

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الاخوة منتوري قسنطينة 1
كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

الرقم التسلسلي :
السلسلة:

أطروحة

لنيل شهادة الدكتوراه الطور الثالث (ل.م.د)
تخصص: الفيزياء النظرية
بعنوان:

الحوسبة الكوانتية و تطبيقاتها

مقدمة من طرف:

سليمانى أيوب

بتاريخ: 2017/10/26

أمام اللجنة:

الرئيس:	نور الدين مباركي	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
المقرر:	عاشور بن سلامة	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
الأعضاء:	منير بوساهل	أستاذ التعليم العالي	جامعة محمد بوضياف	المسيلة
	حبيب عيساوي	أستاذ التعليم العالي	جامعة الإخوة منتوري	قسنطينة 1
	مصطفى مومني	أستاذ محاضر " أ "	جامعة محمد خيضر	بسكرة

تشكرات

بعد رحلة بحث و جهد و اجتهاد تكلمت بإنجاز هذا البحث ، نحمد الله عز وجل على نعمه التي منّ بها علينا فهو العليّ القدير، كما لا يسعنا إلا أن نخص بأسمى عبارات الشكر للأستاذ **بن سلامة عاشور** لما قدمه لنا من جهد و نصح و معرفة طيلة إنجاز هذا البحث. كما أتقدم بالشكر الجزيل لكل من أسهم في تقديم يد العون لإنجاز هذا البحث، و نخص بالذكر أستاذتنا الكرام الذين أشرفوا على تكويننا طيلة مسارنا الجامعي. إلى من زرعوا فينا التفاؤل و قدموا لنا المساعدات والتسهيلات والمعلومات، فلهم منا كل الشكر.

أتقدم أيضا بالشكر للأستاذ الفاضل **مباركي نور الدين** على تكريمه و قبوله ترؤس لجنة المناقشة. أقدم تشكراتي أيضا للأستاذة **منير بوساهل**، **حبيب عيساوي** و **مصطفى مومني** على قبولهم المشاركة في لجنة المناقشة.

ذكرى و ترحم

- رحم الله ارواحا فقدناها قبل ان نكمل هذا العمل، حيث كانت لنا سندا و معيننا على اتمامه.
- شكرا لك يا استاذي و مشرفي الاول **لشهب احمد** على ما قدمته لي طيلة السنوات الخمس التي عملت فيها معك و جعلها الله لك صدقة جارية تنير قبرك و تؤنس و حشتك.
 - زميلي و صديقي و اخي **عز الدين مكاحلية** الذي تخطفه الموت من بيننا على حين غرة و هو على مشارف اكمال بحثه. فاللهم اغفر ذنوبه و نور قبره و نقه من الذنوب و الخطايا كما ينقى الثوب الابيض من الدنس.

اهداء

الى من كلله الله بالهيبة والوقار
الى من تعب و صبر و تذوق من اجلي كل مر
الى من علمني الكفاح و ارشدني الى طريق العلم
الى "والدي العزيز"

الى من أرضعتني الحب والحنان.
الى من أنارت دربي وأعانتي بالصلوات و الدعوات.
الى أغلى انسان في الوجود.

الى "امي الحبيبة"

الى من أعطتني الأمل كلما أحسست بالفشل.
الى من شجعتني كلما أصابني تعب أو كلل أو ملل.

الى "زوجتي الغالية"

الى شمس أحلامي و ترانيم أنفاسي.
الى عروس حياتي و ربيع قلبي.
اليك يا مأوى المشاعر و رياض الاحاسيس.

الى ابنتي "لجين"

الى أخي وأخواتي وسندي في الحياة.

الى "معاذ"، "سمية" و "بشرى"

الى أمي الثانية التي لم تنجيني.

الى "خالتي نورة"

فهرس المحتويات

1.....	مقدمة عامة	
5.....	الفصل الأول: الحوسبة الكلاسيكية	
5.....	مقدمة	1.1
5.....	الحساب الثنائي	1.2
7.....	الجمع والطرح الثنائي	1.3
8.....	البوابات المنطقية LOGICAL GATES	1.4
9.....	البوابات المنطقية غير الشاملة	1.4.1
12.....	البوابات المنطقية الشاملة	1.4.2
16.....	الدارات المنطقية LOGICAL CIRCUITS	1.5
18.....	الدارات المنطقية التوافقية	1.5.1
18.....	دائرة الجامع المنطقي	1.5.1.1
20.....	دائرة الطارح المنطقي	1.5.1.2
21.....	دائرة مفكك الشفرة Decoder	1.5.1.3
22.....	دائرة المقارن Comparator	1.5.1.4
23.....	وحدة المعالجة المركزية	1.6
26.....	الطاقة والمعلومة	1.7
26.....	عفريت Maxwell Demon	1.7.1
28.....	مبدأ Landauer Principle	1.7.2
31.....	الحوسبة العكوسة	1.8
31.....	البوابات العكوسة غير الشاملة	1.8.1
33.....	البوابات العكوسة الشاملة	1.8.2
36.....	الفصل الثاني: مبادئ ومفاهيم في الحوسبة الكمية	

36.....	مقدمة	2.1
38.....	لماذا الحوسبة الكمية ؟	2.2
38.....	معدات الحوسبة الكمية	2.3
39.....	حواسيب مصيدة الايونات Ions trap computers	2.3.1
39.....	حواسيب الرنين المغناطيسي النووي	2.3.2
40.....	الحواسيب الفوتونية Photonic computers	2.3.3
40.....	حواسيب نقطة الكم Quantum dot computers	2.3.4
41.....	حواسيب النواقل عالية التوصيل Superconductor computers	2.3.5
42.....	مقدمة رياضياتية للحوسبة الكمية	2.4
42.....	ترميز برا-كت Bra-ket	2.4.1
42.....	ترميز Heisenberg	2.4.2
43.....	جداء المصفوفات	2.4.3
44.....	جداء Kronecker	2.4.4
45.....	أثر المصفوفة	2.4.5
46.....	ميكانيك الكم	2.5
46.....	نموذج جسمية Bohr	2.5.1
48.....	النموذج الكمي لجسمية دقيقة	2.5.2
49.....	تجربة شقي يونغ	2.5.3
52.....	معادلة Schrödinger	2.5.4
53.....	تراكب الحالات الكمية	2.5.5
56.....	القياس الاسقاطي	2.5.6
57.....	من ميكانيك الكم الى المنطق الكمي	2.6
58.....	نظام ثنائي الكيوبت	2.6.1
59.....	الحالات المختلطة	2.6.2

60..... Entanglement التشابك 2.6.3

62..... المصفوفات التبديلية 2.6.4

63..... الفصل الثالث: مبادئ تصميم الدارات الكمية

63..... مقدمة 3.1

63..... أبحاث سابقة في مجال التصميمات الآلية للدارات الكمية 3.2

66..... البوابات الكمية و الدارات المنطقية الكمية 3.3

66..... البوابات الكمية لكيوت وحيد 3.3.1

69..... الدوران وفق المحاور X، Y و Z 3.3.2

73..... التعبير على بوابات NOT، V و Hadamard ببوابات الدوران 3.3.3

74..... البوابات الكمية متعددة الكيوبت و المتحكم فيه 3.3.4

81..... تحويل البوابات العكوسة الى بوابات كمية (نظام NCV) 3.3.5

82..... معايير تحسين البوابات والدارات الكمية 3.3.6

84..... امثلة عن البوابات الكمية و تحقيقها الكمي بنظام NCV 3.3.7

84..... بوابة Peres الكمية 3.3.7.1

85..... بوابة Fredkin الكمية 3.3.7.2

87..... بوابة Toffoli الكمية 3.3.7.3

88..... الفصل الرابع: تصميمات لدارة وحدة الحساب والمنطق

88..... مقدمة 4.1

89..... دارتي الجامع و الطارح الكميئين 4.2

90..... تصميم الجامع الكمي البسيط 4.2.1

92..... تصميم محسن لدارة الجامع الكمي البسيط 4.2.2

94..... الجامع الكمي (نموذج CDKM) 4.2.3

95..... الجامع الكمي (نموذج Van Rentergem) 4.2.4

96.....	الجامع الكمي (نموذج DPG و HGN)	4.2.5
98.....	دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية	4.3
98.....	وحدة الحساب و المنطق (نموذج TGA)	4.3.1
101.....	وحدة الحساب والمنطق الكمية (نموذج ZLZH)	4.3.2
104.....	دارة وحدة الحساب والمنطق (نموذج HB)	4.3.3
105.....	نماذج اخرى	4.3.4
107.....	الفصل الخامس: تصميم مقترح لدارة الحساب والمنطق الكمية	
107.....	مقدمة	5.1
107.....	تصميم مقترح لدارة الجامع	5.2
109.....	دارة وحدة الحساب و المنطق المقترحة	5.3
109.....	العمليات الحسابية و المنطقية المنتجة من طرف الدارة المقترحة	5.3.1
113.....	تحليل اداء دارة وحدة الحساب والمنطق المقترحة	5.4
116.....	الخاتمة	
119.....	المراجع	
124.....	Abstract	
125.....	Résumé	
.....	ملخص	

مقدمة عامة

خلال العقود القليلة الماضية زادت قوة المعالجة في الحواسيب بصفة طردية وهذا راجع الى زيادة كثافة الترانزستورات في الرقائق الالكترونية، التي تخضع في تطورها لقانون Moore [1]. على الرغم من هذا التطور الكبير الى أن هذا الطريق قد أشرف على نهايته بسبب التقليل الكبير في تقنية CMOS (نصف الناقل المعدني المؤكسد المكمل وهي تقنية لتصنيع المكونات الالكترونية) الذي وصل الى حدود الذرة. في عام 2014، قامت الشركات الرائدة بتصنيع أجهزة معتمدة على تكنولوجيا في حدود 14 نانومتر وبالتقدير في 2017 سوف تعتمد شركات أنصاف النواقل على تكنولوجيا في حدود 10 نانومتر، هذا النجاح في تقليص الترانزستور سوف يتخطى في نهاية المطاف حدود الفيزياء الكلاسيكية حيث تظهر مشاكل لا نستطيع التحكم فيها مهما كانت الأجهزة التي نستعملها مثل ظاهرة النفق الكمي Quantum tunneling. بالإضافة الى مشاكل الحدود الفيزيائية للحوسبة الكلاسيكية فإن مشكل الطلب المتزايد على اجهزة ذات قوة معالجة كبيرة و ذات استهلاك ضعيف للطاقة لا يقل اهمية عن سابقه، مما أدى بالباحثين إلى النظر لإيجاد بدائل لهذا المنهج.

الحوسبة الكمية Quantum computing هي البديل الواعد الذي أجمع عليه معظم الباحثين والعلماء في مجال علوم الكمبيوتر حيث يعتمد في معالجته للمعلومة على نظام ميكانيك الكم Quantum Mechanics. ميكانيك الكم هو عبارة عن إطار رياضي لبناء نظريات فيزيائية تصف ازدواجية السلوك (جسيم- موجة) Duality wave-particle و التفاعلات بين المادة والطاقة matter-radiation interaction. مؤخرًا طرحت عدة تقنيات كمية مثل نظام الرنين المغناطيسي للمحلول solution NMR systems، حيث يتم فيه حفظ المعلومة بعزم نواة الذرة و نظام الكمي الضوئي يعتمد على إستقطاب الفوتونات لتمثيل المعلومة.

في عام 1961 بين Rolf Landauer [2] أن إزالة بت (bit) واحد من المعلومة يؤدي الى تبديد طاقة قدرها $k * T * \ln 2$ ، حيث k هو ثابت Boltzmann و T هي درجة الحرارة المطلقة للمحيط بال Kelvin. في الحوسبة غير العكوسة irreversible computation تضع المعلومة لأنه لا يمكن دائما تحديد مداخل البوابة input بمعرفة مخرجها output. أغلبية العمليات الحاسوبية في الدارات الحالية غير عكوسة وبالتالي هذه الرقاقات تبدد الكثير من الطاقة بسبب ضياع المعلومة.

في عام 1973 أثبت Charles Bennett [3] أن فقدان الطاقة يمكن أن يتناقص أو حتى ينعدم إذا كانت العملية الحاسوبية لا يتم فيها إزالة المعلومات. بما أن المعلومة لا تضع في العمليات العكوسة اي أن الدارات العكوسة reversible circuits سوف تعطي إمكانية كبيرة لتخفيض استهلاك الطاقة power consumption [4,5]. تتكون الدارات العكوسة من مجموعة من البوابات العكوسة التي تطبق على مجموعة من المداخل المتتالية حيث تملك هذه البوابات نفس العدد من المداخل و المخارج وتقوم أيضا بعمليات تبديلية.

نظرا لأهمية الحساب العكوس فإنه طبق في عدة مجالات منها الحوسبة الضوئية Optical Computing [7.6]، حوسبة ال DNA [8.9]، و تكنولوجيا النانو [10.11]، ونظام التشفير Cryptography [12]. من أهم التطبيقات التي طبق فيها الحساب العكوس هو الحوسبة الكمية [13]. الدارات الكمية لها طبيعة عكوسة لكن البنية الفيزيائية لها تختلف اختلافا جذريا عن الدارات الكلاسيكية، و حتى في العمليات العكوسة التي تقوم بها. الدارات الكمية تختلف أيضا في تكوينها حيث أن الجزيئات و الذرات هي الحاملة للمعلومة الكمية في حين تستعمل الأسلاك و الترنزستورات في حمل ومعالجة المعلومات الكلاسيكية .

الحواسيب الكمية هي عبارة عن المرشح الأكثر احتمالا لكي تكون الجيل الثاني للحواسيب حيث ستكون أقوى بكثير من الحواسيب التقليدية و تملك القدرة لحل المسائل الصعبة التي عجز

الكمبيوتر الحالي عن حلها و هذا راجع للسرعة الكبيرة التي تعالج بها المعلومات باستعمال الخوارزميات الكمية. على سبيل المثال خوارزمية Shor لتحليل الأعداد factorization algorithm [14] يكون فيها الإشكال يتعلق بزمان التحليل الذي يكون على شكل كثير حدود polynomial time complexity، في حين يكون الزمن في التحليل الكلاسيكي عبارة عن دالة أسية.

المنطق العكوس هو جزء أساسي في نموذج الدارات الكمية [15]، إذا كنت تريد إجراء عمليات حسابية كمية في الكمبيوتر الكمي يجب عليك بناء دارات منطقية كمية و عكوسة مثل دائرة الجامع الكلي العكوس [16,17] أو دائرة مفكك الشفرة [18,19] أو دائرة المقارن [20,21]، و للتحكم في جميع العمليات الحسابية و المنطقية الكمية الناشئة في الحاسوب الكمي يجب إنشاء وحدة الحساب والمنطق العكوسة [22,23,24] حيث تعتبر الجزء الأساسي في المعالج الكمي حيث تقوم و تتحكم بجميع العمليات المنطقية والحسابية التي يحتاجها الكمبيوتر وتنقسم إلى ثلاثة أجزاء هي: وحدة التحكم و دائرة الحساب و دائرة المنطق. ولبناء جميع هذه الدارات الكمية السابقة نحتاج إلى مادة أولية أساسية، ليست بالطبع البوابات المنطقية الكلاسيكية و إنما هي البوابات الكمية العكوسة نذكر منها بوابة Toffoli [24]، بوابة Fredkin [25] و بوابة Peres [26].

خضعت هذه الدارات الكمية إلى تحسينات و تطورات منذ ظهورها أول مرة حيث اعتمد الباحثون على عدة عوامل في تطويرها أهمها الكلفة الكمية [27] و هي عدد البوابات الأولية ($1*1$ و $2*2$) الداخلة في تكوين هذه الدارات، التأخير الكمي [27] لا يقل أهمية عن الكلفة الكمية وهو عدد العمليات المتوازية التي تقوم بها الدارة ابتداء من الدواخل حتى النواتج، النفاية الناتجة وهي عدد الكيوبتات الخارجة من الدارة التي تعتبر زائدة و غير ضرورية في حسابات لاحقة.

هذا البحث يتكون من خمسة فصول رئيسية:

الفصل الأول: الحوسبة الكلاسيكية وهي عبارة عن تمهيد نتطرق فيه للحوسبة الموجودة في الكمبيوتر الحالي أو ما يسمى بالكمبيوتر الكلاسيكي.

الفصل الثاني: نشرح فيه مبادئ ميكانيك الكم التي سوف نستعملها لبناء التصاميم المنطقية.

الفصل الثالث: نقدم فيه شرح مفصل لأهم أنواع البوابات والدارات الكمية التي سوف نستعملها لبناء دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية، و نتطرق أيضا الى معايير تحسين هذه البوابات والدارات مثل الكلفة الكمية والتأخير الكمي والنفايات الكمية.

الفصل الرابع: نذكر فيه أهم التصميمات الموجودة لحد الآن في مجال وحدة الحساب والمنطق الكمية مع حساب معايير التحسين لكل نموذج.

الفصل الخامس: نقدم فيه دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية المقترحة مع حساب معايير التحسين. وفي الأخير نقوم بمقارنة نتائج الدارة المقترحة مع نتائج التصاميم السابقة.

الخاتمة: نقدم فيها ملخصا شاملا لنتائج هذا البحث.

الفصل الأول

الحوسبة الكلاسيكية

Classical Computing

1.1 مقدمة

في هذا الفصل نتطرق الى المعارف الأساسية في علم الحاسوب لأن فهمها هو عبارة عن خطوة مهمة لفهم المعلومة والحوسبة الكمية. حيث سندرس نموذج الدارات الخاص بالحوسبة و الذي يعتبر الأقرب للكمبيوترات الحقيقية وهو مكافئ لنموذج آلة Turing [28]. في هذا النموذج يتم حمل المعلومة في أسلاك و البوابات تقوم بمعالجتها و إجراء جميع العمليات المنطقية المعقدة، حيث تستعمل لحل المشاكل المعقدة باستخدام خوارزميات مناسبة مع الأخذ بعين الإعتبار عدد الموارد المستغلة كذاكرة الحاسوب، الوقت و الطاقة بحيث يجب أن تكون أقل عدد ممكن. في الأخير ندرس العلاقة بين الطاقة والمعلومة التي تطرق إليها العالمان [2] Landauer و [3] Bennett في محاولتهما لحل تناقض [3] Maxwell's paradox.

1.2 الحساب الثنائي

دعنا في البداية نعرف البت (bit)، وهو الوحدة الأولية في الحاسوب الكلاسيكي، حيث يعتبر كمتغير ثنائي يملك قيمتين فقط 0 و1. الأعداد في النظام الثنائي تقدم كمجموعة يمزج فيها القيمتين، حيث تسمى سلسلة مكونة من 8 بت بالبايت (byte) وهو الوحدة الأساسية للبيانات في الحواسيب، كمثل العدد العشري 25 يكتب في النظام الثنائي على الشكل 11001 و يتم هذا التحويل بالإعتماد على طريقة القسمة على العدد 2 والباقي هو التمثيل الثنائي حيث نتوقف عند الوصول الى العدد 1.

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 25 \\
 \hline
 2 & 12 \quad -1 \\
 \hline
 2 & 6 \quad -0 \\
 \hline
 2 & 3 \quad -0 \\
 \hline
 & 1 \quad -1
 \end{array}$$

بالتالي العدد 25 يكتب بالطريقة التالية $11001_2 = 25_{10}$.

العشري	الثنائي	العشري	الثنائي
1	1	10	1010
2	10	11	1011
3	11	12	1100
4	100	13	1101
5	101	14	1111
6	110	15	10000
7	111	16	10001
8	1000	17	10010
9	1001	18	10011

أما بالنسبة للأعداد العشرية الصحيحة مثل 0.0625 فيتم تحويلها الى النظام الثنائي عن طريق الضرب المتتالي في العدد 2 حتى ينتهي العدد الذي بعد الفاصلة كما يلي:

$$\begin{array}{r}
 0.625 \quad *2 = 0 \quad .1250 \\
 0.125 \quad *2 = 0 \quad .25 \\
 0.25 \quad *2 = 0 \quad .5 \\
 0.5 \quad *2 = 1 \quad .0
 \end{array}$$

ومنه يمكن كتابة العدد 0.0625 في النظام الثنائي كما يلي: $0.0001_2 = 0.0625_{10}$.

لتحويل الأعداد ثنائية الى الأعداد العشرية طبيعية وصحيحة نتبع الطريقة التالية:

$$(1001)_2 = 1*2^{4-1} + 0*2^{4-2} + 0*2^{4-3} + 1*2^{4-4}$$

$$= 8 + 0 + 0 + 1$$

$$= (9)_{10}$$

$$(11.011)_2 = 1*2^{2-1} + 1*2^{2-2} + 0*2^{2-3} + 1*2^{2-4} + 1*2^{2-5}$$

$$= 2 + 1 + 1/4 + 1/8$$

$$= (3.375)_{10}$$

1.3 الجمع والطرح الثنائي

الجمع في النظام الثنائي يتم بنفس طريقة النظام العشري. جميع الحالات الممكنة للجمع الثنائي تكون كالآتي:

$$0+0=0$$

$$1+0=1$$

$$0+1=1$$

$$1+1=0 \text{ الإحتفاظ بـ } 1$$

الإحتفاظ يكون بنفس الطريقة المستخدمة في النظام العشري. حيث يعتبر 1 العدد الأكبر في النظام الثنائي و أي أن كل جمع أكبر من 1 يستلزم إستعمال الإحتفاظ.

امثلة

العشري	الثنائي	العشري	الثنائي
$\frac{5}{6}$	101	$3 \frac{1}{4}$	11.01
$\frac{6}{11}$	110	$5 \frac{3}{4}$	101.11
	1011	$\frac{9}{9}$	1001.00

الطرح هو العملية العكسية للجمع، إلا في حالة 0 ناقص 1 نضع النتيجة 1 و نستدين 1 من العمود التالي. جميع الحالات الممكنة للطرح الثنائي تكون كالآتي:

$$0-0=0$$

$$1-0=1$$

$$0-1=1 \text{ استدانة بـ } 1$$

$$1-1=0$$

امثلة

العشري	الثنائي	العشري	الثنائي
9	1001	16	10000
-5	-101	-3	-11
<hr/> 4	<hr/> 100	<hr/> 13	<hr/> 1111

1.4 البوابات المنطقية Logical Gates

تمثل البوابات المنطقية حجر الأساس لبناء أي دائرة منطقية وبالتالي يمكن بناء أي نظام رقمي أو منطقي، حيث إن كلمة منطق ترمز إلى "عملية صنع القرار" ويمكن تصنيف البوابات إلى صنفين هما: البوابات الشاملة و غير الشاملة.

بدأ مفهوم البوابات المنطقية من مجهودات Georges Boole [29] حيث أسس جبراً يعتمد على متغيرين اثنين هما 0 و 1 تكون فيه العمليات التالية: الإتصال (و) تقرأ على أنها واو العطف (and) ويرمز لها بالرمز \wedge والعمليّة الثانية هي الانفصال وتقرأ على أنّها حرف التخخير (أو or) ويرمز لها بالرمز \vee ؛ وثالث العمليّات الرئيسيّة هي (لا not) ويرمز لها بالرمز (-). وبهذا، تكون العلاقات في الجبر البولي مُشابهة للعلاقات العددية المستخدمة في الجبر المعتاد. بعد ذلك أثبت De Morgan [30] انه يمكن استنتاج جميع العمليات ك NAND، NOR، NOT، AND، OR بتركيب العمليتين (AND و NOT) أو تركيب العمليتين (OR و NOT) بالاعتماد على القانونين التاليين المنسويين اليه:

القانون الاول

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B} \quad (1.1)$$

القانون الثاني

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B} \quad (1.2)$$

1.4.1 البوابات المنطقية غير الشاملة

نقدم في هذا الجزء البوابات المنطقية الأكثر إستعمالاً في الحاسوب لكنها تعتبر غير شاملة لأنها لا تستطيع إنتاج جميع العمليات المنطقية البولية بإستعمال البوابة وحدها أو بتعريف آخر وحسب قانوني De Morgan كل بوابة لا تستطيع ان تنتج العمليتين (AND و NOT) أو (OR و NOT) وحدها فهي غير شاملة.

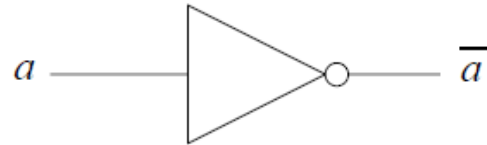
نبدأ بالبوابة NOT (-) موضحة في الصورة (1.1) وهي تعمل على بت واحد حيث تقوم بعكس قيمته وتكتب في الحساب الثنائي كما يلي:

$$\bar{a} = a - 1 \quad (1.3)$$

جدول الحقيقة truth table للبوابة AND موضح في الجدول (1.1).

a	\bar{a}
0	1
1	0

جدول (1.1): جدول الحقيقة للبوابة NOT

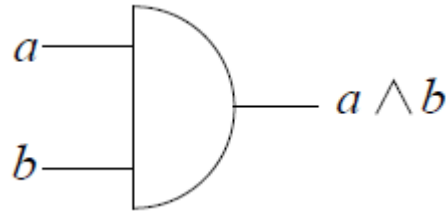


صورة (1.1): البوابة NOT

البوابة AND (\wedge) (الصورة 2.1) يكون فيها الناتج عبارة عن الوضع 1 إذا كان كل المدخلين في الوضع 1 ويكون الناتج 0 في الحالات الأخرى. في حساب الثنائي يكتب كما يلي:

$$a \wedge b = ab \quad (1.4)$$

جدول الحقيقة للبوابة AND موضح في الجدول (1.2)



صورة (1.2): البوابة AND

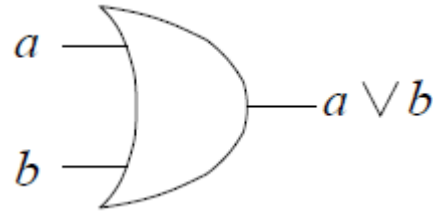
a	b	a \wedge b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول (1.2): جدول الحقيقة للبوابة AND

البوابة OR (\vee) (الصورة (1.3)) يكون فيها الناتج عبارة عن الوضع 1 إذا كان على الأقل أحد المدخلين في الوضع 1. في الحساب الثنائي نكتب:

$$a \vee b = a + b - ab \quad (1.5)$$

جدول الحقيقة للبوابة OR موضح في الجدول (1.3).



صورة (1.3): البوابة OR

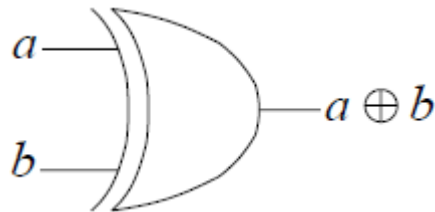
a	b	a ∨ b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

جدول (1.3): جدول الحقيقة للبوابة OR

هناك حالة خاصة من البوابة OR تدعى XOR (الصورة (1.4)) ويرمز لها بالرمز \oplus وهي كثيرة الإستعمال في الحواسيب الكلاسيكية، البوابة XOR هي نفسها البوابة OR إلا في حالة اذا كان كلا المدخلين في الوضع 1 يكون الناتج 0. في الحساب الثنائي نكتب:

$$a \oplus b = a + b \pmod{2} \quad (1.6)$$

جدول الحقيقة للبوابة XOR موضح في الجدول (1.4).



صورة (1.4): البوابة XOR

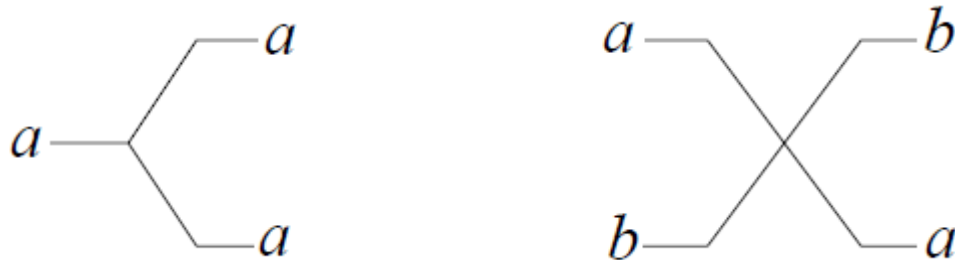
a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول (1.4): جدول الحقيقة للبوابة XOR

بوابات اخرى مهمة ايضا مثل بوابة FANOUT او تسمى بوابة النسخ، حيث تقوم بنسخ البت الى بتين:

$$a \rightarrow (a, a) \quad (1.7)$$

وبوابة SWAP تبدل قيمة البتين الداخليين فيما بينهما، البوابتين ممثلتين في الصورة (1.5).



صورة (1.5): البوابتين SWAP و FANOUT

1.4.2 البوابات المنطقية الشاملة NAND و NOR

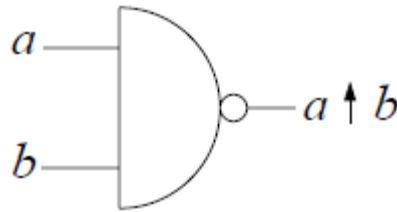
هناك نوع خاص من البوابات المنطقية يسمى بالبوابة الشاملة وتعرف بأنها البوابة التي تستطيع ان تعبر بها وحدها عن كل العمليات المنطقية [31]، هذا النوع الشامل من البوابات يعتبر مهم في عالم الحواسيب لان مهندس الحاسوب يفضل ان يركز مجهوده في تصغير البوابات على

نوع واحد يكون شاملا لكل العمليات التي يحتاجها الكمبيوتر. و بالاعتماد على قوانين De Morgan التي تتيح استنتاج جميع الدوال البولية من (AND و NOT) او من (NOT و OR) تم توجيه الأنظار الى البوابة NAND (\uparrow) و البوابة NOR (\downarrow).

البوابة NAND (\uparrow) (الصورة 1.6) يكون فيها الناتج عبارة الوضع 0 اذا كان كل المدخلين في الوضع 1، في الحساب الثنائي نكتب:

$$a \uparrow b = \overline{a \wedge b} = \overline{ab} = 1 - ab \quad (1.8)$$

جدول الحقيقة للبوابة NAND موضح في الجدول (1.5).



صورة (1.6): البوابة NAND

a	b	$A \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول (1.5): جدول الحقيقة للبوابة NAND

للتحقق من شمولية البوابة NAND يجب التحقق من أن البوابة تنتج على الأقل العمليات NOT و AND. الجدول (1.6) والصورة (1.7) يمثلان كيفية الحصول على NOT (-) من البوابة NAND.

الجدول (1.7) والصورة (1.8) يمثلان كيفية الحصول على AND من البوابة NAND.

a	a	$a \uparrow a$	\bar{a}
0	0	1	1
1	1	0	0

جدول (1.6): كيفية الحصول على

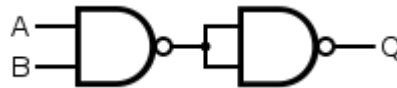
NOT من البوابة NAND



صورة (1.7): كيفية الحصول على NOT من البوابة NAND

a	b	$a \uparrow b$	$(a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b)$	$a \wedge b$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

جدول (1.7): كيفية الحصول على AND من البوابة NAND

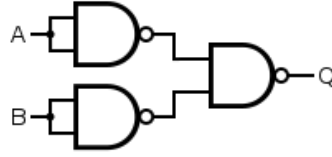


صورة (1.8): كيفية الحصول على AND من البوابة NAND

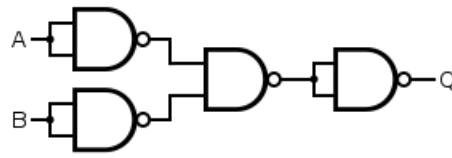
وباستعمال قانوني De Morgan يمكن انتاج العملية OR من تركيب ثلاثة بوابات NAND

كما هو موضح في الصورة 1.9، الصورة 1.10 توضح كيفية انتاج العملية NOR من تركيب

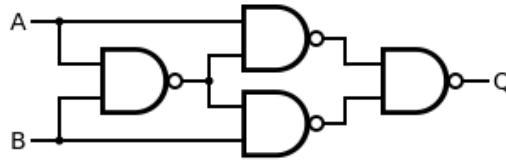
اربع بوابات NAND، الصورة 1.11 توضح كيفية انتاج XOR من أربع بوابات NAND [34].



صورة (1.9): كيفية انتاج العملية OR من تركيب ثلاثة بوابات NAND



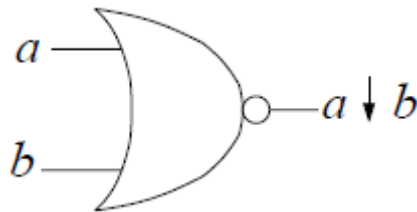
صورة (1.10): كيفية انتاج العملية NOR من تركيب أربع بوابات NAND



صورة (1.11): كيفية انتاج XOR من أربع بوابات NAND

البوابة NOR (\downarrow) (الصورة 1.12) يكون فيها الناتج عبارة الوضع 1 اذا كان كلى المدخلين في الوضع 0، في الحساب الثنائي نكتب:

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b} = \overline{a + b - ab} = 1 - a - b + ab \quad (1.9)$$

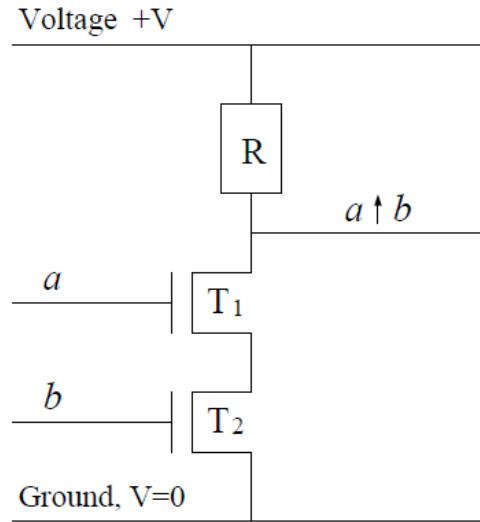


صورة (1.12): البوابة NOR

a	b	$A \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

جدول (1.8): جدول الحقيقة
للبوابة NOR

في أغلب الأحيان تمثل البوابة NAND عن طريق الترنزستورات [32] كما هو ممثل في الصورة 1.13، البت يوضع 1 اذا كان فرق الكمون موجب ويوضع 0 اذا فرق الكمون سالب. وبالفعل يكون ناتج 1 إلا اذا كان كلا من a و b في الوضع 1.



صورة (1.13): تمثيل البوابة NAND عن طريق الترنزستورات

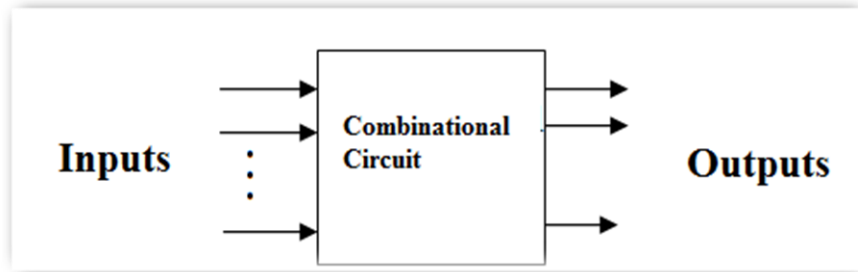
2 الدارات المنطقية Logical Circuits

تقسم الدارات المنطقية الى نوعين [34]:

- الدارات المنطقية التركيبية : هي دارات تتألف من بوابات منطقية (موضحة في الصورة

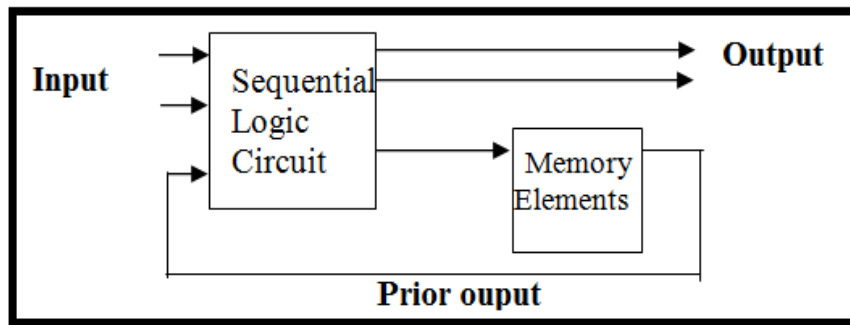
1.14) تكون فيها المخارج عبارة عن تركيب المداخل فيما بينها ويجب أن تتوفر فيها الشروط التالية :

1. تتكون من المداخل و المخارج والبوابات المنطقية.
2. لا تتطلب تغذية تراجعية.
3. لا تتطلب ذاكرة.



صورة (1.14): الدارات المنطقية التوافقية

- الدارات المنطقية التتابعية : هي دارات تتألف من بوابات مرتبة بالتوازي تكون فيها المخارج عبارة عن تركيب المداخل مع المخارج السابقة اي هناك تغذية تراجعية كما توضحه الصورة 1.15 و تحتوي أيضا على ذاكرة لحفظ معلومة المخرج السابق.



صورة (1.15): الدارات المنطقية التتابعية

امثلة عن الدارات التتابعية هي flip-flops و shift registers.

1.5.1 الدارات المنطقية التركيبية

نبدأ بالدارات التوافقية الحسائية وهي دارات تقوم بالعمليات الحسائية التي يحتاجها الكمبيوتر كالجمع والطرح الثنائي، نتطرق الى النوعين الأكثر اهمية وهما دارة الجامع الكامل و دارة الطرح الكامل.

1.5.1.1 دارة الجامع المنطقي

يعتبر الجامع المنطقي النواة الأساسية في وحدة الحساب والمنطق حيث يتم تعديله عن طريق اضافة اليه بوابات اخرى ليصبح وحدة الحساب في المعالج، زيادة على ذلك يستعمل في أجزاء أخرى من المعالج يقوم فيها الجامع المنطقي بحساب العناوين، الجداول، النسب، وغير ذلك من العمليات المشابهة. قبل ان نتطرق الى الجامع المنطقي لعدد n من البتات يجب نعرف اولاً الجامع الكامل الخاص بت واحد.

الجامع الكامل هو دارة تركيبية تقوم بحساب المجموع لثلاث بتات داخلية حيث تتكون من ثلاثة مداخل وهي A و B و C_{IN} ، حيث A و B هما البتين المراد حساب جمعها و C_{IN} هو الاحتفاظ السابق ولديها ايضاً مخرجين هما S و C_{OUT} حيث S هو المجموع و C_{OUT} هو الاحتفاظ الحالي ويحسبان بالشكل التالي :

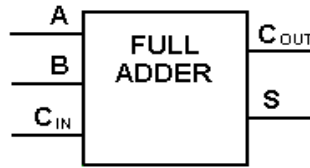
$$S = A \oplus B \oplus C_{IN} \quad (1.10)$$

$$C_{OUT} = AB + AC_{IN} + BC_{IN}$$

الجدول (1.9) يمثل جدول الحقيقة الخاص بدارة الجامع الكامل و الصورة (1.16) تمثل دارة الجامع الكامل.

المدخل			المخرج	
A	B	C _{IN}	S	C _{OUT}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

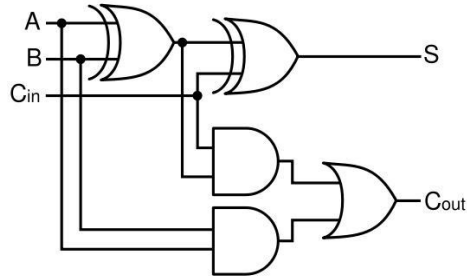
جدول (1.9): جدول الحقيقة الخاص بدارة الجامع الكامل.



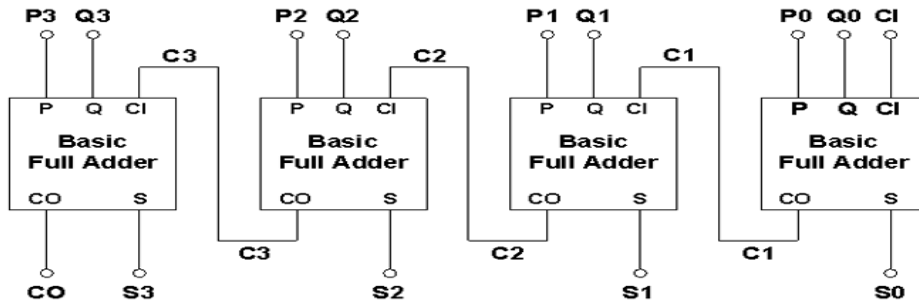
صورة (1.16): دارة الجامع الكامل.

هناك عدة طرق لبناء دارة الجامع الكامل عن طريق تركيب البوابات المنطقية مع بعضها البعض والصورة 1.17 تمثل احد الطرق، حيث تتكون دارة الجامع الكامل من بوابتين XOR، بوابتين AND وبوابة OR.

لدينا العددان العشريان A و B يكتبان على الشكل الثنائي كما يلي (A_0, A_1, A_2, A_3) و (B_0, B_1, B_2, B_3) . مجموع العددين $A+B$ هو تتابع اربعة جوامع كاملة يقوم كل واحد منها بحساب $S_i = B_i + A_i$ وحساب ايضا C_i , ثم تمرير الاحتفاظ C_i الى الجامع الكامل الذي يليه كما هو موضح في الصورة (1.18).



صورة (1.17): تمثيل دائرة الجامع الكامل عن طريق تركيب البوابات المنطقية.



صورة (1.18): الجامع الكامل ذو 4 بتات.

1.5.1.2 دائرة الطرح المنطقي

الطرح المنطقي هو دائرة لا تقل أهمية عن الجامع ويتم حساب الفرق D بين العددين A و B عن طريق تتابع الطارحات الكاملة حيث يقوم كل واحد منها بحساب $D_i = A_i - B_i$ و حساب BOR_i (الاستدانة) وتميرها الى الطرح الكامل الذي يليه.

الطرح الكامل (الصورة 1.19) هي دائرة توافقية تقوم بطرح العددين $A-B$ حيث يسمى A المطروح و B هو المطروح منه، حيث تملك الدارة ثلاثة مداخل هي A و B و BOR_{IN} و تقوم بحساب الفرق D و الاستعارة BOR_{OUT} و يحسبان بالشكل التالي:

$$D = A \oplus B \oplus BOR_{IN} \quad (1.11)$$

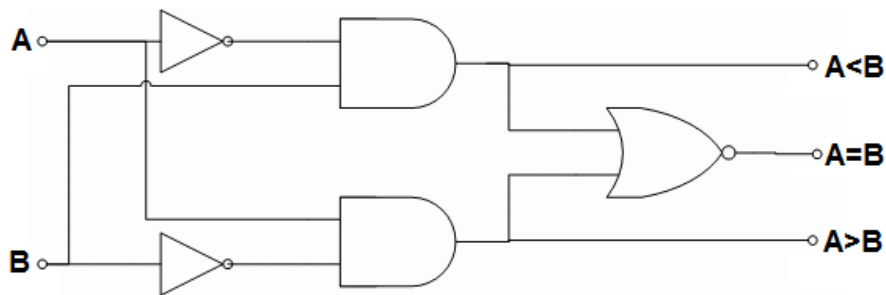
$$BOR_{OUT} = \bar{A}B + \bar{A}C_{IN} + B BOR_{IN}$$

المدخل		المخرج			
A_0	A_1	D_0	D_1	D_2	D_3
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

جدول (1.10): جدول الحقيقة الخاص بمفك التشفير 2 الى 4.

1.5.1.4 دائرة المقارن Comparator

هي دائرة منطقية توافقية تقوم بمقارنة عددين مكتوبين على الشكل الثنائي، الصورة (1.21) توضح دائرة المقارن 1-bit حيث تملك الدارة مدخلين وهما العددين المراد المقارنة بينهما و تملك ثلاثة مخرج. الأول يكون في الوضع 1 اذا كان $A < B$ و المخرج الأخرى تكون في الوضع 0، واذا $A > B$ فإن المخرج الثالث يكون في الوضع 1 و المخرج الأخرى في الوضع 0، واذا كان $A = B$ فإن المخرج الثاني يكون في الوضع 1 والمخرج الأخرى في الوضع 0.
 لكي يكون المخرج الأول في الوضع 1 (اي $A < B$) يجب ان يكون $\bar{A}B = 1$.
 لكي يكون المخرج الثالث في الوضع 1 (اي $A > B$) يجب ان يكون $A\bar{B} = 1$.
 لكي يكون المخرج الثاني في الوضع 1 (اي $A = B$) يجب ان يكون $\bar{A}\bar{B} = 0$ و $AB = 0$.
 الجدول (1.11) يمثل جدول الحقيقة الخاص بدائرة المقارن 1bit.



صورة (1.21): تمثيل دائرة المقارن عن طريق تركيب البوابات المنطقية.

المدخل		المخرج		
A	B	A=B	A>B	A<B
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

جدول (1.11): جدول الحقيقة لدارة المقارن.

1.6 وحدة المعالجة المركزية Central Processing Unit

نعرف أن الحاسب هو آلة قادرة على القيام بالعمليات الحسابية، والمعالج (وحدة المعالجة المركزية) هو الجزء الذي يقوم بالعمليات الحسابية في الكمبيوتر ، فالمعالج عبارة عن شريحة من السليكون مغلقة تحتوي على الملايين من الترانزستورات ويوصل المعالج باللوحة الأم بطريقة خاصة لتقوم باستقبال البيانات من أجزاء الحاسب الأخرى ومعالجتها ثم إرسال النتائج إلى الأجزاء الأخرى لإخراجها أو تخزينها، حيث تقوم هذه الوحدة بجميع العمليات الحسابية ، وكل ما تفعله أثناء عملك على الحاسب يقوم به المعالج جزئياً أو كلياً بشكل أو آخر.

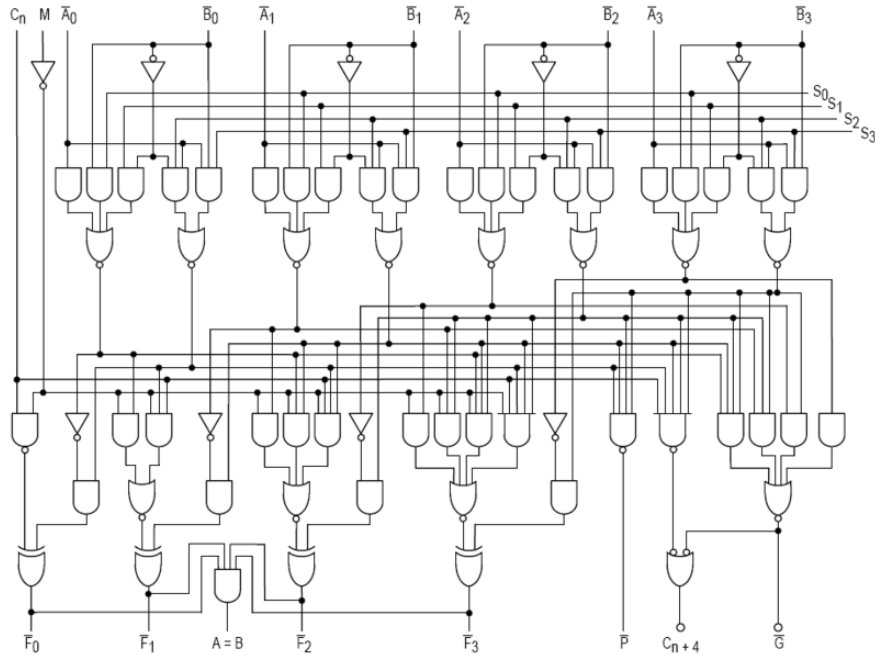
الصورة (1.22) تمثل معالج من انتاج شركة انتل يعمل بعشرة أنوية تم انتاجه سنة 2016 و يعتبر من اقوى المعالجات في وقتنا الحالي.



صورة (1.22): معالج من النوع i7

يتكون المعالج من الأجزاء الرئيسية التالية:

- **وحدة التحكم والسيطرة: (control unit)** وهي الوحدة المسؤولة عن التحكم بالبيانات داخل المعالج وتنسيق تبادلها بين أجزاء المعالج الداخلية، طبعاً هذه الوحدة هي المتحكم في عمل المعالج ، لذلك فهي ضرورية الوجود في كل معالج.
- **وحدة الإدخال والإخراج :** وهي الوحدة التي تتحكم في نقل البيانات بين المعالج والأعضاء الأخرى المكونة للحاسوب وخاصة الذاكرة العشوائية، أي أنها تنظم مسير البيانات بين المعالج والأجزاء الأخرى للحاسب.
- **وحدة الحساب والمنطق: (ALU=arithmetic and logic unit)**
هي دارة تركيبية مسؤولة عن اجراء كافة العمليات الحسابية (كالجمع والطرح والقسمة والضرب) علماً ان الوحدة تستخدم عملية واحدة فقط وهي الجمع اما العمليات الأخرى مثل الطرح فهي تستنتج عن طريق عكس القيمة الثنائية لاحد العددين المراد طرحهما، اما الضرب فهو الجمع لعدة مرات. وتقوم ايضا هذه الوحدة بإجراء العمليات المنطقية مثل OR,AND,XOR، كما تستطيع القيام بعمليات المقارنة بين عددين ثنائيين، وكذلك هي توفر إمكانية تخزين المعلومات بشكل مؤقت. وهي الجزء الذي سوف نتطرق اليه ونشرحه جيداً لاحقاً والصورة (1.23) هي دارة مدجة والتي تعتبر وحدة حساب ومنطق بسيطة ل 4-bit وتنقسم الوحدة الى قسمين:
أ - وحدة الأعداد الصحيحة : تقوم بمعالجة العمليات الحسابية التي تتكون من أعداد صحيحة لا تحتوي على فاصلة عشرية، تستخدم هذه العمليات في معظم التطبيقات التي نستخدمها مثل PowerPoint, word، أي أن هذه الوحدة تستخدم من قبل التطبيقات ثنائية الأبعاد، لذلك هي مهمة جداً لان معظم البرامج التي نستخدمها تعتمد على هذه الوحدة.



صورة (1.23): وحدة الحساب والمنطق ذو 4 بتات.

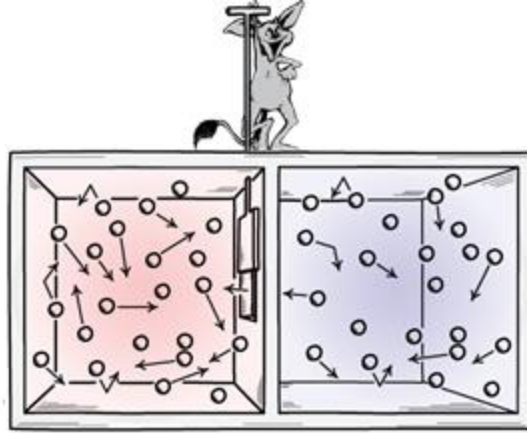
ب - وحدة الفاصلة: تقوم بمعالجة العمليات الحسابية التي تحوي فاصلة عشرية ، تستخدم هذه الوحدة من قبل البرامج التي تعتمد على هذا النوع من العمليات الحسابية مثل الألعاب ثلاثية الأبعاد، أصبحت هذه الوحدة مهمة جدا في أيامنا الحالية وهذا راجع لأن زيادة سرعة الألعاب الحديثة يعتمد على هذه الوحدة.

- **المسجلات:** ذاكرات صغيرة جدا وسريعة جدا، توجد داخل المعالج وذلك لحفظ الأرقام المراد معالجتها من قبل وحدة الحساب و المنطق، حيث أنه لا يتم تنفيذ أي عملية في المعالج الا بحفظ معطياتها في المسجلات لحين تنفيذها. طبعا المسجلات ذاكرات مؤقتة (ram) وهذا هو السر في كونها سريعة جدا.

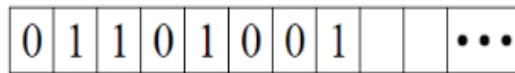
1.7 الطاقة والمعلومة Energy and information

1.7.1 عفريت Maxwell Demon

في هذا الجزء من البحث ندرس العلاقة بين الطاقة والمعلومة، حيث ظهرت هذه العلاقة أول مرة في مفارقة Maxwell وهي تجربة نظرية اقترحها العالم الاسكتلندي James Clark Maxwell لتنقض القانون الثاني للديناميك الحرارية. حيث تعتمد تجربته (انظر الصورة (1.24)) على تقسيم غرفة معزولة عن العالم الخارجي بجدار عازل يحتوي على باب وبداخل هذين الجزأين يوجد غاز في حالة توازن حراري T أي أن الأنتروبي S كبير، و تخيل انه يوجد عفريت يستطيع أن يراقب موقع و سرعة كل جزيئة غاز على حدى، حيث يقوم هذا العفريت بفتح الباب للجزيئات الأسرع لتنتقل من الجزء الأيمن الى الجزء الأيسر من الغرفة ويسمح أيضا للجزيئات البطيئة بالانتقال من الجزء الأيسر الى الجزء الأيمن حتى تكون كل الجزيئات السريعة في جهة اليسرى و البطيئة في الجهة اليمنى ، وهذا معناه ان العفريت يفصل الجزيئات الساخنة (السريعة) عن الجزيئات الباردة (البطيئة) مما يؤدي الى انتقال الجملة من حالة توازن حراري الى حالة لا توازن وهذا يعني تناقص الأنتروبي S للجملة، وهنا يظهر نقض القانون الثاني للديناميك الحراري حيث يقول أنه لا يمكن انتقال الحرارة من الجسم البارد الى الساخن الى بوجود عمل خارجي، بصيغة اخرى، الأنتروبي الخاص بجملة معزولة يمكن أن يزيد أو أن يثبت في حالة عدم وجود عمل خارجي. وهنا تكمن المفارقة حيث اثبت Maxwell أن الأنتروبي يتناقص في جملة معزولة أي بدون وجود عمل خارجي [32]. لدينا في الصورة (1.25) تمثيل لذاكرة العفريت في النظام الثنائي أي هناك حفظ لسرعة و موقع الجزيئات.



صورة (1.24): تمثيل الافتراضي لتجربة عفريت Maxwell.



صورة (1.25): تمثيل لذاكرة العفريت في النظام الثنائي.

يعتمد Maxwell في مفارقتة على حساب الأنتروبي S التي تكتب على الشكل التالي:

$$S = K_B \ln \Omega \quad (1.13)$$

حيث $K_B = 1.38 \times 10^{-23} J / K$ وهو ثابت Boltzmann و Ω هو عدد الحالات الميكروسكوبية للنظام.

1.7.2 مبدأ Landauer Principle

بعد طرح ماكسويل لمفارقتة والتي تنص على خرق في القانون الثاني للديناميكا الحرارية جاءت عدة ردود للتوفيق بين طرح Maxwell من جهة والقانون الثاني للديناميكا الحرارية من جهة أخرى حيث كانت أغلب الردود تتفق على مبدأ ان الجهد المبذول من طرف العفريت في تحديده لموقع و سرعة الجزيئات يعمل في زيادة الأنتروبي Entropy أكثر من النقصان الذي حدث في الأنتروبي بفصل الجزيئات الباردة والساخنة، أي أن الأنتروبي الكلي للجملة عفريت

+ غاز يزداد وهذا يتوافق مع القانون الثاني للديناميكا الحرارية. ويعتبر رد Landauer [2] من أشهر الردود و أنجحها حيث قام بتمثيل تسجيل العفريت لسرعة وموقع الجزيئات بشريط من الأرقام الثنائية 0 و 1 في ذاكرته كما توضحه الصورة (1.25) وفي حالة نفاذ الذاكرة يجب على العفريت أن يمحي بعض المعلومات السابقة وهذا يعني تبديد الطاقة.

● **مبدأ Landauer:** عندما يتم محو أو ازالة بت واحد من المعلومات فإن مقدار الطاقة المبددة في المحيط الخارجي تكون على الأقل $K_B T \ln 2$ حيث T هو درجة حرارة الوسط المحيط، و يمكن أن نقول أن الأنتروبي الخاص بالمحيط يزداد على الأقل بـ $K_B \ln 2$.

بالتالي فإن النقصان في الأنتروبي الخاص بالغاز يعوض بالأنتروبي الخاص بالعفريت. ولحو المعلومات المجموعة من طرف العفريت في مرحلة القياس يجب أن يحرر طاقة في المحيط. وبالتالي حسب مبدأ Landauer فإن الطاقة المبددة ليست بسبب القياس في حد نفسه و إنما بسبب محو المعلومات.

لتوضيح مبدأ Landauer أكثر نتطرق الى مثال تكون فيه المعلومة عبارة عن حالة فيزيائية (جزيئة واحدة من غاز مثالي)، على سبيل المثال يمكننا تخزين البت على أساس مكانه في الغرفة، إذا كان في الجزء الأيمن يخزن على الوضع 1 وإذا كان في الجانب الأيسر من الغرفة يخزن على الوضع 0. وبما أننا لدينا نظام فيزيائي أحادي الجزيئة يمكننا استعمال قوانين الترموديناميكا كما يلي:

$$dE = \delta W + \delta Q \quad (1.14)$$

حيث dE هو التغير في طاقة الغاز الداخلية، δW هو العمل المقدر إلى الغاز و δQ هو كمية الحرارة الممتصة من طرف الغاز. باعتبار أن التحول شبه ثابت أي أن التحول بطيء جدا فبذلك يمكن اعتبار ان النظام في حالة توازن، وبالتالي يمكننا كتابة:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (1.15)$$

حيث dS هو التغير في الأنتروبي للغاز، لنفرض أن الغرفة تحت درجة الحرارة ثابتة T (أي تحت تأثير حمام مائي) و نضغط الغاز بمكبس متحرك كما توضحه الصورة (1.26). إذا كان انتقال المكبس يكتب بـ dx فإن العمل المقدم إلى الغاز يكتب بـ :

$$\delta W = -Fdx = -pAdx = -pdV \quad (1.16)$$

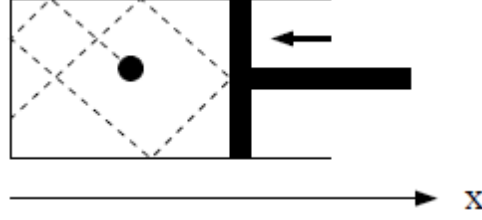
حيث F هو قوة الغاز على المكبس، p هو ضغطه و V هو حجم الغاز. باعتبار أن التحول هو تقليص حجم الغاز بواسطة المكبس إلى النصف. و باعتبار أن الغاز مثالي يمكن استخدام القانون التالي:

$$pV = NK_B T \quad (1.17)$$

حيث N هو عدد الجزيئات في الغاز (في مثالنا $N=1$)، نستطيع حساب العمل المقدم إلى الغاز كما يلي:

$$W = - \int_V^{V/2} pdV^* = - \int_V^{V/2} \frac{K_B T}{V^*} dV^* = K_B T \ln 2 \quad (1.18)$$

كما ذكرنا سابقا أن التحول معزول حراريا لأن الغرفة تحت تأثير حمام مائي ثابت درجة الحرارة T . وبما أن الغاز مثالي و حسب القانون الأول للترموديناميك، العمل المقدم إلى الغاز يتحول إلى حرارة تتحرر نحو المحيط الخارجي:



صورة (1.26): تقليص حجم الغرفة بها جزيئة واحدة عن طريق مكبس.

$$\Delta Q = -W \quad (1.19)$$

نلاحظ ان $\Delta Q < 0$ لأن الطاقة محررة وليست ممتصة. إذن التغير في الأنتروبي الخاص بالغاز يعطى بالعلاقة:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-W}{T} = -K_B \ln 2 \quad (1.20)$$

لدينا $\Delta S < 0$ لأنه بعد تقليص حجم الغرفة المتاح للجزيئة الى النصف مما يؤدي الى نقصان الأنتروبي الخاص بالنظام في حين ان الأنتروبي الخاص بالمحيط ΔS_{env} يزداد، وبذلك لم ولن يتناقص الأنتروبي الإجمالي للنظام والمحيط معا اي $\Delta S + \Delta S_{env} \geq 0$ ومنه $\Delta S_{env} \geq K_B \ln 2$. وهذا ما ينص عليه مبدأ Landauer.

في 1973 أكد Bennett [3] أنه مهما كانت ذاكرة العفريت فإن مساحة تخزينه سوف تنفذ وأنه سوف يقوم بمحو المعلومات التي جمعها من قبل. محو المعلومات هو إجراء ترموديناميكي غير عكوس يعمل على زيادة الأنتروبي الخاص بالنظام، و وصل أيضا إلى أن عفريت ماكسويل لا يمكنه أن يخرق القانون الثاني للترموديناميك. وذكر أيضا كيف يمكن تفادي ضياع الطاقة عند محو المعلومة وذلك باستعمال المنطق العكوس.

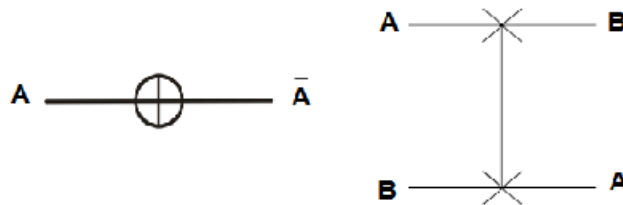
1.8 الحوسبة العكوسة Reversible Computation

1.8.1 البوابات العكوسة غير الشاملة

في هذا الجزء من البحث نتطرق إلى كيفية تخفيض طاقة للحوسبة عن طريق استعمال البوابات العكوسة. حيث أن أغلب البوابات المذكورة سابقا هي بوابات غير عكوسة لأنه عند استعمال هاته البوابات لا نستطيع استرجاع المداخل باستعمال المخارج، على سبيل المثال البوابة AND عندما يكون مخرجها في الوضع 1 هذا يعني أن المدخلين يمكن أن يكونا (0,0)، (0,1) أو (1,0). زيادة على ذلك فإن البوابات الغير عكوسة تملك مدخلين ومخرج واحد وهذا يعني انه يوجد محو لبت واحد وحسب مبدأ Landauer فان كمية الطاقة الضائعة في المحيط تكون على الأقل $K_B T \ln 2$.

في المنطق العكوس كل مدخل مرتبط بمخرج خاص به، اي ان كل البوابات تكون من الشكل $(n \times n)$ ، هذا معناه أنه لا يتم محو أي معلومة (البت) في البوابات العكوسة، بعبارة أخرى لا يوجد ضياع للطاقة.

من البوابات السابقة تعتبر البوابة NOT و البوابة SWAP من البوابات العكوسة لأنها تملك عدد المداخل مساوي لعدد المخارج وتمثل في بعض المراجع (الخاصة بالحساب العكوس) بالأشكال الموضحة في الصورة (1.27).

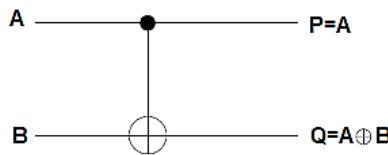


صورة (1.27): البوابة SWAP و البوابة NOT

البوابة (Controlled-Not أو CNOT) تعتبر من أهم البوابات في الحوسبة الكمية. هي عبارة عن بوابة تملك مدخلين ومخرجين (2×2) تقوم بعكس البت الثاني إلا إذا كان البت الأول في الوضع 1. لذلك تسمى ببوابة العكس المتحكم فيه. هذا يعني أننا نتحكم في عملية عكس المعلومة و ذلك حسب المعلومة الموجودة في المدخل الأول للبوابة، إذا كان المدخل الأول في الوضع 1 فالبوابة تقوم بالعكس، هذا يعني أنه إذا كان المدخل الثاني في الوضع 0 يحول الى الوضع 1 وإذا كان في الوضع 1 يحول الى الوضع 0، أما إذا كان المدخل الأول في الوضع 0 فالبوابة لا تقوم بعملية العكس للمدخل الثاني. الصورة (1.28) توضح البوابة CNOT والجدول (1.12) يمثل جدول الحقيقة الخاص بالبوابة CNOT.

المدخل الأول للبوابة (A) يسمى المتحكم و قيمته لا تتغير عند المخرج $P=A$ ، والمدخل الثاني يسمى الهدف و تعكس قيمته إلا إذا كان المدخل الأول في الوضع 1. حيث تكتب عبارة المخرج الثاني $Q = A \oplus B$ ، حيث تسمى العملية XOR للعددان A و B. يمكن اعتبار البوابة CNOT أنها عكوسة لأننا نستطيع استخراج المداخل (A,B) من المخرج (P,Q). و يمكن للبوابة CNOT أن تقوم بعملية النسخ (تسمى في بعض المراجع بوابة المروحة (FANOUT)) و ذلك بوضع المدخل الثاني في الوضع 0 أي $(A, 0) \rightarrow (A, A)$. من السهل أيضا إثبات أن البوابة CNOT ذاتية العكس أي يمكن أن نحصل على المداخل بتطبيقها مرتين:

$$(A, B) \rightarrow (A, A \oplus B) \rightarrow (A, A \oplus (A \oplus B)) \rightarrow (A, B) \quad (1.21)$$



صورة (1.28): البوابة CNOT.

A	B	P	Q
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

جدول (1.12): جدول الحقيقة للبوابة CNOT.

1.8.2 البوابات العكوسة الشاملة

من ممكن إثبات أن البوابة العكوسة ذات مدخلين و مخرجين (2×2) لا يمكنها أن تكون شاملة لكل العمليات المنطقية (انظر مثال في [35])، بعبارة أخرى لكي تكون البوابة شاملة لكل العمليات المنطقية يجب أن يكون مداخل البوابة أكبر أو يساوي 3. بوابة Toffoli (3×3) أو تسمى أيضا ب (controlled-controlled-NOT أو CCNOT) هي عبارة عن بوابة شاملة لها 3 مداخل و3 مخارج. جدول (1.13) والصورة (1.29) يوضحان جدول الحقيقة و التمثيل البياني الخاص بها. بوابة Toffoli تعمل كما يلي: البت الأول والثاني يسميان البتان المتحكمان حيث لا يتغير وضعهما في المخارج ($P=A, Q=B$)، في حين أن البت الثالث (البت المستهدف) يتغير في حالة وحيدة و هي إذا كان البتين المتحكمان في الوضع 1، ويكتب على الشكل التالي $R = C \oplus AB$. في سياق إثبات أن بوابة Toffoli هي بوابة شاملة يجب علينا إثبات أنها تنتج العملية NAND (حسب قوانين De Morgan).

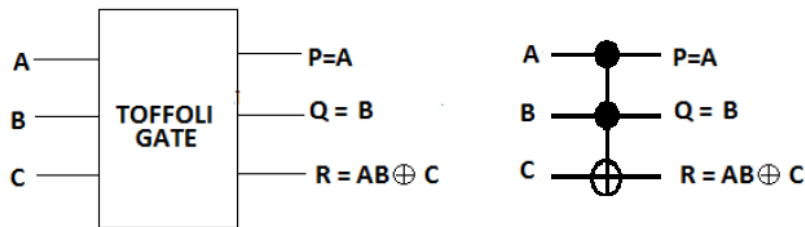
بالفعل عندما نضع المدخل $C=1$ فأنا نتحصل على العملية NAND في البت الثالث

$$.R = 1 \oplus AB = A \text{ NAND } B$$

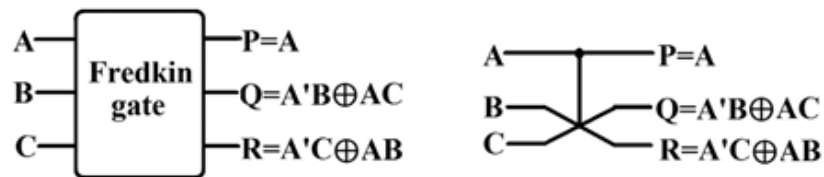
A	B	C	P	Q	R
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

جدول (1.13): جدول الحقيقة للبوابة الشاملة Toffoli.

بوابة عكوسة أخرى تعتبر كبوابة شاملة تسمى بوابة Fredkin. الصورة (1.13) تبين الشكل البياني لبوابة Fredkin و الجدول يمثل جدول الحقيقة الخاص بها. هذه البوابة تقوم بتبديل البتين B و C مع بعضهما في حالة ما إذا كان البت المتحكم A في الوضع 1.



صورة (1.29): البوابة الشاملة Toffoli.



صورة (1.30): البوابة الشاملة Fredkin.

A	B	C	P	Q	R
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

جدول (1.14): جدول الحقيقة للبوابة Fredkin

الفصل الثاني

مبادئ ومفاهيم في الحوسبة الكمية

Quantum Computing Basics and Concepts

2.1 مقدمة

نعلم أن الحوسبة الكمية Quantum computation مرتبطة بميكانيكا الكم quantum mechanics أين يتم استعمال ظواهر الفيزياء الكمية كالترابك و التشابك الكمي لنقل و معالجة المعلومة. هناك عدة طرق مختلفة لتعريف ميكانيكا الكم لكن صياغتها الفيزيائية متكافئة. في هذا البحث سوف نتبع مدرسة Copenhagen ممثلة في Schrodinger [37] حيث توصف الحالة الفيزيائية لنظام الكمي بشعاع $|\Phi\rangle$ في فضاء جداء داخلي مركب H يسمى فضاء Hilbert. تتطور الحالة الكمية زمنياً تحت تأثير مؤثر يسمى الهاميلتوني \hat{H} الذي يعتبر المؤثر الموافق للطاقة الكلية لنظام كمي.

في هذا البحث سوف نتطرق إلى مبادئ الحوسبة في هندسة الكمبيوتر الكمي quantum computer، الحوسبة الذكية الكمية quantum computational intelligence. يمكن أن يتبادر إلينا هذا السؤال: لماذا أخذ الكمبيوتر الكمي كل هذا الاهتمام الكبير، وأين تبرز قوته مقارنة مع الكمبيوتر الكلاسيكي في حل المشاكل عن طريق الحوسبة الذكية؟ في هذا الفصل نحاول تبسيط بعض مفاهيم الحوسبة الكمية حيث نبدأ بالإطار التاريخي لبداية نشوء فكرة الكمبيوتر الكمي و ننتهي بتعريف الدارات الكمية quantum circuits وبعض خصائصها.

2.2 لماذا الحوسبة الكمية ؟

يدرس الميكانيكا الكمي سلوك و خصائص الجزيئات الدقيقة مثل الإلكترونات و الفوتونات في

المستويات الذرية و ما دون الذرية. وضعت أسس هذا العلم في النصف الأول من القرن العشرين من طرف مجموعة من العلماء Schrodinger، Bohr [36]، Heisenberg [37] و Dirac [38]. في سبعينيات القرن الماضي أُقترحت فكرة جديدة وهي معالجة المعلومة الكمية quantum information processing [38،39،40] حيث استعمل العالم Feynman هذه المفاهيم في اقتراحه لأول تجسيد فيزيائي للكمبيوتر الكمي [41]. كما كان الباحث Deutsch أول من اقترح خوارزمية كمية quantum algorithm [42]. كل هذا الاهتمام بالحوسبة الكمية في القرن الماضي كان بسبب قانون Moore [1] الذي ينص على أن عدد الترانزستورات transistors الموجودة في رقاقة إلكترونية chip يتضاعف كل 18 شهر و مدى البوابات المنطقية logical gates يتقلص باستمرار. يتجه التطوير المستمر لحجم الترانزيستور نحو مستوى الجسيمات الدقيقة elementary particles مثل إلكترون وحيد أو فوتون، حيث وصل التقدم الحالي لتكنولوجيا الدارات حسب قانون Moore إلى مستوى 35 نانومتر في حين أن بعد الذرة بالتقريب هو 10 نانومتر ، يعني ذلك أن مستوى التكنولوجيا الحالية هو قريب جدا من المستوى الذري و هو مستوى تتحكم فيه كما هو معروف قوانين الميكانيكا الكمي . نتيجة لذلك توجهت الأنظار الى الحوسبة الكمية لتطوير التصميمات المنطقية logic design للأجهزة المستقبلية، بالإضافة الى ذلك تطوير في الخوارزميات الكمية، وكذا الدارات و البوابات الكمية. و من المتوقع أن تستعمل الكمبيوترات الكمية في الحوسبة الذكية computational intelligence و في علم الروبوتات robotics. مثل ما حدث بالنسبة للكمبيوتر الكلاسيكي classical computer سوف يدخل الكمبيوتر الكمي جميع التكنولوجيات التي تستعمل في حياتنا اليومية.

على الرغم من أن التجسيد الكلي implementation للكمبيوتر الكمي مازال بمفاهيم نظرية فقط [43،44،45،46]، إلا أن التطور السريع في التكنولوجيات سوف يسمح بصناعة الكمبيوتر الكمي في المستقبل القريب. على سبيل المثال تم تجسيد عدة عمليات منطقية بتقنية

المصيدة الذرة أو الأيونات trapped atoms or ions [4,44,46]، رغم صغر هذه العمليات المنطقية إلا أنها تدل على أنه في المستقبل القريب سوف يتم تجسيد الكمبيوتر الكمي كاملاً، بحيث سيكون قادر على حل أصعب المشاكل التي لم يقدر الكمبيوتر الكلاسيكي على حلها و لكن هذا التنفيذ ما زالت تشوبه عدة إستفهامات في الوسط العلمي بين مصدق و مكذب .

يعتبر أكبر تنفيذ للكمبيوتر الكمي (الكمبيوتر الكظوم adiabatic computer) قامت به شركة D-WAVE [48] في سنة 2017 ويسمى بـ The D-wave 2000Q حيث يحتوي 2048 كيوبت

2.3 معدات الحوسبة الكمية

هناك عدة عقبات يجب تجاوزها لبناء المعدات (hardware) التي يحتاجها الحاسوب الكمي، حيث يجب منع حدوث عملية فك الترابط بين الكيوبتات قبل عملية الحساب وذلك بتقليل التفاعل لأقصى درجة بين الكيوبتات و الوسط الخارجي. على الرغم من ذلك فإن أحدث التصميمات لا تستطيع منع بعض الأنتروبي من الدخول إلى النظام، تشبه إلى حد قريب الاتصالات اللاسلكية التي فشل العلماء لحد الآن في القضاء على الموجات الحرارية المشوشة لها.

أولا يجب تهيئة الكيوبتات بتبريدها حتى الوصول إلى حالة أنتروبي منخفض، لأن الكمبيوتر الكمي يجب أن يكون قادرا على إجراء عملياته الحسابية بسرعة كافية قبل حدوث عملية فك الترابط decoherence بسبب الضجيج الحراري الذي لا يمكن منعه دائماً، لذلك يجب تقديم آلية لتصحيح الأخطاء مثل وضع مجموعة من الكيوبتات الزائدة عملها هي إستعادة الحالة إذا ما حدث تلف قبل بداية عملية الحساب.

زيادة على ذلك، الحواسيب الكمية تحتاج إلى مركز لمعالجة المعلومات مشابهة لآلة Turing لكي تعتبر كحواسيب شاملة، يمكن تحقيق هذا المركز عن طريق البوابات الكمية، والتي تتجسد في عدة أشكال كما سنرى في هذا الفصل. الآن نتطرق إلى الأنواع الخمسة للكمبيوتر الكمي التي حققت حتى يومنا هذا.

2.3.1 حواسيب مصيدة الايونات Ions trap computers

تصميمات [4,44,45] مصيدة الذرة (Atom trap) تستعمل الذرات ككيوتات، حيث تستعمل حقول مغناطيسية لإبقاء الذرة عالقة في الفراغ بدقة نانومترية في درجة حرارة مقاربة للصفر المطلق. هذه الشروط الصعبة فعالة في عزل الذرات عن التفاعل مع الوسط الخارجي و الذرات تبقى مترابطة لوقت كافي حتى إنهاء عملية الحساب.

إعتادا على هذا النوع من الحوسبة نشأت أنواع أخرى ثانوية من الحواسيب مثل حاسوب مصيدة أو فخ الايونات (Ion trap). في هذا التصميم يعتبر الليزر كبوابة منطقية، عند تطبيقه على الأيونات تحدث تحويلات في الحالة الكمية للكيوبت و يمكن حتى إحداث تشابكات بين الأيونات.

2.3.2 حواسيب الرنين المغناطيسي النووي NMR computers

الرنين المغناطيسي النووي [46](NMR) هي ظاهرة تكون فيها النواة في حقل يمتص و يبعث إشعاعات، حيث أُعتبرت هذه الطريقة كحجر الأساس لإنشاء الكمبيوتر الكمي سنة 1996.

يمكن تقسيم حواسيب الرنين المغناطيسي النووي إلى نوعين: حالة صلبة وحالة سائلة. في كلتا الحالتين تستعمل جزيئات كاملة ككيوتات. و يعبر دورانها المغزلي (spin) على حالات مختلفة للكيوبت. لسوء الحظ، ضعف الإشارة مقارنة مع الضجيج noise وقف حاجزا في تطور هذا النوع، و تصميمات الحالة السائلة فشلت في تحقيق تشابك الحالات الكمية. من

المفارقات، أن تقنية الرنين المغناطيسي النووية ستستعمل في تطوير التقنيات الكمية الأخرى بدلا من تطوير كمبيوتر NMR متعدد المجالات.

2.3.3 الحواسيب الفوتونية Photonic computers

هذا النوع من الحواسيب الكمية تستعمل فيه الفوتونات ككيوتات. على سبيل المثال، تدفق الفوتونات عبر رقاقة يحدث فيها انكسار مضاعف. تكمن قوة التصميمات في مقاومتها النسبية لفك الترابط. ولسوء الحظ، التفاعلات اللازمة لإنتاج المنطق الذي يحتاجه الحاسوب صعبة نسبيا لاستعمال هذه التقنية.

في 2001 قدم Knill [8] حاسوبا كمي يعتمد على الفوتون قابل للتطوير، بإثباته أنه يمكن تحقيقه باستعمال منابع أحادية الفوتون، لاقطات و دارات ضوئية خطية. التصميمات الحالية تنتج فيها تفاعلات مع الوسط الخارجي تنقص من فعاليتها، حيث لا تزال البحوث جارية للتخلص من هذا المشكل. الدارات الحالية تستعمل فيها بوابات منطقية حجمها في حدود 1 سنتمتر، التي تعتبر كبيرة الحجم مقارنة بالكلاسيكية لكنها تعتبر مقبولة بسبب الخاصية التي يملكها الحاسوب الكمي وهي: عند كل زيادة خطية للمنايع الفيزيائية تزداد القوة الحاسوبية بطريقة اسية.

2.3.4 حواسيب نقطة الكم Quantum dot computers

النقط الكمية [47] هي بلورات صغيرة جدا تأثر كأنصاف النواقل و تملك خصائص كهربائية مرتبطة مع حجم وشكل البلورة. في حوسبة النقطة الكمية تستعمل فيه النقط الكمية ككيوت. يمكن التحكم في تدفق الإلكترونات خلال النقط الكمية بدقة، ويسمح بعمل قياسات دقيقة كقياس الدوران المغزلي (spin) أو خصائص أخرى. مثل تقنيات الحوسبة الكمية أخرى هناك أنواع ثانوية تعتمد على نفس مبدأ عمل النقط الكمية مثل: النقط المحددة كهروستاتيكيًا

self-assembling quantum electrostatic quantum dots و النقط ذاتية التجميع dots و أنواع أخرى. تتميز النقط المحددة كهروستاتيكية و النقط الكمية ذاتية التجميع بنقاط الضعف، حيث تتأثر الأول سلبا بسبب تفاعل التبادل الذي يعتبر قصير المدى، أما الثاني فمشكلته الأساسية هي عشوائية السلوك، حيث تتشكل النقط في مواقع عشوائية و لا تملك خصائص ضوئية موحدة. رغم ذلك تمتلك حواسيب النقط الكمية القدرة على التحكم عالية التي تقدر بحوالي (1 بيكو ثانية/العملية)، والتي تظهر إمكانية لعمل حوسبة سريعة للغاية.

2.3.5 حواسيب النواقل عالية التوصيل Superconductor computers

تعاني الدارات المدجة الكلاسيكية من ارتفاع تسرب الطاقة، ولهذا السبب تم التوجه إلى الدارات الكمية. يحدث فك الترابط بسرعة كبيرة جدا وهو ما يعيق عملية الحساب. يعتبر فك الترابط أقل حدة في النواقل عالية التوصيل عند درجة حرارة منخفضة جدا. لذلك سجلت عدة محاولات لإنجاز الدارات الكمية باستعمال هذه التقنية. من بين التصميمات المذكورة سابقا يعتبر الكيوبت المنجز بنواقل عالية التوصيل هو الأقرب فيزيائيا للبت الكلاسيكي.

في هذا التصميم، يتم خلق البوابات الكمية عن طريق تجاوز عدة الكيوبتات حيث يتم الترابط بينهم إما بالسعة أو بالتحريض. لكن من مساوي هذه الآلية أنها تعتبر غير قابلة للتعديل كثيرا. حيث توجد أبحاث كثيرة في تحسين عملية (تفعيل/عدم تفعيل) التفاعل الحاصل بين المقترنات المعدلة adjustable couplers. و تم استعمال هذه التقنية في إنجاز الكمبيوتر الكمي الكظوم adiabatic بالنواقل عالية التوصيل.

2.4 مقدمة رياضية للحوسبة الكمية

اعتمادا على [49] فإن كل نظام فيزيائي مرتبط بفضاء Hilbert H منفصل. الفضاء H هو

عبارة عن جداء داخلي لفضاء شعاعي حيث أن الأشعة الموحدة هي الحالات الممكنة للنظام. يعرف الجداء الداخلي لفضاء شعاعي بالعبارة التالية:

$$\langle x, y \rangle = \sum_k x_k^* y_k \quad (2.1)$$

حيث x و عبارة عن شعاعين معرفين على H و x_k^* هو المرافق المركب لـ x . للإجراء الحوسبة الكمية من المهم وضع قاعدة متعامدة-متجانسة لـ H . فمثلا يمكن اعتبار أن النظام الكمي ($1/2$ spin) معرف بمجالتين متعامدتين-متجانستين. نسمي مجموعة متعامدة-متجانسة من الأشعة M في H إذا كان كل شعاع M هو شعاع موحد و كل شعاعين من هذه المجموعة متعامدين.

2.4.1 ترميز برا-كت Bra-ket notation

يعتبر الرمز برا-كت واحد من أشهر الرموز في ميكانيكا الكم و الحوسبة الكمية، وضع من طرف العالم Dirac [49]. ويستعمل لتمثيل المؤثرات و الأشعة، كل عبارة تحتوي على جزأين البرا و الكت. حيث كل شعاع في فضاء H هو عبارة عن كت $|\psi\rangle$ و مرافقها البرا هو $\langle\psi|$. عند تطبيق البرا على الكت ينتج الرمز برا-كت $\langle\psi|$ ، حيث يمكن التعبير بالترميز برا-كت على الجداء الداخلي $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 1$ اذا كان $m=n$ كما يمكن تشكيل الترتيب الآخر $\langle\psi_m|\psi_n\rangle$ و الذي يشكل في هذه الحالة مؤثرا.

تمثل المعلومة في الحوسبة الكمية بالبت الكمي quantum bit أو اختصارا الكيوبت qubit ، وحسب ترميز Dirac يمكن كتابة الكيوبت qubit في شكل معادلة مميزة. على سبيل المثال الكيوبت العام المكون من الحالتين المتعامدتين $|0\rangle$ و $|1\rangle$ يكتب كما في المعادلة 2.2 التي سوف نشرحها لاحقا في هذا الجزء

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.2)$$

2.4.2 ترميز Heisenberg

إذا كان ترميز Dirac مبني على الكت و البرا فإن ترميز Heisenberg مبني على أدوات الجبر الخطي ممثلة في الأشعة السطرية row vector و الاشعة العمودية column vector. تمثل المعادلة 3.2 حالات متعامدة-متجانسة كمية ممثلة بتمثيل الشعاعي (ترميز Heisenberg).

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ |\downarrow\rangle &= |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.4.3 جداء المصفوفات

يعرف جداء المصفوفة A بالشعاع v بالمعادلة التالية:

$$\omega[r] = \sum_c A[r, c] * v[c] \quad (2.4)$$

حيث r هو معامل الصفوف للمصفوفة و c هو معامل الأعمدة للمصفوفة. كل معامل محصور في مجال معين. انطلاقاً من المعادلة (2.4) يعتبر A عبارة عن إسقاط و بالتالي القيمة $\langle Av|v\rangle = \|Av\|^2$ هي عبارة عن المسافة بين الشعاع الاصيل v و الشعاع الناتج.

يسمى المؤثر A بالمؤثر الهرميتي اذا كان مساوياً لمرافقه A^\dagger ونكتب $A^\dagger = A$.

سوف نتطرق في الجزء (2.2) إلى عملية القياس الخاصة بالمعلومات الكمية بحيث نجد أن كل عمليات القياس تكون طبيعتها احتمالية. المداخل و المخارج للنظام الكمي عبارة عن معلومات ثنائية (اشعة) حيث يكون مجال الاحتمال $\{1,0\}$. نظيم الإسقاط للشعاع v على A يمكن تقديمها على أساس احتمال حيث أن عملية القياس سوف تظهر نظام في الحالة Av . تتطور المداخل الكمية داخل النظام ثم يتم قياسها، و يتم التعبير عن هذه العملية بالجداء شعاع

مصنوفة. نجد شرح مفصل لفضاء Hilbert و احتمالات ميكانيك الكم في المنشورات [50,51,52].

العلاقة السابقة 2.4 التي تمثل ترميز Dirac يمكن كتابتها على شكل آخر:

$$|\omega \rangle = A|v \rangle \quad (2.5)$$

كما نلاحظ تمثيل برا-كت قام بتبسيط العلاقة 2.4.

2.4.4 جداء Kronecker

تركيب أو الجمع بين مجموعة من الكيوبتات في نظام مزودج تعطى رياضيا بجداء Kronecker [4,53,54]، مثلا إذا كان لدينا نظام ثنائي الكيوبت نحصل على الحالات التالية المبينة في المعادلة 2.6.

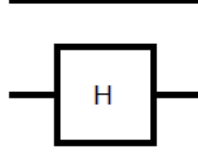
$$|00 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |10 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$|01 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |11 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نفس الطريقة بالنسبة للمؤثرات، جداء Kronecker يضاعف أبعاد الفضاء.

$$W \otimes H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

هذه العملية تمثل في الصورة 2.1.



صورة(2.1): تمثل دائرة العملية $W \otimes H$.

نفرض أن كيوبت ممثل بتراكب الحالتين الممكنتين $|0\rangle$ و $|1\rangle$ مع بعض على الشكل التالي
 $|\Psi_a\rangle = \alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle$ و كيوبت آخر ممثل بالحالة $|\Psi_b\rangle = \alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle$.
 عندما نضع الدالة الموجية لكل منهما مع بعض نحصل على حالة مشتركة تمثل كما يلي:

$$|\Psi_a \Psi_b\rangle = \alpha_a \alpha_b |00\rangle + \alpha_a \beta_a |01\rangle + \beta_a \alpha_b |10\rangle + \beta_a \beta_b |11\rangle \quad (2.8)$$

حيث α_a و β_b هما الطويلة المركبة للحالات الخاصة بكل جسيمة أولية. كما رأينا سابقا يمكن إنتاج حالة مشتركة لحالتين أو أكثر باستعمال جداء Kronecker. هذه العملية يمكن استعمالها في بناء ذاكرة كمية ذات فعالية كبيرة سوف نتطرق إليها لاحقا.

2.4.5 أثر المصفوفة

أثر مصفوفة يعرف كما يلي $Tr(U) = \sum_i D_{ii}$ و يستعمل الأثر عادة في عملية القياس في الحوسبة الكمية، خاصة عند التعامل مع مجموعة أنظمة [4,55] و تقدير حالتهم. بعض الأنظمة تمثل بمصفوفة الكثافة من الشكل التالي:

$$\rho = \sum_i^{2^n} \alpha_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \alpha_i^* = \sum_i^{2^n} P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.9)$$

حيث $\sum_i^{2^n} P_i = 1$ ، α هو المعامل المركب حيث $P_i = |\alpha_i|^2$.

يمثل مؤثر الأثر الحالات الممكنة الملاحظة في نظام كمي. عندما نلاحظ حالة كمية معينة $|\phi\rangle$ فإنها تنهار حسب عملية القياس المطبقة $|\phi\rangle \rightarrow P|\phi\rangle$ حيث P هو احتمال ملاحظة الحالة $|\phi\rangle$ من مجموعة الحالات الممكنة الناتجة. وبالتالي تمثيل الحالة الشاملة للنظام الكمي يمكن أن تمثل عن طريق الأثر $|i\rangle\langle i|$ حيث $\sum_{i=0}^{2^n} P_i$ هو عبارة عن احتمال ملاحظة الحالة $|i\rangle$.

2.5 ميكانيك الكم

2.5.1 نموذج جسيمية Bohr

اللفظ "كمي" يوصف حقيقة أن الجسيمات الدقيقة يمكن ملاحظتها (قياسها) إلا في حالات طاوقية معينة و عندما تتحرك من حالة إلى أخرى فإن مقدار كمهم من الطاقة يمكن أن يفقد أو يكتسب. سوف نتطرق الى نموذج Bohr الخاص بالذرة الذي سيشرح هذه المفاهيم أكثر. المثال الذي سوف تقدمه هو الأبسط بالنسبة لكل الذرات وهو نموذج ذرة الهيدروجين (H). تحتوي ذرة الهيدروجين مثلها مثل كل الذرات على نواة يدور حولها الكترون وحيد (e). هذا الإلكترون يمكن أن يكون في مستويات محددة فقط، حيث كان في المستوى الأقرب إلى النواة يمكن أن نقول أن الذرة في " الحالة الارضية ".

يمكن أن يغير الإلكترون مستواه و ينتقل من المستوى الأدنى إلى المستوى الأعلى مع امتصاص قدر محدد من طاقة و إذا كان انتقال الإلكترون من المستوى الأعلى إلى الأسفل فإنه يصدر مقدار كمهم من الطاقة. مستوى الطاقة الذي يسمح للإلكترون بزيارته محدد بالمعادلة التالية:

$$E_n = R_h \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (2.10)$$

حيث R_h يسمى ثابت Rydberg و يساوي $2.18 * 10^{-18} J$ و n هو العدد الكمي الرئيسي المتعلق بالمستويات المختلفة المسموحة للإلكترون. يمكن حساب طاقة المنبعثة أو الممتصة عن طريق حساب الفرق بين طاقة الإلكترون في الحالة الابتدائية E_i و الطاقة في الحالة النهائية E_f .

$$\Delta E = E_f - E_i \quad (2.11)$$

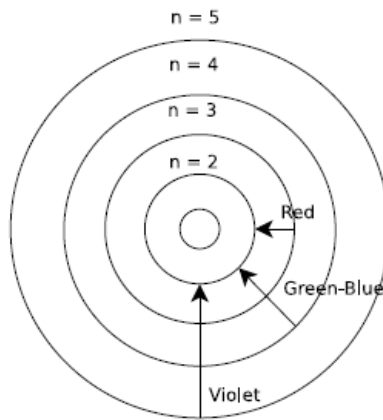
إستنبح Planck أن طاقة الإلكترونات والتي تشمل أيضا الإشعاع الكهرومغناطيسي هي عبارة عن دالة تردد، ومن هنا جاءت العبارة المشهورة:

$$\Delta E = h\nu = -R_h \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2.12)$$

حيث h هو ثابت Planck و يساوي $(6.63 * 10^{-34} Js)$ و ν هو تردد الضوء الصادر (الصورة (2.2)).

2.5.2 النموذج الكمي لجسيمية دقيقة

هذه نظرة موجزة في الخلفية الفيزيائية التي يجب أن تكتمل بحقيقة أن نموذج Bohr للذرة افترض أن دوران الإلكترون حول النواة هو مشابه لدوران الأرض حول الشمس، وهذا



صورة (2.2): نموذج بور للذرة يبين لون الضوء الخاص بالإلكترون عند الإنتقال من مدار الى آخر.

يتناقض مع مبدأ الإرتياب في ميكانيك الكم لعالم Heisenberg [37]. هذا المبدأ يقول أنه لا يمكن تحديد الموقع و السرعة المتعلقين بالجسيمة الدقيقة بدقة و في آن واحد.

في ميكانيك الكم، كل جسيمة دقيقة تملك خاصية الإرتياب في الموقع $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ و الارتياب في العزم $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$.

و نكتب الصيغة الرياضية لمبدأ عدم التأكد أو مبدأ الارتياب على الشكل:

$$\Delta x * \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.13)$$

أو يمكن كتابتها على شكل مبدل:

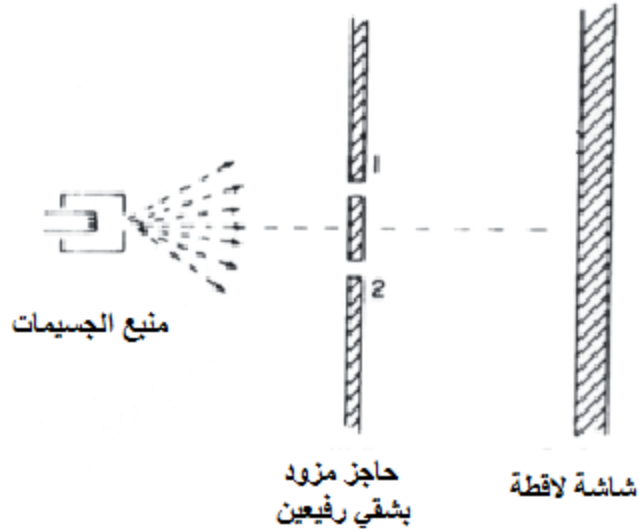
$$[x, p] = i\hbar \quad (2.14)$$

حيث \hbar هو ثابت *Planck* مقسوم على 2π : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

2.5.3 تجربة شقي Young

في تجربة شقي Young سوف نوضح مفهوما غريبا، وهو الطبيعة الازدواجية للجسيمة الدقيقة. الأجهزة المستعملة في هذه التجربة هي: الباعث أو المنبع و هو جهاز يقوم بقذف جسيمات دقيقة على شاشة لاقطة، يفصل المنبع عن الشاشة اللاقطة حاجز مزود بشقين رفيعين يسمحان بمرور الجسيمات المقذوفة، في الصورة (2.3) شكل توضيحي للتجربة.

في هذه التجربة يتم قذف الإلكترونات من منبع الجسيمات ليمر عبر الشقين المفتوحين في حين أن الحاجز سميك كفاية لكي ليوقف الإلكترونات المصطدمة به، أما الإلكترونات التي تمر عبر الشقين فيتم إلتقاطها عبر الشاشة اللاقطة. عندما يكون أحد الشقين فقط مفتوح نلاحظ (قياس) أن مسقط الجسيمات المقذوفة متوزع نسبيا حول مسار خطي (منبع- الشق) وصولا

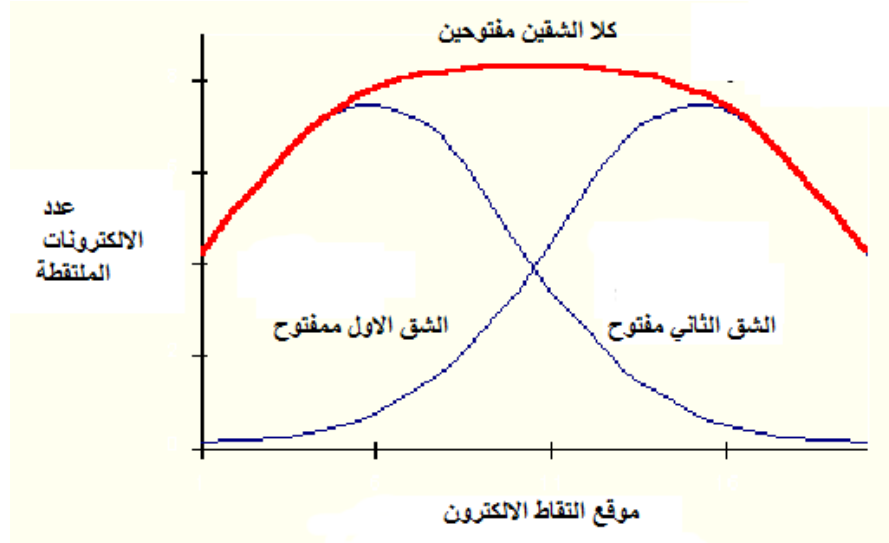


صورة (2.3): توضيح تجربة شقي Young

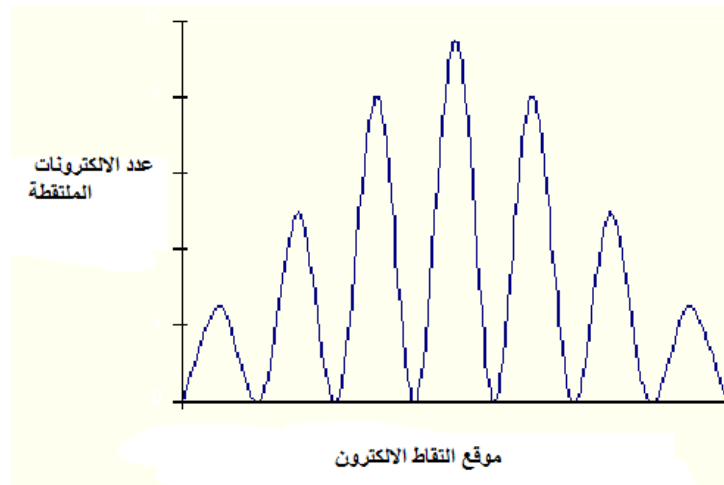
إلى الشاشة (الفوتونات تسلك نفس سلوك الجسيمة). إلى هنا كل شيء عادي ... المفارقة تحدث عند فتح الشقين في آن واحد.

توضح الصورة (2.4) شاشة الإلتقاط و أعداد الإلكترونات الملتقطة عندما يكون إحدى الشقين العلوي أو سفلي مفتوح. المنحنيين يوضحان توزيع الجسيمات عندما يكون أحد الشقين العلوي أو السفلي مفتوح. المنحنى السميكة هو توقع لعدد الجسيمات الملتقطة على الشاشة عندما يكون كلا الشقين مفتوحين و هذا بالإعتماد على نظرية الاحتمالات الكلاسيكية. عند القيام بتجربة الشقين المفتوحين معا نتحصل على نتائج مختلفة عما توقعته نظرية الاحتمالات الكلاسيكية، حيث يظهر نمط تداخلي مثل ما توضحه الصورة (2.5).

عندما تتم عملية القياس يبقى المشكل هو كيف نفسر هذه الظاهرة الفيزيائية؟. هل هي انتقال الجسيمات في الفضاء وفق خط مستقيم (مثل جسيمة) ام تملك خصائص الموجة؟ و المشكل الثاني هو كيف نفسر أن الجسيمات الدقيقة مثل الإلكترون أو فوتون تملك خصائص الجسيمة (الكتلة و السرعة) عند قياسها على الرغم أنها سلكت سلوك الموجة؟ مشكلة السلوك



صورة (2.4): عدد الإلكترونات الملتقطة على الشاشة في حالة أحد الشقين مفتوح (خط رقيق). العدد الاحتمالي المتوقع عندما يكون كلا الشقين مفتوح.



صورة (2.5): نتائج عملية القياس لموقع الجسيمات عندما يكون كلا الشقين مفتوح.

المزدوج تم حله بفرض أن المقذوف هو عبارة عن جسيمة عند إجراء القياس فقط، ويسلك سلوك الموجة عندما لا يخضع المقذوف لعملية القياس.

بالاعتماد على الصورة (2.3) لا نستطيع أن نحدد أي الجسيمات تنتقل خلال الشق العلوي، السفلي أو كلا الشقين في آن واحد لأن عملية القياس لا تسمح لنا بذلك. لكن لو قمنا بعملية

القياس عند شقي الحاجز مباشرة نتحصل على 50% من الجسيمات في الشق العلوي و 50% من الجسيمات في الشق السفلي. عند مقارنة احتمالات التقاط الإلكترون على الشاشة في حالة نمط تداخلي (الصورة 2.5) مع التوقعات التي تنبأت بها نظرية الاحتمالات الكلاسيكية (الخط السميك في الصورة 2.4) نجدها أكثر منها كما توضحه المعادلة التالية [59]:

$$P(x) = P(x|slit_1) + P(x|slit_2) \leq P(x|slit_{1+2}) \quad (2.15)$$

حيث $P(x)$ هي احتمالية قياس الجسيمة في الموقع x . يتمثل حل هذا المشكل في تقديم مفهوم طويلة الاحتمال، حيث يمكن لطويلة أن تعدم الأخرى. النظام الموصوف بالمعادلة (2.15) هو مجموعة من الدوال تحول (رياضيا) حالات فيزيائية حقيقة من فضاء Hilbert H إلى فضاء مركب C :

$$\Psi: S \rightarrow C \quad (2.16)$$

حيث S هو فضاء فيزيائي للحالة و C هو فضاء شعاعي مركب. سوف نتطرق لاحقا إلى أن الدوال الموصوفة في المعادلة (2.16) عبارة عن دوال الموجة التي تمثل حالات من نظام كمي. حالة جسيمة تنتقل خلال كلا الشقين تسمى بـ "تراكب" حالات النظام. بالنسبة لنظام جسيمة واحدة يعتبر التراكب هو نتيجة لكل الحالات الممكنة التي قيست من أجلها. و طوليتها المركبة α تتعلق بالاحتمال الكلاسيكي P لقياس هذا النظام و تساوي $P = |\alpha|^2$. في نظام n جسيمة (يسمى أيضا السجل الكمي quantum register)، النظام يحتوي على $m * n$ تراكب حيث m عدد الحالات الخاصة بكل وحدة أولية في هذا النظام.

2.5.4 معادلة Schrödinger

هي عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية تصف كيفية تغير الحالة الكمية لنظام فيزيائي مع الزمن و تكتب كما يلي:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (2.17)$$

حيث \hbar هو ثابت Planck [57]، H هو هاميلتوني Hamiltonian للنظام.

يمثل الهاميلتوني الملاحظ المتعلق بالطاقة الكلية للنظام، حيث تمثل الحالات الملحوظة على شكل طيف الهاميلتوني [49]. على سبيل المثال الهاميلتوني H يمكن أن يمثل جسيمة موجودة داخل حقل أحادي البعد غير محدود مثل نظام الهزاز التوافقي البسيط (SHO) [58] و يكتب $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ حيث P هو العزم، m هي الكتلة، x هو الموقع و ω السرعة الزاوية. تأخذ معادلة Schrodinger الخاصة بالهزاز التوافقي البسيط الشكل التالي:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} \beta x^2 \psi_n(x) = E \psi_n(x) \quad (2.18)$$

حيث $V(x) = \frac{1}{2}\beta x^2$ هي دالة الكمون، $\omega = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$. عندما نحاول حل المعادلة (2.17) الخاصة بنظام فيزيائي فإن الحل يكون عموماً على الشكل التالي:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (2.19)$$

للتوضيح أكثر نكتب

$$|\psi(t)\rangle = e^{-in\omega t} |\psi(0)\rangle \quad (2.20)$$

حيث ω هي السرعة الزاوية و n هو معامل الحالات الكمية الغير منحطة. إنطلاقاً من المعادلة (2.18) و بالاعتماد على مسلمات ميكانيك الكم، يمكننا أن نلاحظ أن الحالات الناتجة هي عبارة عن توزيع الاحتمالات المتقابلة P_n على مجموعة الحالات الذاتية n [59، 60].

2.5.5 تراكب الحالات الكمية

في الفقرة السابقة قدمنا وصفا يعتمد على ظاهرة فيزيائية فريدة من نوعها وهي: حين تسلك الجسيمة سلوك الموجة تكون في حالات قاعدة متعددة في آن واحد، لكن عندما تقاس (مثل تجربة شقي Young) تكشف حالة القاعدة عن نفسها لتظهر كحالة وحيدة ملحوظة. الحالة المشروحة في المعادلة (2.20) تسمى أيضا بالتراكب الكمي للحالات لأن كل جسيمة وحيدة تحتوي على مجموعة من حالات يمكن ملاحظتها حيث تملك احتمالا محدودا للانقيار في حالات القاعدة المتعامدة و المتجانسة. لشرح هذا المفهوم أكثر نمثل الحالة الكمية على شكل مجموع من الحالات التي يمكن ملاحظتها (مع الاحتمال الخاص بها) و عندما نقوم بعملية القياس سوف نتحصل على أحد الحالات الملحوظة مع الاحتمال الخاص بها.

نشرح ظاهرة التراكب الكمي بتجربة عقلية Gedanken experiment [60] تسمى بـ "قطة Schrodinger"، هذه التجربة النظرية للعالم Schrodinger مبينة على جعل حياة القطة عبارة عن تراكب بين الحياة و الموت. هذه الحالات المترابكة في الميكانيك الكمي توصف بدالة موجية. حالة هذه القطة يمكن توصف بالمعادلة التالية:

$$|\psi\rangle = \frac{|alive\rangle + |dead\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

حيث $|alive\rangle$ و $|dead\rangle$ تشير إلى حالات حياة و موت القطة. هذه الظاهرة غير واقعية في عالمنا الماكروسكوبي، لكنها متلائمة مع العالم الكمي. نفسر المعادلة (2.21) بأنه عندما نقوم بعملية القياس للنظام هناك احتمال 50% للحصول على الحالة $|alive\rangle$ (هذا يعني أن القطة في حالة حياة) و احتمال 50% للحصول على الحالة $|dead\rangle$ (القطة في حالة موت). هذا يمكن كتابته على شكل تمثيل Dirac:

$$|\Psi\rangle = \alpha|alive\rangle + \beta|dead\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|alive\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|dead\rangle \quad (2.22)$$

حيث

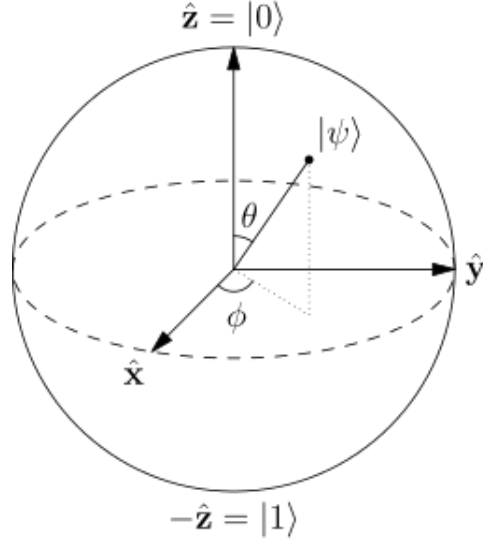
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.23)$$

حيث α و β هما الطويلة المركبة العامة الخاصة بكل حالة مقاسة، و $|\alpha|^2 = \alpha\alpha^*$ حيث $\alpha^* = (a + ib)^* = (a - ib)$ هو المرافق المركب ل α . وبالتالي الحالتين $|alive\rangle$ و $|dead\rangle$ سوف نلاحظهما بعد عملية القياس باحتمال قدره $|\alpha|^2$ و $|\beta|^2$ على الترتيب. التفسير السابق خاص بنظام معرف بالمعادلة (2.22) يبين لنا أن النظام الكمي يمكن تمثيله بدالة موجة تصف كل الحالات الممكنة للنظام (في مثال السابق إفتراضنا أنه لدينا حالتين متعامدتين و متجانستين $|alive\rangle$ و $|dead\rangle$) باستعمال الإحتمالات المركبة (في المثال السابق α و β). الإحتمال المركب يحدد بالمعادلة الثانية (2.23)، والحالات المقاسة لهذا النظام الكمي تحدد قيمتهم بالمجال $\{1,0\}$.

التمثيل السابق هو ترميز آخر لدوران ثلاثي الأبعاد ل Euler. الحالة العامة لدوران الكيوبت تعطى بالمعادلة التالية:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= e^{i\rho} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i(\rho+\phi)} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle = R(\rho, \phi, \theta) \\ &= e^{i\rho} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

المعادلة (2.24) تبدو أكثر وضوحا عندما تصور في كرة، عادة ما تسمى كرة Bloch. هذا التمثيل مفيد جدا لأنه يسمح لنا بتمثيل حالة وحيدة الكيوبت لكن لا تسمح لنا بتمثيل زوج من



صورة (2.6): كرة Bloch.

الكيوبت، هذا راجع لظاهرتي التشابك والتراكب الكميّتين. كرة Bloch موضحة في الصورة (2.6).

الآن، نرجع الى قطة شرودينغر، بدل القطة نستعمل بعض الأملاح القاعدية مثل الأيونات Ca_{40}^{+} , Mg_{28}^{+} , Hg_{198}^{+} التي ليس لها حالة أرضية إلكترونية ثالثة متاحة لمستوى إضافي (بالتالي يمكن إستعمالها مباشرة في الحوسبة المتبادلة الكمية [61]).

كما تطرقنا سابقا في هذا الفصل، من العمليات التي تم تطبيقها هي المصيدة (الفخ) المغناطيسية لأيون وحيد [53،64،63،62]. هذه تقنية عبارة عن محاصرة أيون أو أكثر في مجال كهرومغناطيسي وباستعمال أحزمة من الليزر يتم ضبط الأيونات في حالات معينة. بتطبيق سلسلة من نبضات الليزر المتحكم فيها جيدا على الأيون المحاصر، يمكننا تحقيق بعض البوابات مثل NOT. ضبط الأيونات يتمثل في تحريض الإلكترونات على القفز من مدارها و إرسال أو إمتصاص مقدار كمي من الطاقة. يمكن أيضا إنشاء بوابة من إثنين كيوبت وحتى

ثلاثة كيوبت. على الرغم من هذا فإن هذه التقنية لم تطبق على نطاق واسع في الكمبيوتر الكمي.

2.5.6 القياس الإسقاطي

كما قلنا سابقا أن الحالة $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ هي حالة ممكنة لنظام ذو مستويين كميين، الذي سميناه الكيوبت. عندما يكون $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ ، فإن $|\Psi\rangle$ تأخذ القيمة $|0\rangle$ ، وإذا كان $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ فإن $|\Psi\rangle$ تأخذ القيمة $|1\rangle$ ، مثل البت الكلاسيكي تماما. وإذا كانت $|\Psi\rangle$ لا تأخذ القيمة $|0\rangle$ أو $|1\rangle$ هذا ما سميناه سابقا تراكب الحالتين معا.

يمكن قياس الكيوبت في الحالة $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ لمعرفة أنه في الحالة $|0\rangle$ أو $|1\rangle$ ، حيث سينهار في الحالة $|0\rangle$ باحتمال قدره $|\alpha|^2$ أو سينهار في الحالة $|1\rangle$ باحتمال قدره $|\beta|^2$. حالتا القاعدة الأكثر استعمالا هما حالتي Hadmard المعرفتان كما يلي:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (2.25)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

تسمى حالتي Hadmard $|+\rangle$ و $|-\rangle$ في بعض الأحيان العملة الكمية عندما يقوم أحد بقياسها، حيث تنهار في الحالة $|0\rangle$ أو $|1\rangle$ باحتمال قدره 0.5. حالتا Hadmard متعامدة، هذا يعني أن الجداء داخلي يساوي الصفر $\langle + | - \rangle = 0$.

بصورة عامة، ينفذ القياس الإسقاطي على حالة كمية $|\psi\rangle$ تنهار في الحالة $|i\rangle$ باحتمال قدره $\langle i | \psi \rangle \langle \psi | i \rangle = |\langle i | \psi \rangle|^2$.

يمكن تمثيل العملية O بترميز Dirac من الشكل $|i\rangle\langle j|$ حيث $\alpha_{i,j}$ ، حيث $O = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |i\rangle\langle j|$ عنصر في السطر i و j يمثل رقم العمود في مصفوفة O .

مؤثر القياس الإسقاطي على الحالة M يمثل بجداء خارجي من الشكل $|x\rangle\langle x|$. هذا المؤثر هرميتي يعني $M = M^\dagger$. يسمى هذا المؤثر أيضا بالمؤثر الإسقاطي أو المُسقط.

مثال على فعل المؤثر الإسقاطي هو عبارة عن إسقاط للحالة $(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle$ على الحالة $|0\rangle\langle 0|$:

$$|0\rangle\langle 0| \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \quad (2.26)$$

إذن الحالة النهائية هي الحالة $|0\rangle$. والمعامل الذي أمامها، عندما نقوم بتربيعه نحصل على احتمال الإسقاط (و هو النصف في هذه الحالة).

المؤثر الهرميتي يلعب دورا مهما في ميكانيك الكم لأنه يمثل الملحوظات، التي تكون قيمها الذاتية هي القيم المقاسة تجريبيا. إذن، موقع جسيمة ما و استقطاب الفوتون و غزل الإلكترون (*spin*) يمكن تمثيلها بمؤثر هرميتي. وحتى القياس الإسقاطي يمثل بمؤثر هرميتي.

2.6 من ميكانيك الكم الى المنطق الكمي

تطرقنا سابقا إلى أحد الأمثلة في تطبيقات الكمبيوتر الكمي وهو الأيون المحاصر بواسطة حقل كهرومغناطيسي والذي يتفاعل مع أحزمة ليزرية، حيث تتأثر الأيونات وتتغير حالاتها من الحالة الأرضية إلى الحالة المثارة و ذلك بقفز الإلكترون من المستوى الأسفل إلى المستوى الأعلى. في الحقيقة الإلكترونات أكثر تعقيدا من أن تعتبر جامعات الطاقة الكمية فقط و دوالها الموجية أيضا معقدة لأنها تتعلق بثلاث خصائص زيادة عن العدد الكمي الرئيسي: العدد الكمي المداري (l)، العدد الكمي المغناطيسي (m) و العدد الكمي المغزلي (s). العددين l و m يحددان كيفية "دوران" الإلكترون في المدار، والعدد s يحدد كيفية "دوران" الإلكترون حول نفسه. من المهم أن نعرف ان العدد s يستعمل كثيرا في تمثيل حالات القاعدة في الحوسبة الكمية لأن

ذرة الهيدروجين تملك قيمتين فقط $\pm \frac{1}{2}$ للعدد المغزلي s. و بالتالي استعمال "الدوران" المغزلي s يدل على استعمال منطق الكمي ذي قيمتين فقط (نظام ثنائي). الآن، باعتبار أن "الدوران" المغزلي s هو القاعدة. مؤثر كمي على الذرة سوف يقيس التغير في "دوران" الإلكترون المغزلي. بالتالي العمليات مطبقة على الكيوبت الوحيد هي عبارة عن "دوران" وفق زوايا معينة [4].

من ناحية أخرى، لبناء الكمبيوتر الكمي نحتاج إلى نظام ثنائي الكيوبت (سمينه سابقا بالمسجل). بجانب المسجل الكمي نحتاج أيضا الى عملية القياس.

2.6.1 نظام ثنائي الكيوبت

لشرح هذه الخواص المهمة جيدا، دعنا ننظر على أنظمة أكثر تعقيد و التي تحتوي على زوج من الجسيمات الكمية a و b الممثلة كالاتي $|\psi_a\rangle = \alpha_a|0\rangle + \beta_a|1\rangle$ و $|\psi_b\rangle = \alpha_b|0\rangle + \beta_b|1\rangle$ على الترتيب. في نظام كهذا لدينا مشكل زيادة الفضاء بطريقة أسية و يمثل باستعمال جداء Kronecker [68].

وبالتالي نتيجة هذا النظام تمثل كما يلي:

$$|\psi_a\psi_b\rangle = \alpha_a\alpha_b|00\rangle + \alpha_a\beta_b|01\rangle + \beta_a\alpha_b|10\rangle + \beta_a\beta_b|11\rangle \quad (2.27)$$

حيث المعامل المزدوج يخضع لقوانين الوحدة (الكمالية) و جذر تربيعي لكل معامل يمثل احتمال القياس للحالة المقابلة. التراكب يعني أن النظام الكمي يمكن أن يكون في إحدى الحالات أو في جميع الحالات في نفس الوقت. هذا التراكب في الحالات سوف يعطي قوة حسابية ضخمة للكمبيوتر الكمي.

خصائص أخرى لمسجل متعددة الكيوبت هي تراكب عدة كيوبتات. نفرض أن نظام يملك n كيوبت. المسجل الكلاسيكي يمثل ب 2^n حالة معينة، في حين المسجل الكمي يمثل بتراكب 2^n

حالة. هذا يعني أنه قبل إجراء عملية القياس فإن المسجل يكون في واحد، اثنين، ثلاثة.... أو كل من 2^n حالة في نفس الوقت.

2.6.2 الحالات المختلطة

مسلمة القياس تقول أن الحالة $|\psi\rangle$ يمكن قياسها باستعمال الحالات المتعامدة $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_k\rangle, \dots$ حيث في هذه الحالة تنهار في الحالة $|\phi_i\rangle$ باحتمال قدره $|\langle\phi_i|\psi\rangle|^2$. حيث يمكن كتابة حالة النظام بترميز Dirac دون اللجوء الى نظرية الاحتمالات لأن ترميز Dirac متعدد الإستعمالات.

يكتب توزيع الاحتمال حيث الحالة $|\phi_i\rangle$ تظهر باحتمال قدره P_i بترميز Dirac على شكل مؤثر الكثافة ρ حيث:

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (2.28)$$

الحالة $|\psi\rangle$ تظهر باحتمال قدره 1 و يمكن كتابته في ترميز مؤثر الكثافة مثل: $|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| * 1$ و تسمى الحالة النقية. يمكن كتابة فعل القياس كما يلي:

$$\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle\langle\psi|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \sum_i |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (2.29)$$

حيث تظهر الحالة $|\phi_i\rangle$ (بعد القياس) باحتمال قدره $|\langle\phi_i|\psi\rangle|^2$ مثل ما تقول مسلمة القياس.

هناك بعض الغموض يكتنف مصفوفة الكثافة. على سبيل المثال، عندما تقول أن مصفوفة الكثافة تصف حالة النظام، يعني هذا ما نحتاجه للتنبؤ بكل السلوكيات المستقبلية للنظام.

هناك عدد غير منته من الطرق التي نستطيع به كتابة نفس مصفوفة الكثافة. لكنها كلها متساوية تماما، مثال خلط $|0\rangle$ و $|1\rangle$:

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (2.30)$$

ويمكن كتابتها بالعبارة التالية:

$$\rho = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) \quad (2.31)$$

حيث $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. لا يوجد إجراء تجريبي يمكن التمييز به بين الاثنين!.

مؤثر الكثافة ρ للخلط الحالتين يملك قيم ذاتية موجبة. زيادة على ذلك، من سهل إثبات أن $\rho = \rho^\dagger$ ، إذن مؤثر الكثافة هرميتي. هذا يعني أنه يمكننا أن نجعله قطري.

إذا كان لدينا خلط للحالات فإنه يمكننا كتابة مؤثر كثافة الخلط كما يلي:

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad (2.32)$$

حيث p_i هي القيمة الذاتية الموجبة و $|i\rangle$ هي الحالات المتعامدة. بنفس هذه الطريقة يكتب توزيع الاحتمالات الكلاسيكية حيث $P(X=i) = p_i$. لا يمكن التمييز بين التوزيعين على الرغم من أن أحدهما كلاسيكي والآخر كمي. هذا واحد من الأسباب التي نرى فيها أن معلومة كلاسيكية في بعض الأحيان تعتبر كمجموعة ثانوية للمعلومة الكلاسيكية.

2.6.3 التشابك Entanglement

يعتبر التشابك من الخصائص العجيبة لميكانيك الكم، حيث يمكننا وصفه بأنه ترابط حاصل بين نظامين كميين أو أكثر لا يمكن تفسيره بالفيزياء الكلاسيكية. و تعتبر أيضا هذه الخاصية الكمية كوسيلة فعالة في بناء الحوسبة الكمية.

يمكن دمج حالتين مع بعضهما باستعمال الجداء التانسوري Tensor product. على سبيل المثال، الحالتين $|+\rangle$ و $|-\rangle$ يمكن اعتبارهما مع بعضهما كما يلي:

$$|+\rangle |-\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) = |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \quad (2.33)$$

بعض الأمثلة المعروفة بحالات التشابك والتي تسمى بحالات Bell $|\Phi^+\rangle$ و $|\Phi^-\rangle$ تكتب كما يلي:

$$|\Phi^+\rangle = |00\rangle + |11\rangle \quad (2.34)$$

$$|\Phi^-\rangle = |00\rangle - |11\rangle$$

(بدون ما ننسى الحد $\frac{1}{\sqrt{2}}$). الآن نجرب كتابة عبارة $|\Phi^+\rangle$ عن طريق تركيب كيوبتين $|\alpha\rangle|0\rangle + |\beta\rangle|1\rangle$ و $|\gamma\rangle|0\rangle + |\delta\rangle|1\rangle$ ونحاول إيجاد قيم $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$|\Phi^+\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|01\rangle + \alpha\delta|10\rangle + \beta\delta|11\rangle \quad (2.35)$$

لكي تساوي العبارة الأولى $|\Phi^+\rangle$ يجب أن يكون: $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$ و $\beta\gamma = \alpha\delta = 0$. لكي تكون القيمة $\alpha\delta = 0$ صحيحة يجب أن يكون δ و α مساوي للصفر وهذا يتنافى مع الشرط الثاني $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$. وبالتالي نستنتج ان حالة Bell $|\Phi^+\rangle$ لا يمكن تحليلها الى حالتين منفصلتين، لذلك تسمى الحالة $|\Phi^+\rangle$ بالمتشابكة.

لتعميم هذه الخاصية، يمكننا أن نقول أن حالة كمية نقية هي حالة تشابك بين نظامين أو أكثر عندما لا نستطيع كتابتها على شكل ضرب تانسوري لحالات هذا النظام. التشابك يمكن أن يبقى فعالا بين نظامين حتى إذا فصلهما عن بعضهما لمسافات بعيدة، لأنه ببساطة لا يتعلق كلياً بالمسافة.

2.6.4 المصفوفات التبديلية و غير التبديلية

لتكن $f(a, b, c)$ دالة منطقية عكوسة معرفة بما يلي $f = a \oplus b \oplus c$ ، الجدول (1.2) هو جدول منطقي الخاص بالدالة. نلاحظ أن هذه الدالة العكوسة يمكن كتابتها على شكل مصفوفة و الزوج مدخل-مخرج على شكل شعاع. لكل دالة ذات ثلاثة متغيرات يجب أن يملك شعاع المدخل 2^3 عاملاً. على سبيل المثال حالة المدخل $011 = [00010000]$ و حالة المنطقية $010 = [00100000]$. المصفوفة التبديلية الممثلة للدالة $f(a, b, c)$ هي:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

هذه المصفوفات تسمى بالمصفوفات التبديلية لأنها تقوم بعملية تبديل المداخل.

abc	a·b·c
000	000
001	001
010	011
011	010
100	101
101	100
110	110
111	111

جدول (1.2): دالة منطقية $f(a, b, c) = a \oplus b \oplus c$

الفصل الثالث

مبادئ تصميم الدارات الكمية

Principles of Quantum Circuits Design

3.1 مقدمة

التصغير المنطقي هو مجال مهم من مجالات هندسة الحاسوب حيث سنطرق في هذا البحث الى مفاهيم جديدة لهذا النوع مثل التصميمات الآلية و تصغير الدارات الكمية.

في هذا الفصل سوف نقدم عدة مفاهيم للتصميمات المنطقية الكمية باحترام مبادئ ميكانيك الكم و كلفتها، بحيث سنشرح المنهجية العامة للدارات الكمية. هناك العديد من الأساليب التي درست في المستوى الوظيفي من أجل البرهنة على منهجية التصميم المنطقي الخاص بالآلة. نذكر أحد المفاهيم المستعملة في منهجية التصميم هو كلفة البوابة الكمية (The Cost).

3.2 أبحاث سابقة في مجال التصميمات الآلية للدارات الكمية

أدى البحث على أصغر، أرخص و أحسن دارة في المنطق الكمي و العكوس الى ظهور مجموعة من البوابات و الدارات تستعمل عادة كمادة أولية شاملة لبناء تصميمات منطقية [27,66,67,44]. لقد أُعتمد على عدة خصائص في بناء و تحسين الدارات نذكر منها: الشمولية، كلفة إنجاز منخفضة، الحاجة التقنية للبناء و التصميم الجيد. بصفة عامة، الغرض من البناء هو تحقيق احد الأهداف الثانوية المذكورة وتختلف درجة الأهمية للهدف حسب الحاجة من بناء الدارة، حيث يمكن أيضا التركيز على هدف واحد و تطويره فرديا. يظهر في الأوراق البحثية التالية [66,67,25,62] أن جميع البوابات (الدارات الكمية) التي لديها أكثر من كيوبت واحد يجب أن تبني باستعمال كيوبت واحد و 2 كيوبت محددة القيمة.

التحدي الأكبر هو بناء البوابات الأساسية الشاملة مثل: Fredkin [66] أو Toffoli بحيث تملك أخفض كلفة لتكنولوجيا معينة. وفقا لتعريف المنطق الكمي (الفصل الثاني)، يظهر جليا أن التصميم المنطقي للدارات الكمية يكمن في إيجاد تركيب مناسب للبوابات الأولية بحيث تكون المصفوفات الناتجة مطابقة لمواصفات المصفوفة الوحودية. هذه الإشكالية يمكن أن نجدها مشابهة لإشكال بناء الدارات المنطقية الكلاسيكية بالاعتماد على البوابات المنطقية الأولية باستعمال مواصفات في شكل خريطة Karnaugh (KMap) [69]. مثل ما أثبت في [67] فإن تصميمات الدارات الكمية هي عمليات غير رتيبة و نتيجة لذلك من الصعب استعمال تقنيات آلية في تصميمات الدارات الكمية بدون ربطها مع بعض الإستدلالات التجريبية.

كما ذكرنا سابقا أن جميع البوابات والدارات يمكن تمثيلها بمصفوفات، حيث تكبر أبعادها بطريقة أسية عند كل زيادة في عدد الكيوبتات الخاصة بالبوابة أو الدارة. على سبيل المثال إن كان لدينا دائرة كمية لها 3 كيوبتات فإنه يمكن تمثيلها بمصفوفة أبعادها $2^3 * 2^3$ أي 64 عنصر في حين تكون أبعاد المصفوفة لدائرة لها 5 كيوبتات مساوية لـ $2^5 * 2^5$ أي 1024 عنصر. كل عنصر من المصفوفة هو عبارة عن عدد مركب و نتيجة لذلك فإن عملية الحساب للمصفوفة تتطلب أيضا زمنا أسيا. زيادة على ذلك، في تصميم المنطقي الكمي كل الدارات يمكن تركيبها بعدد غير منته من الطرق باستعمال البوابات الكمية و بدون إضافة كيوبتات أخرى. بعبارة أخرى، الدارة تعطى بتحويل وحدوي U، يمكن إنجازها بعدد أدنى من البوابات أو يمكن إنجازها بعدد غير منته من الدارات بتكاليف مختلفة. بالتالي مشكل التصغير في التصميمات المنطقية الكمية ليس مشكل التوسع الأسّي لأبعاد الدارة الكمية فقط بل هو (بالإضافة الى ما سبق) مشكل إيجاد المجموعة الأدنى من البوابات التي تسمح بإيجاد العدد الأدنى من الحلول المحتملة.

من أكثر التقنيات استعمالا في تصميم الدارات الكمية هي إما تقليل عدد الكيوبتات المستعملة الذي يؤدي الى استعمال عدد أقل من البوابات أو إيجاد أنواع محددة من الدوال المنطقية التي

يمكن أن تكون عكوسة أو خطية. من أشهر المناهج في التصميمات المنطقية الكمية التي أُستعملت لهندسة الدارات العكوسة الكمية [67] و [70...79]. يمكن تقسيم تصميمات الدارات العكوسة إلى نوعين أساسيين: النهج الأول هو أن التصميم المنطقي العكوس يعتمد بقوة على استعمال البت الاضافي (The ancilla bit) [74,70,84]، النهج الثاني للتصميمات المنطقية العكوسة لا يعتمد على البتات الإضافية وإنما على العدد الأدنى من الكيوبتات [73,81,80,82]. تفصل الإستراتيجية العامة بين نوعي التصميم العكوس بأنه إذا كان هناك عدد كبير من البتات الإضافية فإنه يؤدي إلى التقليل من عدد البوابات المستعملة في بناء الدارات الكمية العكوسة [83].

إهتمت تصميمات اخرى خاصة بالدارات الكمية بتقليل عدد الكيوبتات [85,84,81]. هذه الطريقة عموما هي الأكثر تطبيقا تجريبيا حتى الآن وهذا راجع إلى حقيقة أنه يوجد عدد غير منته من البوابات الكمية التي يمكن إستعمالها في التصميمات المنطقية الكمية.

على الرغم من نتائج مناهج التصميمات المنطقية الكمية التي ذكرناها سابقا إلا أنه لا توجد طريقة عامة لتصميم دائرة كمية ذات 2 كيوبت باستعمال مبادئ غير تبديلية كمية. بعض الأساليب طورت من التصميم المنطقي العكوس، حيث وُضعت قاعدة لبناء التصميمات وهي مجموعة من البوابات تسمى NCT (NOT, Feynman, Toffoli) بحيث تستعمل هذه البوابات الثلاثة فقط لإنتاج المنطق الكمي، بالإضافة إلى البوابات المذكورة سابقا توجد مجموعة أخرى من البوابات خاصة بهندسة المنطقية الكمية [44,66,71,73,86]. على الرغم من كل هذه الأساليب والطرق المتبعة في التصميم إلا أنه لا يوجد دليل على أن أي من هاته التصميمات يملك أصغر كلفة لإنجازها تجريبيا. بالتالي تبقى مشكلة مطروحة لإيجاد أي من البوابات يسمح بإنتاج دارات قليلة الكلفة وهذا يعني أقل عدد من البوابات وأقل عدد من الكيوبتات الإضافية.

3.3 البوابات الكمية و الدارات المنطقية الكمية

3.3.1 البوابات الكمية لكيوت وحيد

نهتم الآن بالمؤثرات، حيث نعبر عنها بمصفوفات من الشكل $(n \times n)$ ، النوع الأول من المؤثرات و الذي يعتبر الأهم في بناء المنطق الكمي، وهو المؤثر الكمي لكيوت وحيد، حيث يمثل ببوابة كمية خاصة. بعض المصفوفات الممثلة لمؤثرات كمية موضحة في المعادلة (3.1):

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & Y &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, & Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & V &= \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, & Ph &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

كل مصفوفة الممثلة لمؤثر مداخلها في الأعلى (من اليسار إلى اليمين) و مخرجها في الجانب (من أعلى إلى الأسفل). وبالتالي عندما نأخذ الحالة $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ و H مؤثر وحدوي (انظر المعادلة (3.1))، نتيجة الحساب تكون ممثلة في المعادلة (3.2):

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

لكي نفهم كل واحدة من العمليات الجزئية الخاصة بكل مخرج تم تنفيذه، العملية الممثلة بالمعادلة (3.2) تعطي نتيجة خاصة لكل حالة من حالات المدخل الممكنة (انظر المعادلة (3.3)). المعادلة الأولى من المعادلة (3.3) تمثل الحالة التي يكون فيها المدخل في الحالة $|0\rangle$ ، حيث تتحول هذه الحالة و عندما نقوم بعملية القياس نحصل على نتائج التالية: 50% من الحالات

الملاحظة تكون في الحالة $|0\rangle$ و 50% الأخرى تكون في الحالة $|1\rangle$ عندما يكون المدخل في الوضع $|1\rangle$ نتحصل على نفس النتائج السابقة، لأن:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (3.3)$$

نلاحظ أن البوابة NOT تملك مصفوفة وحدوية و تعتبر مصفوفة تبديلية، بعض البوابات الأخرى مثل البوابتين Hadamard و V يملكان مصفوفتين وحدويتين لكنهما مصفوفتين غير تبديليتين. تعتبر بوابة Hadamard من البوابات المعروفة لأنها تستعمل لخلق تراكب الحالات الكمية. مثال عن خلق كيوبت في حالة تراكب موجودة في المعادلة (3.3) حيث مهما تكن حالة

المدخل $|0\rangle$ أو $|1\rangle$ فإن حالة المخرج تكون في الحالة $|0\rangle$ أو $|1\rangle$ باحتمال $\frac{1}{2}$. نلاحظ أن الجذر التربيعي للبوابة NOT هو عبارة عن تحويل وحدوي يخلق حالة متراكبة مركبة (المعادلة (3.4)).

$$\begin{aligned} \sqrt{X} = V, \sqrt{X} = V^\dagger \\ V = \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, V^\dagger = \frac{1+i}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

تمتلك البوابة V خاصيتين مهمتين $V * V = V^\dagger * V^\dagger = NOT = X$ و $V * V^\dagger = V * V^\dagger = I$ ، سنرى لاحقا أهمية هذه البوابة في انتاج بوابات الكمية الشاملة بكلفة صغيرة. بالإضافة الى البوابة V سنتطرق إلى بوابات اخرى ذات كيوبت وحيد مستعملة بكثرة في التصميمات المنطقية الكمية، مثل: NOT (دوران Pauli)، Hadamard، $\pi/8$ و البوابة S المعرفة بالمعادلة (3.5):

$$S(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

يمكننا استعمال دوران Pauli وفق المحاور الثلاث X, Y, Z أو أي دوران كفي وفق زاوية معينة بالنسبة للمحاور الثلاث لكرة Bloch (انظر الصورة (2.6)) و أيضا بعض الحالات الخاصة لدوران وفق زاوية معينة مثل مضاعفات الزاوية 45^0 . ونتطرق أيضا إلى نوعين جديدين من البوابات هما: Pseudo-Hadamard ونرمز لها بالرمز h والنوع الثاني هو مرافق Pseudo-Hadamard ونرمز لها بالرمز h^{-1} (المعادلة (3.6)) ، هذان النوعان يستعملان لبناء الكثير من البوابات. وتعتبر كلتا البوابتين تبدليتين و تستعمل كثيرا في التصميمات [93،94].

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, h^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

في المعادلة 3.1 الرموز X, Y, Z عرفناها من قبل على انها مصفوفات Pauli spin حيث تعتبر $Z(\psi), Y(\psi), X(\psi)$ والمصفوفات الموافقة لدورانات كيفية وفق الزاوية ψ . الدورانات $Z(\psi), Y(\psi), X(\psi)$ يمكن أن نفسرها على أنها دورانات بزواوية بالنسبة للمحاور X, Y, Z و على الترتيب. كما شرحنا في كرة Bloch [4].

نحاول الآن إيجاد بضرب (مصفوفة / شعاع) كل الحالات الممكنة التي يمكن أن تنشأ بتطبيق كل التركيبات الممكنة للبوابتين V و V^\dagger على الحالتين $|0\rangle$ و $|1\rangle$ و كل الحالات الناشئة من هاتين الحالتين المعتبرتين كقاعدة (الصورة (3.1)). عند تطبيق البوابة "الجذر التربيعي لـ NOT" على الكيوبت $|0\rangle$ (الصورة 1.3 a) نتحصل على حالة نرمز لها بالرمز $|V_0\rangle$.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad |0\rangle \xrightarrow{V} |V_0\rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{bmatrix} \\
 (b) \quad |V_0\rangle \xrightarrow{V} |1\rangle &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+j^2) + (1-j^2) \\ (1-j^2) + (1-j^2) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(1+j^2) \\ 2(1-j^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-1) \\ (1+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 (c) \quad |V_0\rangle \xrightarrow{V} |1\rangle & \quad (d) \quad |V_1\rangle \xrightarrow{V} |0\rangle \quad (e) \quad |0\rangle \xrightarrow{V^\dagger} |V_1\rangle \\
 (f) \quad |V_0\rangle \xrightarrow{V^\dagger} |0\rangle & \quad (g) \quad |1\rangle \xrightarrow{V^\dagger} |V_0\rangle \quad (h) \quad |V_1\rangle \xrightarrow{V^\dagger} |1\rangle
 \end{aligned}$$

الصورة (3.1): حساب كل الحالات التراكب الممكنة التي يمكن الحصول عليها من حالات القاعدة باستعمال V و V^\dagger حيث $(j^2 = -1)$.

عندما نقوم بعملية القياس لهذه الحالة نتحصل على الحالتين $|0\rangle$ و $|1\rangle$ حيث احتمال الحصول على كل حالة هو $1/2$. نفس العملية بالنسبة لكل الحالات الأخرى مفصلة في الصور (3.1b) حتى الصورة (3.1h). كما لاحظنا أن الحالات الناشئة هي $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|V_0\rangle$ و $|V_1\rangle$ فقط و لا توجد حالات أخرى. إذن الفضاء مغلق و بالتالي مجموعة الفضاء الكمي للحالات محصورة بهذه البوابات في مجموعة الحالات التي يمكن وصفها بجبر القيم الاربعة $\{|0\rangle, |1\rangle, |V_0\rangle, |V_1\rangle\}$.

3.3.2 الدوران وفق المحاور X، Y و Z

كما رأينا سابقا، مجموعة من أمثلة لبوابات منطقية كمية خاصة [91] مثل بوابة Hadamard و بوابة V . الآن نرجع إلى الخلف قليلا لنعرف أحد أنواع البوابات الكمية العامة لكيوبت وحيد. أولا يجب ان نقدم عائلة البوابات الكمية التي تقوم بالدورانات وفق المحاور الثلاثة المتعامدة في كرة Bloch.

يمثل كيوبت وحيد في كرة Bloch بنقطة في سطح الكرة. فعل البوابة الكمية لكيوبت وحيد هو التأثير على هذه الحالة و تحويلها إلى نقطة أخرى من سطح الكرة. إن البوابة التي تقوم

بتدوير الحالة حول المحاور X ، Y ، و Z لديها أهمية كبيرة لأنه بالاعتماد عليها نستطيع تحليل أي بوابة كمية كيفية لكيوبت وحيد إلى مجموعة متسلسلة من بوابات الدوران.

أولاً، يجب تثبيت إطارنا المرجعي مع الأخذ بعين الاعتبار كل الحالات النقية الخاصة بكيوبت وحيد كفي التي يجب تعريفها. نختار ثلاث محاور متعامدة X, Y, Z و ثلاثة مركبات قطبية: r نصف قطر الكرة (الذي يعتبر كوحدة بالنسبة لكل النقاط على سطح الكرة)، الزاوية θ أو زاوية الميل وهي الزاوية المحصورة بين المستقيم (النقطة-مركز الكرة) و المحور Z ، الزاوية φ أو زاوية السميت و هي الزاوية المحصورة بين اسقاط المستقيم (النقطة-مركز الكرة) على المستوي المرجعي و المحور X . بالتالي كل نقطة من سطح الكرة يمكن التعبير عنها بدلالة الإحداثيات (X, Y, Z) أو الإحداثيات (r, θ, φ) . و أنظمة هاتين الإحداثيتين مرتبطتين فيما بينها بالمعادلة (3.7):

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

إذن، هل البوابات الكمية تقوم بتدوير هذه الحالات حول المحاور X, Y, Z ؟ ادعينا ان هذه البوابات الموضحة في المعادلة (3.7) التي بنيت بالاعتماد على مصفوفات Pauli (X, Y, Z) بالإضافة الى المصفوفة الرابعة I التي يمكن استعمالها لإنجاز تحول اجمالي للحالة (global overall phase shift). على وجه التحديد، سوف نقوم بتعريف المصفوفات الوحدوية التالية: $R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$ و Ph من هاملتونيات أُختيرت لتكون -على الترتيب- مصفوفات Pauli الأربع X, Y, Z و I (مصفوفة الوحدة) كما توضحه المعادلة (3.8):

$$\begin{aligned}
 R_X(\alpha) &= \exp\left(-\frac{i\alpha X}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \\
 R_Y(\alpha) &= \exp\left(-\frac{i\alpha Y}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \\
 R_Z(\alpha) &= \exp\left(-\frac{i\alpha Z}{2}\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(+\frac{i\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \\
 Ph(\delta) &= \exp(i\delta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

لنأخذ على سبيل المثال البوابة $R_Z(\alpha)$ ثم نذكر كيف ستقوم هذه البوابة بتحويل حالة التالية

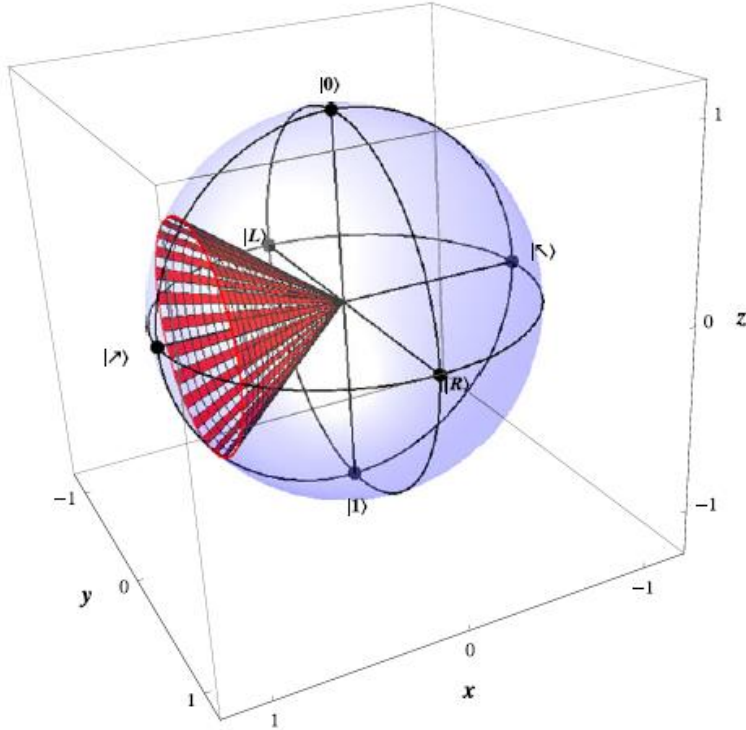
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \exp(i\varphi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

وهي حالة كيفية لكيوت وحيد. المعادلة 3.9:

$$\begin{aligned}
 R_Z(\alpha)|\psi\rangle &= \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(+\frac{i\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \exp(i\varphi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \\
 R_Z(\alpha)|\psi\rangle &= \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \exp\left(+\frac{i\alpha}{2}\right)\exp(i\varphi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$R_Z(\alpha)|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \exp\left(+\frac{i\alpha}{2}\right)\exp(i\varphi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

الصورة (3.2): البوابة $R_x(\theta)$ تقوم بتحويل الحالة $|\psi\rangle$ على سطح كرة الى حالة أخرى جديدة هي $R_x(\theta)|\psi\rangle$ ، تمثل بنقطة المتحصل عليها بتدوير شعاع نصف القطر (الذي مبدؤه مركز الكرة و نهايته $|\psi\rangle$) حول المحور x - بزاوية قدرها $(\frac{\theta}{2})$. نلاحظ أن دوران قدره 4π يعيدنا إلى نفس النقطة.

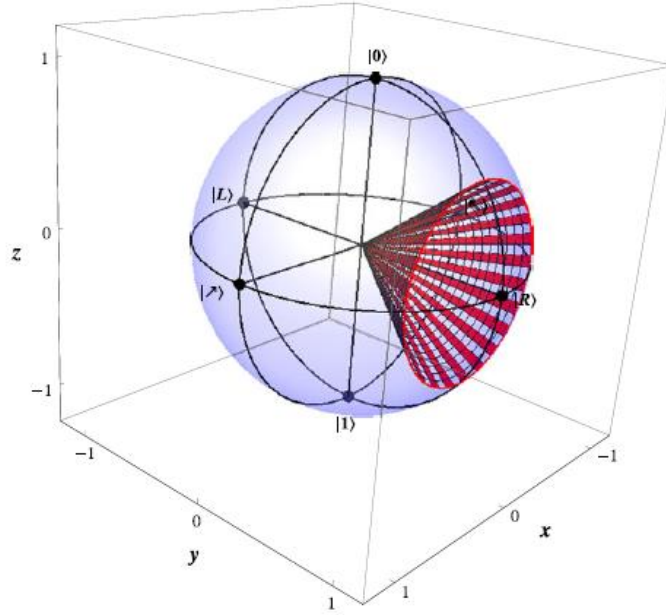


الآن نحن أحرار في ضرب هذه الحالة في أي معامل لتحويلها لأيّة حالة نريدها. إذن دعنا نضرب الحالة في معامل تحويل الحالة $\exp(i\alpha/2)$ ، الذي يعطينا الحالة التالية:

$$R_z(\alpha)|\psi\rangle \equiv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \exp(i(\varphi + \alpha))\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (3.10)$$

اذن فعل البوابة $R_z(\alpha)$ على $|\psi\rangle$ هو زيادة الزاوية α الى الزاوية φ وبالتالي تدوير الحالة حول المحور z - بزاوية قدرها α . لهذا نسمي $R_z(\alpha)$ ببوابة الدوران z - . لا يتفق الدوران في كرة Bloch مع بديهيات الدوران التي تعلمناها سابقا. خاصة، عندما نقوم عادة بدوران قدره 2π راديان (360 درجة) لجسم صلب حول أي محور فإنه يرجع إلى حالته الابتدائية. أما بالنسبة الى الدوران في كرة Bloch فهذا غير صحيح! عندما نقوم بتدوير حالة كمية بزاوية قدرها 2π في كرة Bloch لا يعود بالحالة إلى حالتها الابتدائية. لتأكد من ذلك دعنا نقوم

الصورة (3.3): البوابة $R_y(\theta)$ تقوم بتحويل الحالة $|\psi\rangle$ على سطح كرة الى حالة اخرى جديدة هي $R_y(\theta)|\psi\rangle$ ، تمثل بنقطة المتحصل عليها بتدوير شعاع نصف القطر(الذي مبدؤه مركز الكرة و نهايته $|\psi\rangle$) حول المحور y - بزاوية قدرها $(\frac{\theta}{2})$. نلاحظ ان دوران قدره 4π يعيدنا الى نفس النقطة.



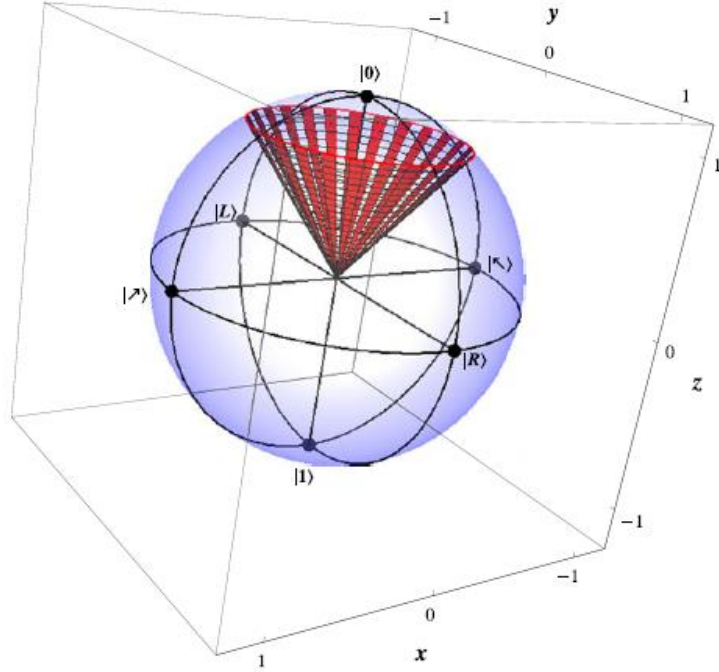
بحساب فعل الدوران على كيوبت وحيد يكفي $|\psi\rangle$ حول المحور z - بزاوية قدرها 2π نجد:

$$R_z(2\pi)|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \exp(-i\pi) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \exp(i\varphi)\sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$R_z(2\pi)|\psi\rangle = \begin{bmatrix} -\cos(\frac{\theta}{2}) \\ -\exp(i\varphi)\sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} = -|\psi\rangle$$

يعني أنه إذا أردنا إعادة الحالة إلى الحالة الابتدائية يجب أن نقوم بدوران قدره 4π في كرة Bloch.

الصورة (3.4): البوابة $R_z(\theta)$ تقوم
تحويل الحالة $|\psi\rangle$ على سطح كرة إلى
حالة أخرى جديدة هي $R_z(\theta)|\psi\rangle$.
تمثل بنقطة المتحصل عليها بتدوير شعاع
نصف القطر (الذي مبدؤه مركز الكرة و
نهايته $|\psi\rangle$) حول المحور z - بزاوية
قدرها $\left(\frac{\theta}{2}\right)$. نلاحظ أن دوران قدره 4π
يعيدنا إلى نفس النقطة.



3.3.3 التعبير على بوابات NOT، V، و Hadamard ببوابات الدوران

البوابات NOT، V، و Hadamard يمكن الحصول بسلسلة من بوابات الدوران. على
سبيل المثال:

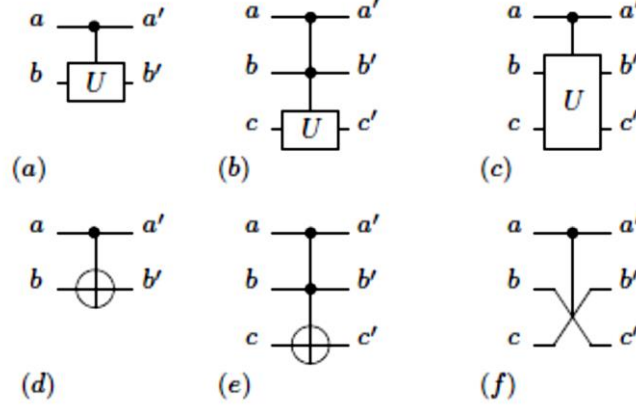
$$\begin{aligned}
 NOT &\equiv R_x(\pi).Ph\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 NOT &\equiv R_y(\pi).R_z(\pi).Ph\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 V &= R_x\left(\frac{\pi}{2}\right).Ph\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 H &= R_x(\pi).R_y\left(\frac{\pi}{2}\right).Ph\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 H &= R_y(\pi).R_z(\pi).Ph\left(\frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3.4 البوابات الكمية متعددة الكيوبت و المتحكم فيه

$$U = \begin{matrix} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.13)$$

النوع الثاني من البوابات الكمية هي أحد أنواع البوابة Controlled-U. الرسوم التوضيحية لأمثلة لهذا النوع من البوابات مبينة في الصورة (3.5). من الصورة (3.5a) حتى الصورة (3.5c) تمثل الهياكل العامة لبوابات الكمية حيث الصورة (3.5a) تمثل بوابة لكيوبت وحيد و آخر متحكم فيه، الصورة (3.5b) تمثل بوابة لكيوبتين و كيوبت واحد متحكم فيه و الصورة (3.5c) تمثل بوابة لكيوبت وحيد و إثنين متحكم فيهم. السبب في تسمية هذه البوابات متحكم فيها Controlled هو حقيقة أن هذا النوع من البوابات يعتمد على نوعين من العمليات: الأولى هي عبارة عن كيوبت متحكم أو أكثر و الثانية هي عبارة عن تحويل وحدوي شبيه بالمصفوفة في المعادلة (3.13) و يسمى بالمتحكم فيه. على سبيل المثال بوابة Feynman تعتبر كبوابة نفي متحكم فيها (Controlled-NOT) حيث تملك إثنين من الكيوبتات الداخلة a و b كما توضحه الصورة (3.5d) و المعادلة (3.13) توضح مصفوفة البوابة NOT و الكيوبتات الداخلة الممكنة و الخارجة. بالتالي الكيوبتات التي تتحكم في البوابة تسمى الكيوبتات المتحكممة والكيوبتات التي يطبق عليها التحويل الوحدوي تسمى كيوبتات الهدف. تمثل الصور من (3.5d) إلى الصورة (3.5f) حالات خاصة من البوابات حيث يكون مؤثر التحويل الوحدوي عبارة عن NOT، NOT، SWAP على الترتيب. المصفوفة الوحدوية لكل منهم موضحة في المعادلة (3.13)، (3.14a)، (3.14b). تمثل الصورة (3.2e) بوابة Toffoli

أو (CCNOT) Controlled-Controlled-Not، والصورة (3.5f) تمثل بوابة Fredkin. a, b, c تسمى الكيوبتات الداخلة و a', b', c' تمثل الكيوبتات الموافقة الخارجة.



الصورة (3.5): رسم تمثيلي للبوابات Controlled-U.

تبين المعادلة (3.13) أنه إذا كان لدينا حالة المدخل على سبيل المثال هي $|00\rangle$ (المدخل من الأعلى) فإن المخرج يحسب بالطريقة التالية $|00\rangle * 1 = P_{00}|00\rangle = U|00\rangle$. بنفس الطريقة يمكن إستخراج جميع التركيبات مدخل / مخرج.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

تعني البوابة Controlled-NOT أنه إذا كان الكيوبت المتحكم في الحالة 0 فإن الكيوبتين في المخرجين يكونان في نفس الحالة التي كنا عليها قبل الدخول الى البوابة ($a' = a, b' = b$). الآن إذا كان الكيوبت في الحالة 1، فإن النواتج تكون $a' = a, b' = \bar{b}$ وفقا للمعادلة (3.13). نلاحظ أن بوابة Toffoli (CCNOT) هي عبارة عن بوابة CNOT بالإضافة إلى كيوبت متحكم آخر و بوابة Fredkin هي عبارة عن بوابة Controlled-Swap كما هو موضح في الصورة (3.5).

تعطي المعادلتان (3.13) و (3.14) وصفا مفصلا للبوابات التي ذكرناها سابقا حيث المعادلة (3.13) تمثل بوابة CNOT، المعادلة (3.14a) تمثل بوابة Toffoli و المعادلة (3.14b) تمثل بوابة Fredkin. على سبيل المثال المعادلة (3.13) تبين أنه إذا كان النظام في الحالتين $|00\rangle$ و $|01\rangle$ فإن المخرج البوابة تكون نسخة عن المداخل. في حين إذا كانت المداخل $|10\rangle$ و $|11\rangle$ فإن المخرج الثاني سوف يعكس كما هو موضح في ربع الأيمن السفلي للمصفوفة و هو بوابة NOT.

تقوم بوابة Toffoli بنفي الكيوبت الثالث (يسمى أيضا كيوبت الهدف) إلا إذا كان الكيوبتين الأولين (كيوبتات التحكم) في الحالة $|11\rangle$ بالتالي بوابة Toffoli تقوم بالتأثير على الكيوبت الهدف بالطريقة الموضحة في المعادلة 3.15.

لفهم كيفية تأثير بوابة Toffoli على ثلاثة كيوبتات متسلسلة يجب علينا تمثيلها على صيغة عمود شعاعي كما توضحه المعادلة (3.16)، ثم نقوم بعملية ضرب مصفوفة شعاع لتتوصل في الأخير على عمود شعاعي يمثل ثلاثة كيوبتات خارجة (المعادلة 3.17):

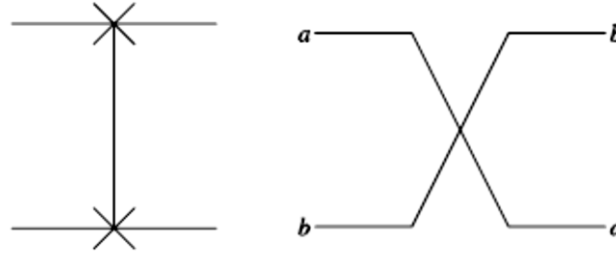
$$\begin{aligned}
 |000\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |000\rangle \\
 |001\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |001\rangle \\
 |010\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |010\rangle \\
 |011\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |011\rangle \\
 |100\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |100\rangle \\
 |101\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |101\rangle \\
 |110\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |111\rangle \\
 |111\rangle &\xrightarrow{Toffoli} |110\rangle
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$|000\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |001\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |010\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots |111\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$Toffoli|110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle \tag{3.17}$$

النوع الثاني من بوابات متعددة الكيوبت مهم جدا ويسمى بوابة SWAP (أنظر الصورة (3.6)). هذه البوابة كما يرمز إسمها فإنها تقوم بتبديل كيوبتين متجاورين فيما بينهما. مصفوفة البوابة SWAP مبينة في المعادلة (3.18):

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$



الصورة (3.6): تمثيلين للبوابة SWAP.

بوابة Fredkin أو ما يسمى ببوابة Controlled-SWAP (الصورة 3.5f) يكون تأثيرها على الكيوبتين الثاني والثالث حيث تقوم بتبديل قيمتها فيما بينهما في حالة اذا كان الكيوبت الأول في الحالة $|1\rangle$ كما توضحه المعادلة (3.19).

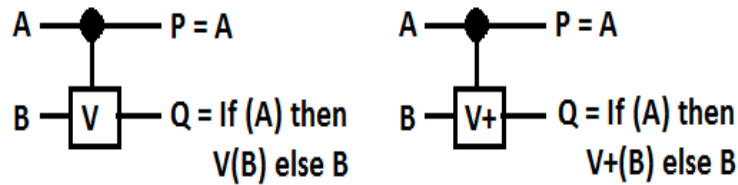
الآن تأكدنا أن البوابات CNOT، TOFFOLI و FREDKIN ليست بوابات عكوسة كلاسيكية فقط كما درسنا في الفصل الأول، بل هي أيضا بوابات كمية لأن التحويلات التي تقوم بها وحدوية و هي أيضا عبارة عن تبديلات في حالات القاعدة الحسابية. وتعتبر البوابات الكمية المتحكم فيها الأكثر تطورا من نظيرتها الكلاسيكية. على سبيل المثال، التعميم الكمي لبوابة CNOT هو البوابة Controlled-U (المعادلة 3.20).

$$\begin{aligned}
 |000\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |000\rangle \\
 |001\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |001\rangle \\
 |010\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |010\rangle \\
 |011\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |011\rangle \\
 |100\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |100\rangle \\
 |101\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |110\rangle \\
 |110\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |101\rangle \\
 |111\rangle &\xrightarrow{\text{Fredkin}} |111\rangle
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\text{Controlled}-U \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 & U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

حيث $U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$ هي عبارة عن بوابة كيوبت وحيد كفي.

على نفس طريقة البوابة CNOT وبالاعتماد على الطريقة العامة يمكن تركيب بوابتين مهمتين حيث سنعمد عليهما في أغلب التصميمات اللاحقة وهما البوابة Controlled-V والبوابة Controlled-V⁺ (المعادلة 21.3) الموضحتين في الصورة (3.7).



الصورة (3.7): البوابتين Controlled-V و Controlled-V⁺

$$\text{Controlled} - V \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\text{Controlled} - V^\dagger \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

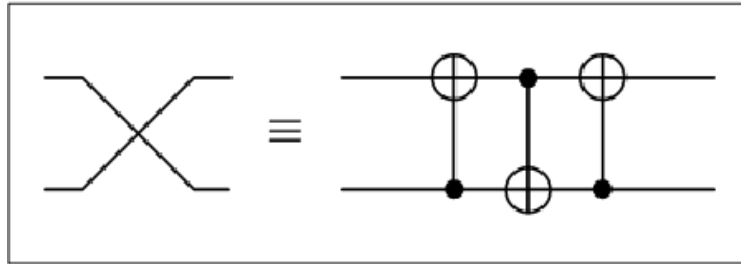
3.3.5 تحويل البوابات العكوسة الى بوابات كمية (نظام NCV)

عادة ما يتم تحقيق الدارات المنطقية عن طريق دمج عدة بوابات منطقية مع بعضها ليتم إستعمالها في إنتاج العمليات المنطقية، حيث توجد أنظمة عديدة لتحقيق الدارات العكوسة نذكر منها نظام NCT (الذي يتكون من NOT، CNOT و Toffoli) حيث يتم تكوين دارات عكوسة بالإعتماد على البوابات المذكورة سابقا. نظام NCTS يتكون من نفس مكونات الطريقة السابقة بالإضافة الى بوابة SWAP [4]، هناك نظام يعتمد على بوابة واحدة وهي Fredkin [25] وطريقة MCT تتكون من بوابة Toffoli متعددة كيوبتات التحكم.

مثال 3.1: بوابة SWAP و دائرة MTC المكافئة لها

حيث يتم التعبير عن بوابة SWAP بدارة تتكون من ثلاثة بوابات CNOT كما توضحه الصورة (3.8).

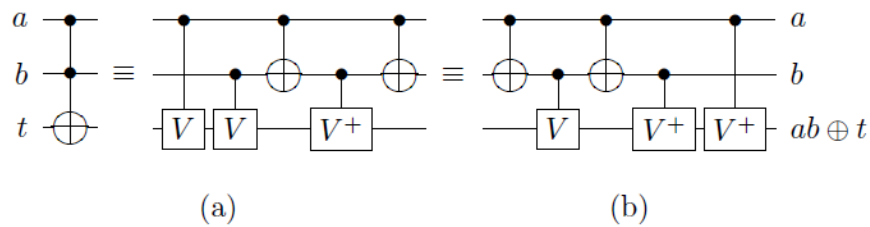
نتحدث الآن عن طرق تحقيق الدارات الكمية التي تتكون أيضا من مجموعة شاملة من البوابات الكمية قادرة على إنتاج كل أنواع العمليات المنطقية. هذه الطرق تستعمل فيها البوابات الكمية كتقنية لتحويل الدارات العكوسة إلى دارات كمية. من أهم هذه الطرق نظام NCV حيث يتكون هذا النظام من بوابات NOT، CNOT، Controlled-V و Controlled-V⁺.



الصورة (3.8): بوابة SWAP و دائرة MTC المكافئة لها

مثال 3.2: تحقيق بوابة Toffoli بنظام NCV

يتم التعبير في نظام NCV عن بوابة Toffoli بطريقتين (كما توضحه الصورة 3.9). في الطريقة (a) تستعمل فيها بوابتين Controlled-V و بوابة واحدة Controlled-V⁺ و بوابتين CNOT، أما في الطريقة (b) فيستعمل فيها بوابة واحدة Controlled-V و بوابتين Controlled-V⁺.



الصورة (3.9): تحقيق بوابة Toffoli بنظام NCV

3.3.6 معايير تحسين البوابات والدارات الكمية

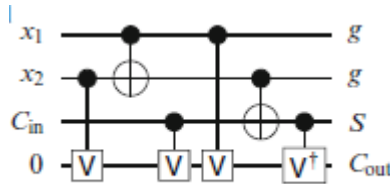
توجد معايير أو مقاييس كثيرة مذكورة في الأبحاث تهدف إلى تطوير الدارات الكمية وزيادة مردودها مثل الكلفة الكمية (Quantum Cost)، التأخير الكمي (Quantum Delay)، عدد البوابات و النفايات الكمية (Quantum garbage) [89،90].

الكلفة المعروفة حاليا في التطبيق الفيزيائي للبوابات الكمية تتعلق أساسا بهدفها التقني، حيث تعتبر البوابات الكمية ذات كيوت وحيد و ذات كيوتين كوحدة للكلفة الكمية في التصميمات الآلية للدارات العكوسة و الكمية، و يشار إليها بالبوابات الكمية الأولية. كل واحدة من هذه البوابات ترتبط مع واحدة أو أكثر من العمليات الفيزيائية لتحقيق هدفها التقني الكمي. هذا التقريب مناسب ليعطي قياسا جيدا لعدد كبير من البوابات، ويمكن استعماله في التصميمات التقنية و المناهج التحسينية للدارات الكمية.

تعريف 3.1: الكلفة الكمية (QC) لدارة كمية في نظام NCV هي مجموع عدد البوابات التي تكون الدارة الكمية، بعبارة أخرى هي العدد اللازم من البوابات الأولية لتحليل دارة كمية ما.

مثال 3.3: دارة الجامع الكامل بنظام NCV (الصورة 3.10)

نلاحظ أن دارة الجامع الكامل تتكون من ثلاثة بوابات Controlled-V و بوابة واحدة V^+ و بوابتين CNOT. بالتالي يكون إجمالي الكلفة الكمية هو $QC=6$.

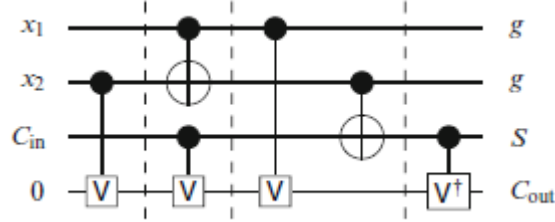


الصورة (3.10): التحقيق الكمي لدارة الجامع الكامل بنظام NCV.

تعريف 3.2: التأخير الكمي (QD) لدارة كمية هو عدد المجموعات الثانوية لبوابات كمية التي يمكن تطبيقها بالتوازي.

مثال 3.4: QD لدارة الجامع الكامل (الصورة 3.11)

نلاحظ أن البوابتين الثانية والثالثة يمكن تطبيقها في وقت واحد لأنها لا يتشاركان في أي خط من الخطوط (الأسلاك). نفس الشيء بالنسبة بالبوابتين الرابعة والخامسة، و بالتالي $QD=4$. كل واحد من الأعمدة الأربعة يسمى العمق المنطقي (logic depth).



الصورة (3.11): التأخير الكمي (QD) لدارة الجامع الكامل.

تعريف 3.3: النفايات الكمية (QG) لدارة كمية هي عدد الكيوبتات الخارجة من الدارة التي نحتاجها لكي تكون الدارة عكوسة، لكن لا تقدم أي عمليات مرغوب فيها.

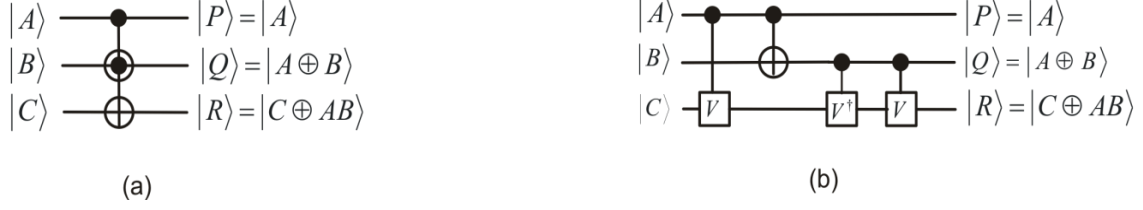
مثال 3.5: QG لدارة الجامع الكامل (الصورة 3.11) هو عدد الكيوبتات الخارجة (g) التي تقوم باي عملية مرغوب فيها وهي 2 كيوبت و بالتالي $QG=2$.

3.3.7 أمثلة عن البوابات الكمية و تحقيقها الكمي بنظام NCV

يوجد العديد من البوابات العكوسة التي تم تحقيقها بنظام NCV، أي تم تركيب هذه البوابات بالإعتماد على البوابات NOT، CNOT، Controlled-V، و Controlled-V⁺. في هذا الجزء من البحث سوف نتطرق الى أهم هذه البوابات الكمية حيث نحسب لكل بوابة معايير التحسين الخاصة بها (QC، QD).

3.3.7.1 بوابة Peres الكمية

تقوم بوابة Peres [26] (الصورة 3.12) بتحويل الكيوبتات الثلاثة داخلة $|A, B, C\rangle$ إلى ثلاثة كيوبتات خارجة $|P = A, Q = A \oplus B, R = C \oplus A.B\rangle$ ، حيث تتطلب هذه البوابة



الصورة (3.12): (a) بوابة Peres (b) تحقيقها الكمي.

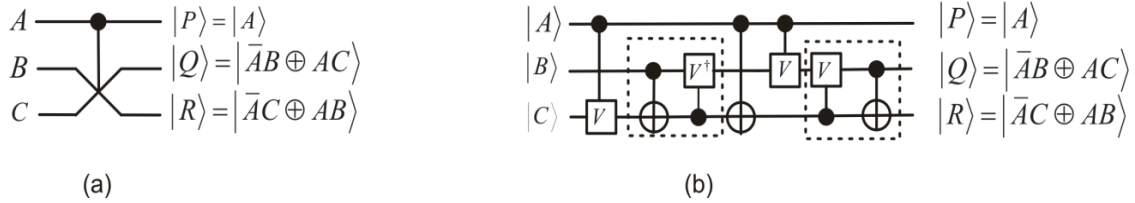
في بنائها بوابتين Controlled-V و بوابة واحدة Controlled-V^+ و بوابة CNOT، بالتالي $QC=4$. الصورة (3.12b) توضح أن بوابة Peres لديها أربعة أعماق منطقية، بالتالي $QD=4$.

3.3.7.2 بوابة Fredkin الكمية

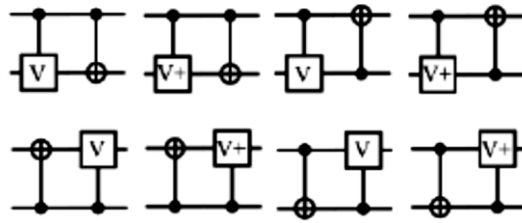
تقوم بوابة Fredkin [25] (الصورة 13.3) بتحويل الكيوبتات الثلاثة داخلة $|A, B, C\rangle$ الى ثلاثة كيوبتات خارجة $|P = A, Q = \bar{A}B \oplus AC, R = \bar{A}C \oplus AB\rangle$.

نلاحظ في الصورة (3.14b) مربع بخط متقطع حيث يحتوي على بوابتين CNOT و $C-V$ أو $C-V^+$ و يسمى ببوابة الكيوبت المدمج (Integrated qubit) حيث يكون QC الخاص به يساوي 1 و $QD=1$. جميع الحالات الممكنة لبوابة الكيوبت المدمج موضحة في الصورة (3.15).

تتطلب بوابة Fredkin في بنائها بوابتين $C-V$ ، بوابتين للكيوبت المدمج و بوابة واحدة CNOT. بالتالي $QC=5$. الصورة (3.13b) توضح أن البوابة تملك خمسة أعماق منطقية، اذن $QD=5$.



الصورة (3.13): (a) بوابة Fredkin (b) تجسيدها الكمي.

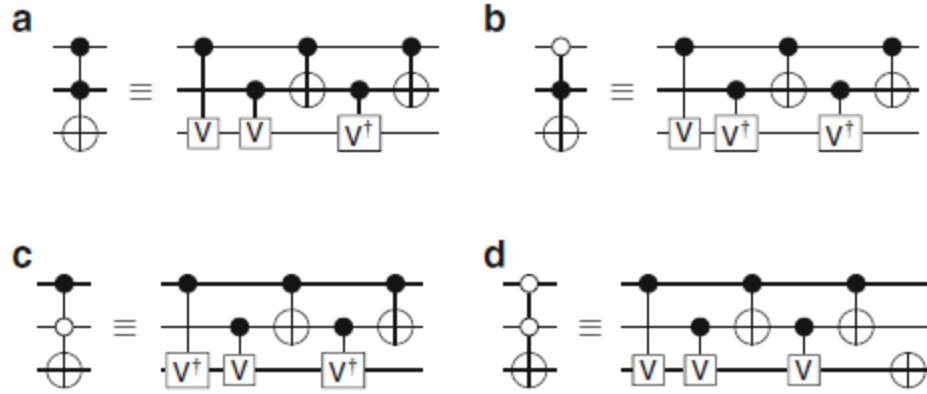


الصورة (3.14): جميع الحالات الممكنة لبوابة الكيوبت المدمج.

3.3.7.3 بوابة Toffoli الكمية

بوابة Toffoli [24] هي عبارة عن بوابة عكوسة وكمية تقوم بتحويل الكيوبتات الثلاثة $|A, B, C\rangle$ الى كيوبتات خارجة $|P = A, Q = B, R = C \oplus A.B\rangle$ ، الصورة (3.15) تمثل بوابة Toffoli في نظام NCV حيث تملك $QC = 5$. توضح الصورة (3.15b) أن بوابة Toffoli لديها خمسة أعماق منطقية في كل حالتها الخاصة بالتالي $QD = 4$.

الصورة 3.15، تمثل أنواع متعددة لبوابة Toffoli حيث (a) هي بوابة Toffoli المعروفة تقوم بنفي الكيوبت الأخير إلا إذا كان الكيوبت الأول والثاني في الحالة $|1\rangle$ ، (b) هي بوابة Toffoli تقوم بنفي الكيوبت الأخير إلا إذا كان الكيوبت الأول في الحالة $|0\rangle$ والثاني في الحالة $|1\rangle$ ، (c) هي بوابة Toffoli تقوم بنفي الكيوبت الأخير إذا كان الكيوبت الأول في الحالة $|1\rangle$ والثاني في الحالة $|0\rangle$ و (d) هي بوابة Toffoli تقوم بنفي الكيوبت الأخير إلا إذا كان الكيوبت الأول في الحالة $|0\rangle$ والثاني في الحالة $|0\rangle$.



الصورة (3.15): أنواع بوابة Toffoli و تجسيدها الكمية.

لنأخذ الحالة العامة للبوابة Toffoli (موضحة في الصورة 3.15a) ونقوم بتطبيق نظام NCV عليها لتتأكد من صحة نتائج المعادلة (3.15) كما توضحه المعادلة (3.22) أين استعملنا العلاقتين $V.V = NOT$ و $V^\dagger.V = I$.

$$\begin{aligned}
 Toffoli |000\rangle &\Rightarrow |000\rangle \\
 Toffoli |001\rangle &\Rightarrow |001\rangle \\
 Toffoli |010\rangle &\Rightarrow |01\rangle \otimes (V^\dagger.V |0\rangle) = |010\rangle \\
 Toffoli |011\rangle &\Rightarrow |01\rangle \otimes (V^\dagger.V |1\rangle) = |011\rangle \\
 Toffoli |100\rangle &\Rightarrow |10\rangle \otimes (V^\dagger.V |0\rangle) = |100\rangle \\
 Toffoli |101\rangle &\Rightarrow |10\rangle \otimes (V^\dagger.V |1\rangle) = |101\rangle \\
 Toffoli |110\rangle &\Rightarrow |11\rangle \otimes (V.V |0\rangle) = |111\rangle \\
 Toffoli |111\rangle &\Rightarrow |11\rangle \otimes (V.V |1\rangle) = |110\rangle
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

الفصل الرابع

تصميمات لدارة وحدة الحساب والمنطق

Designs of Arithmetic and Logic Unit

4.1 مقدمة

دارة وحدة الحساب والمنطق (ALU) إختصار لـ Arithmetic and Logic Unit هي اللبنة الأساسية في بناء وحدة المعالجة المركزية CPU التي تعتمد عليها كل الحواسيب الحالية، حيث تعتبر كنواة لإجراء جميع العمليات الحسابية والمنطقية الممكنة مثل عملية الجمع، الطرح و العمليات منطقية ك AND، NOT، OR.

حازت دارة وحدة الحساب والمنطق العكوسة الكثير من إهتمام الباحثين في الآونة الأخيرة بسبب استهلاكها للطاقة الذي يعتبر الأقل مقارنة مع الدارات الكلاسيكية غير العكوسة.

تعتمد دارة ALU في عملها على دارة الجامع التي تقوم بعملية الجمع المتحكم فيه بواسطة وحدة التحكم، هذه الوحدة هي التي تقوم بالتحكم في جميع العمليات الحسابية والمنطقية حيث تعطى لكل عملية شفرة معينة تقوم بالتأثير على الجامع لإنتاج عمليات أخرى بدل عملية الجمع، على سبيل المثال عملية الطرح: تقوم وحدة التحكم بنفي أحد المدخلين المراد جمعها. فتكون النتيجة عبارة عن طرح وليس جمع. وهكذا يتم إنتاج جميع العمليات الاخرى المنطقية منها والحسابية.

تختلف دارات ALU الكمية عن بعضها البعض باختلاف دارة الجامع التي تعتمد عليه، ومن حيث العمليات المنطقية والحسابية التي تقوم بها. في هذا البحث سوف نذكر دارات وحدة الحساب والمنطق المشهورة و الأكثر فعالية و بطبيعة الحال سوف نتطرق إلى دارة الجامع التي تعتمد عليها و في الأخير سوف ندرس فعالية هذه الدارة بالمقاييس التي ذكرناها في الفصل السابق بمعايير التحسين. بالتالي سندرس كل دارة على حدى و نحسب المعايير (QC، QD،

(QG) الخاصة بكل دارة و نضيف عامل آخر مؤثر في جودة الدارة وهو عدد عمليات كل دارة .ALU

4.2 دارتي الجامع و الطارح الكميّتين

تختلف هندسة دارة الجامع الكمية عن نظيرتها الكلاسيكية من حيث المادة الأولية ، فالأولى تعتمد في بنيتها على البوابات الكمية و الثانية على الكلاسيكية، بينما لا يختلفان في العملية المراد حسابها وهي الجمع بين مدخلين A و B لإنتاج مخرجين وهما المجموع S و الإحتفاظ C الذي نحتاجه لحساب مجموع الكيوبتين التاليين.

نفرض أنه لدينا الحالتين $|A\rangle$ و $|B\rangle$ يمثلان العددين الذين نود جمعها، تتكون كل حالة منهم من n كيوبت حيث $|A\rangle = |a_1 a_2 a_3 \dots a_n\rangle$ و $|B\rangle = |b_1 b_2 b_3 \dots b_n\rangle$. ليكن $|a_i\rangle$ هو الكيوبت رقم i للعدد $|A\rangle$ ، $|b_i\rangle$ هو الكيوبت رقم i للعدد $|B\rangle$ ، $|C_i\rangle$ هو الكيوبت رقم i للاحتفاظ و $|S_i\rangle$ هو الكيوبت رقم i للمجموع وفق المعادلتين (4.1) و (4.2):

$$S_i = a_i \oplus b_i \oplus C_{i-1} \quad (4.1)$$

$$C_i = a_i b_i + a_i C_{i-1} + b_i C_{i-1} \quad (4.2)$$

المعادلة (4.2) تمثل معادلة الإحتفاظ في الجامع الكامل حيث يمكن كتابة C_i بالترميز \oplus الذي يمثل عملية XOR بالطريقة التالية:

$$\begin{aligned} C_i &= a_i b_i \oplus a_i C_{i-1} \oplus b_i C_{i-1} \\ &= a_i (b_i \oplus C_{i-1}) \oplus b_i C_{i-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

عملية الطرح هي عملية مشابهة لعملية الجمع بدل حساب المجموع و الإحتفاظ نقوم بحساب الفرق D و الإستدانة B. ليكن $|B_i\rangle$ هو الكيوبت رقم i للاستدانة و $|D_i\rangle$ هو الكيوبت رقم

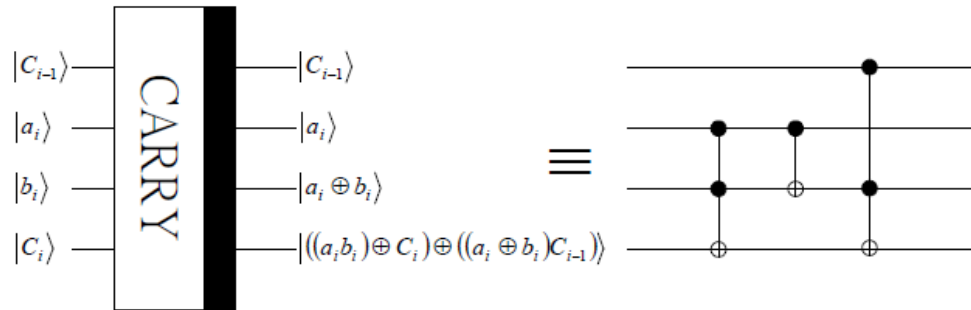
i للفرق $A - B$. العلاقة بين الكيوبتات الداخلة والخارجة موضحة في المعادلتين (4.4) و (4.5):

$$D_i = a_i \oplus b_i \oplus B_{i-1} \quad (4.4)$$

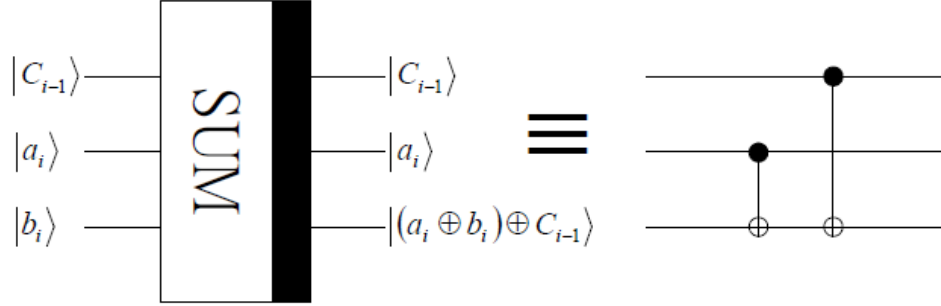
$$B_i = \bar{a}_i(b_i \oplus B_{i-1}) \oplus b_i B_{i-1} \quad (4.5)$$

4.2.1 تصميم الجامع الكمي البسيط

يعتمد هذا الجامع [92] على دارتين كميتين أساسيتين و هما الدارتين SUM و CARRY تقومان بحساب المجموع لكيوبتين و الإحتفاظ الناتج عن جمعها (الدارتين موضحتين في الصورتين (4.1) و (4.2) على الترتيب). تتكون الدارة CARRY من بوابتي Toffoli و بوابة واحدة CNOT حيث تقوم تحويل المداخل ($|C_{i-1}\rangle, |a_i\rangle, |b_i\rangle$ و $|C_i\rangle$) إلى المخارج ($|C_{i-1}\rangle, |a_i\rangle, |S_i\rangle$ و $|C_i\rangle$) حسب المعادلة الثانية للجامع الكامل (المعادلة 4.2)، أما الدارة SUM فهي تتكون من بوابتي CNOT حيث تقوم هذه الدارة تحويل المداخل ($|C_{i-1}\rangle, |a_i\rangle, |b_i\rangle$) إلى المخارج ($|C_{i-1}\rangle, |a_i\rangle, |b_i\rangle$) حسب المعادلة الأولى (المعادلة 1.4).



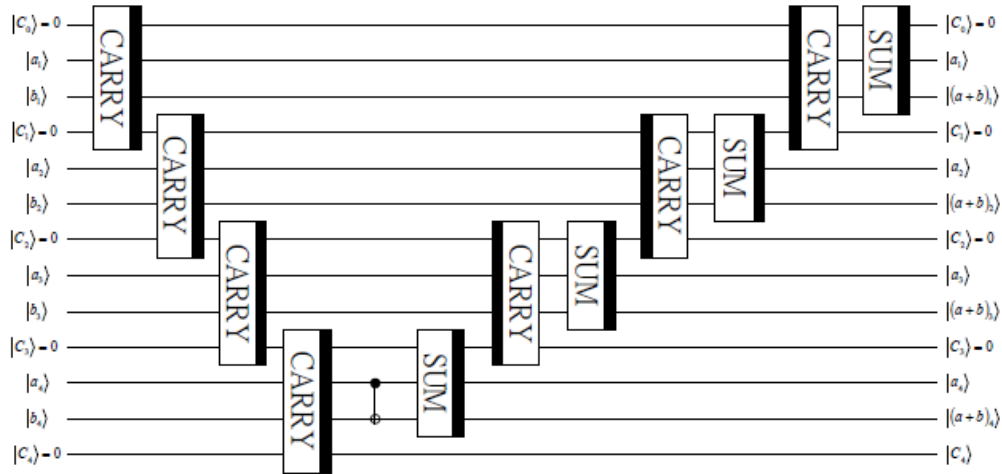
الصورة (4.1): البوابة CARRY و تحقيقها الكمي.



الصورة (4.2): البوابة SUM و تحقيقها الكمي.

يتم تصميم الجامع الكمي البسيط عن طريق توصيل الدارات السابقة بطريقة متتالية كما توضحه الصورة (4.3) التي تمثل الجامع الكمي التقليدي لأربعة كيوبتات حيث يتم على مستوى كل كيوبت حساب المجموع SUM و الإحتفاظ CARRY. في كل مرة يتم حساب الإحتفاظ تقوم الدارة بتمريره إلى الكيوبت الموالي.

الصورة (4.3)، توضح أن كلفة بناء عالية حيث أستعمل في بناء دارة الجامع الكمي التقليدي في مستوى كل كيوبت 4 بوابات Toffoli و 3 بوابات CNOT بالتالي تكون الكلفة لدارة ذات كيوبت وحيد $QC=23$ ، $QD=23$ و $QG=2$. ومنه الكلفة الكلية لدارة الجامع ذات



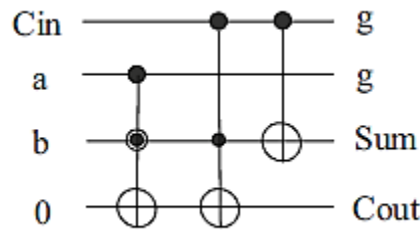
الصورة (4.3): بوابة الجامع الكمي التقليدي ذات اربعة كيوبتات.

أربعة كيوبتات هي $QC=88$ وبما أنه لا يوجد أي توازي في إجراء العمليات فإن $QD=88$ و $QG=7$.

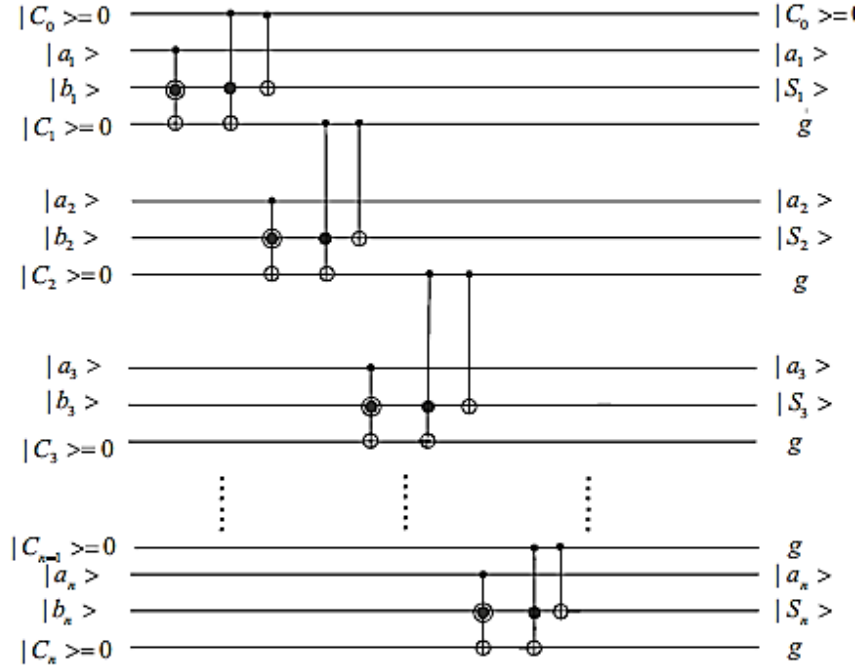
4.2.2 تصميم محسن لدارة الجامع الكمي البسيط

كما لاحظنا سابقا أن دارة الجامع الكمي البسيط كلفتها مرتفعة بعض الشيء. لذلك أُقترح نموذج آخر محسن [23] يتم فيه تحسين الكلفة من حيث QC ، QD و حتى عدد البوابات المستعملة. من أجل هذا الغرض أُقترحت دارة الجامع الكامل لكيوبت وحيد تقوم بحساب المجموع Sum و الاحتفاظ C_{out} ، حيث تتكون هذه الدارة من بوابة واحدة Toffoli و بوابة CNOT و بوابة Peres كما توضحه الصورة 4.4. النموذج العام المحسن لدارة الجامع الكمي البسيط موضح في الصورة 4.5.

توضح الصورة (4.5) أن النموذج العام المحسن للجامع الكمي البسيط يتكون من n بوابة Toffoli، n بوابة CNOT و n بوابة Peres بالتالي تكون الكلفة $QC=10n$ ، $QD=10n$ و $QG=n+1$ ومنه نستطيع أن نستنج قيم التكلفة لجامع ذي 4 كيوبتات وهي $QC=40$ ، $QD=40$ و $QG=5$. عند مقارنة هذه النتائج مع النتائج السابقة نلاحظ بوضوح قيمة التحسين.



الصورة (4.4): دارة الجامع الكمي المحسنة.

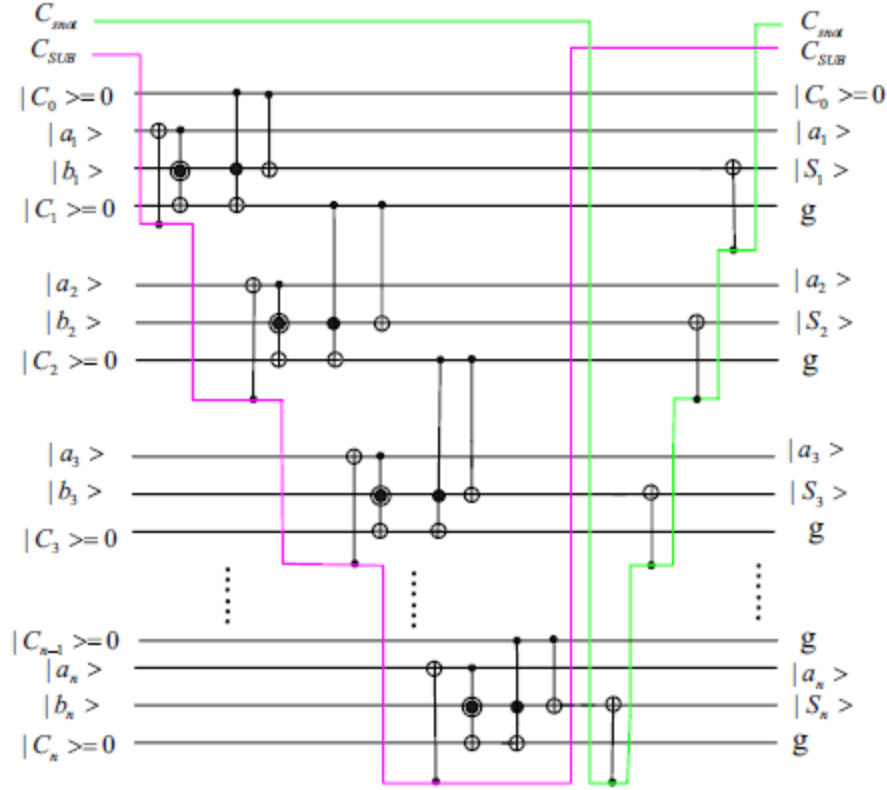


الصورة (4.5): النموذج العام المحسن لدارة الجامع الكمي البسيط.
 كما ذكرنا سابقا أن عملية الطرح يمكن إستنتاجها من عملية الجمع، في هذا النموذج سوف نقوم بتغيير المعادلتين (4.4) و (4.5) الى المعادلتين (4.6) و (4.7) كما يلي:

$$\begin{aligned} B_i &= \bar{a}_i(b_i \oplus B_{i-1}) \oplus b_i B_{i-1} \\ &= \bar{a}_i b_i \oplus \bar{a}_i B_{i-1} \oplus b_i B_{i-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{a}_i b_i \oplus (\bar{a}_i \oplus b_i) B_{i-1} \\ D_i &= \overline{\bar{a}_i \oplus b_i \oplus B_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

بالاعتماد على المعادلتين (4.6) و (4.7) يمكن إستنتاج عملية الطرح من عملية الجمع بنفي $|\bar{B}\rangle$ ثم نقوم بنفي المجموع. لتحقيق هذا النفي نضيف إلى الدارة بوابتين CNOT في مستوى كل كيوبت، واحدة تقوم بنفي أحد الكيوبتين و الأخرى تقوم بنفي المجموع. هاتان البوابتان مزودتان بسلكي التحكم C_{Snot} و C_{SUB} .



الصورة (4.6): عملية الطرح بإضافة اسلاك التحكم للجامع الكمي

تحدث عملية النفي إذا كان كل من السلكين في الحالة $|1\rangle$. دارة الطرح موضحة في الصورة (4.6).

4.2.3 الجامع الكمي (نموذج CDKM)

نموذج CDKM [93] للجامع الكمي يعتبر من أحسن التصميمات من حيث عدد الكيوبتات المضافة (ancilla) و أيضا من حيث QG. كما لاحظنا في النماذج السابقين أن الكيوبتات المضافة تتعلق بعدد الكيوبتات المراد جمعها وتحسب بالعلاقة $n+2$ ، بينما في نموذج CDKM (الصورة 10.4) هي ثابتة وتساوي 2 و $QG=1$.

أولا نتطرق للجامع الكامل (الجامع لكيوبت وحيد) كما توضحه الصورة (4.7)، حيث يتكون من بوابتين أساسيتين هما: البوابة MAJ (الصورة (4.8)) والبوابة UMA (الصورة (4.9))،

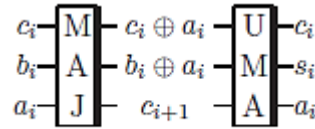
تتكون كلتا البوابتين من بوابة Toffoli و بوابتين CNOT و بالتالي تكون كلفة الجامع الكامل $(|a_i\rangle, |b_i\rangle, |c_i\rangle)$ تقوم البوابة UMA بتحويل المداخل الى المخارج $(|c_{i+1}\rangle, |b_i \oplus a_i\rangle, |c_i \oplus a_i\rangle)$ و تقوم البوابة الثانية بتحويل المداخل $(|a_i\rangle, |s_i\rangle, |c_i\rangle)$ إلى المخارج $(|c_{i+1}\rangle, |b_i \oplus a_i\rangle, |c_i \oplus a_i\rangle)$.

كما ذكرنا سابقا أن دارة الجامع الكمي لعدد من كيوبتات n تتكون من n بوابة للجامع الكامل بحيث تكون متواصلة و متتالية لتمرير الإحتفاظ من مستوى إلى آخر كما توضحه الصورة (4.10).

نلاحظ أيضا أن شكل دارة الجامع الكمي تشبه شكل الموجة لذلك تسمى في بعض الأبحاث بجامع الموجة الكمي.

كلفة الجامع ذي 6 كيوبتات هي في الأصل تساوي كلفة بوابة الجامع الكامل مضروبة في 6 زائد بوابة CNOT (1+) بالتالي نستطيع إستنتاج كلفة الجامع الكمي (نموذج CDKM) لأربعة كيوبتات: $QC=57$ ، $QD=57$ و $QG=1$.

4.2.4 الجامع الكمي (نموذج Van Rentergem)

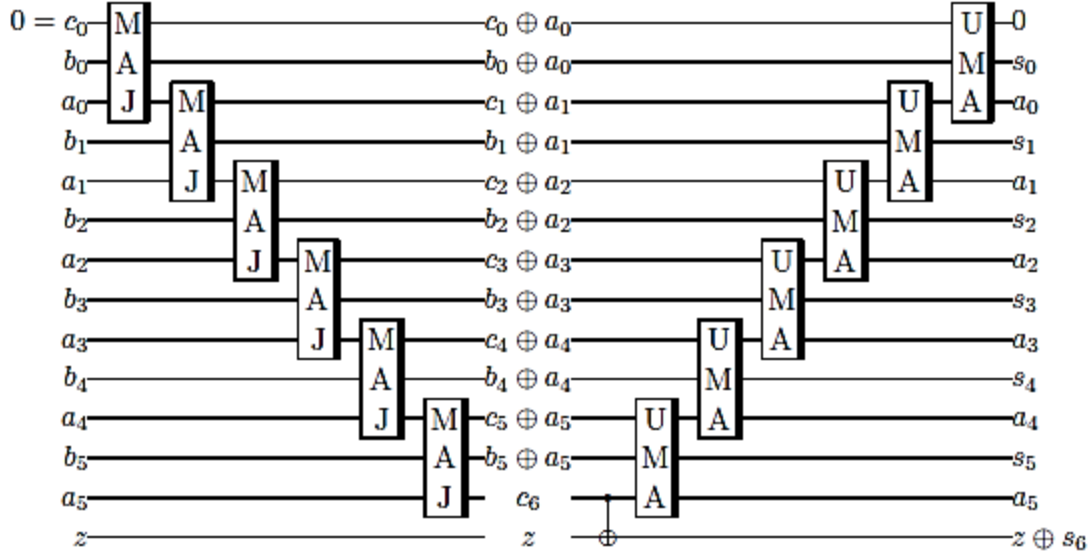


الصورة (4.7): دارة الجامع الكامل.



الصورة (4.9): البوابة الكمية MAJ.

الصورة (4.8): البوابة الكمية UMA.



الصورة (4.10): دارة الجامع (نموذج CDKM).

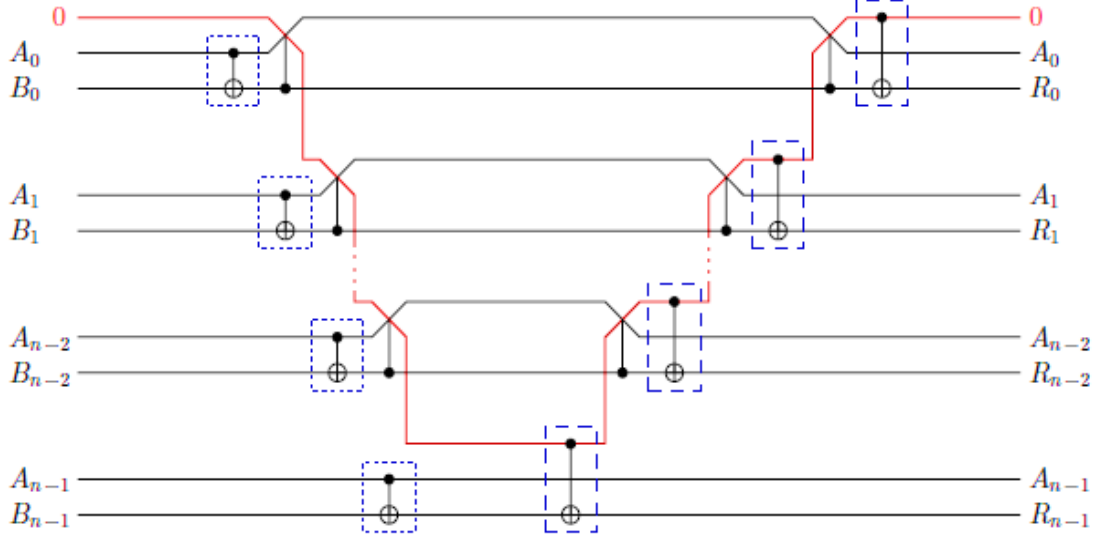
يعتبر هذا النموذج [15] من أحسن التصميمات من حيث عدد البوابات المستعملة (الصورة 4.11)، يتكون الجامع الكامل لدارة هذا النموذج من بوابتين Fredkin و بوابتين CNOT بالتالي تكون الكلفة لدارة الجامع الكامل كما يلي: $QD=12$ ، $QC=12$.

توضح الصورة 4.11 الجامع الكمي ل n كيوبت حيث يتم حذف بوابتي Fredkin في الكيوبت الأخير من الدارة لعدم الحاجة إليها. بذلك تكون الكلفة العامة للجامع كما يلي: $QC=12n-10$ و $QD=10n-4$ و $QG=1$ ، و بالتالي يمكن إستنتاج كلفة الجامع الكمي لأربعة كيوبتات: $QC=38$ ، $QD=36$ و $QG=1$ و تعتبر من أحسن النتائج مقارنة مع النتائج السابقة.

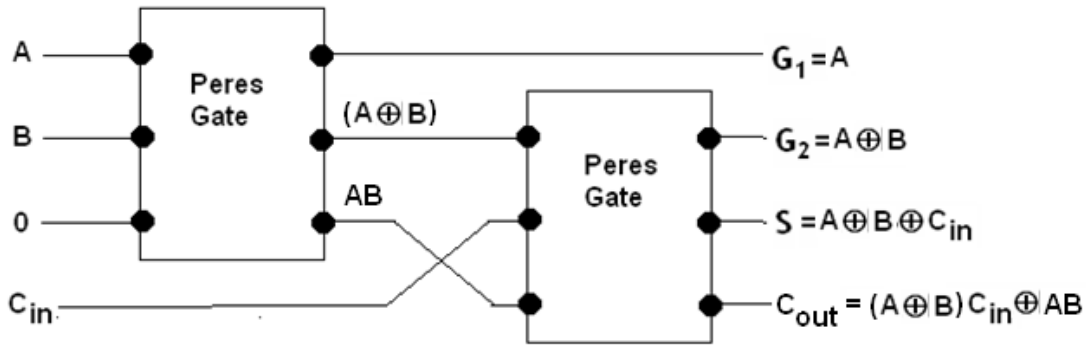
نلاحظ أن السلك الأول ممثل باللون الأحمر لأنه سيستعمل لاحقاً في دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية كسلك للتحكم وبذلك تصبح الدارة بدون نفاية كمية $QG=0$.

4.2.5 الجامع الكمي (نموذج DPG و HGN)

نموذج DPG [94] هو عبارة عن تصميم لدارة الجامع الكامل بالاعتماد على بوابتي Peres لذلك يسمى نموذج بوابة Peres المضاعفة (DPG) كما هو موضح في الصورة (4.12).



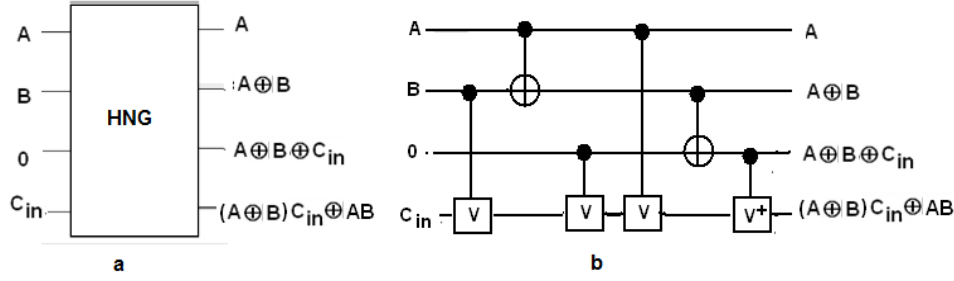
الصورة (4.11): دائرة الجامع الكمي (نموذج Vanrentergem).



الصورة (4.12): دائرة الجامع الكمي باستخدام بوابتي Peres.

حيث تقوم بوابة Peres الأولى بتحويل المداخل $(|A\rangle, |B\rangle, |0\rangle)$ الى المخرج $(|A\rangle, |A \oplus B\rangle, |AB\rangle)$ ، ثم تقوم بوابة Peres الثانية بتحويل $(|A \oplus B\rangle, |C_{in}\rangle, |AB\rangle)$ إلى المخرج $(|A \oplus B\rangle, |A \oplus B \oplus C_{in}\rangle, |AB \oplus (A \oplus B)C_{in}\rangle)$. بما أن دائرة الجامع تتكون من بوابتي Peres فإن كلفتها تكون: $QC=8$ ، $QD=8$.

لتحسين الدارة أكثر تم دمج بوابتي Peres في بوابة واحدة تسمى HNG [103] (الصورة (4.13)) حيث يوضح التحقيق الكمي للبوابة HNG أن لديها $QC=6$ و $QD=4$.



الصورة (4.13): (a) بوابة HNG (b) تجسيدها الكمي.

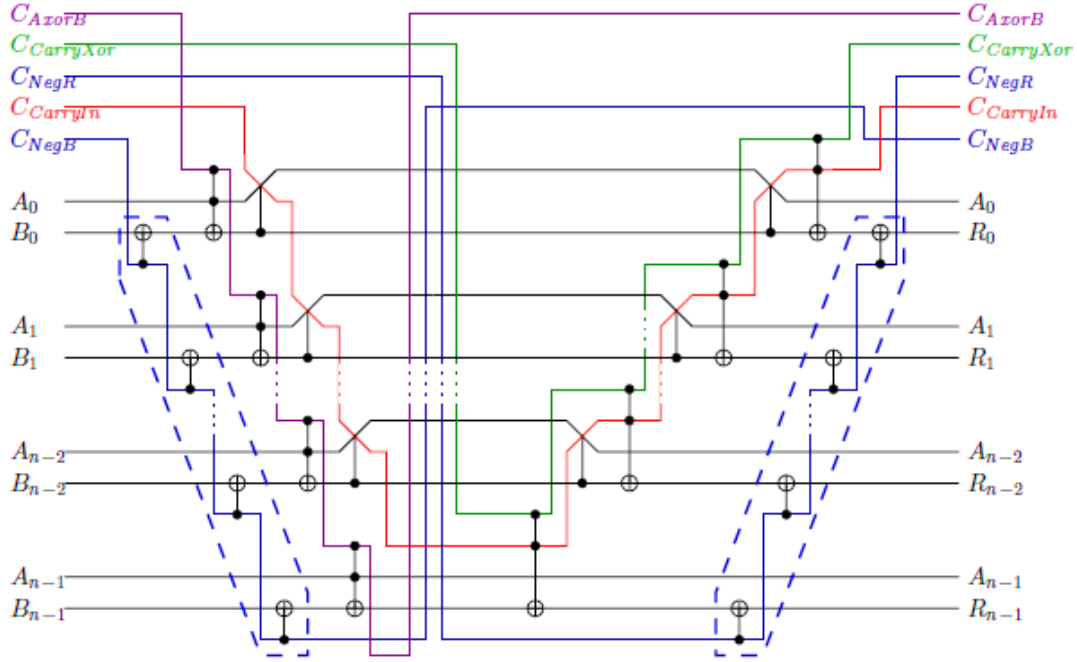
4.3 دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية

تعتمد دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية في عملها على الجامع الكمي، لذلك تكون دارة ALU أكثر فعالية و أقل إستهلاك اذا كان الجامع المبينة عليه فعال ايضا. بعبارة أخرى إختيار الجامع الكمي هو أول نقطة يهتم بها المهندس الذي يريد بناء دارة ALU فعالة.

4.3.1 وحدة الحساب و المنطق (نموذج TGA)

أُعمد في بناء نموذج TGA [15] لدارة وحدة الحساب و المنطق الكمية على دارة الجامع الكمي (نموذج Vanrentergem) لأنه يعتبر من أحسن النماذج من حيث عدد البوابات المستعملة و عدد النفايات الكمية لذلك تعتبر دارة هذا الجامع الأكثر أناقة. لتحويل دارة الجامع إلى دارة ALU يجب إضافة وحدة التحكم وهي عبارة عن أسلاك تضاف لدارة الجامع و تستعمل للتحكم في العملية المراد الحصول عليها و يمكن أيضا إضافة أو تبديل بعض بوابات لتسهيل عملية التحكم. توضح الصورة (4.14) دارة وحدة الحساب والمنطق (نموذج TGA) حيث تمثل الخطوط الملونة وحدة التحكم و الخطوط السوداء دارة الجامع (الصورة (4.11)). يمكن إستنتاج المهمة التي تقوم بها خطوط التحكم من أسم الخط الموضح في الصورة (4.14) كما يلي:

C_{NegB} هو سلك متحكم في بوابة CNOT المضافة الى كل مستوى حيث يقوم بنفي الكيوبت $|B\rangle$ إذا كانت حالة المدخل لهذا السلك في الوضع $|1\rangle$. نحتاج هذا السلك لتحويل



الصورة (4.14): دارة وحدة الحساب والمنطق (نموذج TGA).

عملية الجمع إلى طرح عند نفي الكيوبت $|B\rangle$.

C_{NegR} هو سلك متحكم في بوابة CNOT المضافة إلى كل مستوى حيث يقوم بنفي المجموع R إذا كانت حالة المدخل لهذا السلك في الوضع $|1\rangle$. نحتاج هذا السلك لتحويل عملية الجمع إلى طرح عند نفي المجموع.

$C_{CarryXor}$ هو سلك متحكم في بوابة Toffoli التي كانت بوابة CNOT في الجامع، إذا كان مدخل هذا السلك في الحالة $|1\rangle$ فإنه يسمح بحدوث العملية XOR بين C و $A \oplus B$ ، إذا كان في الحالة $|0\rangle$ فإنه لا يسمح بحدوث عملية XOR بالتالي تكون النتيجة $A \oplus B$.

C_{AXORB} هو سلك متحكم في بوابة Toffoli التي كانت بوابة CNOT في الجامع أيضاً، إذا كان مدخل هذا السلك في الحالة $|1\rangle$ فإنه يسمح بحدوث العملية $A \oplus B$ ، إذا كان في الحالة $|0\rangle$ فإنه لا يسمح بحدوث عملية XOR بالتالي تكون النتيجة B .

$C_{CarryIn}$ هو سلك متحكم في بوابة Fredkin، نحتاج هذا السلك لنفي عملية الطرح اذا كان في الحالة $|1\rangle$.

إذا أردنا على سبيل المثال إنتاج عملية الطرح يجب إنتاج عملية الجمع بوضع $C_{AXORB} = 1$ لكي يسمح السلك المتحكم بحدوث $A \oplus B$ ، ثم نضع $C_{CarryXor} = 1$ لكي تحدث عملية XOR بين C و $A \oplus B$. حتى الآن الناتج هو عملية الجمع و لتحويلها إلى عملية الطرح نضع $C_{NegR} = 1$ و $C_{NegB} = 1$.

بالإضافة إلى عملية الجمع والطرح تنتج هذه الدارة عمليات أخرى مثل نفي الطرح، عملية XOR، لا عملية و 5 عمليات أخرى. جميع العمليات التي تنتجها هذه الدارة ملخصة في الجدول 4.1.

هذا النموذج لدارة وحدة الحساب والمنطق الكمية قادر على إنتاج 10 عمليات منطقية و حسابية وتحسب كلفته العامة حسب عدد الكيوبتات n كما يلي: بما أنه استعمل في هذا النموذج $2n$ بوابة CNOT و $2n$ بوابة Toffoli و $2n-2$ بوابة Fredkin بالتالي تكون

C_{NegB}	$C_{CarryIn}$	C_{AxorB}	$C_{CarryXor}$	C_{NegR}	العمليات المنتجة من طرف ALU
0	0	1	1	0	$B + A$ الجمع
1	0	1	1	1	$B - A$ الطرح
1	1	1	1	0	$A - B$ نفي الطرح
0	0	1	0	0	عملية XOR $A \oplus B$
0	0	0	0	0	B لا عملية
0	1	1	1	0	$B + A + 1$
1	1	1	1	1	$B - A - 1$
1	0	1	1	0	$A - B - 1$
0	0	1	0	1	$\overline{A \oplus B}$
0	0	0	0	1	\overline{B}

الجدول (4.1): العمليات التي تنتجها دارة ALU نموذج TGA.

الكلفة تساوي:

$$QC = 2n * 5 + 2n * 1 + (2n - 2) * 5 = 22n - 10$$

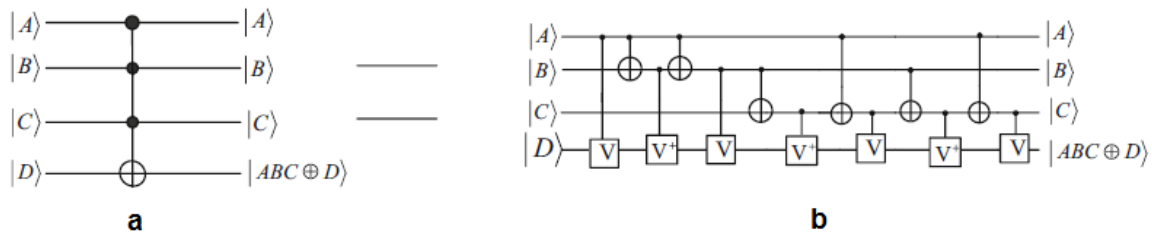
و التأخير الكمي هو:

$$QD = 1 + 5 + (n - 1) * 5 + 10n - 5 + 1 = 15n - 3$$

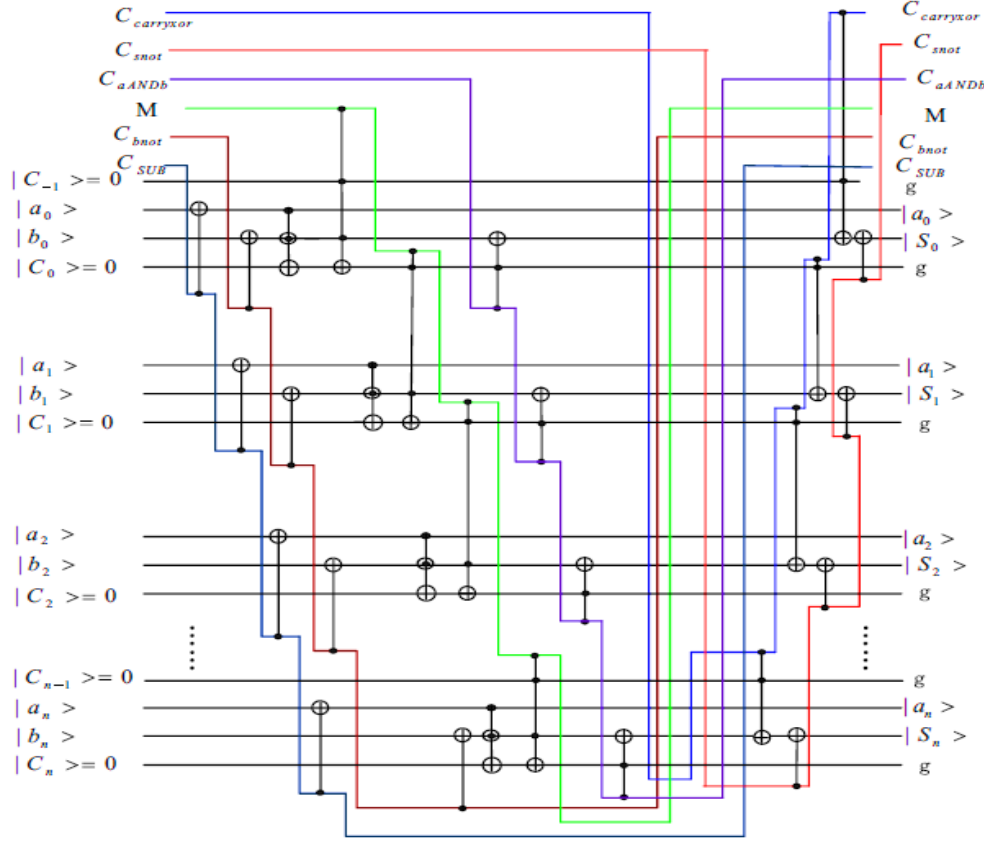
و النفاية الكمية منعدمة $QG=0$. نستطيع الآن حساب كلفة دارة ALU لأربعة كيوبتات وهي:
 $QC=78$ ، $QD=57$ و $QG=0$.

4.3.2 وحدة الحساب والمنطق الكمية (نموذج ZLZH)

هذا النموذج لدارة وحدة الحساب والمنطق الكمية [23] يعتمد على دارة الجامع المذكورة سابقا و مسماة بدارة الجامع البسيط المحسنة (الصورة 4.5) وقد شرحنا كيفية تحويل هذه التصميم من دارة تقوم بعملية الجمع إلى دارة تقوم بعملية الطرح و ذلك بإضافة سلك للتحكم المسمى C_{SUB} كما توضحه الصورة (4.6). بنفس طريقة النموذج السابق صمم نموذج ZLZH (الصورة (4.16)) حيث أُضيفت للجامع أسلاك ملونة التي تسمى بوحدة التحكم و أُضيفت بعض بوابات CNOT و أُستبدلت بعض بوابات CNOT ببوابات Toffoli و ظهرت بوابات أخرى نتيجة إضافة كيوبت متحكم واحد إلى بوابة Toffoli لتصبح بوابة ذات 4 مداخل و 4 مخارج كما توضحه الصورة (4.15). من الصورة (4.15b) نستطيع أن نحسب كلفة بوابة



الصورة (4.15): (a) بوابة toffoli (4*4) (b) تحقيقها الكمي



الصورة (4.16): دارة وحدة الحساب والمنطق نموذج ZLZH.

4*4 Toffoli هي: QC=13 ، QD=1.

تملك دارة وحدة الحساب والمنطق وحدة تحكم تتكون من 6 أسلاك تقوم بتغيير مداخلها بين 0 و 1 من أجل الحصول على عمليات منطقية وحسابية. أسلاك التحكم مرتبة كما يلي: $C_{carryxor}, C_{snot}, C_{aANDb}, M, C_{bnot}, C_{SUB}$. سلك التحكم M هو من يحدد العمليات المنتجة من طرف دارة ALU هل هي منطقية أم حسابية؟، حيث إذا كان في $M=0$ الدارة تنتج عمليات منطقية، في حين إذا كان $M=1$ الدارة تنتج عمليات حسابية.

على سبيل المثال، إذا أردنا إنتاج عملية XOR المنطقية يجب علينا أولاً أن نضع سلك التحكم M في الوضع $|0\rangle$ ، في هذا الوضع الناتج سيكون $S_i = a_i \oplus b_i \oplus c_{i-1}$. و لحذف c_{i-1} يجب

وضع كل من C_{SUB} , $C_{carryxor}$, C_{snot} في الوضع $\langle 0 \rangle$ في نفس الوقت، بالتالي دارة ALU تقوم بإنتاج $S_i = a_i \oplus b_i$ وهي عملية XOR.

نموذج ZLZH من أحسن النماذج من حيث عدد العمليات التي تنتجها الدارة حيث كما هو ملخص في الجدول 4.2 حيث تنتج هذه الدارة 18 عملية منطقية وحسابية، لكن كلفة هذه الدارة ستكون أيضا مرتفعة.

سبب إرتفاع كلفة دارة ALU نموذج HLZH راجع إلى إستعمال عدد كبير من البوابات و خاصة بوابة Toffoli ذات 4 مداخل و 4 مخارج التي تصل كلفتها وحدها إلى 13، حيث

رقم العملية	M	$C_{carryxor}$	C_{snot}	C_{aANDb}	C_{bnot}	C_{SUB}	العمليات المنتجة
(1)	1	1	0	0	0	0	$A \text{ plus } B$
(2)	1	1	1	1	0	1	$\overline{A \text{ plus } B}$
(3)	1	1	1	1	0	1	$A \text{ minus } B$
(4)	1	1	1	1	1	1	$B \text{ minus } A$
(5)	1	1	0	1	1	1	$A \text{ plus } B \text{ plus } 1$
(6)	1	1	0	1	1	0	$A \text{ minus } B \text{ minus } 1$
(7)	1	1	0	1	0	0	$B \text{ minus } A \text{ minus } 1$
(8)	1	1	0	1	1	0	$\overline{A \text{ plus } B}$
(9)	0	0	1	0	0	0	$A \oplus B$
(10)	0	0	1	0	0	1	$\overline{A \oplus B}$
(12)	0	0	1	0	0	1	$A + B$
(13)	0	0	1	0	0	0	$\overline{A + B}$
(14)	0	0	1	0	0	0	$\overline{A} + B$
(15)	0	0	1	0	1	0	$A + \overline{B}$
(16)	0	0	1	0	1	0	$A \cdot B$
(17)	0	0	1	0	0	0	$A \cdot \overline{B}$
(18)	0	0	1	0	1	0	$\overline{A} \cdot B$
(19)	0	0	0	0	1	0	$\overline{A} + \overline{B}$
(20)	0	0	0	0	0	1	\overline{A}

الجدول (4.2): العمليات المنتجة من طرف دارة وحدة الحساب والمنطق نموذج.

إستعمل مهندس هذه الدارة n بوابة منها بالإضافة الى $2n$ من Toffoli $(3*3)$ ، $3n$ من

بوابة CNOT و n من بوابة Peres بالتالي تكون الكلفة كما يلي:

$$QC = 13*n + 5*2n + 1*3n + 4*n = 30n$$

و التأخير الكمي كما يلي:

$$QD = 1+1+4+13n+10+5n+1 = 18n+17$$

$$QG = n + 2$$

والنفاية كما يلي:

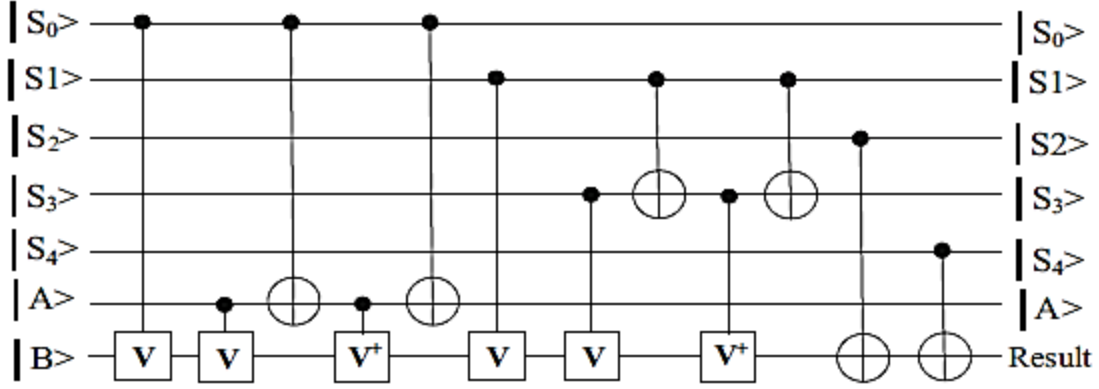
بالتالي كلفة دارة ALU لأربعة كيوبتات هي: $QC=120$ ، $QD=89$ و $QG=6$.

4.3.3 دارة وحدة الحساب والمنطق (نموذج HB)

هذا النموذج [96] ليس كغيره من النماذج السابقة، إذ يعتمد في تصميمه لدارة الحساب والمنطق على بناء بوابة واحدة تعتبر دارة ALU لكيوبت وحيد ثم يتم بناء الدارة ل n كيوبت عن طريق ائصال تسلسلي لدارة ALU لكيوبت وحيد مع بعضها. في هذا العمل قام الباحثان باقتراح ثلاثة تصميمات لبوابة ALU لكيوبت وحيد، حيث سنختار أفضلها و هو التصميم رقم 2 كما توضحه الصورة 4.17.

وحدة التحكم في هذا النموذج هي خمسة أسلاك الأولى من S_0 الى S_4 وما تبقى من أسلاك هي الجامع الكمي حيث تقوم هذه البوابة بإنتاج 10 عملية منطقية وحسابية في المخرج Result، وهي ملخصة في الجدول 4.3.

أستعمل في هذا التصميم البوابات الأولية التالية: 6 بوابات CNOT، 4 بوابات C-V و بوابتين $C-V^+$. بالتالي تكون الكلفة العامة لهذه البوابة هي: $QC=12n$ ، $QD=12n$ و $QG=0$.



الصورة (4.17): بوابة وحدة الحساب والمنطق الكمية نموذج HA.

رقم العملية	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	العمليات المنتجة من طرف ALU
(1)	1	1	0	0	0	$A + B$ الجمع
(2)	1	1	1	0	1	$B - A$ الطرح
(3)	1	1	0	1	1	$A - B$ في الطرح
(4)	1	0	0	0	0	$A \oplus B$ عملية XOR
(5)	0	0	0	0	0	B لا عملية
(6)	1	1	0	1	0	$A + B + 1$
(7)	1	1	1	1	1	$B - A - 1$
(8)	1	1	0	0	1	$A - B - 1$
(9)	0	0	1	0	0	$A + B$
(10)	0	0	1	0	0	B

الجدول (4.3): العمليات المنتجة من طرف دارة ALU نموذج HA

4.3.4 نماذج أخرى

هناك أعمال أخرى في مجال تصميمات دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية أقل فعالية من الأمثلة التي ذكرناها سابقا سوف نقدم لها ملخص نذكر فيه عدد العمليات المنجزة والتكلفة المستهلكة.

التصميم المقدم في [97] لدارة ALU يعتمد في بنائه لدارة كيوبت وحيد على بوابتي Fredkin و بوابتي CNOT و بوابة HNG، بوابة أخرى جديدة قدمت في هذا البحث وهي بوابة

MRG حيث تملك هذه الدارة 5 أسلاك للتحكم و تنتج هذه الدارة 6 عمليات حسابية و منطقية. الكلفة العامة لهذا النموذج هي $QC=12n$ و $QD=12n$ و $QG=2n$. بالتالي كلفة ALU لأربعة كيوبتات هي: $QC=48$ ، $QD=48$ و $QG=8$.

تصميم آخر لدارة ALU [98] تقوم بإنتاج 12 عملية حسابية ومنطقية و كلفتها العامة تقدر ب: $QC=27n$ ، $QD=15n$ و $QG=11n$ و كلفة دارة 4 كيوبتات هي: $QC=108$ ، $QD=60$ و $QG=44$. في النموذج الأخير [99] تقوم الدارة بإنتاج 12 عملية منطقية وحسابية و كلفتها العامة تقدر ب: $QC=29n$ ، $QD=29n$ ، $QG=8n$. كلفة دارة ALU لأربعة كيوبتات هي: $QC=116$ ، $QD=116$ و $QG=32$.

الفصل الخامس

تصميم مقترح لدارة الحساب والمنطق الكمية

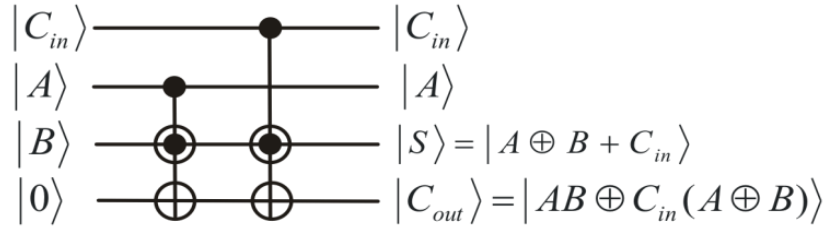
The proposed Design of Quantum Arithmetic and logic Unit

5.1 مقدمة

يهتم الباحثين كثيرا بدارة وحدة الحساب والمنطق لأنها أساس كل العمليات المنطقية و الحسائية التي يقوم بها الحاسوب، وبما أن الحاسوب الكمي يعتمد في بنائه على المعالج الكمي وهو بدوره يعتمد على وحدة الحساب المنطق الكمية التي تقوم بجميع العمليات الحسائية التي يحتاجها الحاسوب الكمي لذلك أخذت دارة ALU كل هذا الإهتمام. تطرقنا سابقا إلى عدة أنواع من دارة ALU التي تتميز كل واحدة منهم بميزة معينة، حيث تتميز دارة ALU (نموذج TGA) بأنها دارة أنيقة و واضحة لكن عدد العمليات التي تنتجها صغير، أما نموذج ZLHZ فهو تصميم جيد من حيث عدد العمليات المنتجة لكن معايير الكلفة على العموم مرتفعة بعض الشيء. في نموذج HA قدم المصمم دارة لكيوبت وحيد حاول فيها زيادة العمليات التي تنتجها ALU في نفس الوقت حاول تخفيض معايير الكلفة لكن يبقى ارتفاع QD واضحا في النتائج.

5.2 تصميم مقترح لدارة الجامع

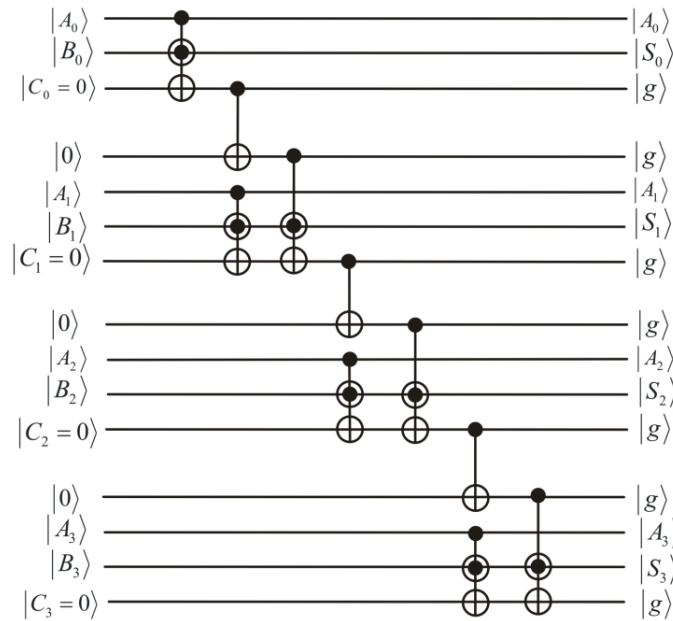
كما ذكرنا سابقا أن قوة دارة وحدة الحساب والمنطق يكمن في قوة و فعالية الجامع الكمي لذلك يجب أن نركز اهتمامنا في اختيار هذا النوع من الدارات الكمية. دارة الجامع الكامل الكمي المقترحة [100] في هذا البحث هي بوابة Peres المضاعفة (الصورة 5.1 أو الصورة 4.12). هذه الدارة تقوم بتحويل المداخل $|C_{in}\rangle, |A\rangle, |B\rangle, |0\rangle$ إلى المخرج $|C_{in}\rangle, |A\rangle, |A\oplus B\oplus C_{in}\rangle, |AB\oplus(A\oplus B)C_{in}\rangle$. مخارج هذه الدارة تتوافق مع معادلتها الجامع



الصورة (5.1): دارة الجامع الكامل الكمية.

الكامل (4.1) و (4.2). أما في التصميم المقترح الذي سنبنه عليه دارة ALU فإننا سنضيف بوابة CNOT في كل مستوى بحيث سنحولها لاحقاً إلى بوابة Toffoli لكي تستعمل في إنتاج عمليات محددة. الصورة (5.2) توضح دارة الجامع لأربعة كيوبتات. قمنا بحذف بوابة Peres في المستوى $i=0$ لأنه لا يوجد احتفاظ في بداية عملية الجمع لذلك سوف يكون عدد بوابات Peres المستعملة في التصميم العام هو $2n-1$ أما عدد بوابات CNOT هو $n-1$ ، وبالتالي الكلفة العامة هذا الجامع هي: $QC = (2n - 1) * 4 + (n - 1) * 1 = 9n - 5$ ،

$$QG = 2n - 1 \text{ و } QD = 4 + 5(n - 1) = 5n - 1$$



الصورة (5.2): دارة الجامع الكمي المقترحة.

بالتالي كلفة دارة الجامع المقترحة لأربعة كيوبتات هي $QC=31$ ، $QD=19$ و $QG=7$.

5.3 دارة وحدة الحساب والمنطق المقترحة

في هذا البحث سوف نقترح دارة ALU كمية فعالة [100] تقوم بإنتاج عمليات حسابية كالجمع والطرح و عمليات منطقية كالنفي NOT، XOR، AND، NAND، OR و NOR... الخ. هذه الدارة المقترحة (الصورة 3.5) تعتمد في تصميمها على دارة الجامع المقترحة (الصورة 5.3) بالإضافة إلى وحدة التحكم (الأسلاك الملونة) التي تتكون من 7 أسلاك ($S_0...S_6$) تتحكم في دارة الجامع لتنتج 28 عملية حسابية و منطقية وهو أكبر عدد لحد الآن. هذه الدارة المقترحة لوحدة الحساب والمنطق الكمية تنتج في مخرجها (R_i) العبارة العامة التالية:

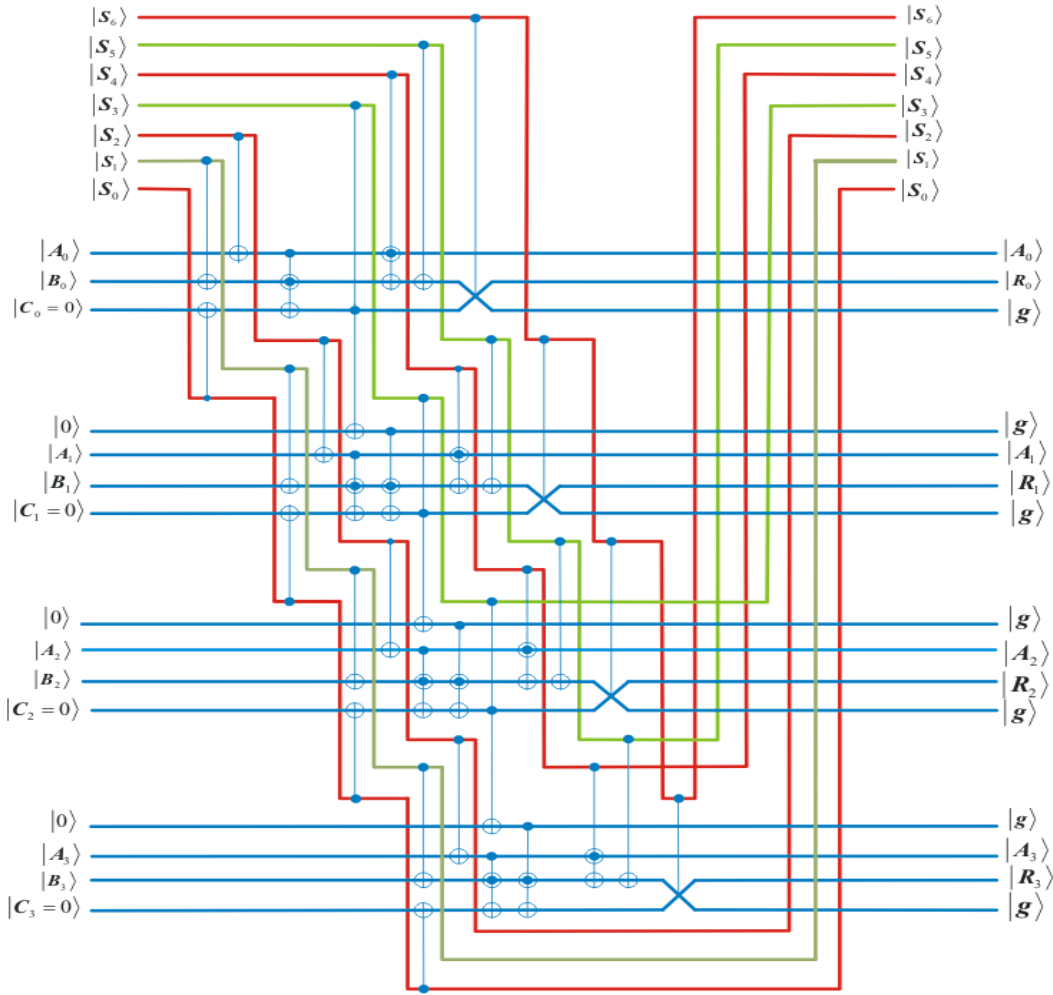
$$R_i = \bar{S}_6[(A_i \oplus S_2) \oplus (B_i \oplus S_1) \oplus S_3 C_{i-1} \oplus S_4 (A_i \oplus S_2) \oplus S_5] \oplus S_6[S_0 \oplus (A_i \oplus S_2)(B_i \oplus S_1) \oplus S_3 C_{i-1} ((A_i \oplus S_2) \oplus (B_i \oplus S_1))] \quad (5.1)$$

لشرح كيف تنتج دارة ALU المخرج (R_i) أعدنا رسم الدارة المقترحة (لكيوبت وحيد) في الصورة 5.4 و وضحنا فيه طريقة الحصول على هذه النتيجة خطوة بخطوة ابتداءً من المداخل $|A_i\rangle$ و $|B_i\rangle$ حتى المخرج $|R_i\rangle$ موضحين عند كل بوابة منطقية العملية الحاصلة و النتائج الخارجة.

5.3.1 العمليات الحسابية و المنطقية المنتجة من طرف الدارة المقترحة

كما ذكرنا سابقاً أن هذه الدارة تقوم بإنتاج المعادلة (5.1). حيث تقوم وحدة التحكم بتغيير مداخل أسلاك التحكم للحصول على العملية المراد حسابها كما يوضحه الجدول 5.1.

على سبيل المثال إذا أردنا حساب عملية الجمع بين $|A_i\rangle$ و $|B_i\rangle$ يجب أن نضع (في المعادلة 5.1) $S_3 = 1$ و باقي أسلاك التحكم تكون في الوضع 0 كما توضحه المعادلة 5.2:



الصورة (5.3): دارة وحدة الحساب والمنطق المقترحة.

$$R_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1} = S_i \quad (5.2)$$

إذا أردنا إستخراج الإحتفاظ كنتيجة من المعادلة (5.1) نضع $S_3 = S_6 = 1$ وباقي الأسلاك في الوضع 0 تكون النتيجة معادلة الاحتفاظ (المعادلة 3.5):

$$R_i = C_i = a_i(b_i \oplus C_{i-1}) \oplus b_i C_{i-1} \quad (5.3)$$

بنفس الطريقة السابقة إذا أردنا إنتاج عملية الطرح يجب أن نضع $S_2 = S_3 = S_5 = 1$ في المعادلة (5.1) و باقي الأسلاك في الوضع 0 نتحصل على المعادلة (5.4)،

الأسلاك في الوضع 0 تقوم الدارة المقترحة بإنتاج العملية المنطقية OR. يمكن أيضا إنتاج B (لا عملية) وذلك بوضع كل الأسلاك في 0 إلا S_4 يجب أن يساوي 1. باقي العمليات المنطقية الأخرى ملخصة في الجدول 5.1.

رقم العملية	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	العملية المنتجة من طرف دارة ALU المقترحة
(1)	0	0	0	1	0	0	0	$A \text{ plus } B$
(2)	0	0	0	1	0	1	0	$A \text{ plus } \bar{B}$
(3)	0	0	1	1	0	1	0	$A \text{ minus } B$
(4)	0	1	0	1	0	1	0	$B \text{ minus } A$
(5)	0	1	1	1	0	1	0	$A \text{ plus } B \text{ plus } 1$
(6)	0	0	1	1	0	0	0	$A \text{ minus } B \text{ minus } 1$
(7)	0	1	0	1	0	0	0	$B \text{ minus } A \text{ minus } 1$
(8)	0	1	1	1	0	0	0	$\bar{A} \text{ plus } = \bar{B}$
(9)	0	0	0	0	0	0	0	$A \oplus B$
(10)	0	0	0	0	0	1	0	$\bar{A} \oplus \bar{B}$
(11)	0	0	0	0	1	0	0	B
(12)	0	0	0	0	1	1	0	\bar{B}
(13)	0	0	0	0	0	0	1	$A \text{ (AND) } B$
(14)	0	1	0	0	0	0	1	$A \text{ (AND) } \bar{B}$
(15)	0	0	1	0	0	0	1	$\bar{A} \text{ (AND) } B$
(16)	0	1	1	0	0	0	1	$\bar{A} \text{ (AND) } \bar{B}$
(17)	1	0	0	0	0	0	1	$\bar{A} \text{ (OR) } \bar{B}$
(18)	1	0	1	0	0	0	1	$A \text{ (OR) } \bar{B}$
(19)	1	1	0	0	0	0	1	$\bar{A} \text{ (OR) } B$
(20)	1	1	1	0	0	0	1	$A \text{ (OR) } B$
(21)	0	0	0	1	0	0	1	$C_i \text{ of operations (1,2)}$
(22)	1	0	0	1	0	0	1	$\bar{C}_i \text{ of operations (1,2)}$
(23)	0	0	1	1	0	0	1	$C_i \text{ of operations (3,4)}$
(24)	1	0	1	1	0	0	1	$\bar{C}_i \text{ of operations (3,4)}$
(25)	0	1	0	1	0	0	1	$C_i \text{ of operations (5,6)}$
(26)	1	1	0	1	0	0	1	$\bar{C}_i \text{ of operations (5,6)}$
(27)	0	1	1	1	0	0	1	$C_i \text{ of operations (7,8)}$
(28)	1	1	1	1	0	0	1	$\bar{C}_i \text{ of operations (7,8)}$

الجدول (5.1): العمليات المنتجة من طرف دارة ALU المقترحة.

5.4 تحليل اداء دارة وحدة الحساب والمنطق المقترحة

دارة ALU المقترحة تنتج أكبر عدد (28) من العمليات المنطقية والحسابية مقارنة مع نتائج التصميمات السابقة التي تطرقنا اليها بالتفصيل في الفصل الرابع. قبل إجراء المقارنة يجب علينا حساب كلفة العامة الدارة و استنتاج كلفة دارة ALU لأربعة كيوبتات كما فعلنا سابقا في الفصل السابق. إستعملنا في التصميم المقترح 4n بوابة من CNOT ، 3n-1 بوابة من Peres ، n-1 بوابة من Toffoli و n بوابة من Fredkin. بالتالي تكون عبارة الكلفة الكمية العامة:

$$QC = 4n * 1 + (3n - 1) * 4 + (n - 1) * 5 + n * 5 = 26n - 9$$

عبارة التأخير الكمي العام هي: $QD = 1 + 1 + 4 + 5 + 4 + 5 + 5 * n = 5n + 20$

و عبارة النفاية الكمية العامة هي: $QG = 2n - 1$

بالتالي نستطيع حساب كلفة دارة ALU المقترحة لأربعة كيوبتات وهي: QC=95 ، QD=40 ، و QG=7. نتائج الدارة المقترحة والتصميمات السابقة ملخصة في الجدول (5.2).

Quantum garbage (QG)	Quantum delay (QD)	Quantum Cost (QC)	عدد العمليات	معايير التحسين
				تصميمات ALU
0	57	78	10	نموذج TGA
6	89	120	18	نموذج ZLZH
0	48	48	10	نموذج HA
32	116	116	12	المرجع [97]
8	48	48	6	المرجع [98]
44	60	108	12	المرجع [99]
7	40	95	28	التصميم المقترح لدارة ALU

الجدول (5.2) : مقارنة نتائج دارة ALU المقترحة مع النتائج السابقة

عند ملاحظتنا للجدول (5.2) نلاحظ التفوق المطلق للدارة المقترحة من حيث عدد العمليات المنتجة وهو أهم عنصر يهتم به مهندسين في مجال دارة ALU، لكن نلاحظ أيضا إرتفاع المعايير QC و QD للدارة المقترحة مقارنة مع النموذج TGA مقابل إنخفاض العدد QD مقارنة مع جميع التصميمات السابقة. إعتادا على هذه الملاحظات لا نستطيع أن نحدد أي التصميمات أحسن؟ هل الدارة المقترحة افضل من نموذج TGA .؟

حل هذا المشكل إقترحنا في البحث [100] معيار جديد نستطيع من خلاله تحديد أي التصميمات أحسن، هذا المعيار الذي سميناه معامل التحسين (*If*) هو عبارة عن توحيد للمعايير الأربعة (عدد العمليات، QC، QD و QG) في معامل وحيد، كلما ارتفع عدد معامل (*If*) لتصميم دارة معينة مقارنة بالأخرى أعتبرت الدارة أحسن من الأخرى. عبارة هذا المعامل (*If*) موضحة في المعادلة (5.6).

$$If = \frac{\text{number of operations}}{QC + QD + QG} \quad (5.6)$$

لمعرفة كيف يحدد معامل التحسين أي التصميمات أحسن نقوم بشرحه في النقاط التالية:

- كلما كان عدد العمليات المنتجة في تصميم ما أكبر، كلما كانت الدارة أحسن لذلك وضعنا عدد العمليات في البسط. بالتالي كلما زاد عددها كلما زاد معامل التحسين.
- كلما كانت قيمة المعايير QC، QD و QG أصغر، كلما كان التصميم أحسن لذلك وضعناهم في المقام. بالتالي كلما نقص عدد QC، QD و QG زاد معامل التحسين.

نتائج المقارنة بين التصميمات السابقة و التصميم المقترح موضحة في الجدول 5.3.

نتائج الجدول توضح تفوق التصميم المقترح لدارة وحدة الحساب والمنطق على نظيراتها التصميمات السابقة مجملا، أي من حيث معامل التحسين (*If*) الذي ينوب عن المعايير الأربعة السابقة (عدد العمليات، QC، QD و QG)

التصميم المقترح	المرجع [109]	المرجع [108]	المرجع [107]	نموذج HA	نموذج ZLZH	نموذج TGA	تصميمات التحسين
0.197	0.056	0.057	0.045	0.104	0.084	0.074	معامل التحسين (If)
	252%	245%	338%	89%	134%	166%	نسبة تحسين التصميم المقترحة مقارنة مع التصميمات السابقة

الجدول (5.3): مقارنة التصميم المقترح مع التصميمات السابقة من حيث معامل التحسين (If).

الختامة

تطرقنا في هذه الرسالة إلى موضوع مهم و هو هندسة الحاسوب الكمي حيث سلطنا الضوء على الجزء المهم من الحاسوب وهو المعالج الكمي . للتدقيق أكثر، يتمثل هدف هذه الأطروحة هو تحسين أداء دارة وحدة الحساب والمنطق الكمية و العكوسة. بما أن هذا الموضوع جديد النشأة فإن التصميمات المقدمة فيه تشبه إلى حد قريب تصميمات الحاسوب التقليدي، التي تطرقنا إليها و شرحنا أهم الهندسيات والدارات المستعملة في الحوسبة التقليدية. بما أن الحاسوب كمي فإنه يعتمد على مبادئ ميكانيك الكم، حيث قدمنا ملخص لهذا المجال و فصلنا في بعض المفاهيم التي تستعمل في إنشاء الدارات الكمية و التصميمات المنطقية. هناك نماذج كثيرة تهتم بتحويل الدارات الكمية مثل نظام NCT، نظام MCT و نظام NCV. حيث اعتمدنا في هذه الاطروحة على نظام NCV في تحويلنا لجميع البوابات الكلاسيكية العكوسة إلى بوابات كمية. هذه البوابات يتم تركيبها في شكل دارات تختلف مهمتها حسب البوابات المستعملة في بنائها. بعد ذلك قدمنا أحسن التصاميم المنجزة لتحقيق دارة الحساب والمنطق المعتمدة على البوابات الكمية و اعتمدنا في المقارنة بينها على معايير التحسين وهي عدد العمليات المنتجة، QC، QD و QG.

التصميم المقترح لدارة الحساب والمنطق الكمية في هذه الرسالة ينتج أكبر عدد من العمليات الحسابية والمنطقية وهو 28 عملية التي من شأنها أن تسهل عمل المعالج الكمي.

التصميم المقترح لديه أيضا كلفة منخفضة من حيث QC، QD و QG، بالتالي تعتبر الدارة المقترحة الأكثر فعالية مقارنة مع نظيراتها السابقة، حيث وصلت نسبة التحسين إلى أكثر من 300% مقارنة مع النتائج السابقة. لذلك سيكون لهذا التصميم دورا كبيرا في المستقبل في تجسيد الكمبيوتر الكمي.

- [1]. Moore, Gordon E. "Cramming more components onto integrated circuits." *Proceedings of the IEEE* 86.1 (1998): 82-85.
- [2]. Landauer, Rolf. "Irreversibility and heat generation in the computing process." *IBM journal of research and development* 5.3 (1961): 183-191.
- [3]. Bennett, Charles H. "Logical reversibility of computation." *IBM journal of Research and Development* 17.6 (1973): 525-532.
- [4]. Nielsen, Michael A., and Isaac Chuang. "Quantum computation and quantum information." (2002): 558-559.
- [5]. Bennett, Charles H. "Notes on the history of reversible computation." *IBM Journal of Research and Development* 32.1 (1988): 16-23.
- [6]. Al-Rabadi, Anas N. *Reversible logic synthesis: from fundamentals to quantum computing*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7]. Desoete, Bart, and Alexis De Vos. "A reversible carry-look-ahead adder using control gates." *Integration, the VLSI Journal* 33.1 (2002): 89-104.
- [8]. Knill, Emanuel, Raymond Laflamme, and Gerald J. Milburn. "A scheme for efficient quantum computation with linear optics." *nature* 409.6816 (2001): 46-52.
- [9]. Cuykendall, Robert, and David R. Andersen. "Reversible optical computing circuits." *Optics Letters* 12.7 (1987): 542-544.
- [10]. Song, Tao, Shudong Wang, and Xun Wang. "The design of reversible gate and reversible sequential circuit based on DNA computing." *Intelligent System and Knowledge Engineering, 2008. ISKE 2008. 3rd International Conference on*. Vol. 1. IEEE, 2008.
- [11]. Thapliyal, Himanshu, and M. B. Srinivas. "The need of DNA computing: reversible designs of adders and multipliers using Fredkin gate." *Proc. SPIE*. Vol. 6050. 2005.
- [12]. McGregor, John Patrick, and Ruby B. Lee. "Architectural enhancements for fast subword permutations with repetitions in cryptographic applications." *Computer Design, 2001. ICCD 2001. Proceedings. 2001 International Conference on*. IEEE, 2001.
- [13]. Marinescu, Dan C., and Gabriela M. Marinescu. *Approaching quantum computing*. Prentice Hall, 2005.
- [14]. Shor, Peter W. "Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer." *SIAM review* 41.2 (1999): 303-332.
- [15]. Thomsen, Michael Kirkedal, Robert Glück, and Holger Bock Axelsen. "Reversible arithmetic logic unit for quantum arithmetic." *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43.38 (2010): 382002.
- [16]. Thapliyal, Himanshu, and M. Srinivas. "A novel reversible TSG gate and its application for designing reversible carry look-ahead and other adder architectures." *Advances in computer systems architecture* (2005): 805-817.

- [17]. Zhou, Ri-Gui, Yan-Cheng Li, and Man-Qun Zhang. "Novel designs for fault tolerant reversible binary coded decimal adders." *International Journal of Electronics* 101.10 (2014): 1336-1356.
- [18]. Shamsujjoha, Md, and Hafiz Md Hasan Babu. "A low power fault tolerant reversible decoder using mos transistors." *VLSI Design and 2013 12th International Conference on Embedded Systems (VLSID), 2013 26th International Conference on*. IEEE, 2013.
- [19]. Nachtigal, Michael, and Nagarajan Ranganathan. "Design and analysis of a novel reversible encoder/decoder." *Nanotechnology (IEEE-NANO), 2011 11th IEEE Conference on*. IEEE, 2011.
- [20]. Zhou, Ri-gui, et al. "Optimization approaches for designing a novel 4-bit reversible comparator." *International Journal of Theoretical Physics* 52.2 (2013): 559-575.
- [21]. Thapliyal, Himanshu, and A. Prasad Vinod. "Design of reversible sequential elements with feasibility of transistor implementation." *Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. IEEE International Symposium on*. IEEE, 2007.
- [22]. Syamala, Y., and A. V. N. Tilak. "Reversible arithmetic logic unit." *Electronics Computer Technology (ICECT), 2011 3rd International Conference on*. Vol. 5. IEEE, 2011.
- [23]. Zhou, Rigui, et al. "Novel design for reversible arithmetic logic unit." *International Journal of Theoretical Physics* 54.2 (2015): 630-644.
- [24]. Toffoli, Tommaso. "Reversible computing." *Automata, Languages and Programming* (1980): 632-644.
- [25]. Fredkin, Edward, and Tommaso Toffoli. "Conservative logic." *International Journal of Theoretical Physics* 21.3 (1982): 219-253.
- [26]. Peres, Asher. "Reversible logic and quantum computers." *Physical review A* 32.6 (1985): 3266.
- [27]. Kerntopf, Pawel, Marek A. Perkowski, and Mozammel HA Khan. "On universality of general reversible multiple-valued logic gates." *Multiple-Valued Logic, 2004. Proceedings. 34th International Symposium on*. IEEE, 2004.
- [28]. TURING, AM. "ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHIEDUNGSPROBLEM." *J. of Math* 58 (1936): 345-363.
- [29]. https://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%86%D8%B7%D9%82_%D8%A8%D9%88%D9%84%D9%8A%D8%A7%D9%86%D9%8A
- [30]. http://capone.mtsu.edu/phys2020/Lectures/L19_L25_L3_DeMorgan/body_demorgan.html
- [31]. Williams, Colin P. *Explorations in quantum computing* 2. Springer Science & Business Media, 2010.
- [32]. Benenti, Giuliano, Giulio Casati, and Giuliano Strini, eds. *Principles of quantum computation and information: Volume II: Basic Tools and Special Topics*. World Scientific Publishing Co Inc, 2007.

- [33]. <http://gradestack.com/gate-exam/electronics-and-communication/digital-circuits/combinatorial-circuits/>
- [34]. https://en.wikipedia.org/wiki/NAND_logic
- [35]. Preskill, John. "Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation." *California Institute of Technology* 16 (1998).
- [36]. Kubbinga, Henk. "Niels Bohr's Collected Works." *Isis* 100.1 (2009): 119-126.
- [37]. Cassidy, David C., and Martha Baker. *Werner Heisenberg: a bibliography of his writings*. [sn], 1984.
- [38]. Dirac, Paul Adrien Maurice. "The collected works of PAM Dirac 1924-1948." *Cambridge; New York: Cambridge University Press,* c1995, edited by Dalitz, Richard H. (1995).
- [39]. Poplavskiĭ, R. P. "Thermodynamic models of information processes." *Physics-Uspexhi* 18.3 (1975): 222-241.
- [40]. Ingarden, Roman S. "Quantum information theory." *Reports on Mathematical Physics* 10.1 (1976): 43-72.
- [41]. Feynman, Richard P. "Quantum mechanical computers." *Optics news* 11.2 (1985): 11-20.
- [42]. Deutsch, David. "Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer." *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 400. No. 1818. The Royal Society, 1985.
- [43]. Benioff, Paul. "Quantum mechanical Hamiltonian models of Turing machines." *Journal of Statistical Physics* 29.3 (1982): 515-546.
- [44]. Barenco, Adriano, et al. "Elementary gates for quantum computation." *Physical review A* 52.5 (1995): 3457.
- [45]. Cirac, Juan I., and Peter Zoller. "Quantum computations with cold trapped ions." *Physical review letters* 74.20 (1995): 4091.
- [46]. Cory, David G., Amr F. Fahmy, and Timothy F. Havel. "Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 94.5 (1997): 1634-1639.
- [47]. Schneider, C., et al. "Lithographic alignment to site-controlled quantum dots for device integration." *Applied Physics Letters* 92.18 (2008): 183101.
- [48]. Finley, Klint . "Quantum Computing Is Real, and D-Wave Just Open-Sourced It". *Wired (magazine)*. Condé Nast. (11 January 2017).
- [49]. Dirac, Paul Adrien Maurice. *The principles of quantum mechanics*. No. 27. Oxford university press, 1981.
- [50]. Williams, Colin P., and Alexander G. Gray. "Automated design of quantum circuits." *Lecture notes in computer science* (1999): 113-125.

- [51]. Hung, William NN, et al. "Quantum logic synthesis by symbolic reachability analysis." *Proceedings of the 41st annual Design Automation Conference*. ACM, 2004.
- [52]. Yang, Guowu, et al. "Majority-based reversible logic gates." *Theoretical computer science* 334.1-3 (2005): 259-274.
- [53]. Gruska, Jozef. *Quantum computing*. Vol. 2005. London: McGraw-Hill, 1999.
- [54]. Graham, Alexander. "Kronecker Products and Matrix Calculus: With Applications." *JOHN WILEY & SONS, INC., 605 THIRD AVE., NEW YORK, NY 10158, 1982, 130* (1982).
- [55]. Cory, David G., Amr F. Fahmy, and Timothy F. Havel. "Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 94.5 (1997): 1634-1639.
- [56]. Youssef, Saul. "Quantum mechanics as an exotic probability theory." *arXiv preprint quant-ph/9509004* (1995).
- [57]. Planck, M. *Ann. Physics*, 309(3):553–63.
- [58]. Mathews, Piravonu Mathews, and K. Venkatesan. *Tb Of Quantum Mechanics, 2E*. Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- [59]. Weyl, Hermann. *The theory of groups and quantum mechanics*. Courier Corporation, 1950.
- [60]. MONROE, C., et al. "A Schrödinger cat superposition state of an atom." *NIST technical note* 1523 (2002): TN42-TN47.
- [61]. Monroe, Chris, et al. "Demonstration of a fundamental quantum logic gate." *Physical review letters* 75.25 (1995): 4714.
- [62]. Monroe, C., et al. "Manipulating the motion of a single trapped atom." *Accounts of chemical research* 29.12 (1996): 585-590.
- [63]. Wineland, D., et al. "Experimental primer on the trapped ion quantum computer." *spectroscopy* 7 (1998): 8.
- [64]. Lanyon, Benjamin P., et al. "Quantum computing using shortcuts through higher dimensions." *arXiv preprint arXiv:0804.0272* (2008).
- [65]. Einstein, Albert, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?." *Physical review* 47.10 (1935): 777.
- [66]. Smolin, John A., and David P. DiVincenzo. "Five two-bit quantum gates are sufficient to implement the quantum Fredkin gate." *Physical Review A* 53.4 (1996): 2855.
- [67]. Hung, William NN, et al. "Quantum logic synthesis by symbolic reachability analysis." *Proceedings of the 41st annual Design Automation Conference*. ACM, 2004.

- [68]. DiVincenzo, David P. "Two-bit gates are universal for quantum computation." *Physical Review A* 51.2 (1995): 1015.
- [69]. Micheli, Giovanni De. *Synthesis and optimization of digital circuits*. McGraw-Hill Higher Education, 1994.
- [70]. Miller, D. Michael, and Gerhard W. Dueck. "Spectral techniques for reversible logic synthesis." *6th International Symposium on Representations and Methodology of Future Computing Technologies*. 2003.
- [71]. Lukac, Martin, and Marek Perkowski. "Evolving quantum circuits using genetic algorithm." *Evolvable Hardware, 2002. Proceedings. NASA/DoD Conference on*. IEEE, 2002.
- [72]. Yang, Guowu, et al. "Majority-based reversible logic gates." *Theoretical computer science* 334.1-3 (2005): 259-274.
- [73]. Yang, G., et al. "The power of large pulse-optimized quantum libraries: Every 3-qubit reversible function can be realized with at most four levels." *Proceedings of Proc. of IWLS* (2005).
- [74]. Maslov, Dmitri, Gerhard W. Dueck, and D. Michael Miller. "Synthesis of Fredkin-Toffoli reversible networks." *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems* 13.6 (2005): 765-769.
- [75]. Shende, Vivek V., Stephen S. Bullock, and Igor L. Markov. "Synthesis of quantum-logic circuits." *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 25.6 (2006): 1000-1010.
- [76]. Maslov, Dmitri, Gerhard W. Dueck, and D. Michael Miller. "Techniques for the synthesis of reversible Toffoli networks." *ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems (TODAES)* 12.4 (2007): 42.
- [77]. Hung, William NN, et al. "Optimal synthesis of multiple output Boolean functions using a set of quantum gates by symbolic reachability analysis." *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 25.9 (2006): 1652-1663.
- [78]. Perkowski, M., et al. "Gpu library based approach to quantum logic synthesis." *RC workshop*. 2010.
- [79]. Wille, Robert, et al. "Equivalence checking of reversible circuits." *Multiple-Valued Logic, 2009. ISMVL'09. 39th International Symposium on*. IEEE, 2009.
- [80]. Mishchenko, Alan, and Marek Perkowski. "Logic synthesis of reversible wave cascades." (2002).
- [81]. Lukac, Martin, et al. "Evolutionary approach to quantum and reversible circuits synthesis." *Artificial Intelligence Review* 20.3 (2003): 361-417.

- [82]. Fazel, K., M. A. Thornton, and J. E. Rice. "ESOP-based Toffoli gate cascade generation." *Communications, Computers and Signal Processing, 2007. PacRim 2007. IEEE Pacific Rim Conference on*. IEEE, 2007.
- [83]. Miller, D. Michael, Robert Wille, and Rolf Drechsler. "Reducing reversible circuit cost by adding lines." *Multiple-Valued Logic (ISMVL), 2010 40th IEEE International Symposium on*. IEEE, 2010.
- [84]. Yabuki, Taro, and Hitoshi Iba. "Genetic algorithms for quantum circuit design-evolving a simpler teleportation circuit." *Late Breaking Papers at the 2000 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2000.
- [85]. Rubinstein, Ben IP. "Evolving quantum circuits using genetic programming." *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*. Vol. 1. IEEE, 2001.
- [86]. Lukac, Martin, Marek Perkowski, and Michitaka Kameyama. "Evolutionary quantum logic synthesis of boolean reversible logic circuits embedded in ternary quantum space using structural restrictions." *Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on*. IEEE, 2010.
- [87]. Jones, Jonathan A., and Michele Mosca. "Implementation of a quantum algorithm on a nuclear magnetic resonance quantum computer." *The Journal of chemical physics* 109.5 (1998): 1648-1653.
- [88]. A. Jones, R. Hansen, and M. Mosca. Quantum logic gates and nuclear magnetic resonance pulse sequences. *Journal of Magnetic Resonance*, 135(2):353–360, 1998.
- [89]. Meter, Rodney van, and Mark Oskin. "Architectural implications of quantum computing technologies." *ACM Journal on Emerging Technologies in Computing Systems (JETC)* 2.1 (2006): 31-63.
- [90]. Saeedi, Mehdi, et al. "Evaluation and improvement of quantum synthesis algorithms based on a thorough set of metrics." *Digital System Design Architectures, Methods and Tools, 2008. DSD'08. 11th EUROMICRO Conference on*. IEEE, 2008.
- [91]. Williams, Colin P. *Explorations in quantum computing*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [92]. Vedral, Vlatko, Adriano Barenco, and Artur Ekert. "Quantum networks for elementary arithmetic operations." *Physical Review A* 54.1 (1996): 147.
- [93]. Cuccaro, Steven A., et al. "A new quantum ripple-carry addition circuit." *arXiv preprint quant-ph/0410184* (2004).
- [94]. Bhagyalakshmi, H. R., and M. K. Venkatesha. "An improved design of a multiplier using reversible logic gates." *International journal of engineering science and technology* 2.8 (2010): 3838-3845.

-
- [95]. Haghparast, Majid, et al. "Design of a novel reversible multiplier circuit using HNG gate in nanotechnology." *World Appl. Sci. J.* 2008.
- [96]. Haghparast, Majid, and Ali Bolhassani. "Optimization approaches for designing quantum reversible arithmetic logic unit." *International Journal of Theoretical Physics* 55.3 (2016): 1423-1437.
- [97]. Morrison, Matthew, and Nagarajan Ranganathan. "Design of a reversible ALU based on novel programmable reversible logic gate structures." *VLSI (ISVLSI), 2011 IEEE Computer Society Annual Symposium on.* IEEE, 2011.
- [98]. Mamataj, Shefali, Biswajit Das, and Anurima Rahaman. "An Optimized Realization of ALU for 12-Operations by using a Control Unit of reversible gates." *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering* 4.1 (2014).
- [99]. Dixit, Akanksha, and Vinod Kapse. "Arithmetic & logic unit (ALU) design using reversible control unit." *Development* 32 (1998): 16-23.
- [100]. Ayyoub, Slimani, and Benslama Achour. "Optimized 4-bit Quantum Reversible Arithmetic Logic Unit." *International Journal of Theoretical Physics* (2017): 1-11.
see <https://link.springer.com/article/10.1007/s10773-017-342>

Quantum Computing and its Applications

Abstract

Reversible logic has received a great attention in the recent years due to its ability to reduce the power dissipation.

The main purposes of designing reversible logic are to decrease quantum cost, depth of the circuits and the number of garbage outputs.

The arithmetic logic unit (ALU) is an important part of central processing unit (CPU) as the execution unit.

This thesis presents a complete design of a new (reversible/quantum) arithmetic logic unit (ALU) that can be part of a programmable reversible computing device such as a quantum computer. The proposed ALU based on a reversible low power control unit and small performance parameters full adder named double Peres gates. The presented Q-ALU can produce the largest number of arithmetic and logic functions (28) and have the smallest number of quantum cost and delay compared with existing designs

Key Words :

Reversible Logic, quantum gate, quantum circuit, full adder, arithmetic and logic functions, arithmetic logic unit, central processing unit.

Information Quantique et ses Applications

Résumé

La logique réversible a reçu une grande attention au cours de ces dernières années en raison de sa capacité à réduire la dissipation de chaleur.

Les principaux objectifs de la conception de la logique réversible sont de diminuer le coût quantique, la profondeur des circuits et le nombre de déchets de sortie.

L'unité de logique arithmétique (ALU) est une partie importante de l'unité centrale de traitement (CPU) en tant qu'élément d'exécution.

Ce travail présente une conception complète d'une nouvelle unité de logique arithmétique réversible quantique (ALU) qui peut faire partie d'un dispositif informatique réversible programmable tel qu'un ordinateur quantique. L'ALU quantique proposée sur la base d'une unité de contrôle de faible puissance réversible et d'un additionneur complet de paramètres de petite performance nommés double portes de Peres. L'ALU présentée peut produire le plus grand nombre des fonctions arithmétiques et logiques (28) et avoir un plus petit nombre de coût et retard quantiques par rapport aux conceptions existantes.

Mots Clés :

Logique reversible, porte quantique, circuit quantique, additionneur complet, fonctions arithmétiques et logiques, unité de logique arithmétique, unité centrale de traitement.

الحوسبة الكوانتية و تطبيقاتها

الملخص

حاز المنطق العكوس انتباها كبيرا في الأعوام الأخيرة نظرا لقدرته على تخفيض استهلاك الطاقة. إن الاهداف الرئيسية لتصميم الدارات المنطقية العكوسة هي تخفيض الكلفة الكمية، عمق الدارة و عدد النفايات الخارجة.

وحدة الحساب والمنطق هي جزء مهم من وحدة المعالجة المركزية حيث تعتبر كوحدة التنفيذ. في هذا البحث نقدم تصميم كامل لوحدة حساب ومنطق كوانتية جديدة يمكنها أن تكون جزءا من أجهزة الحوسبة المبرمجة العكوسة مثل الكمبيوتر الكوانتي.

تعتمد دارة وحدة الحساب والمنطق الكوانتية المقترحة في بنيتها على وحدة تحكم ذات طاقة صغيرة و دارة الجامع الكامل تسمى بوابة Peres المضاعفة و التي تعتبر معايير ادائها منخفضة.

إن دارة ALU المقدمة يمكنها إنتاج أكبر عدد من العمليات المنطقية والحسابية (28) ، و تملك اصغر عدد من حيث الكلفة و التأخير الكوانتي مقارنة بالتصميمات السابقة.

الكلمات المفتاحية:

المنطق العكوس، البوابة الكوانتية، الدارة الكوانتية، الجامع الكامل، العمليات المنطقية والحسابية، وحدة الحساب والمنطق، وحدة المعالجة المركزية.