroît jusqu'à l'apparition de l'écoulement extérieur.

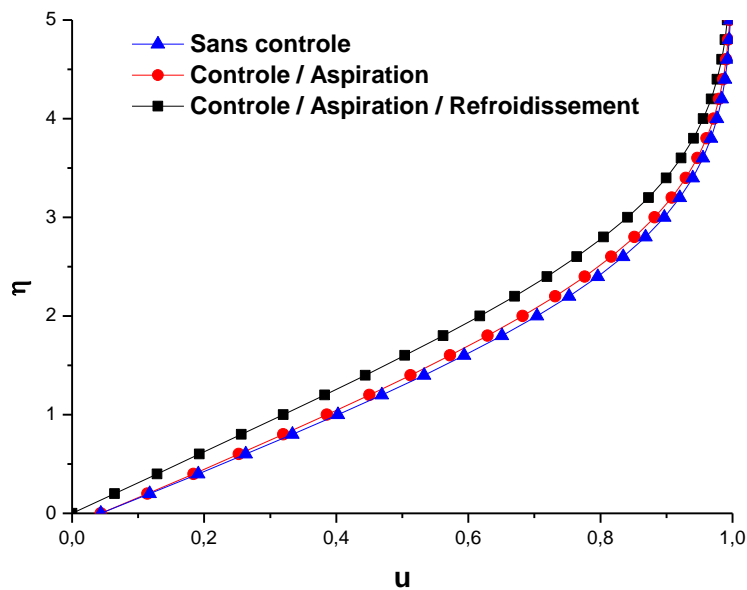


Figure 7.2 : Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. $S_w = 40\%$, $x_{endu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

1.3. Coefficients du frottement local

Le contrôle par aspiration a causé une légère réduction des frottements suite au retrait d'une certaine quantité des particules fluides par rapport au cas dit-sans contrôle.

Les frottements sont importants suite l'application du contrôle dit-combiné, en effet, la vitesse des particules fluides a augmentée dans le sens de l'écoulement.

Arrêter un tel écoulement nécessite plus de frottements que pour les autres cas coexistant.

Le contrôle par aspiration a étendu la zone laminaire et le contrôle combiné l'a étendu plus.

Le gain en laminarité par les procédures du contrôle est nettement clair.

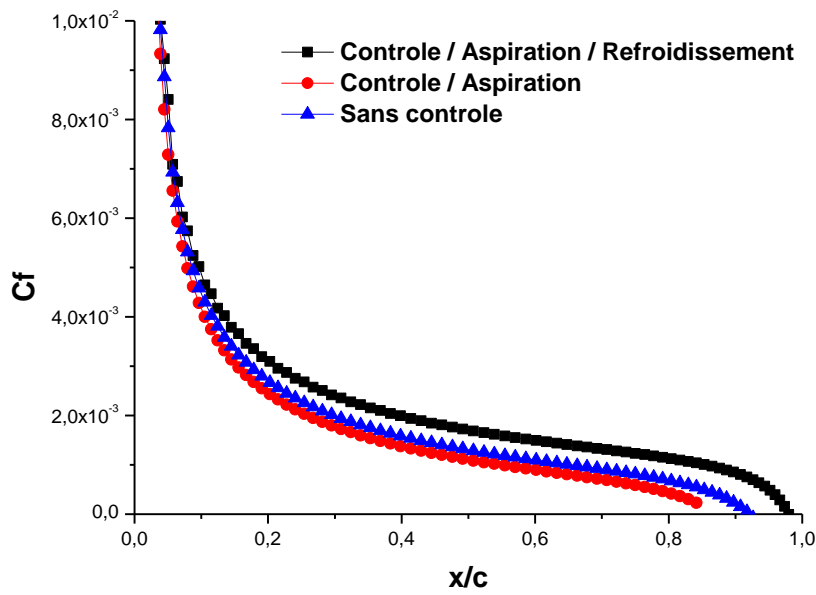


Figure 7.3 : Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient du frottement local. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

1.4. Epaisseurs de la couche limite

Le contrôle par aspiration a fait amincir l'épaisseur de la couche limite puisque la vitesse à travers la couche limite est devenue petite par rapport au cas dit-sans contrôle. Cette épaisseur est encore devenue plus amincie suite à l'application du contrôle par refroidissement pariétal combiné au contrôle par aspiration et ceci pour la même raison citée plus haut.

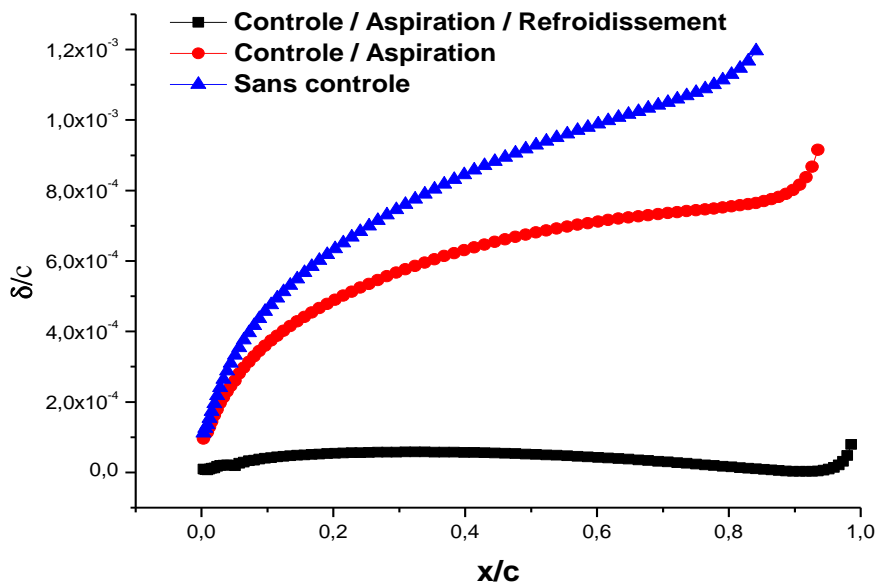


Figure 7.4 : Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

1.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Le contrôle par aspiration a causé moins de déficit en énergie que du cas dit-sans contrôle.

Le contrôle par refroidissement pariétal combiné au contrôle par aspiration a causé moins de déficit en énergie que du cas du contrôle par aspiration.

Les particules fluides retirées par aspiration ont fait réduire le déficit en énergie, et ces mêmes particules fluides lorsqu'elles sont refroidies, le déficit en énergie est plus important.

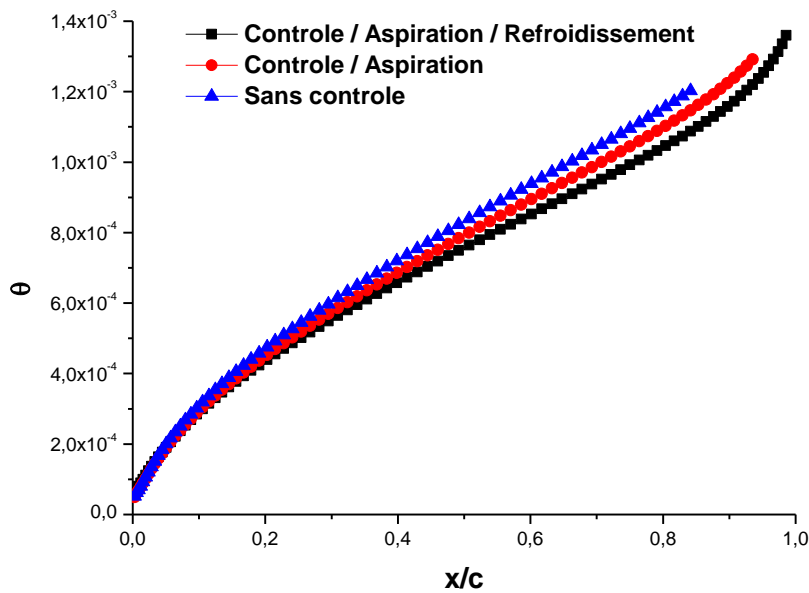


Figure 7.5 : Effets du contrôle par aspiration combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la quantité du mouvement. $S_w = 40\%$, $x_{\text{étendu}} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{\text{asp}} = 150^\circ$.

2. Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal

2.1. Profils de l'enthalpie totale

Suite à la combinaison des contrôles par refroidissement pariétal et par soufflage, les distributions de l'enthalpie totale sont bien différentes près de la paroi. En effet, l'enthalpie totale est petite pour le cas du refroidissement pariétal combiné au contrôle par soufflage par rapport aux cas du contrôle par soufflage ou au cas du cas dit-sans contrôle. Plus loin de la paroi, les distributions de l'enthalpie du cas de contrôle combiné rejoint le cas dit-sans contrôle, alors que l'enthalpie du cas du contrôle par soufflage devient relativement plus importante par rapport autres cas. Un écart entre ces distributions de l'enthalpie entre les écoulements sans-contrôle et contrôle par soufflage est toujours présent jusqu'à l'apparition de l'écoulement extérieur. Donc, le contrôle combiné réduit les effets thermiques alors que le contrôle par soufflage les augmente.

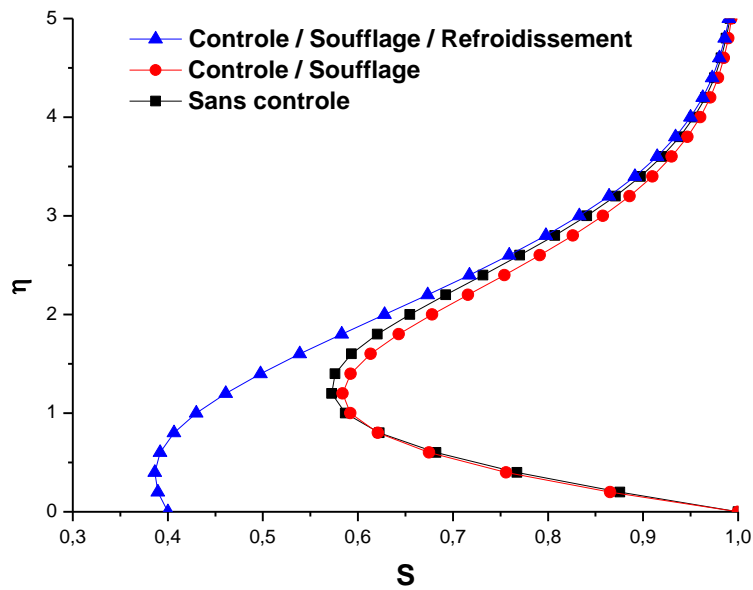


Figure 7.6 : Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

2.2. Profils de la vitesse

Les distributions de la vitesse à travers la couche limite sont bien différentes pour les deux cas, contrôle par soufflage et sans-contrôle, avec une petite accélération dû au contrôle par soufflage. Le contrôle combiné a fait ralentir l'écoulement, à travers la couche limite, près de la paroi, mais plus loin de la paroi, l'écoulement s'accélère.

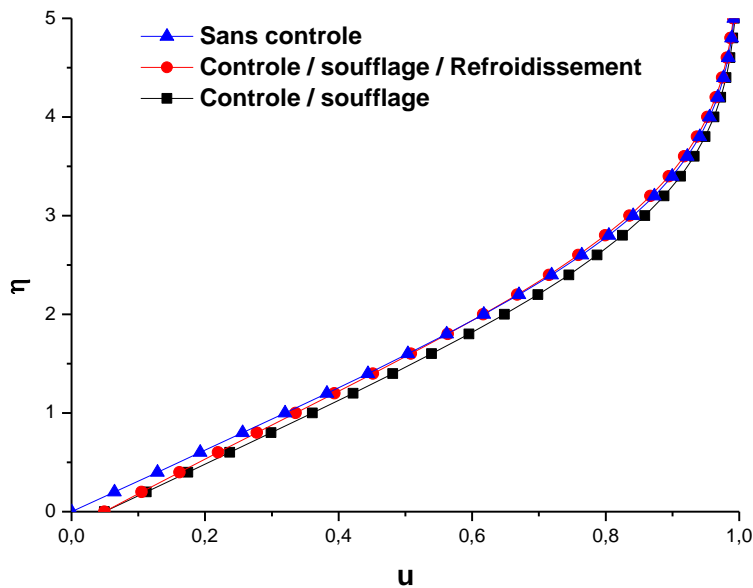


Figure 7.7 : Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

2.3. Coefficients du frottement local

Le contrôle par soufflage a causé une légère augmentation des frottements suite au soufflage d'une certaine quantité des particules fluides.

Les frottements sont plus importants suite l'application du contrôle dit-combiné, et ceci suite à l'augmentation, dans le sens de l'écoulement, de la vitesse des particules fluides.

Arrêter un tel écoulement nécessite plus de frottements que pour le cas du contrôle par soufflage et encore plus que pour le cas dit-sans contrôle.

Les deux procédures de contrôle ont étendu la zone laminaire avec une légère amélioration en faveur du contrôle dit-combiné.

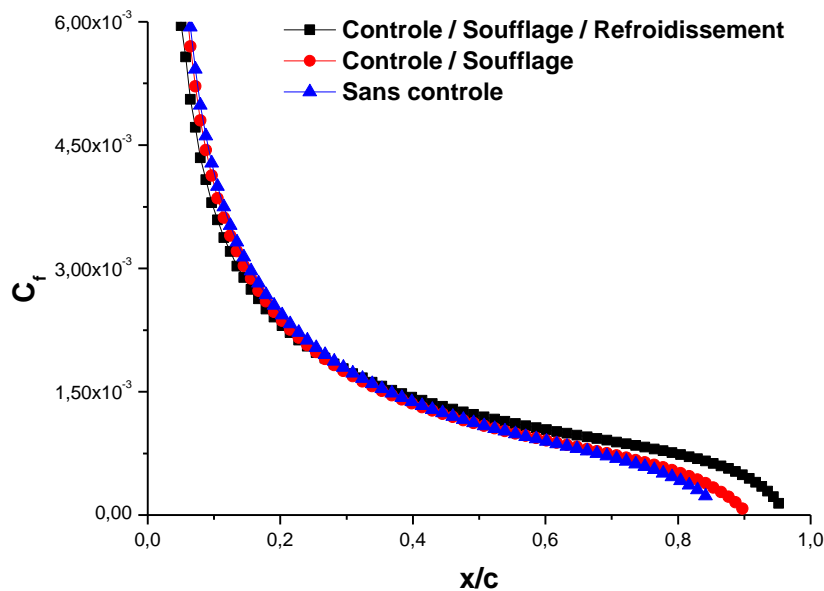


Figure 7.8 : Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient du frottement local. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

2.4. Epaisseurs de la couche limite

Le contrôle par soufflage a fait amincir l'épaisseur de la couche limite puisque la vitesse à travers la couche limite est devenue petite par rapport au cas dit-sans contrôle.

Cette épaisseur est devenue encore plus amincie suite à l'application du contrôle combiné.

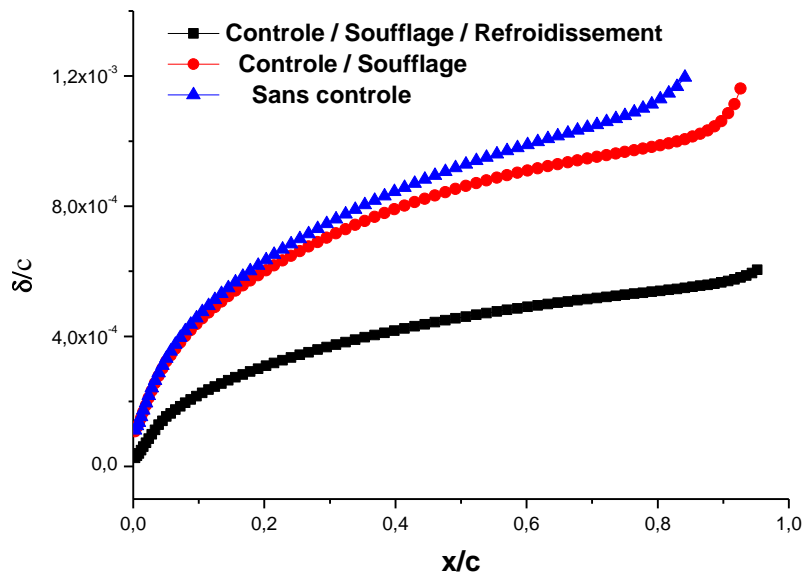


Figure 7.9 : Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$.

2.5. Epaisseurs de quantité du mouvement

Le déficit en quantité en mouvement par le contrôle par soufflage est relativement plus important que le déficit engendré par l'écoulement dit sans-contrôle et encore plus important qu'avec le contrôle par refroidissement pariétal combiné au contrôle par soufflage. L'ajout d'une quantité d'énergie par soufflage via l'ajout d'une quantité de fluide qui contribue par un déficit supplémentaire et qui est plus important si cette quantité de fluide est refroidie.

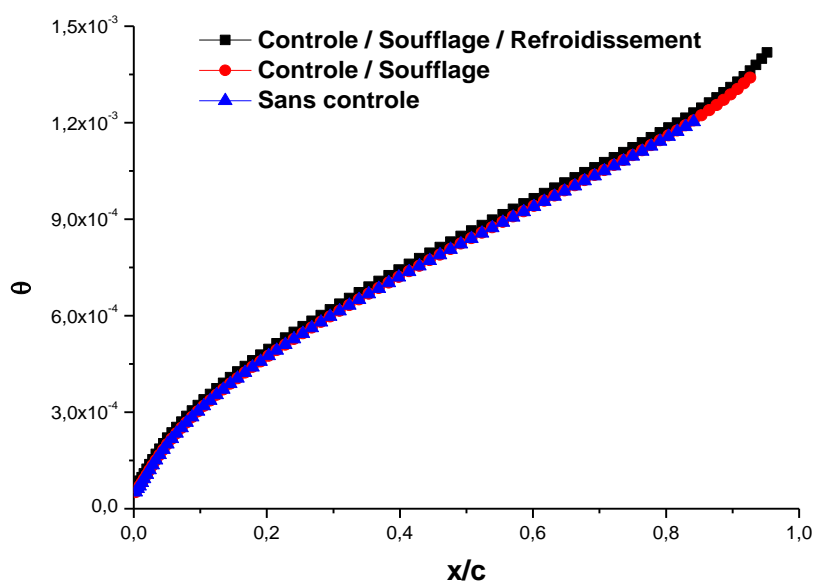


Figure 7.10 : Effets du contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la quantité du mouvement. $S_w = 40\%$, $x_{etendu} = 5\%$, $(v_w/U_\infty) = 5\%$, $\theta_{asp} = 150^\circ$, $\theta_{souf} = 10^\circ$.

3. Effets des contrôles combinés

Dans un but d'éviter la répétition au niveau de titres des figures, on se propose de fixer les conditions du contrôle d'un débit de 5%, un rapport de refroidissement de 40%, une étendue de contrôle de 5%, un angle d'aspiration de 150° et enfin un angle de soufflage de 10° pour une station de calcul arbitrairement choisie de 29% de la corde du profil considéré.

3.1. Profils de l'enthalpie totale

Suite à la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par aspiration d'une part et la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par soufflage d'autre part et leurs effets sur la distribution de l'enthalpie totale, à travers la couche limite, une comparaison entre les deux types du contrôle combiné est faite.

L'écoulement soumis au premier type de contrôle combiné perd plus d'énergie au profit de la paroi que par le second type.

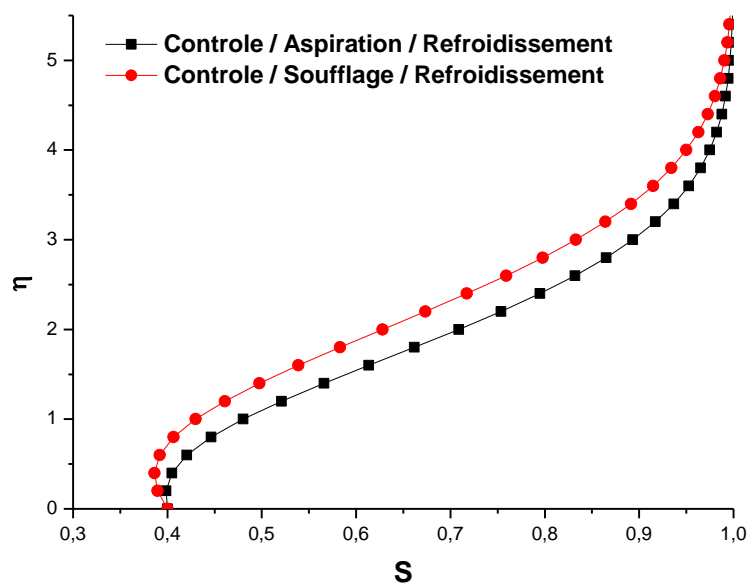


Figure 7.11 : Effets du contrôle par aspiration ou par soufflage combinés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'enthalpie totale

3.2. Profils de la vitesse

Suite à la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par aspiration d'une part et la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par soufflage d'autre part et leurs effets sur la distribution de la vitesse de l'écoulement pour une station de calcul, arbitrairement choisie, une comparaison est faite.

La vitesse est plus importante pour le premier type du contrôle que par le second type.

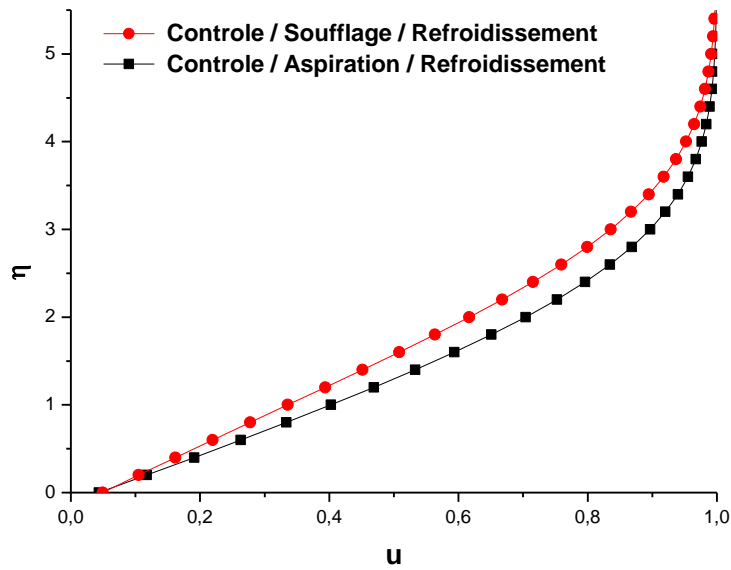


Figure 7.12 : Effets du contrôle par aspiration ou par soufflage combinés au contrôle par refroidissement pariétal sur le profil de la vitesse.

3.3. Coefficients du frottement local

Suite à la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par aspiration d’une part et la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par soufflage d’autre part et leurs effets sur la distribution de la vitesse de l’écoulement pour une station de calcul, arbitrairement choisie, une comparaison est faite. Les frottements sont plus importants pour le premier type que pour le second type.

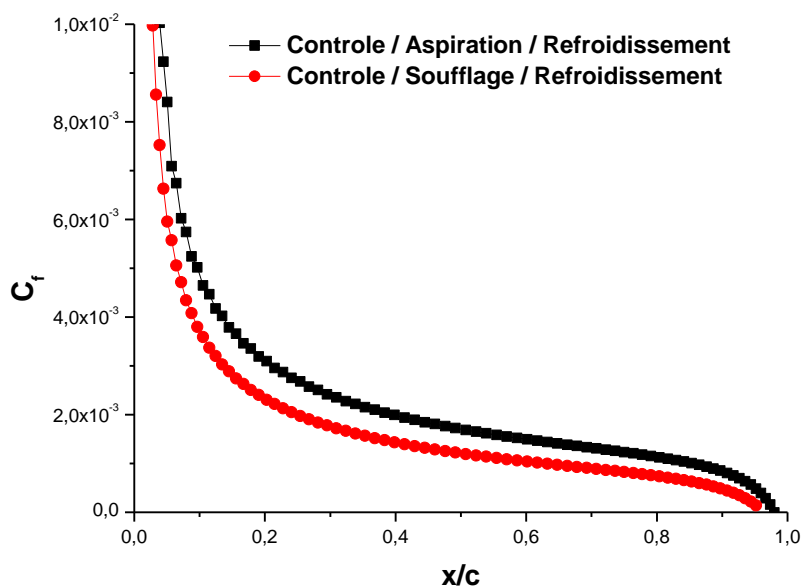


Figure 7.13 : Effets du contrôle par aspiration ou par soufflage combinés au contrôle par refroidissement pariétal sur le coefficient de frottement local.

3.4. Epaisseurs de la couche limite

Suite à la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par aspiration d'une part et la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par soufflage d'autre part et leurs effets sur la distribution de la vitesse de l'écoulement pour une station de calcul, arbitrairement choisie, une comparaison à cet effet est menée.

L'épaisseur de la couche limite pour le premier type de contrôle est plus amincie que par le second type.

L'épaisseur de la couche limite pour le premier type de contrôle, n'a cessé d'augmenter sur une première partie du profil, puis elle a amincie jusqu'au son point de séparation.

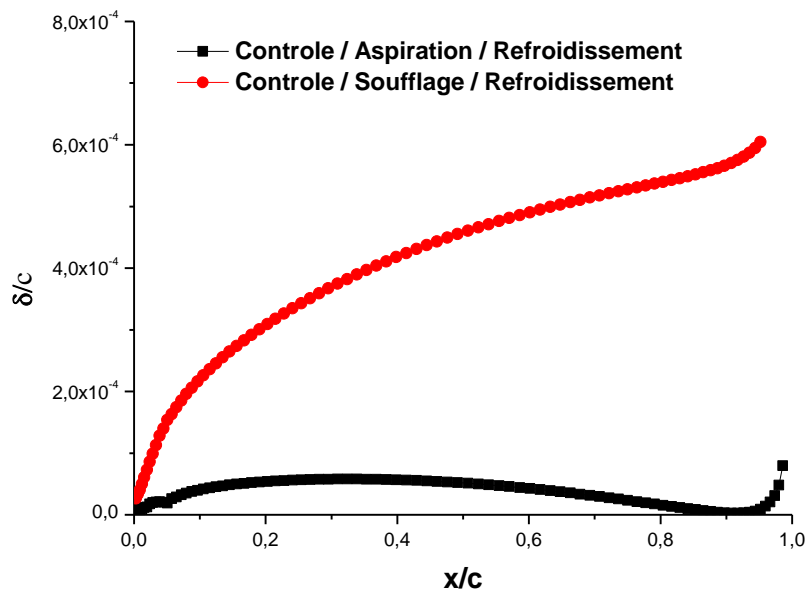


Figure 7.14 : Effets du contrôle par aspiration ou par soufflage combinés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de la couche limite.

3.5. Epaisseurs de quantité de mouvement

Suite à la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par aspiration d'une part et la combinaison du contrôle par refroidissement pariétal au contrôle par soufflage d'autre part et leurs effets sur la distribution de la quantité de mouvement de l'écoulement pour une station de calcul, arbitrairement choisie, une comparaison est faite.

La distribution de la quantité de mouvement pour le premier type de contrôle est moins importante que par le second type.

L'écart entre les distributions de quantités de mouvement ne cesse de prendre de l'ampleur de plus en plus jusqu'aux points de séparation de la couche limite.

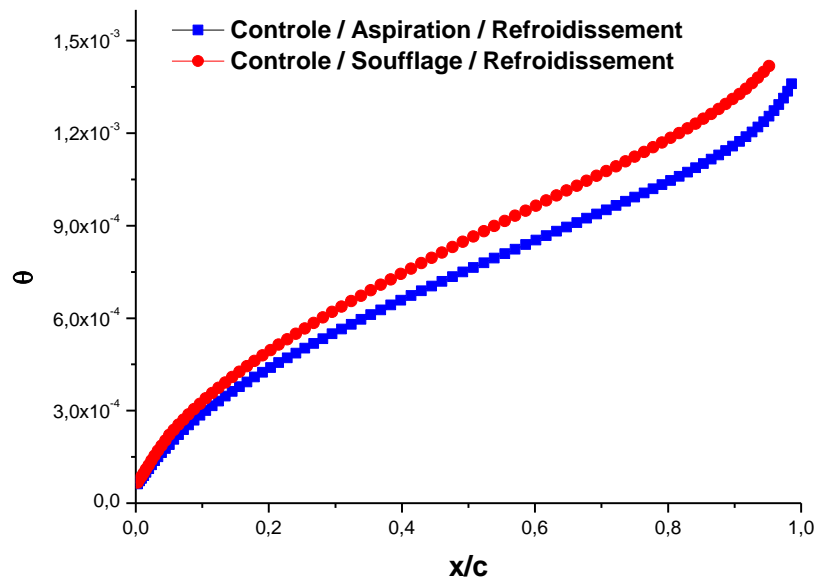


Figure 7.15 : Effets du contrôle par aspiration ou par soufflage combinés au contrôle par refroidissement pariétal sur l'épaisseur de quantité du mouvement.

Le gain en laminarité suite à la combinaison du contrôle par aspiration au contrôle par refroidissement pariétal est de 15%, alors que le contrôle par soufflage combiné au contrôle par refroidissement pariétal est seulement de 10%, ces deux résultats ont prouvé que le contrôle est d'intérêt capital.

Conclusion

Réduire la consommation énergétique ou améliorer les performances des avions, turbines, compresseurs et éoliennes, etc., a toujours constitué un objectif essentiel pour tous les chercheurs du domaine de l'aérodynamique, et parmi les moyens pour atteindre cet objectif, le contrôle de la séparation de la couche limite et de la repousser ou éliminer son point de séparation.

Dans ce cadre, une étude numérique de la couche limite laminaire d'un écoulement stationnaire, visqueux, compressible et subsonique autour d'un profil bidimensionnel NACA 0012 est faite.

L'introduction des variables de Falkner-Skan a permis de réduire le nombre de variables et par conséquent le nombre d'équations et d'alléger énormément la lourdeur mathématique si pesante.

La couche limite a été étudiée en utilisant le modèle de Prandtl et la méthode de KELLER, celle-ci a permis de réduire l'ordre des équations différentielles en premier ordre, d'écriture des équations algébriques, les linéariser par la méthode de Newton via un processus de calcul itératif et enfin les résoudre par la méthode d'élimination par blocks.

L'introduction de l'algorithme de Thomas a permis le passage d'une matrice tri-diagonale à une matrice diagonale.

La résolution mathématique du problème n'est possible qu'avec les conditions aux limites de l'écoulement potentiel en dehors de la couche limite.

Pour cela la méthode des panneaux a été utilisée pour déterminer les champs de vitesse et de pression de l'écoulement et les distributions des coefficients de pression et de portance sont calculées en fonction de plusieurs paramètres tels que le nombre de Mach, l'angle d'attaque et l'épaisseur relative du profil.

Les résultats obtenus au moyen du code élaboré à cet effet, ont démontré une erreur de 15% sur la position du point de séparation de la couche limite lorsque l'écoulement traité comme étant incompressible pour le cas d'un profil NACA 0012 avec $R_\infty = 3 \cdot 10^5$, $M_\infty = 0.5$ et $\alpha = 0^\circ$.

Les contrôles par chauffage pariétal et par refroidissement pariétal ont été testés. Ainsi, l'effet du contrôle par chauffage pariétal a réduit la zone de laminarité de la couche limite en faisant avancer le point de séparation produisant ainsi un effet négatif, la zone de laminarité a été

allongée de 10% avec un recul vers le bord de fuite du point de séparation pour le cas cité, entraînant un effet positif sur les performances.

La position du point de séparation a été repoussée vers le bord de fuite en application d'un contrôle dynamique par aspiration ou par soufflage, augmentant ainsi la zone de laminarité produisant un gain en performances.

Pour optimiser ce concept de contrôle, on a fait varier l'étendue du soufflage en amont du point de séparation, ainsi que l'angle d'éjection du fluide de contrôle au niveau de la surface, et son débit de contrôle en cherchant leurs valeurs optimales.

Le même travail a été effectué dans le sens du contrôle par aspiration.

Les résultats ont démontré un meilleur gain des performances en utilisant un contrôle par aspiration.

L'association d'un contrôle par aspiration et le contrôle par refroidissement pariétal s'est avérée encore plus efficace avec un gain de laminarité de 15%.

Références

- [1] S. CORENTIN, « Optimisation d'une aile d'avion à profil adaptable : Etude numérique et Expérimentale », thèse de Master, Montréal, 2009.
- [2] A. KOURTA, « Amélioration de la portance aérodynamique d'un profil », Laboratoire Prisme, Université d'Orléans, 8 Rue Léonard de Vinci 45072 Orléans, Cedex 2, France, 2011.
- [3] B. LAURE, « Étude et analyse des couches limites pour les écoulements turbulents », Thèse, CEMEF, France, 2014.
- [4] R. AZIM et al, « Numerical investigation on the delay of the boundary layer separation by suction for NACA 4412 », Sciences direct journal, 2015.
- [5] M. JAHANMIRI, « Active Flow Control », Department of Applied Mechanics, University of technology Printed at Chalmers Repro-service Goteborg, Sweden, 2010.
- [6] R. RADESPIE et al, « Active flow control for high lift with steady blowing », The Aeronautical Journal January, Germany, 2016.
- [7] K. YOUSEFI and R. SALEH, « The effects of trailing edge blowing on aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 airfoil and optimization of the blowing slot geometry », Journal of theoretical and applied mechanics, Warsaw, 2017.
- [8] S. GENG and U. KAYNAK, « Control of Laminar Separation Bubble over a NACA2415 aerofoil at Low Re Transitional Flow Using blowing / Suction », 13th International Conference on aerospace sciences & aviation technology, Paper: ASAT-13-AE-11, EGYPT, 2009.
- [9] U. C. KUCUK, « Passive Control Flow in Boundary Layer Ingesting Semi Submerged », Inlet, These de Master, 2015.
- [10] K. YOUSEFI, « Numerical Investigation of Suction and Length of Suction Jet on Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil », International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing, Vol. 1, No. 2, May 2013.
- [11] S. ARADAG et al, « Aerodynamic analysis of vertically landing lifting body », Journal of Thermal science and technology, Turkey, 2015.
- [12] Y. LAGMICH, « Diagnostic et Modélisation d'une décharge à batterie électrique pour le contrôle de l'écoulement », Thèse de doctorat, Toulouse, 2007.
- [13] F. WAYNE, « Subsonic aerodynamics », Chapter 2, Air Force Base, California, USA, 1992.
- [14] H. T. BICH and N. M. HUNG, « Study of separation phenomenon in transonic flows produced by interaction between choc wave and boundary layer », Vietnam journal of Mechanics, Vol. 33, N°3, Vietnam, 2014.

- [15] J. FAVIER, « Contrôle d'écoulements : approche expérimentale et modélisation de Dimension réduite », Thèse de doctorat, Toulouse, 2007.
- [16] F. ALOUI, « Etude de contrôle des écoulements », Thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2010.
- [17] C. S. KIM et al, « Parallel computations of high-lift airfoil flow using two-equation turbulence models », AIIA Journal, Vol. 38, and N ° 8, 2000.
- [18] P. MANIER, « Etude expérimentale du contrôle d'écoulements aérodynamiques subsoniques par action de plasmas froids surfaciques à pression atmosphérique », Thèse de doctorat, Université d'Orléans, France, 2007.
- [19] B. KISSI, « Analyses du décollement de la couche limite d'un jet laminaire impactant sur une plaque plane chauffée », 9^{ème} Congrès de Mécanique, FS SEMLALIA, Marrakech, Maroc, 2013.
- [20] H. SCHICHTING, « Boundary layer theory », Seven Edition, Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY, 1979.
- [21] E. COENEN, « Introduction à la couche limite interactive », Université Pierre et Marie curie, France, 1995.
- [22] S. H. HARVEY, « Compressible Steady Laminar Boundary Layers, Lam ME351B Mechanical Engineering », Stanford University, 2004.
- [23] N. L. ACHALA et al, « Approximate analytical Solution of Compressible Boundary Layer flow with an adverse Pressure Gradient by Homotopy Analysis Method », Theoretical Mathematics & Applications, vol.5, no.1, 2015.
- [24] K. GEMBA, « Measurement of boundary layer on a flat plate », California, USA, 2007.
- [25] M. GOODARZI et al, « Investigation of Active Flow Control over NACA0015 Airfoil via Blowing », International Journal of Aerospace Sciences, Iran, 2012.
- [26] T. CEBECI & J. COUSTEIX, « Modeling and computation of boundary-layer flows », Second Edition, Springer edition, USA, 2005.
- [27] T. CEBECI & J. COUSTEIX, « Heat transfer of boundary-layer flows », Springer edition, USA, 2005.
- [28] T. CEBECI & al, « Analysis of low-speed unsteady airfoil flows », Horizons Publishing Inc, Long Beach, California, 2005.
- [29] C. A. J. FLETCHER, « Computational Techniques for Fluid Dynamics 1 », Second Edition, Editors N. B. Keller, USA, 2006.
- [30] M. XENOS, et al, « Methods of optimizing separation of compressible turbulent boundary layer over a wedge with heat and mass transfer », International Journal of Heat and Mass Transfer, Greece, 2009.

- [31] A. GOURDIN et M. BOUMAH RAT, « Méthodes numériques appliquées », Tec et Doc Lavoisier, 1989.
- [32] L. M. NOWAK, « Computational investigation of a NACA 0012 airfoil in low Reynolds number flow », These, USA, 1992.
- [33] H. SMITH, « Hess smith panel method », A200b-Applied Aerodynamics II, Lecture 3, 2005.
- [34] J. ALONSO, « Fundamentals of compressible flow II », lecture notes, Room, 2009
- [35] I. L. RYHMING, « Dynamique des fluides », Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015, Lausanne, 1991.
- [36] A. VALDETARO, « Analysis of compressible potential flow over non-lifting airfoils using the dual reciprocity method », Proceedings of ENCIT 2006 - ABCM, Curitiba, Brazil, 2006.
- [37] C. A. J. FLETCHER, « Computational Techniques for Fluid Dynamics 2 », Second Edition, Editors N. B. Keller, USA, 2006.
- [38] J. D. Anderson, « Fundamentals of aerodynamics », Mc Graw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering, Second Edition, USA, 1991.
- [39] F. MOHEBBI and M. SELLIER, « On the Kutta condition in potential flow over airfoil », Journal of aerodynamics, HINDAWI, 2014.
- [40] M. F. CHE MOHD HUSIN et al, « Calculation of NACA 0012 airfoil through Roe's scheme method », International Conference Recent trends in Engineering & Technology, International Conference Recent trends in Engineering & Technology, INONESIA, 2014.
- [41] P. LAVOIE, « Subsonic Compressible Flow over Airfoils », AER307: Aerodynamics, University of Toronto Institute for Aerospace Studies, 2012.
- [42] E. FOISSAC et al, « Modélisation de la Méthode des Panneaux avec Tourbillons par Formulation de Linge de Courant », Ecole Polytechnique Montréal, Canada, 2009.
- [43] A. NAHOUI and L. BAHI, « Compressibility effects on distributions of pressure and lift coefficients », Sciences & Technologies A, Constantine, Revue Semestrielle de l'Université Frères Mentouri Constantine1, 2015.
- [44] H. T. NGOC, « Study of separation phenomenon in transonic flows produced by interaction between shock wave and boundary layer », Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol.33, No. 3, Vietnam, 2011.
- [45] A. TOUSIF, « Computational study of Flow around a NACA 0012 Wing Flapped at Different Flap Angles with Varying Mach number », Global Journal of Researches in engineering General engineering, USA, 2013.
- [46] J.C. ROBINET, « Aérodynamique Fondamentale », Module 1 de l'UEE d'Arts & Métiers Paris Tech, France, 2012.

- [47] N. M. HUNG and H. THIBICH, « Experimental study of laminar separation phenomenon combining with numerical calculations », Vietnam Journal of Mechanics, Vietnam, 2011.
- [48] S. D. MILLER, « Lift, Drag and moment of a NACA 0015 Airfoil », Department of Aerospace engineering, The Ohio State University, 2008.
- [49] A. NAHOUI and L. BAHI, « Incompressible laminar boundary Layer Control by blowing and suction », Revue des sciences & technologies A, Constantine, 2013.
- [50] P. MAGNIER, « Etude expérimentale du contrôle d'écoulements aérodynamiques subsoniques par action de plasmas froids surfaciques à pression atmosphérique », Thèse de doctorat, Orléans, France, 2007.
- [51] A. SEDAGHAT et al, « Control of Transition over Aerofoil Surfaces using Active Suction », International Journal of Flow Control, Volume 5 Number 3+4, 2013.
- [52] L. MATHELIN et al, « Near wake of a circular cylinder submitted to blowing-I Boundary layers evolution », International Journal of Heat and Mass Transfer, France, 2001.
- [53] N. KAFOUSSIAS et al, « Numerical study of two dimensional laminar boundary layer compressible flows with pressure gradient and heat and mass transfer », International Journal of Engineering Science, Greece, 1999.
- [54] H. S. LAM, « Compressible Steady Laminar Boundary Layers », ME351B Mechanical Engineering, Stanford University, STANFORD, 2004.
- [55] V. DYKEN and D. ROBERT, « Experimental and computational analysis of bubble behavior for compressible, steady and oscillatory flows over a NACA 0012 airfoil », These, Naval post graduate school, Monterey, California, 1997.
- [56] D. DRIKAKIS and S. TSANGARIS, « On the solution of the compressible Navier-Stokes equations using improved flux Vector splitting methods », Applied Mathematical Modeling Journal, Vol. 17, June, Greece, 1993.
- [57] B. SANDERSE, « Cartesian grid methods for preliminary aircraft design », These de Master, Netherlands, 2008.

Etablissement des équations de la couche limite

Le passage d'un repère cartésien à un autre, plus adéquat, au calcul de la couche limite passe par une reformulation de l'équation de l'énergie, tout en se servant des paramètres définis par les équations (1.17a-h), mais, avant de reformuler les équations de la couche limite, il est utile d'adapter l'équation de l'énergie.

1. Reformulation de l'équation d'énergie

L'équation (1.2) est donnée par

$$\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Si on multiplie l'équation (1.2) par la vitesse longitudinale u , on obtient,

$$\begin{aligned} \rho u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho v \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \rho v \left(\frac{\partial u^2}{\partial y} \right) &= -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

D'autre part, les équations de l'enthalpie totale et de la dérivée partielle sont exprimées par

$$\begin{aligned} H &= C_p T + \frac{u^2}{2} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= C_p \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} \\ C_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial H}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

L'équation d'énergie (1.4), peut être exprimée, telle que

$$\begin{aligned} \rho u \left(\frac{\partial}{\partial x} C_p T \right) + \rho v \left(\frac{\partial}{\partial y} C_p T \right) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial H}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \rho u \left(\frac{\partial}{\partial x} C_p T \right) + \rho v \left(\frac{\partial}{\partial y} C_p T \right) &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

L'addition des équations (A1.1) et (A1.2), donne

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + C_p T \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + C_p T \right) \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho u \frac{\partial}{\partial x}(H) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}(H) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
u \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\
\rho u \frac{\partial}{\partial x}(H) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}(H) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\
\rho u \frac{\partial}{\partial x}(H) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}(H) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + u \mu \frac{\partial u}{\partial y} \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \right) \tag{1.6}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (1.6) est obtenue.

2. Reformulation des équations de la couche limite

2.1. Reformulation de l'équation de quantité de mouvement

Pour pouvoir passer du repère cartésien au repère de la couche limite ayant les coordonnées x et η et qui permet de réduire le nombre d'inconnus d'une part, et d'autre part on a besoin de se servir des opérateurs mathématiques de dérivation suivants,

$$\left. \frac{\partial \dots}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial \dots}{\partial x} \right|_\eta + \left. \frac{\partial \dots}{\partial \eta} \right|_x \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\left. \frac{\partial \dots}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial \dots}{\partial \eta} \right|_x \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

On commence à exprimer terme par terme de l'équation mentionnée ci-dessus dans le nouveau repère, donc,

La vitesse longitudinale est donnée par

$$u = u_e f'$$

Les dérivées partielles de vitesse sont,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_e \frac{\partial f'}{\partial x} + f' \frac{du_e}{dx} + f'' \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho u_e^2 f''}{\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}$$

Le premier terme de l'équation de quantité de mouvement prend la forme,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \rho u_e^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{m_2}{x} f' f' + f' f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

La vitesse transversale est donnée par,

$$\rho v = \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{d\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{dx} + f' \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Le second terme de l'équation de quantité de mouvement est donné par,

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho u_e^2 \left(-f'' \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{m_1}{x} f f'' - f' f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

Le troisième terme,

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_e u_e}{x} \frac{du_e}{dx} = \rho u_e^2 \frac{m_2 c}{x}$$

Enfin, le dernier terme prend la forme suivante

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b f'' u_e \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\rho u_e^2 (b f'')'}{x}$$

Si on réarrange tous les termes suscités et les multiplie par le terme $\frac{x}{\rho u_e^2}$, on retrouve l'équation (1.16a).

2.2. Reformulation de l'équation de l'énergie

De la même manière précédente, on procède pour retrouver l'équation (1.16b)

$$\rho u = \rho u_e f'$$

$$\rho v = \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{d\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{dx} + f' \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho u_e^2 f''}{\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho u_e^3 f' f''}{\sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = H_e \frac{\partial S}{\partial x} + S' \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = S' H_e \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} = f' \frac{\partial S}{\partial x} (\rho u_e H_e) + f' S' \left(\rho u_e H_e \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = & -S' \frac{\partial f}{\partial x} \left(H_e \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - f S' \left(H_e \frac{\partial \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ & - f' S' \left(H_e \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} = S' \left(\frac{\rho H_e \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{x} \right)$$

$$\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} = (df' f'') \frac{H_e \sqrt{\rho_e \mu_e u_e x}}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (eS' + df' f'')' \left(\frac{\rho u_e H_e}{x} \right)$$

Par réarrangement de tous les termes et la mise en facteur du terme $\frac{\rho u_e H_e}{x}$, on retrouve aisément l'équation (1.16b).

Détermination des coefficients des équations algébriques

L'équation dynamique et l'équation d'énergie doivent être mises en forme algébrique pour pouvoir les programmer par suite.

1. Détermination des coefficients de l'équation dynamique

L'équation dynamique est donnée par la formule suivante

$$(bv)' + m_1fv + m_2cu^2 = x \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Cette équation doit être discrétisée au centre du schéma semi-implicite de Cranck-Nicolson, en effet, tous les termes de l'équation dynamique peuvent être approximer par l'égalité suivante

$$\left(\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\left(\right)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

On commence la discrétisation de l'équation terme par terme en tenant compte des approximations mentionnées de telle sorte,

$$((bv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} h_j^{-1} \left(((bv)')_{j-\frac{1}{2}}^n + ((bv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$((bv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} h_j^{-1} \left((bv)_j^n - (bv)_{j-1}^n + (bv)_j^{n-1} - (bv)_{j-1}^{n-1} \right)$$

$$(m_1fv)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left((m_1fv)_{j-\frac{1}{2}}^n + (m_1fv)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$m_2(c - u^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left((m_2c)_{j-\frac{1}{2}}^n + (m_2c)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (m_2u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n - (m_2u^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\left(xu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(xu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} x^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{2n} - u_{j-\frac{1}{2}}^{2n-1}}{x^n - x^{n-1}} \right)$$

Pour alléger l'écriture, on introduit un coefficient α^n définit par

$$\alpha^n = \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{x^n - x^{n-1}}$$

$$\left(xu \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2} \frac{\partial \left(u^2_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{x^n - x^{n-1}} \left(u^2_{j-\frac{1}{2}}^{2n} - u^2_{j-\frac{1}{2}}^{2n-1}\right) = \frac{1}{2} \alpha^n \left(u^2_{j-\frac{1}{2}}^{2n} - u^2_{j-\frac{1}{2}}^{2n-1}\right)$$

$$\left(xv \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \alpha^n \left(v^n_{j-\frac{1}{2}} f^n_{j-\frac{1}{2}} - v^n_{j-\frac{1}{2}} f^{n-\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} + f^n_{j-\frac{1}{2}} v^{n-\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} - v^{n-\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}} f^{n-\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

Le principe de calcul adopté est itératif, .i.e. pour une itération de l'ordre i ou la solution n'est pas encore obtenue, on passe à l'ordre $i + 1$ et on refait la procédure jusqu'à l'obtention de la solution approchée désirée, donc, chaque fonction peut s'écrire selon la procédure suivante,

$$f_j^{i+1} = f_j^i + \delta f_j^i$$

$$u_j^{i+1} = u_j^i + \delta u_j^i$$

$$v_j^{i+1} = v_j^i + \delta v_j^i$$

$$g_j^{i+1} = g_j^i + \delta g_j^i$$

$$p_j^{i+1} = p_j^i + \delta p_j^i$$

L'objectif du calcul itératif est d'arriver à minimiser les approximations jusqu'aux valeurs désirées définies au préalable selon un critère de convergence prédéfini.

Il est toujours utile de mentionner que les approximations d'ordres supérieures à l'unité sont à négliger, donc, l'équation dynamique peut s'écrire sous la forme telle que

$$(s_1)_j \delta v_j + (s_2)_j \delta v_{j-1} + (s_3)_j \delta f_j + (s_4)_j \delta f_{j-1} + (s_5)_j \delta u_j + (s_6)_j \delta u_{j-1} + (s_7)_j \delta g_j + (s_8)_j \delta g_{j-1} = (r_2)_j$$

Avant de procéder à la mise en forme finale de l'équation dynamique, il est utile de mentionner quelques détails, tels que

$$(bv)_j^i = b_j v_j^i = b_j (v_j^i + \delta v_j^i)$$

$$(bv)_{j-1}^n = b_{j-1} v_{j-1}^i = b_{j-1} (v_{j-1}^i + \delta v_{j-1}^i)$$

$$(fv)^{i+1}_j = (f + \delta f)^i_j (v + \delta v)^i_j = f^i_j v^i_j + f^i_j \delta v_j^i + \delta f^i_j v^i_j + \delta f_j \delta v_j^i$$

$$\begin{aligned}(fv)^{i+1}_{j-1} &= (f + \delta f)^i_{j-1} (v + \delta v)^i_{j-1} \\ &= f^i_{j-1} v^i_{j-1} + f^i_{j-1} \delta v_{j-1} + v^i_{j-1} \delta f_{j-1} + \delta f_{j-1} v_{j-1}\end{aligned}$$

Les termes $\delta f_j \delta v_j$ et $\delta v_j \delta f_j$ sont d'ordre supérieur, ils sont insignifiants devant les autres termes, donc, ils sont à négliger.

$$(u^2)^{i+1}_j = (u^2)^{i+1}_j = (u + \delta u)^i_j (u + \delta u)^i_j = (u^i_j + \delta u_j)(u^i_j + \delta u_j) = 2(u^i_j + \delta u_j)$$

Enfin, les coefficients $(s_1)_j, (s_1)_j, (s_2)_j, (s_3)_j, (s_4)_j, (s_5)_j, (s_6)_j, (s_7)_j$ et $(s_8)_j$ sont donnés par les expressions suivantes

$$(s_1)_j = h_j^{-1} b_j^n + \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} f_j^n - \alpha^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(s_2)_j = -h_j^{-1} b_{j-1}^n + \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} f_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(s_3)_j = \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} v_j^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(s_4)_j = -\frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} v_{j-1}^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(s_5)_j = -(\alpha^n + m_2^n) u_j^n$$

$$(s_6)_j = -(\alpha^n + m_2^n) u_{j-1}^n$$

$$(s_7)_j = 0$$

$$(s_8)_j = 0$$

2. Détermination des coefficients de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie (1.6) est donnée par la formule suivante,

$$(ep + duv)' + m_1 fp = x \left(u \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

L'équation d'énergie doit être également discrétisée et approximée comme il a été fait avec l'équation dynamique, telle que,

$$((ep + duv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(((ep + duv)')_{j-\frac{1}{2}}^n + ((ep + duv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$\begin{aligned} ((ep + duv)')_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} h_j^{-1} \left(((ep + duv))_j^n - ((ep + duv))_{j-1}^n + ((ep + duv))_j^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - ((ep + duv))_{j-1}^{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$(m_1 fp)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left((m_1 fp)_{j-\frac{1}{2}}^n + (m_1 fp)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(x^{n-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(x^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(x^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \left(\frac{g_{j-\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{x^n - x^{n-1}} \right) \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\alpha^n \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right)$$

$$\left(xu \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^n}{4} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

En se servant des approximations et des itérations mentionnées ci-dessus pour réarranger l'équation d'énergie sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (\beta_1)_j \delta p_j + (\beta_2)_j \delta p_{j-1} + (\beta_3)_j \delta f_j + (\beta_4)_j \delta f_{j-1} + (\beta_5)_j \delta u_j + (\beta_6)_j \delta u_{j-1} + (\beta_7)_j \delta g_j \\ + (\beta_8)_j \delta g_{j-1} + (\beta_9)_j \delta v_j + (\beta_{10})_j \delta v_{j-1} = (r_3)_j \end{aligned}$$

Avant de procéder à la mise en forme de l'équation dynamique, il est utile de mentionner quelques détails, tels que

$$h_j^{-1} ((ep + duv))_j^n = h_j^{-1} \left(e_j^i (p_j^i + \delta p_j) + d_j^i (u_j^i + \delta u_j) (v_j^i + \delta v_j) \right)$$

$$h_j^{-1} ((ep + duv))_j^n = h_j^{-1} \left(e_j^i \delta p_j + d_j^i v_j^i \delta u_j + d_j^i u_j^i \delta v_j \right)$$

$$h_j^{-1} (ep + duv)_{j-1}^n = h_j^{-1} \left(e_{j-1}^i (p_{j-1}^i + \delta p_{j-1}) + d_{j-1}^i (u_{j-1}^i + \delta u_{j-1}) (v_{j-1}^i + \delta v_{j-1}) \right)$$

$$h_j^{-1}((ep + duv))_{j-1}^n = h_j^{-1}(e_{j-1}^i \delta p_{j-1} + d_{j-1}^i v_{j-1}^i \delta u_{j-1} + d_{j-1}^i u_{j-1}^i \delta v_{j-1})$$

$$(m_1 f p)_j^n = \frac{m_1^n}{2} (f_j^i (p_j^i + \delta p_j) + p_j^i (f_j^i + \delta f_j))$$

$$(m_1 f p)_j^n = \frac{m_1^n}{2} f_j^i \delta p_j + \frac{m_1^n}{2} p_j^i \delta f_j$$

$$(m_1 f p)_{j-1}^n = \frac{m_1^n}{2} (f_{j-1}^i (p_{j-1}^i + \delta p_{j-1}) + p_{j-1}^i (f_{j-1}^i + \delta f_{j-1}))$$

$$(m_1 f p)_{j-1}^n = \frac{m_1^n}{2} f_{j-1}^i \delta p_{j-1} + \frac{m_1^n}{2} p_{j-1}^i \delta f_{j-1}$$

$$\frac{\alpha^n}{2} (g_j^i u_j^i) = \frac{\alpha^n}{2} (u_j^i + \delta u_j) (g_j^i + \delta g_j)$$

$$\frac{\alpha^n}{2} (g_j^i u_j^i) = \frac{\alpha^n}{2} (u_j^i \delta g_j + g_j^i \delta u_j)$$

$$\frac{\alpha^n}{2} (g_{j-1}^i u_{j-1}^i) = \frac{\alpha^n}{2} (u_{j-1}^i + \delta u_{j-1}) (g_{j-1}^i + \delta g_{j-1})$$

$$\frac{\alpha^n}{2} (g_{j-1}^i u_{j-1}^i) = \frac{\alpha^n}{2} (u_{j-1}^i \delta g_{j-1} + g_{j-1}^i \delta u_{j-1})$$

$$\frac{\alpha^n}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^i u_{j-\frac{1}{2}}^i \right) = \frac{\alpha^n}{4} u_{j-\frac{1}{2}}^i (\delta g_j + \delta g_{j-1})$$

$$\frac{\alpha^n}{2} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^i g_{j-\frac{1}{2}}^i \right) = \frac{\alpha^n}{4} g_{j-\frac{1}{2}}^i (\delta u_j + \delta u_{j-1})$$

$$\frac{\alpha^n}{2} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^i p_{j-\frac{1}{2}}^i \right) = \frac{\alpha^n}{4} f_{j-\frac{1}{2}}^i (\delta p_j + \delta p_{j-1})$$

$$\frac{\alpha^n}{2} \left(p_{j-\frac{1}{2}}^i f_{j-\frac{1}{2}}^i \right) = \frac{\alpha^n}{4} p_{j-\frac{1}{2}}^i (\delta f_j + \delta f_{j-1})$$

Les coefficients $(\beta_1)_j$, $(\beta_2)_j$, $(\beta_3)_j$, $(\beta_4)_j$, $(\beta_5)_j$, $(\beta_6)_j$, $(\beta_7)_j$, $(\beta_8)_j$, $(\beta_9)_j$ et $(\beta_{10})_j$ associés aux inconnus à déterminer δp_j , δp_{j-1} , δf_j , δf_{j-1} , δu_j , δu_{j-1} , δg_j , δg_{j-1} , δv_j et δv_{j-1} sont donnés par les expressions suivantes

$$(\beta_1)_j = h_j^{-1} e_j^n + \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} f_j^n - \alpha^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(\beta_2)_j = -h_j^{-1} e_{j-1}^n + \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} f_{j-1}^n - \alpha^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(\beta_3)_j = \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} p_j^n - \frac{\alpha^n}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(\beta_4)_j = \frac{(\alpha^n + m_1^n)}{2} p_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

$$(\beta_5)_j = h_j^{-1} d_j^n v_j^n - \frac{\alpha^n}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$(\beta_6)_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^n v_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} \left(g_{j-\frac{1}{2}}^n + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$(\beta_7)_j = -\frac{\alpha^n}{2} \left(u_j^n + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$(\beta_8)_j = -\frac{\alpha^n}{2} \left(u_{j-1}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)$$

$$(\beta_9)_j = h_j^{-1} d_j^n u_j^n$$

$$(\beta_{10})_j = -h_j^{-1} d_{j-1}^n u_{j-1}^n$$

Enfin, tous les termes des équations de quantité de mouvement et d'énergie sont bien déterminés selon le principe itératif.

Etablissement des grandeurs de la couche limite

Les grandeurs de la couche limite données par les équations (1.8-1.11) dans le repère (x, y) , ont été exprimés par des nouvelles formes (1.19-1.22) dans le repère (x, η) après avoir effectué quelque manipulations mathématiques en servant des équations (1.12-1.14), telles que,

1. Epaisseur de la couche limite

L'épaisseur de la couche limite est donnée par la formule (1.8) dans le repère (x, y) , telle que

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

Cette grandeur peut avoir une autre forme en servant d'autres équations, telles que,

De l'équation (1.14), on peut tirer, $\frac{u}{u_e} = f'$, de l'équation (1.12), on peut tirer aussi

$$d\eta = \frac{\rho}{\rho_e} \sqrt{\frac{u_e}{\vartheta_e x}} dy, \text{ de l'équation (1.17c), on peut tirer également } c = \frac{\rho_e}{\rho} \text{ et de l'équation}$$

$$(1.17h), Rx = \frac{u_e x}{\vartheta_e}$$

$$\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \left(1 - \frac{f'}{c}\right) \frac{\rho_e}{\rho} \sqrt{\frac{x \vartheta_e}{u_e}} d\eta = \left(\frac{1 - f'}{c}\right) c \sqrt{\frac{xx \vartheta_e}{xu_e}} d\eta = (c - f') \frac{x}{\sqrt{Rx}} d\eta$$

Comme x et η deux variables indépendantes, on peut avoir l'équation (1.9).

2. Epaisseur de quantité de mouvement

L'épaisseur de quantité de mouvement exprimée par la formule (1.9) peut être reformulée pour prendre la forme de l'équation (1.20), la formule peut évoluer, telle que,

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \int_0^{\eta_e} \frac{f'}{c} (1 - f') \frac{\rho_e}{\rho} \sqrt{\frac{x \vartheta_e}{u_e}} d\eta = \int_0^{\eta_e} f' (1 - f') \frac{x}{\sqrt{Rx}} d\eta$$

Cette dernière expression n'est que la forme recherchée.

3. Coefficient du frottement

Le coefficient du frottement donné par la formule (1.11) peut être aussi exprimé la formule (1.22) en suivant les démarches suivantes.

$$Cf = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_e u_e^2} \text{ Avec } \tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

En se servant de l'équation (1.17a), on obtient facilement l'équation (1.22).

Elaboration de l'équation de l'écoulement à potentiel de vitesse

Afin d'élaborer une seule équation différentielle linéaire, dont la résolution mathématique est relativement, l'écoulement autour d'un profil aérodynamique est géré par l'écoulement dit d'EULER.

Les hypothèses simplificatrices et les équations régissant l'écoulement sont détaillées ci-dessous.

1. Hypothèses

1. L'écoulement est stationnaire ($\partial/\partial t = 0$).
2. L'écoulement est irrotationnel (potentiel).
3. L'écoulement est subsonique.
4. L'écoulement est compressible avec propriétés physiques supposées constantes.
5. L'écoulement est plan.
6. Le fluide est idéal (Air).

2. Formulation mathématique

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont

2.1. Equation de continuité

L'équation de continuité pour les hypothèses citées au-dessus, peut être exprimée telle que

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (A4.1)$$

Si on développe ces dérivées partielles, on obtient l'équation

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (A4.2)$$

2.2. Equations de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement ou les équations dynamiques sont définies par

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A4.3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (A4.4)$$

2.3. Equation d'énergie

L'équation de l'enthalpie totale est donnée par

$$cpT_\infty + \frac{1}{2}U_\infty^2 = cpT + \frac{1}{2}V^2 \quad (A4.5)$$

Le cp peut être remplacé par $\frac{\delta R}{\delta - 1}$, donc l'équation de l'enthalpie prend la forme suivante

$$\frac{\delta R}{\delta - 1}T_\infty + \frac{1}{2}U_\infty^2 = \frac{\delta R}{\delta - 1}T + \frac{1}{2}V^2$$

Si on introduit la célérité du son dans cette dernière équation, elle devient

$$a_\infty^2 + \frac{\delta - 1}{2}U_\infty^2 = a^2 + \frac{\delta - 1}{2}V^2$$

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 + \frac{\delta - 1}{2} \frac{U_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{\delta - 1}{2} \frac{V^2}{a_\infty^2}$$

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 + \frac{\delta - 1}{2} M_\infty^2 - \frac{\delta - 1}{2} \frac{V^2}{a_\infty^2}$$

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 - \frac{\delta - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{V^2}{U_\infty^2} - 1 \right)$$

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1 - \frac{\delta - 1}{2} M_\infty^2 \left(\left(\frac{U_\infty + u'}{U_\infty} \right)^2 + \left(\frac{v'}{U_\infty} \right)^2 - 1 \right)$$

$$a^2 = a_\infty^2 \left(1 - \frac{\delta - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{U_\infty + u'}{U_\infty} \right)^2 + \left(\frac{v'}{U_\infty} \right)^2 - 1 \right)$$

$$a^2 = a_\infty^2 \left(1 - \frac{\delta - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2U_\infty u'}{U_\infty} + \frac{u'^2}{U_\infty} + \frac{v'^2}{U_\infty} \right) \right) \quad (A4.6)$$

2.4. Equation du potentiel à vitesse

Dans un souci de réduire, au strict minimum, le nombre des fonctions figurant sur les équations d'Euler, et par conséquent, facilité conséquente pour la résolution et programmation de ces équations.

Les dérivées de la pression peuvent être remplacées par ses pression par rapport à la masse volumique qui sont définies par

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

Si on de la formule de la célérité du son et l'introduction des composantes de la vitesse, ces dérivées partielles deviennent

$$-\frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

$$-\frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho} \left(v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)$$

Par addition et réarrangement de ces dérivées partielles, on obtient

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{a^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (A4.7)$$

Les équations dynamiques multipliées par les composantes de vitesses, selon l'ordre suivant, elles deviennent

$$u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (A4.8)$$

$$v \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = v \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (A4.9)$$

Par substitution des termes des membres gauches de ces dernières équations par les dérivées partielles de la pression, on obtient

$$u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{a^2 u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$vu \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{a^2 v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

Si on additionne ces trois équations membre à membre avec des petits arrangements, on obtient

$$\rho \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + vu \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -a^2 \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)$$

Si on se sert de l'équation de la continuité, cette dernière équation devient

$$\left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + vu \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) = a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (A4.10)$$

Comme l'écoulement est irrotationnel, les composantes du vecteur rotationnel sont nulles, il en découle :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Avec ces égalités, l'équation (A4.10) se réduit à

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (A4.11)$$

La théorie des petites perturbations, c'est-à-dire des corps minces aux petits angles d'attaque et Nombres de Mach subsoniques et supersoniques, consiste à donner aux paramètres de l'écoulement principal des petites fluctuations qui sont dues à la présence du profil au sein de l'écoulement, tels que, les composantes de la vitesse et le potentiel de vitesse prennent les formes suivantes

$$u = U_\infty + u'$$

$$v = v'$$

$$\Phi = U_\infty x + \varphi$$

Avec les définitions des vitesses de perturbations suivantes

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Les dérivées du premier et second ordre par rapport aux coordonnées cartésiennes du potentiel de vitesse sont définies par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Par substitution de ces définitions dans l'équation (A4.11) tout en multipliant par a^2 , on obtient

$$\left[a^2 - \left(U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \left(U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (A4.12)$$

$$\left[a^2 - (U_\infty + u')^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \left[a^2 - v'^2 \right] \frac{\partial v'}{\partial x} - 2(U_\infty + u')v' \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (A4.13)$$

Par substitution de l'équation (A4.6) dans l'équation (A4.13)

$$\begin{aligned} & \left[1 - M_\infty^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial x} \\ &= M_\infty^2 \left[(\delta + 1) \frac{u'}{U_\infty} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{u'^2}{U_\infty^2} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{v'^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} \\ &+ M_\infty^2 \left[(\delta - 1) \frac{u'}{U_\infty} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{v'^2}{U_\infty^2} \right. \\ &\left. + \frac{\delta - 1}{2} \frac{u'^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + M_\infty^2 \left[\frac{v'}{U_\infty} \left(1 + \frac{u'}{U_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (A4.14)$$

Sachant que les vitesses de perturbation sont très inférieures par rapport à la vitesse de l'écoulement principal, donc il en découle

$$\frac{u'}{U_\infty} \ll 1, \frac{v'}{U_\infty} \ll 1, \frac{u'^2}{U_\infty^2} \ll 1, \frac{v'^2}{U_\infty^2} \ll 1$$

Pour $0 \leq M_\infty \leq 0.8$, certains termes de l'équation (A4.14) sont comparés deux à deux

$$M_\infty^2 \left[(\delta + 1) \frac{u'}{U_\infty} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{u'^2}{U_\infty^2} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{v'^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} \ll \left[1 - M_\infty^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$M_\infty^2 \left[(\delta - 1) \frac{u'}{U_\infty} + \frac{\delta + 1}{2} \frac{v'^2}{U_\infty^2} + \frac{\delta - 1}{2} \frac{u'^2}{U_\infty^2} \right] \frac{\partial v'}{\partial x} \ll \frac{\partial v'}{\partial x}$$

Le dernier terme est presque nul, donc, il peut disparaître de l'équation (A4.14).

$$\left[\frac{v'}{U_\infty} \left(1 + \frac{u'}{U_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] \approx 0$$

Ainsi, l'équation (A4.14) potentiel à vitesse se réduit à

$$[1 - M_\infty^2] \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (A4.15)$$

En termes des vitesses du potentiel de perturbation, l'équation (A4.15) du l'écoulement potentiel stationnaire, bidimensionnel, subsonique et compressible sous forme finale est linéaire et exprimée par

$$[1 - M_\infty^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (A4.16).$$

Détermination des coefficients d'influence

La méthode des panneaux

L'objectif de cette partie d'étude est de déterminer les coefficients d'influence

Le vecteur unitaire normal au panneau i est donné par la formule suivante

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$$

$$\phi = V_{\infty}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^N \int \left[\frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right] ds_{\text{panneau } i} \quad (3.3)$$

Avec $\theta = \tan^{-1}(y/x)$

Etapas de détermination de la solution

1. Ecrire les formules des vitesses en fonction des contributions de toutes les singularités. Ceci inclus les sources et les vorticités de tous les panneaux et les coefficients d'influence qui sont seulement fonctions de la géométrie du profil.
2. Trouver les équations algébriques définissant les coefficients d'influence.

Pour trouver le système d'équations algébriques :

3. Ecrire la condition de tangence de l'écoulement en fonction des vitesses (N équations et N+1 inconnus).
4. Ecrire l'équation exprimant la condition de KUTTA pour trouver l'équation manquante.
5. Résoudre le système d'équations algébriques résultant.
6. Ecrire les équations des vitesses pour chaque panneau en son de point de contrôle.
7. Déterminer la distribution de la pression par le biais de l'équation de BERNOULI en utilisant la vitesse tangentielle pour tous les panneaux.

Etape 01: Ecriture des vitesses

Les composantes de la vitesse à un point de contrôle i (milieu du panneau i) sont données par les contributions générées par les sources et les vorticités de tous les panneaux.

Mathématiquement, les vitesses sont données par

$$u_i = V_{\infty} \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij}$$

$$v_i = V_{\infty} \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij}$$

Où q_j et γ les puissances des singularités.

u_{sij} , u_{vij} , v_{sij} et v_{vij} sont les coefficients d'influence.

Etape 02 : Coefficients d'influence

Pour trouver les coefficients d'influence u_{sij} , u_{vij} , v_{sij} et v_{vij} , on a besoin de travailler dans un repère local où les sources et les vorticités sont distribuées le long d'un panneau j , tel qu'il est représenté dans la figure ci-dessous

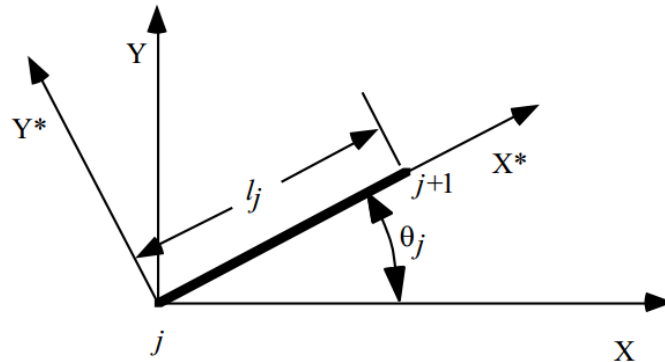


Figure 01 : Repère de coordonnées local.

Les coefficients d'influence déterminés dans le repère local u^* et v^* sont transformés dans le repère global par

$$u_i = u^* \cos \theta_j - v^* \sin \theta_j$$

$$v_i = u^* \sin \theta_j + v^* \cos \theta_j$$

On sait que le champ de vitesse généré par les sources dans le repère cylindrique est donné par

$$\vec{V} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{u}_\rho$$

Cette vitesse peut être réécrite dans le repère cartésien telle que

$$u(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

En général, si on place une source à une distance t et on intègre le long du panneau j de longueur l_j , les vitesses générées par les distributions des sources sont obtenues par

$$u_s = \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{q(t)}{2\pi} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

$$v_s = \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{q(t)}{2\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

Pour exprimer ces vitesses dans le repère local, on écrit ces équations en $()^*$ et les puissances des sources par unité, telles que

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{x_i^* - t}{(x_i^* - t)^2 + y_i^{*2}} dt$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{y_i^*}{(x_i^* - t)^2 + y_i^{*2}} dt$$

Par des opérations mathématiques simples d'intégration, on trouve

$$u_{sij}^* = \frac{-1}{2\pi} \ln \left[(x_i^* - t)^2 + y_i^{*2} \right]_{t=0}^{t=l_j}$$

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y_i^*}{x_i^* - t} \right)_{t=0}^{t=l_j}$$

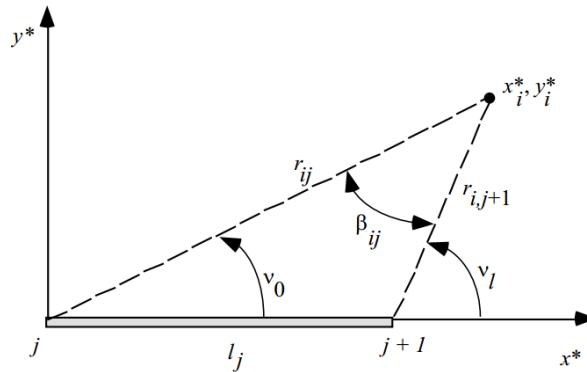


Figure 02 : Relations entre le point (x^*, y^*) et un panneau

Les coefficients d'influence peuvent être exprimés par

$$u_{sij}^* = \frac{-1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} \right)$$

$$u_{sij}^* = \frac{\vartheta_l - \vartheta_0}{2\pi} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}$$

Maintenant, la vitesse due au point-vortex est donnée par la formule suivante

$$\vec{V} = \frac{-\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Par comparaison à l'écoulement généré par les sources, les composantes de vitesses en coordonnées cartésiennes, les vitesses sont données par

$$u(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

En utilisant le même raisonnement que pour les sources, les coefficients d'influence dus à la distribution des vorticités sont donnés par

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{x_i^* - t}{(x_i^* - t)^2 + y_i^{*2}} dt$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{t=l_j} \frac{y_i^*}{(x_i^* - t)^2 + y_i^{*2}} dt$$

Les intégrales peuvent être exprimées en fonction en rayon et en angle, telles que

$$u_{sij}^* = \frac{\beta_{ij}}{2\pi}$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} \right)$$

Etape 03 : Condition de tangence

Le but est de trouver N équations exprimées par

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} q_j + A_{i,N+1} \cdot \gamma = b_i \dots \dots i = 1, N$$

$$-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0$$

$$u_i = V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij}$$

$$v_i = V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{sij}$$

$$\left(-V_\infty \cos \alpha - \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} - \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij} \right) \sin \theta_i + \left(V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{sij} \right) \cos \theta_i = 0$$

$$-V_{\infty}(\sin\theta_i \cos \alpha - \cos \theta_i \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N q_j (\cos\theta_i v_{sij} - u_{sij} \sin \theta_i)$$

$$+ \gamma \left(\cos \theta_i \sum_{j=1}^N v_{sij} - \sin \theta_i \sum_{j=1}^N u_{sij} \right) = 0$$

$$-b_i + \sum_{j=1}^N q_j A_{i,j} + \gamma A_{i,N+1} = 0$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right]$$

$$b_i = V_{\infty} \sin(\theta_i - \alpha)$$

$$A_{i,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{i,j}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right]$$

Etape 04 : Condition de KUTTA

Pour compléter le système d'équations algébriques, on a utilisé l'équation exprimant la condition de KUTTA

$$u_1 \sin \theta_1 + v_1 \cos \theta_1 = -u_N \sin \theta_N + v_N \cos \theta_N$$

$$-b_i + \sum_{j=1}^N q_j A_{i,j} + \gamma A_{i,N+1} = 0$$

$$b_{N+1} = -V_{\infty} \sin(\theta_1 - \alpha) - V_{\infty} \sin(\theta_N - \alpha)$$

$$A_{N+1,j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_1 - \theta_j) \beta_{1j} + \sin(\theta_N - \theta_j) \beta_{Nj} - \cos(\theta_1 - \theta_j) \ln \frac{r_{1,j+1}}{r_{1,j}} \right. \\ \left. - \cos(\theta_N - \theta_j) \ln \frac{r_{N,j+1}}{r_{N,j}} \right]$$

$$A_{N+1,N+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[\sin(\theta_1 - \theta_j) \ln \frac{r_{1,j+1}}{r_{1,j}} + \sin(\theta_N - \theta_j) \ln \frac{r_{N,j+1}}{r_{N,j}} \right. \\ \left. + \cos(\theta_1 - \theta_j) \beta_{1j} + \cos(\theta_N - \theta_j) \beta_{Nj} \right]$$

Ainsi, tous les coefficients d'influence sont déterminés.

Calcul du coefficient de pression

1. Equations de perturbations

En amont de l'obstacle, l'écoulement n'est pas perturbé, il est uniforme et de vitesse U_∞ , mais en présence d'obstacle, des faibles perturbations sont enregistrées, qui sont d'autant important que l'obstacle est épais. Dans cette étude, on ne s'intéresse qu'aux obstacles de faible épaisseur dit corps minces. L'écoulement proposé est à potentiel de vitesses, incompressible avec circulation qui est géré par les équations d'Euler qui sont complexes et ne permettent pas une analyse générale. Ainsi, pour obtenir une vue d'ensemble des phénomènes physiques associés à un écoulement compressible et sans viscosité. On est contraint d'introduire des simplifications, il est avantageux d'introduire un potentiel ϕ représentant la perturbation due à la présence de l'obstacle.

Pour un écoulement homogène et parallèle de vitesse U_∞ orientée dans la direction de \vec{i} d'un repère cartésien, le potentiel total Φ s'écrit donc

$$\Phi = U_\infty x + \phi \quad (\text{A6.1})$$

Les composantes de vitesse deviennent

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Les composantes de vitesse peuvent être exprimées par

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U_\infty + \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_\infty + u_k \quad (\text{A6.2})$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_k \quad (\text{A6.3})$$

Les vitesses de perturbation $u_k = u - U_\infty$, $v_k = v$, associées au potentiel Φ sont supposées petites par rapport à U_∞ de telle sorte que

$$\frac{u_k}{U_\infty} = \frac{u - U_\infty}{U_\infty} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{v_k}{U_\infty} \ll 1$$

En introduisant ces nouvelles expressions dans l'équation (A.1), on obtient

$$\left[a^2 - \left(U_\infty - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \left(U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (\text{A6.4})$$

Où le terme a^2 exprimée en fonction de φ , devient

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{k-1}{2} \left[2U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{A6.5})$$

Si les vitesses de perturbation sont faibles, il est possible de négliger plusieurs termes d'ordre supérieur, donc, on obtient

$$\left[a_\infty^2 - (k-1)U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} - U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a_\infty^2 - (k-1)U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] - 2U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (\text{A6.6})$$

Après division par a_∞^2 et réarrangement de l'équation (A6.6), il en découle

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_\infty^2 (k+1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + M_\infty^2 (k-1) \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 M_\infty^2 \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2 M_\infty^2 \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \quad (\text{A6.7})$$

Où $M_\infty = U_\infty/a_\infty$ représente le nombre de Mach de l'écoulement, on obtient l'équation de Prandtl-Glauert.

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Cette équation peut être donnée par

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (\text{A6.8})$$

En conclusion, un écoulement subsonique autour d'un profil ou autour d'un obstacle mince pourra être étudié en utilisant l'équation différentielle de Prandtl-Glauert.

2. Profil subsonique

Pour obtenir une solution de l'équation de Prandtl-Glauert dans le cas d'un profil mince subsonique bidimensionnel, considérons l'écoulement dans deux plans différents k et j .

Dans le plan k l'écoulement est compressible et toutes les variables liées à ce plan portent l'indice k et dans le plan j l'écoulement est incompressible et les variables portent l'indice j .

La vitesse U_∞ et le contour du profil autour duquel on veut déterminer l'écoulement, sont les mêmes dans les deux cas.

Dans le plan k , l'équation précédente s'écrit sous la forme suivante

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y_k^2} = 0 \quad (\text{A6.9})$$

On introduit les nouvelles variables indépendantes suivantes

$$x_j = x_k, \quad y_j = y_k (1 - M_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \phi_j(x_j, y_j) = (1 - M_\infty^2) \phi_{kj}(x_j, y_j)$$

Donc, l'équation de Laplace peut être vérifiée facilement après avoir se servir des variables indépendantes, telle que

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y_j^2} = 0 \quad (\text{A6.10})$$

Les vitesses dans le plan compressibles en fonction des vitesses dans le plan incompressible

$$u_k = \frac{u_j}{(1 - M_\infty^2)} \quad (6.6)$$

$$v_k = \frac{v_j}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.7)$$

3. Coefficient de pression C_{pk} dans le cas de l'écoulement compressible

Pour déterminer les forces qui s'appliquent à un profil, il faut connaître la distribution de pression autour d'un profil.

$$C_{pk} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 - \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} \quad (\text{A6.13})$$

$$\text{Etant donné que } v^2 = (U_\infty + u_k)^2 + (v_k)^2 \quad (\text{A6.14})$$

$$C_{pk} = \frac{1}{k M_\infty^2} \left\{ \left[1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{v^2}{u_\infty^2} - 1 \right) \right]^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right\} \quad (\text{A6.15})$$

Ainsi, le coefficient de pression d'un écoulement potentiel compressible est déterminé via la transformation Prandtl-Glauert.

Calcul du coefficient de portance

1. Coefficient de portance

Le coefficient de portance est donné par la référence par l'équation suivante

$$Cl = \frac{F_l}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} \quad (\text{A7.1})$$

1.1. Force de portance

La force de portance se calcule sur tout le contour du profil considéré par la formule suivante

$$F_l = \frac{1}{x} \int_{x=0}^{x=c} (p_i(x) - p_e(x)) dx \quad (\text{A7.2})$$

Selon la méthode des panneaux choisie, est discrétisé en n panneaux, la force de portance, après avoir discrétisé le contour, elle est exprimée selon la référence par

$$F_l = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{k=n/2} (p_i(k) - p_e(k)) (x(k+1) - x(k)) \quad (\text{A7.3})$$

1.2 Coefficient de portance fonction du coefficient de pression

L'équation (A7.3) peut s'écrire, en se servant du coefficient de pression déterminé auparavant, sous la forme

$$F_l = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{k=n/2} (Cp_i(k) - Cp_e(k)) (x(k+1) - x(k)) \quad (\text{A7.4})$$

Sachant que la différence de pression de part et d'autre (Intrados, Extrados) peut s'exprimer en fonction des coefficients de pression de l'intrados et de l'extrados, selon la démarche ci-dessous.

$$p_i - p_e = p_i - p_\infty + p_\infty - p_e \quad (\text{A 7.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i - p_e \\ \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \end{array} \right. = Cp_i - Cp_e \quad (\text{A7.6})$$

L'intégrale (A7.2) peut être calculée par la formule ci-dessous,

$$F_l = \sum_{k=n/2}^{k=1} (Cp_i(k) - Cp_e(k)) (x(k+1) - x(k)) \quad (\text{A7.7})$$

Ainsi, le coefficient de portance est déterminé.

Control of the laminar boundary layer of a stationary flow, viscous, compressible and subsonic around a two-dimensional profile

Abstract

A numerical study of a laminar boundary layer of a stationary, viscous, compressible and subsonic flow around a two-dimensional NACA profile was conducted without and with control.

The flow domain has been divided into two zones, one near-wall, the boundary layer, which is responsible for friction phenomena, and the other, an external zone where flow is considered potential.

The potential flow is studied by the panel method for the determination of the external velocity distribution necessary for the treatment of the boundary layer.

The boundary layer was studied using the PRANDTL model and the KELLER method by reducing the order of the first-order differential equations, the writing of the algebraic equations, and the linearization by the Newton method via an iterative calculation process and finally the resolution by the method of elimination by blocks.

The distributions of the pressure and lift coefficients were determined and examined for different Mach numbers and different angles of attack with varying relative thickness.

Thermal control by wall heating or wall cooling was studied and the results demonstrated only the effectiveness of the wall cooling control on the recoil of the separation point around 10% of the chord of the profile.

The dynamic control by suction or blowing has demonstrated its effectiveness on the decline of the separation point; the decline has reached 10% of the chord of the profile.

The superimposition of the thermal and dynamic control procedures demonstrated once again more efficiency on the retreat of the boundary layer separation point with a gain of 15% of the chord of the profile.

Key words: Laminar boundary layer, compressible, Mach number, Reynolds number, control, separation point, suction, blowing, wall cooling.

مراقبة الطبقة الحدية الرقائقية لجريان بثبوت الزمن، لزج، انضغاطي وتحت الصوت حول مقطع ثنائي الأبعاد.

ملخص

تم إجراء دراسة عددية لطبقة حدية منتظمة لجريان ثابت زمنياً، لزج، انضغاطي وتحت الصوت حول مقطع ثنائي الأبعاد بمراقبة وبدعم مراقبة.

مجال السيلان قسم إلى طبقتين، واحدة قريبة من الجدار، الطبقة الحدية، مفر ظواهر احتكاك و أخرى طبقة خارجية أين يعتبر الجريان كموني.

السيلان الكموني درس بطريقة الألواح من أجل تحديد توزيع السرعة الخارجية، ضرورية لمعالجة للطبقة الحدية.

الطبقة الحدية درست باستعمال نموذج براندتل وطريقة كيلار و التي تقتضي اختصار درجة المعادلات التفاضلية إلى درجة واحدة، كتابة المعادلات الجبرية، طريقة نيوتن لجعل المعادلات التفاضلية خطية من خلال أسلوب تراجع و أخيراً الحل بطريقة الاختصار الكتلي.

كما تم تحديد و تمثيل معاملات الضغط ومعاملات الرفع من أجل مختلف أعداد ماخ، مختلف زاوية الهجوم مع تغير السمك النسبي للمقاطع المعتمدة.

المراقبة الحرارية بالتسخين الجداري أو بالتبريد الجداري برهننا فقط أن فعالية المراقبة بالتبريد الجداري على تراجع نقطة الانفصال قارب 10% من طول المقطع.

المراقبة التحركية بالامتصاص أو النفخ برهن فعالية المراقبة على تراجع نقطة الانفصال الذي قارب 10% من طول المقطع.

تركيب إجراءات المراقبة الحرارية و التحركية برهن مرة أخرى أكثر فعالية على تراجع نقطة الانفصال الذي قارب 15% من طول المقطع.

الكلمات المفتاحية: طبقة حدية رقائقية ، انضغاطي، عدد ماخ، عدد رينولدز، مراقبة، نقطة الانفصال، الامتصاص، النفخ والتبريد السطحي.