

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre: 223/Ds/2017
Série :25/phy/2017

THESE

PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES
EN PHYSIQUE
SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME

**Différents Aspects de la Gravitation et de la
Non Commutativité avec Quelques
Applications Cosmologiques**

Présentée par

Habiba BOUHALLOUF

Soutenue le : 21/12/2017

Devant le jury :

Président :	K. Ait Moussa	Prof.	Université de Constantine 1
Rapporteur :	N. Mebarki	Prof.	Université de Constantine 1
Examineur :	H. Aissaoui	Prof.	Université de Constantine 1
Examineur :	S. Zaim	Prof.	Université de Batna 1
Examineur :	M. Boussahel	Prof.	Université de M'sila
Examineur :	M. Moumni	M.C.A	Université de Biskra

Résumé :

La géométrie non commutative a joué un rôle très important dans le monde de la gravitation car elle a pu répondre à plusieurs questions et explique plusieurs phénomènes.

En utilisant les propriétés d'un espace-temps non commutatif (Seiberg-Witten mapping avec Moyal-Weyl ordering), les anomalies chirales et gravitationnelles peuvent être calculées à l'aide de la méthode de Fujikawa dans le formalisme des intégrales de chemins. Cette étude a mené à un résultat très important où la non commutativité peut donner à l'espace-temps un aspect gravitationnel en absence de la force de gravité en modifiant sa structure riemannienne en une autre structure plus compliquée avec une métrique plus générale (avec torsion et non-métricité).

La contraction du groupe de jauge non commutatif de De-Sitter $SO(4,1)$ vers le groupe de Poincaré $ISO(3,1)$ (groupe homogène de Lorentz), mène aux champs de jauge déformés en utilisant les *Seiberg-Witten mapping*. Cela donne une métrique non commutative.

L'instabilité contre l'émission des particules fermioniques à travers des horizons apparents associés à un trou noir en évolution, est étudiée en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi via l'effet tunnel fermionique (application aux trous noirs de Friedman-Robertson-Walker (FRW)).

Le trou noir dynamique de l'univers FRW non commutatif laisse se produire deux processus de radiation simultanés qui sont causés par les effets de création de paires aux deux horizons du trou noir dynamique. Puisque le radiation du trou blanc est constitué d'antiparticules, elle peut être interprétée comme une absorption de l'énergie par l'horizon externe du trou noir (l'horizon dynamique purement non commutatif).

Finalement, La méthode de Hamilton-Jacobi via l'effet tunnel fermionique permet d'étudier la radiation de Hawking pour les trous noirs statiques dans un espace-temps de Lyra. Le champ d'équations basé sur la géométrie de Lyra donne une série de solutions trou noir (trous noirs de Lyra). La température de Hawking au voisinage de ses horizons d'événement ne dépend que de ses propriétés (masse) et de la structure de l'espace-temps.

Mots clés :

Géométrie Non Commutative, Gravitation, Trou noir, Anomalies, méthode de Fujikawa, Effet tunnel fermionique, méthode de Hamilton-Jacobi, Température de Hawking.

Different Aspects of Gravitation and Noncommutativity with Some Cosmological Applications

Abstract:

Noncommutative geometry has a very important role in gravitation word because it answers to a lot of questions and explain several phenomena.

With the properties of noncommutative space-time (Seiberg-Witten mapping with Moyal-Weyl ordering), Chiral and gravitational anomalies can be calculated using Fujikawa method in path integral formalism. The result obtained is very important because the non-commutativity gives in this case to space-time a gravitational aspect without a gravitational force where the noncommutativity modifies its Riemannian structure to another one more complicated having a general form of the space-time metric (with torsion and no-metricity).

A contraction of a noncommutative De Sitter $SO(4,1)$ gauge group to the Poincaré (inhomogeneous Lorentz) group $ISO(3,1)$ leads to a deformed gauge fields using the Seiberg-Witten maps, which by explicit calculations gives a deformed metric. This metric (application to FRW space-time) shows several properties of the corresponding black hole. (Calculations and graphs are realized by Maple).

The instability against emission of fermionic particles by the trapping horizon of an evolving black hole is analyzes using the Hamilton-Jacobi method via tunneling effect. This study leads to calculate noncommutative Hawking temperature defined by the surface gravity; this result is purely noncommutative and justified by the graphs showing the variation of Hawking temperature with event horizon and the parameter of noncommutativity.

Finally, Hamilton-Jacobi method via is always useful to study black hole's radiation via tunneling effect near apparent horizon of Lyra black holes. The correction spending Hawking temperature depends only of the black hole properties (mass) and the structure of Lyra space-time.

Key words:

Noncommutative Geometry, Gravity, Black holes, Anomalies, Fujikawa method, Tunnel Effect, Hamilton-Jacobi method, Hawking Temperature.

مختلف ظواهر الجاذبية والهندسة غير التبديلية مع بعض التطبيقات الكوسمولوجية

الملخص:

الهندسة غير التبديلية تلعب دورا هاما في مجال الجاذبية حيث تجيب على العديد من التساؤلات وتفسر الكثير من الظواهر.

باستعمال خصائص الفضاء (زمن- مكان) غير التبديلي (Seiberg-Witten maps وترتيب Moyal-Weyl)، يمكن حساب التشوهات المحسوبة انطلاقا من اسقاط spin على محور (chirales) والتشوهات الخاصة بالجاذبية باستعمال طريقة Fujikawa في مجال تكاملات المسار. هذه الدراسة ادت إلى نتائج مهمة جدا حيث أن الهندسة غير التبديلية يمكن لها أن تعطي للفضاء خصوصية الجاذبية في غياب قوة الجاذبية وذلك بتغيير بنيته الريمانية إلى بنية أخرى أكثر تعقيدا منها ولها قياس أكثر عمومية (القتل و شرط القياس).

تعتبر مجموعة De Sitter $SO(4, 1)$ غير التبديلية باستعمال علاقات (Seiberg-Witten maps) طريقة مثلى لإيجاد مختلف الحقول غير التبديلية وذلك بإدغام هذه المجموعة إلى مجموعة Poincaré غير التبديلية (Lorentz المتجانسة) $ISO(3,1)$ و التي تعطي قياس غير تبديلي. الدراسة تمت على فضاء FRW حيث يمكن حساب مختلف خصائص الثقب الأسود الموافق من خلال العلاقات الرياضية الخاصة بالنسبية العامة. هذه الدراسة مدعمة بمنحنيات بيانية محصل عليها من خلال برنامج Maple.

باستعمال قياس FRW غير التبديلي، طريقة Hamilton-Jacobi من خلال فعل النفق تسمح بحساب حرارة Hawking المعرفة باستعمال مساحة الجاذبية وكثافة الاحتمال. النتيجة المحصل عليها غير تبديلية خالصة أي أنها منعدمة في الحالة التبديلية. هذه النتيجة مطابقة لما تبينه المنحنيات البيانية الموافقة والتي تظهر تغيرات حرارة Hawking بدلالة الأفق والعنصر الرياضي المميز للهندسة غير التبديلية.

أخيرا، لدراسة إشعاعات Hawking الناتجة عن الثقوب السوداء المستقرة في فضاء Lyra نستعمل طريقة Hamilton-Jacobi والتي تسمح بحساب حرارة Hawking بالقرب من الأفق الظاهري حيث أعطت نتيجة مماثلة لتلك المحصل عليها في فضاء (زمن - مكان) Riemann حيث تتعلق بكتلة الثقوب السوداء وبهندسة الفضاء.

كلمات مفتاح:

الهندسة غير التبديلية، الجاذبية، الثقب الاسود، التشوهات، فعل النفق، طريقة Fujikawa، طريقة Hamilton-Jacobi، درجة حرارة Hawking.

Différents aspects de la gravitation et de la non
commutativité avec quelques applications
cosmologiques

Habiba Bouhallouf

17 mars 2018

Table des matières

Introduction	3
1 Introduction	6
1.1 La Gravitation d'Einstein	6
1.1.1 La relativité générale	6
1.1.2 Solution de Schwarzschild et Trous noirs	9
1.1.3 La métrique Friedman-Robertson-Walker (FRW)	12
1.1.4 Paramètres cosmologiques	13
1.2 Théorie de la Géométrie non Commutative	15
1.2.1 Pourquoi la géométrie non commutative?	15
1.2.2 Structure de l'espace non commutatif	17
1.2.3 Concepts de base de la géométrie non commutative	18
2 Géométrie non commutative et Anomalies	20
2.1 La méthode de Fujikawa	20
2.2 Anomalies dans l'espace-temps commutatif	21
2.2.1 Anomalies chirales	21
2.2.2 Anomalies gravitationnelles	25
2.3 Anomalies dans un espace-temps non commutatif	26
2.3.1 Produit Moyal-Weyl généralisé	26
2.3.2 Anomalies Chirales	28
2.3.3 Anomalies gravitationnelles	30
2.4 Conclusion	32
3 Extension non commutative de l'espace-temps	33
3.1 Correction au second ordre de la métrique FRW	33
3.1.1 Champs de jauge commutatif	33
3.1.2 Champs de jauge déformé	34
3.2 Cas particulier	39
3.2.1 Implications cosmologiques	42
3.3 Correction au second ordre de la métrique de Bardeen-Vaidya (BV)	46
3.3.1 Espace-temps commutatif de Bardeen-Vaidya (BV)	46
3.3.2 Espace non commutatif de Bardeen-Vaidya (BV)	47

TABLE DES MATIÈRES

3.4	Conclusion	49
4	Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW	50
4.1	Méthode de Hamilton-Jacobi	50
4.1.1	Trous noirs de Bardeen-Vaidya (BV)	51
4.1.2	Equation de Dirac	51
4.1.3	Température de Hawking	53
4.2	Effet Tunnel fermionique dans l'espace-temps non commutatif FRW	57
4.2.1	Trous noirs FRW non commutatifs	57
4.2.2	Température de Hawking	60
4.2.3	Explication physique	71
4.3	Conclusion	72
5	Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra	74
5.1	Géométrie de Lyra	74
5.2	Trous noirs de Lyra	75
5.2.1	Horizons d'événement	77
5.2.2	Température de Hawking	80
5.3	Conclusion	84
	Conclusion	86
A	Propriétés de la métrique non commutative	89
A.1	Outils de calcul	89
A.2	Composantes de la métrique FRW	90
A.2.1	Composantes des tétrades $\hat{e}_\mu^a(x, \Theta)$	90
A.2.2	Composantes de la connexions de spin	91
A.2.3	Composantes des tétrades $e_{\mu\nu}^a{}_\rho$	95
A.3	Composantes des connexions de spin pour la métrique de Bardeen-Vaidya	98
A.4	Propriétés de la métrique FRW pour différents cas de $\Theta_{\mu\nu}$	100
A.4.1	Premier cas	100
A.4.2	Deuxième cas	105
A.4.3	Troisième cas	107
A.4.4	Quatrième cas	111
A.4.5	Cinquième cas	114
B	Rappel mathématique	118
B.1	Théorème des résidus	118
B.1.1	Pour un pôle simple	118
B.1.2	Pour un pôle multiple	119
B.2	Application	119
	Bibliographie	136

Introduction

La géométrie de notre espace pose problème en physique [1], car il n'en existe pas une description unique. Dans l'esprit de la relativité générale, l'espace et le temps forment un objet quaudridimensionnel dont la courbure est donnée par la distribution de la masse. Quand un objet massif se déplace, la courbure change ; la géométrie [2, 3] est un objet dynamique. Au contraire, la mécanique quantique, suppose la donnée a priori de l'espace dans lequel évoluent des champs. La contradiction est d'autant plus flagrante que chacune de ces théories est valide et vérifiée avec précision dans son domaine d'application : on a ainsi pu « quantifier » l'électromagnétisme, et établir également des théories quantiques pour deux autres interactions, la force nucléaire faible et la force nucléaire forte. On a même pu donner un cadre commun à ces trois forces, "le modèle standard". La possibilité de construire ainsi une théorie quantique des champs, et les formidables succès expérimentaux de cette dernière ont incité les physiciens à appliquer cette technique au champ de gravitation, en le traitant comme n'importe quel autre champ, oubliant peut-être un peu vite les principes fondamentaux sur lesquels la relativité générale est bâtie. Mais malgré les efforts acharnés de nombreux physiciens depuis plus de 30 ans, la gravitation refuse obstinément de se laisser « quantifier ». De son côté, la relativité générale offre également un cadre conceptuel pour toute théorie physique, dans lequel la théorie quantique ne rentre pas ! Ainsi nous avons deux théories, chacune apportant son lot de bouleversements conceptuels et merveilleusement bien vérifiée dans son domaine d'application.

Les physiciens prennent une part active dans les recherches conduisant à la grande unification à travers plusieurs tentatives. *La supersymétrie* [2] aide à faire converger les intensités des trois forces non gravitationnelles aux hautes énergies, ce qui est un signe de bon augure pour la réalisation de la grande unification. Dans *la théorie des cordes ou supercordes*, les objets élémentaires sont représentés par des entités mathématiques linéaires, donc à une seule dimension, "les cordes", que l'on pourrait assimiler à de petits élastiques. Il n' y a plus besoin d'une multitude de particules, et la manière dont elles vibreraient faisait un électron, un quark, un photon, ... etc, mais nous ne sommes pas près de les approcher directement en laboratoire car leur longueur est prédite de l'ordre de 10^{-35} mètres. *La géométrie non commutative* qui s'est imposée avec la mécanique quantique, for-

midable moteur de recherches en mathématiques, en particulier sur les algèbres d'opérateurs...

La géométrie non commutative "GNC" en abrégé, est devenue en quelques années un sujet de recherche très actif, aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques [14]. Cette dénomination couvre en réalité un vaste domaine de recherches motivées par la constatation mathématique suivante : certains types d'espaces (topologiques, mesurables, différentiables...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions (fonctions continues, mesurables bornées, différentiables...). La géométrie non commutative se donne pour but de trouver une version non commutative de ces espaces en considérant des algèbres non commutatives ayant de bonnes propriétés. Les propriétés choisies sur ces algèbres non commutatives doivent caractériser complètement le type d'"espace non commutatif" qu'elles représentent. En particulier, dans le cas où une de ces algèbres est commutative, elle doit coïncider exactement avec la bonne algèbre de fonctions sur l'un des espaces du type considéré.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à étudier les différents aspects de la géométrie non commutative en relativité générale, et l'effet de la non commutativité sur un espace-temps courbé, en étudiant explicitement certaines de ses applications en cosmologie : calcul des anomalies de l'espace courbé non commutatif, propriétés des trous noirs (l'effet tunnel), température de Hawking, paramètres cosmologiques...ect. Elle se présente selon le plan suivant :

Le premier chapitre est une introduction comprenant deux parties, dont la première contient un rappel de l'essentiel de la théorie de la gravitation d'Einstein ordinaire à quatre dimensions ; on y présente brièvement quelques notions de la relativité générale, les solutions des équations d'Einstein et les trous noirs avec les différents paramètres cosmologiques. La seconde partie est réservée à la géométrie non commutative ; on y montre brièvement, sans détails mathématiques, les concepts de base de cette théorie ainsi que son objectif vers une théorie unifiée.

Le second chapitre est réservé aux calculs des anomalies chirales et gravitationnelles dans l'espace-temps non commutatif à l'aide du formalisme des intégrales de chemins (méthode de Jacobi).

Le troisième chapitre représente une étude détaillée de l'extension de la métrique "Friedmann-Robertson-Walker" dans l'espace non commutatif en utilisant les déformations des champs de jauge. L'utilisation des packages de "*Maple*" permet de calculer les tenseurs de la relativité générale dans le cas non commutatif (composantes de la métrique, connexions de spin, tétrads, ...), dans le but de reformuler une nouvelle métrique (FRW) déformée. Cette étude a été renforcée par une application sur la métrique de Bardeen-Vaidya, en faisant l'extension

dans l'espace-temps non commutatif.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'effet tunnel fermionique via la méthode de Hamilton-Jacobi. L'étude de la radiation de Hawking au voisinage des trous noirs de Bardeen-Vaidya permet d'étudier son comportement dans l'espace-temps commutatif en calculant la température de Hawking. La même méthode permet aussi d'étudier cette radiation au voisinage des horizons apparents associés aux trous noirs FRW dans l'espace non commutatif.

Le dernier chapitre concerne l'étude de la radiation de Hawking au voisinage des trous noirs des espace-temps de Lyra. Ici Nous utilisons la même approche mais en changeant la géométrie de l'espace-temps.

Nous terminons par une conclusion qui résumera nos résultats.

Chapitre 1

Introduction

1.1 La Gravitation d'Einstein

Ce chapitre est une exposition de l'essentiel de la théorie de la gravitation d'Einstein à quatre dimensions. Après avoir parlé du principe de la théorie de la relativité générale, nous allons donner les définitions de quelques objets mathématiques beaucoup utilisés dans ce domaine comme le tenseur métrique, la connexion affine, la connexion de spin, les tetrades, le tenseur de Riemann, le tenseur de courbure, etc... Nous poserons $c = 1$ (c est la vitesse de la lumière).

1.1.1 La relativité générale

La relativité générale est considérée comme une des plus importantes créations intellectuelles. Elle permettait de modifier à l'époque, la vision générale de la nature de l'espace et du temps ainsi de la force de la gravitation.

La relativité générale est née en 1915 après la découverte de la relativité restreinte en 1905 par Einstein [1]. La relativité générale donnait l'interprétation extraordinaire du phénomène de la courbure de l'espace-temps produite par la présence des corps massifs [2]. Cette description est une conséquence du principe d'équivalence d'Einstein [3].

Géométrie Riemannienne

La géométrie riemannienne est définie sur un espace-temps, appelé variété : *"Soit M une variété différentiable. Une métrique sur M est la donnée, pour tout point $m \in M$, d'une forme bilinéaire symétrique $g(m)$. De plus on demande que l'application $m \rightarrow g(m)$ soit différentiable. Si pour tout m la forme espace $g(m)$ est définie positive, on dit que $(M; g)$ est une variété riemannienne"*.

Cette définition appelle un commentaire immédiat. La forme bilinéaire symétrique $g(m)$ sera donnée dans une carte locale par une matrice $(g_{\mu\nu}(m))$, dont les valeurs dépendent du point m , et la différentiabilité demandée équivaut à ce que les

1. Introduction

fonctions $g_{\mu\nu}(m)$ soient toutes C^∞ . La mesure locale des distances sera donnée par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$ ($x^0 = t$ et x^1, x^2, x^3 coordonnées spatiales). Cela signifie, dans le cas riemannien, que la distance au carré entre le point m de coordonnées (x^μ) et le point infiniment proche m' de coordonnées $(x^\mu + dx^\mu)$ est donnée par la formule ci-dessus.

Géodésiques

Une géodésique est une courbe γ de paramètre τ , telle que la variation au premier ordre de sa longueur $l(\gamma)$:

$$l(\gamma) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g(\gamma(\tau)) [\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau)]} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (1.2)$$

entre deux quelconques de ses points est nulle. Dans le cas riemannien, une géodésique va donc être une courbe qui minimise localement la distance. Son équation s'écrit en générale sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (1.3)$$

C'est l'équation du mouvement de la relativité générale. L'espace-temps dicte à la matière comment se mouvoir.

Connexion affine (Symboles de Christoffel)

Nous pouvons montrer que le système d'équations différentielles vérifié par une géodésique parcourue à vitesse unité est donnée en carte locale par :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (1.4)$$

où les $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ s'appellent les symboles de Christoffel ou connexions affines. On les note parfois $\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$, et sont définis de façon unique à partir de la métrique par la condition de compatibilité entre la métrique et la connexion :

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\mu\sigma} \quad (1.5)$$

et sont symétriques

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \quad (1.6)$$

∂_μ est la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^μ . Nous pouvons montrer que la solution du système précédent est donnée par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (1.7)$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur contravariant dont l'expression en coordonnées est simplement donnée par la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$.

Tenseur de courbure

La courbure d'une variété de Riemann ou de Lorentz est codée dans le tenseur suivant, appelé tenseur de courbure et défini à partir des symboles de Christoffel :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\beta}^{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\rho}\Gamma_{\sigma\mu}^{\beta} \quad (1.8)$$

Nous pouvons définir le tenseur de courbure autrement, en faisant appel à la notion de la dérivée covariante, et qui donne une expression plus simple et naturelle pour la courbure :

$$[D_{\nu}, D_{\mu}]v^{\rho} = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}v^{\sigma} \quad (1.9)$$

pour un champ de vecteur v^{μ} , où la dérivée covariante D_{μ} est définie par

$$D_{\mu}v^{\sigma} = \partial_{\nu}v^{\sigma} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}v^{\rho} \quad (1.10)$$

Par définition, $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ est le tenseur de courbure de Riemann. Si toutes les composantes de $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ sont nulles, alors l'espace-temps est plat. Lorsqu'il y a un champ gravitationnel, il y a toujours au moins une composante non nulle.

Nous définissons également les composantes complètement covariantes du tenseur de Riemann par :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha}R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} \quad (1.11)$$

On peut alors montrer que :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.12)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (1.13)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (1.14)$$

Le tenseur de Riemann vérifie l'identité cyclique :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0 \quad (1.15)$$

et l'identité de Bianchi :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} = 0 \Leftrightarrow D_{\rho}R_{\alpha\beta\mu\nu} + D_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\rho} + D_{\nu}R_{\alpha\beta\rho\mu} = 0 \quad (1.16)$$

En contractant le tenseur de Riemann sur le premier et le troisième indice, nous obtenons un tenseur appelé « tenseur de Ricci », qui est une sorte de moyenne du tenseur de Riemann.

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = g^{\sigma\rho}R_{\sigma\mu\rho\nu} \quad (1.17)$$

$R_{\mu\nu}$ est symétrique :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\nu\mu} \\ g^{\alpha\sigma}R_{\sigma\beta} &= R^{\alpha}_{\beta} \\ g^{\sigma\alpha}R_{\beta\sigma} &= R^{\beta}_{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

donc nous pouvons écrire R^α_β sans ambiguïté.

Une dernière courbure reste à définir est la courbure scalaire, donnée par la contraction des deux indices du tenseur de Ricci :

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\mu} \quad (1.19)$$

On l'appelle aussi « scalaire de Ricci » car sa valeur ne dépend pas du système de coordonnées.

Equation d'Einstein

L'espace-temps est une variété de Lorentz de dimension 4, dont la métrique g vérifie les équations suivantes :

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

où $G_{\mu\nu}$ s'appelle le tenseur d'Einstein défini par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

Pour la constante Λ , les dernières observations astronomiques tendent à montrer qu'elle est très petite, mais non nulle. Ses effets sont donc négligeables sur les courtes distances. Nous faisons souvent passer le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ du côté droit de l'équation [5] ; nous l'interprétons alors comme une densité d'énergie présente même quand $T_{\mu\nu} = 0$, autrement dit comme une densité d'énergie du vide. Le nom à la mode pour cette forme d'énergie est « énergie noire ».

La résolution des équations d'Einstein n'est pas une chose simple, mais des situations simples ont pu être étudiées analytiquement. Généralement, nous nous intéressons aux solutions stationnaires avec des symétries spatiales. D'abord ce sont des modèles pour les objets au repos ou en rotation, et ils sont plus faciles à étudier que les systèmes non-stationnaires car lorsque la métrique est stationnaire et possède des symétries, les équations sont plus "simples" à résoudre.

1.1.2 Solution de Schwarzschild et Trous noirs

Les trous noirs sont sans doute les objets les plus fascinantes de la relativité générale. Dans les quarantes dernières années, ils sont passés du statut de curiosités abstraites, en tant que solutions mathématiques de l'équation d'Einstein, à celui de partie intégrante des objets de l'astrophysique.

Les trous noirs statiques (sans rotation) sont décrits par la métrique de Schwarzschild [5]. Elle a été généralisée au cas stationnaire par celle de Kerr [6], décrivant des trous noirs en rotation, ce dernier cas est très important pour l'astrophysique

des trois noirs rotationnels.

Le champ gravitationnel des corps à symétrie sphérique est évidemment d'importance capitale en astrophysique. Or, il se trouve qu'il existe l'équivalent du théorème de Gauss en relativité générale : le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corp à symétrie sphérique ne dépend que de la masse totale du corps [7] et non du détail de sa structure ; il est donc de la même forme pour un trou noir, une étoile ou une planète (pour peu que l'on reste dans l'hypothèse de la symétrie sphérique). Ce champ gravitationnel commun est appelé *métrique de Schwarzschild*. Il s'agit de la toute première solution exacte non triviale de l'équation fondamentale de la relativité générale. Elle a été trouvée par l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild en 1916 [5], quelques semaine seulement après la publication de la relativité générale par Einstein en novembre 1915 (l'article d'Einstein ne contenant que des solutions approchées).

Pour un système de dix équations différentielles non linéaires du second ordre, Schwarzschild était capable de trouver une solution dans le cas particulier du champ engendré par une masse M ponctuelle seule dans l'univers, en régime permanent. Le champ est alors statique, à symétrie sphérique et tend vers zéro à l'infini (ce qui signifie que nous retrouvons l'espace-temps de Minkowski à l'infini) et où le tenseur énergie-impulsion est nul (l'univers est vide) sauf à l'origine, où il est infini. La constante cosmologique Λ est également prise égale à zéro. D'après le théorème de *Birkhoff*, c'est la solution unique à symétrie sphérique qu'on peut définir comme suit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.22)$$

Par conséquent la métrique de Schwarzschild fournit une très bonne approximation du potentiel gravitationnel existant au voisinage d'une étoile ou d'une planète dont nous considérons que toute la masse est concentrée au centre, tant que nous pouvons considérer que la symétrie sphérique est respectée et que l'influence d'éventuels autres corps est négligeable. Notons qu'elle n'est valable qu'à l'extérieur de l'étoile ou de la planète, car à l'intérieur de celle-ci, le tenseur énergie-impulsion n'est pas nul.

Par ailleurs, l'espace-temps décrit par la métrique de Schwarzschild est asymptotiquement plat ; nous avons en effet :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2GM}{r} = 0 \quad (1.23)$$

si bien que, lorsque $r \rightarrow \infty$, les composante $g_{\mu\nu}$ se réduisent aux composantes de la métrique de Minkowski exprimée en coordonnées sphériques et par conséquent, le mouvement des particules massives, tel que donnée par les géodésiques de la métrique (1.22), se réduit au mouvement keplerien dans un champ newtonien de masse M lorsque $r \rightarrow \infty$. Cela justifie l'interprétation du paramètre M comme

la masse du corps central.

Une autre constatation immédiate au vu de la métrique (1.22) est que les composantes $g_{\mu\nu}$ sont singulières pour $r = R_s$, où

$$R_s := 2GM \tag{1.24}$$

est appelé rayon de Schwarzschild (ou encore rayon gravitationnel) de l'objet central. Nous avons en effet :

$$\lim_{r \rightarrow R_s} g_{tt} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow R_s} g_{rr} = \infty \tag{1.25}$$

Pour des étoiles ordinaires, ou des planètes, cela n'est pas gênant puisque R_s est bien plus petit que le rayon effectif de l'objet, si bien que nous avons toujours $r \succ R_s$ (et même $r \gg R_s!$) à l'extérieur de ces objets. Nous verrons qu'on a également $r \succ R_s$ pour les objets beaucoup plus relativistes que sont les étoiles à neutrons. Par contre, cela n'est plus vrai pour les trous noirs. La discussion sera donc consacrée à la singularité $r = R_s$ (qui est en fait une simple singularité de coordonnées).

Radiation quantique des trous noirs et Théorème de Hawking

En 1974, Hawking [8] a prouvé que les trous noirs ne sont pas vraiment noirs : ils irradient de l'énergie d'une façon continue. Cela n'est pas une erreur mais il survient en appliquant la mécanique quantique aux champs électrodynamiques au voisinage d'un trou noir. Il a montré qu'à cause des fluctuations quantiques, un trou noir émettrait un rayonnement thermique lié à sa température. Cet effet n'a jamais été observé. Il est bien connu que l'on peut réaliser l'équivalent acoustique d'un trou noir (un "trou muet") dans un fluide à l'interface entre un flux subsonique et supersonique, mais dans des fluides conventionnels, les effets quantiques sont ridiculement faibles. Récemment, il a été suggéré que l'on pourrait observer le rayonnement de Hawking dans un condensat de Bose. En effet, grâce à la faible température, des effets quantiques pourraient se distinguer du bruit thermique dans un condensat.

D'après le théorème de Hawking, l'aire de l'horizon d'un trou noir ne peut jamais décroître. Mais ce résultat a été obtenu en relativité générale classique, où les champs ne sont pas quantiques. Or, Hawking (1976) a aussi montré que, à cause d'effets quantiques (propagation de champs quantiques dans l'espace-temps classique du trou noir), un trou noir doit nécessairement rayonner avec un spectre de Planck, c'est-à-dire comme un corps noir, dont la température est donnée par :

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} g \tag{1.26}$$

où g est la gravité de surface sur l'horizon du trou noir :

$$g = \frac{M}{r_g^2} \tag{1.27}$$

Dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild : $g = \frac{M}{(2M)^2} = \frac{1}{4M}$.

1.1.3 La métrique Friedman-Robertson-Walker (FRW)

Dans les coordonnées sphériques, la métrique de Minkowski (pas de courbure pour l'espace-temps, relativité restreinte), peut être écrite ainsi

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (c^2 = 1) \quad (1.28)$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ est la partie angulaire.

En 1917, Einstein introduisait le premier modèle cosmologique (moderne) basé sur la relativité générale dont la métrique spatiale tridimensionnelle (de la 3-sphère) est :

$$dl^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R} \right) d\Omega^2 \quad (1.29)$$

Ici R représente le rayon courbure de l'espace à trois dimensions, et r est la distance à partir de l'origine. Dans le cadre de coordonnées d'un observateur tombant librement, le temps est un temps propre mesuré par cet observateur, et la métrique de l'espace-temps est :

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 \quad (1.30)$$

Cette métrique décrit un espace-temps homogène, isotrope et statique.

Une généralisation naturelle du modèle d'Einstein est de rendre le rayon de courbure dépendant du temps. L'univers reste homogène et isotrope sur une surface à t constant, mais il n'est pas statique.

Dans les années 30, Robertson et Walker (indépendamment) ont montré qu'il n'y a que trois métriques possibles de l'espace-temps pour un univers homogène et isotrope, qui sont :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[dr^2 + S_k^2(r) d\Omega^2 \right] \quad (1.31)$$

avec

$$S_k(r) = R_0 \sin \left(\frac{r}{R_0} \right), \quad \text{si } k = +1 \quad (1.32)$$

$$= r, \quad \text{si } k = 0 \quad (1.33)$$

$$= R_0 \sinh \left(\frac{r}{R_0} \right), \quad \text{si } k = -1 \quad (1.34)$$

R_0 et S_k ayant la dimension de r tandis que $a(t)$ est sans dimension et est appelé facteur d'expansion. $a(t_0) = 1$ à l'instant t_0 où le rayon de courbure est R_0 . A t quelconque, le rayon de courbure est défini ainsi :

$$R = a(t) R_0 \quad (1.35)$$

- Pour $k = +1$, la géométrie de l'espace à t constant est similaire à celle de l'espace à 3D, elle est positivement courbée et le volume total de l'univers est fini (univers fermé).
- Pour $k = 0$, la géométrie de l'espace à t constant est Euclidien, espace plat (univers ouvert).
- Pour $k = -1$, la géométrie de l'espace à t constant est négativement courbé (pseudo-sphère à 3D). L'espace dans ce cas est infini (univers ouvert).

La substitution $x = S_k(r)$ permet d'écrire une autre forme :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dx^2}{1 - k \frac{x^2}{R_0^2}} + x^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.36)$$

où x est une coordonnée radiale, donc si nous posons $r = \frac{x}{R_0}$, la métrique prend sa forme la plus utilisée suivante :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.37)$$

1.1.4 Paramètres cosmologiques

Le terme de paramètre cosmologique se réfère à une quantité qui intervient dans la description d'un modèle cosmologique et dont la valeur n'est pas connue a priori. Par exemple, les densités d'énergie des différentes formes de matière qui emplissent l'univers observable sont des paramètres cosmologiques, tout comme l'âge de l'univers.

Tous les paramètres cosmologiques ne sont pas indépendants, nous parlons parfois ainsi de paramètres dérivés. Par exemple, la relativité générale prédit [9] qu'il existe une relation entre la courbure spatiale, la constante de Hubble et la densité totale de l'univers (Équations de Friedmann). En pratique [10, 11, 12], l'estimation d'un ensemble de paramètres qui ne sont pas indépendants permet de tester la cohérence interne d'un modèle cosmologique.

Paramètre de Hubble

Dans un univers courbé et en expansion, nous définissons la distance propre d_p (la distance entre deux objets) mesurée à un instant t donné ainsi :

$$d_p = \int_0^r a(t) dr = a(t) r \quad (1.38)$$

c'est une fonction de temps où $a(t)$ est le paramètre d'expansion donné dans l'équation (FRW). Nous définissons alors la vitesse de récession apparente par :

$$\dot{d}_p = \dot{a}r \quad (1.39)$$

Si nous utilisons (1.39), nous avons :

$$\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} d_p \quad (1.40)$$

et par conséquent, l'expansion de l'univers conduit à la "loi de Hubble" :

$$v = Hd \quad (1.41)$$

où

$$H(t) = \frac{\dot{d}_p}{d_p} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.42)$$

est la *constante de Hubble*. Bien que dénommée « constante », ce paramètre cosmologique varie en fonction du temps. Il décrit donc le taux d'expansion de l'univers à un instant donné. C'est une équation très importante reliant le paramètre H découvert par Hubble et le paramètre d'expansion de l'équation de Friedmann.

Le redshift

La fréquence ν d'un photon émis par une source à distance d se déplace (effet Doppler) par la quantité fractionnelle :

$$\frac{d\nu}{\nu} = -v = -Hd \quad (1.43)$$

H est le paramètre de Hubble et $d = dt$, ce qui permet d'écrire :

$$Hd = Hdt = \frac{\dot{a}}{a} dt \quad (1.44)$$

où encore :

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a} dt = -\frac{da}{a} \Rightarrow d \ln \nu = -d \ln a \quad (1.45)$$

Nous faisons émettre le photon par la fréquence ν à l'instant t et l'observer avec la fréquence ν_0 à l'instant t_0 . L'intégration de l'équation (1.44) donne :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{a} \equiv 1 + z \quad (1.46)$$

donc :

$$a = \frac{1}{1 + z} \quad (1.47)$$

z est dit le Redshift.

La distance luminosité

Supposons que nous avons une source dont la luminosité absolue L est connue, définie comme l'énergie de rayon d totale produite par la source par unité de temps. La distance luminosité est définie par :

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (1.48)$$

Avec la métrique FRW, nous utilisons la luminosité apparente suivante :

$$l = \left(\frac{1}{1+z}\right)^2 \frac{L}{4\pi (a_0 r_e)^2} \quad (1.49)$$

pour écrire :

$$d_L = r_e a_0 (1+z) \quad (1.50)$$

Paramètre de décélération

Le paramètre de décélération de l'expansion est défini par :

$$q = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2} \quad (1.51)$$

Il existe des corrections à la loi de Hubble qui jouent [7] un rôle crucial en cosmologie car elles permettent en principe de reconstituer directement l'histoire récente de l'expansion.

1.2 Théorie de la Géométrie non Commutative

Puisque nous allons considérer un espace-temps non commutatif dans tous les chapitres de cette thèse, il est nécessaire de savoir tout ce qui concerne la théorie de la géométrie non commutative : sa définition, son but et son concept algébrique Dans cette section de l'introduction, nous allons faire un rappel sur quelques définitions de base sur les différents types d'algèbres.

1.2.1 Pourquoi la géométrie non commutative ?

Depuis sa découverte, la géométrie non commutative a connu un grand succès à cause de son rôle très important dans la construction des théories quantiques, motivé par les résultats obtenus dans la gravitation, la physique de la matière condensée et les théories des cordes. Les origines de cette théorie [13] se trouvent dans les travaux de Weyl et Moyal. Snyder était le premier qui a développé en 1946 une théorie consistante dans un espace de coordonnées non commutatif basée sur les représentations de l'algèbre de Lie.

Jusqu'à la découverte de la mécanique quantique en 1925, la géométrie classique était basée sur la *dualité*, entre "géométrie et algèbre" commutative. L'algèbre commutative est une algèbre où le produit de deux quantités algébriques ne dépend pas de l'ordre des termes, c'est à dire A fois B est égale à B fois A . Par contre, l'espace géométrique enrichi (avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg) de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, ne commutent plus. En effet, autant que la relativité générale par exemple a une interprétation géométrique simple, la géométrie de la mécanique quantique nécessite des éclaircissements (par exemple : comment donner une signification physique à la notion du point de l'espace?).

Or les mathématiciens savent traduire en langage algébrique [13] les propriétés géométriques d'un espace (essentiellement la topologie, la mesure de la métrique), dans l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur cet espace. Rappelons qu'une algèbre est un ensemble muni d'une loi d'addition et de multiplication par un scalaire, sur lequel est défini en outre une multiplication. Dans l'ensemble des fonctions à valeurs complexes sur un espace, ces lois sont définies point par point. Pour la multiplication par exemple, si f et g sont deux fonctions sur un espace X , alors :

$$(f.g)(x) = f(x) . g(x) = (f.g)(x) \tag{1.52}$$

Parce que le produit de deux nombres complexes est commutatif, le produit de deux fonctions est commutatif, cest à dire que l'algèbre des fonctions sur un espace est commutative. Ainsi il est équivalent de se donner un espace ou une algèbre commutative : les propriétés géométriques d'un espace ont une traduction dans l'algèbre des fonctions sur cet espace, et inversement, les propriétés algébriques d'une algèbre commutative ont une traduction dans l'espace associé par la construction GNS :

$$\text{algèbre commutative} \iff \text{espace}$$

La question naturelle est alors :

$$\text{algèbre non commutative} \iff ?$$

Naturellement, nous ne savons pas construire un espace tel que son algèbre de fonctions soit une algèbre non commutative, puisque l'algèbre des fonctions sur un espace est nécessairement commutative. La géométrie non commutative est une adaptation du dictionnaire qui permet de passer d'"algèbre commutative" à "espace" en remplaçant, partout où il y a lieu, le mot '*commutatif*' par '*non commutatif*'. Evidemment les choses ne sont pas si simples. Abandonner la commutativité implique de profonds changements dans les difinitions du dictionnaire, et requier même la création de nouvelles notions. L'invertissement mathématique est lourd mais le jeu en vaut la chandelle car nous pouvons accéder à de nouveaux types "d'espace non commutatifs" où des phénomènes physiques trouvent une interprétation géométrique qu'ils n'avaient pas jusque là ; par exemple le champ de

Higgs apparaît comme le coefficient d'une métrique dans une dimension supplémentaire, discrète, qui rend compte des degrés de liberté internes (spin ou isospin) d'une particule.

1.2.2 Structure de l'espace non commutatif

En physique, l'idée que les coordonnées de l'espace-temps puissent ne pas commuter fut émise par Heisenberg en 1930 Avec la découverte de la mécanique quantique : l'espace géométrique des états d'un système microscopique s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus entre eux. Cette idée sert à résoudre le problème des divergences ultraviolettes en théorie quantique des champs. Le terme de "*la géométrie non commutative*" (**NCG**) fut introduit par le mathématicien Alain Connes dans les années 1980 comme étant un programme visant à généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général [?] où l'algèbre n'est plus commutative, ainsi que les différents concepts empruntés à la géométrie ordinaire en des concepts équivalents pour des algèbres non commutatives et en particulier les concepts venant de la géométrie différentielle.

La géométrie non commutative représente aujourd'hui un ensemble de technique sur les algèbres d'opérateurs permettant de traiter des problèmes mathématiques très variés tels que les représentations de groupes ou encore l'étude d'espace, considérés comme pathologiques en géométrie ordinaire.

La structure de l'espace-temps non commutatif est déterminée par la relation de commutation suivante :

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \tag{1.53}$$

où $\Theta^{\mu\nu}$ est une matrice constante antisymétrique ($\Theta^{\mu\nu} = -\Theta^{\nu\mu}$) ayant la dimension [*longueur*]². Cette condition est similaire à celle d'Heisenberg :

$$[x_i, p_j] = -i\hbar\delta_{ij} \tag{1.54}$$

en mécanique quantique.

La théorie des champs a besoin de définir l'espace-temps en introduisant le produit (*star* " \star ") entre les fonctions f et g définies dans cet espace-temps par :

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x) g(x) + \exp\left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}f(x)\partial_{y_\nu}g(x)\right) \\ &= f(x) g(x) + \frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \mathcal{O}(\Theta^2) \end{aligned} \tag{1.55}$$

" \star " est appelé le produit de Moyal. L'extension de Taylor du produit " \star " est donnée par l'expression :

$$f(x) \star g(x) = f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{i_1 j_1} \dots \Theta^{i_n j_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x) \tag{1.56}$$

où nous pouvons facilement prouver la relation suivante :

$$[f(x) \star g(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \Theta^{i_1 j_1} \dots \Theta^{i_n j_n} \times (1 - (-1)^n) \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(x) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(x) \quad (1.57)$$

$[f \star g]$ s'appelle \star anti-commutateur si f et g sont fermioniques, autrement nous le disons un \star commutateur. A cause de l'antisymétrie de Θ , l'expression (1.58) s'écrit ainsi :

$$[f(x) \star g(x)] = \partial_i j^i \quad (1.58)$$

1.2.3 Concepts de base de la géométrie non commutative

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques définitions des différents types d'algèbre utilisées dans la construction d'une théorie non commutative [14]. Toutes les algèbres considérées sont des algèbres associatives sur \mathcal{C} .

Algèbres

Une *algèbre* est un espace vectoriel muni d'une loi de composition :

$$(g, f) \rightarrow gf \quad (1.59)$$

qui est associative, bilinéaire et avec un élément unité 1, tel que :

$$f1 = 1f = f \quad (1.60)$$

pour tout élément f de l'algèbre.

Elle est dite *commutative* si l'on a toujours $gf = fg$. Par exemple l'espace vectoriel des fonctions $f : X \rightarrow \mathcal{C}$ sur un espace X quelconque, muni de la multiplication entre fonctions est une algèbre commutative.

Un exemple d'algèbre non commutative est l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ des opérateurs (sauf si V est de dimension 0 ou 1) : $F : V \rightarrow V$, munie de la composition (nous noterons I l'opérateur unité). Nous verrons en particulier que les algèbres de von Neumann sont des sous-algèbres (i.e. des sous-ensembles stables par addition, multiplication par un nombre, et composition) de $\mathcal{L}(V)$.

*-Algèbres

Une \star -algèbre \mathcal{A} est une *algèbre* muni d'une involution non linéaire : $\star : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que :

$$a^{\star\star} = a, \quad (1.61)$$

$$(ab)^{\star} = b^{\star} a^{\star}, \quad (1.62)$$

$$(\lambda a + \mu b)^{\star} = \bar{\lambda} a^{\star} + \bar{\mu} b^{\star} \quad (1.63)$$

1. Introduction

(pour tout $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$). Si \mathcal{A} est unitaire nous avons nécessairement $I^* = I$, les éléments tels que $a^* = a$ sont dits *Hermitiens*, ceux tels que $aa^* = a^*a$ sont dits *normaux*. Si \mathcal{A} est unitaire, les éléments tels que $aa^* = a^*a = 1$ sont dits *unitaires*.

Tout a se décompose de manière unique en $a = x + iy$ où x et y sont hermitiens. Nous appelons une algèbre *normée* une algèbre \mathcal{A} munie d'une norme $\|\cdot\|$ ($\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$) avec les propriétés suivantes :

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \iff a = 0, \quad (1.64)$$

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|, \quad (1.65)$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \quad (1.66)$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (1.67)$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathcal{C}$. La troisième condition est appelée l'inégalité triangulaire, et la dernière est appelée l'inégalité produit. La topologie définie par la norme s'appelle une topologie de la norme ou une topologie uniforme.

Si \mathcal{A} est une \star -algèbre et que $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in \mathcal{A}$, nous disons que c'est une \star -algèbre normée.

Chapitre 2

Géométrie non commutative et Anomalies

L'action classique d'une théorie décrivant un système physique présente des symétries, et en découle des courants classiques conservés sous les transformations de ces symétries. Mais la quantification de cette théorie peut briser ces symétries en faisant apparaître des anomalies [15] qui se traduisent par la non-conservation des courants quantiques (qui étaient conservés au niveau classique). Depuis leur découverte à la fin des années quarantes, ces anomalies ont joué un rôle important dans la construction des théories des champs quantiques consistantes telles que la théorie des cordes... etc, et l'étude de l'origine de ces anomalies devient une voie de recherche très importante notamment dans la géométrie de l'espace-temps non commutatif.

L'étude de l'origine de ces anomalies a été faite dans le formalisme des intégrales de chemin par Fujikawa [16]. Il a montré que les Jacobiens non triviaux sont responsables au niveau quantique de la perte de l'invariance de la mesure de l'intégrale de chemin, en effectuant des transformations locales infinitésimales. Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode de Fujikawa [16] pour faire une étude sur les anomalies chirales et gravitationnelles dans la géométrie non commutative, en utilisant la généralisation de la formule du mapping de Seiberg-Witten décrite dans [17], ainsi que la méthode de la régularisation "mode cut-off" pour calculer ces anomalies. Cette étude sera faite après avoir exposé les détails de l'approche de Fujikawa dans le cadre ordinaire de la géométrie (géométrie commutative).

2.1 La méthode de Fujikawa

L'apparition des anomalies (la brisure de la symétrie) en faisant la quantification d'une théorie qui brise les symétries existant au niveau classique, pose un problème depuis leurs découverte (fin des années 40).

2. Géométrie non commutative et Anomalies

Récemment, Fujikawa [16] a étudié l'origine de ces anomalies dans le formalisme des intégrales de chemin : " *la brisure de la symétrie au niveau quantique est due aux Jacobiens non triviaux qui surgissent de la non invariance de la mesure de l'intégrale de chemin sous certaines transformations locales infinitésimales*".

2.2 Anomalies dans l'espace-temps commutatif

2.2.1 Anomalies chirales

Nous commençons par le calcul des anomalies chirales de la chromodynamique quantique (QCD) [18]. Pour cela soit le Lagrangien invariant de jauge d'un système de fermions interagissant avec les potentiels de jauge A :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i \not{D} - m) \psi(x) - \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (2.1)$$

où \not{D} est un opérateur hermitique défini par

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \quad (2.2)$$

Au niveau classique, l'action définie par (2.1) est invariante sous les transformations chirales infinitésimales suivantes effectués sur les champs ψ et $\bar{\psi}$ suivantes :

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)\gamma_5} \end{cases} \quad (2.3)$$

Mais ce n'est pas le cas au niveau quantique. Cette brisure de l'invariance dans ce cas est due à l'apparition des anomalies.

Pour étudier ces anomalies, nous suivons la méthode de Fujikawa en considérant [19] la fonction de partition Z de la fonctionnelle de Green ayant la forme suivante :

$$Z = \int d\mu \exp [S(A_\mu, \psi, \bar{\psi})] \quad (2.4)$$

$d\mu$ représente la mesure et est donnée par l'expression :

$$d\mu = \prod_x \mathcal{D}[A(x)] \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \quad (2.5)$$

Maintenant, nous effectuons les transformations chirales infinitésimales (2.4) aux champs ψ et nous utilisons le fait que $d\mu$ doit être invariante afin de calculer l'anomalie chirale.

Pour simplifier le calcul, nous choisissons la base des ondes planes (fonctions propres de D) définie par :

$$\not{D}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n \quad (2.6)$$

telles que :

$$\int \phi_n^+(x) \phi_m(x) d^4x = \delta_{nm} \quad (2.7)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

(λ_n sont les valeurs propres de D).

A l'aide des éléments de l'algèbre de Grassmann, nous redéfinissons les fonctions ψ comme suit :

$$\begin{cases} \psi(x) \equiv \sum_n a_n \phi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) \equiv \sum_m \phi_m^+(x) \bar{b}_m \end{cases} \quad (2.8)$$

a_n et b_n sont les variables de Grassman vérifiant la relation suivante :

$$\{a_n, \bar{b}_m\} = 0 \quad (2.9)$$

De même, nous écrivons :

$$\psi'(x) \equiv \sum_n a'_n \phi'_n(x) \quad (2.10)$$

ou encore

$$\psi'(x) \equiv e^{i\alpha(x)\gamma_5} \sum_n C_{mn} a_n \phi_m(x) \quad (2.11)$$

Ce qui permet de réécrire la mesure ainsi :

$$d\mu \rightarrow d\mu' = \prod_x \mathcal{D}[A(x)] \prod_n \mathcal{D}\bar{b}'_n \prod_m \mathcal{D}\bar{a}'_m \quad (2.12)$$

En utilisant la relation d'orthogonalisation (2.7) et cette propriété bien connue :

$$\exp(i\alpha(x)\gamma_5) = 1 + i\alpha(x)\gamma_5, \quad (2.13)$$

un calcul simple nous conduit à :

$$d\mu' = d\mu \exp \left[-2i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x) \right] \quad (2.14)$$

où

$$\mathcal{A}(x) = \text{Tr}(\phi^+ \gamma_5 \phi) \quad (2.15)$$

où $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ($\gamma_{j=0,1,2,3}$ sont les matrices de Pauli).

Cette expression correspond bien à la définition de *l'anomalie chirale* pour un espace de géométrie commutative. Elle montre l'existence d'une intégrale indéfinie qui nécessite une régularisation. Pour cela, il faut choisir la méthode adéquate qui mène à une expression d'une anomalie indépendante [20] du choix du régularisateur. Nous choisissons donc la méthode "*mode Cut-off*" qui sert à introduire une masse régularisante Λ comme un cut-off, c'est à dire :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp(-ikx) \gamma_5 \exp\left(-\frac{D^2}{\Lambda^2}\right) \exp(ikx) \quad (2.16)$$

où

$$|\lambda_n| \leq \Lambda \quad (2.17)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

λ_n et ϕ_n sont respectivement les valeurs et les fonctions propres de D (la trace est indépendante au choix de la base).

Si nous utilisons la définition de \mathcal{D}^2

$$\mathcal{D}^2 = D_\mu D^\mu + \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

l'expression de l'anomalie se réduit à :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_5 e^{-ikx} \exp\left(-\frac{i}{\Lambda^2} D_\mu D^\mu\right) \exp\left(-\frac{i}{4\Lambda^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu}\right) e^{ikx} \quad (2.19)$$

Nous effectuons ensuite le changement de variables suivant :

$$k_\mu + A_\mu \rightarrow k_\mu \quad (2.20)$$

pour avoir cette expression :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_5 e^{-ikx} \exp\left(-\frac{i}{\Lambda^2} k_\mu k^\mu\right) \exp\left(-\frac{i}{4\Lambda^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu}\right) e^{ikx} \quad (2.21)$$

Maintenant si nous posons :

$$k_\mu \rightarrow \Lambda k_\mu, \quad (2.22)$$

l'expression (2.21) devient :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_5 \exp\left(-\left(k^\mu k_\mu + \frac{1}{4\Lambda^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu}\right)\right)^2 \quad (2.23)$$

Comme le paramètre Λ va tendre vers l'infini, nous pouvons faire le développement limité de l'exponentielle en $\frac{1}{\Lambda^2}$ au voisinage de zéro jusqu'à l'ordre 3 :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_5 e^{-k^\mu k_\mu} \left(\Lambda^4 - \frac{\Lambda^2}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu} + \frac{1}{2!4^2} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu})^2 - \frac{1}{3!4^3} \frac{1}{\Lambda^2} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu})^3 + \dots \right) \quad (2.24)$$

Tous les termes d'ordre supérieur à 2 sont nuls ($\Lambda \rightarrow \infty$). Les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 sont nuls grâce aux propriétés de γ_5 suivantes :

$$Tr \gamma_5 = 0 \quad (2.25)$$

$$Tr \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0 \quad (2.26)$$

Le seul terme qui a une contribution non nulle est le terme d'ordre 2. Il vient donc :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{32} \gamma_5 \exp(-k^\mu k_\mu) \gamma_5 ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu})^2 \quad (2.27)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

De plus, avec l'intégrale de Poisson :

$$\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (2.28)$$

et les relations suivantes :

$$([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu})^2 = 4\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (2.29)$$

$$Tr \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = -4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.30)$$

L'expression (2.27) donne :

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

avec :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (2.32)$$

ou encore

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} (A_\mu A_\rho A_\sigma) \right) \quad (2.33)$$

où

$$3\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu A_\nu (\partial_\alpha A_\beta) = \partial_\alpha \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (A_\mu A_\nu A_\beta) \quad (2.34)$$

est une des propriétés du tenseur antisymétrique de Levis-Cevita.

On appelle la quantité

$$\Omega_0^\mu = A_\mu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} (A_\mu A_\rho A_\sigma) \quad (2.35)$$

la densité de *Chern-Simons*, et le terme anormal qui conduit à la non conservation du courant chiral

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \Omega_0^\nu \quad (2.36)$$

représente la densité de *Pontryagin*, c'est à dire que l'anomalie $\mathcal{A}(x)$ peut être vue comme un terme topologique.

Il est possible de montrer que l'anomalie donnée par (2.15) correspond bien à la version locale du théorème d'index d'Atyah-Singer [21].

En effet, soit

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

alors

$$\int \mathcal{A}(x) d^4x = \int d^4x \sum_k \phi_k^{1*} \phi_k^1 - \int d^4x \sum_k \phi_k^{2*} \phi_k^2 \quad (2.38)$$

$$= n_+ - n_- = \nu \quad (2.39)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

ν s'appelle *l'indice de Pontryagin* et n_+ et n_- sont respectivement le nombre de modes de chiralité positive et négative. Pour savoir de quel mode il s'agit dans notre cas, soit α_n les valeurs propres de γ_5 associées aux vecteurs propres $\phi_n(x)$:

$$\gamma_5 \phi_n(x) = \alpha_n \phi_n(x) \quad (2.40)$$

avec $\alpha_n = \pm 1$; alors

$$\not{D} \gamma_5 \phi_n(x) = \alpha_n \lambda_n \phi_n(x) \quad (2.41)$$

$$\gamma_5 \not{D} \phi_n(x) = \lambda_n \alpha_n \phi_n(x) \quad (2.42)$$

or

$$\not{D} \gamma_5 = -\gamma_5 \not{D} \quad (2.43)$$

donc

$$\lambda_n = 0 \quad (2.44)$$

cela veut dire qu'il s'agit bien du *mode zéro*.

2.2.2 Anomalies gravitationnelles

La méthode de Fujikawa peut également être appliquée pour calculer l'anomalie chirale lorsque les fermions sont couplés à la gravitation [19].

En effet, dans un espace de Riemann, nous écrivons le Lagrangien \mathcal{L} pour des fermions libres de Dirac :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) i e^\mu{}_a \gamma^a D_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (2.45)$$

avec $\sigma^{mn} = \frac{i}{4} [\gamma^m, \gamma^n]$ et

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} \quad (2.46)$$

En suivant les étapes de la section précédente, nous pouvons déterminer le terme de l'anomalie chirale dans l'espace courbé :

$$\mathcal{A}(x) = \sum_n \phi_n^+(x) \gamma_5 \phi_n(x) \quad (2.47)$$

où ϕ_n sont les fonctions propres de \not{D} .

Après avoir régularisé l'expression (2.47) en utilisant toujours la méthode cut-off, nous obtenons une expression compliquée nécessitant certaines simplifications. Pour la simplifier, nous utilisons la définition de \not{D}^2 :

$$\not{D}^2 = D_\mu D^\mu + \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \quad (2.48)$$

$R_{\mu\nu}$ représente le tenseur de courbure de Ricci tel que :

$$[D_\mu, D_\nu] t^\rho = -R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} t_\sigma \quad (2.49)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

L'anomalie gravitationnelle s'écrira alors en fonction du tenseur de Riemann comme suit :

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{128\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\rho\sigma} \quad (2.50)$$

Elle a une forme similaire à celle de l'anomalie chirale et correspond également sous cette forme à la version locale du théorème d'Atyah-Singer.

Nous pouvons également exprimer cette anomalie en fonction de la connexion de spin en injectant (2.48) dans l'intégrale et en faisant la régularisation par le cut-off Λ . Une suite des changements de variables permet d'écrire :

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Lambda^4 \gamma_5 \exp \left(- \left(ik_\mu - \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} \right)^2 \right) e^{-\frac{i}{4\Lambda^2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \quad (2.51)$$

et, de la même manière, les propriétés (2.25), (2.26), (2.28), (2.29) et (2.30) nous conduisent à l'expression suivante :

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \left(\underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon^{abcd} \omega_{\mu ab} \omega_{\mu cd}}_{(2)} \right) \quad (2.52)$$

Le premier terme (1) correspond à l'anomalie chirale et le terme (2) représente la courbure de l'espace-temps (l'effet de la gravitation).

2.3 Anomalies dans un espace-temps non commutatif

Le calcul des anomalies dans le cadre de la géométrie non commutative est le plus important dans ce chapitre à cause de ses résultats puissants qui montrent le rôle très important de la non commutativité dans l'interprétation de l'effet gravitationnel.

Les anomalies chirale et gravitationnelle traitées dans un espace-temps non commutatif ont été déjà étudiées en utilisant le mapping de Seiberg-Witten ordinaire. Mais dans ce travail, nous nous sommes intéressés à une formule généralisée de Seiberg-Witten maps [17] qui nous aide à exprimer les différents champs utilisés pour calculer les anomalies non commutatives.

2.3.1 Produit Moyal-Weyl généralisé

Nous allons donc, dans un premier temps nous attacher à donner un bref aperçu de la formule des règles de Weyl [22] (Moyal-Weyl ordering) dans la

2. Géométrie non commutative et Anomalies

géométrie non commutative où le commutateur de deux fonctions f et g dans l'espace-temps non commutatif est défini dans ce cas par :

$$[f, g]_\eta^\star \equiv \frac{1}{2} (f \star g + \eta g \star f) \quad (2.53)$$

où $\eta = \pm 1$ et (\star) représente le produit Moyale défini par (1.56) :

$$\varphi_1(x) \star \varphi_2(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_1(x) \partial_\nu \varphi_2(x) + o(\Theta^2) \quad (2.54)$$

En effect, soient les matrices V et W qui représentent les éléments de l'algèbre de Lie du groupe $G(Su(N), U(N))$, telles que :

$$W = T_a \Lambda^a \quad (2.55)$$

$$V_\mu = T_a V_\mu^a \quad (2.56)$$

et ψ est un multiplet de matière dans un groupe de représentation.

La généralisation des transformations de jauge ordinaires dans la géométrie non commutative est donnée par :

$$\delta_{\widehat{W}} \widehat{\psi} = iT_a [\widehat{W}^a, \widehat{\psi}]_\eta^\star \quad (2.57)$$

$$\delta_{\widehat{W}} \widehat{\bar{\psi}} = -iT_a [\widehat{\bar{\psi}}, \widehat{\Lambda}^a]_\eta^\star \quad (2.58)$$

et

$$\delta_{\widehat{W}} \widehat{V}_\mu = \partial_\mu \widehat{W} + i [T_a, T_b]_{-\eta} [\widehat{W}^a, \widehat{V}_\mu^b]_\eta^\star \quad (2.59)$$

où W^a et T_a sont respectivement le paramètre et les générateurs du groupe de transformation.

Concernant la dérivée covariante $\widehat{D}_\mu \widehat{\psi}$ d'un champ de matière, son expression généralisée est de la forme :

$$\widehat{D}_\mu \widehat{\psi} = \partial_\mu \widehat{\psi} - iT_a [\widehat{V}_\mu^a, \widehat{\psi}]_\eta^\star \quad (2.60)$$

et par conséquent, nous avons :

$$[\widehat{D}_\mu, \widehat{D}_\nu] \widehat{\psi} = -iT_a [\widehat{F}_{\mu\nu}^a, \widehat{\psi}]_\eta^\star \quad (2.61)$$

où $\widehat{F}_{\mu\nu}^a$ est le champ de force défini par :

$$\widehat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widehat{V}_\nu - \partial_\nu \widehat{V}_\mu - i [\widehat{V}_\mu, \widehat{V}_\nu]_-^\star - i\eta [\widehat{V}_\mu, \widehat{V}_\nu]_-^{\bar{\star}} \quad (2.62)$$

où

$$f \bar{\star} g = g \star f \quad (2.63)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

Et en utilisant les expressions (2.57) ,(2.58), (2.59) et (2.60), nous aurons :

$$\widehat{V}_\mu = V_\mu + \widetilde{V}_\mu \quad (2.64)$$

$$\widehat{\psi} = \psi + \widetilde{\psi} \quad (2.65)$$

et

$$\widehat{W} = W + \widetilde{W} \quad (2.66)$$

où

$$\widetilde{V}_\mu = \frac{1}{4}\Theta^{\alpha\beta} \left[\begin{array}{l} \delta_{\eta,-} \left([F_{\alpha\mu}, V_\beta]_\eta + [V_\beta, \partial_\alpha V_\mu]_\eta \right) + \\ 4\delta_{\eta,+} \left([V_\beta, \partial_\alpha V_\mu]_\eta - \frac{1}{2} [V_\beta, \partial_\mu V_\alpha]_\eta \right) \end{array} \right] + o(\Theta^2) \quad (2.67)$$

$$\widetilde{\psi} = -\frac{i}{8}\Theta^{\alpha\beta} \left\{ \delta_{\eta,-} [V_\alpha, V_\beta]_\eta \psi + 8i\delta_{\eta,+} [V_\beta \partial_\alpha \psi + F_{\alpha\beta} \psi] \right\} + o(\Theta^2) \quad (2.68)$$

et

$$\widetilde{W} = \frac{1}{4}\Theta^{\alpha\beta} \left\{ \delta_{\eta,-} [V_\beta \partial_\alpha \Lambda]_\eta + 2\delta_{\eta,+} [V_\beta, \partial_\alpha \Lambda]_\eta \right\} + o(\Theta^2) \quad (2.69)$$

Ces expressions seront utilisées par la suite pour définir les anomalies dans un espace-temps non commutatif.

2.3.2 Anomalies Chirales

Nous commençons notre étude dans le cadre de la géométrie non commutative par les anomalies chirales. Pour cela, soit le Lagrangien \mathcal{L}_\star exprimé à l'aide du produit star (\star) défini dans (2.53) :

$$\mathcal{L}_\star = \overline{\psi} \star (x) \left(i \widehat{\mathcal{D}} - m \right) \star \widehat{\psi} i(x) - \frac{1}{2g^2} Tr \widehat{F}^{\mu\nu} \star \widehat{F}_{\mu\nu} \quad (2.70)$$

Au niveau classique, la mesure de l'intégrale de chemin s'écrit également en utilisant le produit star ainsi :

$$d\widehat{\mu} = \prod_x \widehat{\mathcal{D}} \left[\widehat{A}(x) \right] \star \widehat{\mathcal{D}} \overline{\psi}(x) \star \widehat{\mathcal{D}} \widehat{\psi}(x) \quad (2.71)$$

elle est invariante sous les transformations locales infinitésimales suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\psi}(x) \rightarrow \widehat{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \gamma_5 \star \widehat{\psi}(x) \\ \overline{\psi}(x) \rightarrow \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}(x) \star e^{-i\alpha(x)} \gamma_5 \end{cases} \quad (2.72)$$

Par contre elle n'est pas invariante au niveau quantique :

$$d\widehat{\mu}' = d\widehat{\mu} \exp \left[-2i \int d^4x \alpha(x) \star \widehat{\mathcal{A}}(x) \right] \quad (2.73)$$

où $\widehat{\mathcal{A}}(x)$ est l'anomalie chirale non commutative définie par :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = \sum_\beta \gamma_5 \widehat{\phi}_\beta \star \widehat{\phi}_\beta^+ \quad (2.74)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

où $\widehat{\phi}(x)$ sont les fonctions propres de l'opérateur $\widehat{\mathcal{D}}$.

Pour régulariser cette anomalie, nous utilisons un cut-off Λ dans l'espace des ondes planes (la base des vecteurs propres de $\widehat{\mathcal{D}}$) comme suit :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_5 \left[e^{\frac{\widehat{\mathcal{D}}^2}{\Lambda^2} e^{ipx}} \right] \star e^{-ipx} \quad (2.75)$$

où

$$\widehat{\mathcal{D}}^2 e^{ipx} = (\widehat{D}^\mu \star \widehat{D}_\mu) e^{ipx} - \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [\widehat{F}_{\mu\nu}, e^{ipx}]_\eta^\star \quad (2.76)$$

À l'aide cette propriété très utilisée du produit star :

$$\int f \star (g \star h) d^4 x = \int (g \star h) \star f d^4 x \quad (2.77)$$

et du développement de l'exponentielle au voisinage de zéro jusqu'à l'ordre 1 en $\Theta^{\mu\nu}$,

$$e^{-ipx} \star e^{ipx} = 1 + \frac{i}{2} \Theta^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (2.78)$$

nous aurons :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = -\frac{1}{512\pi^2} (1 + \eta) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}_{\rho\sigma} \quad (2.79)$$

ou encore :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = -\frac{1}{512\pi^2} (1 + \eta) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{F}_{\rho\sigma} + \Theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \widehat{F}_{\mu\nu} \partial_\beta \widehat{F}_{\rho\sigma} \right) \quad (2.80)$$

A cause de l'antisymétrie de $\Theta^{\alpha\beta}$ d'une part et de la symétrie de $\widehat{F}_{\mu\nu}$ d'autre part, le deuxième terme intervient dans l'expression (2.80) est nul. Et en utilisant (2.61), l'anomalie chirale non commutative peut prendre cette forme :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = -\frac{1}{512\pi^2} (1 + \eta) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \frac{i}{4} \Theta^{\alpha\beta} \widetilde{\mathcal{A}}(x) \right) \quad (2.81)$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}(x) = & \left\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \left[\partial_\rho \widetilde{A}_\sigma - \partial_\sigma \widetilde{A}_\rho + i(\eta - 1) \left([A_\rho, \widetilde{A}_\sigma] - [A_\sigma, \widetilde{A}_\rho] \right) \right] \right\} \\ & + i(\eta - 1) \left[\begin{aligned} & [A_\mu, A_\nu] \left(\partial_\rho \widetilde{A}_\sigma - \partial_\sigma \widetilde{A}_\rho - i \left([A_\rho, \widetilde{A}_\sigma] - [A_\sigma, \widetilde{A}_\rho] \right) \right) \\ & + \left(\partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu - i \left([A_\mu, \widetilde{A}_\nu] - [A_\nu, \widetilde{A}_\mu] \right) \right) [A_\rho, A_\sigma] \end{aligned} \right] \quad (2.82) \end{aligned}$$

En voyant ce résultat, nous constatons que cette anomalie est nulle si $(\eta = -1)$; en plus elle a une forme similaire à celle de l'anomalie chirale (2.32), calculée dans un espace-temps commutatif pour $(\eta = +1)$.

De plus, cette expression correspond bien à l'expression (2.52) représentant l'anomalie gravitationnelle non commutative. Cela implique que le second terme de l'expression (2.81) (l'effet de la non commutativité), joue le même rôle que le terme 2 de l'expression (2.52) (l'effet de la gravitation).

2.3.3 Anomalies gravitationnelles

Nous proposons la forme suivante pour l'action de l'électrodynamique quantique (Q.E.D) dans un espace courbé non commutatif [17] (où la gravitation est traitée comme une théorie de jauge) :

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) \quad (2.83)$$

où \mathcal{L}_G et \mathcal{L}_M correspondent respectivement la gravitation pure et les densités scalaires de la matière, exprimées dans un espace-temps courbé non commutatif. Dans le système de coordonnées holonomiques, elles sont données par :

$$\mathcal{L}_G = \hat{e} \star \hat{R} \quad (2.84)$$

et

$$\mathcal{L}_M = \hat{e} \star \hat{\psi} \star \tilde{\gamma}^\mu \star \hat{D}_\mu \star \hat{\psi} \quad (2.85)$$

où

$$\hat{e} = \det \star \left((\hat{e}_\mu^a) \right) \equiv \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcd} \hat{e}_\mu^a \star \hat{e}_\nu^b \star \hat{e}_\rho^c \star \hat{e}_\sigma^d \quad (2.86)$$

$$\hat{R} = \hat{e}_{\star a}^\mu \star \hat{e}_{\star b}^\nu \star \hat{R}_{\mu\nu}^{ab} \quad (2.87)$$

$$D_\mu \equiv \Delta_\mu - iQA_\mu, \quad \hat{D}_\mu \equiv \hat{\Delta}_\mu - iQ\hat{A}_\mu \quad (2.88)$$

Q est la charge de l'électron, et

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\hat{e}_\mu^b \star \hat{e}_{\nu b} + \hat{e}_\nu^b \star \hat{e}_{\mu b} \right) \quad (2.89)$$

représente une metrique symétrique.

A l'aide de $\hat{g}_{\mu\nu}$, nous pouvons calculer la courbure scalaire \hat{R} jusqu'au second ordre en $\Theta^{\alpha\beta}$ (le paramètre non commutatif) pour déterminer l'anomalie gravitationnelle à travers le formalisme des intégrales de chemin (voir la section (2.2.1)) :

$$\hat{\mathcal{A}}(x) = \sum_n \gamma_5 \hat{\phi}_n(x) \star \hat{\phi}_n^\dagger(x) \quad (2.90)$$

$\hat{\phi}_n(x)$ sont les fonctions propres de \hat{D}_μ .

Après avoir régularisé cette expression en utilisant la méthode « mode cut-off », nous obtenons une très belle expression en fonction des tenseurs de Riemann et qui prend une forme identique à celle de l'anomalie chirale (2.79) :

$$\hat{\mathcal{A}}(x) = -\frac{1}{128} \varepsilon^{\mu\nu ab} \hat{R}_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \hat{R}_{ab\rho\sigma} \quad (2.91)$$

Maintenant, nous utilisons les relations généralisées de Seiberg-Witten [17] pour écrire la forme finale de l'anomalie gravitationnelle dans la géométrie non commutative :

tenseur de courbure :

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu^a \star \hat{e}_\nu^b \star \hat{R}_{ab} \quad (2.92)$$

2. Géométrie non commutative et Anomalies

connexions de spin :

$$\widehat{\omega}_\mu = \omega_\mu - \frac{1}{4}\Theta^{\alpha\beta} \{\omega_\alpha, \partial_\beta \omega_\mu + \Pi_{\beta\mu}\} + o(\Theta^2) \quad (2.93)$$

champs ψ :

$$\widehat{\psi} = \widetilde{\psi} + \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \widetilde{\psi} + \frac{i}{8}\Theta^{\mu\nu} [A_\mu, A_\nu] \widetilde{\psi} + o(\Theta^2) \quad (2.94)$$

et

$$\Pi_{ik} = i[\Delta_i, \Delta_k] = \frac{1}{2}R_{ik}^{ab}\Sigma_{ab} + T_{ik}^c \Delta_c \quad (2.95)$$

où

$$\left(\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b]\right) \quad (2.96)$$

avec

$$\widehat{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{\Theta^{cd}}{2} \{R_{ac}R_{bd}\} - \frac{\Theta^{cd}}{4} \{\omega_c, (\partial_d + \Delta_d) R_{ab}\} + o(\Theta^2), \text{ if } T_{ik}^c = 0 \quad (2.97)$$

$$\widetilde{\psi} = \frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu} \omega_\nu \partial_\mu \psi + \frac{i}{8}\Theta^{\mu\nu} [\omega_\mu, \omega_\nu] \psi + o(\Theta^2) \quad (2.98)$$

et

$$\Delta_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu^{ab}\Sigma_{ab} \quad (2.99)$$

Nous obtenons donc :

$$\widehat{\mathcal{A}}(x) = -\frac{1}{128}\varepsilon^{\mu\nu ab} \left(R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} R_{ab\rho\sigma} + \widetilde{\mathcal{A}}(x) x\right) \quad (2.100)$$

où :

$$\widetilde{\mathcal{A}}(x) = \Theta^{cd} \left[\left\{ R_{\mu\nu}, \left(\{R_{ac}, R_{bd}\} - \frac{1}{2} \{ \omega_c, \widetilde{\Delta}_d R_{ab} \} \right) \right\} + \frac{1}{2} e_c^\rho e_d^\sigma \varepsilon_{bcd}^a \left(e_a^\mu \Omega_\nu^{ad} + \Omega_\mu^{cd} e_\nu^b \right) R_{ab} \right] \quad (2.101)$$

avec :

$$\widetilde{\Delta}_d = (\partial_d + \Delta_d) \quad (2.102)$$

et

$$\Omega_\mu^{cd} = \partial_\rho e_\nu^b \omega_\rho^{cd} - \frac{1}{2} \omega_{\rho k}^b e_\nu^k \omega_\sigma^{cd} \quad (2.103)$$

Le terme (2.101) représente [23] l'effet de la non commutativité de l'espace-temps.

2.4 Conclusion

L'identification du facteur Jacobien de la fonctionnelle de Green permet de calculer les anomalies chirales non commutatives dans la théorie quantique des champs et ses implications dans la quantification des interactions gravitationnelles dans le formalisme intégrale de chemin.

Dans ce chapitre, nous avons montré que les anomalies chirales dans un espace-temps euclidien (plat) non commutatif sont équivalentes à celles d'un espace-temps courbé exprimées dans la géométrie riemannienne classique (commutative) où le terme représentant la non commutativité de l'espace-temps pouvait jouer le même rôle que la gravitation. Donc le résultat obtenu à travers ce chapitre est l'existence d'un aspect gravitationnel que donne la géométrie non commutative à l'espace-temps en l'absence de la force de gravité. C'est une façon de rendre la gravitation mieux persuasive.

Chapitre 3

Extension non commutative de l'espace-temps

La géométrie non commutative de l'espace-temps a connu beaucoup d'intérêt chez les physiciens afin d'allier la relativité générale à la physique quantique. Pour cela on a proposé beaucoup de modèles et d'approches pour résoudre les équations d'Einstein dans un espace-temps non commutatif [24, 25].

Dans la référence [26], une nouvelle solution aux équations d'Einstein de la gravitation non commutative a été présentée, c'est une extension de la solution de Schwarzschild déformée. Dans ce chapitre nous allons construire une solution trou noir étendue à symétrie sphérique (exemples : la métrique FRW et la métrique de Bardeen Vaidya) en se basant sur l'approche [27]. À l'aide de la nouvelle métrique FRW "déformée", nous étudierons quelques propriétés physiques, déterminées jusqu'au second ordre en le paramètre de la non commutativité $\Theta^{\mu\nu}$.

3.1 Correction au second ordre de la métrique FRW

3.1.1 Champs de jauge commutatif

Une déformation de la gravitation d'Einstein a été étudiée [26] en utilisant le groupe de de Sitter $SO(4, 1)$ non commutatif à l'aide des mappings de Seiberg-Witten [28, 29, 30] et de la contraction au groupe de Poincaré $ISO(3, 1)$ (Lorentz inhomogène).

Le groupe $SO(4, 1)$ est de dimension 10, ses générateurs infinitésimaux sont tels que $M_{AB} = -M_{BA}$ [31].

Si nous mettons $A = a, 5$ et $B = b, 5, \dots$ ($a, b = 1, 2, 3, 4$) [30], les générateurs M_{AB} peuvent être identifiés par des translations $P_a = M_{a5}$ et la rotation de Lorentz :

$$M_{ab} = -M_{ba} \tag{3.1}$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

et par conséquent, les potentiels de jauge $\omega_\mu^{AB}(x) = -\omega_\mu^{BA}(x)$ peuvent être exprimé par les connexions de spin :

$$\omega_\mu^{ab}(x) = -\omega_\mu^{ba}(x) \quad (3.2)$$

et les tetrades :

$$\omega_\mu^{a5}(x) = \kappa e_\mu^a(x) \quad (3.3)$$

où κ est le paramètre de contraction. A la limite ($\kappa \rightarrow 0$), nous obtenons le groupe $ISO(3, 1)$ (le groupe de Poincaré de la théorie de gravitation dans l'espace-temps commutatif).

Les tenseurs électromagnétiques associés [26] seront donc exprimés en fonction de $\omega_\mu^{AB}(x)$ comme suit :

$$F_{\mu\nu}^{AB} = \partial_\mu \omega_\nu^{AB} - \partial_\nu \omega_\mu^{AB} + (\omega_\mu^{AC} \omega_\nu^{DB} - \omega_\nu^{AC} \omega_\mu^{DB}) \eta_{CD} \quad (3.4)$$

ou encore :

$$F_{\mu\nu}^{a5} \equiv \kappa \Gamma_{\mu\nu}^a = \kappa \left[\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + (\omega_\mu^{ab} e_\nu^c - \omega_\nu^{ab} e_\mu^c) \eta_{cd} \right] \quad (3.5)$$

et

$$F_{\mu\nu}^{ab} \equiv R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + (\omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{db} - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{db}) \eta_{cd} + \kappa (e_\mu^a e_\nu^b - e_\nu^a e_\mu^b) \quad (3.6)$$

où $\eta_{CD} = \text{diag}(1, 1, 1, -1, 1)$ et $\eta_{cd} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$.

La théorie de Poincaré ayant la structure de l'espace $U(4)$ de Riemann-Cartan possède une torsion et une courbure. Donc nous pouvons interpréter les quantités $\Gamma_{\mu\nu}^a$ et $R_{\mu\nu}^{ab}$ définies par $e_\mu^a(x)$ et $\omega_\mu^{ab}(x)$ comme étant le tenseur de torsion et le tenseur de courbure de Riemann, respectivement. Alors une fois que nous posons la torsion nulle ($\Gamma_{\mu\nu}^a = 0$), les connexions de spin et les tetrades ne seront plus indépendants.

3.1.2 Champs de jauge déformé

Prenons maintenant la métrique modifiée FRW définie ainsi :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(r, t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.7)$$

où $x^\mu = (r, \theta, \varphi, t)$, $\mu = (1, 2, 3, 4)$. Le facteur scalaire a est une fonction de r et t . Pour $k = 0$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

où :

$$\begin{aligned} e_\mu^1 &= (a, 0, 0, 0), & e_\mu^2 &= (0, ra, 0, 0) \\ e_\mu^3 &= (0, 0, ra \sin \theta, 0), & e_\mu^0 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} e^\mu_1 &= \left(\frac{1}{a}, 0, 0, 0 \right), & e^\mu_2 &= \left(0, \frac{1}{ra}, 0, 0 \right) \\ e^\mu_3 &= \left(0, 0, \frac{1}{ra \sin \theta}, 0 \right), & e^\mu_0 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

sont les composantes des tétrads et leurs inverses, avec $a = a(r, t)$ et $\mu = (1, 2, 3, 4) = (r, \theta, \varphi, t)$.

Les composantes non nulles de la connexion de spin sont :

$$\begin{aligned} \omega_1^{14} &= -\dot{a}, & \omega_2^{12} &= -\frac{a + ra'}{a}, & \omega_2^{24} &= -r\dot{a} \\ \omega_3^{13} &= -\frac{a + ra'}{a} \sin \theta, & \omega_3^{23} &= -\cos \theta, & \omega_3^{34} &= -r\dot{a} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ et $a' = \frac{da}{dr}$. Les composantes du tenseur de courbure $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ peuvent être obtenues à partir de l'équation (3.7) en utilisant le programme analytique des tenseurs de la relativité générale (GR) dans le logiciel "Maple". Les propriétés :

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = R_{\nu\mu}{}^{ba} = -R_{\nu\mu}{}^{ab} = -R_{\mu\nu}{}^{ba} \quad (3.12)$$

permettent d'avoir dix composantes non nulles :

$$\begin{aligned} R_{13}{}^{13} &= \sin \theta R_{12}{}^{12} \\ &= \frac{\sin \theta}{a^2} [ra^2 \dot{a}^2 - aa' + ra'^2 - raa''] \\ R_{14}{}^{14} &= \ddot{a}, & R_{24}{}^{24} &= r\ddot{a}, & R_{34}{}^{34} &= r\ddot{a} \sin \theta \\ R_{23}{}^{23} &= -\frac{r \sin \theta}{a^2} [2aa' + ra'^2 - ra^2 \dot{a}^2] \\ R_{13}{}^{34} &= -aR_{34}{}^{13} = \frac{r \sin \theta}{a} [\dot{a}a' - a\dot{a}'] \\ R_{12}{}^{24} &= -aR_{24}{}^{12} = \frac{r}{a} [\dot{a}a' - a\dot{a}'] \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'après ces résultats, nous constatons que $R_{\mu\nu}{}^{ab} = -\frac{1}{a} R_{ab}{}^{\mu\nu}$.

3. Extension non commutative de l'espace-temps

Maintenant, nous allons suivre la stratégie décrite dans [26] dans le but de construire une théorie de la gravitation non commutative en effectuant une correction à la métrique FRW jusqu'au second ordre en Θ (paramètre de la non commutativité). L'idée est de développer une théorie de jauge non commutative à partir du groupe de de Sitter $SO(4, 1)$ suivie par une contraction au groupe de Poincaré $ISO(3, 1)$ (Lorentz inhomogène). Le résultat sera donné sous forme des champs de jauge déformés $\hat{e}_\mu^a(x, \Theta)$. Nous supposons alors que la structure de l'espace-temps non commutatif est définie par la condition suivante :

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \quad (3.14)$$

où $\Theta^{\nu\mu} = -\Theta^{\mu\nu}$ (avec $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) sont les paramètres constants qui représente la structure canonique et qui définissent la non commutativité de l'espace-temps.

Pour développer la théorie de jauge non commutative, nous introduisons le produit star défini dans (1.50). Pour cela, soient $\hat{\omega}_\mu^{AB}(x, \Theta)$ les champs de jauge dans le cas non commutatif, tels que :

$$\hat{\omega}_\mu^{AB+}(x, \Theta) = -\hat{\omega}_\mu^{BA}(x, \Theta), \quad \hat{\omega}_\mu^{AB}(x, -\Theta) = -\hat{\omega}_\mu^{BA}(x, \Theta) \quad (3.15)$$

(" + " indique le complexe conjugué). Le développement des champs de jauge en $\Theta_{\mu\nu}$ donne l'expression suivante :

$$\hat{\omega}_\mu^{AB}(x, \Theta) = \omega_\mu^{AB}(x) - i\Theta^{\nu\rho}\omega_{\mu\nu\rho}^{AB}(x) + \Theta^{\nu\rho}\Theta^{\lambda\tau}\omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{AB}(x) + \dots \quad (3.16)$$

Les contraintes (3.15) impliquent les propriétés suivantes :

$$\omega_\mu^{AB}(x) = -\omega_\mu^{BA}(x), \quad (3.17)$$

$$\omega_{\mu\nu\rho}^{AB}(x) = \omega_{\mu\nu\rho}^{BA}(x), \quad (3.18)$$

$$\omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{AB}(x) = -\omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{BA}(x), \dots \quad (3.19)$$

Les Seiberg-Witten maps, permettent d'écrire les corrections non commutatives (3.15) jusqu'à second ordre en $\Theta_{\mu\nu}$ [27] :

$$\omega_{\mu\nu\rho}^{AB}(x) = \frac{1}{4} \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\mu + R_{\rho\mu} \}^{AB} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{AB}(x) = & \frac{1}{32} [-\{ \omega_\lambda, \partial_\tau \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\mu + R_{\rho\mu} \} \}^{AB} + 2 \{ \omega_\lambda, \{ R_{\tau\nu}, R_{\mu\rho} \} \}^{AB} \\ & - \{ \omega_\lambda, \{ \omega_\nu, D_\rho R_{\tau\mu} + \partial_\rho R_{\tau\mu} \} \}^{AB} + 2 [\partial_\nu \omega_\lambda, \partial_\rho (\partial_\tau \omega_\mu + R_{\tau\mu})]^{AB} \\ & - \{ \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\lambda + R_{\rho\lambda} \}, (\partial_\tau \omega_\mu + R_{\tau\mu}) \}^{AB}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\{ \alpha, \beta \}^{AB} = \alpha^{AC} \beta_C^B + \beta^{AC} \alpha_C^B, \quad (3.22)$$

$$[\alpha, \beta]^{AB} = \alpha^{AC} \beta_C^B - \beta^{AC} \alpha_C^B \quad (3.23)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

et

$$D_\mu R_{\rho\sigma}{}^{AB} = \partial_\mu R_{\rho\sigma}{}^{AB} + \left(\omega_\mu{}^{AC} R_{\rho\sigma}{}^{DB} + \omega_\mu{}^{BC} R_{\rho\sigma}{}^{DA} \right) \eta_{CD} \quad (3.24)$$

Pour le cas non commutatif, nous imposons la condition de la torsion nulle $\Gamma_{\mu\nu}^a = 0$ (et pas $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^a = 0$, car à la limite $k \rightarrow 0$, la composante $\hat{\omega}_\mu{}^{55}(x, \Theta)$ va disparaître). Donc à l'aide des expressions (3.17) et (3.18), nous pouvons, à la limite $k \rightarrow 0$, obtenir les tétrades non commutatives (déformées) $\hat{e}_\mu{}^a(x, \Theta)$ jusqu'au second ordre :

$$\hat{e}_\mu{}^a(x, \Theta) = e_\mu{}^a(x) - i\Theta^{\nu\rho} e_{\mu\nu\rho\mu}{}^a(x) + \Theta^{\nu\rho}\Theta^{\lambda\tau} e_{\mu\nu\rho\lambda\tau}{}^a(x) + o(\Theta^3) \quad (3.25)$$

où

$$e_{\mu\nu\rho}{}^a = \frac{1}{4} [\omega_\nu{}^{ac} \partial_\rho e_\mu{}^d + (\partial_\rho \omega_\mu{}^{ac} + R_{\mu\rho}{}^{ac}) e_\nu{}^d] \eta_{cd} \quad (3.26)$$

et

$$\begin{aligned} e_{\mu\nu\rho\lambda\tau}{}^a &= \frac{1}{32} [2 \{R_{\tau\nu}, R_{\mu\rho}\}{}^{ab} e_\lambda{}^c - \omega_\lambda{}^{ab} (D_\rho R_{\tau\mu}{}^{cd} + \partial_\rho R_{\tau\mu}{}^{cd}) e_\nu{}^m \eta_{dm} - \\ &\quad \{ \omega_\nu, (D_\rho R_{\tau\mu} + \partial_\rho R_{\tau\mu}) \}{}^{ab} e_\lambda{}^c - \omega_\lambda{}^{ab} \partial_\tau (\omega_\nu{}^{cd} \partial_\rho e_\mu{}^m + (\partial_\rho \omega_\mu{}^{cd} + R_{\rho\mu}{}^{cd}) e_\nu{}^m) \eta_{dm} \\ &\quad + 2\partial_\nu \omega_\lambda{}^{ab} \partial_\rho \partial_\tau e_\mu{}^c - 2\partial_\rho (\partial_\tau \omega_\mu{}^{ab} + R_{\tau\mu}{}^{ab}) \partial_\nu e_\lambda{}^c - \{ \omega_\nu, (\partial_\rho \omega_\lambda + R_{\rho\lambda}) \}{}^{ab} \partial_\tau e_\mu{}^c \\ &\quad - (\partial_\tau \omega_\mu{}^{ab} + R_{\tau\mu}{}^{ab}) (\omega_\nu{}^{cd} \partial_\rho e_\lambda{}^m + (\partial_\rho \omega_\lambda{}^{cd} + R_{\rho\lambda}{}^{cd}) e_\nu{}^m) \eta_{dm}] \eta_{bc} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nous définissons également le complexe conjugué de ces tétrades ainsi :

$$\hat{e}_\mu{}^{a+}(x, \Theta) = e_\mu{}^a(x) + i\Theta^{\nu\rho} e_{\mu\nu\rho}{}^a(x) + \Theta^{\nu\rho}\Theta^{\lambda\tau} e_{\mu\nu\rho\lambda\tau}{}^a(x) + o(\Theta^3) \quad (3.28)$$

Cette expression permet d'exprimer les composantes de notre métrique non commutative par :

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta) = \frac{1}{2} \eta_{ab} (\hat{e}_\mu{}^a \star \hat{e}_\nu{}^{b+} + \hat{e}_\nu{}^{b+} \star \hat{e}_\mu{}^a) \quad (3.29)$$

ce qui permet de construire la métrique (FRW) déformée en utilisant les résultats précédents.

Pour cela, nous devons calculer d'abord les tétrades $\hat{e}_\mu{}^a(x, \Theta)$ et leurs complexes conjuguées $\hat{e}_\mu{}^{a+}(x, \Theta)$, définies dans les équations (3.21) et (3.24) et les utiliser dans l'équation (3.25) pour déterminer $\hat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta)$.

Pour simplifier les calculs (difficiles et très longs), nous nous limitons à un choix dans le système de coordonnées de l'espace-temps où le paramètre de la non commutativité $\Theta^{\mu\nu}$ est une matrice ayant la forme suivante :

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (3.30)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

Θ est une quantité constante ayant la dimension du carré de la longueur [*Longueur*]². Ce choix du paramètre $\Theta^{\mu\nu}$ (3.30) permet de simplifier les expressions précédentes pour avoir :

$$\begin{aligned} \hat{e}_\mu^{a+}(x, \Theta) &= e_\mu^a(x) + i\Theta [e_{\mu 41}^a(x) - e_{\mu 14}^a(x)] \\ &+ \Theta^2 \left[\begin{array}{c} e_{\mu 1414}^a(x) + e_{\mu 4141}^a(x) \\ -e_{\mu 4114}^a(x) - e_{\mu 1441}^a(x) \end{array} \right] + o(\Theta^3) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où

$$e_{\mu 41}^a(x) - e_{\mu 14}^a(x) = \frac{1}{4} \left[\omega_4^{a\mu} \partial_r e_{\mu\mu} + ra \left(\partial_r \omega_\mu^{a4} + R_{1\mu}^{a4} \right) - a R_{4\mu}^{a1} \right] \quad (3.32)$$

avec

$$e_{\mu 14}^a(x) = \frac{1}{4} a R_{4\mu}^{a1} \quad \text{et} \quad e_{44} = ra, \quad (3.33)$$

puis nous calculons les expressions : $e_{\mu 14}^a$, $e_{\mu 1414}^a$, ..., $R_{1\mu}^{a4}$, $R_{4\mu}^{a1}$, ... et les composantes non nulles des tetrads (e_μ^a , ...) et des connexions de spin (ω_μ^{ab} , ...) (voir *Annexe A*).

Finalement, nous écrivons la métrique $\hat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta)$ jusqu'au second ordre en Θ ainsi :

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta) = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11}(x, \Theta) & 0 & 0 & \hat{g}_{14}(x, \Theta) \\ 0 & \hat{g}_{22}(x, \Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}_{33}(x, \Theta) & 0 \\ \hat{g}_{41}(x, \Theta) & 0 & 0 & \hat{g}_{44}(x, \Theta) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

avec

$$\hat{g}_{11}(x, \Theta) = g_{11}(x) + \Theta^2 \Xi_1 \quad (3.35)$$

$$\hat{g}_{22}(x, \Theta) = g_{22}(x) + \Theta^2 \Xi_2 \quad (3.36)$$

$$\hat{g}_{33}(x, \Theta) = g_{33}(x) + \Theta^2 \Xi_3 \quad (3.37)$$

$$\hat{g}_{44}(x, \Theta) = g_{44}(x) + \Theta^2 \Xi_4 \quad (3.38)$$

$$\hat{g}_{14}(x, \Theta) = -\hat{g}_{41}(x, \Theta) = \Theta^2 \Xi_5 \quad (3.39)$$

où

$$\Xi_1 = \frac{1}{64a^2} \left[\begin{array}{c} 12ra^7 a''' + 6r^2 a^8 \dot{a}'^2 + 46r^2 a^6 a''^2 - 18a^2 \dot{a}^2 + 44a^6 a'^2 + \\ 56r^3 a^4 a'^4 + 21r^2 a^8 \dot{a}^4 - 84ra^5 a'^3 + 6r^2 a^8 \dot{a} a'' + 24a^7 a'' \\ -54r^2 a^7 \dot{a} a' \dot{a}' - 36ra^8 \dot{a} \dot{a}' + 98ra^6 a' a'' - 110r^2 a^5 a'^2 a'' \\ +12r^2 a^6 a' a''' - 55r^2 a^7 \dot{a}^2 a'' - 66ra^7 \dot{a}^2 a' + 62r^2 a^6 \dot{a}^2 a'^2 \end{array} \right] \quad (3.40)$$

$$\Xi_2 = \frac{1}{64a^2} \left[\begin{array}{c} 16a^8 + 6r^4 a^6 (a''^2 - a^2 \dot{a}'^2) + 43r^2 a^7 a'' - 136r^3 a^6 a' a'' + \\ 46r^3 a^8 \dot{a} \dot{a}' - 21r^4 a^8 \dot{a}^4 + 45r^2 a^8 \dot{a}^2 + 8r^4 a^4 a'^4 (1 + raa') \\ +86r^3 a^7 \dot{a}^2 a' - 23r^4 a^6 \dot{a}^2 a'^2 + 47r^4 a^7 \dot{a}^2 a'' + 17r^4 a^5 a'^2 a'' \\ -52ra^7 a' - 92r^2 a^6 a'^2 + 2r^3 a^7 (a''' + ra(a' a''' - \dot{a} \dot{a}'')) \end{array} \right] \quad (3.41)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\Xi_3 = \frac{1}{64a^2} \left[\begin{array}{l} 6r^4a^6a''^2 + 43r^2a^7a'' - 32r^3a^5a'^3 + 14r^4a^8\dot{a}^4 - 18r^4a^4a'^4 \\ + 14r^4a^5a'^2a'' - 15r^2a^8\dot{a}^2 + 50r^2a^6a'^2 - 20r^4a^7\dot{a}^2a'' \\ 16a^8 + 6r^4a^6(\dot{a}^2a'^2 - a^2) + 48r^3a^7\dot{a}^2a' + 54r^3a^8\dot{a}\dot{a}'' \\ + 110ra^7a' - 8r^3a^8\dot{a}\dot{a}' - 2r^3a^7(a'a'''(1+ra) - ra\dot{a}\dot{a}'') \\ + 14r^2a^5(aa'^2 + a^3\dot{a}^4 + r^4a'^2a'') + 6r^4a^6\dot{a}a'^2 \\ + 54r^3a^6a'a'' - 32r^3a^5a'^3 + 48r^3a^7\dot{a}^2a'^2 - \\ - \cos \theta \left(\begin{array}{l} 18r^4a^4a'^4 6ra^6(aa' + r^3a''^2 - r^3a^2\dot{a}'^2) - \\ 20a^7(a - r^4\dot{a}^2a'') - 15r^2a^8\dot{a}^2 - 8r^3a^8\dot{a}\dot{a}' + \\ 27r^2a^7a''' - 2r^3a^6(ra'a''' - ra^2\dot{a}'' - aa''') \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (3.42)$$

$$\Xi_4 = \frac{1}{32a^6} \left[\begin{array}{l} 2ra^7\ddot{a}' + 24r^2a^6\dot{a}'^2 + 6r^2a^2\dot{a}\dot{a}'' + 42r^2a^5\dot{a}\dot{a}'a' \\ + 30r^2a^4\dot{a}^2a'' + 2r^2a^6a'\ddot{a}' + 17r^2a^6\ddot{a}a'' \\ - 18ra^6(\ddot{a}' + ra\dot{a}^2\ddot{a}) - 15r^2a^5\ddot{a}a'^2 - a^7\ddot{a} \end{array} \right] \quad (3.43)$$

$$\Xi_5 = \frac{1}{128a^6} \left[\begin{array}{l} 14r^2a^6\dot{a}a''' + 4ra^8\dot{a}(r\ddot{a}' - 7\ddot{a}) + 7ra^6\dot{a}a'' \\ + 108ra^6a'\dot{a}' - 101r^2a^5a'^2\dot{a}' + 12r^2a^8\ddot{a}\dot{a}' \\ + 16ra^6\dot{a}''(a + ra') - 81r^2a^7\dot{a}^2\dot{a}' + \\ 3ra^7\dot{a}^3 + 70r^2a^6\dot{a}^3a' + 135r^2a^4\dot{a}a'^3 \\ - 116ra^5\dot{a}a'^2 + 13a^7\dot{a}' + 98r^2a^6\dot{a}'a'' - \\ 44r^2a^7\dot{a}a'\ddot{a} - 155r^2a^5\dot{a}\dot{a}'a'' - 11a^6\dot{a}a' \end{array} \right] \quad (3.44)$$

3.2 Cas particulier

Nous considérons une étude de la métrique (FRW) non commutative pour un cas particulier en choisissant le facteur de l'expansion sous une forme exponentielle en fonction du temps seulement :

$$a(t) = t^\beta \quad (3.45)$$

Pour cela, nous écrivons :

$$dS^2 = -dt^2 + \frac{t^\beta}{1 + kr^2} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (3.46)$$

Si nous posons $k = 0$, nous obtenons les expressions des tétrades suivantes :

$$\hat{e}^1_1 = t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 t^{3\beta-2} (17r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 18) \quad (3.47)$$

$$\hat{e}^1_2 = -\frac{i\Theta}{4} r \beta^2 t^{3\beta-2} \quad (3.48)$$

$$\hat{e}^1_4 = -\frac{3}{128} \Theta^2 r \beta^3 t^{4\beta-3} \quad (3.49)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\hat{e}^2_1 = \frac{i\Theta}{4} t^\beta \left(r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 1 \right) \quad (3.50)$$

$$\hat{e}^2_2 = r t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 t^{3\beta-2} \left(17 r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 21 \right) \quad (3.51)$$

$$\hat{e}^3_3 = r \sin \theta t^\beta - \frac{i\Theta}{4} \cos \theta t^\beta - \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 \sin \theta t^{3\beta-2} \left(15 - 14 r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \right) \quad (3.52)$$

$$\hat{e}^4_1 = \frac{7}{32} \Theta^2 r \beta^2 (1 - \beta) t^{3(\beta-1)} \quad (3.53)$$

$$\hat{e}^4_4 = 1 + \frac{\Theta^2}{64} \beta (\beta - 1) t^{2(\beta-1)} \left(18 r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right) \quad (3.54)$$

Les composantes des tétrades inverses \hat{e}^μ_a sont :

$$\hat{e}^1_1 = 2^{14} t^{8-\beta} + 2^7 \beta \Theta^2 t^{4-\beta} \left[3 \left(r \beta t^\beta \right)^2 (121\beta - 48) - 4t^2 (17\beta + 2) \right] \quad (3.55)$$

$$\hat{e}^1_2 = 8i\Theta r^2 \left(t^{2-\beta} - r^2 \beta^2 t^\beta \right) \quad (3.56)$$

$$\hat{e}^1_4 = -224\Theta^2 r \beta^2 (1 - \beta) t^{2\beta-3} \quad (3.57)$$

$$\hat{e}^2_1 = -256i\Theta \beta^2 t^{4+\beta} \quad (3.58)$$

$$\hat{e}^2_2 = 2^{14} t^{6-\beta} + 2^7 \Theta^2 r \beta t^{4+\beta} \left[133 r^2 \beta^3 t^{2\beta} + t^2 (45\beta + 4) - 116\beta - 4 \right] \quad (3.59)$$

$$\hat{e}^3_3 = -2^{14} r^3 \sin \theta \cos^2 \theta t^{8-\beta} + 2^{12} i \Theta r^2 \cos^3 \theta t^{8-\beta} + 2^7 \Theta^2 r \sin \theta t^4 \left[\begin{array}{l} (r \beta \cos \theta)^2 t^\beta (15 - 14 r^2 t^{2(\beta-1)}) - \\ 2t^{-\beta} \left(14 \left(r \beta t^\beta \right)^4 - 15 \left(r \beta \sin \theta t^{\beta+1} \right)^2 + 4t^4 (5 \cos^2 \theta - 4) \right) \end{array} \right] \quad (3.60)$$

$$\hat{e}^4_1 = 2432\Theta^2 r \beta^3 t^{3\beta+1} \quad (3.61)$$

$$\hat{e}^4_2 = \frac{i\Theta}{2} \beta t^{\beta-1} \quad (3.62)$$

$$\hat{e}^4_4 = 2^{10} t^8 + 16 \beta t^{4+2\beta} \Theta^2 \left[4 \left(r \beta t^\beta \right)^2 (19 - 27\beta) + t^2 (59\beta + 2) \right] \quad (3.63)$$

La relation (3.26) permet d'écrire la métrique :

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11} & 0 & 0 & \hat{g}_{14} \\ 0 & \hat{g}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{g}_{33} & 0 \\ \hat{g}_{41} & 0 & 0 & \hat{g}_{44} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

avec :

$$\hat{g}_{11} = t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 t^{2(\beta-2)} \left(21 r^2 \beta^2 t^{4\beta} - 18 \right) \quad (3.65)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\hat{g}_{14} = \hat{g}_{41} = \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 t^{4\beta-3} (28 - 25\beta) \quad (3.66)$$

$$\hat{g}_{22} = r^2 t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} t^{2\beta} \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} (21r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 45) + 4 \right] \quad (3.67)$$

$$\hat{g}_{33} = r^2 t^{2\beta} \sin^2 \theta + \frac{\Theta^2}{64} t^{2\beta} \left[r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} (14r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 15) + 4(5 \cos^2 \theta + 4) \right] \quad (3.68)$$

$$\hat{g}_{44} = -1 + \frac{\Theta^2}{32} \beta (1 - \beta) (18r^2 \beta^3 t^{4(\beta-1)} + t^{2(\beta+1)}) \quad (3.69)$$

Il est clair que l'extension de la m etricque FRW (qui est à l'origine diagonale) donne une m etricque non diagonale ($g_{tr} = -g_{rt} \neq 0$). L'expression (3.15) permet aussi de trouver les connexions de spin non nulles correspondantes :

$$\hat{\omega}_1^{11} = \frac{27}{128} \Theta^2 r \beta^4 t^{4(\beta-1)} \quad (3.70)$$

$$\hat{\omega}_1^{12} = \hat{\omega}_1^{21} = -\frac{i\Theta}{4} \beta^2 t^{2(\beta-1)} \quad (3.71)$$

$$\hat{\omega}_1^{14} = -\beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} \beta^3 [8t^{3(\beta-1)} + 7r^2 \beta^2 t^{5(\beta-1)}] \quad (3.72)$$

$$\hat{\omega}_1^{22} = \frac{15}{128} \Theta^2 r \beta^4 t^{4(\beta-1)} \quad (3.73)$$

$$\hat{\omega}_1^{24} = \hat{\omega}_1^{42} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^3 t^{3(\beta-1)} \quad (3.74)$$

$$\hat{\omega}_1^{41} = \beta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{128} \beta^3 [4t^{3(\beta-1)} - 5r^2 \beta^2 t^{5(\beta-1)}] \quad (3.75)$$

$$\hat{\omega}_1^{44} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 t^{2(\beta-1)} \quad (3.76)$$

$$\hat{\omega}_2^{11} = -\frac{3i\Theta}{4} r \beta^2 t^{2(\beta-1)} \quad (3.77)$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -1 + \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 [33r^2 \beta^2 t^{4(\beta-1)} + 4t^{2(\beta-1)}] \quad (3.78)$$

$$\hat{\omega}_2^{14} = \frac{i\Theta}{2} r^2 \beta^3 t^{3(\beta-1)} \quad (3.79)$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = -1 - \frac{29}{128} \Theta^2 r^2 \beta^4 t^{4(\beta-1)} \quad (3.80)$$

$$\hat{\omega}_2^{22} = -i\Theta r \beta^2 t^{2(\beta-1)} \quad (3.81)$$

$$\hat{\omega}_2^{24} = -r \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{128} r \beta^3 t^{3(\beta-1)} [1 - 14\beta^2 t^{2(\beta-1)}] \quad (3.82)$$

$$\hat{\omega}_2^{41} = \frac{i\Theta}{4} \beta t^{\beta-1} [r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 1] \quad (3.83)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\widehat{\omega}_2^{42} = r\beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{128} r\beta^3 t^{3(\beta-1)} \left[5r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} + 22 \right] \quad (3.84)$$

$$\widehat{\omega}_2^{44} = \frac{i\Theta}{4} r\beta^2 t^{2(\beta-1)} \quad (3.85)$$

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin\theta + \frac{i\Theta}{2} r\beta^2 \cos\theta t^{2(\beta-1)} + \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 \sin\theta t^{2(\beta-1)} \left[r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} + 6 \right] \quad (3.86)$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos\theta - i\Theta r\beta^2 \sin\theta t^{2(\beta-1)} - \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \cos\theta t^{2(\beta-1)} \left[9r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} + 8 \right] \quad (3.87)$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin\theta \quad (3.88)$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos\theta \quad (3.89)$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = -r\beta \sin\theta t^{\beta-1} \quad (3.90)$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = \beta r \sin\theta + \frac{i\Theta}{4} \beta \cos\theta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} r\beta^3 \sin\theta t^{3(\beta-1)} \left[5r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} + 2 \right] \quad (3.91)$$

$$\widehat{\omega}_4^{11} = \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 (\beta-1) t^{2\beta-3} \left[23r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} - 6 \right] \quad (3.92)$$

$$\widehat{\omega}_4^{12} = \frac{i\Theta}{2} r\beta^2 (1-\beta) t^{2\beta-3} \quad (3.93)$$

$$\widehat{\omega}_4^{14} = \frac{3}{32} \Theta^2 r\beta^2 (1-\beta) t^{3\beta-4} \quad (3.94)$$

$$\widehat{\omega}_4^{21} = \frac{i\Theta}{2} r\beta^2 (\beta-1) t^{2\beta-3} \quad (3.95)$$

$$\widehat{\omega}_4^{22} = \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 (\beta-1) t^{2\beta-3} \left[23r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} + 8 \right] \quad (3.96)$$

$$\widehat{\omega}_4^{24} = \frac{i\Theta}{2} \beta (1-\beta) t^{\beta-2} \quad (3.97)$$

$$\widehat{\omega}_4^{44} = \frac{\Theta^2}{32} \beta^2 (\beta-1) t^{2\beta-3} \left[2r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)} - 5 \right] \quad (3.98)$$

3.2.1 Implications cosmologiques

Pour calculer les paramètres cosmologiques associés à la métrique FRW non commutative, nous utilisons, plutôt que la métrique FRW non commutative décrite dans (3.64), la métrique diagonale correspondante. Pour cela soit les transformations de coordonnées suivantes :

$$dt = \eta dt' + \delta r' \quad (3.99)$$

$$dr = \lambda dt' + \delta r' \quad (3.100)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

avec

$$\eta = \frac{\Omega}{-\Omega^2 \widehat{g}_{44} - \widehat{g}_{11} + \Omega (\widehat{g}_{14} + \widehat{g}_{41})}, \quad \delta = -\frac{1}{\Omega} \quad (3.101)$$

où

$$\Omega = \frac{2\widehat{g}_{11} + \widehat{g}_{14} + \widehat{g}_{41}}{2\widehat{g}_{44} + \widehat{g}_{14} + \widehat{g}_{41}} \quad (3.102)$$

Nous obtenons donc cette la métrique diagonale :

$$\widehat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta) = \begin{pmatrix} \widetilde{g}_{11}(x, \Theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{g}_{22}(x, \Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{g}_{33}(x, \Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{g}_{44}(x, \Theta) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

avec

$$\widetilde{g}_{11}(x, \Theta) = \frac{1}{2} \left[\widehat{g}_{44} + \widehat{g}_{11} + \sqrt{\Lambda (\widehat{g}_{44} - \widehat{g}_{11} - 2\widehat{g}_{14})} \right] \quad (3.104)$$

$$\widetilde{g}_{44}(x, \Theta) = \frac{1}{2} \left[\widehat{g}_{44} + \widehat{g}_{11} - \sqrt{\Lambda (\widehat{g}_{44} - \widehat{g}_{11} - 2\widehat{g}_{14})} \right] \quad (3.105)$$

où

$$\Lambda = \widehat{g}_{44} + \widehat{g}_{11} + \widehat{g}_{14} + \widehat{g}_{41} \quad (3.106)$$

A l'aide de cette nouvelle métrique nous pouvons calculer différents paramètres cosmologiques :

Constante de Hubble

Il est clair que dans le cas de l'espace-temps non commutatif, le facteur de l'expansion non commutatif n'est plus en fonction du temps seulement (comme dans le cas commutatif $a = a(t) = t^\beta$). Soit alors le nouveau facteur non commutatif de l'expansion :

$$a_{NCG} = \widehat{a}(r, t) \quad (3.107)$$

et par conséquent, nous aurons deux composantes pour la constante de Hubble ($H_{NCG} = \widehat{H}$) ; une temporelle (\widehat{H}_t) et l'autre radiale (\widehat{H}_r) :

$$\widehat{H}_t = \widehat{H}(r', t') = \frac{1}{\widehat{a}} \frac{\partial \widehat{a}}{\partial t'} = \frac{\eta}{2\Lambda} \left(\dot{\Lambda} - \frac{\Lambda'}{\Omega} \right) \quad (3.108)$$

$$\widehat{H}_r = \widehat{H}_r(r', t') = \frac{1}{\widehat{a}} \frac{\partial \widehat{a}}{\partial r'} = \frac{\dot{\Lambda} + \Lambda'}{2\Lambda} \quad (3.109)$$

(.) et (') représentent la dérivée de Λ par rapport au temps et à l'espace respectivement.

La variation des paramètres de Hubble en fonction du temps est représentée par la Figure (3.1).

3. Extension non commutative de l'espace-temps

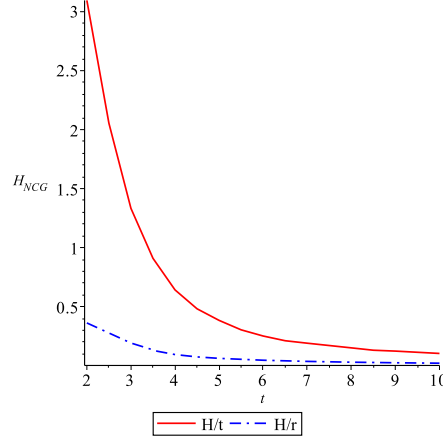


FIGURE 3.1 – Variation de \widehat{H}_t et \widehat{H}_r en fonction du temps.

Paramètre de décelération

De même, nous distinguons deux composantes (\widehat{q}_t , \widehat{q}_r) pour le paramètre de décelération, telles que :

$$\widehat{q}_t = -\frac{1}{\widehat{a}\widehat{H}_t^2} \frac{\partial^2 \widehat{a}}{\partial t'^2} = -\frac{1}{\widehat{H}_t^2} \left[\begin{array}{l} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) \eta^2 + (\Sigma_4 + \Sigma_5) \eta \dot{\eta} \\ -\frac{1}{\Omega} \eta ((\Sigma_6 + \Sigma_7 + \Sigma_8) \eta - (\Sigma_4 + \Sigma_5) \eta') \end{array} \right] \quad (3.110)$$

$$\widehat{q}_r = -\frac{1}{\widehat{a}\widehat{H}_r^2} \frac{\partial^2 \widehat{a}}{\partial r'^2} = -\frac{1}{\widehat{H}_r^2} [\Sigma_1 - 2\Omega\Sigma_2 - \Omega\Sigma_7] \quad (3.111)$$

où

$$\Sigma_1 = \frac{\ddot{\Lambda}}{2\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}^2}{\Lambda^2} \quad (3.112)$$

$$\Sigma_2 = -\frac{1}{4\Omega} \left(2\frac{\dot{\Lambda}'}{\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}\Lambda'}{\Lambda^2} \right) \quad (3.113)$$

$$\Sigma_3 = \frac{\dot{\Omega}\Lambda'}{2\Omega^2\Lambda} \quad (3.114)$$

$$\Sigma_4 = \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda} \quad (3.115)$$

$$\Sigma_5 = -\frac{\Lambda'}{2\Omega\Lambda} \quad (3.116)$$

$$\Sigma_6 = -\Omega\Sigma_2 \quad (3.117)$$

$$\Sigma_7 = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{\Lambda''}{\Lambda} - \frac{\Lambda'^2}{4\Lambda^2} \right) \quad (3.118)$$

$$\Sigma_8 = \frac{\Omega'}{\Omega} \Sigma_5 \quad (3.119)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

La figure 3.2 représente la variation de la décelération du genre temps et du genre espace en fonction du temps pour une valeur fixe du paramètre de la non commutativité Θ .

Nous remarquons que les deux types de décelération (q_t) et (q_L) sont des quantités

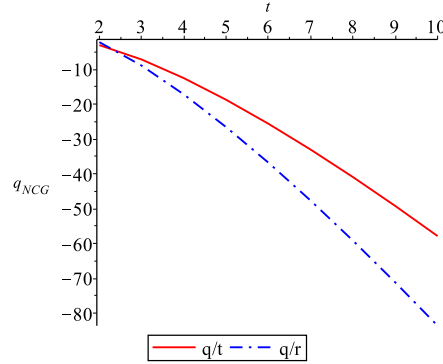


FIGURE 3.2 – Variation du paramètre de la décelération en fonction du temps

négatives (il s'agit d'une accélération) avec décroissance en fonction du temps. De cette représentation graphique, nous déduisons que la géométrie non commutative nous conduit à un espace-temps non homogène, donc cela peut être considéré comme une des raisons qui expliquent l'énigme de l'accélération de l'expansion de l'univers sans avoir besoin d'invoquer le scénario de l'énergie noire. Ces résultats ont été obtenus selon notre choix de la matrice de la non commutativité $\Theta^{\mu\nu}$ (3.30).

D'une autre manière, nous pouvons interpréter les résultats de la non commutativité comme suit :

a) Le premier résultat consiste à écrire des équations de champ (l'équation de Friedmann) dans un espace-temps non commutatif :

$$\frac{\ddot{\hat{a}}}{\hat{a}} = -\frac{1}{6} (\hat{\rho} + 3\hat{P}) \quad (3.120)$$

\hat{P} et $\hat{\rho}$ sont la pression et la densité d'énergie non commutatives correspondantes :

$$\hat{P} = P + \Theta^2 \tilde{P} \quad (3.121)$$

$$\hat{\rho} = \rho + \Theta^2 \tilde{\rho} \quad (3.122)$$

P et ρ étant la pression et la densité d'énergie ordinaires, \tilde{P} et $\tilde{\rho}$, la correction non commutative d'ordre Θ^2 .

Cela veut dire que nous pouvons interpréter toutes les corrections non commutatives comme des corrections causées par le tenseur "moment-énergie-pression" ;

3. Extension non commutative de l'espace-temps

ainsi, la contribution de la non commutativité qui rend la pression et la densité d'énergie inhomogènes nous conduit à un fluide imparfait et à une expansion accélérée de l'univers.

En plus, si nous arrivons à écrire l'expression suivante :

$$\hat{P} = \hat{w}(r, t) \hat{\rho} \quad (3.123)$$

nous pouvons avoir une équation avec le paramètre d'état $\hat{w}(r, t)$ qui justifie le scénario ci-dessus.

b) Le deuxième résultat consiste à écrire des équations de champ dans un espace-temps non commutatif comme suit :

$$\frac{\ddot{\hat{a}}}{\hat{a}} = \frac{2}{6}\eta + \frac{1}{6}(\hat{\rho} + 3\hat{P}) \quad (3.124)$$

où $\eta \propto \Theta^2$.

Les corrections effectuées par la géométrie non commutative peuvent être interprétées comme une constante cosmologique induite menant à une accélération de l'expansion de l'univers. Ainsi, nous disons que la déformation de l'espace-temps conduit à une constante cosmologique variable (elle varie avec le temps et l'espace).

3.3 Correction au second ordre de la métrique de Bardeen-Vaidya (BV)

Dans cette section, nous nous intéressons à une autre solution trous noirs de l'équation d'Einstein à symétrie sphérique :

3.3.1 Espace-temps commutatif de Bardeen-Vaidya (BV)

Soit l'espace de Bardeen-Vadya [33, 34, 35] à quatre dimensions ($D = 4$) :

$$dS^2 = -e^{2\psi(r,t)} A(r, t) dt^2 + 2e^{\psi(r,t)} dr dt + r^2 d\Omega^2 \quad (3.125)$$

avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, et

$$A(r, t) = 1 - 2 \frac{m(r, t)}{r} \quad (3.126)$$

(m représente la masse du trou noir).

Prenons le cas le plus simple où $m(r, t) = t - r$, c-à-d :

$$A(r, t) = 1 - 2 \left(\frac{t - r}{r} \right) \quad \text{et} \quad \psi(r, t) = \ln(r) \quad (3.127)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

La métrique devient alors :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -r(3r-2t) & r & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

Ce qui permet d'écrire la matrice inverse correspondante :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \left(\frac{3r-2t}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

où $(\mu, \nu) = (1, 2, 3, 4) \equiv (t, r, \theta, \phi)$.

Cette métrique possède (dans les conditions générales) un horizon (trapping horizon) [36] si :

$$A(r, t) = 0 \quad (3.130)$$

situé à

$$r = r_H(t) = \frac{2}{3}t \quad (3.131)$$

La quantité $m(r_H(t), t)$ s'appelle la masse de Misner-Sharp de l'horizon.

3.3.2 Espace non commutatif de Bardeen-Vaidya (BV)

Pour construire un espace-temps (BV) non commutatif à partir de la métrique (3.128), nous faisons un choix pour le paramètre de non commutativité $\Theta^{\mu\nu}$ différent de celui utilisé dans (3.30) :

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta \\ 0 & 0 & -\Theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

De la même manière, nous calculons les différents tétrades correspondantes :

$$\hat{e}^1_{1} = \sqrt{r(3r-2t)} + \frac{\Theta^2}{128} \sqrt{r^3(3r-2t)^3} \begin{bmatrix} r^4(702 \cos^2 \theta - 783) + r^3(78 \cos^2 \theta - 87 + 206t) \\ +r^2((26 - 136t) \cos^2 \theta - 29 + 142t - 1956t^2) \\ +rt^2(788t - 56 - 776t \cos^2 \theta) + 28t \sin^2 \theta (r - 4t^3) \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\hat{e}^1_2 = \frac{\Theta^2 r \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (36t - 37r)}{64 \sqrt{r(3r - 2t)}} \quad (3.134)$$

$$\hat{e}^1_3 = -\frac{7}{32} \Theta^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.135)$$

$$\hat{e}^2_1 = -\frac{1}{128} \sqrt{\frac{r}{3r - 2t}} - \frac{\Theta^2}{128} \frac{28t \sin^2 \theta + r(26 \cos^2 \theta - 29)}{\sqrt{r(3r - 2t)}} \quad (3.136)$$

$$\hat{e}^2_2 = \sqrt{\frac{r}{3r - 2t}} - \frac{\Theta^2}{64} \sqrt{\frac{r}{3r - 2t}} \frac{(\sin^2 \theta (36t - 37r) + r \cos^2 \theta) t}{r^2} \quad (3.137)$$

$$\hat{e}^2_3 = \frac{7}{32r} \Theta^2 t \sin \theta \cos \theta \quad (3.138)$$

$$\hat{e}^3_2 = \frac{3}{64} \Theta^2 \sin \theta \cos \theta (t - 3r) \sqrt{3 - \frac{2t}{r}} \quad (3.139)$$

$$\hat{e}^3_3 = 46r - \frac{\Theta^2}{64r} \left[r^2 (15 \cos^2 \theta - 36) - 34t^2 \sin^2 \theta + rt (61 - 43 \cos^2 \theta) \right] \quad (3.140)$$

$$\hat{e}^3_4 = \frac{i\Theta}{2} (r - t) \sin \theta \quad (3.141)$$

$$\hat{e}^4_2 = -\frac{i\Theta}{2} \sin \theta \cos \theta \sqrt{r(3r - 2t)} \quad (3.142)$$

$$\hat{e}^4_3 = -\frac{i\Theta}{4} (2t \cos^2 \theta + r - 2t) \quad (3.143)$$

$$\hat{e}^4_4 = r \sin \theta - \frac{\Theta^2}{64} \frac{\sin \theta}{r} \left[\begin{array}{c} 2r^2 (9 \cos^2 \theta - 20) - 34t^2 \sin^2 \theta \\ + rt (73 - 52 \cos^2 \theta) \end{array} \right] \quad (3.144)$$

Ce qui permet d'écrire la métrique (3.128) pour l'espace-temps non commutatif de Bardeen-Vaidya ainsi :

$$dS^2 = -\hat{g}_{11} dt^2 + \hat{g}_{22} dr^2 + 2\hat{g}_{12} dt dr + 2\hat{g}_{23} dr d\theta + \hat{g}_{33} d\theta^2 + \hat{g}_{44} d\phi^2 \quad (3.145)$$

où

$$\hat{g}_{11} = r(3r - 2t) + \frac{\Theta^2}{64} \frac{1}{r(3r - 2t)} \left[\begin{array}{c} 28t \sin^2 \theta (r - 2rt - 4t^3) - r \cos^2 \theta 776t^3 \\ r \left(\begin{array}{c} 788t^3 - 783r^3 + r^2(2061t - 87) \\ + r(142t - 1956t^2 - 29) \end{array} \right) \\ -2r^2 \cos^2 \theta \left(\begin{array}{c} 13 + 94t^2 - 68t + \\ 351r^2 + 3r(13 - 321t) \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (3.146)$$

3. Extension non commutative de l'espace-temps

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{12} &= \widehat{g}_{21} \\ &= r - \frac{\Theta^2}{128} \frac{1}{r(3r-2t)^2} \left[\begin{array}{c} +r^3(+2061t-783) + 788rt^3 \\ -r^2(364t+1956t^2+222) + 29r \\ +4t\sin^2\theta(36rt-28t^3+7r) \\ 2r\cos^2\theta \left(\begin{array}{c} 351r^3 - r^2(114+963t) + \\ r(13+942t^2+184) - 388t^3 \end{array} \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\widehat{g}_{13} = \widehat{g}_{31} = -\frac{7}{32}\Theta^2 r \sin\theta \cos\theta \quad (3.148)$$

$$\widehat{g}_{22} = \frac{\Theta^2}{64} \frac{1}{r(3r-2t)^3} \left[\begin{array}{c} \sin^2\theta \left(\begin{array}{c} r^3(78+684t) + r^2(142-1560t^2) \\ +rt^2(56+1168t) - 288t^4 \end{array} \right) \\ +r(6rt+18r^2t-24rt^2+8t^3+9r^2) \end{array} \right] \quad (3.149)$$

$$\widehat{g}_{23} = \widehat{g}_{32} = \frac{\Theta^2}{64}(17-9r)\sin\theta\cos\theta \quad (3.150)$$

$$\widehat{g}_{33} = r^2 + \frac{\Theta^2}{32} \left[t\sin^2\theta(42t-59r) - 23r^2\cos^2\theta + r(44r-18t) \right] \quad (3.151)$$

$$\widehat{g}_{44} = r^2\sin^2\theta + \frac{\Theta^2}{32} \left[\begin{array}{c} \cos^4\theta(42t^2-6r^2-36rt) + 42(r^2+t^2) \\ -81rt + \cos^2\theta(117rt-34r^2-84t^2) \end{array} \right] \quad (3.152)$$

Il est clair que cette m etricue n'est pas diagonale et revient à sa forme ordinaire en faisant tendre Θ vers 0.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réussi à construire une m etricue FRW dans la théorie de jauge non commutative de la gravitation jusqu'au second ordre en $\Theta^{\mu\nu}$ (le paramètre de non commutativité). Cette nouvelle m etricue est une extension [26] de l'espace-temps commutatif; $(\widehat{g}_{tr}(t, r))$ n'est pas diagonale contrairement à la m etricue associée à l'univers ordinaire.

L'étude cosmologique de cette nouvelle m etricue, montre qu'à l'aide de la géométrie Seiberg-Witten non commutative, nous pouvons construire un nouveau type de trous noirs dynamiques selon la déformation de l'espace-temps où nous avons obtenu un horizon d' v nement apparent non commutatif variant avec le temps. Cela est consid er e comme la propriété la plus importante pour un espace-temps non commutatif.

Nous avons également montré (selon certains paramètres cosmologiques) que la géométrie non commutative mène à un espace-temps non homogène et provoque une sorte de torsion [37]. La contribution de la densité d'énergie et la pression qui sont devenues elles mêmes non homogènes, donne un fluide imparfait en produisant une expansion accélérée. Ce résultat a été obtenu sans avoir besoin de considérer le scenario de l'énergie noire.

Chapitre 4

Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

L'instabilité contre l'émission des particules fermioniques par les horizons apparents des trous noirs dynamiques (la cosmologie dynamique est plus appropriée au formalisme de Hayward et Kodama [38]) était étudiée en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi via l'effet tunnel fermionique. Cette méthode permet de déterminer la température de Hawking associée. Cette température est différente de celle qui est due naturellement à la thermodynamique des trous noirs [39]. Dans ce chapitre, nous allons calculer la température de Hawking des trous noirs de l'univers FRW étendu (NC) (que nous avons vu dans le chapitre 03, mais en considérant un autre choix pour Θ), en utilisant l'approche de l'effet tunnel fermionique et montrer le rôle important que joue la géométrie non commutative sur l'espace-temps. (Ici, nous considérons tout l'univers FRW comme un trou noir).

4.1 Méthode de Hamilton-Jacobi

L'effet Hawking peut être considéré [43] comme une sorte de transition sous l'effet tunnel à travers les horizons des trous noirs, qui permet de calculer la température de Hawking caractérisant le trou noir associé. L'application de la méthode de l'effet tunnel était d'abord pour la matière condensée en physique et spécifiquement pour les phénomènes exotiques qui impliquent l'analogie des horizons dans le superfluide ^3He [44, 45]. Cette méthode était redéfinie pour d'autres cas plus généraux [46, 47].

L'idée est de considérer une méthode très puissante qui permet de fournir une voie adéquate pour calculer la gravité de surface et la température de Hawking en donnant une famille large de solutions. Pour cela nous considérons la méthode de Hamilton-Jacobi [48, 49]. Cette approche utilise le fait que l'approximation WKB [50] de la probabilité de l'effet tunnel pour la trajectoire interdite (au niveau classique) de l'intérieur à l'extérieur de l'horizon est donnée par définition

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

[51] :

$$\Gamma \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im} S} \quad (4.1)$$

où S est l'action classique de la trajectoire.

La question qui se pose ici concerne le genre de particules que nous devons accepter pour trouver le spectre de la radiation de Hawking du trou noir. En principe toutes les particules du modèle standards sont acceptées. Cependant, la plupart des calculs publiés accomplit seulement le cas des champs scalaires, sauf pour la réf [52] qui donne une étude détaillée de l'émission des particules ayant un spin demi-entier pour les trous noirs stationnaires, la réf [53] pour le cas particulier des trous noirs BTZ, et la réf [54] pour des fermions chargés ayant un spin $\frac{1}{2}$ dans le cas des trous noirs de Kerr-Newman.

4.1.1 Trous noirs de Bardeen-Vaidya (BV)

Pour bien comprendre l'utilisation de la méthode de Hamilton-Jacobi, nous considérons la métrique ordinaire de Bardeen-Vaidya à quatre dimensions (3.126).

$$dS^2 = -e^{2\psi(r,t)} A(r,t) dt^2 + 2e^{\psi(r,t)} dr dt + r^2 d\Omega^2 \quad (4.2)$$

possédant un horizon apparent situé à

$$r_H(t) = \frac{2}{3}t \quad (4.3)$$

auquel nous pouvons associer une gravité de surface géométrique définit dans la théorie de Kodama-Hayward [55, 56] ainsi :

$$\kappa(t) = \frac{A'(r,t)}{2} \Big|_{r_H} = \frac{1}{2r_H(t)} - \frac{m'(r_H,t)}{r_H(t)} \quad (4.4)$$

ce qui indique que l'horizon d'évènement sera de genre piège si :

$$m'(r_H(t), t) < \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

("'" est la dérivée radiale). Cette condition assure la possibilité de la gravité de surface. Dans notre cas, nous avons :

$$\kappa(t) = \frac{3}{2r_H}, \quad (m' = -1) \quad (4.6)$$

4.1.2 Equation de Dirac

Soit l'équation de Dirac définie dans un espace-temps courbé :

$$\left(\gamma^\mu D_\mu + \frac{m}{\hbar} \right) \Psi(t, r, \theta, \phi) = 0 \quad (4.7)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} \omega_\mu{}^{ab} \Sigma_{ab} \quad (4.8)$$

et

$$\Sigma_{ab} = \frac{i}{4} [\gamma_a, \gamma_b]_- \quad (4.9)$$

γ_μ sont les matrices satisfaisant l'algèbre de Clifford :

$$[\gamma_a, \gamma_b]_+ = 2\eta_{ab} \mathbb{I}_{4 \times 4} \quad (4.10)$$

où $\mathbb{I}_{4 \times 4}$ est la matrice identité, $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ et :

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$\gamma_4 = i \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathbb{I}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

σ_i sont les matrices de Pauli telles que :

$$\sigma_i \sigma_j = \mathbb{I}_{2 \times 2} \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.15)$$

Les équations (4.7) et (4.8) donnent ensemble l'équation :

$$\not{\partial} \Psi + \frac{i}{2} (\gamma^\mu \omega_\mu{}^{ab} \Sigma_{ab}) \Psi + \frac{m}{\hbar} \Psi = 0 \quad (4.16)$$

avec $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Nous avons obtenu les matrices γ^μ à partir des tetrads $e^a{}_\mu$:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu &= \gamma_a e^a{}_\mu \\ &= \gamma_1 e^1{}_\mu + \gamma_2 e^2{}_\mu + \gamma_3 e^3{}_\mu + \gamma_4 e^4{}_\mu \end{aligned} \quad (4.17)$$

où

$$\eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu = g_{\mu\nu} \quad (4.18)$$

Nous pouvons donc calculer les différentes composantes des verbeins présentés sous forme matricielle comme suit :

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{r \left(1 - \frac{2}{r}(t-r)\right)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{r}(t-r)\right)}} & \sqrt{\left(1 - \frac{2}{r}(t-r)\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

et leurs composantes inverses :

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sqrt{(3r-2t)r^{-1}}} & \frac{1}{r\sqrt{(3r-2t)r^{-1}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{(3r-2t)r^{-1}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Les matrices γ_{μ} seront alors écrites ainsi :

$$\gamma_t = \frac{1}{r}\gamma_0 \left(1 - \frac{2(t-r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

$$\gamma_r = \left(1 - \frac{2(t-r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (\gamma_1 - \gamma_0) \quad (4.22)$$

$$\gamma_{\theta} = r\gamma_2 \quad (4.23)$$

$$\gamma_{\phi} = r\gamma_3 \sin\theta \quad (4.24)$$

et par conséquent les matrices inverses γ^{μ} seront données par :

$$\gamma^t = -\gamma^0 \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2(t-r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

$$\gamma^r = (\gamma^0 - \gamma^1) \left(1 - \frac{2(t-r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

$$\gamma^{\theta} = \frac{1}{r^2}\gamma^2 \quad (4.27)$$

$$\gamma^{\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3 \quad (4.28)$$

Ce résultat permet de définir encore la matrice γ^5 [51] :

$$\gamma^5 \stackrel{def}{=} i\gamma^t\gamma^r\gamma^{\theta}\gamma^{\phi} = \frac{i}{r^3\sin\theta} (I - \gamma_4\gamma_1)\gamma_2\gamma_3 \quad (4.29)$$

4.1.3 Température de Hawking

Dans le contexte de l'approximation commutative WKB, nous faisons maintenant un choix (ansatz) pour le champ de Dirac $\Psi(t, r, \theta, \phi)$ pour l'employer dans l'équation(4.16) ; pour cela soit le spineur "spin-up" de Dirac suivant :

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \Gamma(t, r, \theta, \phi) \\ 0 \\ \Omega(t, r, \theta, \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{i}{\hbar} I_{\uparrow}(t, r, \theta, \phi) \right] \quad (4.30)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

(Le calcul donne des mêmes résultats en considérant le (spin-down)).

Si nous remplaçons cet ansatz dans l'équation de Dirac (4.16), nous aurons des termes de l'ordre de $O(\hbar^2)$. Du fait que $\hbar \rightarrow 0$, nous n'avons pas besoin de travailler avec cette précision. Il est préférable alors d'utiliser au lieu de (4.16), l'équation suivante :

$$(\hbar \not{\partial} + m) \Psi_{\uparrow}(t, r, \theta, \phi) + O(\hbar) = 0 \quad (4.31)$$

ou encore

$$\left[\begin{array}{l} \left(r \sqrt{1 - \frac{2(t-r)}{r}} \right)^{-1} \begin{pmatrix} i\Gamma \partial_t I_{\uparrow} - \Omega \partial_t I_{\uparrow} \\ 0 \\ -\Gamma \partial_t I_{\uparrow} - i\Omega \partial_t I_{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega \partial_{\theta} I_{\uparrow} \\ 0 \\ -\Gamma \partial_{\theta} I_{\uparrow} \end{pmatrix} \\ + \sqrt{1 - \frac{2(t-r)}{r}} \begin{pmatrix} -\Omega \partial_r I_{\uparrow} \\ 0 \\ -\Gamma \partial_r I_{\uparrow} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\Omega \partial_{\phi} I_{\uparrow} \\ 0 \\ -i\Gamma \partial_{\phi} I_{\uparrow} \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} I_{\uparrow} \right] = 0 \quad (4.32)$$

Un calcul simple mène au système d'équations différentielles suivant :

$$t : \sqrt{\frac{r}{3r-2t}} \left[i\Gamma \left(\frac{1}{r} \partial_t \right) I_{\uparrow} - \Omega \left(\frac{1}{r} \partial_t \right) I_{\uparrow} \right] - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \Omega \partial_r I_{\uparrow} + i\Gamma m = 0 \quad (4.33)$$

$$r : -\frac{\Omega}{r} \left(\partial_{\theta} I_{\uparrow} + \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\phi} I_{\uparrow} \right) = 0 \quad (4.34)$$

$$\theta : -\sqrt{\frac{r}{3r-2t}} \left[\Gamma \left(\frac{1}{r} \partial_t \right) I_{\uparrow} + i\Omega \left(\frac{1}{r} \partial_t \right) I_{\uparrow} \right] - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \Gamma \partial_r I_{\uparrow} + i\Omega m = 0 \quad (4.35)$$

$$\phi : -\frac{\Gamma}{r} \left(\partial_{\theta} I_{\uparrow} + \frac{i}{\sin \theta} \partial_{\phi} I_{\uparrow} \right) = 0 \quad (4.36)$$

Dans ce cas, $\chi = \frac{1}{r} \partial_t$ représente le vecteur de Kodama (il joue le rôle du vecteur de Killing ∂_t pour les trous noirs dynamiques [50] où I_{\uparrow} est donné par :

$$I_{\uparrow} = \int E dt + R(r) + J(\theta, \phi) + C^{te} \quad (4.37)$$

Ce choix de l'action nous permet de réécrire le système (4.33) \rightarrow (4.36) sous

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

la forme suivante :

$$t : E\sqrt{\frac{r}{3r-2t}}(i\Gamma - \Omega) - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}}R'(r)\Omega + i\Gamma m = 0 \quad (4.38)$$

$$r : -\frac{\Omega}{r}\left(J'_\theta(\theta, \phi) + \frac{i}{\sin\theta}J'_\phi(\theta, \phi)\right) = 0 \quad (4.39)$$

$$\theta : -E\sqrt{\frac{r}{3r-2t}}(\Gamma + i\Omega) - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}}R'(r)\Gamma + i\Omega m = 0 \quad (4.40)$$

$$\phi : -\frac{\Gamma}{r}\left(J'_\theta(\theta, \phi) + \frac{i}{\sin\theta}J'_\phi(\theta, \phi)\right) = 0 \quad (4.41)$$

avec

$$R'(r) = \frac{dR}{dr}, \quad J'_\theta(\theta, \phi) = \frac{\partial J(\theta, \phi)}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad J'_\phi(\theta, \phi) = \frac{\partial J(\theta, \phi)}{\partial \phi} \quad (4.42)$$

Les équations (4.39) et (4.41) indiquent que la fonction angulaire de l'action I_\uparrow est une fonction complexe, donc sa contribution est ignorée. Il reste les deux autres équations (4.38) et (4.40). Nous pouvons distinguer alors deux cas :

1- Si $\boxed{\Gamma = i\Omega}$, nous avons :

$$-2E\sqrt{\frac{r}{3r-2t}}\Omega - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}}R'(r)\Omega - \Omega m = 0 \quad (4.43)$$

$$-2iE\sqrt{\frac{r}{3r-2t}}\Omega - \sqrt{\frac{3r-2t}{r}}R'(r)(i\Omega) + i\Omega m = 0 \quad (4.44)$$

cela implique que :

$$R'(r) = -2E\left(\frac{r}{3r-2t}\right) = -\frac{2E}{A(r, t)} \quad (4.45)$$

2- Si $\boxed{\Gamma = -i\Omega}$, nous avons :

$$R'(r) = 0 \quad (4.46)$$

Ces résultats sont obtenus pour les deux cas (massif et sans masse).

L'équation (4.46) correspond aux particules incidentes absorbées à la limite classique avec la probabilité $\mathcal{P}_{incident} = 1$, tandis que le premier cas (4.45), représente le processus de l'émission des particules où la probabilité s'écrit à l'aide de la définition (4.1) ainsi :

$$\Gamma \propto e^{-\frac{4}{\hbar}\text{Im}R(r)} \quad (4.47)$$

$\text{Im}R(r)$ est la partie imaginaire de la fonction radiale,

$$\text{Im}R(r) = -\text{Im}\int \frac{2E}{A(r, t)}dr = -\text{Im}\int \frac{E}{A(r, t)/2}dr \quad (4.48)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

possédant un pôle en ($r = r_H$). Cela permet d'utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale (4.48) :

$$R(r) = 2i\pi \operatorname{Res} R(r, r_H) = 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{E}{A(r_H(t), t)/2} \right) \quad (4.49)$$

Une des propriétés du théorème des résidus permet d'écrire :

$$R(r) = 2i\pi \left(\frac{E}{A'(r_H(t), t)/2} \right) \quad (4.50)$$

ou encore :

$$R(r) = 4i\pi \left(\frac{E}{3r_H(t)} \right) \quad (4.51)$$

ce qui implique que :

$$\operatorname{Im} R(r) = \frac{4\pi}{3r_H(t)} E \quad (4.52)$$

Revenons maintenant à la probabilité (4.47) :

$$\Gamma \propto \exp \left[-\frac{4}{\hbar} \frac{2\pi}{A'(r_H(t), t)/2} E \right] \quad (4.53)$$

Elle donne le résultat suivant :

$$\Gamma \propto \exp \left[-\frac{16\pi}{3\hbar} \frac{1}{r_H(t)} E \right] \quad (4.54)$$

Cette expression représente la probabilité de transition des particules de Dirac via l'effet tunnel, de l'intérieur vers l'extérieur de l'horizon d'évènement. Et par conséquent, si nous utilisons [55] le fait que :

$$\Gamma \sim e^{-2S} \simeq e^{-\beta E} \simeq \exp \left(-\frac{\omega}{T_H} \right) \quad (4.55)$$

telle que β est l'inverse de la température et ω est l'énergie de Misner-Sharp-Hernandez, et l'équation (4.54), nous pouvons calculer la température de Hawking :

$$T_H = \frac{A'(r_H(t), t)}{4\pi} \quad (4.56)$$

ou encore :

$$T_H = \frac{3}{4\pi} r_H(t) = \frac{1}{2\pi} t \quad (4.57)$$

Il est clair que la température de Hawking due aux trous noirs de Bardeen-Vaidya est en croissance avec le temps, ce qui est toujours le cas dans un espace-temps à géométrie commutative.

4.2 Effet Tunnel fermionique dans l'espace-temps non commutatif FRW

Dans cette section, nous allons étudier le comportement de la température de Hawking en faisant une application de la méthode de Hamilton-Jacobi (traitée dans la section précédente), pour un univers isotrope homogène et à symétrie sphérique "FRW non commutatif".

Nous allons considérer un autre choix pour le paramètre $\Theta_{\mu\nu}$ de la non commutativité.

4.2.1 Trous noirs FRW non commutatifs

En effet, commençons par un espace isotrope homogène et à symétrie sphérique commutatif FRW et en suivant les étapes citées dans le chapitre précédent (l'approche de la réf. [26]) pour construire une extension non commutative en supposant que :

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (4.58)$$

La métrique obtenue contient des composantes ayant des expressions très compliquées ce qui nécessite l'utilisation du "Maple 16 tensor package". Des simplifications sont effectuées pour obtenir jusqu'à l'ordre 2 en Θ l'expression suivante :

$$d\hat{s}^2 = \Sigma_1 d\hat{t}^2 + \Sigma_2 d\hat{\Omega}^2 + \Sigma_3 d\hat{t}d\hat{\Omega} + \hat{r}^2 d\hat{r}^2 \quad (4.59)$$

$\hat{\Omega}^2$ représente l'angle solide différentiel, $\hat{t} = \frac{t}{t_0}$ et $\hat{r} = \frac{r}{r_0}$ (t_0 et r_0 sont le temps et le rayon propres respectivement). Les quantités $\Sigma_i (i = \overline{1, 3})$ sont exprimées par :

$$\Sigma_1 = -(1 - H_i^2 \hat{r}^2) + \Theta^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2 H_i^2 \hat{r}^2) - \frac{\Lambda_3}{\tilde{a}_{NCG}} \tilde{r} H_i, \quad (4.60)$$

$$\Sigma_2 = (1 + \Theta^2 \Lambda_2) (1 - \tilde{r} H_{\tilde{r}})^2, \quad (4.61)$$

$$\Sigma_3 = \left[-2\tilde{r} H_i + \Theta^2 (-2\tilde{r} H_i \Lambda_2 + \frac{\Lambda_3}{\tilde{a}_{NCG}}) \right] (1 - \tilde{r} H_{\tilde{r}}), \quad (4.62)$$

où $\tilde{r} = a(t)\hat{r}$ (a est le facteur scalaire associé à la métrique FRW défini dans (3.45)). Les Λ_i sont données par les expressions suivantes :

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{32} \beta(\beta - 1) (\hat{t}^{2(\beta+1)} + 18\hat{r}^2 \beta^3 \hat{t}^{4(\beta-1)}), \quad (4.63)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\beta^2}{64} (-18\hat{t}^{-2} + 21\hat{r}^2 \beta^2 \hat{t}^{4(\beta-1)}), \quad (4.64)$$

$$\Lambda_3 = \frac{\beta^2}{128} \tilde{r} t^{4\beta-1} (28 - 25\beta), \quad (4.65)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

et,

$$H_{\hat{t}} = \beta \hat{t}^{\beta-1} + \Theta^2 \frac{\beta \hat{t}^{\beta-1}}{128} (4 - 90\beta(\beta-1) \hat{t}^{2(\beta-1)} + 84\hat{r}^2 \beta^3 \hat{t}^{4(\beta-1)} - 45\beta^2 \hat{t}^{3(\beta-2)} + 21\hat{r}^2 \hat{t}^{5(\beta-4)}), \quad (4.66)$$

$$H_{\hat{r}} = \frac{21}{64} \Theta^2 \beta^4 \hat{t}^{4(\beta-1)} \hat{r} \quad (4.67)$$

sont respectivement la composante temporelle $H_{\hat{t}}$ et radiale $H_{\hat{r}}$ ($H_{\hat{r}} = O(\Theta^2)$) du paramètre de Hubble dues à l'espace-temps non commutatif.

Propriétés

Le calcul permet aussi de déterminer les tétrades et les connexions de spin. En effet, les composantes non nulles des tétrads sont :

$$\hat{e}^0_0 = -1 + \frac{\Theta^2}{128} \hat{t}^{2\beta-4} \beta^2 (54\beta^2 - 136\beta + 82) \quad (4.68)$$

$$\hat{e}^0_1 = -\frac{i\Theta}{4} \beta(3\beta-2) \hat{t}^{2\beta-2} \quad (4.69)$$

$$\hat{e}^1_0 = -\frac{i\Theta}{4} \beta(\beta-1) \hat{t}^{\beta-2} \quad (4.70)$$

$$\hat{e}^1_1 = \hat{t}^\beta - \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \hat{t}^{3\beta-4} (25\beta^2 + 57\beta + 10) \quad (4.71)$$

$$\hat{e}^2_2 = \tilde{r} \hat{t}^\beta + \frac{i\Theta}{4} \hat{t}^{\beta-2} + \frac{\Theta^2}{64} \tilde{r} \beta^2 (-19\beta^2 + 9\beta - 1) \quad (4.72)$$

$$\hat{e}^3_3 = -\tilde{r} \sin \theta + \hat{t}^\beta + \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \hat{t}^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} \tilde{r} \beta^2 \hat{t}^{3\beta-4} (3\beta^2 - 18\beta + 15) \quad (4.73)$$

et celles de la connexion de spin pour la métrique déformée FRW ont les expressions suivantes :

$$\hat{\omega}_0^{00} = \hat{\omega}_0^{11} = \frac{3}{8} \Theta^2 \beta^2 (\beta-2)(\beta-1) t^{2\beta-5} \quad (4.74)$$

$$\hat{\omega}_1^{00} = \hat{\omega}_1^{11} = -i\Theta \beta^2 (\beta-1) t^{2(\beta-3)} \quad (4.75)$$

$$\hat{\omega}_1^{01} = -\hat{\omega}_1^{10} = -\beta t^{\beta-1} - \frac{1}{64} \Theta^2 \beta^3 t^{3\beta-5} (23\beta^2 - 54\beta + 31) \quad (4.76)$$

$$\hat{\omega}_2^{02} = -r \beta t^{\beta-1} - \frac{1}{16} \beta(\beta-1) (12i\Theta t^{\beta+3} - \Theta^2 r \beta^3 t^{3\beta}) \quad (4.77)$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -1 - \frac{1}{32} \beta^2 t^{2\beta-4} (32i\eta r t (\beta-1) + \eta^2 (5\beta^2 - 8\beta + 3)) \quad (4.78)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

$$\hat{\omega}_2^{20} = r\beta t^{\beta-1} \quad (4.79)$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = 1 \quad (4.80)$$

$$\hat{\omega}_3^{03} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} - \frac{1}{16}\beta(\beta-1) \sin \theta (12i\Theta t^{\beta-2} - \Theta^2 r\beta^3 t^{3\beta-5}) \quad (4.81)$$

$$\hat{\omega}_3^{13} = \sin \theta - \frac{1}{32} \sin \theta \beta^2 (32i\Theta r(\beta-1)t^{2\beta-3} + \Theta^2(5\beta^2 - 8\beta + 3)t^{2\beta-4}) \quad (4.82)$$

$$\hat{\omega}_3^{23} = -\hat{\omega}_3^{32} = \cos \theta \quad (4.83)$$

$$\hat{\omega}_3^{30} = -r\beta \sin \theta t^{\beta-1} \quad (4.84)$$

$$\hat{\omega}_3^{31} = -\sin \theta \quad (4.85)$$

En plus, le paramètre de l'expansion \hat{a}_{NCG} prend la forme suivante :

$$\hat{a}_{NCG} = \hat{t}^\beta \left[1 + \Theta^2 \frac{\beta^2}{128} \hat{t}^{2(\beta-1)} (-45 + 21\beta^2 \hat{r}^2 \hat{t}^{2(\beta-1)}) \right] \quad (4.86)$$

Il faut noter que la symétrie sphérique approximative de $d\hat{s}^2$ (jusqu'à l'ordre de $o(\Theta^2)$) revient à établir des contraintes plus strictes pour le paramètre de non commutativité (NCG) Θ . Il convient de mentionner que les corrections NCG déduites dans (4.59) n'ont pas d'effet sur le but de la non commutativité pour réduire les singularités ultraviolettes (cut-off) à l'échelle de Planck. De plus, l'approche utilisée dans réf [26] est valable non seulement pour les trous noirs ayant des métriques statiques, mais c'est un formalisme général. En fait, nous pouvons adopter la forme de n'importe quelle métrique dans la géométrie commutative à la géométrie non-commutative (voir réf [26] et [57]), indépendamment du choix du paramètre de l'expansion $\hat{a}(t)$. La seule exigence est que nous devons assurer est la convergence de l'expansion perturbative par rapport à Θ .

Horizons apparents

Contrairement à l'univers FRW ordinaire (3.46), nous pouvons facilement montrer que la métrique (4.59) possède trois horizons apparents (racines physiques réelles) (réf [38] and [58]) situés à \tilde{r}_{H_1} , \tilde{r}_{H_2} et \tilde{r}_{H_3} pour

$$\Sigma_1 = 0 \quad (4.87)$$

tels que :

$$\tilde{r}_{H_1} = \frac{\hat{t}}{|\beta|} + \Theta^2 \frac{\hat{t}^2}{512\beta^4} (\frac{\delta_2}{\delta_3} - 4\delta_1), \quad (\forall \beta \neq \frac{4}{3}) \quad (4.88)$$

$$\tilde{r}_{H_2} = \frac{8\sqrt{2}\beta}{\Theta^2 \hat{t} |\delta_3|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \Theta^2 \frac{\hat{t}^2}{256\beta^2} (\delta_2 + \frac{\delta_3 \hat{t}^2}{\beta^2}) \right], \quad (4.89)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

et

$$\tilde{r}_{H_3} = \frac{3}{4}\hat{t} \left[1 + \frac{1}{2}\Theta^2 \left(\frac{\delta_1}{180} - \frac{9}{8}\delta_1\hat{t}^2 \right) \right] \quad \left(\beta = \frac{4}{3} \right) \quad (4.90)$$

où

$$\delta_1 = -4\beta(\beta - 1)\hat{t}^{2(\beta+1)} \quad (4.91)$$

$$\delta_2 = -35\beta^3\hat{t}^{2(\beta-2)}(\beta^2 + 4\beta - 5 - 36\beta^4\hat{t}^{-4} - \beta^3(28 - 25\beta)\hat{t}^{2(\beta-1)}) \quad (4.92)$$

et

$$\delta_3 = 42\beta^5(3\beta - 4)\hat{t}^{2(\beta-3)} \quad (4.93)$$

Les δ sont en fonction de \tilde{r} , \hat{t} et θ .

Ici, \tilde{r}_{H_2} est une fonction pûrement non commutative, tandisque \tilde{r}_{H_1} et \tilde{r}_{H_3} reviennent au cas ordinaire pour la m etricque FRW commutatif ($\tilde{r}_H = \frac{\hat{t}}{|\beta|}$) pour $\Theta \rightarrow 0$. Cependant si $\Theta \rightarrow 0$, $\tilde{r}_{H_2} \rightarrow \infty$, cela implique que la singularité est annulée et par conséquent, l'horizon pûrement non commutatif disparaît.

La structure des trois horizons apparents est résumée dans le tableau 4.1, où A, B, C, D, F et G sont des fonctions réelles dépendant de β et \hat{t} :

β	\tilde{r}_{H_1}	\tilde{r}_{H_2}	\tilde{r}_{H_3}
$\beta < 0, \beta > \frac{4}{3}$	$A + B\Theta^2$	singularité cachée	-
$0 < \beta < \frac{4}{3}$	$A + B\Theta^2$	$\frac{C}{\Theta^2} + D + E\Theta^2$	-
$\beta = \frac{4}{3}$	-	-	$F + G\Theta^2$

TABLE 4.1 – Tableau de discussion

En respectant l'existence du paramètre de (NCG) Θ , la théorie des perturbations nous impose les conditions suivantes :

$$B\Theta^2 < A, \quad (4.94)$$

$$E\Theta^2 < D, \quad (4.95)$$

$$G\Theta^2 < F \quad (4.96)$$

4.2.2 Température de Hawking

En utilisant l'approximation semi-classique (WKB) [50, 58] et l'approche de l'effet tunnel des particules, la probabilité de l'emission peut être li e à la partie imaginaire de l'action du système. Dans l'approximation de l'emission des

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

ondes partielles (qui seront supprimées par \hbar), les particules peuvent être considérées sans masse en se déplaçant le long d'une géodésique nulle radiale. La partie imaginaire est produite par des particules qui traversent une barrière (la région classiquement interdite). Dans notre travail, nous supposons que le processus de l'effet tunnel est instantané et nous ne considérons pas la rétro-réaction sinon le spectre sera dévié du spectre thermique.

Receemment [47, 48], il a été montré que la température due à la radiation de Hawking et reliée à l'horizon apparent (cas du modèle FRW), peut être obtenue en utilisant l'approche de l'effet tunnel où l'énergie des particules à travers les horizons apparents est définie à l'aide du vecteur divergent de Kodama [41, 44] (nous rappelons que les horizons apparents sont des propriétés non invariantes de l'espace-temps et sont différents des horizons d'événement). L'observateur de Kodama (à symétrie sphérique) se situe à l'intérieur de l'horizon apparent et observe un spectre thermique ayant une température due à l'effet tunnel fermionique de l'extérieur à l'intérieur de l'horizon [38, 58]. La raison qui nous oblige à utiliser le vecteur de Kodama pour un espace-temps dépendant du temps (plutôt que le vecteur de Killing utilisé pour le cas statique), est qu'il n'existe pas un vecteur de Killing que nous pouvons utiliser pour définir une coordonnée temporelle ou pour calculer une grandeur (accélération, gravité de surface...). Le vecteur de Kodama est de genre temps (time-like), nul ou de genre espace (space-like) pour $\tilde{r} < \tilde{r}_A$, $\tilde{r} = \tilde{r}_A$ and $\tilde{r} > \tilde{r}_A$ respectivement (\tilde{r}_A est l'horizon apparent).

En effet, soit le vecteur de Kodama K dans un plan à deux dimensions (radiale-temporelle). L'énergie "Misner-Sharp-Hernandez" ω associée est donnée par :

$$\omega = K^0 \partial_{\hat{t}} I \quad (4.97)$$

K^0 est la composante temporelle du vecteur de Kodama K et I représente l'action classique telle que :

$$I = I(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \quad (4.98)$$

$(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi)$ sont les coordonnées sphériques telles que :

$$I = - \int \frac{\omega}{K^0} d\hat{t} + R(\tilde{r}) + P(\theta, \phi), \quad (4.99)$$

(R et P sont en fonction de \tilde{r} et (θ, φ) respectivement).

Considérons maintenant l'ansatz $\hat{\Psi}$ (un spineur sans masse non commutatif de Dirac) suivant :

$$\hat{\Psi} = U \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \phi) \right] \quad (4.100)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

où U est l'amplitude du spineur (nous pouvons choisir un spin-up ou un spin-down) :

$$U = \begin{pmatrix} A(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \\ 0 \\ B(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

Comme nous avons vu dans la section précédente, la dérivation de l'action dans l'équation de Dirac la plus importante est celle de la partie radiale. Pour être plus explicite, nous considérons l'équation de Dirac dans le contexte de l'approximation (WKB) :

$$\not{\partial}U + \frac{i}{\hbar}U \overleftarrow{\not{\partial}}I + \hat{\omega}U = 0. \quad (4.102)$$

Dans un espace non commutatif, l'équation de Dirac devient :

$$\hat{\not{\partial}}U + \frac{i}{\hbar}U \overleftarrow{\hat{\not{\partial}}}I + \hat{\omega} \star U = 0 \quad (4.103)$$

où

$$U \overleftarrow{\not{\partial}}I = \gamma^\mu U \partial_\mu I, \quad (4.104)$$

$$U \overleftarrow{\hat{\not{\partial}}}I = \hat{\gamma}^\mu U \partial_\mu I \quad (4.105)$$

et

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}^\mu \star \hat{\omega}_\mu = \hat{\gamma}^\mu \star \Sigma_{ab} \star \hat{\omega}_\mu^{ab} \quad (4.106)$$

\star est le produit de Moyal-Weyl, et

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (4.107)$$

$$\hat{\not{\partial}} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu, \quad (4.108)$$

$$\Sigma_{ab} = \Sigma_{(ab)} + \Sigma_{[ab]}, \quad (4.109)$$

avec

$$\Sigma_{[ab]} = \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b], \quad (4.110)$$

$$\Sigma_{(ab)} = \eta_{ab} I_{4 \times 4}, \quad (4.111)$$

η_{ab} ($a, b = \overline{1,4}$) est la métrique de Minkowski avec la signature $(-, +, +, +)$ et $I_{4 \times 4}$ représente la matrice identité.

Ici $\hat{\omega}_\mu^{ab}$ représentent les connexions de spin non commutatives; elles ne sont pas forcément totalement antisymétriques ou réelles (eqs. (4.74)-(4.85)), (pour plus de détails voir les refs. [51, 59]). En plus, la validité de l'approximation(WKB) dans la géométrie non commutative exige d'effectuer l'approximation en premier lieu puis transformer l'espace-temps ordinaire en un espace-temps non commutatif; sinon, le produit star de Moyal-Weyl va générer des termes d'ordre supérieur

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

à \hbar^{-1} (expansion perturbative).

Donc, à la limite semi-classique, nous négligeons les termes de l'ordre de $o(\hbar)$ [50]; dans ce cas l'équation de Dirac devient,

$$(i\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu I) U = 0, \quad (4.112)$$

où

$$\hat{\gamma}^\mu = \hat{e}^\mu_a \gamma^a, \quad (4.113)$$

Les matrices gamma de Dirac $\gamma^a (a = \overline{1,3})$ et celles de Pauli sont données dans la représentation chirale dans la section précédente (eqs. (4.11)-(4.14)). Désormais, nous posons : $x^0 \equiv \hat{t}$, $x^1 \equiv \hat{r}$, $x^2 \equiv \theta$ et $x^3 \equiv \varphi$. Les quantités \hat{e}^μ_a sont les composantes inverses des tetrads non commutatives \hat{e}^μ_ν données par les expressions (4.68)-(4.73), telles que :

$$\hat{e}^\mu_a * \hat{e}^b_\mu = \delta^b_a, \quad (4.114)$$

et

$$\hat{e}^\mu_a * \hat{e}^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad (4.115)$$

et par conséquent, la métrique inverse non commutative FRW $\hat{g}^{\mu\nu}$ sera définie par :

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\hat{e}^\mu_a * \hat{e}^{\nu a} + \hat{e}^{\nu a} * \hat{e}^\mu_a \right), \quad (4.116)$$

Pour simplifier le calcul qui vient par la suite, nous utilisons la forme vectorielle pour les tetrads [26, 50] :

$$\hat{e}^\mu_0(\alpha, \lambda, 0, 0), \quad \hat{e}^\mu_1(0, \varsigma, 0, 0), \quad \hat{e}^\mu_2(0, 0, \delta, 0), \quad \hat{e}^\mu_3(0, 0, 0, \chi), \quad (4.117)$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma_2}{\Delta}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\Sigma_3^2}{\Sigma_2 \Delta}}, \quad (4.118)$$

$$\varsigma = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\Sigma_1}{\Delta}}, \quad \Delta = \frac{\Sigma_3^2}{4} - \Sigma_1 \Sigma_2. \quad (4.119)$$

δ et χ sont en fonction de \hat{r} , \hat{t} et θ , leurs expressions sont sans aucune importance dans le calcul de la température non commutative de Hawking comme nous avons vu en calculant les horizons apparents non commutatifs associés.

En utilisant le spineur non commutatif (4.100) et en adoptant le choix de l'action (4.99), nous pouvons écrire :

$$\left[\begin{array}{l} i(\alpha, \lambda, 0, 0) \left(\begin{array}{cc} i\mathbb{I}_{2x2} & 0 \\ 0 & -i\mathbb{I}_{2x2} \end{array} \right) + i(0, \varsigma, 0, 0) \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{array} \right) \\ + i(0, 0, \delta, 0) \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{array} \right) + i(0, 0, 0, \chi) \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right] (\partial_\mu I) \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.120)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

où $A = A(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi)$ et $B = B(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi)$.

il vient alors :

$$iA \left(-\frac{\omega\alpha}{K^0} + \lambda\partial_{\tilde{r}}I \right) + B\varsigma\partial_{\tilde{r}}I = 0, \quad (4.121)$$

$$B(\delta\partial_{\theta}P(\theta, \varphi) + i\chi\partial_{\varphi}P(\theta, \varphi)) = 0, \quad (4.122)$$

$$A\varsigma\partial_{\tilde{r}}I - iB \left(-\frac{\omega\alpha}{K^0} + \lambda\partial_{\tilde{r}}I \right) = 0, \quad (4.123)$$

$$A(\delta\partial_{\theta}P(\theta, \varphi) + i\chi\partial_{\varphi}P(\theta, \varphi)) = 0. \quad (4.124)$$

Comme nous avons vu dans la section précédente, $P(\theta, \varphi)$ ne peut être qu'une fonction complexe ; elle correspond aux particules incidentes absorbées entièrement c-à-d avec une probabilité $\mathcal{P}_{incident} = 1$. Cela implique qu'il y aura une contribution de la partie imaginaire de l'action classique.

Par contre, les équations (4.121) et (4.123) donnent des solutions non triviales pour A et B si et seulement si le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} i \left(-\frac{\omega\alpha}{K^0} + \lambda\partial_{\tilde{r}}I \right) & \varsigma\partial_{\tilde{r}}I \\ \varsigma\partial_{\tilde{r}}I & i \left(\frac{\omega\alpha}{K^0} - \lambda\partial_{\tilde{r}}I \right) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.125)$$

est nul. Donc il faut que la condition :

$$R_{in} = \partial_{\tilde{r}}I = \frac{\omega\alpha(\lambda \pm \varsigma)}{K^0(\lambda^2 - \varsigma^2)} \quad (4.126)$$

soit vérifiée. Le signe \pm correspond aux particules incidentes (+) et sortantes (-), K^0 est le vecteur de Kodama défini dans (4.97). Nous avons dans notre cas où nous avons considéré une symétrie sphérique due à l'espace-temps non commutatif, les composantes du vecteur de Kodama qui peuvent être exprimées ainsi :

$$K^a = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, 0, 0, 0 \right) \quad (4.127)$$

Maintenant, nous nous intéressons au processus de l'émission des particules (particules sortantes) où la probabilité est donnée par (4.47) :

$$\Gamma \propto e^{-\frac{4}{\hbar} \text{Im } R} \quad (4.128)$$

Alors, d'après les equations (4.121) et (4.123), nous pouvons écrire :

$$\text{Im } R = \text{Im} \int (\partial_{\tilde{r}}I) d\tilde{r} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (4.129)$$

$\text{Im } R$ peut être déterminé en utilisant le théorème des résidus (voir *Annexe B*) où le pôle se situe à l'horizon apparent non commutatif. D'après les expressions (4.88), (4.89) et (4.90), nous pouvons distinguer 3 cas :

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

1. Si $\beta < 0$, nous avons une contribution de l'horizon apparent non commutatif \tilde{r}_{H_1} (\tilde{r}_{H_2} et \tilde{r}_{H_3} sont des singularités cachées), alors :

$$ImR_+ = \frac{\pi\omega}{K^0} \left. \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}}\lambda} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_1}}, \quad (4.130)$$

2. Si $0 < \beta < \frac{4}{3}$, deux horizons contribuent. Il s'agit de l'espace compris entre \tilde{r}_{H_1} et \tilde{r}_{H_2} :

$$ImR_+ = \frac{\pi\omega}{K^0} \left[\left. \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}}\lambda} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_1}} + \left. \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}}\lambda} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_2}} \right], \quad (4.131)$$

3. Si $\beta = \frac{4}{3}$, nous avons une contribution de l'horizon apparent non commutatif \tilde{r}_{H_3} :

$$ImR_+ = \frac{\pi\omega}{K^0} \left. \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}}\lambda} \right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_1}}, \quad (4.132)$$

avec $\lambda = \varsigma|_{r=r_{H_{1,2}}}$.

Finalement, avec l'utilisation de l'approximation WKB, la probabilité Γ déterminée lors de l'effet tunnel fermionique permet de déterminer la température de Hawking :

$$\Gamma = \frac{P_{in}}{P_{out}} = \frac{\exp[-2(ImR_+ + ImP(\theta, \varphi))]}{\exp[-2(ImR_- + ImP(\theta, \varphi))]} \quad (4.133)$$

où

$$P_{in} = e^{-2(ImR_{in} + ImP(\theta, \varphi))} \quad (4.134)$$

$$P_{out} = e^{-2(ImR_{out} + ImP(\theta, \varphi))} \quad (4.135)$$

Il faut noter que dans le cas où ($0 < \beta < \frac{4}{3}$) (existence de deux horizons intérieur \tilde{r}_{H_1} et extérieur \tilde{r}_{H_2}), la probabilité Γ résultante est le produit des probabilités Γ_1 et Γ_2 calculées à \tilde{r}_{H_1} et \tilde{r}_{H_2} respectivement :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \quad (4.136)$$

Et en comparant avec la forme thermique de la probabilité (4.55), nous pouvons à la fin en déduire la température de Hawking T_H pour chacun des cas précédents. La température non commutative de Hawking sera suivant le choix de la forme du facteur d'échelle ($\hat{a}(t) = \hat{t}^\beta$) (paramètre de l'expansion) :

$$\tilde{T}_{H_i} = \hat{a}(t)T_{H_i} \quad (i = \overline{1,3}) \quad (4.137)$$

qui est proportionnelle à l'inverse de l'horizon :

$$\tilde{T}_H \propto \frac{1}{\tilde{r}_{H_1}}, \frac{1}{\tilde{r}_{H_2}} \quad (4.138)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

pour les cas où $\beta < 0$, $\beta > \frac{4}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, (\tilde{T}_H dépend explicitement de β), mais pour le cas où $0 < \beta < \frac{4}{3}$, nous avons :

$$\tilde{T}_H \propto \frac{1}{\omega_1 \tilde{r}_{H_1} + \omega_2 \tilde{r}_{H_2}} \quad (4.139)$$

ω_i est l'énergie de Misner-Sharp-Hernandez.

La température de hawking \tilde{T}_H varie en fonction du temps selon des valeurs fixées de Θ et β (voir les figures : de 4.1 jusqu'à 4.6) :

La figure 4.1 montre la variation de \tilde{T}_H en fonction de \hat{t} pour différents cas de Θ et β :

- pour $\Theta = 0.1$ et $\beta = -2$, la variation de \tilde{T}_H est présentée par la ligne continue rouge.
- pour $\Theta = 0$ et $\beta = -3$, la variation de \tilde{T}_H est présentée par la ligne pointillée bleu.

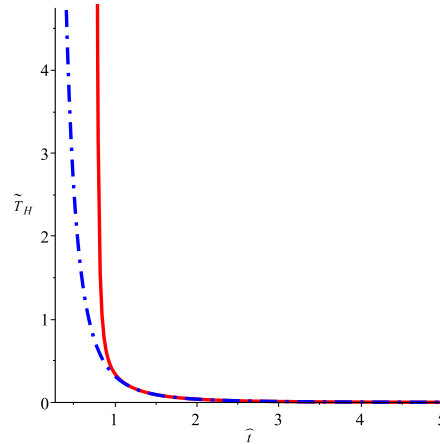


FIGURE 4.1 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} : ligne continue rouge ($\beta = -2$ et $\Theta = 0.1$), et ligne pointillée bleu ($\Theta = 0$ et $\beta = -3$)

Il est clair que \tilde{T}_{H_1} décroît en augmentant le temps pour toute valeur de $\beta < 0$. Cela correspond dans le cas commutatif à une contraction accélérée de l'univers. La raison est que si nous négligeons les termes en Θ^2 , le comportement de l'horizon \tilde{H}_1 est similaire à celui de $\frac{1}{|\dot{H}_t|}$ ($\hat{H}_t \sim \hat{H}$ est le paramètre de Hubble) ; donc :

$$\tilde{T}_{H_1} \sim \hat{t}^{1-\beta} + \eta^2 D'(\hat{t}, \beta) \quad (4.140)$$

pour

$$\tilde{r}_{H_1} \sim \hat{t} + \Theta^2 B'(\hat{t}, \beta) \quad (4.141)$$

$$\tilde{r}_{H_1} \sim \hat{t}^{\beta-1} + \Theta^2 C'(\hat{t}, \beta) \quad (4.142)$$

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

Ici $B'(\hat{t}, \beta)$, $C'(\hat{t}, \beta)$ et $D'(\hat{t}, \beta)$ sont des fonctions régulières de \hat{t} et β .

La figure montre 4.2 le comportement de la température de Hawking \tilde{T}_H en faisant varier le temps pour les valeurs où $\beta > 0$.

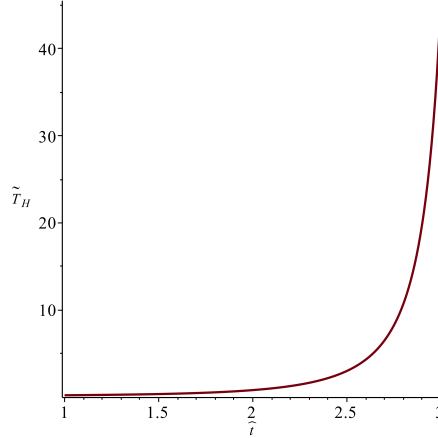


FIGURE 4.2 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour $\beta = 3$ et $\Theta = 0.1$

Nous trouvons que pour $\beta = 3$, la température de Hawking augmente (NCG) avec le temps ce qui correspond à une expansion accélérée de l'univers dans le cas classique. Comme dans le cas de la figure 4.1, nous expliquons ce comportement de la température par le fait que :

$$\tilde{T}_H \propto \frac{\hat{t}^{\beta-1} + \Theta^2 F'(\beta, \hat{t})}{1 - \Theta^2 G'(\beta, \hat{t})} \quad (4.143)$$

où F' and G' sont des fonctions positives en β et \hat{t} , c-à-d pour $\beta > 0$ (ici $\beta = 3$). Si \hat{t} augmente, le numérateur décroît et par conséquent \tilde{T}_H augmente.

Notons aussi l'existence d'une droite asymptotique verticale à une certaine valeur ($\hat{t}_0 \simeq 3.274$) à cause de la disparition du dénominateur ($1 - \Theta^2 G'(\beta, \hat{t}) = 0$) donc $\tilde{T}_H \rightarrow \infty$. Ce point représente la limite au delà de laquelle l'applicabilité de l'expansion perturbative (APE) est interdite (en respectant le paramètre de l'expansion Θ).

Si nous prenons des valeurs de β et \hat{t} de telle sorte que $\Theta^2 G'(\beta, \hat{t}) < 1$, il n'y aura pas d'asymptote et $\tilde{T}_H \rightarrow \infty$ si $\hat{t} \rightarrow \infty$, et cela correspond bien au cas commutatif.

Et de la même manière, nous expliquons le comportement des figures 4.3 et 4.4 :

- La figure 4.3 est conçue pour ($\beta = 0.5$) et correspond à une décélération de l'expansion de l'univers (même cas que Figure 4.1).

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

— La figure 4.4 est conçue pour $((\beta = 1.2, \hat{t}_0 \simeq 5.01))$ et correspond à une accélération de l'expansion de l'univers (même cas que Figure 4.2).

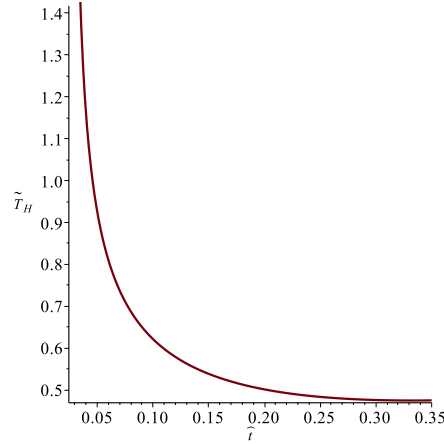


FIGURE 4.3 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour $\Theta = 0.1$ et $\beta = 0.5$

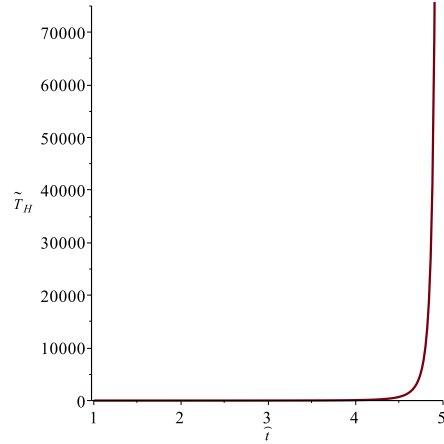


FIGURE 4.4 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour $\beta = 1.2$ et $\Theta = 0.1$

Pour $\beta = \frac{4}{3}$, la figure 4.5 montre la variation de la température de Hawking (NCG) \tilde{T}_H à travers l'horizon apparent \tilde{r}_{H_3} . Nous constatons que pour les deux cas ($\Theta = 0$) montré par une ligne pointillée bleu et ($\Theta = 0.1$) montré par une ligne continue rouge, \tilde{T}_H augmente avec le temps. Cela correspond dans le cas ordinaire à une accélération de l'expansion de l'univers.

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

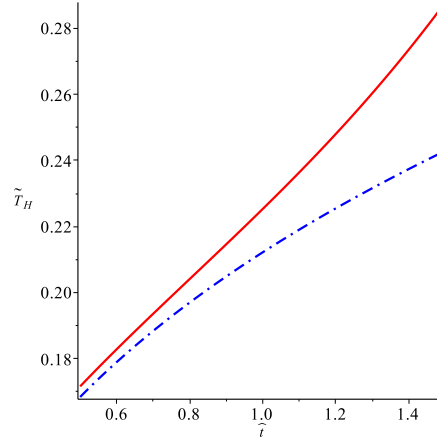


FIGURE 4.5 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour $\beta = \frac{4}{3}$ (ligne continue rouge pour $\Theta = 0.1$) et (ligne pointillée bleu pour $\Theta = 0$)

Dans la figure 4.6, nous observons bien l'effet de la non commutativité (l'effet de Θ) sur le comportement de la température de Hawking \tilde{T}_H . Pour $\Theta = 0.1$, nous avons une asymptote au point $\hat{t} = \hat{t}_0 \simeq 1.4$ indiquant la limite de l'APE (en respectant le facteur de l'expansion Θ). Cependant, pour $\Theta^{\mu\nu} = 0$ (dans le cas classique), il n'y a pas d'asymptote (processus purement non commutatif).

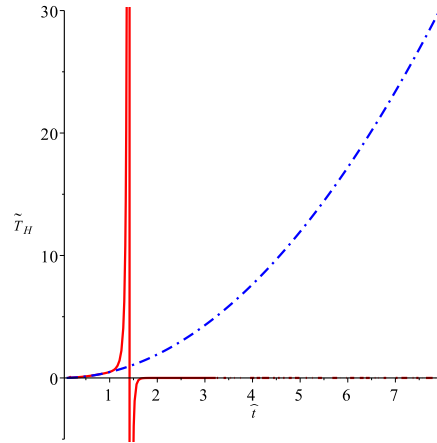


FIGURE 4.6 – Température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour $\beta = 3$ et $\hat{t}_0 = 1.4$ (ligne continue rouge pour $\Theta = 0.1$) et (ligne pointillée bleu pour $\Theta = 0$)

Pour déterminer l'intervalle en β et \hat{t} (limite de surface) permise à l'applicabilité de l'APE, soient les figures 4.7 et 4.8 (graphes en 3D) :

- La validité de l'APE est pour $\hat{t} \in [2, 3]$ et $\beta \in [2, 3]$.
- La limite de l'APE est pour $\hat{t} \in [1, 2.5]$ et $\beta \in [1.5, 2]$.

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

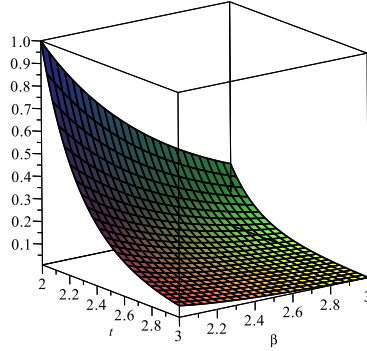


FIGURE 4.7 – Limite de surface à 3D (validation de l’APE), Θ^2 en fonction de \hat{t} and β , $\hat{t} \in [2, 3]$ et $\beta \in [2, 3]$)

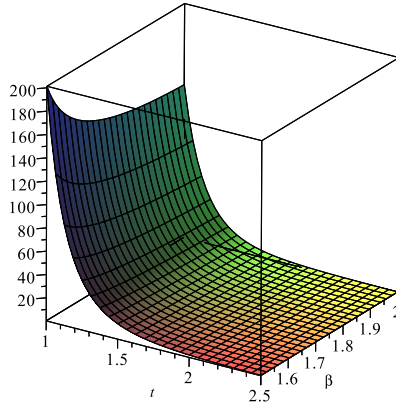


FIGURE 4.8 – Limite de surface à 3D (non validation de l’APE), Θ^2 en fonction de \hat{t} and β , $\hat{t} \in [1, 2.5]$ et $\beta \in [1.5, 2]$)

Alors, lorsque l’APE est possible, il y a toujours un \hat{t} critique ($\hat{t} = \hat{t}^*$) pour une valeur de β donnée. Idem pour la figure 4.9 montrant la limite de surface mais pour $\Theta = 0.1$: $\hat{t} \in [1, 10]$ et $\beta \in [-2.5, 3]$.

Finalement, la figure 4.10 est un graphes de type lignes de contour (contour lines) dans l’espace des paramètres (\hat{t}, β) et pour les différentes valeurs de Θ^2 pour lesquelles l’APE est possible.

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

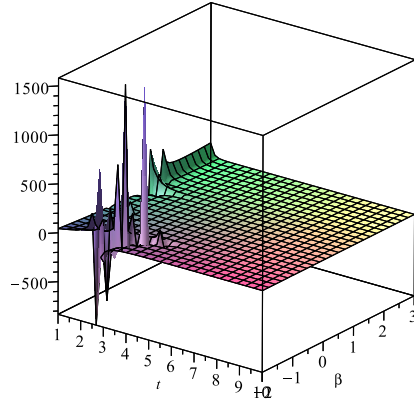


FIGURE 4.9 – Limite de surface à 3D (non validation de l’APE), Θ^2 en fonction de \hat{t} and β , $\hat{t} \in [1, 10]$ et $\beta \in [-2.5, 3]$

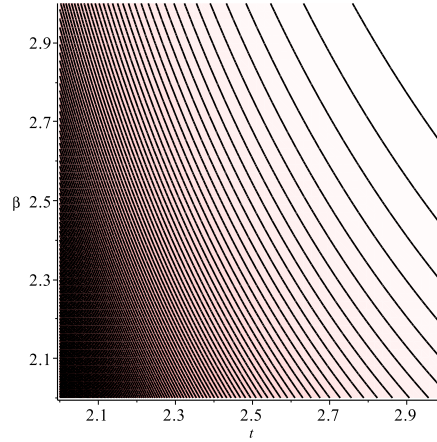


FIGURE 4.10 – Lignes de contour pour les paramètres (\hat{t}, β) où l’APE est possible

4.2.3 Explication physique

Si nous voulons expliquer le comportement de la température de hawking non commutative (NCG) \tilde{T}_H en fonction du temps \hat{t} pour différentes valeurs du paramètre β , nous distinguons les cas suivants :

1. $\beta < 0$,

Dans ce cas, nous avons un horizon apparent non commutatif situé à \tilde{r}_{H_1} (une singularité réelle) et une singularité cachée (qui n’est pas un horizon), et alors une particule doit traverser \tilde{r}_{H_1} pour passer de l’extérieur à l’intérieur du trou noir associé. Ici nous avons une contraction accélérée car le facteur d’échelle $\hat{a}(\hat{t})$ décroît si le temps augmente et $\ddot{\hat{a}}$ (la dérivée temporelle d’ordre 2) qui est une quantité positive, diminue. En plus, l’horizon

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

dynamique \tilde{r}_{H_1} qui est inversement proportionnel à $\hat{a}\ddot{a}$, augmente avec le temps pour atteindre une valeur critique au point $\hat{t} = \hat{t}^*$, puis il disparaît, et par conséquent la température (NCG) de Hawking associée diminue.

2. $\beta = \frac{4}{3}$,
Ici, nous avons un seul horizon (NCG) apparent \tilde{r}_{H_3} ($\propto \frac{1}{\hat{a}\ddot{a}}$), qui diminue avec le temps, donc la température (NCG) de Hawking \tilde{T}_H correspondante augmente (\tilde{r}_{H_3} varie de l'infini jusqu'aux petites valeurs (inférieures au rayon de l'univers)). Cela permet d'avoir une expansion accélérée ($\hat{a}\ddot{a}$ positif).
3. $\beta > \frac{4}{3}$,
Ce cas est identique au cas précédent ($\beta = \frac{4}{3}$) mais avec un horizon apparent (NCG) et une singularité cachée.
4. $0 < \beta < 1$,
Ce cas est similaire au premier cas ($\beta < 0$) mais avec deux horizons apparents dynamiques (\tilde{r}_{H_1} et \tilde{r}_{H_2} qui est pûrement non commutatif). Ces horizons n'évoluent (augmentent avec le temps) pas à la même vitesse ($\dot{r}_{H_1} \neq \dot{r}_{H_2}$).
5. $1 < \beta < \frac{4}{3}$,
C'est le même cas que le troisième ($\beta > \frac{4}{3}$) mais ici nous avons deux horizons apparents (NCG) dynamiques (dont un est purement non commutatif) ayant des vitesses différentes ($\dot{r}_H \propto r^3_H$).
6. $\beta > \frac{4}{3}$,
Dans ce cas, nous avons un horizon apparent non commutatif et une singularité cachée. Ici, \ddot{a} décroît pour ($\frac{4}{3} < \beta < 2$) et augmente pour ($\beta \geq 2$) si le temps augmente; mais dans les deux cas ($\hat{a}\ddot{a}$) augmente aussi, ce qui donne une accélération de l'expansion l'univers.

Comme nous avons vu que dans les cas ($\beta < 0$ et $\beta > \frac{4}{3}$) il existe aussi une singularité cachée (non réelles) comme nous avons montré dans le tableau 4.1.

Si nous comparons nos résultats à ceux obtenus dans les réfs. ([61]-[65]) où il y a un horizon apparent commutatif \tilde{r}_A , nous constatons qu'ils sont identiques. En effet, si nous prenons l'exemple 4 de la réf. [62] et l'équation (2.3) de la réf. [65], nous trouvons les mêmes résultats que les nôtres en faisons $\Theta = 0$ et $\hat{a}(t) = \hat{t}^\beta$ ($\tilde{r}_{H_1} = \tilde{r}_{H_3} = \frac{1}{H}$ où $\frac{1}{H} = \frac{\hat{a}}{\dot{\hat{a}}} = \frac{\hat{t}}{\beta}$).

Donc, les résultats obtenus dans ce chapitre sont compatibles au cas commutatif de l'univers FRW.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés du phénomène de la radiation de Hawking via l'effet tunnel fermionique au voisinage des horizons apparents

4. Radiation de Hawking et les trous noirs de l'univers FRW

associés aux trous noirs dynamiques dans l'univers FRW non commutatif. Pour résumer, nous avons trouvé que le trou noir dynamique FRW (NCG) laisse se produire deux processus de radiation simultanés qui sont causés par les effets de création de paires aux deux horizons du trou noir dynamique. Puisque la radiation du trou blanc est constitué d'antiparticules, elle peut être interprétée comme une absorption de l'énergie par l'horizon externe (l'horizon dynamique purement non commutatif n'est pas un spectateur passif) du trou noir.

Les horizons \tilde{r}_{H_1} et \tilde{r}_{H_2} ne coïncident jamais, en plus dans les trous noirs statiques de Reissner-Nordström [60], les particules et les antiparticules sont situées aux horizons (intérieur et extérieur) de telle sorte que des particules réelles avec des énergies positives sont rayonnées vers la singularité de l'horizon intérieur et les antiparticules avec les énergies négatives sont émises loin de la singularité à travers l'horizon intérieur. De même les particules ayant des énergies positives sont émises loin de la singularité à travers l'horizon extérieur et les antiparticules avec des énergies négatives sont rayonnées vers la singularité de l'horizon intérieur.

Cependant, dans notre cas (non commutatif) et pour les deux horizons, les particules ayant des énergies positives sont émises vers l'observateur situé à l'intérieur des horizons ; les antiparticules avec des énergies négatives sont rayonnées loin de l'horizon apparent (cas de $\beta < 0$ et $0 < \beta < 1$) parce que r_H augmente. Mais pour ($\beta \geq 1$) r_H diminue, l'observateur est en dehors des horizons et dans ce cas, les particules ayant des énergies positives sont émises loin des horizons vers l'observateur et les antiparticules avec les énergies négatives sont rayonnées loin de l'observateur.

La découverte la plus importante dans ce travail est que nous avons pour la première fois des horizons apparents dynamiques (en évolution) intérieur et extérieur. Le comportement de nos résultats qualitatifs obtenus dépend fortement de $\Theta^{\mu\nu}$.

Nous concluons que le paramètre de la non-commutativité de l'espace-temps permet d'obtenir de nouvelles expressions de la température de Hawking pour les trous noirs FRW, et donne lieu à l'émergence d'un horizon dynamique purement non commutatif pour certaines valeurs du paramètre β ($0 < \beta < \frac{4}{3}$) via le processus de l'effet tunnel fermionique. Ainsi, la non commutativité peut être considéré comme une sorte de charge électrique induite dans un trou noir dynamique FRW en évolution et ressemble ainsi à la solution trou noir McVittie chargé et non statique.

Chapitre 5

Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Dans ce chapitre, nous allons étudier la radiation de Hawking dûe aux trous noirs dans un espace ayant une géométrie différente à celle de Riemann ; c'est une géométrie basée sur des modifications effectuées par Lyra.

5.1 Géométrie de Lyra

Quand Einstein a développé [70] sa théorie de la relativité générale, la gravitation était décrite par la géométrie riemannienne. Avec uniquement cette géométrie de l'espace-temps [1], les théoriciens ne peuvent pas réaliser leur rêve de trouver une théorie susceptible de décrire de manière cohérente et unifiée l'ensemble des interactions fondamentales. Pour cette raison, plusieurs modifications de la géométrie de Riemann ont été proposées comme celle de Weyl [71, 72] afin de lier la gravitation avec l'électromagnétisme. Sa théorie n'a pas survécu car elle était basée sur une condition de non-intégrabilité des connexions affines.

En 1951, Lyra [73] a publié ses modifications de la géométrie riemannienne en introduisant une fonction d'échelle (une jauge) qui a pu résoudre le problème de la non-intégrabilité du transport parallèle. Cette nouvelle géométrie est connue sous le nom "Géométrie de Lyra".

En effet, soit l'espace de Lyra défini par la métrique $g_{\mu\nu}$ et une fonction scalaire définie positive ϕ appelée fonction d'échelle. Dans la géométrie de Lyra, on compose un système de référence pour pouvoir transformer d'une façon indépendante le système de coordonnées. Dans ce cas ϕ se transforme ainsi :

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x(\bar{x})), \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi} \neq 0 \quad (5.1)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Sous cette transformation, un vecteur se transforme ainsi :

$$\bar{A}^\nu = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu \quad (5.2)$$

Dans la géométrie de Lyra, la connexion affine est définie par l'expression suivante :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \equiv \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{\phi} \left[\delta_\mu^\rho \partial_\nu \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) \right] \quad (5.3)$$

où

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (5.4)$$

Sa loi de transformation est donnée par :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}_{\lambda\epsilon}^\sigma \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\epsilon}{\partial x^\nu} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial^2 \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\nu} + \frac{1}{\phi} \delta_\nu^\rho \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \quad (5.5)$$

Nous définissons alors la dérivée covariante d'un vecteur ainsi :

$$\nabla_\mu A^\nu \equiv \frac{1}{\phi} \partial_\mu A^\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\nu A^\alpha \quad (5.6)$$

$$\nabla_\mu A_\nu \equiv \frac{1}{\phi} \partial_\mu A_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha \quad (5.7)$$

La richesse de la géométrie de Lyra est dans le tenseur de courbure

$$\tilde{R}_{\beta\alpha\sigma}^\rho \equiv \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} (\phi \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\rho) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\phi \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^\rho) + \phi \tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^\rho \phi \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^\lambda - \phi \tilde{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\rho \phi \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^\lambda \right) \quad (5.8)$$

et la torsion

$$\tilde{\tau}_{\mu\nu}{}^\rho \equiv \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho - \frac{1}{\phi} (\delta_\mu^\rho \partial_\nu - \delta_\nu^\rho \partial_\mu) \ln \phi \quad (5.9)$$

Le second terme représente le contribution non holonome ; nous aurons ainsi :

$$\tilde{\tau}_{\mu\nu}{}^\rho = -\frac{1}{\phi} (\delta_\mu^\rho \partial_\nu - \delta_\nu^\rho \partial_\mu) \ln \bar{\phi} \quad (5.10)$$

et

$$\tilde{\tau}_\mu \equiv \tilde{\tau}_{\mu\rho}{}^\rho = -\frac{3}{\phi} \partial_\mu \ln \bar{\phi} \quad (5.11)$$

5.2 Trous noirs de Lyra

Juste après l'apparition de la géométrie de Lyra, Sen en 1951 [74] et Sen et Dun [75] ont réussi à construire un analogue au champ d'équations d'Einstein en se basant sur la géométrie de Lyra :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \frac{3}{2} \phi_i \phi_j - \frac{3}{4} g_{ij} \phi_k \phi^k = -8\pi G T_{ij} \quad (5.12)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

ϕ_i est le vecteur de déplacement avec :

$$\phi_i = (\beta, 0, 0, 0) \quad (5.13)$$

β est une fonction dépendant du temps.

Plus tard, ils ont donné une série de solutions au champ d'équations statiques à symétrie sphérique ; elles correspondent bien aux trous noirs de Lyra :

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.14)$$

où

$$e^\nu = \delta + \zeta \phi(r) \quad (5.15)$$

$$e^\lambda = \frac{\alpha r^4 (\phi')^2}{\delta + \zeta \phi(r)} \quad (5.16)$$

et

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-n} \quad (5.17)$$

α , ζ , δ sont des constantes arbitraires. Nous posons arbitrairement $Aa_1^2 = D + Ca_0$, a_3 est une constante arbitraire et $a_2 = 0$. Les coefficients a_n ($n > 3$) sont donnés par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} 0 = & a_{n-1} [(D + Ca_0) (n-1) (n-4)] - Aa_1 \sum (k-1) (n-k+1) a_{k-1} a_{n-k+1} \\ & - A \sum [(l-1) a_{l-1}] \left[\sum (k-1) (n-l-k+3) a_{k-1} a_{n-l-k+3} \right] \\ & - \sum (n-l) (2l-n-1) a_{n-l} a_{l-1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Considérons un petit nombre de termes, nous pouvons réécrire les équations (6.15) et (6.16) ainsi :

$$e^\nu = \zeta \left(b_0 + \frac{a_1}{r} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_4}{r^4} \right) \quad (5.19)$$

et

$$e^\lambda = \frac{\zeta}{e^\nu} \left(a_1^2 + 6 \frac{a_1 a_2}{r^2} + 8 \frac{a_1 a_4}{r^3} + 9 \frac{a_3^2}{r^4} \right) \quad (5.20)$$

où $b_0 \zeta = \delta + \delta a_0$ et $\zeta_0^2 = 2 \frac{a_3}{a_1}$.

En appliquant les conditions aux limites (e^ν et e^λ tendent vers 1 lorsque r tend vers ∞), nous obtenons :

$$\delta + \zeta a_0 = 1 \quad (5.21)$$

et

$$\delta + \zeta a_0 = \alpha a_1^2 \quad (5.22)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Cela implique :

$$b_0\zeta = 1 \quad (5.23)$$

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (5.24)$$

Maintenant nous posons $a_3 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \succ 1$, cela donne :

$$e^\nu = b_0\zeta \pm \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha r}} = 1 \pm \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha r}} \quad (5.25)$$

$$e^\lambda = \frac{\alpha a_1^2}{b_0\zeta + \frac{a_1\zeta}{r}} = \frac{1}{1 \pm \frac{\zeta}{\sqrt{\alpha r}}} \quad (5.26)$$

Sachant que les équations (5.25) et (5.26) représentent la solution des trous noirs de Schwarzschild, nous prenons le signe négatif et nous posons $\frac{c}{\sqrt{A}} = 2M' = M$ (M est la masse du trou noir). Les équation (5.19) et (5.20) deviennent donc :

$$e^\nu = 1 - \frac{M}{r} + \frac{M\sqrt{\alpha}a_3}{r^3} + \frac{M^2\sqrt{\alpha}a_3}{r^4} \quad (5.27)$$

$$e^\lambda = \frac{1 - 6\frac{\sqrt{\alpha}a_3}{r^2} - 8\frac{M\sqrt{\alpha}a_3}{r^3} + 9\frac{a_3^2\alpha}{r^4}}{1 - \frac{M}{r} + \frac{M\sqrt{\alpha}a_3}{r^3} + \frac{M^2\sqrt{\alpha}a_3}{r^4}} \quad (5.28)$$

et nous les appelons "Trous noirs de Lyra", où

$$\sigma^2 = 1 - 6\frac{\sqrt{\alpha}a_3}{r^2} - 8\frac{M\sqrt{\alpha}a_3}{r^3} + 9\frac{a_3^2\alpha}{r^4} \quad (5.29)$$

où encore

$$e^\nu = 1 - \frac{M}{r} + \frac{Mp}{r^3} + \frac{M^2p}{r^4} \quad (5.30)$$

$$e^\lambda = \frac{\sigma^2}{e^\nu} \quad (5.31)$$

avec $p = \sqrt{\alpha}a_3$ et :

$$\sigma^2 = 1 - 6\frac{p}{r^2} - 8\frac{Mp}{r^3} + 9\frac{p^2}{r^4} \quad (5.32)$$

5.2.1 Horizons d'événement

Les horizons d'événement des trous de Lyra correspondent aux zéros de l'équation :

$$e^\nu = 0 \quad (5.33)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Nous pouvons alors facilement prouver que la singularité est située à $r = 0$, et les horizons correspondent aux racines positives de l'équation du 4^{ème} degré :

$$r^4 - Mr^3 + pMr + pM^2 = 0 \quad (5.34)$$

La résolution donne 4 rayons, tels que :

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\Omega_2} + \sqrt{-\Omega_3 + \Omega_4 + M} \right), \quad (5.35)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\Omega_2} - \sqrt{-\Omega_3 + \Omega_4 + M} \right), \quad (5.36)$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega_2} + \sqrt{-\Omega_3 - \Omega_4 + M} \right), \quad (5.37)$$

$$r_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega_2} - \sqrt{-\Omega_3 - \Omega_4 + M} \right) \quad (5.38)$$

où

$$Y = \left(-\frac{Q}{2} + \sqrt{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{Q}{2} - \sqrt{\Omega_1} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{A}{6} \quad (5.39)$$

représente la solution réelle de l'équation à trois dimensions suivante :

$$-8Y^3 + 4AY^2 + 8CY - 4AC + B^2 = 0 \quad (5.40)$$

avec

$$A = -\frac{3}{2}M^2, \quad (5.41)$$

$$B = \frac{1}{2}M^3 + pM, \quad (5.42)$$

$$C = \frac{5}{4}pM^2 - \frac{3}{16}M^4, \quad (5.43)$$

$$P = -\frac{5}{4}pM^2, \quad (5.44)$$

$$Q = \frac{3}{32}M^6 - \frac{3}{4}pM^4 - \frac{1}{8}p^2M^2 \quad (5.45)$$

et

$$\Omega_1 = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}, \quad (5.46)$$

$$\Omega_2 = 2Y - A, \quad (5.47)$$

$$\Omega_3 = 2Y + A, \quad (5.48)$$

$$\Omega_4 = \frac{2B}{\sqrt{\Omega_2}} \quad (5.49)$$

Les horizons d'événement correspondent aux racines positives (horizons d'événement) parmi r_i $i = \overline{1,3}$. En effet, soit le tableau 5.1 qui resume les possibilités

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Ω_1	Ω_2	$\Omega_4 - \Omega_3$	Ω_5^-	Ω_5^+	r_1	r_2	$\Omega_4 + \Omega_3$	Ω_6^+	Ω_6^-	r_3	r_4
+	+	+	+	+	oui	oui	-	/	/	non	non
+	+	+	+	-	oui	non	-	/	/	non	non
+	+	+	-	+	non	oui	-	/	/	non	non
+	+	+	-	-	non	non	-	/	/	non	non
+	+	-	/	/	non	non	+	+	+	oui	oui
+	+	-	/	/	non	non	+	-	+	non	oui
+	+	-	/	/	non	non	+	+	-	oui	non
+	+	-	/	/	non	non	+	-	-	non	non

TABLE 5.1 – Conditions pour avoir des rayons positifs

et les conditions qui permettent d'avoir des rayons positifs, (" + " implique que la quantité est positive, " - " implique que la quantité est négative et symbol "/" veut dire ça n'a pas de sens) : où

$$\Omega_5 = \sqrt{\Omega_4 - \Omega_3}, \quad (5.50)$$

$$\Omega_5^+ = \Omega_5 + \sqrt{\Omega_4 - \Omega_3}, \quad (5.51)$$

$$\Omega_5^- = \Omega_5 - \sqrt{\Omega_4 + \Omega_3} \quad (5.52)$$

$$\Omega_6 = \sqrt{-(\Omega_4 + \Omega_3)}, \quad (5.53)$$

$$\Omega_6^+ = \Omega_6 + \sqrt{\Omega_3 - \Omega_4}, \quad (5.54)$$

$$\Omega_6^- = \Omega_6 - \sqrt{\Omega_3 + \Omega_4} \quad (5.55)$$

Nous distinguons d'après ces résultats trois situations : avoir deux rayons positifs, avoir un seul rayon positif ou ne pas voir de rayons positifs :

1. Si $\Omega_4 - \Omega_3 > 0$ et $\Omega_4 + \Omega_3 < 0$ et :
 - Si $\Omega_5^- > 0$ et $\Omega_5^+ > 0$, nous avons deux horizons d'événement situés à r_1 et r_2
 - Si $\Omega_5^- > 0$ et $\Omega_5^+ < 0$, nous avons un seul horizon d'événement situé à r_1
 - Si $\Omega_5^- < 0$ et $\Omega_5^+ > 0$, nous avons un seul horizons d'événement situé à r_2
 - Si $\Omega_5^- < 0$ et $\Omega_5^+ < 0$, nous n'avons aucun horizon d'événement

2. Si $\Omega_4 - \Omega_3 < 0$ et $\Omega_4 + \Omega_3 > 0$ et :
 - Si $\Omega_6^- > 0$ et $\Omega_6^+ > 0$, nous avons deux horizons d'événement situés à r_3 et r_4
 - Si $\Omega_6^- > 0$ et $\Omega_6^+ < 0$, nous avons un seul horizon d'événement situé à r_4

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

- Si $\Omega_6^- < 0$ et $\Omega_6^+ > 0$, nous avons un seul horizon d'événement situé à r_3
- Si $\Omega_6^- < 0$ et $\Omega_6^+ < 0$, nous n'avons aucun horizon d'événement.

5.2.2 Température de Hawking

Maintenant nous voulons étudier la radiation de Hawking au voisinage de(s) horizon(s) des trous noirs de Lyra. Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, nous allons utiliser la méthode de Hamilton-Jacobi [50, 51] pour déterminer la température de Hawking via l'effet tunnel fermionique.

En effet, soit la matrice suivante qui représente les tétrades relatives à la métrique (5.14) :

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e^{\nu/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

et la matrice inverse :

$$e^\mu{}_a = \begin{pmatrix} e^{-\nu/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

où $(a, b) \equiv (0, 1, 2, 3)$ et $(\mu, \nu) \equiv (t, r, \theta, \phi)$. Cela permet d'exprimer les matrices (4.17) ainsi :

$$\gamma^t = e^{-\nu/2} \gamma^0 \quad (5.58)$$

$$\gamma^r = e^{-\lambda/2} \gamma^1 \quad (5.59)$$

$$\gamma^\theta = \frac{1}{r} \gamma^2 \quad (5.60)$$

$$\gamma^\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \gamma^3 \quad (5.61)$$

et

$$\gamma^5 \stackrel{def}{=} i\gamma^t \gamma^r \gamma^\theta \gamma^\phi = \frac{i e^{-(\nu+\lambda)/2}}{r^3 \sin \theta} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (5.62)$$

Le choix de l'ansatz (4.30) du champ de Dirac permet d'écrire l'équation suivante :

$$e^{-\nu} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma \partial_t I_\uparrow \\ 0 \\ -\Omega \partial_t I_\uparrow \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\lambda} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\Omega \partial_r I_\uparrow \\ 0 \\ i\Gamma \partial_r I_\uparrow \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ i\Omega \partial_\theta I_\uparrow \\ 0 \\ i\Gamma \partial_\theta I_\uparrow \end{pmatrix} + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega \partial_\phi I_\uparrow \\ 0 \\ -\Gamma \partial_\phi I_\uparrow \end{pmatrix} = 0 \quad (5.63)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

Il vient alors :

$$-e^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma \partial_t I_{\uparrow} + i e^{-\frac{\lambda}{2}} \Omega \partial_r I_{\uparrow} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{\Omega}{r} \left(i \partial_{\theta} I_{\uparrow} - \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\phi} I_{\uparrow} \right) = 0 \quad (5.65)$$

$$e^{-\frac{\nu}{2}} \Omega \partial_t I_{\uparrow} + i e^{-\frac{\lambda}{2}} \Gamma \partial_r I_{\uparrow} = 0 \quad (5.66)$$

$$\frac{\Gamma}{r} \left(i \partial_{\theta} I_{\uparrow} - \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\phi} I_{\uparrow} \right) = 0 \quad (5.67)$$

Ici le vecteur de Killing $\chi = \partial_t$ est suffisant dans notre cas (trous noirs statiques)[76]. Pour résoudre le système ci-dessus, nous utilisons le choix de l'action (4.37) ; il vient :

$$-e^{-\nu/2} E \Gamma + i e^{-\lambda/2} R'(r) \Omega = 0 \quad (5.68)$$

$$\frac{\Omega}{r} \left(i J'_{\theta}(\theta, \phi) - \frac{1}{\sin \theta} J'_{\phi}(\theta, \phi) \right) = 0 \quad (5.69)$$

$$e^{-\nu/2} E \Omega + i e^{-\lambda/2} R'(r) \Gamma = 0 \quad (5.70)$$

$$\frac{\Gamma}{r} \left(i J'_{\theta}(\theta, \phi) - \frac{1}{\sin \theta} J'_{\phi}(\theta, \phi) \right) = 0 \quad (5.71)$$

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, les équations (5.67) and (5.69) impliquent que $J(\theta, \phi)$ est une fonction complexe [77]. Cependant, nous pouvons distinguer deux cas en considérant les équations (5.66) et (5.68) :

1. Si $\Gamma = \pm i \Omega$, nous avons :

$$\left(\mp e^{-\nu/2} E + e^{-\lambda/2} R'(r) \right) \Omega = 0 \quad (5.72)$$

Cela implique que :

$$R'(r) = \pm \frac{e^{-\nu/2}}{e^{-\lambda/2}} E \quad (5.73)$$

2. Si $\Gamma = \pm \Omega$, alors :

$$R'(r) = 0 \quad (5.74)$$

L'équation (5.72) correspond aux particules entrantes absorbées avec la probabilité $\mathcal{P}_{incident} = 1$, tandis que l'équation (5.70) décrit le processus de l'émission des particules avec probabilité \mathcal{P} telle que :

$$\mathcal{P} \propto e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Im} R(r)} \quad (5.75)$$

Pour cela, nous avons besoin de la partie imaginaire de la fonction $R(r)$. En effet,

$$\text{Im} R(r) = \pm E \text{Im} \int \frac{e^{\lambda/2}}{e^{\nu/2}} dr = \pm E \text{Im} \int \frac{\sigma(r)}{e^{\nu}} dr \quad (5.76)$$

Nous distinguons pour cela deux cas : pour deux horizons et pour un seul horizon. En effet (5.30) et (5.31) donnent :

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

1. Si nous avons un seul horizon d'événement :

$$\text{Im } R(r) = \pm E \text{Im} \int \frac{r^4 \sigma(r)}{(r - r_H) F(r)} dr \quad (5.77)$$

où

$$F(r) = r^3 + (r_H - M)r^2 + r_H(r_H - M)r - \frac{pM^2}{r_H} \quad (5.78)$$

r_H est l'horizon associé qui doit vérifier l'équation,

$$r^3 - Mr^2 + Mp = 0 \quad (5.79)$$

2. Si nous avons deux horizons d'événement :

$$\text{Im } R(r) = \pm E \text{Im} \int \frac{r^4 \sigma(r)}{(r - r_+)(r - r_-) H(r)} dr \quad (5.80)$$

r_+ et r_- sont respectivement (r_1 et r_2) ou (r_3 et r_4).

En utilisant le théorème des résidus :

$$R(r) = 2i\pi [\text{Res}(R(r), r_+) + \text{Res}(R(r), r_-)] \quad (5.81)$$

nous pouvons facilement déterminer $\text{Im } R(r)$ où les pôles sont localisés aux horizons r_+ et r_- :

$$\text{Im } R(r) = \pm \frac{2\pi E}{r_+ - r_-} \left[\frac{r_+^4 \sigma(r_+)}{H(r_+)} - \frac{r_-^4 \sigma(r_-)}{H(r_-)} \right] \quad (5.82)$$

tels que :

$$\sigma(r_{\pm}) = \sqrt{1 - 6\frac{p}{r_{\pm}^2} - 8\frac{pM}{r_{\pm}^3} + 9\frac{p^2}{r_{\pm}^4}} \quad (5.83)$$

Finallement, le fait que :

$$\frac{E}{T} = \pm \frac{2}{\hbar} \text{Im } R(r) \quad (5.84)$$

donc nous pouvons en déduire la température de Hawking via l'effet tunnel fermionique :

1. pour un seul horizon, la température de hawking est :

$$T_1 = \frac{1}{\sigma(r_H)} \left[\frac{1}{r_H} - \frac{M}{2r_H^3} \right] \quad (5.85)$$

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

2. pour deux horizons, la température de Hawking correspondante est le produit des températures T_{int} et T_{ext} déterminée au voisinage de l'horizon interne et externe respectivement. T_{int} dépend seulement de l'horizon r_- alors que T_{ext} dépend des deux horizons r_- et r_+ :

$$T_H = T_{int} \cdot T_{ext} \quad (5.86)$$

avec

$$T_{int} = T_1(r_-) \quad (5.87)$$

$$T_{ext} = T_2 \quad (5.88)$$

où

$$T_2 = \mp \frac{\hbar}{4\pi r_+^4 \sigma(r_+) (r_-^2 - \frac{M}{2}) - r_-^4 \sigma(r_-) (r_+^2 - \frac{M}{2})} \quad (5.89)$$

r_+ et r_- sont respectivement les horizons externe et interne du trou noir de Lyra respectivement.

Les figures 5.1 et 5.2 et 5.3 représentent la variation des la températures de Hawking T_H en fonction de M et de p .

La figure 5.1 montre une augmentation de la température de Hawking si la masse du trou noir augmente jusqu'à une certaine valeur ($M_0 \simeq 1.7$) où elle rencontre une asymptote verticale (cas équivalent à celui de la figure 4.2 de chapitre précédent).

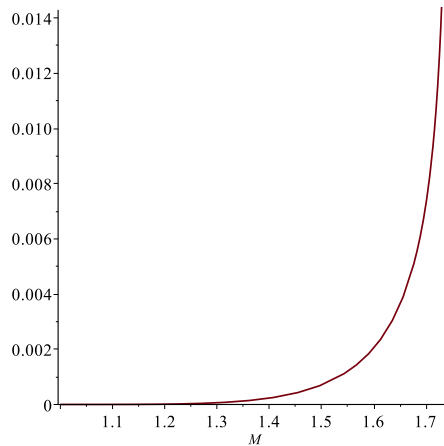


FIGURE 5.1 – Température de Hawking T_H en fonction de M pour $p = 1$

Pour la figure 5.2, nous constatons une décroissance de la température T_H avec la croissance du paramètre p , cette figure (qui est similaire à la figure 4.3

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

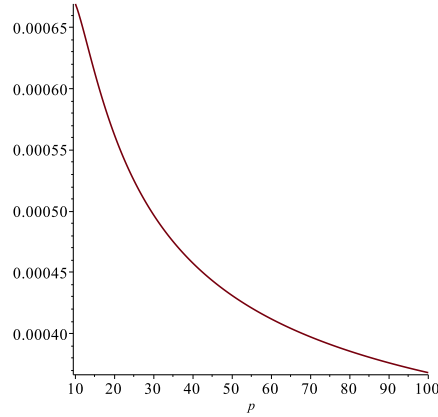


FIGURE 5.2 – Température de Hawking T_H en fonction de p pour $M = 1$

du chapitre 04) correspond à une contraction accélérée de l'univers où la température se comporte comme l'inverse du paramètre de Hubble.

Finalement, la figure 5.3 est réalisée à 3D pour montrer la variation de T_H en fonction de p et M , elle montre une décroissance de la température si ces paramètres augmentent, ce qui est parfaitement compatible avec le cas des trous noirs dans l'espace-temps riemannien.

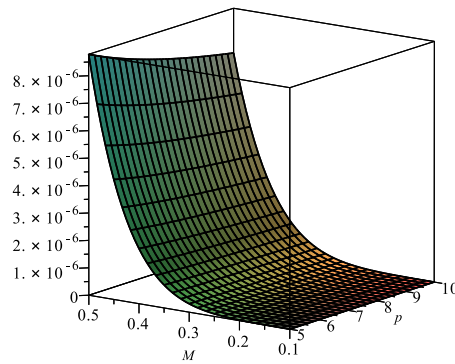


FIGURE 5.3 – Température de Hawking T_H en fonction de m et p

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les trous noirs statiques de Lyra. A l'aide des propriétés de la géométrie de Lyra ; nous avons réussi à déterminer les horizons d'événement associés. Ces horizons varient en fonction des paramètres des

5. Radiation de Hawking dans la géométrie de Lyra

trous noirs M et p . Nous avons également étudié la radiation des trous noirs de Lyra au voisinage des ses horizons en utilisant l'approche de l'effet tunnel fermionique de Hamilton-Jacobi. Le résultat le plus important est que le trou noir commence à s'évaporer quand l'espace-temps est déjà statique, et que la température de Hawking correspondante dépend uniquement du trou noir (la masse et la structure de l'espace-temps de Lyra).

Conclusion

Cette thèse a été consacrée à l'étude de la gravitation d'Einstein dans un espace-temps ayant une géométrie non commutative et les implications cosmologiques de cette géométrie pour l'unification de la physique des forces de la nature. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à la géométrie non commutative de Seiberg-Witten qui a susciter beaucoup d'intérêt ces dernières années. Nous avons étudié son effet sur :

- l'espace-temps de Riemann en étudiant les anomalies gravitationnelles et la radiation de Hawking au voisinage des horizons apparents des trous noirs de Friedman-Robertson-Walker (FRW) non commutative)
- l'espace-temps de Lyra (modifications apportées à la géométrie Riemannienne) en étudiant également la radiation de Hawking à travers les trous noirs de Lyra.

Ce travail a été composé de cinq chapitres. Le premier chapitre est réservé à une introductions générale avec deux parties : dans une première partie, nous avons montré brièvement certains outils mathématiques de la relativité générale que nous rencontrons fréquemment dans l'étude des trous noirs, et dans la deuxième partie. Nous avons fait un petit rappel sur l'essentiel que nous devons savoir sur la géométrie non commutative (sa définition, son concept, sa construction mathématique, ... etc).

Le deuxième chapitre concerne l'étude de l'effet de la non commutativité sur l'espace-temps en considérant les anomalies chirales et gravitationnelles non commutatives dans la théorie quantique des champs et ses implications dans la quantification des interactions gravitationnelles dans le formalisme des intégrales de chemin. Cette étude a été réalisée en utilisant la méthode de Fujikawa. Nous avons constaté que dans la géométrie Riemannienne, la connexion de spin dans un espace-temps caractérisé par sa métrique, peut se décomposer toujours en une classe des tenseurs de Levi-Civita (métrique, connexion, torsion, ...). Cela représente le cas des théories ayant une structure géométrique compliquée comme le cas de l'espace-temps de Riemann-Cartan caractérisé par une métrique plus générale (courbure, torsion et non métricité) ainsi que le cas de l'espace-temps de Weyl-Cartan connecté différentiellement à la métrique de Lorentz obéissant à la condition de la non-métricité de Weyl.

Dans l'espace-temps Riemannien de la relativité générale, la métrique et la connexion de spin (considérées respectivement comme un potentiel et une force du champ gravitationnel) sont associées complètement à la condition d'homogénéité (la condition de la métricité). Dans notre cas, l'espace-temps courbé non commutatif où le second terme de la connexion de spin de Seiberg-Witten $\hat{\omega}_\mu$ défini dans l'équation (2.98), montre explicitement la non-métricité et la torsion de cet espace-temps déformé.

Pour les anomalies gravitationnelles, et vu l'expression (2.106), la non commutativité de l'espace-temps a modifié sa structure Riemannienne en une autre structure plus compliquée avec une métrique plus générale (torsion et non-métricité). Le résultat le plus important est que la géométrie non commutative peut donner à l'espace-temps un aspect gravitationnel en l'absence de la force de gravité.

Dans le troisième chapitre, nous avons réussi à calculer les composantes de la métrique de Friedman-Robertson-Walker (FRW) dans la théorie de jauge non commutative de la gravitation, ainsi que les verbeins et les connexions de spin correspondants jusqu'au second ordre en $\Theta^{\mu\nu}$ (le paramètre de la non commutativité). Nous avons montré que contrairement à l'univers FRW commutatif ayant une métrique diagonale (3.8), la nouvelle métrique (métrique FRW déformée) contient en plus la composante $\hat{g}_{tr}(t, r)$.

A travers cette étude qualitative, nous avons vu qu'à l'aide de la géométrie Seiberg-Witten non commutative, nous pouvons construire un nouveau type de trous noirs dynamiques selon la déformation de l'espace-temps, où nous avons obtenu un horizon apparent non commutatif variant avec le temps et le paramètre de la non commutativité Θ . Cela est considéré comme la propriété la plus importante pour un espace-temps non commutatif.

Nous avons également considéré dans ce chapitre quelques implications cosmologiques en calculant quelques paramètres cosmologiques (Hubble et le paramètre de décélération) comme test de la théorie non commutative. Les résultats obtenus ont montré encore une fois que la géométrie non commutative mène à un espace-temps non homogène et provoque une sorte de torsion. La contribution de la densité d'énergie et la pression qui sont devenues elles mêmes non homogènes, donne un fluide imparfait en produisant une expansion accélérée. Ce résultat a été obtenu sans avoir besoin de considérer le scénario de l'énergie noire, ce qui confirme le résultat obtenu en calculant les anomalies non commutatives.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'approche de l'effet tunnel fermionique via la méthode de Hamilton-Jacobi pour l'espace-temps FRW afin de déterminer la température de Hawking correspondante.

La découverte la plus importante dans ce chapitre est que nous avons pour la première fois des horizons apparents dynamiques (en évolution) intérieur et extérieur. Le comportement de nos résultats qualitatifs obtenus dépend fortement de $\Theta^{\mu\nu}$ et du paramètre de l'expansion (β et t).

Le rôle joué par le paramètre de la non-commutativité de l'espace-temps $\Theta^{\mu\nu}$ est, en plus de la correction apportée à la température de Hawking, de donner lieu à l'émergence d'un horizon dynamique purement non commutatif pour certains paramètres β via le processus de l'effet tunnel fermionique. Ainsi, la non commutativité peut être considérée comme une sorte de charge électrique induite dans un trou noir dynamique FRW en évolution et ressemble ainsi à la solution trou noir McVittie chargé et non statique.

La température de Hawking indique la création des paires des particules au voisinage de l'horizon d'événement.

Finalement, dans le cinquième chapitre, nous avons étudié la radiation de Hawking au voisinage des horizons d'événement des trous noirs de Lyra en utilisant l'approche de Hamilton-Jacobi. La géométrie de Lyra est une modification de la géométrie Riemannienne conduisant à un champ d'équation analogue au champ d'équation d'Einstein. La résolution de ces nouvelles équations peut donner des solutions trous noirs (trous noirs de Lyra).

Le résultat le plus important est que le trou noir commence à s'évaporer quand l'espace-temps est déjà statique, et que la température de Hawking correspondante dépend uniquement du trou noir (la masse et la structure de l'espace-temps de Lyra).

Annexe A

Propriétés de la métrique non commutative

A.1 Outils de calcul

Pour calculer les composantes de la connexion de spin, nous avons utilisé la relation suivante :

$$\omega_{\mu}{}^{ba} \equiv e_{\mu i} (C^{abi} - C^{bia} - C^{iab}) \quad (\text{A.1})$$

où

$$C^{dfi} = \eta^{da} \eta^{fb} C_{ab}{}^i \quad (\text{A.2})$$

avec

$$C_{ab}{}^i = e^{\mu}{}_a e^{\nu}{}_b \partial_{[\mu, \nu]} e^i \quad (\text{A.3})$$

$$e_{\mu i} = \eta_{ij} e_{\mu}{}^j \quad (\text{A.4})$$

Il faut noter que $C_{ba}{}^i$ est antisymétrique $C_{ba}{}^i = -C_{ab}{}^i$ ce qui implique

$$\omega_{\mu}{}^{ab} = -\omega_{\mu}{}^{ba} \quad (\text{A.5})$$

Donc les composantes $C_{ab}{}^i$ non nulles de la métrique FRW sont :

$$C_{12}{}^2 = C_{13}{}^3 = \frac{a + ra'}{a^2 r} \quad (\text{A.6})$$

$$C_{41}{}^1 = C_{42}{}^2 = C_{43}{}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{A.7})$$

où $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ et $a' \equiv \frac{da}{dr}$.

Ces composantes ont été remplacées dans l'équation (A.1) pour obtenir les connexions de spin.

A.2 Composantes de la métrique FRW

Soit la forme suivante pour la matrice $\Theta_{\mu\nu}$:

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.2.1 Composantes des tétrades $\hat{e}_\mu^a(x, \Theta)$

$$\hat{e}_1^1 = a + \frac{\Theta^2}{128a^3} \begin{bmatrix} 17r^2a^4\dot{a}^4 + 12ra^3a''' + 6r^2a^4\dot{a}'^2 - 84raa'^3 + 42r^2a^2a''^2 \\ -50ra^3\dot{a}^2a' - 36ra^4\dot{a}\dot{a}' + ra^2a'a'' - 110r^2aa''a'^2 + \\ 12r^2a^2a'a''' + 62r^2\dot{a}^2a'^2 - 47r^2a^3\dot{a}^2a'' + 56r^2a'^4 + \\ 6r^2a^2\dot{a}\dot{a}'' - 54r^2a^3\dot{a}\dot{a}' - 18a^4\dot{a}^2 + 24a^3a'' + 28a^2a'^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{e}_1^2 = \frac{i\Theta}{4a} [r^2a^2\dot{a}^2 - 4raa' + r^2a'^2 - 2r^2aa'' - a^2] \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{e}_1^4 = \frac{\Theta^2}{64a^3} \begin{bmatrix} 21r^2a^2a''\dot{a}' + 28ra'^2 (r\dot{a}\dot{a}' - a\dot{a}') + 15r^2a^2\dot{a}^2 (\dot{a}\dot{a}' - a\dot{a}') \\ 20raa' (a\dot{a}' - \dot{a}a') - 27r^2a\dot{a}\dot{a}' + 2r^2a^4\dot{a}\dot{a}' - 22r^2a^3\dot{a}\dot{a}' - \\ 14ra^4\dot{a}\dot{a}'' + 6a^2 (ra\dot{a}'' - \dot{a}\dot{a}'' - r\dot{a}\dot{a}'' + a\dot{a}' + r^2a^2\dot{a}\dot{a}'' + r^2a'\dot{a}'') \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{e}_2^1 = \frac{i\Theta}{4} [-ra\dot{a}^2 + 2a' + ra''] \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{e}_2^2 = ra - \frac{\Theta^2}{128a^3} \begin{bmatrix} 52r^2aa'^3 + 14r^2a^2 (a^2\dot{a}' (\dot{a} + r\dot{a}') - ra''^2) + r^3aa'^2a'' + \\ 36ra^2a'^2 + 21ra^4\dot{a}^2 + 2r^2a^3a''' - 15r^3a^2\dot{a}^2a'^2 + 12r^3a'^4 \\ + 2r^3a^2 (a'a''' - a^2\dot{a}\dot{a}'') - 20a^3a' - 17ra^3 (a'' + r^2a\dot{a}^4) \\ + 31r^3a^3\dot{a}^2a'' + 54r^2a^3\dot{a}^2a' - 10r^3a^3\dot{a}\dot{a}' - 72r^2a^2a'a'' \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{e}_2^4 = \frac{i\Theta}{4a} r [a\dot{a}' - \dot{a}a'] \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{e}_3^3 = ra \sin \theta - \frac{i\Theta}{4} \cos \theta [a + ra'] - \frac{\Theta^2}{128a^3} \sin \theta \begin{bmatrix} 2r^2a^3a''' - 14a^3a' - 14r^2a^4\dot{a}^4 + 32r^2aa'^3 + 15ra^4\dot{a}^2 \\ -11ra^3a'' + 18r^3a'^4 - 6r^3a^2 (a''^2 + \dot{a}^2a'^2 + a^2\dot{a}'^2) \\ 20r^3\dot{a}^2a^3a'' - 54r^2a^2a'a'' - 14r^3aa'^2a'' + 2r^3a^2a'a''' \\ -2r^3a^4\dot{a}\dot{a}'' + 8r^2a^4\dot{a}\dot{a}' + 48r^2a^3\dot{a}^2a' - 36ra^2a'^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{e}_4^1 = \frac{\Theta^2}{128a^2} \left[\begin{array}{l} 45r^2a'^2\dot{a}' - 52ra^2a'\dot{a}' + 43r^2a^3\dot{a}^2\dot{a}' - 79r^2\dot{a}a'^3 - 3ra^3\dot{a}^3 \\ -a^2\dot{a}\dot{a}' - 19ra^2\dot{a}a'' - 32r^2a^2\dot{a}^3a' + 60ra\dot{a}a'^2 - a^3\dot{a}' + \\ 93r^2a\dot{a}a'a'' - 4r^2a^2a'\dot{a}'' - 48r^2a^2a''\dot{a}' - 14r^2a^2\dot{a}a''' \end{array} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\widehat{e}_4^2 = \frac{i\Theta}{2} ra \left[\dot{a} + r\dot{a}' \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\widehat{e}_4^4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64a^2} \left[\begin{array}{l} 6r^2a^2\dot{a}\dot{a}'' + 2r^2a^2a'\dot{a}'' + 28r^2\dot{a}^2a'^2 - 38r^2a\dot{a}a'\dot{a}' \\ +10r^2a^2\dot{a}'^2 - 6r^2a\dot{a}^2a'' + 2ra^3\dot{a}'' - 18r^2a^3\dot{a}^2\ddot{a} + \\ 18ra^2a'\ddot{a} - 15r^2a\ddot{a}a'^2 + 17r^2a^2\ddot{a}a'' - a^3\ddot{a} \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

où a' , a'' et a''' sont respectivement la première, la deuxième et la troisième dérivée de $a(r, t)$ par rapport à r . De même pour \dot{a} , \ddot{a} et $\ddot{\dot{a}}$ (des dérivées par rapport à t). Le complexe conjugué de chaque composante $\widehat{e}_\mu^{a+}(x, \Theta)$ peut être obtenu à partir de ces expressions.

A.2.2 Composantes de la connexions de spin

$$\widehat{\omega}_1^{11} = -\frac{\Theta^2}{128a^5} \left[4a^4\dot{a}\dot{a}' + 96a^3a'a'' \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\widehat{\omega}_1^{12} = \widehat{\omega}_1^{21} = -\frac{i\Theta}{4}\dot{a} \quad (\text{A.20})$$

$$\widehat{\omega}_1^{14} = \dot{a} + \frac{\Theta^2}{128a^4} \left[16a^4\dot{a}^3 + 4a^4\dot{a}'' + 14r^2a^4\dot{a}^5 + 12r^2\dot{a}a'^4 + 12a^2\dot{a}a'^2 \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\widehat{\omega}_1^{21} = -\frac{i\Theta}{4}\frac{\dot{a}}{a} \left[2ra\dot{a}' - 2r\dot{a}a' + a\dot{a} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\widehat{\omega}_1^{22} = -\frac{\Theta^2}{128a^5} \left[\begin{array}{l} -84a^5\dot{a}\dot{a}' - 88ra^5\dot{a}'^2 + 15a^4\dot{a}^2(a' - a\dot{a}^2) - 43r^2a^5\dot{a}^3\dot{a}' \\ +12r^2a^4\dot{a}\dot{a}'' (\dot{a} - a') + 39ra^4\dot{a}^2a'' + 8r^2a^4(\dot{a}'^2a' - \dot{a}a''\dot{a}') \\ -336ra^2a'^2a'' + 48ra^3(a'a''' - ra^2\dot{a}'\dot{a}'') + 240r^2aa'^3a'' \\ -144r^2a^2a'a''^2 + 48r^2a^2a''^3(a'' - a'^2) + 96a^3(a'a'' + ra''^3) \\ +192raa'^4 + 9r^2a^2\dot{a}^2a'^3 - 24ra^3\dot{a}^2a'^2 + 36r^2a^3\dot{a}a'^2\dot{a}' + \\ 32ra^4\dot{a}a'\dot{a}' - 60ra^5\dot{a}\dot{a}'' - 21r^2a^3\dot{a}^2a' - 96a'^3(a^2 + r^2a'^2) \end{array} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\widehat{\omega}_1^{24} = \frac{i\Theta}{4a^2} \left[-a^2\dot{a}' - ra\dot{a}'\dot{a}' - 2ra^2\dot{a}^3 + 3a\dot{a}a' - 3r\dot{a}a'^2 + 3ra\dot{a}a'' \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\widehat{\omega}_1^{41} = \dot{a} + \frac{\Theta^2}{128} \left[\begin{array}{l} ra^4\dot{a}^2(14\dot{a}' - 8r\dot{a}'') + a^3\dot{a}'(32a' + 80ra'') + r^2a^4\dot{a}(5\dot{a}^4 + 52\dot{a}') \\ +34r^2\dot{a}a'^4 + r^2a^2\dot{a}(26a''^2 + 29\dot{a}^2a'^2) - ra^2\dot{a}'\dot{a}'(96a' + 88ra'') \\ -ra^3\dot{a}^2(15r\dot{a}a'' + 41\dot{a}a' + 50ra') + 64r^2aa''^2(\dot{a}'\dot{a}' - \dot{a}a'') \\ +28ra^3a''^3 + 24ra^2(ra\dot{a}'a''' - r\dot{a}''a'^2 + a\dot{a}''\dot{a}' + a\dot{a}''a'') \\ +4\dot{a}(r^2a'a'' - ra\dot{a}'' - a^5\dot{a}^2) + a^2\dot{a}(56aa'' - 30a'^2) \end{array} \right] \quad (\text{A.25})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{\omega}_1^{42} = \frac{i\Theta}{4} \frac{\dot{a}}{a^2} \left[2aa' - ra^2\dot{a}^2 - 2raa'' \right] \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{\omega}_1^{44} = -\frac{\Theta^2}{128a^3} \left[\begin{aligned} & 2\dot{a}^2 \left(r^2a' \left(11a'^2 - 5aa'' \right) - ra \left(4aa'' + 3raa''' - 19 \right) + 8a^2a' \right) \\ & + 2ra\dot{a} \left(4a\dot{a}'' \left(ra' + 7a \right) + \dot{a}' \left(41raa'' - 43ra'^2 + 31aa' \right) \right) \\ & + 20a^2\dot{a}' \left(4a\dot{a} - r^2\dot{a}' \right) + 19ra\dot{a}^2a' \left(ra\dot{a}^2 - 2a' \right) \\ & + ra^3 \left(76\dot{a}'^2 - 4\dot{a}^4 + r\dot{a}' \left(48\dot{a}'' - 15\dot{a}^3 \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{\omega}_2^{11} = \frac{i\Theta}{4} \frac{a + ra'}{a^3} \left[4 \left(aa' - ra'^2 + ra'' \right) - 3ra^2\dot{a}^2 \right] \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -\left(1 + \frac{ra'}{a} \right) + \frac{\Theta^2}{128a^5} \left[\begin{aligned} & 54a' \left(a^3a' \left(r^2 + a'^3 + 1 \right) + ra \left(r^2aa''^2 - aa'^2 - ra'^3 \right) \right) \\ & + ra^2\dot{a}^2a' \left(20ra' \left(30a + 20ra' \right) - a^2 \left(88 + 5r^2\dot{a}^2 \right) \right) \\ & - r^2a^3\dot{a}^2a'' \left(83a + 39ra' \right) + 108raa'a'' \left(a^2 - r^2a'^2 \right) \\ & + ra\dot{a}\dot{a}' \left(9 + 61r^2a^2a' - 2ra^3 \left(29a' + 32ra'' \right) \right) \\ & 2r^3a^4 \left(2\dot{a}^2a''' - 2a'\dot{a}\dot{a}'' + 5a'\dot{a}'^2 \right) + 4a^5\dot{a}^2 \\ & + r^2a^5 \left(10\dot{a}'^2 + 33\dot{a}^4 + 30r\dot{a}^3\dot{a}' - 4\dot{a}\dot{a}'' \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{\omega}_2^{14} = -\frac{i\Theta}{4a^2} r \left[-2ra^2\dot{a}^3 + 2a\dot{a}a' - 4r\dot{a}a'^2 + 3ra\dot{a}a'' + a^2\dot{a}' + ra\dot{a}'a' \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = \left(1 + \frac{ra'}{a} \right) - \frac{\Theta^2}{128a^5} \left[\begin{aligned} & ra^2\dot{a}^2a' \left((14r^2\dot{a}^2 - 57)a^2 + ra' \left(42a + 39r \right) \right) - 8r^3a^4\dot{a}^2a''' \\ & + 54ra^2a'a'' \left(2a + r^2a'' \right) + ra^5\dot{a} \left(\dot{a}' \left(23r^2\dot{a}^2 - 18 \right) + 8r\dot{a}'' \right) \\ & - 2r \left(ra' + a \right) \left(20ra^4\dot{a}'^2 + 27 \right) + r^3a^3\dot{a}a' \left(8r^3aa'' - 45\dot{a}a'' \right) \\ & + r^2a^2\dot{a}^2 \left(29\dot{a}^2 - 99a^2a'' \right) + 54 \left(r^3a'^5 + a^3 \left(r^2a''^2 + a'^2 \right) \right) \\ & + 2r^2a^3\dot{a}\dot{a}' \left(30ra'^2 + 7a \left(a' - r^2a'' \right) \right) - 108r^3aa'^3a'' \end{aligned} \right] \quad (\text{A.31})$$

$$\hat{\omega}_2^{22} = \frac{i\Theta}{a^3} \left[ra^2a'' + r^2aa'a'' - ra^3\dot{a}^2 - r^2a^3\dot{a}\dot{a}' + a^2a' - r^2a'^3 \right] \quad (\text{A.32})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_2^{24} = -r\dot{a} + \frac{\Theta^2}{128a^4} \left[\begin{array}{l} 8a^4 (\dot{a}' + r\ddot{a}') + 2r^2a^2 (a + ra') (7\dot{a}'a'' - 4\dot{a}a''') \\ + r^2a\dot{a}^2\dot{a}' (77ra' - 31a^3) + 22raa'\dot{a}' (a^2 - r^2a'^2) \\ + 8r^2a^2\dot{a}'\dot{a}'' (ra' + 2a) - 54r^3a^3\dot{a} (\dot{a}^2a'' + a\dot{a}'^2) + \\ (39r^3a'^3 - a^3) \dot{a}a' - 8r^2a^2\dot{a}'a'^2 + ra^4\dot{a}^3 (14r^2\dot{a}^2 + 1) \\ + 2r^2a^2\dot{a}a'' (9a' + 5ra'') - a\dot{a}a'' (71r^2a'^2 + 17a^2) \\ + ra\dot{a}a''^2 (41a - 79ra') + r^2a^2\dot{a}^3a' (40ra' - 13a) \end{array} \right] \quad (\text{A.33})$$

$$\widehat{\omega}_2^{41} = -\frac{i\Theta}{a^2} [3ra^2\dot{a}' + a^2\dot{a} - 3r^2a'^2\dot{a} + 3r^2aa'\dot{a}' - r^2a^2\dot{a}^3 + r^2a\dot{a}a''] \quad (\text{A.34})$$

$$\widehat{\omega}_2^{42} = r\dot{a} + \frac{\Theta^2}{128a^4} \left[\begin{array}{l} 2r^2a\dot{a}a'' (15ra'^2 + 5ra + 18aa') + 3ra\dot{a}^2 (ra' - 8a) \\ + ra^3\dot{a}\dot{a}' (89ra\dot{a} + 54r^2a\dot{a}' - 72\dot{a}) - 64r^2a^3\dot{a}'a'' \\ - ra^3\dot{a}a'' (34 + 11r^2\dot{a}^2) + 4ra^2\dot{a}'' (r^2a'^2 + 2raa' + a^2) \\ + 8raa'\dot{a}' (7r^2a'^2 - 2raa' - 9a^2) + ra^4\dot{a}^3 (5r^2\dot{a}^2 + 22) \\ + r^3a^2\dot{a}'\dot{a}' (-19a\dot{a}^2 - 64a'') - 2\dot{a}a' (13a^3 + 18r^3a'^3) \\ + 2ra\dot{a}a' (a' (28a + 3ra') - 4r^2a^2\dot{a}a''' (ra' - a)) \end{array} \right] \quad (\text{A.35})$$

$$\widehat{\omega}_2^{44} = \frac{i\Theta}{4a} r\dot{a} [-3ra\dot{a}' + 4ra\dot{a}' + a\dot{a}] \quad (\text{A.36})$$

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin\theta \left(1 + r\frac{a'}{a} \right) + 16i\Theta \frac{\cos\theta}{a^2} [-3aa' + 2a^2\dot{a}^2 + 3ra'^2 - 3raa'']$$

$$+ \frac{\Theta^2}{a^5} \sin\theta \left[\begin{array}{l} 2r^3a^4\dot{a}a'\dot{a}'' - 4r^3a'^5 + 4raa'^3 (a - 3ra') \\ + ra^2\dot{a}^2\dot{a}' (14raa' - 5r^2a^2\dot{a}^2 + 10r^2a'^2 - 4a^2) \\ + 2ra^2a''' (r^2a^2\dot{a}^2 - 2a^2 - 4raa' - 2r^2a'^2) \\ + r^2a^5 (\dot{a}^4 + 4\dot{a}'^2 + 2\dot{a}\dot{a}'' + 2r\dot{a}^3\dot{a}') \\ - r^2a^3\dot{a}a'' (8ra\dot{a}' + 7r\dot{a}a' + 5a\dot{a}) + 6a^5\dot{a}^2 \\ + 4raa''' (r^2aa'' + r^2a'^2 + a^2 + 4raa') \\ + ra^3\dot{a}\dot{a}' (7r^2a'^2 + 2raa' + 17a) \\ + 4a^3\dot{a}' (r^3a^4\dot{a}'^2 + 3a') 4a^3a'' (r^2a'' - 2a) \end{array} \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos\theta + \frac{i\Theta}{a^3} \sin\theta [-ra^3\dot{a} (\dot{a} + r\dot{a}') + ra\dot{a}'' (a + ra') - r^2a'^3 + a^2\dot{a}']$$

$$+ \frac{\Theta^2}{128a^4} \cos\theta \left[\begin{array}{l} 18ra^2\dot{a}^2\dot{a}' (2ra' - a) + 4r (3ra' - 14a) \\ + ra^2a'' (64a' + 28ra''^2 - 45ra\dot{a}^2) \\ - 8ra^2a''' (a + ra') + r^2a^4\dot{a} (8\dot{a}'' + 9\dot{a}^3) \\ + r^2a^3\dot{a}' (45\dot{a}a' - 28a\dot{a}') - 32r^2aa'^2a'' \\ + 4a^2 (2a^2\dot{a}^2 + 11a'^2 - 4aa'') + 5ra^4\dot{a}\dot{a}' \end{array} \right] \quad (\text{A.38})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \frac{\sin \theta}{a} (a + ra') \quad (\text{A.39})$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos \theta \quad (\text{A.40})$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = -r\dot{a} \sin \theta \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_3^{43} = r\dot{a} \sin \theta + \frac{i\Theta}{4a} \cos \theta [a\ddot{a} - 2r\dot{a}a' + 3ra\dot{a}'] \\ + \frac{\Theta^2}{64a^4} \sin \theta \left[\begin{aligned} & -8a^3\dot{a}\dot{a}'(1 + 2r^2\dot{a}^2) + ra^4\dot{a}^3(2 + 5r^2\dot{a}^2) + 2r^3\dot{a}\dot{a}'^4 \\ & + 6ra\dot{a}\dot{a}'^2(2a - ra') + r^2a^2\dot{a}'a'(3ra\dot{a}^2 - 8a') \\ & + r^2a^4\dot{a}\dot{a}'(4r\dot{a}' + 3\dot{a}) + 4ra\dot{a}'a'(r^2a'^2 - 3a^2) \\ & + 2r^2a^2\dot{a}\dot{a}'''(a + ra') + 2r^3a^2\dot{a}''(a'^2 - 2a^2\dot{a}^2) \\ & + 2r^2a^2a'a''(5\dot{a} - 4r\dot{a}') + 2ra^3\dot{a}''(a + 2ra') \\ & + r^3\dot{a}\dot{a}''(4a - 5a^2\dot{a}^2 - 8a'^2) - 4ra^3a''(\dot{a} + 2r\dot{a}') \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\widehat{\omega}_4^{11} = \frac{\Theta^2}{64} \left[\begin{aligned} & 4r^2a\dot{a}\dot{a}''(3a\dot{a}'' - 23a'^2 + a^2\dot{a}^2) + 2ra^4\dot{a}\dot{a}'(ra' + a) \\ & + ra^3\dot{a}(23ra^2\dot{a}^3 - 36\dot{a}') - 12raa'^3(4r\dot{a}' + 5\dot{a}) \\ & - 4r^2a^3\dot{a}''(a\dot{a}^2 + 3a'') + 12a^2\dot{a}'a'(5ra' - a) \\ & + 12r^2a^2\dot{a}'''(\dot{a}a' - a\dot{a}') + 12\dot{a}a'^2(a^2 + 4r^2a'^2) \\ & + ra^2\dot{a}\dot{a}\dot{a}'(48 - 17a^2 + 15raa') - 10ra^4\dot{a}^2\dot{a}' \\ & - r^2a^4\dot{a}(14\dot{a}'a' + 13\dot{a}a'') + 10r^2a^2\dot{a}'a'(a\dot{a}^2 + 6a'') \\ & + 2ra^2a'(6\dot{a}'' - 5\dot{a}^3)(ra' - a) - 2a^5\dot{a}(3\dot{a} + 7r\dot{a}') \end{aligned} \right] \quad (\text{A.43})$$

$$\widehat{\omega}_4^{12} = -\frac{i\Theta}{2} r\dot{a}\ddot{a} \quad (\text{A.44})$$

$$\widehat{\omega}_4^{14} = \frac{\Theta^2}{64a^3} \left[\begin{aligned} & 2a^3\dot{a}'(r^2\dot{a}^2 + 1) - ra\dot{a}\dot{a}'(21ra\dot{a}^2 + 36a' + 20raa'') \\ & + 2a\dot{a}\dot{a}'(2ra' - 3r^2a\dot{a}^2 - a) + 4\dot{a}\dot{a}'(2r^2a'^2 + 7a^2) \\ & + 2r^2\dot{a}\dot{a}''(2a\dot{a}' - \dot{a}a') + 2raa''(26a\dot{a} + \dot{a}^2) \\ & + 2ra\dot{a}'(8a\dot{a}' + 6raa'' - 5ra') - 2ra\dot{a}\dot{a}''(ra' + a) \\ & + ra^3\dot{a}\dot{a}(5ra' - 6\dot{a}) + 12r^2a^2\dot{a}\dot{a}''' + 2a^2\dot{a}'^2(ra + r) \\ & + 2\dot{a}\dot{a}'(3r^2a\dot{a}^3 - 3r\dot{a}\dot{a}' + a\dot{a} - r^2\dot{a}'a') \end{aligned} \right] \quad (\text{A.45})$$

$$\widehat{\omega}_4^{21} = \frac{i\Theta}{2} r\dot{a}\ddot{a} \quad (\text{A.46})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_4^{22} = \frac{\Theta^2}{64a^5} \left[\begin{array}{l} -12a^3 2a\dot{a}'a' + 8a^5\ddot{a}\ddot{a} + 48r^2\dot{a}a'^4 + 12r^2a^5\dot{a}''\ddot{a} \\ +16r^2a^4\dot{a}\dot{a}'^2 + 12r^2a^5\dot{a}'\ddot{a}' + 39ra^5\dot{a}'\ddot{a} - 36ra^3\dot{a}'a'' \\ -48r^2a\dot{a}'a' + 23r^2\dot{a}^3\ddot{a} + 12r^2a'\dot{a}'' - 12r^2a^3a''\dot{a}'' \\ +14ra^5\dot{a}\ddot{a}' - 12ra^3a'\dot{a}'' - 2r^2a^4\dot{a}^2\dot{a}'' + 12r^2a^2\dot{a}\dot{a}''^2 \\ +60ra^2\dot{a}'a'^2 + 2r^2a^3\dot{a}^3a'' - 12r^2a^3\dot{a}'a''' + 12a^2\dot{a}a'^2 \\ +48ra^2\dot{a}\dot{a}'a'' + 6r^2a^3\dot{a}\ddot{a}a'^2 - 36ra^4\dot{a}a'\ddot{a} - 19r^2a^4\dot{a}\ddot{a}a'' \\ +12r^2a^2\dot{a}\dot{a}'a''' - 22r^2\dot{a}^2\dot{a}'a'' + 3r^2a^4\dot{a}'a'\ddot{a} + 2r^2a^4\dot{a}\dot{a}'\ddot{a} \\ +60r^2a^2\dot{a}'a'a'' - 72r^2a\dot{a}\dot{a}'^2a'' - 60ra\dot{a}\dot{a}' + 6r^2a^2\dot{a}^3a'^2 \end{array} \right] \quad (\text{A.47})$$

$$\widehat{\omega}_4^{24} = -\frac{i\Theta}{2a} [a + ra'\ddot{a}] \quad (\text{A.48})$$

$$\widehat{\omega}_4^{41} = \frac{\Theta^2}{64a^4} \left[\begin{array}{l} 2r^2a^3\dot{a}\ddot{a} (11a\dot{a}' - 9\dot{a}a') + a\dot{a}^2a' (13ra' - 14a) \\ +14a^3\dot{a}\dot{a}' + 2ra^2\dot{a}'' (12ra\dot{a}' + 7a\dot{a} - 5ra\dot{a}') \\ +ra\dot{a}a'' (ra\dot{a}' + ra\dot{a}' (22a^3 - 15) - 14a\dot{a}) \\ +ra\dot{a}'\dot{a}' (15ra\dot{a}' - 41a\dot{a} - 32ra\dot{a}') \\ +ra^3\dot{a}' (28\dot{a}' - 9ra^3) + r^2\dot{a}^2a' (17a'^2 + 9a^2\dot{a}^2) \end{array} \right] \quad (\text{A.49})$$

$$\widehat{\omega}_4^{42} = \frac{i\Theta}{2a^2} r\dot{a} [a\dot{a}' - \dot{a}a'] \quad (\text{A.50})$$

$$\widehat{\omega}_4^{44} = -\frac{\Theta^2}{64a^3} \left[\begin{array}{l} r^2a\dot{a}\ddot{a} (20a\dot{a}'' - 30a'^2 - 4a^2\dot{a}^2) \\ +4ra^2a'\ddot{a} (2\dot{a} - r\dot{a}') + r\dot{a}^3a' (5ra'^2 + 8a) \\ -ra\dot{a}\dot{a}' (8(a\dot{a} + 2ra') + 11ra\dot{a}') \\ +2a^3\ddot{a} (16r\dot{a}' + 5\dot{a}) + 4r^2a^2\dot{a}'' (3a\dot{a}' - \dot{a}^2) \\ +6ra^2\dot{a}\ddot{a}' (ra' + 3a) + 4r^2a\dot{a}^3a'' \end{array} \right] \quad (\text{A.51})$$

A.2.3 Composantes des tétrades $e_{\mu\nu}{}^a{}_\rho$

$$e_{11}{}^1{}_4 = \frac{1}{4}\dot{a}' \quad (\text{A.52})$$

$$e_{11}{}^4{}_1 = \frac{1}{4}(a\dot{a}' + \dot{a}a') \quad (\text{A.53})$$

$$e_{12}{}^1{}_2 = -e_{12}{}^2{}_1 = \frac{1}{4a}r (ra^2\dot{a}^2 - 2a\dot{a}' + 2ra'^2 - 2ra\dot{a}'') \quad (\text{A.54})$$

$$e_{12}{}^2{}_4 = \frac{1}{4a}(-r\dot{a}\dot{a}' + 2ra\dot{a}' + a\dot{a}) \quad (\text{A.55})$$

$$e_{12}{}^4{}_2 = \frac{1}{4}r(-r\dot{a}\dot{a}' + 2ra\dot{a}' + a\dot{a}) \quad (\text{A.56})$$

$$e_{13}{}^1{}_3 = \frac{1}{4a}r \sin^2 \theta (ra^2\dot{a}^2 - 2a\dot{a}' + 2ra'^2 - 2ra\dot{a}'') \quad (\text{A.57})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$e_{13}{}^3{}_1 = -\frac{1}{4a} \sin^2 \theta \left(r a^2 \dot{a}^2 - 2 a a' + 2 r a'^2 - 2 r a a'' \right) \quad (\text{A.58})$$

$$e_{13}{}^3{}_4 = -\frac{1}{4a} \sin \theta \left(r \dot{a} a' - 2 r a \ddot{a}' - a \dot{a} \right) \quad (\text{A.59})$$

$$e_{13}{}^4{}_3 = -\frac{1}{4} r \sin^2 \theta \left(r \dot{a} a' - 2 r a \ddot{a}' - a \dot{a} \right) \quad (\text{A.60})$$

$$e_{14}{}^1{}_4 = -\frac{1}{4} \ddot{a} \quad (\text{A.61})$$

$$e_{14}{}^4{}_1 = \frac{1}{4} \left(\dot{a}^2 - a \ddot{a} \right) \quad (\text{A.62})$$

$$e_{21}{}^1{}_2 = -\frac{1}{4a} \left(r^2 a^2 \dot{a}^2 + r a a' + 2 r^2 a'^2 - r^2 a a'' + a^2 \right) \quad (\text{A.63})$$

$$e_{21}{}^2{}_1 = \frac{1}{4a} r \left(a^2 \dot{a}^2 + 2 a'^2 - a a'' \right) \quad (\text{A.64})$$

$$e_{21}{}^2{}_4 = -\frac{1}{4a} r \left(a \dot{a}' - \dot{a} a' \right) \quad (\text{A.65})$$

$$e_{21}{}^4{}_2 = -\frac{1}{4} r \left(r a \ddot{a}' - 2 r \dot{a} a' - a \dot{a} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$e_{23}{}^1{}_3 = -\frac{1}{4} r \sin \theta \cos \theta \left(a + r a' \right) \quad (\text{A.67})$$

$$e_{23}{}^2{}_3 = -\frac{1}{4a} r \sin^2 \theta \left(2 r a a' + r^2 a'^2 - r^2 a^2 \dot{a}^2 - a^2 \right) \quad (\text{A.68})$$

$$e_{23}{}^3{}_1 = \frac{1}{4} \cos \theta \left(a + r a' \right) \quad (\text{A.69})$$

$$e_{23}{}^3{}_2 = \frac{1}{4a} r \sin \theta \left(2 r a a' + r^2 a'^2 - r^2 a^2 \dot{a}^2 - a^2 \right) \quad (\text{A.70})$$

$$e_{23}{}^3{}_4 = \frac{1}{4} r \dot{a} \cos \theta \quad (\text{A.71})$$

$$e_{23}{}^4{}_3 = \frac{1}{4} r^2 a \dot{a} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.72})$$

$$e_{24}{}^1{}_2 = \frac{1}{4a} r \left(-2 r \dot{a} a' + r a \ddot{a}' - a \dot{a} \right) \quad (\text{A.73})$$

$$e_{24}{}^2{}_1 = -\frac{1}{4a} \left(-2 r \dot{a} a' + r a \ddot{a}' - a \dot{a} \right) \quad (\text{A.74})$$

$$e_{24}{}^2{}_4 = -\frac{1}{4} r \ddot{a} \quad (\text{A.75})$$

$$e_{24}{}^4{}_2 = -\frac{1}{4} r^2 \left(a \ddot{a} - \dot{a}^2 \right) \quad (\text{A.76})$$

$$e_{31}{}^1{}_3 = -\frac{1}{4a} \sin^2 \theta \left(r^2 a^2 \dot{a}^2 + r a a' + 2 r^2 a'^2 - r^2 a a'' + a^2 \right) \quad (\text{A.77})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$e_{31}{}^2{}_3 = -\frac{1}{4} \cos \theta \sin \theta (a + ra') \quad (\text{A.78})$$

$$e_{31}{}^3{}_1 = \frac{1}{4a} r \sin \theta (a^2 \dot{a}^2 + 2a'^2 - aa'') \quad (\text{A.79})$$

$$e_{31}{}^3{}_2 = \frac{1}{4} \cos \theta (a + ra') \quad (\text{A.80})$$

$$e_{31}{}^3{}_4 = -\frac{1}{4a} r \sin \theta (-\dot{a}a' + a\dot{a}') \quad (\text{A.81})$$

$$e_{31}{}^4{}_3 = \frac{1}{4} r \sin^2 \theta (2r\dot{a}a' - ra\dot{a}' + a\dot{a}) \quad (\text{A.82})$$

$$e_{32}{}^1{}_3 = -\frac{1}{4} r (a + ra') \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.83})$$

$$e_{32}{}^2{}_3 = -\frac{1}{4a} r \left[(-2raa' - r^2 a'^2 + r^2 a^2 \dot{a}^2) \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta \right] \quad (\text{A.84})$$

$$e_{32}{}^3{}_2 = -\frac{1}{4a} r^2 \sin \theta (2aa' + ra'^2 - ra^2 \dot{a}^2) \quad (\text{A.85})$$

$$e_{32}{}^4{}_3 = \frac{1}{4} r^2 a \dot{a} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.86})$$

$$e_{34}{}^1{}_3 = \frac{1}{4a} r \sin^2 \theta (-2r\dot{a}a' + ra\dot{a}' - a\dot{a}) \quad (\text{A.87})$$

$$e_{34}{}^2{}_3 = -\frac{1}{4} r \dot{a} \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.88})$$

$$e_{34}{}^3{}_1 = -\frac{1}{4a} r \sin \theta (-2r\dot{a}a' + ra\dot{a}' - a\dot{a}) \quad (\text{A.89})$$

$$e_{34}{}^3{}_2 = \frac{1}{4} r \dot{a} \cos \theta \quad (\text{A.90})$$

$$e_{34}{}^3{}_4 = \frac{1}{4} r \dot{a} \sin \theta \quad (\text{A.91})$$

$$e_{34}{}^4{}_3 = \frac{1}{4} r^2 \sin^2 \theta (\dot{a}^2 - a\ddot{a}) \quad (\text{A.92})$$

$$e_{41}{}^1{}_4 = \frac{1}{2} \ddot{a} \quad (\text{A.93})$$

$$e_{41}{}^4{}_1 = \frac{1}{2} a\ddot{a} \quad (\text{A.94})$$

$$e_{42}{}^1{}_2 = -\frac{1}{2a} r^2 (a\dot{a}' - \dot{a}a') \quad (\text{A.95})$$

$$e_{42}{}^2{}_1 = \frac{1}{2a} r (a\dot{a}' - \dot{a}a') \quad (\text{A.96})$$

$$e_{42}{}^2{}_4 = \frac{1}{2} r \ddot{a} \quad (\text{A.97})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$e_{42}{}^4{}_2 = \frac{1}{2}r^2 a\ddot{a} \quad (\text{A.98})$$

$$e_{43}{}^1{}_3 = -\frac{1}{2a}r^2 \sin^2 \theta (a\dot{a}' - \dot{a}a') \quad (\text{A.99})$$

$$e_{43}{}^3{}_1 = \frac{1}{2a}r \sin \theta (a\dot{a}' - \dot{a}a') \quad (\text{A.100})$$

$$e_{43}{}^3{}_4 = \frac{1}{2}r \sin \theta \ddot{a} \quad (\text{A.101})$$

$$e_{43}{}^4{}_3 = \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta a\ddot{a} \quad (\text{A.102})$$

A.3 Composantes des connexions de spin pour la métrique de Bardeen-Vaidya

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.103})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{12} = \frac{1}{r(3r-2t)^2} \left[27r^3 + 3r^2(1-15t) + r(1-2t+24t^2) - 4t^3 \right] \quad (\text{A.104})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{21} = \hat{\omega}_1{}^{12} = \left[1 - \frac{25}{32}\Theta^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (3r^2 + 2t^2 - 5rt) \right] \quad (\text{A.105})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{22} = \frac{\Theta^2}{32r^2} \left[5r(3\cos^2 \theta - 2) - 4t\sin^2 \theta \right] \quad (\text{A.106})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{31} = \frac{7\Theta^2}{64} \sin \theta \cos \theta \frac{(t-r)}{r^2 \sqrt{r(3r-2t)}^3} \left[27r^3 + 3r^2(1-15t) + r(1-2t+24t^2) - 4t^3 \right] \quad (\text{A.107})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{32} = -\frac{\Theta^2}{32} \sin \theta \cos \theta r (6t + 11r) \sqrt{r(3r-2t)} \quad (\text{A.108})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{33} = \frac{\Theta^2}{32} \frac{1}{r^2} \left[\sin^2 \theta (23t - 25r) - 3r \right] \quad (\text{A.109})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{34} = -\hat{\omega}_1{}^{43} = -\frac{i\Theta}{2r} \sin \theta \quad (\text{A.110})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{41} = \frac{i\Theta}{2} \frac{\cos \theta}{r^2 \sqrt{r(3r-2t)}^3} \left[27r^3 + 3r^2(1-15t) + r(1-2t+24t^2) - 4t^3 \right] \quad (\text{A.111})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{42} = -\frac{i\Theta}{2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{r(3r-2t)}} \quad (\text{A.112})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{\omega}_1^{44} = \frac{\Theta^2}{32r^2} \left[r \left(35 \cos^2 \theta - 31 \right) - 23t \sin^2 \theta \right] \quad (\text{A.113})$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = \frac{1}{(3r - 2t)^2} \quad (\text{A.114})$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = \frac{-1}{(3r - 2t)^2} \left[1 + \frac{5\Theta^2 \sin^2 \theta}{32 r^2} (5rt - 3r^2 - 2t^2) \right] \quad (\text{A.115})$$

$$\hat{\omega}_2^{22} = \frac{\Theta^2 t}{32 r^3} \left[4t \sin^2 \theta + r \left(10 - 15 \cos^2 \theta \right) \right] \quad (\text{A.116})$$

$$\hat{\omega}_2^{31} = \frac{7}{64} \Theta^2 \sin \theta \cos \theta \frac{t - r}{r (3r - 2t)^2} \quad (\text{A.117})$$

$$\hat{\omega}_2^{32} = \frac{\Theta^2}{32} \sin \theta \cos \theta \frac{t}{r^2} \frac{(6t + 11r)}{\sqrt{r(3r - 2t)}} \quad (\text{A.118})$$

$$\hat{\omega}_2^{33} = \frac{\Theta^2 t}{32 r^3} \sin^2 \theta (28r - 23t) \quad (\text{A.119})$$

$$\hat{\omega}_2^{34} = \frac{i\Theta t}{2 r^2} \sin \theta \quad (\text{A.120})$$

$$\hat{\omega}_2^{41} = \frac{i\Theta}{2} \cos \theta \frac{1}{\sqrt{r(3r - 2t)^3}} \quad (\text{A.121})$$

$$\hat{\omega}_2^{42} = \frac{i\Theta}{2} \cos \theta \frac{t}{r \sqrt{r(3r - 2t)}} \quad (\text{A.122})$$

$$\hat{\omega}_2^{43} = -\frac{i\Theta}{2} \sin \theta \frac{t}{r^2} \quad (\text{A.123})$$

$$\hat{\omega}_2^{44} = \frac{\Theta^2 t}{32 r^3} \left[r \left(31 - 35 \cos^2 \theta \right) - 23t \sin^2 \theta \right] \quad (\text{A.124})$$

$$\hat{\omega}_3^{22} = \frac{\Theta^2 \sin \theta \cos \theta}{32 r^2} (3r - 2t) (2t + 11r) \quad (\text{A.125})$$

$$\hat{\omega}_3^{23} = -\sqrt{\frac{3r - 2t}{r}} \left[1 - \frac{\Theta^2}{64r^2} \left[r^2 (10 \cos^2 \theta - 7) + rt (\sin^2 \theta + 2) - 10t^2 \sin^2 \theta \right] \right] \quad (\text{A.126})$$

$$\hat{\omega}_3^{24} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \left(\frac{2t}{r} - 1 \right) \sqrt{\frac{3r - 2t}{r}} \quad (\text{A.127})$$

$$\hat{\omega}_3^{32} = \sqrt{\frac{3r - 2t}{r}} \left[1 + \frac{\Theta^2}{32r^2} \left[r^2 (24 \cos^2 \theta - 9) + rt (17 - 25 \cos^2 \theta) - 14t^2 \sin^2 \theta \right] \right] \quad (\text{A.128})$$

$$\hat{\omega}_3^{33} = \frac{\Theta^2 \sin \theta \cos \theta}{64 r^2} (51r^2 + 54t^2 - 131rt) \quad (\text{A.129})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{\omega}_3^{34} = \hat{\omega}_3^{43} = \frac{i\Theta}{4} \cos \theta \frac{3r-2t}{r} \quad (\text{A.130})$$

$$\hat{\omega}_3^{42} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \frac{4t-3r}{r} \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \quad (\text{A.131})$$

$$\hat{\omega}_3^{44} = \frac{3}{64} \Theta^2 \sin \theta \cos \theta \frac{(r-t)(31r-10t)}{r^2} \quad (\text{A.132})$$

$$\hat{\omega}_4^{22} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \cos \theta \frac{3r-2t}{r} \quad (\text{A.133})$$

$$\hat{\omega}_4^{23} = \frac{i\Theta}{4} \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \left[\frac{\sin^2 \theta (r-2t)}{r} + 1 \right] \quad (\text{A.134})$$

$$\hat{\omega}_4^{24} = -\sin \theta \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \left[1 - \frac{\Theta^2}{64} \left[r^2 (31 \cos^2 \theta - 11) + tr (19 - 14 \cos^2 \theta) - 10t^2 \sin^2 \theta \right] \right] \quad (\text{A.135})$$

$$\hat{\omega}_4^{32} = \frac{i\Theta}{4} \sin^2 \theta \frac{(3r-4t)}{r} \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \quad (\text{A.136})$$

$$\hat{\omega}_4^{33} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \cos \theta \frac{5r-6t}{r} \quad (\text{A.137})$$

$$\hat{\omega}_4^{34} = -\cos \theta + \frac{\Theta^2}{64r^2} \cos \theta \left[\sin^2 \theta (39r^2 + 66t^2 - 107rt) - 2 \cos^2 \theta (3r^2 - 2rt) \right] \quad (\text{A.138})$$

$$\hat{\omega}_4^{42} = \sin \theta \sqrt{\frac{3r-2t}{r}} \left[r^2 + \frac{\Theta^2}{64} \left[2 \sin^2 \theta (15rt - r^2 - 14t^2) + r \cos^2 \theta (r-t) \right] \right] \quad (\text{A.139})$$

$$\hat{\omega}_4^{43} = 1 - \frac{\Theta^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{64 r^2} (33r^2 + 58t^2 - 91rt) \quad (\text{A.140})$$

$$\hat{\omega}_4^{44} = 2i\Theta \sin \theta \cos \theta \left(\frac{r-t}{r} \right) \quad (\text{A.141})$$

A.4 Propriétés de la métrique FRW pour différents cas de $\Theta_{\mu\nu}$

A.4.1 Premier cas

Soit la matrice $\Theta_{\mu\nu}$ ayant la forme suivante :

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.142})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composantes de la métrique :

$$\hat{g}_{11} = t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} \sin^2 \theta \beta^2 (21r^2 \beta^2 t^{2\beta} - 18t^2) t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.143})$$

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = -\frac{19}{64} \Theta^2 \sin \theta \cos \theta r \beta^2 t^{2(2\beta-1)} \quad (\text{A.144})$$

$$\hat{g}_{13} = \hat{g}_{31} = \frac{i\Theta}{4} \sin^2 \theta (1 - 2r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)}) t^{2\beta} \quad (\text{A.145})$$

$$\hat{g}_{14} = \hat{g}_{41} = \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 \sin^2 \theta (28 - 25\beta) t^{4\beta-3} \quad (\text{A.146})$$

$$\hat{g}_{22} = r^2 t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{32} t^{2\beta} [7r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(2\beta-1)} + (3r^2 \beta^2 t^{2\beta} - 2t^2) \cos^2 \theta - 5r^2 \beta^2 t^{2\beta}] \quad (\text{A.147})$$

$$\hat{g}_{23} = -\hat{g}_{32} = -\frac{i\Theta}{2} r \sin \theta \cos \theta t^{2\beta} \quad (\text{A.148})$$

$$\hat{g}_{24} = \hat{g}_{42} = -\frac{\Theta^2}{128} \sin \theta \cos \theta \beta [r^2 \beta (8 + 19\beta) t^{2(\beta-1)} + 4] t^{2\beta-1} \quad (\text{A.149})$$

$$\hat{g}_{33} = r^2 \sin^2 \theta t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} \sin^2 \theta t^{2\beta} [-21r^4 \beta^4 \cos^2 \theta t^{4(\beta-1)} + r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} (43 \cos^2 \theta - 45) + 4] \quad (\text{A.150})$$

$$\hat{g}_{34} = -\hat{g}_{43} = \frac{i\Theta}{2} r \beta \sin^2 \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.151})$$

$$\hat{g}_{44} = -1 - \frac{\Theta^2}{32} \beta (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} (18r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1) \quad (\text{A.152})$$

Composantes des tétrades :

$$\hat{e}^1_1 = t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} \sin^2 \theta \beta^2 t^{3\beta-2} [17r^2 \beta^2 t^{2\beta} - 18] \quad (\text{A.153})$$

$$\hat{e}^1_2 = -\frac{\Theta^2}{32} \sin \theta \cos \theta \beta^2 t^{3\beta-2} \quad (\text{A.154})$$

$$\hat{e}^1_3 = -\frac{i\Theta}{4} r \beta^2 \sin \theta t^{3\beta-2} \quad (\text{A.155})$$

$$\hat{e}^1_4 = -\frac{\Theta^2}{128} r \beta^3 \sin \theta \quad (\text{A.156})$$

$$\hat{e}^2_1 = -\frac{13}{64} \Theta^2 \beta^2 r \sin \theta \cos \theta t^{3\beta-2} \quad (\text{A.157})$$

$$\hat{e}^2_2 = r t^\beta + \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 \sin^2 \theta t^{3\beta-2} [7r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 5] \quad (\text{A.158})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{e}^2_3 = \frac{i\Theta}{4} \cos \theta t^\beta \quad (\text{A.159})$$

$$\hat{e}^2_4 = \frac{\Theta^2}{128} \beta \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} [11r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 4] \quad (\text{A.160})$$

$$\hat{e}^3_1 = \frac{i\Theta}{4} \sin^2 \theta t^\beta [r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 1] \quad (\text{A.161})$$

$$\hat{e}^3_2 = -\frac{i\Theta}{4} \sin \theta \cos \theta t^\beta \quad (\text{A.162})$$

$$\hat{e}^3_3 = r \sin \theta t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 \sin \theta t^{3\beta-2} [17r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 19 \cos^2 \theta - 21] \quad (\text{A.163})$$

$$\hat{e}^3_4 = \frac{i\Theta}{2} r \beta \sin^2 \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.164})$$

$$\hat{e}^4_1 = -\frac{7}{32} \Theta^2 r \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.165})$$

$$\hat{e}^4_2 = -\frac{\Theta^2}{16} \sin \theta \cos \theta r \beta^2 (\beta - 1) t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.166})$$

$$\hat{e}^4_4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64} \beta (1 - \beta) \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} [18r^2 \beta^2 t^{2\beta} + 1] \quad (\text{A.167})$$

Composantes de la connexion de spin :

$$\hat{\omega}_1^{11} = \frac{27}{128} \Theta^2 r \beta^4 \sin^2 \theta t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.168})$$

$$\hat{\omega}_1^{12} = \frac{3}{128} \Theta^2 r \beta^4 \sin \theta \cos \theta t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.169})$$

$$\hat{\omega}_1^{13} = -\frac{i\Theta}{4} \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.170})$$

$$\hat{\omega}_1^{14} = -\beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} \beta^3 \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} [7r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 8] \quad (\text{A.171})$$

$$\hat{\omega}_1^{21} = \frac{\Theta^2}{128} r \beta^4 \sin \theta \cos \theta t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.172})$$

$$\hat{\omega}_1^{24} = \frac{3}{32} \Theta^2 \beta^3 \sin \theta \cos \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.173})$$

$$\hat{\omega}_1^{31} = -\frac{i\Theta}{4} \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.174})$$

$$\hat{\omega}_1^{33} = \frac{15}{128} \Theta^2 r \beta^4 \sin^2 \theta t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.175})$$

$$\hat{\omega}_1^{34} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^3 \sin \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.176})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{\omega}_1^{41} = \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{128} \beta^3 \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} [5r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 4] \quad (\text{A.177})$$

$$\hat{\omega}_1^{42} = \frac{\Theta^2}{16} \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.178})$$

$$\hat{\omega}_1^{43} = -\frac{i\Theta}{4} r \beta^3 \sin \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.179})$$

$$\hat{\omega}_1^{44} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^4 \sin^2 \theta t^{4(\beta-1)} \quad (\text{A.180})$$

$$\hat{\omega}_2^{11} = \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} [25r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 8] \quad (\text{A.181})$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -1 + \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 t^{2(\beta-1)} [\sin^2 \theta (r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 4) + 2] \quad (\text{A.182})$$

$$\hat{\omega}_2^{13} = -\frac{i\Theta}{4} r \beta^2 \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.183})$$

$$\hat{\omega}_2^{14} = \frac{3}{32} \Theta^2 r \beta^3 \sin \theta \cos \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.184})$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = 1 - \frac{\Theta^2}{32} \beta^2 \cos^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.185})$$

$$\hat{\omega}_2^{22} = \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} [4 - 5r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)}] \quad (\text{A.186})$$

$$\hat{\omega}_2^{24} = -r \beta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{16} r \beta^3 \cos^2 \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.187})$$

$$\hat{\omega}_2^{31} = \frac{i\Theta}{4} r \beta^2 \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.188})$$

$$\hat{\omega}_2^{32} = -i\Theta r \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.189})$$

$$\hat{\omega}_2^{33} = \frac{3}{128} \Theta^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} [7r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 12] \quad (\text{A.190})$$

$$\hat{\omega}_2^{41} = -\frac{5}{32} \Theta^2 r \beta^3 \sin \theta \cos \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.191})$$

$$\hat{\omega}_2^{42} = r \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} r \beta^3 t^{3(\beta-1)} [\sin^2 \theta (4 + 5r^2 \beta^2 \cos^2 \theta t^{2(\beta-1)}) + 4] \quad (\text{A.192})$$

$$\hat{\omega}_2^{43} = \frac{i\Theta}{4} \beta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.193})$$

$$\hat{\omega}_2^{44} = -\frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} [r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 20] \quad (\text{A.194})$$

$$\hat{\omega}_3^{11} = -\frac{3i\Theta}{4} r \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.195})$$

$$\hat{\omega}_3^{12} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.196})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin \theta + \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} \left[\sin^2 \theta (33r^2 \beta^2 - 8) + 16 \right] \quad (\text{A.197})$$

$$\widehat{\omega}_3^{14} = \frac{i\Theta}{2} r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.198})$$

$$\widehat{\omega}_3^{21} = -\frac{i\Theta}{4} r \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.199})$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos \theta - \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 \sin^2 \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \left[3r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 2 \right] \quad (\text{A.200})$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin \theta + \frac{\Theta^2}{128} \sin \theta \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left[8 \cos^2 \theta - 29r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.201})$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos \theta - \frac{\Theta^2}{128} \beta^2 \sin^2 \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \left[17r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 8 \right] \quad (\text{A.202})$$

$$\widehat{\omega}_3^{33} = -i\Theta r \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.203})$$

$$\widehat{\omega}_3^{33} = -r\beta \sin \theta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 \sin \theta t^{3(\beta-1)} \left[\sin^2 \theta (14r^2 \beta^4 t^{2(\beta-1)} + 1) + 3 \cos^2 \theta \right] \quad (\text{A.204})$$

$$\widehat{\omega}_3^{41} = \frac{i\Theta}{4} \beta \sin^2 \theta t^{\beta-1} \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 1 \right] \quad (\text{A.205})$$

$$\widehat{\omega}_3^{42} = -\frac{i\Theta}{4} \beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.206})$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{128} r \beta^3 \sin \theta t^{3(\beta-1)} \left[5r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 21 \cos^2 \theta + 22 \right] \quad (\text{A.207})$$

$$\widehat{\omega}_3^{44} = \frac{i\Theta}{4} r \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.208})$$

$$\widehat{\omega}_4^{11} = \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \left[23r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 6 \right] \quad (\text{A.209})$$

$$\widehat{\omega}_4^{12} = -\frac{\Theta^2}{32} \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.210})$$

$$\widehat{\omega}_4^{13} = \widehat{\omega}_4^{31} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.211})$$

$$\widehat{\omega}_4^{14} = -\frac{3}{32} \Theta^2 r \beta^3 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{3\beta-4} \quad (\text{A.212})$$

$$\widehat{\omega}_4^{21} = -\frac{\Theta^2}{16} \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.213})$$

$$\widehat{\omega}_4^{24} = -\frac{\Theta^2}{32} r \beta^3 (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{3\beta-4} \quad (\text{A.214})$$

$$\widehat{\omega}_4^{33} = \frac{\Theta^2}{64} \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \left[23r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 8 \right] \quad (\text{A.215})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\hat{\omega}_4^{34} = -\frac{i\Theta}{2}\beta(\beta-1)\sin\theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.216})$$

$$\hat{\omega}_4^{42} = \frac{\Theta^2}{8}r\beta^3(\beta-1)\sin\theta\cos\theta t^{3\beta-4} \quad (\text{A.217})$$

$$\hat{\omega}_4^{44} = -\frac{\Theta^2}{32}\beta^2(\beta-1)\sin^2\theta t^{2\beta-3} \left[5 - 2r^2\beta^2 t^{2(\beta-1)}\right] \quad (\text{A.218})$$

A.4.2 Deuxième cas

Soit la forme suivante pour la matrice $\Theta_{\mu\nu}$:

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.219})$$

Composantes de la métrique :

$$\hat{g}_{11} = t^{2\beta} - \frac{\Theta^2}{64}\beta^2 t^{4(\beta-1)} \left[69\beta^2 + 91\beta + 26\right] \quad (\text{A.220})$$

$$\hat{g}_{22} = t^{2\beta} - \frac{\Theta^2}{32}\beta t^{2(\beta-1)} \left[r^2\beta t^{2(\beta-1)} \left(-12\beta^2 + 13\beta - 1\right) - 8\right] \quad (\text{A.221})$$

$$\hat{g}_{33} = r^2 \sin^2\theta t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{32}\beta t^{2(\beta-1)} \left[r^2\beta t^{2(\beta-1)} \left(-12\beta^2 + 13\beta - 1\right) - 8\right] \quad (\text{A.222})$$

$$\hat{g}_{44} = -1 + \frac{\Theta^2}{32}\beta^2 t^{2(\beta-2)} \left[-29\beta^2 + 64\beta - 35\right] \quad (\text{A.223})$$

Composantes de la métrique inverse :

$$\hat{g}^{11} = t^{-2\beta} + \frac{\Theta^2}{4096}\beta^2 t^{-4} \left[\left(63\beta^2 - 123\beta + 60\right) t^{-2\beta-4} - 128 \left(35\beta^2 - 64\beta + 35\right)\right] \quad (\text{A.224})$$

$$\hat{g}^{14} = \frac{i\Theta}{4}\beta(3-4\beta)t^{-2} \quad (\text{A.225})$$

$$\hat{g}^{22} = \frac{t^{-2\beta}}{r^2} + \frac{\Theta^2}{32r^2}\beta t^{-4} \left[\beta \left(12\beta^2 - 13\beta + 1\right) - \frac{2}{r^2} \left(13\beta - 4\right) t^{2(1-\beta)}\right] \quad (\text{A.226})$$

$$\hat{g}^{33} = \frac{t^{-2\beta}}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{\Theta^2}{32r^2 \sin^2\theta}\beta \left[\beta \left(12\beta^2 - 13\beta + 1\right) - \frac{2}{r^2} \left(13\beta - 4\right) t^{2(1-\beta)}\right] \quad (\text{A.227})$$

$$\hat{g}^{41} = -\frac{i\Theta}{4}\beta(3-4\beta)t^{-4} \quad (\text{A.228})$$

$$\hat{g}^{44} = t^{-8} + 2\Theta^2\beta^2 t^{2\beta} \left(-3\beta^2 - 16\beta + 17\right) \quad (\text{A.229})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composante des tétrades $\hat{e}^a{}_\mu$:

$$\hat{e}^1{}_1 = t^\beta - \frac{\Theta^2}{128}\beta^2 (33\beta^2 - 43\beta + 10) t^{3\beta-4} \quad (\text{A.230})$$

$$\hat{e}^1{}_4 = -\frac{i\Theta}{4}\beta (3\beta - 2) t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.231})$$

$$\hat{e}^2{}_2 = rt + \frac{i\Theta}{4}\beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64}r\beta^2 (-12\beta^2 + 13\beta - 1) t^{3\beta-4} \quad (\text{A.232})$$

$$\hat{e}^3{}_3 = r \sin \theta t^\beta + \frac{i\Theta}{4}\beta \sin \theta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64}r\beta^2 \sin \theta (-12\beta^2 + 13\beta - 1) t^{3\beta-4} \quad (\text{A.233})$$

$$\hat{e}^4{}_1 = -\frac{i\Theta}{4}\beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.234})$$

$$\hat{e}^4{}_4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64}\beta^2 (27\beta^2 - 60\beta + 33) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.235})$$

Composantes des tétrades inverses $\hat{e}^\mu{}_a$:

$$\hat{e}^1{}_1 = t^{-(\beta+4)} + \frac{\Theta^2}{128}\beta^2 (54\beta^2 + 12\beta + 66) t^{\beta-8} \quad (\text{A.236})$$

$$\hat{e}^4{}_1 = \frac{i\Theta}{4}\beta (1 - \beta) t^{-10} \quad (\text{A.237})$$

$$\hat{e}^2{}_2 = \frac{t^{-\beta}}{r} + \frac{i\Theta}{4r^2}\beta t^{-(\beta+1)} + \Theta^2\beta \left[r\beta (12\beta^2 - 13\beta + 1) t^\beta + \frac{8}{r} (4 - 13\beta) t^{2-\beta} \right] \quad (\text{A.238})$$

$$\hat{e}^3{}_3 = \frac{t^{-\beta}}{r \sin \theta} + \frac{i\Theta}{4r^2 \sin \theta}\beta t^{-(\beta+1)} + \frac{\Theta^2}{r \sin \theta}\beta \left[r\beta^2 t^\beta (12\beta^2 - 13\beta + 1) + 8 (4 - 13\beta) \right] \quad (\text{A.239})$$

$$\hat{e}^4{}_4 = \frac{i\Theta}{4}\beta (2 - 3\beta) t^{\beta-2} \quad (\text{A.240})$$

$$\hat{e}^4{}_4 = 1 + \frac{\Theta^2}{4096}t^{2(\beta-2)} \left[(t^{-4} - 3072) \beta^2 - (123t^{-4} + 5312) \beta + 60t^{-4} - 2240 \right] \quad (\text{A.241})$$

Composantes de la connexion de spin :

$$\hat{\omega}_1{}^{11} = i\Theta\beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.242})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{14} = \hat{\omega}_1{}^{41} = -\beta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{64}\beta^3 t^{3\beta} [27(\beta^2 + 1) - 54\beta] \quad (\text{A.243})$$

$$\hat{\omega}_1{}^{44} = \hat{\omega}_1{}^{44} = -i\Theta\beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.244})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_2^{12} = -1 + i\Theta r\beta(\beta-1)t^{2\beta-3} + \frac{\Theta^2}{32}\beta^2(-5\beta^2+8\beta-3)t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.245})$$

$$\widehat{\omega}_2^{24} = -r\beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.246})$$

$$\widehat{\omega}_2^{42} = r\beta t^{\beta-1} + \frac{3i\Theta}{4}\beta(1-\beta)t^{\beta-2} - \frac{\Theta^2}{16}r\beta^3(1-\beta)t^{3\beta-5} \quad (\text{A.247})$$

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin\theta + i\Theta r\beta^2\sin\theta t^{2\beta-3} + \frac{\Theta^2}{32}\beta^2\sin\theta(-5\beta^2+8\beta-3)t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.248})$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\widehat{\omega}_3^{32} = -\cos\theta \quad (\text{A.249})$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin\theta \quad (\text{A.250})$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = -r\beta\sin\theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.251})$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = r\beta\sin\theta t^{\beta-1} + \frac{3i\Theta}{4}\beta(1-\beta)\sin\theta t^{\beta-2} - \frac{\Theta^2}{16}r\beta^3(1-\beta)\sin\theta t^{3\beta-5} \quad (\text{A.252})$$

$$\widehat{\omega}_4^{11} = -\widehat{\omega}_4^{44} = \frac{3}{8}\Theta^2\beta^2(\beta-1)^2(\beta-2)t^{2\beta-3} \quad (\text{A.253})$$

A.4.3 Troisième cas

Soit le cas suivant où $\Theta_{\mu\nu}$ est donnée par :

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & -\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.254})$$

Composantes de la métrique :

$$\widehat{g}_{11} = t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64}r^2\beta^2t^{2(2\beta-1)}[14r^2\beta^2\sin^2\theta t^{2(\beta-1)} + 14\cos^2\theta - 17] \quad (\text{A.255})$$

$$\widehat{g}_{12} = \widehat{g}_{21} = -\frac{\Theta^2}{128}r\sin\theta\cos\theta t^{2\beta}[25r^2\beta t^{2(\beta-1)} + 12] \quad (\text{A.256})$$

$$\widehat{g}_{13} = \widehat{g}_{31} = \frac{i\Theta}{2}r\sin\theta\cos\theta t^{2\beta} \quad (\text{A.257})$$

$$\widehat{g}_{14} = \frac{\Theta^2}{128}r\beta t^{2\beta-3}[t^2(10\cos^2\theta - 15) + 2r^2\beta\sin^2\theta t^{2\beta}(32 - 19\beta)] \quad (\text{A.258})$$

$$\widehat{g}_{22} = r^2t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64}r^2t^{2\beta}[21r^4\beta^4\sin^2\theta t^{4(\beta-1)} + r^2\beta^2t^{2(\beta-1)}(7 - 25\cos^2\theta) + 6(2 - 3\cos^2\theta)] \quad (\text{A.259})$$

$$\widehat{g}_{23} = -\widehat{g}_{32} = \frac{i\Theta}{4}r^2t^{2\beta}[2r^2\beta^2\sin^2\theta t^{2(\beta-1)} - 2\cos^2\theta + 1] \quad (\text{A.260})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{g}_{24} = \widehat{g}_{42} = \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-3} \left[r^2 \beta t^{2\beta} (28 - 25\beta) - 12t^2 \right] \quad (\text{A.261})$$

$$\widehat{g}_{33} = r^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta+1)} - \frac{\Theta^2}{64} r^2 t^{4\beta} \left[\begin{array}{l} r^4 \beta^4 \theta t^{2(\beta-1)} [42 \cos^2 \theta - 21 (1 + \cos^4 \theta)] \\ + r^2 \beta^2 [\cos^2 \theta (51 - 48 \cos^2 \theta) - 3] + 2 (\cos^2 \theta - 3) \end{array} \right] \quad (\text{A.262})$$

$$\widehat{g}_{34} = \widehat{g}_{43} = -\frac{i\Theta}{2} r^2 \beta \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.263})$$

$$\widehat{g}_{41} = \frac{\Theta^2}{128} r \beta t^{2\beta-1} \left[10 \cos \theta - 15 - 2r^2 \beta \sin^2 \theta (9\beta + 8) t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.264})$$

$$\widehat{g}_{44} = -1 + \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta (\beta - 1) t^{2(\beta-2)} \left[18r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^2 + t^{2\beta} (7 - 6 \cos^2 \theta) \right] \quad (\text{A.265})$$

Composantes des tétrades $\widehat{e}^a{}_\mu$:

$$\widehat{e}^1{}_1 = t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta^2 t^{3\beta-2} \left[14 \left(r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + \cos^2 \theta \right) - 17 \right] \quad (\text{A.266})$$

$$\widehat{e}^1{}_2 = -\frac{7}{32} \Theta^2 r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{3\beta-2} \quad (\text{A.267})$$

$$\widehat{e}^1{}_4 = \frac{\Theta^2}{128} r \beta t^{2\beta-1} \left[22r^2 \beta^2 \sin^2 \theta - 10 \cos^2 \theta + 15 \right] \quad (\text{A.268})$$

$$\widehat{e}^2{}_1 = \frac{3}{128} \Theta^2 r \sin \theta \cos \theta t^\beta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 4 \right] \quad (\text{A.269})$$

$$\widehat{e}^2{}_2 = r t^\beta - \frac{\Theta^2}{128} r t^\beta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(25 \cos^2 \theta - 17r^2 \beta^2 t^{2\beta+2} \sin^2 \theta - 7 \right) + 6 \left(2 \cos^2 \theta - 3 \right) \right] \quad (\text{A.270})$$

$$\widehat{e}^2{}_3 = -\frac{i\Theta}{4} r^3 \beta^2 \sin \theta t^{3\beta-2} \quad (\text{A.271})$$

$$\widehat{e}^2{}_4 = \frac{3}{128} \Theta^2 r^2 \beta \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} \left(4 - r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \right) \quad (\text{A.272})$$

$$\widehat{e}^3{}_1 = -\frac{i\Theta}{2} r \sin \theta \cos \theta t^\beta \quad (\text{A.273})$$

$$\widehat{e}^3{}_2 = \frac{i\Theta}{4} r t^\beta \left[\sin^2 \theta \left(r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 2 \right) - 1 \right] \quad (\text{A.274})$$

$$\widehat{e}^3{}_3 = r \sin \theta t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r \sin \theta t^\beta \left[2t^2 + 17r^4 \beta^4 \sin \theta t^{4\beta} - r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(16 + 5 \cos^2 \theta \right) \right] \quad (\text{A.275})$$

$$\widehat{e}^3{}_4 = \frac{i\Theta}{2} r^2 \beta \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.276})$$

$$\widehat{e}^4{}_1 = \frac{\Theta^2}{8} r^3 \beta^3 (1 - \beta) \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.277})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{e}^4_2 = \frac{7}{32} \Theta^2 r^3 \beta^2 (1 - \beta) \sin \theta \cos \theta t^{3(\beta-1)} \quad (\text{A.278})$$

$$\widehat{e}^4_4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta (1 - \beta) t^{2(\beta-1)} \left[18r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 6 \cos^2 \theta + 7 \right] \quad (\text{A.279})$$

Composantes de la connexions de spin :

$$\widehat{\omega}_1^{11} = \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \left[5r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 16 \right] \quad (\text{A.280})$$

$$\widehat{\omega}_1^{14} = -\beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} \beta t^{\beta-1} \left[r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 22 \cos^2 \theta - 12 \right] \quad (\text{A.281})$$

$$\widehat{\omega}_1^{21} = -\frac{\Theta^2}{128} r \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \left[7r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 24 \right] \quad (\text{A.282})$$

$$\widehat{\omega}_1^{22} = \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left[2 \left(2 \cos^2 \theta - 5 \right) - 23r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.283})$$

$$\widehat{\omega}_1^{23} = -\widehat{\omega}_1^{32} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.284})$$

$$\widehat{\omega}_1^{24} = -\frac{\Theta^2}{128} \beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \left[5r^2 \beta^2 t^{2\beta} + 44t^2 \right] \quad (\text{A.285})$$

$$\widehat{\omega}_1^{31} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta^2 \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.286})$$

$$\widehat{\omega}_1^{33} = \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left[23r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 8 \left(3 \cos^2 \theta - 2 \right) \right] \quad (\text{A.287})$$

$$\widehat{\omega}_1^{41} = \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^3 \sin^2 \theta t^{3(\beta-1)} \left[5r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 16 \right] \quad (\text{A.288})$$

$$\widehat{\omega}_1^{44} = \widehat{\omega}_2^{11} = \frac{\Theta^2}{32} \sin \theta \cos \theta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 13 \right] \quad (\text{A.289})$$

$$\widehat{\omega}_2^{12} = -1 + \frac{\Theta^2}{128} \left[r^2 \beta^2 t^{2\beta} \left(21 \cos^2 \theta - 5r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 17 \right) + 4 \left(13 \cos^2 \theta - 7 \right) \right] \quad (\text{A.290})$$

$$\widehat{\omega}_2^{13} = \widehat{\omega}_2^{31} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right] \quad (\text{A.291})$$

$$\widehat{\omega}_2^{14} = \widehat{\omega}_2^{41} = -\frac{\Theta^2}{32} r \beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 13 \right] \quad (\text{A.292})$$

$$\widehat{\omega}_2^{21} = 1 + \frac{\Theta^2}{64} \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(3 \cos^2 \theta - 7 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 11 \right) + 2 \left(13 \cos^2 \theta - 6 \right) \right] \quad (\text{A.293})$$

$$\widehat{\omega}_2^{22} = \frac{\Theta^2}{128} \sin \theta \cos \theta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(27r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 23 \right) - 52 \right] \quad (\text{A.294})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_2^{23} = \widehat{\omega}_2^{32} = \frac{i\Theta}{4} \left[1 - r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.295})$$

$$\widehat{\omega}_2^{24} = -r\beta t^{\beta-1} \left\{ 1 + \frac{\Theta^2}{64} \left[r^2 \beta^2 t^{2\beta} \left(3 \cos^2 \theta - 7 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 11 \right) + 2t^2 \left(13 \cos^2 \theta - 6 \right) \right] \right\} \quad (\text{A.296})$$

$$\widehat{\omega}_2^{33} = \frac{30}{128} \Theta^2 r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \left[5r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} - 21 \right] \quad (\text{A.297})$$

$$\widehat{\omega}_2^{34} = \widehat{\omega}_2^{43} = -\frac{i\Theta}{4} r\beta \sin \theta t^{\beta-1} \left[2r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right] \quad (\text{A.298})$$

$$\widehat{\omega}_2^{42} = r\beta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{128} r\beta t^{\beta-1} \left[\begin{array}{c} r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(21 \cos^2 \theta - 5r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 17 \right) \\ - 52 \cos^2 \theta - 28 \end{array} \right] \quad (\text{A.299})$$

$$\widehat{\omega}_2^{44} = \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 13 \right] \quad (\text{A.300})$$

$$\widehat{\omega}_3^{11} = \frac{i\Theta}{4} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.301})$$

$$\widehat{\omega}_3^{12} = \frac{i\Theta}{4} \left[\cos^2 \theta - r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.302})$$

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin \theta - \frac{\Theta^2}{128} \sin \theta \left[r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} \left(5r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 21 \cos^2 \theta + 1 \right) + 4 \right] \quad (\text{A.303})$$

$$\widehat{\omega}_3^{14} = -\frac{i\Theta}{4} r\beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.304})$$

$$\widehat{\omega}_3^{21} = -\frac{i\Theta}{4} \sin^2 \theta \left(2r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right) \quad (\text{A.305})$$

$$\widehat{\omega}_3^{22} = -\frac{i\Theta}{4} \sin \theta \cos \theta \left(3r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right) \quad (\text{A.306})$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos \theta + \frac{\Theta^2}{128} \left[r^2 \beta^2 \left(33r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 21 \cos^2 \theta + 25 \right) t^{2(\beta-1)} - 4 \right] \quad (\text{A.307})$$

$$\widehat{\omega}_3^{24} = \frac{i\Theta}{4} r\beta \sin^2 \theta t^{\beta-1} \left(2r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 1 \right) \quad (\text{A.308})$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin \theta + \frac{\Theta^2}{128} t^{2(\beta-1)} \left[r^2 \beta^2 \left(25 \cos^2 \theta - 26 \right) - 14r^4 \beta^4 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \right] \quad (\text{A.309})$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos \theta - \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \left(29r^2 \beta^2 t^{2(\beta-1)} + 25 \right) \quad (\text{A.310})$$

$$\widehat{\omega}_3^{33} = -i\Theta r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.311})$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{128} r^3 \beta^3 \sin \theta t^{3(\beta-1)} \left[14r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 25 \cos^2 \theta + 26 \right] \quad (\text{A.312})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_3^{41} = -\frac{i\Theta}{4} r\beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.313})$$

$$\widehat{\omega}_3^{42} = \frac{i\Theta}{4} r\beta t^{\beta-1} \left(r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - \cos^2 \theta \right) \quad (\text{A.314})$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} \left\{ 1 + \frac{\Theta^2}{128} \left[\left(r\beta t^{(\beta-1)} \right)^2 \left(5 \left(r\beta \sin \theta t^{(\beta-1)} \right)^2 + 21 \cos^2 \theta + 1 \right) + 4 \right] \right\} \quad (\text{A.315})$$

$$\widehat{\omega}_3^{44} = \frac{i\Theta}{4} r^2 \beta^2 \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.316})$$

$$\widehat{\omega}_4^{11} = -\frac{\Theta^2}{4} r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.317})$$

$$\widehat{\omega}_4^{14} = \frac{\Theta^2}{32} r\beta (\beta - 1) \left(11 \cos^2 \theta - 2r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} - 6 \right) t^{\beta-2} \quad (\text{A.318})$$

$$\widehat{\omega}_4^{21} = -\frac{3}{16} \Theta^2 r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.319})$$

$$\widehat{\omega}_4^{22} = \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (\beta - 1) \left(23r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 4\beta \cos^2 \theta - 10 \right) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.320})$$

$$\widehat{\omega}_4^{23} = -\frac{i\Theta}{2} r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.321})$$

$$\widehat{\omega}_4^{24} = \frac{\Theta^2}{32} r\beta (1 - \beta) \sin \theta \cos \theta t^{\beta-4} \left(3r^2 \beta^2 t^{2\beta} + t^2 \right) \quad (\text{A.322})$$

$$\widehat{\omega}_4^{32} = \frac{i\Theta}{2} r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.323})$$

$$\widehat{\omega}_4^{33} = \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \left[23r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} + 8 \left(2 - 3 \cos^2 \theta \right) \right] \quad (\text{A.324})$$

$$\widehat{\omega}_4^{34} = -\frac{i\Theta}{2} r\beta (\beta - 1) \cos \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.325})$$

$$\widehat{\omega}_4^{41} = \frac{\Theta^2}{4} r^3 \beta^3 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{3\beta-4} \quad (\text{A.326})$$

$$\widehat{\omega}_4^{44} = \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 (\beta - 1) \left(6 + 11 \cos^2 \theta - 2r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \right) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.327})$$

A.4.4 Quatrième cas

Soit le cas suivant où $\Theta_{\mu\nu}$ est donnée par :

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.328})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composantes de la métrique :

$$\hat{g}_{11} = t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{32}\beta t^{2(\beta-1)} \left[r^2\beta^2 (24\beta^2 13\beta - 1) t^{2(\beta-1)} + 12\beta - 1 \right] \quad (\text{A.329})$$

$$\hat{g}_{12} = -\hat{g}_{21} = \frac{i\Theta}{2} r\beta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.330})$$

$$\hat{g}_{41} = \hat{g}_{14} = \frac{\Theta^2}{128} r\beta (\beta - 1) (55\beta - 16) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.331})$$

$$\hat{g}_{22} = r^2 t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta t^{2(\beta-1)} \left[r^2 \beta t^{2(\beta-1)} (69\beta^2 + 9\beta - 26) + 5\beta - 1 \right] \quad (\text{A.332})$$

$$\hat{g}_{24} = \hat{g}_{42} = \frac{i\Theta}{4} r^2 \beta^2 (3 - 4\beta) t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.333})$$

$$\hat{g}_{33} = r^2 \sin^2 \theta t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta t^{2(\beta-1)} \left[\begin{array}{c} \cos^2 \theta (3\beta + 17) + 49\beta - 33 \\ -2 \sin^2 \theta r^2 \beta t^{2(\beta-1)} (12\beta^2 + 13\beta + 1) \end{array} \right] \quad (\text{A.334})$$

$$\hat{g}_{44} = -1 + \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 (29\beta^2 - 64\beta + 35) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.335})$$

Les tétrades sont :

$$\hat{e}^1_1 = t^\beta + \frac{\Theta^2}{64} t^{\beta-4} \left[r^2 \beta^2 t^{2\beta} (-12\beta^2 + 13\beta - 1) + 4\beta (\beta - 1) t^2 \right] \quad (\text{A.336})$$

$$\hat{e}^1_2 = -\frac{i\Theta}{4} \beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.337})$$

$$\hat{e}^1_4 = -\frac{39}{128} \Theta^2 r \beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.338})$$

$$\hat{e}^2_1 = \frac{i\Theta}{4} r \beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.339})$$

$$\hat{e}^2_2 = r t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r \beta t^{\beta-4} \left[r^2 \beta t^{2\beta} (-33\beta^2 + 43\beta - 10) + (\beta - 1) t^2 \right] \quad (\text{A.340})$$

$$\hat{e}^2_4 = \frac{i\Theta}{4} r^2 \beta (2 - 3\beta) t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.341})$$

$$\hat{e}^3_3 = r \sin \theta t^{\beta-2} + \frac{i\Theta}{4} r \beta \cos \theta t^{3\beta-4} \quad (\text{A.342})$$

$$\hat{e}^4_1 = \frac{\Theta^2}{16} r \beta (\beta - 1) (\beta - 2) t^{\beta-3} \quad (\text{A.343})$$

$$\hat{e}^4_2 = -\frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.344})$$

$$\hat{e}^4_4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (27\beta^2 - 60\beta + 33) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.345})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composantes de la connexion de spin :

$$\widehat{\omega}_1^{11} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 (\beta - 1) (3\beta - 4) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.346})$$

$$\widehat{\omega}_1^{14} = -\beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.347})$$

$$\widehat{\omega}_1^{21} = i\Theta r \beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.348})$$

$$\widehat{\omega}_1^{22} = \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 (\beta - 1) (21\beta - 37) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.349})$$

$$\widehat{\omega}_1^{24} = \frac{i\Theta}{4} \beta (1 - \beta) t^{\beta-2} \quad (\text{A.350})$$

$$\widehat{\omega}_1^{41} = \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^3 (\beta - 1) t^{3\beta-5} \quad (\text{A.351})$$

$$\widehat{\omega}_1^{44} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 (\beta - 1) (13 - 8\beta) t \quad (\text{A.352})$$

$$\widehat{\omega}_2^{12} = -1 + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^2 (3\beta^3 - 4\beta + 1) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.353})$$

$$\widehat{\omega}_2^{14} = \frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.354})$$

$$\widehat{\omega}_2^{21} = 1 + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^2 (4\beta^2 - 7\beta + 3) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.355})$$

$$\widehat{\omega}_2^{22} = -\widehat{\omega}_2^{44} = i\Theta r^2 \beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.356})$$

$$\widehat{\omega}_2^{24} = -\widehat{\omega}_2^{42} = -r\beta t^{\beta-1} - \frac{\Theta^2}{64} r \beta t^{\beta-5} \left[\begin{array}{l} r^2 \beta^2 (27\beta^2 - 54\beta + 27) t^{2\beta} \\ - (4\beta^2 - 12\beta + 8) t^2 \end{array} \right] \quad (\text{A.357})$$

$$\widehat{\omega}_2^{41} = \frac{3}{4} i\Theta r \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.358})$$

$$\widehat{\omega}_3^{13} = -\sin \theta + \frac{\Theta^2}{32} \sin \theta r^2 \beta^2 (3\beta^2 - 7\beta + 4) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.359})$$

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos \theta + i\Theta r^2 \beta^2 \sin \theta t^{2(\beta-1)} + \frac{\Theta^2}{32} \cos \theta r^2 \beta^2 (-5\beta^2 + 8\beta - 3) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.360})$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin \theta \quad (\text{A.361})$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos \theta \quad (\text{A.362})$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = -r\beta \sin \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.363})$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} + \frac{3}{4} i\Theta r \beta (1 - \beta) \cos \theta t^{\beta-2} + \frac{\Theta^2}{32} r \beta \sin \theta t^{\beta-5} \left[\begin{array}{l} 2r^2 \beta^2 (\beta - 1) t^{3\beta} \\ + (\beta^2 - 3\beta + 2) t^2 \end{array} \right] \quad (\text{A.364})$$

$$\widehat{\omega}_4^{22} = -\widehat{\omega}_4^{44} = \frac{3}{8} \Theta^2 r^2 \beta^2 (\beta - 1)^2 (\beta - 2) t^{2\beta-5} \quad (\text{A.365})$$

A.4.5 Cinquième cas

Soit la matrice $\Theta_{\mu\nu}$ est donnée par :

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta \\ 0 & 0 & -\Theta & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.366})$$

Composantes de la métrique :

$$\hat{g}_{11} = t^{2\beta} - \frac{\Theta^2}{32}\beta \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \left[r^2 \beta t^{2\beta} (12\beta^2 - 13\beta + 1) + 2(3\beta - 2)t^2 \right] \quad (\text{A.367})$$

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \frac{\Theta^2}{16} r \beta (5\beta - 4) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.368})$$

$$\hat{g}_{13} = \frac{i\Theta}{2} r \beta^2 \sin^2 \theta t^{2\beta+1} \quad (\text{A.369})$$

$$\hat{g}_{14} = \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta (55\beta^2 - 71\beta + 16) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.370})$$

$$\hat{g}_{22} = r^2 t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta t^{2(\beta-1)} \left[\frac{2t^2 \beta (7 \cos^2 \theta - 4) + 4t^2 (2 - 3 \cos^2 \theta) -}{r^2 \beta t^{2\beta} \sin^2 \theta (12\beta^2 - 13\beta + 1)} \right] \quad (\text{A.371})$$

$$\hat{g}_{23} = -\hat{g}_{32} = \frac{i\Theta}{2} r^2 \beta \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.372})$$

$$\hat{g}_{24} = \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta^2 (55\beta - 71) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-5} \quad (\text{A.373})$$

$$\hat{g}_{31} = -\frac{i\Theta}{2} r \beta \sin^2 \theta t^{2\beta-1} \quad (\text{A.374})$$

$$\hat{g}_{33} = r^2 \sin^2 \theta t^{2\beta} + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta \sin^2 \theta \left[t^2 (5\beta - 1) - r^2 \beta \sin^2 \theta (69\beta^3 - 91\beta + 13) \right] \quad (\text{A.375})$$

$$\hat{g}_{34} = -i\Theta r^2 \beta^2 \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.376})$$

$$\hat{g}_{41} = \frac{\Theta^2}{128} r \beta (55\beta^2 - 71\beta + 16) \sin^2 \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.377})$$

$$\hat{g}_{42} = \frac{\Theta^2}{128} r^2 \beta \sin \theta \cos \theta (16 - 71\beta) t^{2\beta-3} \quad (\text{A.378})$$

$$\hat{g}_{43} = \frac{\Theta^2}{4} r^2 \beta \sin^2 \theta (4\beta - 3) t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.379})$$

$$\hat{g}_{44} = -1 - \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 (29\beta^2 - 64\beta + 35) \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.380})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composantes des tétrades :

$$\hat{e}^1_1 = t^\beta - \frac{\Theta^2}{64}\beta \sin^2 \theta t^{\beta-4} \left[r^2 \beta t^{2\beta} (12\beta^2 - 13\beta + 1) + 4(\beta - 1)t^2 \right] \quad (\text{A.381})$$

$$\hat{e}^1_2 = \frac{\Theta^2}{16} \sin \theta \cos \theta \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.382})$$

$$\hat{e}^1_3 = \hat{e}^2_3 = -\frac{i\Theta}{4} r \beta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.383})$$

$$\hat{e}^1_4 = -\frac{39}{128} \Theta^2 r \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.384})$$

$$\hat{e}^2_1 = \frac{3}{16} \Theta^2 \cos \theta \sin \theta r \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad (\text{A.385})$$

$$\hat{e}^2_2 = r t^\beta + \frac{\Theta^2}{64} r \beta t^{\beta-4} \left[4(\beta - 1) (3 \cos^2 \theta - 2) t^2 - r^2 \beta \sin^2 \theta t^{2\beta} (12\beta^2 - 13\beta + 1) \right] \quad (\text{A.386})$$

$$\hat{e}^2_4 = -\frac{39}{128} \Theta^2 r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.387})$$

$$\hat{e}^3_1 = \frac{i\Theta}{4} r \beta \sin^2 \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.388})$$

$$\hat{e}^3_2 = \frac{i\Theta}{4} r \beta \sin \theta \cos \theta t^{\beta-1} \quad (\text{A.389})$$

$$\hat{e}^3_3 = r \sin \theta t^\beta + \frac{\Theta^2}{128} r \beta \sin \theta t^{\beta-4} \left[(\beta - 1) t^2 - r^2 \beta \sin^2 \theta t^{3\beta} (33\beta^2 + 43\beta + 10) \right] \quad (\text{A.390})$$

$$\hat{e}^3_4 = -\frac{i\Theta}{4} r^2 \beta (3\beta - 2) \sin^2 \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.391})$$

$$\hat{e}^4_1 = \frac{\Theta^2}{16} \sin^2 \theta r \beta (\beta - 1) (\beta - 2) t^{\beta-3} \quad (\text{A.392})$$

$$\hat{e}^4_2 = \frac{\Theta^2}{16} r \beta (\beta - 1) (\beta - 2) \sin \theta \cos \theta t^{\beta-3} \quad (\text{A.393})$$

$$\hat{e}^4_3 = -\frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) \sin \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.394})$$

$$\hat{e}^4_4 = 1 - \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^3 (27\beta^2 - 60\beta + 33) \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.395})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

Composantes des connexions de spin :

$$\hat{\omega}_1^{11} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 (\beta - 1) (3\beta - 4) \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.396})$$

$$\hat{\omega}_1^{14} = -\beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.397})$$

$$\hat{\omega}_1^{21} = \frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 (\beta - 1) (3\beta - 4) \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-1)} \quad (\text{A.398})$$

$$\hat{\omega}_1^{31} = i\Theta r \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.399})$$

$$\hat{\omega}_1^{33} = \frac{\Theta^2}{64} r \beta^2 (\beta - 1) (21\beta - 37) \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.400})$$

$$\hat{\omega}_1^{34} = -\frac{i\Theta}{4} \beta (\beta - 1) \sin \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.401})$$

$$\hat{\omega}_1^{41} = \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^3 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{3\beta-5} \quad (\text{A.402})$$

$$\hat{\omega}_1^{44} = -\frac{\Theta^2}{32} r \beta^2 (\beta - 1) (8\beta - 13) \sin^2 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.403})$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -1 - \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 \sin^2 \theta (3\beta^2 + 7\beta - 4) t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.404})$$

$$\hat{\omega}_2^{22} = \frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 (\beta - 1) (3\beta - 4) \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.405})$$

$$\hat{\omega}_2^{24} = -r \beta t^{\beta-1} \quad (\text{A.406})$$

$$\hat{\omega}_2^{32} = i\Theta r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin \theta t^{\beta-3} \quad (\text{A.407})$$

$$\hat{\omega}_2^{33} = \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (\beta - 1) (21\beta - 37) \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.408})$$

$$\hat{\omega}_2^{34} = \frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) \cos \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.409})$$

$$\hat{\omega}_2^{41} = \frac{5}{32} \Theta^2 r \beta (\beta - 1) (\beta - 2) \sin \theta \cos \theta t^{\beta-3} \quad (\text{A.410})$$

$$\hat{\omega}_2^{42} = r \beta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{32} r \beta \sin^2 \theta t^{\beta-5} \left[2r^2 \beta^2 (\beta - 1) t^{2\beta} - (5\beta^2 - 15\beta + 10) t^2 \right] \quad (\text{A.411})$$

$$\hat{\omega}_2^{44} = -\frac{\Theta^2}{32} r^2 \beta^2 (\beta - 1) (8\beta - 13) \sin \theta \cos \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.412})$$

$$\hat{\omega}_3^{13} = -\sin \theta + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (3\beta^2 - 4\beta + 1) \sin^3 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.413})$$

$$\hat{\omega}_3^{14} = \frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.414})$$

A. Propriétés de la métrique non commutative

$$\widehat{\omega}_3^{23} = -\cos \theta + \frac{\Theta^2}{64} r^2 \beta^2 (3\beta^2 - 4\beta + 1) \sin^2 \theta \cos \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.415})$$

$$\widehat{\omega}_3^{24} = \frac{i\Theta}{4} r \beta (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.416})$$

$$\widehat{\omega}_3^{31} = \sin \theta + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^2 (4\beta^2 - 7\beta - 3) \sin^3 \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.417})$$

$$\widehat{\omega}_3^{32} = \cos \theta + \frac{\Theta^2}{16} r^2 \beta^2 (4\beta^2 - 7\beta + 3) \sin^2 \theta \cos \theta t^{2(\beta-2)} \quad (\text{A.418})$$

$$\widehat{\omega}_3^{33} = i\Theta r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.419})$$

$$\widehat{\omega}_3^{34} = -r\beta \sin \theta + \frac{\Theta^2}{64} r \beta \sin \theta t^{\beta-5} \left[\begin{array}{c} 4(4\beta^2 - 3\beta + 1) t^2 \\ -r^2 \beta^3 \sin^2 \theta (27\beta^2 - 54\beta + 2) t^{2\beta} \end{array} \right] \quad (\text{A.420})$$

$$\widehat{\omega}_3^{41} = \frac{3}{4} i\Theta r \beta (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.421})$$

$$\widehat{\omega}_3^{42} = \frac{3}{4} i\Theta r \beta (\beta - 1) \sin \theta \cos \theta t^{\beta-2} \quad (\text{A.422})$$

$$\widehat{\omega}_3^{43} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} + \frac{\Theta^2}{64} r \beta \sin \theta t^{\beta-5} \left[\begin{array}{c} r^2 \beta^2 \sin^2 \theta (27\beta^2 - 54\beta + 27) t^{2\beta} \\ + 2(\beta^2 - 3\beta + 2) t^2 \end{array} \right] \quad (\text{A.423})$$

$$\widehat{\omega}_3^{44} = -i\Theta r^2 \beta^2 (\beta - 1) \sin^2 \theta t^{2\beta-3} \quad (\text{A.424})$$

$$\widehat{\omega}_4^{33} = -\widehat{\omega}_4^{44} = \frac{3}{8} \Theta^2 r^2 \beta^2 (\beta - 1)^2 (\beta - 2) \sin^2 \theta t^{2\beta-5} \quad (\text{A.425})$$

Annexe B

Rappel mathématique

Dans cette partie de l'annexe, nous faisons un rappel mathématique de tous les objets mathématiques que nous avons utilisé dans le calcul.

B.1 Théorème des résidus

Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ le développement de Laurent de f au voisinage de z_0 .

L'intégrale de f ne dépend donc que d'un coefficient dans le développement de Laurent, qui est (a_{-1}) . Nous allons montrer que dans beaucoup de cas nous pouvons déterminer ce coefficient sans passer par le développement de Laurent.

B.1.1 Pour un pôle simple

Soit z_0 est un pôle simple, alors

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \quad (\text{B.1})$$

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + (z-z_0)a_0 + a_1(z-z_0)^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

$$= \text{Res}(f, z_0) + (z-z_0)a_0 + a_1(z-z_0)^2 + \dots \quad (\text{B.3})$$

et par passage à la limite, on obtient :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) \quad (\text{B.4})$$

Si $f(z)$ se présente sous la forme,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (\text{B.5})$$

où $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$, ($Q'(z) = \frac{dQ(z)}{dz}$) alors :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z)}{Q'(z)} \quad (\text{B.6})$$

Remarque

Si $a_0 = 0$, la singularité est appelée «singularité apparente», «pôle apparent», ou «fausse singularité».

B.1.2 Pour un pôle multiple

Soit z_0 est un pôle multiple, alors si nous posons m l'ordre de la singularité de z_0 , nous écrivons :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (\text{B.7})$$

cela implique

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + a_{-m+2}(z - z_0)^2 + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots \quad (\text{B.8})$$

En dérivant jusqu'à l'ordre $(m - 1)$, nous obtenons :

$$((z - z_0)^m f(z))^{m-1} = (m - 1)!a_{-1} + a_0(m - 1)!(z - z_0) + \dots \quad (\text{B.9})$$

d'où l'on obtient :

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{m-1} \quad (\text{B.10})$$

Cette formule est intéressante seulement quand l'ordre est 2 ou 3 à la limite. Si l'ordre est grand 4 ou plus, il vaut mieux utiliser le développement de Laurent.

Remarque

Dans le cas où $f(z)$ est le rapport de deux fonctions $g(z)$ et $h(z)$ ayant z_0 comme zéros, alors il n'est pas facile de donner immédiatement l'ordre de la singularité de f . Dans ce cas, le procédé le plus sûr consiste dans le remplacement des fonctions $g(z)$ et $h(z)$ par un certain nombre de termes de leurs développements en série de Taylor au voisinage de z_0 .

B.2 Application

Nous supposons que f est la restriction à R d'une fonction f , qui est analytique dans un ensemble ouvert de la forme $D' = D - a_1, a_2, \dots, a_n$ où D contient le demi plan fermé $\Im z \geq 0$, et les a_k sont des points du demi-plan ouvert $\Im z > 0$. Le théorème des résidus permet d'écrire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res(f, a_k) \quad (\text{B.11})$$

Noncommutative FRW Apparent Horizon and Hawking Radiation

H. Bouhallouf¹  · N. Mebarki¹ · H. Aissaoui¹

Received: 15 May 2017 / Accepted: 10 August 2017
© Springer Science+Business Media, LLC 2017

Abstract In the context of noncommutative (NCG) gauge gravity, and using a cosmic time power law formula for the scale factor, a Friedman-Robertson-Walker (FRW) like metric is obtained. Within the fermions tunneling effect approach and depending on the various intervals of the power parameter, expressions of the apparent horizon are also derived. It is shown that in some regions of the parameter space, a pure NCG trapped horizon does exist leading to new interpretation of the role played by the noncommutativity of the space-time.

Keywords Noncommutative geometry · Gauge gravity · Hawking effect

1 Introduction

During the last decade, the noncommutative geometry (NCG) nature of the space-time has attracted many physicists [1–6]. Much attention has been made in order to have a better and deeper understanding. The motivation was that the noncommutativity could be significant at the Planck scale where the non commutativity parameter plays a role of a natural cutoff of the regularisation of the ultraviolet singularity at a short distance, and may give an explanation to the observed anisotropies of the microwave background (CMB) [7, 8]. It is worth mentioning that there is no physical principle or mathematical formalism which can constrain the order of magnitude of the noncommutativity parameter nor the scale for which

✉ H. Bouhallouf
habiba.bouhalouf@umc.edu.dz

N. Mebarki
nnmebarki@yahoo.fr

H. Aissaoui
aissaoui_h@yahoo.com

¹ Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique, Frères Mentouri University, Constantine, 25000, Algeria

the noncommutative model in consideration is relevant. The related energy scale could be as low as a few TeV [9, 10] the same order of magnitude of energies employed in collider experiments (LHC, ILC, etc.), or Planck scale, as it is the case of string or quantum gravity [11, 12]. The noncommutative gravity, which we present in this paper, can be considered as an effective theory. Thus, the noncommutativity of spacetime can be reinterpreted as an extra interaction term on a commutative spacetime, and therefore in this way the theory is equivalent to a higher derivative or curvature extension of ordinary gauge gravity [13].

On the other hand in cosmology, in addition to event horizons familiar from the standard literature, dynamical apparent and trapping horizons have also been studied more intensively in the recent past years. Because cosmology dynamics is more appropriate to the formalism of Hayward and Kodama [22] to describe dynamical black holes, where for the trapping horizons there is indeed a thermal radiation and the corresponding Hawking temperature is associated to the geometrical surface gravity.

The goal of this paper is two fold: First to calculate in the context of noncommutative FRW like cosmology, the metric, vierbeins and spin connections. Second to determine the apparent horizon radius and the corresponding Hawking temperature by using the tunneling effect approach and see the role playing by the space-time noncommutativity [14–20]. Of course our results are qualitative. In Section 2, we present the NCG gauge gravity metric using the mathematical formalism of ref. [21]. In Section 3, we derive the trapping horizons radius and the corresponding NCG Hawking temperature, starting from a power law formula for the scale factor of an FRW Universe. Finally, in Section 4, we draw our conclusion.

2 The NCG Metric of an FRW Like Space-Time

The non commutative spacetime is characterized by the coordinates operators $\hat{x}^\mu (\mu = 0, \bar{3})$ satisfying the following commutation relation:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

where $\theta^{\mu\nu}$ are antisymmetric matrix elements that control the noncommutativity of the spacetime.

Starting from a spherically symmetric, isotropic and homogeneous, flat space commutative FRW universe and following the approach of ref. [21] in constructing the corresponding NCG gauge gravity metric, we choose the only non vanishing components of the non-commutativity parameter $\Theta^{01} = -\Theta^{10} = \eta$ (of course, the general case does not affect our qualitative results and conclusion), and taking for simplicity a power law formula for the scale factor of the form $a(t) = \hat{t}^\beta$. Using a rearranged Maple 16 tensor package (see Appendix), straightforward simplifications lead to the following deformed metric up to the $O(\eta^2)$ in the Painlevé coordinates:

$$d\hat{s}^2 = \Sigma_1 d\hat{t}^2 + \Sigma_2 d\tilde{r}^2 + \Sigma_3 d\hat{t}d\tilde{r} + \hat{r}^2 d\tilde{\Omega}^2, \tag{2}$$

where $d\tilde{\Omega}^{(2)}$ denotes the approximate spherical differential solid angle, $\hat{t} = \frac{t}{t_0}$, $\tilde{r} = a(t)\hat{r}$ (running dimensionless radius) and $\hat{r} = \frac{r}{r_0}$ (t_0 and r_0 are the observed cosmic time and radius respectively). The quantities $\Sigma_i (i = \overline{1, 3})$ have as expressions:

$$\Sigma_1 = -(1 - H_{\hat{t}}^2 \tilde{r}^2) + \eta^2 \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 H_{\hat{t}}^2 \tilde{r}^2 - \frac{\Lambda_3}{\tilde{a}_{NCG}} \tilde{r} H_{\hat{t}} \right), \tag{3}$$

$$\Sigma_2 = (1 + \eta^2 \Lambda_2)(1 - \tilde{r} H_{\tilde{r}})^2, \tag{4}$$

and

$$\Sigma_3 = \left[-2\tilde{r}H_{\hat{t}} + \eta^2 \left(-2\tilde{r}H_{\hat{t}}\Lambda_2 + \frac{\Lambda_3}{\tilde{a}_{NCG}} \right) \right] (1 - \tilde{r}H_{\tilde{r}}), \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -\frac{1}{32}\beta(\beta - 1) \left(\hat{t}^{2(\beta+1)} + 18\hat{r}^2\beta^3\hat{t}^{4(\beta-1)} \right), \\ \Lambda_2 &= \frac{\beta^2}{64} \left(-18\hat{t}^{-2} + 21\hat{r}^2\beta^2\hat{t}^{4(\beta-1)} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

and

$$\Lambda_3 = \frac{\beta^2}{128}\hat{r}t^{4\beta-1}(28 - 25\beta), \tag{7}$$

here $H_{\hat{t}}$ and $H_{\tilde{r}}$ are the NCG Hubble parameters with respect to time and space evolution respectively and are given by:

$$\begin{aligned} H_{\hat{t}} &= \beta\hat{t}^{\beta-1} + \frac{\eta^2\beta\hat{t}^{\beta-1}}{128}(4 - 90\beta(\beta - 1)\hat{t}^{2(\beta-1)} \\ &+ 84\hat{r}^2\beta^3\hat{t}^{4(\beta-1)} - 45\beta^2\hat{t}^{3(\beta-2)} + 21\hat{r}^2\beta^4\hat{t}^{5(\beta-4)}), \end{aligned} \tag{8}$$

and

$$H_{\tilde{r}} = \frac{21}{64}\eta^2\beta^4\hat{t}^{4(\beta-1)}\hat{r}. \tag{9}$$

Notice that because of the space-time noncommutativity, we have two kinds of Hubble parameters $H_{\hat{t}}$ and $H_{\tilde{r}}$ ($H_{\tilde{r}} = O(\eta^2)$). Moreover, the NCG scale factor \tilde{a}_{NCG} is shown to have the following expression:

$$\tilde{a}_{NCG} = \hat{t}^\beta \left[1 + \frac{\eta^2\beta^2}{128}\hat{t}^{2(\beta-1)}(-45 + 21\beta^2\hat{r}^2\hat{t}^{2(\beta-1)}) \right]. \tag{10}$$

It is to be noted that the approximate spherical symmetry of ds^2 (up to $O(\eta^2)$) amounts to setting more stringent constrained on the NCG parameter η . It is worth to mention that the deduced NCG corrections in (2) are nothing to do the general goal of NCG to cur ultraviolet singularities (cutoff) at Planck scale. We will study the NCG apparent horizon at late time. Moreover, the procedure used in ref. [21] is valid not only to black holes with the static metric but it is a general formalism. In fact, one can map the form of any metric from commutative to noncommutative geometry (see refs. [21] and [3]) independently of the choice which one can take for $\hat{a}(t)$ (scale parameter). The only requirement is that you have to ensure the convergence of the perturbative expansion with respect to the noncommutative parameter η (see Section 4 of the paper) and there is no other restrictive conditions. Than, we use the following prescription:

- i Once you have the form of $\hat{a}(t)$ in the commutative FRW universe case i.e. you have the expression of the metric, you calculate the veirbein and spin connection.
- ii Deduce the expression of NCG veirbein and spin connection using ref. [21] using the expressions of the commutative veirbein and spin connection to get at the end expressions Eqs. (A2–A7) and (A8–A19) in the Appendix of our paper.
- iii You calculate the expression of the NCG metric using the expression Eq. (3.14) of ref. [21] or (27) of our paper.

Thus, the construction of the NCG metric is the same whatever is your choice of the commutative metric (FRW or any other model) and this procedure preserves the original character of the noncommutative manifold.

3 The NCG Apparent Horizon and Fermionic Tunneling Effect

In the tunneling of particles approach and use of the semi-classical approximation (WKB), the emission rate can be related to the imaginary part of the action of the system. In the s -wave approximation (higher partial waves emission are suppressed by \hbar), particles can be viewed as massless shells and move along a radial null geodesic. The imaginary part is produced by particles tunneling through a barrier (the classically forbidden region). In this paper, we assume that the tunneling process instantaneous and do not consider the back-reaction otherwise the spectrum will deviate from the thermal one.

Recently, in refs. [14–16], it was shown that the temperature of the Hawking radiation related to the apparent horizon (case of FRW model) can be obtained using the tunneling approach where the energy of the particles tunneling through the apparent horizon is defined using Kodama divergence free vector field. We remind that apparent horizons are not invariant properties of space-time, they are observer dependent and are distinct from event horizons. It is also to be noted that the Kodama observer from a spherical symmetry is inside the apparent horizon and does see a thermal spectrum with a temperature caused by fermions tunneling from the outside to the inside of the apparent horizon [22, 23]. The justification in using the Kodama vector for the time dependent space-time (which has the same significance as the Killing vector in the static case) is that there is no Killing vector to define a preferred time coordinates and the calculation of the acceleration, surface gravity etc... become ambiguous and dependent on the coordinates system. The Kodama vector is time-like, null and space-like as $\tilde{r} < \tilde{r}_A$, $\tilde{r} = \tilde{r}_A$ and $\tilde{r} > \tilde{r}_A$ respectively (\tilde{r}_A is the apparent horizon running dimensionless radius). On the other hand, when there is no time-like Killing vector like in the dynamical FRW space-time, the Kodama vector inside the apparent horizon could play a similar role in the FRW space-time as the time-like Killing vector does in the stationary black holes space-time. It is worth to mention that Misner-Sharp-Hernandez energy plays a crucial role in relating the first law of thermodynamics Friedman equations. The Kodama vector lies in a $(1 + 1)$ dimensional radial-temporal plane and the measured Misner-Sharp-Hernandez energy ω is given by:

$$\omega = K^0 \partial_{\tilde{r}} I, \quad (11)$$

where K^0 denotes the temporal component of the Kodama vector and I is the classical action which can be separated with respect to the spherical coordinates $(\tilde{\Omega}, \theta, \varphi)$ and cosmic time \hat{t} according to the ansatz [14]:

$$I = I(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) = - \int \frac{\omega}{K^0} d\hat{t} + R(\tilde{r}) + P(\theta, \varphi), \quad (12)$$

(R and P are functions of \tilde{r} and (θ, φ) respectively).

The calculation showed that the derivatives of the action with respect to \tilde{r} , θ and φ are strongly mixed by the matrix structure of the Dirac equation. Nevertheless, things combined so that the radial derivative of the action is only really important. To be more explicit, let us consider a massless spin up NCG Dirac spinor $\hat{\Psi}$ such that:

$$\hat{\Psi} = U \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \right], \quad (13)$$

where U is a slowly varying spinor amplitude having the form (similar study can be done with spin down):

$$U = \begin{pmatrix} A(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \\ 0 \\ B(\hat{t}, \tilde{r}, \theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

In the context of the commutative WKB method, the Dirac equation becomes:

$$\not{\partial}U + \frac{i}{\hbar}U \overleftarrow{\not{\partial}} I + \hat{\omega}U = 0. \tag{15}$$

In what follows, we assume that in the NCG case, the Dirac equation takes the form:

$$\hat{\not{\partial}}U + \frac{i}{\hbar}U \overleftarrow{\hat{\not{\partial}}} I + \hat{\omega} * U = 0 \tag{16}$$

where

$$\begin{aligned} U \overleftarrow{\not{\partial}} I &= \gamma^\mu U \partial_\mu I, \\ U \overleftarrow{\hat{\not{\partial}}} I &= \hat{\gamma}^\mu U \partial_\mu I \end{aligned} \tag{17}$$

and

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}^\mu * \hat{\omega}_\mu = \hat{\gamma}^\mu * \Sigma_{ab} * \hat{\omega}_\mu^{ab} \tag{18}$$

with $*$ is the Moyal-Weyl star product,

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad \hat{\not{\partial}} = \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu, \tag{19}$$

and

$$\Sigma_{ab} = \Sigma_{(ab)} + \Sigma_{[ab]}, \tag{20}$$

where

$$\Sigma_{[ab]} = \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b], \quad \Sigma_{(ab)} = \eta_{ab} I_{4 \times 4}, \tag{21}$$

η_{ab} ($a, b = \overline{1, 4}$) is the Minkowski metric with signature $(-, +, +, +)$ and $I_{4 \times 4}$ is the identity matrix. It is worth to mention that $\hat{\omega}_\mu^{ab}$ are the NCG spin connections components which are not necessarily totally antisymmetric nor real as well (for more details see refs. [24, 25] and for the present case see the Appendix). Moreover, the validity of WKB approximation in the NCG case requires that we have first to make the WKB and than to transform the ordinary space-time to the noncommutative one, otherwise the Moyal-Weyl star product will generate terms of higher order in \hbar^{-1} and therefore the perturbative expansion. Now, it is easy to show that in the semi-classical limit [21] where we neglect terms of $O(\hbar)$, the NCG Dirac equation (16) becomes:

$$(i \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu I) U = 0, \tag{22}$$

where

$$\hat{\gamma}^\mu = \hat{e}^\mu{}_a \gamma^a, \tag{23}$$

here the Dirac gamma matrices γ^a ($a = \overline{1, 3}$) are given in the chiral representation by:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} iI_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -iI_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$

σ_i 's ($i = \overline{1, 3}$) are the ordinary Pauli matrices. In what follows, we take $x^0 \equiv \hat{t}$, $x^1 \equiv \tilde{r}$, $x^2 \equiv \theta$ and $x^3 \equiv \varphi$. The quantities \hat{e}_a^μ are the inverse of the NCG verbeins \hat{e}^a_μ verifying the NCG orthogonality equations:

$$\hat{e}^\mu_a * \hat{e}^b_\mu = \delta^b_a, \tag{25}$$

and

$$\hat{e}^\mu_a * \hat{e}^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \tag{26}$$

and can be derived from the inverse $\hat{g}^{\mu\nu}$ of the NCG metric given by:

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\hat{e}^\mu_a * e^{\hat{\nu}a*} + \hat{e}^{\nu a} * e^{\hat{\mu}a*} \right), \tag{27}$$

and has the following components:

$$\hat{e}_0^\mu(\alpha, \lambda, 0, 0), \quad \hat{e}_1^\mu(0, \varsigma, 0, 0), \quad \hat{e}_2^\mu(0, 0, \delta, 0), \quad \hat{e}_3^\mu(0, 0, 0, \chi), \tag{28}$$

with

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\Sigma_2}{\Delta}}, & \lambda &= \sqrt{\frac{\Sigma_3^2}{\Sigma_2 \Delta}}, \\ \varsigma &= \sqrt{\lambda^2 - \frac{\Sigma_1}{\Delta}}, & \Delta &= \frac{\Sigma_3^2}{4} - \Sigma_1 \Sigma_2. \end{aligned} \tag{29}$$

here δ and χ are functions of \tilde{r} , \hat{t} and θ (can be derived using [Appendix](#)) where their expressions are irrelevant in the calculation of the horizon Hawking radiation temperature as it will be clear later. Using the NCG spinor together with the ansatz in (13), we obtain the following differential equations:

$$iA \left(-\frac{\omega\alpha}{K^0} + \lambda \partial_{\tilde{r}} I \right) + B \varsigma \partial_{\tilde{r}} I = 0, \tag{30}$$

$$B \left(\delta \partial_\theta P(\theta, \varphi) + i \chi \partial_\varphi P(\theta, \varphi) \right) = 0, \tag{31}$$

$$A \varsigma \partial_{\tilde{r}} I - iB \left(-\frac{\omega\alpha}{K^0} + \lambda \partial_{\tilde{r}} I \right) = 0, \tag{32}$$

$$A \left(\delta \partial_\theta P(\theta, \varphi) + i \chi \partial_\varphi P(\theta, \varphi) \right) = 0. \tag{33}$$

It is easy to see that $P(\theta, \varphi)$ must be a complex function; which means that it will yield a contribution to the imaginary part of the classical action. The contribution of $P(\theta, \varphi)$ to the tunneling rate is canceled out when dividing the outgoing probability by the incoming one because $P(\theta, \varphi)$ is the same for both the outgoing and incoming solutions. Therefore, it is no need to solve the equations above for the complex function $P(\theta, \varphi)$. Now, from (30) and (32), there will be a non trivial solution for A and B if and only if the determinant of the matrix coefficients vanishes. This implies that:

$$\partial_r I = \frac{\omega\alpha(\lambda \pm \varsigma)}{K^0(\lambda^2 - \varsigma^2)}, \tag{34}$$

where the \pm sign corresponds to the incoming and outgoing solutions respectively. It is worth to mention that in our case where we have an approximate spherical symmetry due to the space-time noncommutativity, the Kodama's vector components can be shown to have the following approximate expression:

$$K^a \simeq \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, 0, 0, 0 \right). \tag{35}$$

Now, one can easily show that the real and physical trapping horizons are located at $\tilde{r}_{H_{1,2,3}}$ and are solutions of the null geodesic equation $\hat{g}^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0$ and direct calculations give:

$$\tilde{r}_{H_1} = \frac{\hat{t}}{|\beta|} + \frac{\eta^2\hat{t}^2}{512\beta^4} \left(\frac{\delta_2}{\delta_3} - 4\delta_1 \right), \quad \left(\forall \beta \neq \frac{4}{3} \right) \tag{36}$$

$$\tilde{r}_{H_2} = \frac{8\sqrt{2}\beta}{\eta^2\hat{t}|\delta_3|^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{\eta^2\hat{t}^2}{256\beta^2} \left(\delta_2 + \frac{\delta_3\hat{t}^2}{\beta^2} \right) \right], \tag{37}$$

and

$$\tilde{r}_{H_3} = \frac{3}{4}\hat{t} \left[1 + \frac{1}{2}\eta^2 \left(\frac{\delta_1}{180} - \frac{9}{8}\delta_1\hat{t}^2 \right) \right], \quad \left(\beta = \frac{4}{3} \right) \tag{38}$$

where

$$\delta_1 = -4\beta(\beta - 1)\hat{t}^{2(\beta+1)}, \tag{39}$$

$$\delta_2 = -36\beta^3\hat{t}^{2(\beta-2)}(\beta^2 + 4\beta - 5 - 36\beta^4\hat{t}^{-4} - \beta^3(28 - 25\beta)\hat{t}^{2(\beta-1)}), \tag{40}$$

and

$$\delta_3 = 42\beta^5(3\beta - 4)\hat{t}^{2(\beta-3)}. \tag{41}$$

Notice that \tilde{r}_{H_2} is a pure NCG horizon radius. Moreover, \tilde{r}_{H_1} and \tilde{r}_{H_3} reduce to the commutative case when the NCG parameter $\eta \rightarrow 0$. However, when $\eta \rightarrow 0$, $\tilde{r}_{H_3} \rightarrow \infty$ means that the singularity is removed and the pure NCG apparent horizon disappears. In fact, the structure of the three apparent horizons are shown in Table 1 where A, B, C, D, E, F and G are real functions of β and \hat{t} . The validity of perturbative theory with respect to the noncommutativity parameter η requires that $B\eta^2 < A$, $E\eta^2 < D$ and $G\eta^2 < F$.

Our model looks like McVittie space-time where instead of a static charged black hole evolving in a dynamical expansion, one has (depending on the β parameter) two apparent horizons.

Inside the NCG evolving horizons, there exist two simultaneous radiation process: They are the corrected NCG and the pure NCG apparent horizons radiation. The later is caused by the pair creation effects at the outer horizon. The pure NCG apparent horizon which we call here white hole radiation was predicted by our analysis and it is a new effect (was not discussed into the literature so far) which consists not on particles with positive energies but on antiparticles with negative energies. The emission of antiparticles out of the white hole, in turn may be considered as an absorption of energy by the white hole horizon. This feature contradicts the classical results where no energy may be absorbed by the white hole horizon in a similar way as does the evaporation process of black hole horizons. An observer inside the apparent horizon will see a thermal spectrum with temperature when particles tunnel from outside the apparent horizon to inside the apparent horizon. Since the energy ω is measured by the observer with the Kodama vector, thermal spectrum is therefore seen by the same observer. That is to say, the Hawking temperature is measured by the Kodama observer inside the apparent horizon. In this paper, both the black and white dynamical

Table 1 Table of discussion

β	\tilde{r}_{H_1}	\tilde{r}_{H_2}	\tilde{r}_{H_3}
$\beta < 0, \beta > \frac{4}{3}$	$A + B\eta^2$	naked singularity	-
$0 < \beta < \frac{4}{3}$	$A + B\eta^2$	$\frac{C}{\eta^2} + D + E\eta^2$	-
$\beta = \frac{4}{3}$	-	-	$F + G\eta^2$

horizons have thermal radiations which when the back scattering effects are neglected obey the normal black body spectrum. It is to be noted also that the radiation process of the outer horizon last as long as the outer horizon exists. Moreover, the outer and inner apparent horizons radiation are separate and simultaneous outgoing process in the NCG space-time. Here the outer (pure NCG) horizon plays the role of a white hole horizon (absorption).

Now, integrating the pole (up to $O(\eta^2)$) at the apparent horizon by using the residue and Cauchy theorem we get:

1. $\beta < 0,$

$$ImR_+ = \frac{\pi \omega}{K^0} \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}} \lambda} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_1}},$$

2. $0 < \beta < \frac{4}{3},$

$$ImR_+ = \frac{\pi \omega}{K^0} \left[\frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}} \lambda} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_1}} + \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}} \lambda} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_2}} \right],$$

3. $\beta = \frac{4}{3},$

$$ImR_+ = \frac{\pi \omega}{K^0} \frac{\alpha}{\partial_{\tilde{r}} \lambda} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_3}},$$

where $\lambda = \zeta|_{\tilde{r}=\tilde{r}_{H_{1,2}}}$.

Now, in the WKB approximation, the tunneling probability Γ is related to the imaginary part of the action as:

$$\Gamma = \frac{\exp[-2(ImR_+ + ImP(\theta, \varphi))]}{\exp[-2(ImR_- + ImP(\theta, \varphi))]}, \tag{42}$$

Notice that in the case where $0 < \beta < \frac{4}{3}$ (existence of inner and outer horizons), the total tunneling rate Γ is the product of the tunneling rates at inner and outer horizons. Comparing the tunneling probability Γ which has a form of a thermal spectrum $\Gamma = \exp(-\frac{\omega}{T_H})$, we can deduce (depending on each of the above cases) the corresponding Hawking radiation temperature associated to the NCG apparent horizons. Γ represents the tunneling probability along the classically forbidden trajectory. Moreover, the form of the total tunneling expansion rate Γ this guarantees the validity of the Clausius theorem for both singularities of inner and outer horizons ($\Gamma = \Gamma_1.\Gamma_2$).

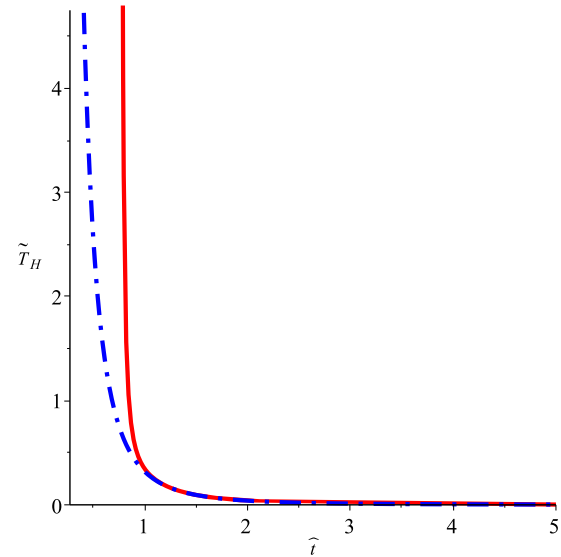
Figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10 display the dependence of T_H as a function of \hat{t} for various fixed values of η and β in cases (1), (2) and (3).

4 Discussion and Conclusions

Throughout this paper, we have studied the Hawking radiation effect near dynamical horizons in NCG FRW universe. For simplicity we have considered a cosmological power law formula for the expansion scale factor $\hat{a}(t)$. It turns out that the behavior of the scaled Hawking temperature \tilde{T}_H ($\tilde{T}_{H_i} = \hat{a}(t)T_{H_i}, i = 1, 3$) is basically proportional to $\frac{1}{\tilde{r}_{H_1}}$ or $\frac{1}{\tilde{r}_{H_2}}$ for the cases where $\beta < 0, \beta > \frac{4}{3}$ or $\beta = \frac{4}{3}$ and depends strongly on β parameter. However, for $0 < \beta < \frac{4}{3}$ it is proportional to $\frac{1}{\omega_1 \tilde{r}_{H_2} + \omega_2 \tilde{r}_{H_1}}$.

Here ω_i is the Misner-Sharp-Hernandez energy of the horizon with a running dimensionless radius \tilde{r}_{H_i} . Figure 1 displays the NCG scaled Hawking temperature \tilde{T}_H as a function of

Fig. 1 NCG scaled Hawking temperature \tilde{T}_H as a function of the dimensionless scaled cosmic time \hat{t} for $\beta = -2$ (solid red line for $\eta = 0.1$ and dashed dotted blue line for $\eta = 0$)



a dimensionless scaled cosmic time \hat{t} for $\eta = 0.1$ ($\beta = -1$, dashed red line), ($\beta = -2$, solid green line) and $\eta = 0$ ($\beta = -3$ dotted blue line). In the commutative case, this corresponds to an accelerated contraction of the universe. Notice that if \hat{t} increases, \tilde{T}_H decreases. The reason is that \tilde{r}_{H_1} behaves approximately like $\frac{1}{|\dot{H}_t|}$ ($\dot{H}_t \sim \dot{H}$ (Hubble parameter) if we neglect η^2 terms). Therefore, $\tilde{r}_{H_1} \sim \hat{t} + \eta^2 B'(\hat{t}, \beta)$ and thus $\tilde{r}_{H_1} \sim \hat{t}^{\beta-1} + \eta^2 C'(\hat{t}, \beta)$. Finally, $\tilde{T}_{H_1} \sim \hat{t}^{1-\beta} + \eta^2 D'(\hat{t}, \beta)$. Here $B'(\hat{t}, \beta)$, $C'(\hat{t}, \beta)$ and $D'(\hat{t}, \beta)$ are regular functions of \hat{t} and β .

For $\beta = -2$, it is clear that $\tilde{T}_{H_1} \sim \hat{t}^{-3}$ is a decreasing function of \hat{t} . Figure 2 shows the scaled cosmic dimensionless time evolution of \tilde{T}_H for $\beta = 3$ ($\eta = 0.1$). In the commutative case, this corresponds to an accelerated expansion of the universe. As in Fig. 1 the same arguments hold for this case too. In fact, the expression of \tilde{T}_H is approximately proportional to $\frac{\hat{t}^{\beta-1} + \eta^2 F'(\beta, \hat{t})}{1 - \eta^2 G'(\beta, \hat{t})}$, where F' and G' are positive and regular increasing functions of β and \hat{t} . Thus since $\beta > 1$ ($\beta = 3$) as \hat{t} increases, the numerator increases and the denominator decreases and therefore \tilde{T}_H increases. Notice also the existence of a vertical asymptote

Fig. 2 NCG scaled Hawking temperature \tilde{T}_H as a function of the dimensionless scaled cosmic time \hat{t} for $\beta = 3$ and $\eta = 0.1$

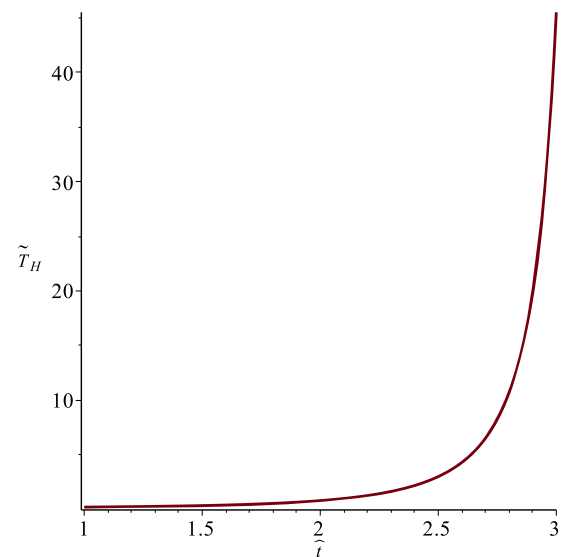


Fig. 3 Same as Fig. 1 for $\beta = 0.5$ and $\eta = 0.1$

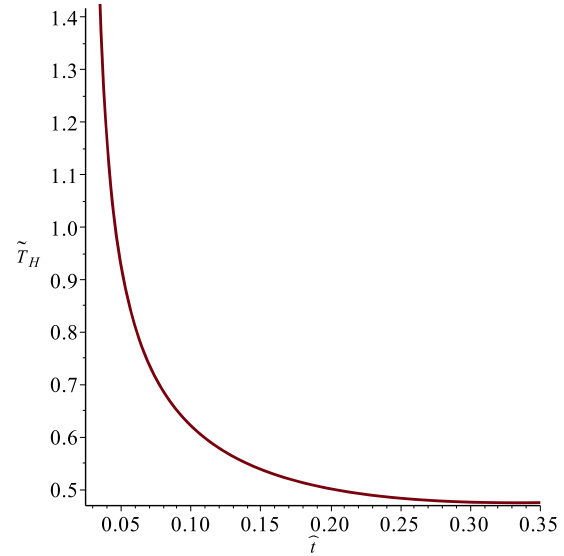


Fig. 4 Same as Fig. 2 for $\beta = 1.2$ and $\eta = 0.1$

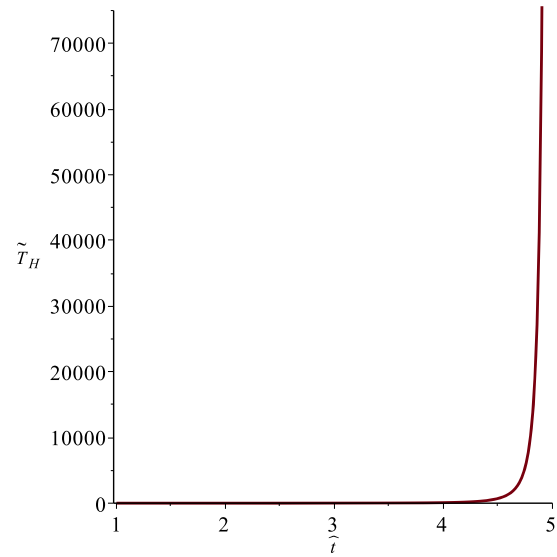


Fig. 5 Same as Fig. 2 for $\beta = \frac{4}{3}$ and $\eta = 0.1$ (solid red line), $\eta = 0$ (dashed dotted blue line)

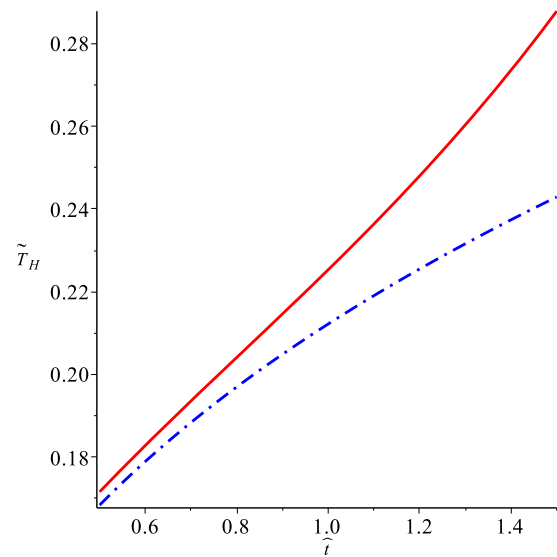


Fig. 6 NCG scaled Hawking temperature \tilde{T}_H as a function of the dimensionless scaled cosmic time \hat{t} for $\beta = 3$ and $\hat{t}_0 = 1.4$. Solid red line for $\eta = 0.1$ and dashed dotted line for $\eta = 0$

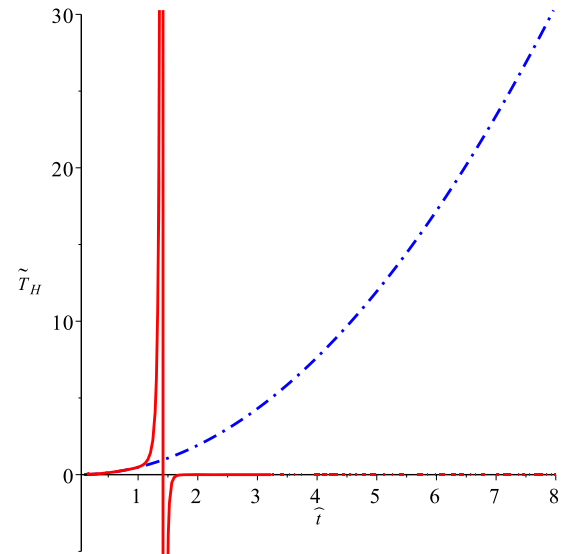


Fig. 7 3D Surface boundary (validity of perturbative expansion η^2 as a function of \hat{t} and β , $\hat{t} \in [2, 3]$ and $\beta \in [2, 3]$)

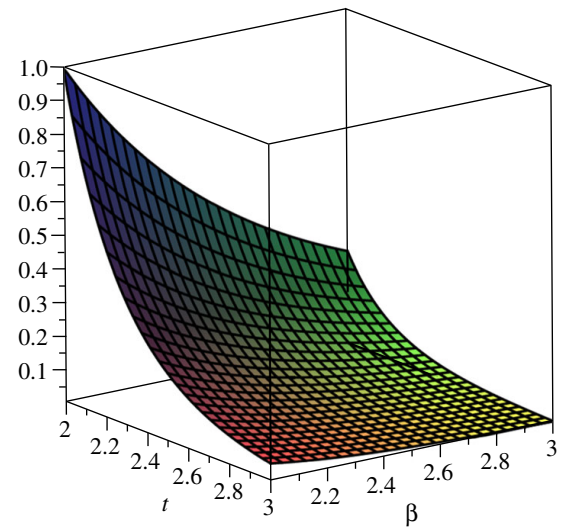


Fig. 8 No validity of perturbative expansion η^2 as a function of \hat{t} and β , $\hat{t} \in [1, 2.5]$ and $\beta \in [1.5, 2]$

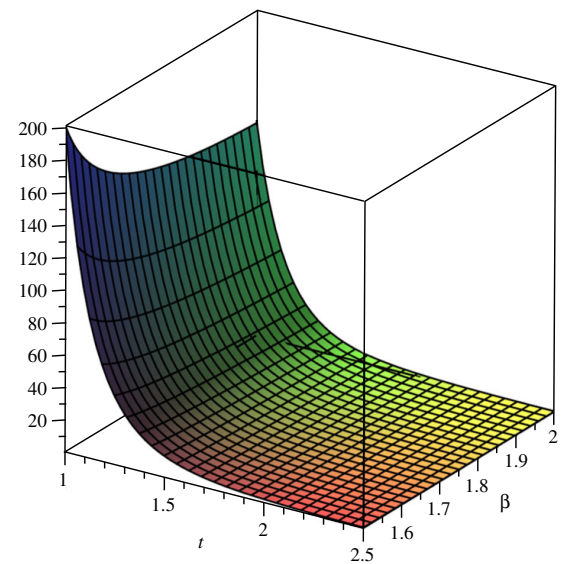
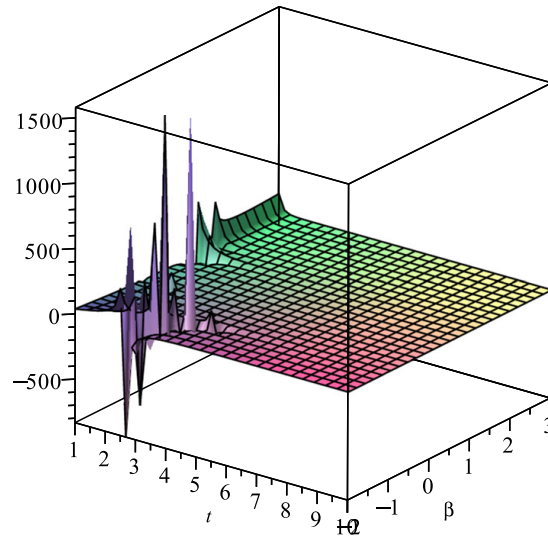


Fig. 9 Same as Fig. 8, $\eta = 0.1$ but with $\hat{t} \in [1, 10]$ and $\beta \in [-2.5, 3]$



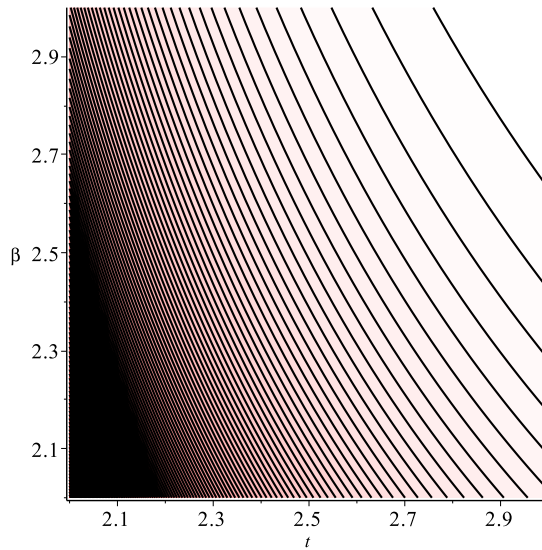
at a certain value $\hat{t} = \hat{t}_0 \simeq 3.274$. The reason is that if $1 - \eta^2 G(\beta, \hat{t}_0) = 0$, the denominator vanishes and $\tilde{T}_H \rightarrow \infty$. However, this breaks the applicability of the perturbative expansion (APE) with respect to the space-time noncommutativity parameter η . Thus, one has to take only values of β and \hat{t} such that $\eta^2 G(\beta, \hat{t}) < 1$. In the commutative case, there is no such asymptot. In fact $\tilde{T}_H \rightarrow \infty$ if $\hat{t} \rightarrow \infty$. Similar arguments as in Fig. 1 (resp. Fig. 2) hold for the case of Figs. 3 and 4 but with $\beta = 0.5$ (resp. $\beta = 1.2$ and $\hat{t}_0 \simeq 5.01$). This corresponds in the commutative case to a decelerated (resp. accelerated) expansion of the universe. Moreover, the total tunneling expansion rate Γ is a result of the apparent inner H_1 and pure NCG outer H_2 horizons. Figure 5, shows the \tilde{T}_H behavior as a function of \hat{t} but for $\beta = \frac{4}{3}$, corresponding to a tunneling through the horizon H_3 . In the commutative case it represents an accelerated expansion [h] of the universe. Notice that in the case of our interest (accelerated expanding universe) which corresponds to $1 < \beta < \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$ or $\beta > \frac{4}{3}$, \tilde{T}_H is always an increasing function of \hat{t} . Figure 6 shows the effect of the noncommutativity parameter η on the behavior of $\tilde{T}_H(\hat{t})$. Notice that for $\eta = 0.1$ there is an asymptot at $\hat{t} = \hat{t}_0 \simeq 1.5$ indicating the limit of APE with respect to η . However, for $\eta^2 = 0$ (commutative case) there is no such asymptot. Figure 7 displays the η^2 3D surface in the parameter space (\hat{t}, β) representing the limit of APE in the intervals $\beta \in [2, 3]$ and $\hat{t} \in [2, 3]$. Figure 8 presents the η^2 as a function of \hat{t} and β where APE is not possible in the intervals $\beta \in [1.5, 2]$ and $\hat{t} \in [1, 2.5]$. Thus, where APE is possible there always exists a critical time $\hat{t} = \hat{t}^*$ for a given value of β . Figure 9 is the same as Fig. 8 but in the intervals $\beta \in [-2.5, 3]$ and $\hat{t} \in [1, 10]$. Figure 10 displays a contour lines in the parameter space (\hat{t}, β) for various values of η^2 for which APE is possible.

Regarding the physical explanation of the behaviors of \tilde{T}_H as a function of the scaled dimensionless cosmic time \hat{t} for various values of β , one has the following cases:

i) $\beta < 0$,

Here, one has real singularity (apparent horizon) and naked singularity without a horizon. The particles of positive energies tunnel from outside to inside the apparent horizon. In this case, the scale parameter $\hat{a}(\hat{t})$ decreases and $\ddot{\hat{a}}$ (\hat{a} is proportional to the acceleration or deceleration and the dot stands for the derivative with respect to the cosmic time) decreases too and is positive (accelerated contraction). If we can interpret the Hawking temperature as a kind of an Unruh like effect where the

Fig. 10 Contour lines in the (\hat{t}, β) parameter for which APE is possible



cosmological acceleration is characterized by temperature $T \propto |\ddot{\hat{a}}|$, then the apparent NCG dynamical horizon running radius \tilde{r}_{H_1} which is inversely proportional to $\hat{a}\ddot{\hat{a}}$ increases or equivalently \tilde{T}_H decreases as \hat{t} increases. Notice that \tilde{r}_{H_1} increases until reaching the radius of the universe at some critical time $\hat{t} = \hat{t}^*$ and disappears.

ii) $\beta = \frac{4}{3}$,

Here, one has just one apparent horizon. Moreover, the scale parameter as well as the acceleration decreases as \hat{t} increases ($\ddot{\hat{a}}$ is positive) such that $\hat{a}\ddot{\hat{a}}$ increases. Therefore, one has an accelerated expansion. Using the Hawking Unruh like correspondence (as it is mentioned in *i*), the apparent NCG dynamical horizon running radius $\tilde{r}_{H_3} (\propto \frac{1}{\hat{a}\ddot{\hat{a}}})$ decreases (or equivalently \tilde{T}_H increases) as \hat{t} increases. In this case, \tilde{r}_{H_3} started from infinity then shrunk and becomes smaller than the radius of the universe.

iii) $\beta > \frac{4}{3}$,

Same as the case $\beta = \frac{4}{3}$ but with one NCG apparent horizon and one naked singularity.

iv) $0 < \beta < 1$,

Same as the case (*i*) but with two apparent NCG dynamical horizons (one of them is pure NCG). One has an accelerated expansion (\hat{a} increases but $\ddot{\hat{a}}$ decreases and negative), such that $\hat{a}|\ddot{\hat{a}}|$ decreases. It is to be noted that the two apparent NCG horizons do not increase with the same velocity ($\dot{r}_{H_1} \neq \dot{r}_{H_2}$). Since \dot{r}_H is $\propto r^3_H$.

v) $1 < \beta < \frac{4}{3}$,

Same as the case *iii*) but with two apparent NCG dynamical horizons (one of them is pure NCG) and $\ddot{\hat{a}}$ decreases. The two NCG apparent horizons do not shrink with the same velocity ($\dot{r}_{H_1} \neq \dot{r}_{H_2}$).

vi) $\beta > \frac{4}{3}$,

Same as in the case (*iii*) but either $\ddot{\hat{a}}$ decreases for $\frac{4}{3} < \beta < 2$ or $\ddot{\hat{a}}$ increases for $\beta \geq 2$. In both cases $\hat{a}\ddot{\hat{a}}$ increases.

It is to be noted that for the case ($\beta < 0$ and $\beta > \frac{4}{3}$) there is also a naked singularity (see Table 1) but according to the weak cosmic censorship hypothesis it is not real. Concerning the comparison with the results obtained by the authors of refs. [29–33] for the commutative

apparent horizon radius \tilde{r}_A (see e.g. (4) of ref. [30] and Eq. (2.3) of ref. [33]), they are the same as ours obtained from (36–38) of our paper by taking ($\eta = 0$) and $\hat{a}(t) = \hat{t}^\beta$ (see Section 3). In fact, from (4) and Eq. (2.3) if you set ($\eta = 0$) you get $\tilde{r}_{H_1} = \tilde{r}_{H_3} = \frac{1}{\tilde{H}}$ where $\frac{1}{\tilde{H}} = \frac{\hat{a}}{\hat{t}} = \frac{\hat{t}}{\beta}$. So we recover the results of the commutative case in a FRW universe.

To summarize, we have found that the NCG dynamical black hole lets occurring two simultaneous radiation processes which are caused by the pair creation effects at both horizons of the dynamical black hole. Since the white hole radiation consists of antiparticles, it can be interpreted as an absorption of energy by the outer hole horizon (The pure NCG dynamical horizon is not a passive spectator).

It is to be noted also that H_1 and H_2 never coincide. Moreover in the Reissner-Nordström static black hole [28] the virtual particle-antiparticle are located at inner and outer horizons such that real particles with positive energies are emitted towards the singularity from the inner horizon and antiparticles with negative energies are radiated away from the singularity through the inner horizon. Similarly positive particles energies are emitted away from the singularity through the outer horizon and antiparticles with negative energies are radiated towards the singularity of the outer horizon. However, in our NCG case for both horizons, the particles with positive energies are emitted towards the observer which is inside the horizons and the antiparticles with negative energies are radiated away from the apparent horizon (case of $\beta < 0$ and $0 < \beta < 1$) because r_H increases. For $\beta \geq 1$ (r_H decreases), the observer is outside the horizons where in this case, the particles with positive energies are emitted away from the horizons towards the observer and the antiparticles with negative energies are radiated away from the observer.

The most important finding in this work is that we have for the first time inner and outer dynamical (evolving) apparent horizons. The behavior of our obtained qualitative results depends strongly on $\Theta^{\mu\nu}$ (the NCG thermodynamics, global cosmic structure with Penrose diagrams and stability issues are under investigation).

We conclude that the role played by the space-time noncommutativity parameter is besides the correction made to the Hawking temperature, it gives rise to the emergence of a pure NCG dynamical horizon for certain β parameter space ($0 < \beta < \frac{4}{3}$) affecting the tunneling process. Thus, NCG can be considered as like inducing a kind of an electric charge in an evolving FRW dynamical black hole and thus looks like a non static McVittie charged black hole.

Acknowledgements We are very grateful to the Algerian Ministry of Higher Educations and Scientific Research, DGRSDT and ATRST for the financial support.

Appendix

To simplify the calculations, we limit to a choice of coordinates system where the dimensionless noncommutative parameter components $\Theta^{\mu\nu}$ takes the form:

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (43)$$

with η is a constant. So if $a(t) = t^\beta$ (same conclusions can be obtained for other choices) and with the help of the rearranged Maple 16 tensor package, the non vanishing components of the corresponding verbeins are:

$$\hat{e}^0_{\ 0} = -1 + \frac{\eta^2}{128} \hat{t}^{2\beta-4} \beta^2 (54\beta^2 - 136\beta + 82) \tag{44}$$

$$\hat{e}^0_{\ 1} = -\frac{i\eta}{4} \beta(3\beta - 2) \hat{t}^{2\beta-2} \tag{45}$$

$$\hat{e}^1_{\ 0} = -\frac{i\eta}{4} \beta(\beta - 1) \hat{t}^{\beta-2} \tag{46}$$

$$\hat{e}^1_{\ 1} = \hat{t}^\beta - \frac{\eta^2}{128} \beta^2 \hat{t}^{3\beta-4} (25\beta^2 + 57\beta + 10) \tag{47}$$

$$\hat{e}^2_{\ 2} = \tilde{r} \hat{t}^\beta + \frac{i\eta}{4} \hat{t}^{\beta-2} + \frac{\eta^2}{64} \tilde{r} \beta^2 (-19\beta^2 + 9\beta - 1) \tag{48}$$

$$\hat{e}^3_{\ 3} = -\tilde{r} \sin \theta + \hat{t}^\beta + \frac{i\eta}{4} \sin \theta \hat{t}^{\beta-1} + \frac{\eta^2}{64} \tilde{r} \beta^2 \hat{t}^{3\beta-4} (3\beta^2 - 18\beta + 15) \tag{49}$$

Similarly the corresponding spin connection components of the deformed FRW metric have the following expressions:

$$\hat{\omega}_0^{00} = \hat{\omega}_0^{11} = \frac{3}{8} \eta^2 \beta^2 (\beta - 2)(\beta - 1)^2 t^{2\beta-5} \tag{50}$$

$$\hat{\omega}_1^{00} = \hat{\omega}_1^{11} = -i\eta \beta^2 (\beta - 1) t^{2(\beta-3)} \tag{51}$$

$$\hat{\omega}_1^{01} = -\hat{\omega}_1^{10} = -\beta t^{\beta-1} - \frac{1}{64} \eta^2 \beta^3 t^{3\beta-5} (23\beta^2 - 54\beta + 31) \tag{52}$$

$$\hat{\omega}_2^{02} = -r\beta t^{\beta-1} - \frac{1}{16} \beta(\beta - 1)(12i\eta t^{\beta+3} - \eta^2 r \beta^3 t^{3\beta}) \tag{53}$$

$$\hat{\omega}_2^{12} = -1 - \frac{1}{32} \beta^2 t^{2\beta-4} (32i\eta r t (\beta - 1) + \eta^2 (5\beta^2 - 8\beta + 3)) \tag{54}$$

$$\hat{\omega}_2^{20} = r\beta t^{\beta-1} \tag{55}$$

$$\hat{\omega}_2^{21} = 1 \tag{56}$$

$$\hat{\omega}_3^{03} = r\beta \sin \theta t^{\beta-1} - \frac{1}{16} \beta(\beta - 1) \sin \theta (12i\eta t^{\beta-2} - \eta^2 r \beta^3 t^{3\beta-5}) \tag{57}$$

$$\hat{\omega}_3^{13} = \sin \theta - \frac{1}{32} \sin \theta \beta^2 (32i\eta r (\beta - 1) t^{2\beta-3} + \eta^2 (5\beta^2 - 8\beta + 3) t^{2\beta-4}) \tag{58}$$

$$\hat{\omega}_3^{23} = -\hat{\omega}_3^{32} = \cos \theta \tag{59}$$

$$\hat{\omega}_3^{30} = -r\beta \sin \theta t^{\beta-1} \tag{60}$$

$$\hat{\omega}_3^{31} = -\sin \theta \tag{61}$$

References

1. Nicolini, P., Smailagic, A., Spallucci, E.: Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole. *Phys. Lett. B.* **632**, 547–551 (2006)
2. Bahns, D., Doplicher, S., Fredenhagen, K., Piacitelli, G.: On the unitarity problem in space/time noncommutative theories. *Phys. Lett. B.* **533**, 178–181 (2002)
3. Chamseddine, A.H., Felder, G., Fröhlich, J.: Gravity in non-commutative geometry. *Commun. Math. Phys.* **155**, 205–217 (1993)

4. Madore, J.: An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
5. Connes, A.: Noncommutative geometry. Academic Press, New York (1994)
6. Juro, B., Müller, L., Schraml, S., Schupp, P., Wess, J.: Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J. C* **21**, 383–388 (2001)
7. Zhang, Y., Cai, Z.: Analytical spectra of CMB anisotropies and polarization. *Int. Mod. Phys.* **23**, 420–424 (2013)
8. Hu, W., Seljak, U., White, M., Zaldarriaga, M.: Complete treatment of CMB anisotropies in a FRW universe. *Phys. Rev. D* **57**, 3290 (1998)
9. Behr, W., Deshpande, N.G., Duplancic, G., Schupp, P., Trampetic, J., Wess, J.: *Eur. Phys. J. C* **29**, 441 (2003)
10. Wang, W., Hang, J.H., Sheng, Z.M.: *Phys. Rev. D* **86**, 025003 (2012)
11. Seiberg, N., Witten, E.: *J. High Energy Phys.* **9909**, 032 (1999)
12. Kim, W., Lee, D.: *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 3213 (2010)
13. Mebarki, N., Zaim, S., Khodja, L., Aissaoui, H.: *Phys. Scri.* **78**, 045101 (2008)
14. Chen, D., Yang, H., Zu, X.: Fermion tunneling from anti-de Sitter spaces. *Eur. Phys. J. C.* **56**, 119–124 (2008)
15. Parikh, M., Wilczek, F.: Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5042 (2000)
16. Visser, M.: Essential and inessential features of Hawking radiation. *Int. Mod. Phys. D* **12**, 649 (2003)
17. Mebarki, N., Khelili, F., Bouhalouf, H., Mebarki, O.: Noncommutative Lemaitre-Tolman-Bondi like metric and cosmology. *Elect. J. Theor. Phys.* **6**(20), 193–210 (2009)
18. Bouhalouf, H., Mebarki, N.: Induced Gravity from Noncommutative Chiral Gauge Anomalies in the Star Product Ordering Approach, in *The Auresian Workshop on Astronomy and Astrophysics*, eds. African Skies/Cieux Africain Issue (Batna, Algeria, 2010), p. 61
19. Bouhalouf, H., Mebarki, N., Aissaoui, H.: Fermionic Tunneling Effect and Hawking radiation in a Non Commutative FRW Universe, *The Third Workshop on Astronomy and Astrophysics*, eds. American Institute of Physics (Constantine, Algeria, 2010) pp. 201–209
20. Aissaoui, H., Mebarki, N., Bouhalouf, H.: FRW Like Cosmological Model and Accelerated Expansion of the Universe from Non Commutative Seiberg-Witten Geometry, *The Third Workshop on Astronomy and Astrophysics*, eds. American Institute of Physics (Constantine, Algeria, 2010), pp. 164–175
21. Chaichian, M., Tureanu, A., Zet, G.: Correction to Schwarzschild solution in noncommutative gauge theory of gravity. *Phys. Lett. B* **660**, 573–578 (2008)
22. Hayward, S.A.: *Class. Quant. Grav.* **15**, 3147–3162 (1998)
23. Kodama, H.: Conserved energy flux for the spherically symmetric system and the back reaction problem in the black hole evaporation. *Prog. Theor. Phys.* **63**, 1217 (1980)
24. Di Criscienzo, R., Nadalini, M., Vanzo, L., Zerbini, S., Zoccatelli, G.: On the Hawking radiation as tunneling for a class of dynamical black holes. *Phys. Lett. B* **657**, 107–111 (2007)
25. Mukherjee, P., Saha, A.: Note on the noncommutative correction to gravity. *Phys. Rev. D* **74**, 027702 (2006)
26. Calmet, X., Kobakhidze, A.: Noncommutative general relativity. *Phys. Rev. D* **72**, 045010 (2005)
27. PARIKH, M.: A secret tunnel through the horizon. *Int. Mod. Phys. D* **13**, 2351–2354 (2004)
28. Peltola, A., Mäkelä, J.: Radiation of the inner horizon of the reissner-nordström black hole. *Int. Mod. Phys. D* **15**, 817 (2006)
29. Gong, Y., Wang, A.: Friedmann equation and thermodynamics of apparent horizons. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 211301 (2007)
30. Li, R., Ren, J.R., Shi, D.F.: Fermions tunneling from apparent horizon of FRW universe. *Phys. Lett. B* **670**, 446–448 (2009)
31. Cai, R.G., Kim, S.P.: First law of thermodynamics and Friedmann Equations of Friedmann-Robertson-Walker Universe. *JHEP* **050**, 0502 (2005)
32. Akbar, M., Cai, R.G.: Thermodynamic behavior of the Friedmann equation at the apparent horizon of the FRW universe. *Phys. Rev. D* **75**, 084003 (2007)
33. Cain, R.G., Cao, L.M.: Unified 1st law thermodynamics of apparent horizon of the FRW universe. *Phys. Rev. D* **75**, 064008 (2007)

Bibliographie

- [1] R.M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press (1992).
- [2] M. Blagojević, *GRAVITATION AND GAUGE SYMMETRIES*, Institute Of Physics Publishing "IOP Publishing", Bristol and Philadelphia Ltd (2002).
- [3] A. Einstein, *Ann. Phys*, **17**, 891 (1905).
- [4] A. Einstein, *Annalen der Phys*, **49**, 769 (1916).
- [5] M. D. Kruskal, *Phys. rev*, **119**, 1743 (1960).
- [6] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, NewYork (1973).
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity*, University of Guelph, Canada (2002).
- [8] E. Poisson, *An advanced course in general relativity*, Wiley, New York (1972).
- [9] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, arXiv :0004075 [astro-ph].
- [10] J.D. Cohn, *Astrophys. Sp. Sci*, 259-213 (1998).
- [11] V. Sahni and A. Starobinsky, *The case for a positive cosmological lambda-term*, arXiv :9904398 [astro-ph].
- [12] M.S. Turner, *Dark matter and dark energy in the universe*, arXiv :9811454 [astro-ph].
- [13] G. Skandalis, *Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbre de HOPF [d'après A. Connes et H. Moscovici]*, Séminaire BOURBAKI, n° 892, 345-364 (2001).
- [14] E. Sérié, *Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle de Born-Infeld*, Thèse de doctorat en physique théorique, sous la direction de R. Kerner, Paris, Université Paris 6, (2005).
- [15] S. L. Adler, *Anomalies*, arXiv :0411038 [hep-th].
- [16] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett*, **42**, 1195 (1979).
- [17] N. Mebarki, L. Khodja and S. Zaim, *EJTP* **7,23**, 181-196 (2010).
- [18] J. A. Harvey, *Tasi 2003 lectures on anomalies*, arXiv :0509097 [hep-th].
- [19] K. Fujikawa, *Phys. Rev*, **D 29**, 285 (1984).

- [20] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Wiley, New York (1995).
- [21] M. Atiyah and I. Singer, *Ann. Math*, **87**, 484 (1968).
- [22] N. Mebarki, F. Khelili and O. Benabbes, *EJTP* **6,22**, 5-28 (2009).
- [23] N. Mebarki and H. Bouhalouf, *Induced Gravity from Noncommutative Chiral Gauge Anomalies in the Star Product Ordering Approach*, The Auresian Workshop on Astronomy and Astrophysics, African Skies/Cieux Africain Issue, 61 (2010).
- [24] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys*, **172**, 187 (1995).
- [25] N. Seiberg and E. Witten, *JHEP*, **9909**, 32 (1999).
- [26] M. Chaichian, A. Tureanu and G. Zet, *Phys. Lett*, **B 660**, 573-578 (2008).
- [27] A. H. Chamseddine, *Phys. Lett*, **B 504**, 33 (2001).
- [28] L. Bonora, M. Schnabl, M. Sheikh-Jabbari and A. Tomasiello, *Nucl. Phys*, **B 589**, 461 (2000).
- [29] B. Jurco, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *Eur. Phys. J*, **C 17**, 512 (2000).
- [30] G. Zet, V. Manta and S. Babeti, *Int. Mod. Phy*, **C 14**, 41 (2003).
- [31] G. ZET, *Rom. Journ. Phys*, **53**, 635-644 (2008).
- [32] G. Zet, *Physics AUC*, **18**, 106-119 (2008).
- [33] P. C. Vaidya, *Proc. Indian Acad. Sci*, **33**, 264 (1951).
- [34] P. C. Vaidya, *Nature*, **171**, 260 (1953).
- [35] J. M. Bardeen, *Phys. Rev. Lett*, **46**, 382 (1981).
- [36] S. A. Hayward, *Class. Quant. Grav*, **15**, 3147 (1998).
- [37] A. H. Chamseddine, *Deforming Einstein's Gravity*, arXiv :0009153 [hep-th].
- [38] S. A. Hayward, *Class. Quant. Grav*, **15**, 3147-3162 (1998).
- [39] S. W. Hawking and W. Israel, *General relativity*, Cambridge university, Press (1979).
- [40] D. Chen, H. Yang and X. Zu, *Eur. Phys. J*, **C 56**, 119-124 (2008).
- [41] H. Bouhalouf, N. Mebarki and H. Aissaoui, *Fermionic Tunneling Effect and Hawking radiation in a Non Commutative FRW Universe*, The Third Workshop on Astronomy and Astrophysics, eds. American Institute of Physics (Constantine, Algeria) 201-209 (2010).
- [42] H. Aissaoui, N. Mebarki and H. Bouhalouf, *FRW Like Cosmological Model and Accelerated Expansion of the Universe from Non Commutative Seiberg-Witten Geometry*, The Third Workshop on Astronomy and Astrophysics, eds. American Institute of Physics (Constantine, Algeria), 164-175 (2010).
- [43] M. Parikh and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett*, **85**, 5042-5045 (2000).

-
- [44] G. E. Volovik, *JETP Lett*, **69**, 705 (1999).
- [45] A. Calogenacos and G. E. Volovik, *PJET. Lett*, **69**, 281 (1999).
- [46] E. C. Vegenas, *Phys. Lett*, **B 559**, 65 (2003).
- [47] D. Y. Chen, *Mod. Phys. Lett*, **A 22**, 891 (2007).
- [48] M. Visser, *Int. Mod. Phys*, **D 12**, 649 (2003).
- [49] M. Angheben, M. Nadalini, L. Vanzo and S. Zerbini, *JHEP*, **0505** 14 (2005).
- [50] R. Di Criscienzo and L. Vanzo, *Euro. Phys. Lett*, **82**, 60001 (2008).
- [51] R. Di Criscienzo, M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini and G. Zoccatelli, *Phys. Lett*, **B 657**, 107-111 (2007).
- [52] R. Kerner and R. B. Mann, *Fermions Tunnelling from Black Holes*, arXiv :0710.0612 [hep-th].
- [53] R. Li, J. R. Ren and D. F. Shi, *Phys. Lett*, **B 670**, 446-448 (2009).
- [54] R. Kerner and R.B. Mann, *Charged Fermions Tunnelling from Kerr-Newman Black Holes*, arXiv :0803.2246 [hep-th].
- [55] R. Kerner and R.B. Mann, *Tunnelling, Temperature and Taub-NUT Black Holes*, arXiv :0603019 [gr-qc].
- [56] H. Kodama, *Prog. Theor. Phys*, **63**, 1217 (1980).
- [57] A.H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, *Commun. Math. Phys*, **155**, 205-217 (1993).
- [58] H. Kodama, *Prog. Theor. Phys*, **63**, 1217-1228 (1980).
- [59] P. Mukherjee and A. Saha, *Phys. Rev*, **D 74**, 027702 (2006).
- [60] A. Peltola and J. Mäkelä, *Int. Mod. Phys*, **D 15**, 817 (2006).
- [61] Y. Gong and A. Wang, *Phys. Rev. Lett*, **99**, 211301 (2007).
- [62] R. Li, J. R. Ren and D.F. Shi, *Int. Mod. Phys*, **B 670**, 446-448 (2009).
- [63] R. G. Cai and S. P. Kim, *JHEP*, **050**, 0502 (2005).
- [64] M. Akbar and R. G. Cai, *Phys. Rev*, **D 75**, 084003 (2007).
- [65] R. G. Cain and L. M. Cao, *Phys. Rev*, **D 75**, 064008 (2007).
- [66] N. Seiberg and E. Witten, *J. High Energy Phys*, **9909**, 032 (1999).
- [67] R. Banerjee, B. R. Majhi and S. Samanta, *Noncommutative Black Hole Thermodynamics*, arXiv :0801.3583 [hep-th].
- [68] X. Calmet and A. Kobakhidze, *Phys. Rev*, **D 72**, 045010 (2005).
- [69] M. Parikh, *Int. Mod. Phys*, **D 13**, 2351-2354 (2004).
- [70] A. Einstein, *Ann. Phys*, **17**, 891 (1905).
- [71] H. Weyl, *Sitz. Ber. Akad. Wiss*, 465 (1918).
- [72] L. O’Raifeartaigh, *The drawing of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics, Princeton (1997).

- [73] G. Lyra, *Math*, **Z 54**, 52 (1951).
- [74] F. Rahaman, A. Glosh, M. Kalam, *Lyra black holes*, arXiv :0612042 [gr-qc].
- [75] D.K. Sen, K.A. Dunn, *J. Math. Physi*,**12**, 578 (1971).
- [76] R. Di Criscenzo,S. A. Hayward, M. Nadalini, L. Vanzo and S. Zerbini, *Class. Quant. Grav*, **27** 015006 (2010).
- [77] S. A. Hayward, *Class. Quant. Grav* **15** 3147 (1998).
- [78] R. Casana, C. A. M. de Melo and B. M. Pimentel, *Massless DKP field in Lyra manifold*, arXiv :0509117 [gr-qc].
- [79] R. Casana, C. A. M. de Melo and B. M. Pimentel, *Scalar and Vector Massive Fields in Lyra's Manifold*, arXiv :0501085 [hep-th].
- [80] H. Bouhallouf, *Sciences et Technologie*, **A 40**, Université des frères Mentouri Constantine 1, 121-126 (2014).