

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

**THESE**

**Présentée pour obtenir le diplôme de**

**Doctorat en Sciences en Physique**

**Spécialité: Physique Energétique**

**Option : Photothermique**

**Thème :**

**APPROCHE NUMERIQUE DE LA CONVECTION  
NATURELLE THERMOSOLUTALE DANS DES ENCEINTES  
FERMEES**

**Par :**

**GHERNOUG Chahinez**

**Soutenue le : 23 / 02 /2017**

**Devant le jury :**

<b>Présidente</b>	<b>:</b>	<b>Mme</b>	<b>A. CHAKER</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. des Frères Mentouri Cne</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>:</b>	<b>Mr</b>	<b>M. DJEZZAR</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. des Frères Mentouri Cne</b>
<b>Examineurs</b>	<b>:</b>	<b>Mr</b>	<b>B. DRAOUI</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Tahri Mohamed Béchar</b>
		<b>Mr</b>	<b>B. AGOUDJIL</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. El Hadj Lakhdar Batna</b>
		<b>Mr</b>	<b>H. Naji</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. d'Artois Lille-France</b>

# Dédicaces

*Je dédie cette thèse à mes parents.*

*A ma fille et mon mari.*

*A tous les membres de ma famille, grands et petits.*

*A tous mes amis*

# Remercîments

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur DJEZZAR Mahfoud, Professeur à l'Université des Frères Mentouri de Constantine de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestions.

Je tiens à remercier sincèrement Madame CHAKER Abla, Professeur à l'Université des Frères Mentouri de Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen et ce malgré ces nombreuses occupations, qu'elle trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je tiens à remercier également, Messieurs DRAOUI Belkacem, Professeur à l'Université Tahri Mohamed de Béchar, AGOUDJIL Boujemaâ, Professeur à l'Université El Hadj Lakhdar de Batna et de NAJI Hassane, Professeur à l'Université d'Artois à Lille, Nord de la France qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse et de participer à mon jury d'examen.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Nomenclature

## Lettres latines

$a$	constante définie dans le système de coordonnées bicylindriques. (m)
$C_1$	rapport des rayons.
$C_2$	excentricité de l'espace annulaire formé par les deux cylindres excentrés.
$C_p$	chaleur massique à pression constante. ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$D$	diffusivité massique. ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur. ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$h$	coefficient métrique dimensionnel défini dans la relation (2.18). (m)
$H$	coefficient métrique adimensionnel.
$K_{\text{éq}}$	conductivité thermique équivalente locale.
$\overline{K}_{\text{éq}}$	conductivité thermique équivalente moyenne.
$Le$	nombre de Lewis. $Le = \frac{\alpha_T}{D}$
$N$	rapport des forces de poussée thermique et solutale. $N = \frac{Ra_s}{Ra_T}$
$Nu$	nombre de Nusselt local. $Nu = -\frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big _{\eta=\text{cste}}$
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen.
$\mathcal{P}$	tenseur des contraintes.
$P$	pression au sein du fluide. (Pa)
$Pr$	nombre de Prandtl défini par : $Pr = \frac{\nu}{\alpha_T}$
$r_1, r_2$	rayons du cylindre intérieur et extérieur. (m)
$Ra_s$	nombre de Rayleigh solutal. $Ra_s = \left( \frac{g\beta_s a^3}{\alpha_T \nu} \Delta S \right)$
$Ra_T$	nombre de Rayleigh thermique. $Ra_T = \left( \frac{g\beta_T a^3}{\alpha_T \nu} \Delta T \right)$
$S$	concentration du fluide.
$S_1$	concentration du cylindre intérieur.
$S_2$	concentration du cylindre extérieur.

Sh	nombre de Sherwood local. $Sh = -\frac{1}{H} \frac{\partial S^+}{\partial \eta} \Big _{\eta=cste}$
$\overline{Sh}$	nombre de Sherwood moyen.
$S_\varphi$	Terme de source figurant dans l'équation (3.3).
$\Delta S$	écart de concentration $\Delta S = S_1 - S_2$ .
T	température du fluide. (K)
$T_1$	température du cylindre intérieur. (K)
$T_2$	température du cylindre extérieur. (K)
$\Delta T$	écart de température $\Delta T = T_1 - T_2$ . (K)
t	temps. (s)
$V_\eta, V_\theta$	composantes de la vitesse suivant $\eta$ et $\theta$ . ( $m \cdot s^{-1}$ )
$\vec{V}$	vecteur vitesse. ( $m \cdot s^{-1}$ )
x, y, z	coordonnées cartésiennes. (m)

### Lettres grecques

$\alpha$	angle d'inclinaison. ( $^\circ$ )
$\alpha_T$	diffusivité thermique. ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\beta_T$	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\beta_S$	coefficient volumique d'expansion massique du fluide. ( $m^3 kg^{-1}$ )
$\Gamma_\varphi$	coefficient de diffusion figurant dans l'équation 3.3.
$\lambda$	conductivité thermique du fluide. ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )
$\nu$	viscosité cinématique. ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\rho$	masse volumique du fluide. ( $kg \cdot m^{-3}$ )
$\tau_{ij}$	tenseur des contraintes visqueuses.
$\eta, \theta, z$	coordonnées bicylindriques.
$\psi$	fonction de courant. ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\omega$	vorticité. ( $s^{-1}$ )
$\varphi$	fonction générale figurant dans l'équation 3.3.

### Exposant

+	paramètres adimensionnels.
---	----------------------------

### Indices

i	intérieur.
e	extérieur.

$\eta$             suivant la coordonnée  $\eta$ .  
 $\theta$             suivant la coordonnée  $\theta$ .

# Liste des Figures

Figure 1.1 : Convection naturelle dans l'atmosphère, Cellules de Hadley.....	3
Figure 2.1 : Section droite du système.....	13
Figure 2.2 : Représentation schématique des coordonnées bicylindriques.....	18
Figure 3.1 : Domaine physique et domaine de calcul.....	25
Figure 3.2 : Représentation schématique du volume de contrôle entourant le nœud P.....	26
Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le volume de contrôle.....	31
Figure 4.1: Comparaison de la conductivité équivalente thermique ( $K_{eq}$ ) de la paroi interne avec le nombre de Rayleigh thermique.....	45
Figure 4.2 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Le=0.5$ et $N=1$ et différents $Ra_T$ .....	48
Figure 4.3 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Le=1$ et $N=1$ et différents $Ra_T$ .....	49
Figure 4.4 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Le=10$ et $N=1$ et différents $Ra_T$ .....	50
Figure 4.5: Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) locaux sur la paroi interne pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ , $Le=1$ et différents $Ra_T$ .....	51
Figure 4.6 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) locaux sur la paroi externe pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ , $Le=1$ et différents $Ra_T$ .....	52
Figure 4.7 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ et différents $Le$ .....	53
Figure 4.8: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ et différents $Le$ .....	53
Figure 4.9 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Ra_T=5.10^4$ , $N=1$ et différents $Le$ .....	55
Figure 4.10 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Ra_T=5.10^4$ , $N=5$ et différents $Le$ .....	56
Figure 4.11 : Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents $Le$ .....	57
Figure 4.12 : Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents $Le$ .....	58

Figure 4.13 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N .....	59
Figure 4.14 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N.....	59
Figure 4.15 : Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $N=1$ et $Ra_T=5.10^4$ .....	60
Figure 4.16 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Ra_T=5.10^4$ , $Le=1$ et différents N.....	63
Figure 4.17 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $\alpha=90^\circ$ , $C_2=0.5$ , $Ra_T=5.10^4$ , $Le=10$ et différents N.....	64
Figure 4.18 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi interne pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Le=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas coopérant).....	65
Figure 4.19 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi externe pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Le=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas opposant).....	65
Figure 4.20 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi externe pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Le=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas coopérant).....	66
Figure 4.21 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi externe pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Le=1$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas opposant).....	66
Figure 4.22 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas opposant).....	67
Figure 4.23 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas opposant).....	67
Figure 4.24 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas coopérant).....	68
Figure 4.25 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour $C_2=0.5$ , $\alpha=90^\circ$ , $Ra_T=5.10^4$ et différents N (cas coopérant).....	68
Figure 4.26 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour $C_2=0.5$ , $Ra_T=5.10^4$ , $N=1$ , $Le=1$ et différents $\alpha$ .....	70
Figure 4.27 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) moyen sur la paroi interne en fonction de l'angle d'inclinaison $\alpha$ pour $C_2=0.5$ , $Le=1$ , $N=1$ et $Ra_T=5.10^4$ .....	71
Figure 4.28 : Influence de l'excentricité relative $C_2$ sur la conductivité équivalente thermique locale (paroi interne) pour $\alpha=90^\circ$ , $Le=1$ , $N=0$ et $Ra_T=5.10^4$ .....	72
Figure A.1 : Représentation schématique des coordonnées bicylindriques.....	75

**Figure A.2 : Représentation schématique de deux cylindres excentrés..... 80**

# Liste des Tableaux

<b>Tableau 3.1 : Les sources et les coefficients de diffusion des variables <math>\varphi</math>.....</b>	<b>27</b>
<b>Tableau 4.1 : Variation de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds.....</b>	<b>44</b>
<b>Tableau 4.2 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de Kuehn et al. [7] avec nos résultats.....</b>	<b>45</b>
<b>Tableau 4.3 : Comparaison de nos résultats avec ceux de Guj et al. [9].....</b>	<b>46</b>

# Sommaire

**DEDICACES**

**REMERCIEMENTS**

**NOMENCLATURE**

**LISTE DES FIGURES**

**LISTE DES TABLEAUX**

**SOMMAIRE**

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	1
<b>CHAPITRE 1 – RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	3
1. Généralités	3
1.1 La convection naturelle	3
1.2 La convection thermosolutale	4
1.3 Revues bibliographiques	4
<b>CHAPITRE 2 – ANALYSE THEORIQUE</b>	13
2.1 Introduction	13
2.2 Description et géométrie du problème	13
2.3 Hypothèses simplificatrices	13
2.4 Formulation du problème	14
2.4.1 Formulation vectorielle	14
2.4.2 Formulation indicielle	15
2.5 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes	16
2.6 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement	16
2.7 Introduction des coordonnées bicylindriques	17
2.8 Adimensionalisation des équations gouvernantes	19
2.9 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles	21
2.10 Transferts thermique et massique	22
2.10.1 Valeur locale du nombre de Nusselt	22
2.10.2 Nombre de Nusselt moyen	22
2.10.3 Valeur locale du nombre de Sherwood	22
2.10.4 Nombre de Sherwood moyen	23

2.11	Conclusion	23
	<b>CHAPITRE 3– FORMULATION NUMERIQUE</b>	24
3.1	Introduction	24
3.2	Méthode de résolution numérique	24
3.2.1	Volume élémentaire d'intégration	25
3.2.2	Discretisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\varphi$ dans le volume de contrôle	26
3.3	Discretisation de l'équation de la chaleur	30
3.3.1	Discretisation des conditions aux limites	33
3.11	Discretisation de l'équation de la masse	33
3.4.1	Discretisation des conditions aux limites	34
3.5	Discretisation de l'équation de quantité de mouvement	34
3.5.1	Discretisation des conditions aux limites	36
3.6	Discretisation de l'équation de la fonction de courant	37
3.6.1	Discretisation des conditions aux limites	38
3.7	Discretisation des composantes de la vitesse	38
3.8	Algorithme de calcul	38
3.9	Conclusion	42
	<b>CHAPITRE 4 – RESULTATS ET DISCUSSIONS</b>	43
4.1	Introduction	43
4.2	Etude du maillage	43
4.3	Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature	44
4.3.1	Pour le cas concentrique	44
4.3.2	Pour le cas excentrique	45
4.4	Résultats et discussions	46
4.4.1	Influence du nombre de Rayleigh thermique	46
4.4.2	Influence du nombre de Lewis	53
4.4.3	Influence du rapport des forces de poussées solutale et thermique	60
4.4.4	Effet de l'angle d'inclinaison $\alpha$	69
4.4.5	Influence de l'excentricité relative	71
4.5	Conclusion	72
	<b>CONCLUSION GENERALE</b>	73

<b>ANNEXE – COORDONNEES BICYLINDRIQUES</b>	75
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	85
<b>RESUMES</b>	90

# Introduction Générale

L'étude, présentée dans cette thèse, s'inscrit dans le cadre de l'étude des transferts de chaleur et de masse, dans les espaces annulaires remplis d'un fluide binaire. La recherche dans ce domaine couvre un champ très vaste. Car les applications concernées sont extrêmement variées. On peut citer les procédés de séchage, l'isolation thermique, les écoulements géophysiques, la croissance cristalline, ...etc.

Dans cette investigation, nous nous proposons d'analyser les transferts de chaleur et de masse induits par des écoulements dus aux forces de volumes d'origine thermique et solutale d'un fluide binaire dans un espace annulaire, situé entre deux cylindres excentrés horizontaux, orienté selon un angle  $\alpha$ , les deux parois cylindriques de l'enceinte maintenues isothermes. L'enceinte considérée est intéressante. Elle constitue en effet une généralisation qui admet, comme cas particulier, l'espace annulaire cylindrique concentrique. Le code de calcul mis au point pourra donc aisément être appliqué à ce cas.

La présentation de cette thèse est articulée de la façon suivante:

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection thermique et/ou solutale dans un espace annulaire, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur et de masse à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme (**P. Moon and E. Spencer [1,2]**) qui transforme le domaine curviligne en un domaine rectangulaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développés. Les équations paraboliques décrivant l'écoulement sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis (**S.V. PATANKAR [3] et E. Saadjan [5]**) tandis que l'équation de la fonction de courant l'est à l'aide d'un développement en série de Taylor, les équations ainsi obtenues sont résolues par la méthode de relaxation successive (Successive Relaxation) (**E.F. NOGOTOV [4] et P.J. ROACHE [6]**).

Nous rassemblons dans le chapitre quatre, une étude du maillage, ensuite nous validons notre code de calcul par un résultat numérique dans le cas concentrique et un autre dans le cas

excentrique issu de la littérature et enfin nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt et Sherwood locaux et moyens, sur les parois interne et externe de l'enceinte, sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , du nombre de Lewis  $Le$ , des forces de flottabilité  $N$ , de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , pour voir leur effet sur les transferts de chaleur au sein de l'enceinte considérée.

Les principaux résultats numériques de cette étude, les commentaires, les interprétations et l'analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

# Recherche Bibliographique

## 1. GENERALITES

### 1.1. La convection naturelle:

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité dus à la non uniformité de la température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant.

Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. On peut observer les effets de la convection quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique (voir figure 1.1), les vents et les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle.

La convection 'libre' ou 'naturelle' est la forme d'échange convectif la plus couramment observé. Elle apparait dans le champ des forces de masse extérieures dont la nature peut être différente. Donc la convection naturelle est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait d'écoulement 'extérieur' imposé.

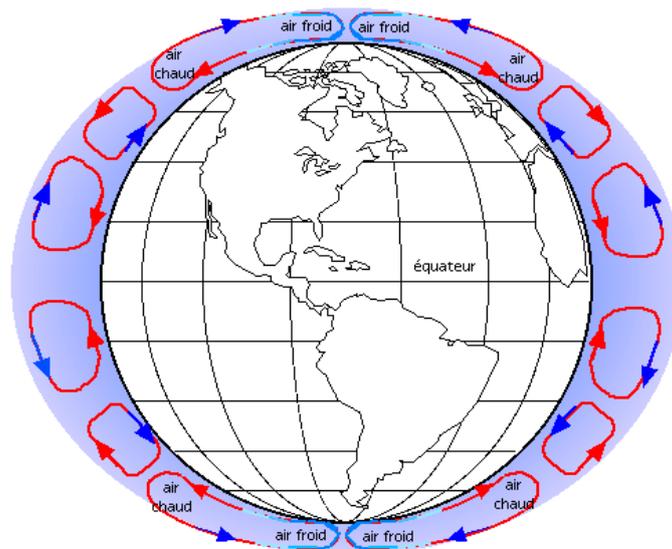


Figure 1.1 : Convection naturelle dans l'atmosphère, Cellules de Hadley.

## **1.2. La convection thermosolutale**

Dans la convection naturelle thermosolutale il s'agit principalement de l'étude des mouvements convectifs induits par un gradient de température et un gradient de concentration. Ces gradients engendrent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui génère à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité.

L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années à la convection naturelle thermosolutale est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles telles que : le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, les processus de séchage, les opérations de dessalement d'eau de mer, la distillation, la climatisation, le séchage du bois, le refroidissement des composants électroniques...

## **1.3. Revue bibliographique**

L'étude de la convection naturelle dans des enceintes fermées a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Beaucoup de travaux publiés ont été élaborés concernant la convection naturelle dans des espaces annulaires cylindriques centrées et excentrées, nous nous limiterons ici aux travaux qui nous ont permis la validation de quelques-uns de nos résultats ainsi qu'à ceux entrepris par notre équipe de recherche dans ce domaine.

**Kuehn et al. [7]** ont étudié expérimentalement l'influence de l'excentricité sur le transfert de chaleur. Ils ont présenté des interférogrammes qui permettent de bien visualiser le champ de température et de déterminer les taux de transfert de chaleur. Ils ont mis en évidence un écoulement secondaire localisé au-dessus du cylindre interne quand il est proche du sommet du cylindre externe. Les mêmes auteurs **[8]** ont élaboré une étude expérimentale et numérique sur la convection naturelle dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques et horizontaux dont le rapport des rayons a été pris égal à 2.6, ils ont calculé une conductivité thermique équivalente locale. Ils ont obtenu des résultats en accord avec ceux de l'analyse numérique qu'ils ont réalisée et qui est basée sur la méthode des différences finies et la technique de relaxations successives. **Guj et al. [9]** ont étudié la convection naturelle entre deux anneaux excentriques horizontaux. Ils ont utilisé la méthode des différences finies et des variables primitives pour résoudre les équations incompressibles de Navier-Stokes.

Notre équipe de recherche du laboratoire, a fait plusieurs études sur la convection naturelle dans des espaces annulaires cylindriques, et elliptiques excentrées. Citons par exemple, les travaux de **Djezzar et al. [10-13]**, qui ont étudié numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire formé de deux cylindres elliptiques d'axes horizontaux et confocaux en utilisant la formulation en variables primitives, ils ont pu déceler des écoulements multicellulaires, pour certaines géométries quand le nombre de Grashof augmente, ceci pour les trois conditions thermiques pariétales utilisées. **Ghernoug et al. [14]** ont étudié numériquement le phénomène de la convection naturelle, en régime laminaire et permanent dans un espace annulaire, situé entre deux cylindres excentrés horizontaux, orienté selon un angle  $\alpha$ . Ils ont considéré dans un premier cas, les deux parois cylindriques de l'enceinte isothermes, et dans un deuxième cas, la paroi cylindrique interne est soumise à une densité de flux de chaleur constante. L'effet de l'inclinaison du système, des valeurs de l'excentricité relative et du nombre de Grashof sur les résultats obtenus a été examiné.

Quant au cas de la convection thermosolutale, les investigations ont commencé initialement par l'étude du déclenchement du mouvement dans une couche horizontale soumise à des gradients thermiques et solutaux verticaux. Les travaux de **Nield** en milieu fluide [15] et poreux [16], concernant la double diffusion sur les couches horizontales, générée par des gradients de température et de concentration opposés, ont permis la prédiction du nombre de Rayleigh supercritique marquant l'apparition de la convection, pour plusieurs types de conditions aux limites.

Il apparaît sans aucun doute que le problème de la convection naturelle thermosolutale dans des espaces annulaires cylindriques excentriques n'a pas été étudié jusqu'à présent. La plus grande majorité a été consacrée aux cavités carrées et rectangulaires selon notre recherche bibliographique présentée dans ce qui suit :

Une étude analytique et numérique de la convection au sein d'une cavité carrée, remplie d'un gaz binaire et soumise à des gradients combinés de température et de concentration, a été présentée par **Ranganathan et al. [17]**. Ces derniers ont observé que le renversement du sens de l'écoulement se produit approximativement à  $N=-1$ , quand les forces de volume sont égales et opposées. **Ghorayeb et al. [18]** ont étudié, dans le cas particulier où les forces thermique et solutale sont opposantes et leur rapport est égal à l'unité, l'influence du nombre de Lewis sur la naissance des régimes convectifs et la structure de l'écoulement dans une enceinte carrée. Les résultats obtenus à partir de l'analyse de la stabilité linéaire ont mis en évidence, en plus du régime supercritique, une grande variété de solutions sous-critiques dont le nombre est fonction du rapport de forme de la cavité. Dans une autre étude, **Ghorayeb et**

**al. [19]** ont fait des simulations numériques de l'instabilité de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec des forces de volume égales et de sens opposés pour un intervalle de nombre de Lewis compris entre 2 et 45. Dans cette situation l'état stable de la structure de l'écoulement est symétrique par rapport au centre et il reste stable jusqu'à la hauteur d'un seuil de la valeur du nombre de Grashof thermique au-delà du quelles écoulements oscillatoires apparaissent. Cependant l'état oscillatoire est soit symétrique par rapport au centre ou asymétrique dépendant de la valeur du nombre de Lewis. **Costa [20]** a étudié numériquement la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec des parois horizontales diffusives en chaleur et en masse. Les objectifs principaux de son étude sont la réalisation d'un modèle mathématique complet pour ce genre de problème et l'analyse des résultats montrant ainsi l'influence des murs horizontaux sur le transfert de chaleur et de masse. **Sévéléder et al. [21]** se sont intéressés à l'influence des conditions aux limites de la température et de la concentration sur la structure d'écoulement de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité carrée avec les paramètres suivants :  $Pr = 2.2$ ,  $Sc=130$ ,  $Rat=5.5 \times 10^5$ ,  $Ras=1.3 \times 10^5$ , qui correspondent à un gaz liquéfié. Les résultats montrent l'apparition d'une seule cellule à cause de la condition de température et de concentration uniforme sur les parois verticales, mais la condition de la variation linéaire de température et de concentration fait apparaître quatre cellules. L'état stable de la convection thermosolutale dans une cavité carrée remplie par l'air, a été étudié numériquement par **Béghein et al. [22]**. Ils ont étudié l'influence des forces de volume sur les transferts de chaleur et de masse, et du nombre de Lewis sur le mouvement. **Mamou et al. [23]** ont examiné les écoulements dans une cavité carrée soumise à des flux horizontaux de chaleur et de masse. Dans le cas où les forces de volume sont opposées et de même ordre de grandeur, l'existence de solutions multiples a été démontrée. Celles-ci dépendent fortement des nombres de Rayleigh thermique et de Lewis. **Sezai et al. [24]** ont étudié la convection naturelle à double diffusion tridimensionnelle dans une enceinte cubique pour des gradients thermiques et solutaux horizontaux opposés. Dans leurs résultats, ils indiquent que l'écoulement doublement diffusif dans les cavités avec les forces de volume opposées est strictement tridimensionnel pour une certaine rangée de paramètres. **Abidi et al. [25]** ont étudié numériquement en utilisant le formalisme vorticité vecteur potentiel, la convection naturelle à double diffusion dans une cavité tridimensionnelle remplie d'une solution aqueuse et ayant les parois horizontales diffusives en chaleur et en masse. Les effets de ces conditions ont été traités pour  $Ra=10^5$ ,  $Pr=10$  et  $Le=10$  pour différentes valeurs des coefficients de transfert de chaleur et de masse  $R_c$  et  $R_d$ . Cette étude a montré que l'ajout des parois diffusives en chaleur

et en masse induit une diminution de l'intensité globale de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse, ceci d'une part et favorise l'écoulement transversal, d'autre part. **Kuznetsov et al. [26]** ont examiné la convection naturelle double diffusive à l'intérieur d'une cavité cubique dont la paroi inférieure est isotherme et maintenue à une concentration uniforme et les autres parois sont adiabatiques et imperméables. Ils ont examiné l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le taux de transfert de chaleur et de masse, l'influence du rapport de conductivité sur le transfert de chaleur et de masse et l'effet de la taille des sources de masse de la chaleur sur les régimes de transfert de masse.

Pour les cavités rectangulaires, la convection naturelle avec une température et concentration imposées le long des frontières verticales, a été étudié pour la première fois par **Trevisan et al. [27]**. Un bon accord entre les simulations numériques et analyse d'échelle du phénomène a été observé. **Ghorayeb et al. [28]** ont étudié la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire de parois horizontales isolées verticales soumises à des gradients horizontaux de température et de concentration, dans cette étude le rapport des forces de volume solutal et thermique est égale à -1. Ils ont étudié la stabilité linéaire de la solution d'équilibre pour une cellule rectangulaire jusqu'au cas limite de la cellule d'extension infinie. **Benissaad et al. [29]** ont étudié numériquement, la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire avec un rapport d'aspect égal à 4. Ils ont considéré le cas d'une solution aqueuse ayant les paramètres suivants ;  $Pr=7$ ,  $Sc=240$ ,  $Gr_t=2,2 \times 10^5$  et  $Gr_s$  variant de  $10^4$  à  $10^7$ . Les poussées, thermique et solutale, sont coopérantes ou opposantes. Les résultats obtenus ont permis d'observer une variété de régimes d'écoulement. Quand les forces de volume sont opposantes, l'écoulement est permanent et monocellulaire pour des valeurs de  $Gr_s$  variant entre  $10^4$  et  $2,2 \times 10^5$ . A partir de  $Gr_s$  égal à  $2,2 \times 10^5$  et jusqu'à  $7 \times 10^5$ , l'écoulement devient transitoire. Lorsque  $Gr_s$  est supérieur ou égal à  $8 \times 10^5$  et inférieur à  $2,2 \times 10^6$ , l'écoulement bifurque vers un régime permanent et multicellulaire. Pour des valeurs de  $Gr_s$  supérieures ou égale à  $2,2 \times 10^6$ , l'écoulement redevient permanent et monocellulaire. **Akrour et al. [30]** ont fait une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire, les parois horizontales de l'enceinte sont chauffées et refroidies et un gradient de concentration vertical est imposé. L'objectif de leur investigation est d'identifier le régime d'écoulement à dominance thermique ou solutale. Ils ont constaté qu'il est possible d'obtenir plusieurs solutions qui dépendent essentiellement des conditions initiales. Aussi, les résultats révèlent, que pour un fluide stratifié, un transfert de chaleur conductif s'installe au dépend de la convection thermique. **Kamotani et al. [31]** ont étudié expérimentalement la convection à double diffusion dans une enceinte rectangulaire, ayant un

rapport d'aspect ( $A=H/L$ ) variant entre 0.13 et 0.55, dans le cas où les forces de volume sont coopérantes ou opposantes. Ils ont employé une technique électrochimique pour imposer les concentrations sur les parois verticales. Les résultats obtenus dans cette étude, signalent l'existence de régimes multicellulaires obtenus à contre-courant pour  $N>10$  et à co-courant pour  $N>6$ . Dans le cas des forces de volumes coopérantes et opposantes, **Lee et al. [32, 33]** ont étudié la convection à double diffusion dans une cavité rectangulaire. Les résultats obtenus montrent, dans le cas opposant [32] quand  $N$  est modéré, que la structure de l'écoulement est multicellulaire. Les nombres moyens de Nusselt  $Nu$  et de Sherwood  $Sh$  varient en fonction des valeurs de  $N$ . Lorsque  $N$  augmente depuis une faible valeur,  $Nu$  décroît de façon monotone jusqu'à une valeur caractéristique de la conduction ; néanmoins  $Sh$  atteint une valeur minimale quand  $N$  prend une valeur modérée  $N=3$ . Les mêmes auteurs [34], ont étudié expérimentalement la stabilité de la convection à double diffusion avec des gradients de température et de concentration horizontaux, dans des enceintes rectangulaires de rapport d'aspect ( $A=H/L$ ) variant de 0.2 à 2. Les résultats obtenus montrent un écoulement unicellulaire pour un rapport des forces de volume élevé ou faible, alors que le régime d'écoulement multicellulaire apparaît pour les valeurs intermédiaires de ce rapport. :  $8<N<55$  dans le cas coopérant et  $-5<N<-13$  dans le cas opposant. **Benissaad et al. [35]** ont traité numériquement la convection naturelle bidiffusive dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux. L'écoulement est entraîné par les forces des poussées thermiques et solutales. Les résultats obtenus montrent que la variation du nombre de Grashof solutal a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. La convection transitoire et apériodique se manifeste dans un intervalle de Grashof solutal entre  $3\times 10^5$  et  $5\times 10^5$ . **Bennacer et al. [36]** ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale. Ils ont utilisé l'analyse d'échelle et ont montré numériquement que la distinction entre la dominance de l'écoulement par le transfert thermique et le transfert massique dépend de différents critères.

L'effet du rapport des forces de volume sur la bifurcation des structures a été examiné numériquement pour un gaz binaire dans une enceinte rectangulaire par **Nishimura et al. [37]**, la solution montre que la convection est oscillatoire pour le cas opposant dans la limite d'un intervalle du rapport des forces de volume autour de  $N=1$ , pour des valeurs particulières des nombres de Rayleigh et de Lewis. **Chamkha et al. [38]** ont étudié numériquement les caractéristiques hydromagnétiques d'un écoulement convectif bidiffusif dans une cavité rectangulaire remplie d'un mélange de gaz binaire. L'oscillation de l'écoulement est observée

en l'absence de tout champ magnétique. Mais en présence d'un champ magnétique externe appliqué suivant la direction X l'écoulement n'est plus oscillatoire. Tout récemment, **Nikbakhti et al. [39]** ont analysé numériquement le transfert de chaleur et de masse pour l'air contenu dans une cavité rectangulaire avec des murs partiellement thermiquement actifs. **Teamah et al. [40]** ont étudié numériquement un écoulement à double diffusion de convection naturelle dans une enceinte rectangulaire inclinée en présence de champ magnétique et d'une source de chaleur. Les auteurs ont conclu que: l'angle d'inclinaison affecte les forces de flottabilité et le champ magnétique réduit le transfert de chaleur et de circulation de fluide en raison de l'effet de retard de la force de corps électromagnétique.

Pour les cavités cylindriques, **Shi et Lu [41,42]** ont étudié la convection naturelle à double diffusion dans un cylindre vertical avec des gradients de température radiaux et de masse axiaux. Leur étude a porté sur l'effet du rapport des forces de flottabilité sur l'évolution du champ d'écoulement, de température et de masse dans la cavité. Dans leur étude, les paramètres suivants ont été fixés le nombre de Prandtl,  $Pr = 7$ , le nombre de Lewis,  $Le = 5$ , le nombre de Grashof thermique,  $Gr_T = 10^7$ , et le rapport d'aspect de l'enceinte  $A=2$ . **Al Amiri et al. [43]** ont étudié numériquement les caractéristiques de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse d'un fluide newtonien dans un espace annulaire horizontal avec le cylindre extérieur tournant à une vitesse constante dans le sens antihoraire, l'écoulement a été considéré laminaire, la convection double-diffusive est maintenue en prenant le cylindre intérieur comme paroi de chauffage et source de concentration. Ils ont examiné l'effet des différents paramètres sur la structure de l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de masse. Les résultats montrent que l'augmentation de la valeur absolue du rapport de poussée et du nombre de Lewis fait augmenter le nombre de Nu et aussi bien le nombre de Sh. **Teamah [44]** a étudié la convection mixte laminaire double diffusive dans un anneau horizontal en deux dimensions. Le cylindre intérieur tourne dans le sens antihoraire pour introduire l'effet d'une convection forcée. En outre, les cylindres intérieur et extérieur sont maintenus à des températures et des concentrations uniformes avec des valeurs plus élevées pour la paroi interne. Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont produites pour illustrer la structure de l'écoulement et les champs de température et de concentration à travers l'enceinte étudiée. L'influence des différents paramètres sur les taux de transfert de chaleur et de masse a été examinée. L'étude de **Hyung et al. [45]**, concerne la convection naturelle double diffusive dans un cylindre en rotation dans laquelle l'écoulement est piloté par des flux, de chaleurs horizontaux et des flux de concentrations verticaux, l'influence de la rotation sur la structure globale de l'écoulement a été mise en évidence. Il a

aussi prouvé que pour les valeurs moyennes du rapport de flottabilité  $N$ , l'écoulement devient fortement dépendant de l'effet de la rotation. **Simatev [46]**, a mené une étude sur la convection naturelle à double diffusion dans un anneau cylindrique rotatif avec des bouchons coniques.

Les espaces annulaires formés par des cylindres elliptiques d'axes horizontaux centrés ou excentrés ont aussi donné matière à des travaux, citons comme exemple **Bouras et al. [47]** qui ont fait une étude de la convection naturelle double diffusible dans un espace annulaire situé entre deux cylindres elliptiques d'axes horizontaux confocaux, Ils ont utilisé des nombres de Rayleigh thermique allant jusqu'à  $5 \cdot 10^5$ . Ils ont examiné l'influence du nombre de Rayleigh et du nombre de Prandtl. Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont produites pour illustrer la structure de l'écoulement et les champs de température et de concentration à travers l'enceinte étudiée.

Pour les autres géométries, une étude numérique de **Shipp et al. [48, 49]** a été consacrée à la convection naturelle double diffusible en régime laminaire dans un anneau vertical fermé, avec des différences de température et de concentration imposées à travers les parois verticales. Ils ont étudié l'influence des nombres de Rayleigh thermique et Lewis sur la structure de l'écoulement et les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood. **Akrour [50]** a étudié numériquement la convection à double diffusion dans une enceinte horizontale. La cavité soumise à un gradient de concentration vertical est chauffée différemment au niveau de ses parois horizontales ou verticales. Les équations couplées modélisantes sont discrétisées numériquement par la méthode des volumes finis. La résolution a ensuite été effectuée par la procédure de double balayage (ADI) et le couplage pression-vitesse par l'algorithme SIMPLER. Ils ont considéré l'effet, sur les transferts, du nombre  $N$  qui caractérise le rapport des forces de volume d'origine thermique et solutale pour  $Pr=7$ ,  $Le=100$  et  $A=2$ . Leurs résultats montrent que pour les faibles valeurs de  $N$ , des cellules convectives dues aux forces thermiques se mettent en place et le transfert devient indépendant de  $N$ . Pour des valeurs de  $N$  plus élevées, le transfert est diffusif et la stratification stable en concentration supprime l'écoulement. Pour des valeurs intermédiaires de  $N$ , le transfert diminue avec l'accroissement de  $N$ . Dans la zone de transition, la solution numérique dépend de la condition initiale. **Lin et al. [51]** ont examiné la double diffusion dans une cavité verticale soumise à des gradients horizontaux opposés de température et de concentration. Quand le rapport des forces de volume est voisin de l'unité, ces auteurs ont obtenu des écoulements convectifs oscillants pour  $Le=400$ .

**Boussaid et al. [52]** ont fait une étude numérique de la convection naturelle de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale chauffée par le bas et refroidie par la paroi inclinée supérieure. Les résultats montrent la relation étroite entre l'angle d'inclinaison de la paroi et l'écoulement. L'influence des sollicitations thermosolutales de la nature des espèces en présence et de la géométrie de la cavité est analysée. Ils ont examiné l'effet des différents paramètres sur les taux de transfert de chaleur et de masse. **Jang et al. [53]** ont étudié numériquement la convection naturelle de chaleur et de masse le long d'une surface ondulée verticale en utilisant le théorème de transposition de Prandtl et ils ont examiné les effets des surfaces irrégulières sur les caractéristiques de la convection naturelle de chaleur et de masse. Il a été constaté qu'avec l'augmentation du nombre de Schmidt, le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt local diminuent mais le nombre de Sherwood local augmente. **Rahman [54]**, a analysé expérimentalement la convection naturelle thermique et massique le long d'une surface verticale ondulée. L'augmentation du rapport entre l'amplitude de la sinusoïde et la longueur d'onde ( $a/\lambda$ ) provoque une diminution du transfert massique.

**Khanafer et al. [55]** ont analysé numériquement la diffusion de l'eau à l'intérieur du tissu cérébral, pour diverses conditions cliniques. Une large gamme de paramètres pertinents tels que le nombre de Lewis, le volume de la cellule, et le rapport de flottabilité ont été considérés dans leur étude. Les résultats ont montré que le coefficient de diffusion, le volume de la cellule, et le rapport de la flottabilité jouent un rôle important sur la caractérisation du mécanisme de transfert de chaleur et de masse à l'intérieur de la cellule. **Al-Amiri et al. [56]** ont étudié la convection mixte stable dans une cavité de couvercle axé carré sous les effets combinés de flottabilité de diffusion thermique et de masse. Ils ont observé que le transfert de chaleur et de masse sont améliorés pour les faibles nombres de Richardson. **Yan et al. [57]** ont étudié l'effet du film liquide sur le transfert de chaleur et de masse par convection laminaire dans un canal vertical. Le canal est formé par deux plaques parallèles et adiabatiques sur lesquelles ruisselle un film liquide de température supérieure à celle de l'air à l'entrée du canal. L'écoulement est descendant. Les résultats obtenus montrent que le rapport entre les chaleurs latente et sensible transférées est plus important pour des faibles débits d'écoulement et des températures élevées du film. **Yan [58]** a mené une étude sur le transfert de chaleur et de masse en convection mixte laminaire dans une conduite rectangulaire en rotation et en présence d'un film d'eau en évaporation. La conduite a des parois poreuses, isothermes et humides. L'auteur a constaté que le transfert de chaleur le long des parois est dominé par le transport de chaleur latente et que la rotation favorise le transfert de chaleur et de masse et augmente le facteur de friction local. Le même auteur **[59]**, a traité

numériquement le refroidissement évaporatif d'un film liquide par la convection mixte en régime turbulent dans un canal vertical. Le canal est formé par deux plaques planes supposées adiabatiques, sur lesquelles ruisselle un film liquide. L'écoulement est descendant. Leurs résultats montrent que le transfert de chaleur est dominé par le transport de chaleur latente liée à l'évaporation du film liquide et que le refroidissement est maximal pour des valeurs élevées de température d'entrée.

**Oulaid et al. [60]** ont mené une étude numérique sur les transferts de chaleur et de masse en convection mixte laminaire avec changement de phase dans un canal incliné. La paroi supérieure du canal est maintenue isotherme et imperméable à la matière alors que celle inférieure est maintenue isotherme et mouillée par un film d'eau liquide d'épaisseur négligeable. L'effet des forces de flottabilité et celui de l'angle d'inclinaison du canal ont été spécifiquement abordés. Les résultats obtenus montrent que les forces de flottabilité décélèrent l'écoulement au voisinage des parois du canal et provoquent un renversement d'écoulement au voisinage de la plaque humide.

Récemment, **Xu et al. [61]** ont étudié la convection mixte double diffusive autour d'un cylindre chauffé dans une enceinte. Le cylindre chauffé est situé au centre de l'enceinte avec une concentration élevée. L'écoulement d'entrée avec une basse température et concentration se situe à la paroi inférieure gauche de l'enceinte et la sortie est à la paroi supérieure droite. Les autres parois sont supposées être adiabatiques. L'influence du nombre de Lewis, du rapport de flottabilité et du nombre de Richardson a été examinée. Les isothermes, les isoconcentrations, les lignes de courant et les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens sont produits pour illustrer la structure de l'écoulement et les champs de température et de masse à travers l'enceinte étudiée.

Le problème de la convection mixte double diffusive autour d'un cylindre chauffé dans une enceinte avec différentes positions de sortie, en adoptant le modèle température-concentration de Lattice BGK a été illustré par **Xu et al. [62]**. Dans ce modèle, les distributions de la vitesse, de la température et de la concentration sont obtenues par la résolution des trois équations indépendantes LBGK qui sont combinées en une équation couplée. Ils ont examiné l'influence du nombre de Lewis, du rapport de flottabilité et des positions de la sortie sur la convection mixte double diffusive. Les résultats sont présentés en termes des isothermes, des isoconcentrations, des lignes de courant et des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens dans l'enceinte étudiée.

# Analyse Théorique

## 2.1 Introduction

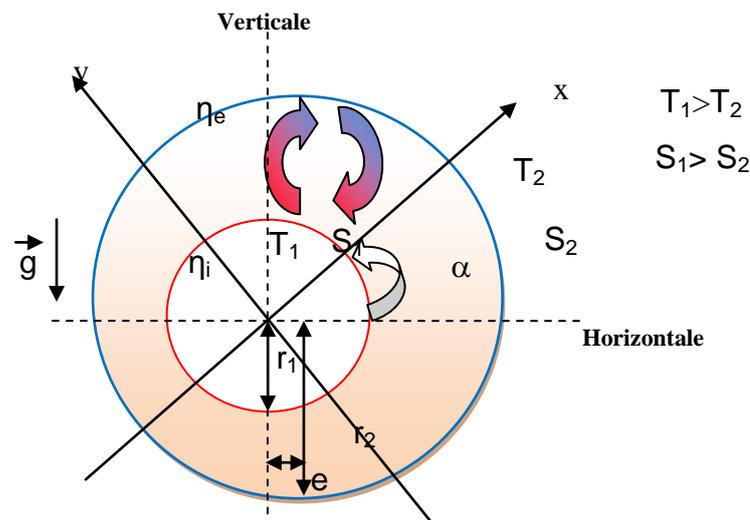
Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre le phénomène de la convection naturelle thermosolutale dans un espace annulaire situé entre deux cylindres excentriques d'axes horizontaux. Le couplage du transfert de chaleur et de masse est nécessaire parce que la densité du fluide considéré dépend de la température et de la concentration. Nous formulons le modèle mathématique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

## 2.2 Description et géométrie du problème

On se propose d'étudier la convection naturelle thermosolutale (double diffusive) dans un espace annulaire, rempli d'un fluide binaire newtonien, situé entre deux cylindres excentriques, horizontaux. Le fluide est de l'air et la substance diffusée dans l'enceinte est de la vapeur d'eau.

Les deux parois cylindriques interne et externe sont maintenues respectivement aux températures  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$  et aux concentrations  $S_1$  et  $S_2$  avec  $S_1 > S_2$ .

La configuration de l'écoulement est illustrée sur la figure (2.1).



## 2.3 Hypothèses simplificatrices

Nous posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- ✓ On considère un écoulement de fluide binaire, à propriétés physiques constantes.
- ✓ La solution binaire est un fluide newtonien, incompressible.
- ✓ Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes dans la gamme de température et de concentration étudiée.
- ✓ le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.
- ✓ La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur et de masse.
- ✓ le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des deux parois étant négligées).
- ✓ Les interactions entre le transfert de chaleur et de masse (effets de Soret et Dufour) sont négligeables.
- ✓ les variations de la masse volumique  $\rho$  du fluide binaire sont négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température et la concentration, supposées linéaires, engendrent la convection naturelle bidiffusive selon l'approximation de Boussinesq.

L'équation d'état est donc sous la forme :

$$\rho = \rho(P, T, S) = \rho(T, S) = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_S (S - S_0)] \quad (2.1)$$

Où :

$$\beta_T : \quad \text{coefficient d'expansion thermique (constant) égal: } \beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,S} .$$

$$\beta_S : \quad \text{coefficient d'expansion massique (constant) égal: } \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{P,T} .$$

$\rho_0$  : masse volumique à la température et la concentration de référence (constante).

$T_0$  : température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

$S_0$  : concentration de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

$\beta_T$  est positif pour tous les fluides, tandis que  $\beta_S$  peut être positif ou négatif selon le soluté considéré. Si la densité augmente  $\beta_S$  est négatif et si cette dernière diminue  $\beta_S$  est positif.

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à  $\rho_0$ .

## **2.4 Formulation du problème**

### **2.4.1 Formulation vectorielle**

Les équations de la convection naturelle thermosolutale laminaire, régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, s'écrivent sous forme vectorielle :

❖ Equation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

❖ Equation du mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (2.3)$$

❖ Equation de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) T = \alpha_T \nabla^2 T \quad (2.4)$$

❖ Equation de masse:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) S = D \nabla^2 S \quad (2.5)$$

avec :

$\vec{V}$  : vitesse du fluide.

$\vec{g}$  : accélération de la pesanteur.

$\mathcal{P}$  : tenseur des contraintes.

$\alpha_T$  : diffusivité thermique du fluide.

$D$  : diffusivité massique du fluide.

$T$  : température du fluide.

$S$  : concentration du fluide.

$t$  : temps

### 2.4.2 Formulation indicielle

❖ Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.2.a)$$

❖ Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_S (S - S_0)] g_i \quad (2.3.a)$$

❖ Equation de chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.4.a)$$

❖ Equation de la masse:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{S} V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_j} \right) \quad (2.5.a)$$

Avec :

P : pression du fluide.

$\tau_{ij}$  : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesses.

## 2.5 Formulation des équations en coordonnées cartésiennes

Introduisons les coordonnées cartésiennes telles qu'elles sont définies sur la figure (2.2). Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_S \Delta S] + v \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.7.a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_S \Delta S] + v \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.7.b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$U \frac{\partial S}{\partial x} + V \frac{\partial S}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

## 2.6 Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement

En dérivant les équations du mouvement (2.7.a) et (2.7.b) respectivement par rapport à y et à x, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (g [\beta_T \Delta T - \beta_S \Delta S] \sin(\alpha)) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (g [\beta_T \Delta T - \beta_S \Delta S] \cos(\alpha)) + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.10.b)$$

En soustrayant l'équation (2.10.a) de (2.10.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité  $\omega$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \beta_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + g \beta_S \left( \frac{\partial S}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial S}{\partial x} \cos(\alpha) \right) \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Avec :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.12.aa)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.12.b)$$

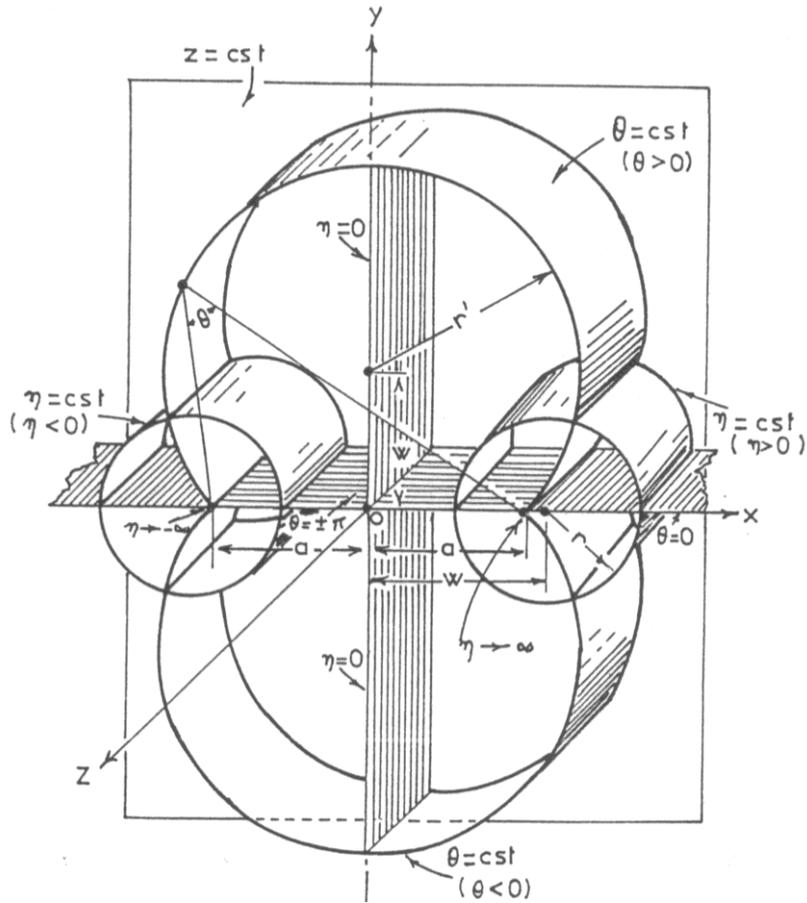
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.12.bb)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.12.c)$$

## **2.7 Introduction des coordonnées bicylindriques**

Il est commode de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites « bicylindriques » [1,2], permettent, précisément dans notre cas, d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées  $(\eta, \theta, z)$  les surfaces  $\eta = \text{constante}$  sont des cylindres circulaires avec des axes dans le plan  $xz$ , les surfaces  $\theta = \text{constante}$  sont les portions des cylindres circulaires avec des axes dans le plan  $yz$ , et les surfaces  $z = \text{constante}$  sont des plans parallèles.



**Figure 2.2 Représentation schématique des coordonnées bicyclindriques**

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicyclindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes (voir annexe) :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cdot \text{sh}(\eta)}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y &= \frac{a \cdot \sin(\theta)}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Les équations (2.6), (2.8), (2.9) et (2.11) s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) = 0 \quad (2.14)$$

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha_T \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.15)$$

$$V_\eta \frac{\partial S}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = D \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{g \beta_T}{h} \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} + \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

$$+ \frac{g \beta_S}{h} \left\{ \begin{array}{l} [-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ + [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{array} \right\} + \frac{v}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right)$$

$$a = r_1 \text{sh}(\eta_1) = r_2 \text{sh}(\eta_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{a}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \\ F(\eta, \theta) = \frac{1 - \cos(\theta) \text{ch}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \\ G(\eta, \theta) = \frac{\sin(\theta) \text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Où :  $V_\eta$ ,  $V_\theta$  sont les composantes de la vitesse suivant les directions  $\eta$ ,  $\theta$ .  
En introduisant la fonction de courant  $\psi$ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\left. \begin{array}{l} V_\eta = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

Nous en déduisons :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.20)$$

## **2.8 Adimensionnalisation des équations gouvernantes**

Les équations précédentes sont mises sous une forme adimensionnelle en utilisant les variables caractéristiques du problème. Cette adimensionnalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Les équations du problème sont rendues adimensionnelles à l'aide des grandeurs caractéristiques suivantes :

$$\begin{array}{ll} D_h = a & H = \frac{h}{D_h} \\ V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{\alpha_T} & V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{\alpha_T} \\ \psi^+ = \frac{\psi}{\alpha_T} & \omega^+ = \omega \frac{D_h^2}{\alpha_T} \end{array}$$

Avec:

$a$  : distance entre les pôles apparaissant dans la relation des coordonnées  $(\eta, \theta)$

$\frac{\alpha_T}{D_h}$  : vitesse caractéristique.

$\frac{D_h^2}{\alpha_T}$  : temps caractéristique.

La température et la concentration adimensionnelles pour la paroi interne sont données selon la condition pariétale imposée:

➤ « paroi maintenue isotherme et à concentration uniforme »:

$$T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ donc le nombre de Rayleigh thermique est : } Ra_T = \frac{g \beta_T D_h^3 \Delta T}{\alpha_T \nu}$$

$$S^+ = \frac{S - S_2}{S_1 - S_2} \text{ donc le nombre de Rayleigh massique est : } Ra_S = \frac{g \beta_S D_h^3 \Delta S}{\alpha_T \nu}$$

Introduisons aussi :

- Le nombre de Prandtl:  $Pr = \frac{\nu}{\alpha_T}$

- Le nombre de Lewis:  $Le = \frac{\alpha_T}{D}$

- Le rapport des nombres de Rayleigh massique et thermique (rapport des forces de

poussées thermique et solutale):  $N = \frac{Ra_S}{Ra_T}$

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+) = 0 \quad (2.21)$$

$$H V_{\eta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.22)$$

$$H V_{\eta}^+ \frac{\partial S^+}{\partial \eta} + H V_{\theta}^+ \frac{\partial S^+}{\partial \theta} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 S^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
HV_{\eta}^{+} \frac{\partial \omega^{+}}{\partial \eta} + HV_{\theta}^{+} \frac{\partial \omega^{+}}{\partial \theta} = H.Ra_{\tau} . Pr \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^{+}}{\partial \eta} + \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^{+}}{\partial \theta} \end{array} \right\} \\
+ N \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S^{+}}{\partial \eta} + \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S^{+}}{\partial \theta} \end{array} \right\} + Pr \left( \frac{\partial^2 \omega^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^{+}}{\partial \theta^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ou les composantes  $V_{\eta}^{+}$ ,  $V_{\theta}^{+}$  de la vitesse et de la vorticité  $\omega^{+}$  adimensionnelles sont définies par:

$$V_{\eta}^{+} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta} \tag{2.25.a}$$

$$V_{\theta}^{+} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \eta} \tag{2.25.b}$$

$$\omega^{+} = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \theta^2} \right] \tag{2.26}$$

## 2.9 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

Puisqu'il n'y a pas d'impulsion qui traverse les parois, la fonction de courant s'annule sur celle-ci. Nous déterminons la valeur de la vorticité en appliquant la relation (2.25) directement sur la paroi ou la dérivée de la fonction de courant par rapport à l'azimut  $\theta$  s'annule.

✓ Conditions sur la paroi du cylindre intérieur ( $\eta=\eta_i$  constant) :

$$V_{\eta}^{+} = V_{\theta}^{+} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \eta} = 0 \tag{2.27.a}$$

$$\omega^{+} = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \theta^2} \right] \tag{2.27.b}$$

$$T_1^{+} = 1 \tag{2.28.a}$$

$$S_1^{+} = 1 \tag{2.28.b}$$

✓ Conditions sur la paroi du cylindre extérieur ( $\eta=\eta_e$  constant) :

$$V_{\eta}^{+} = V_{\theta}^{+} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi^{+}}{\partial \eta} = 0 \tag{2.29.a}$$

$$\omega^{+} = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^{+}}{\partial \theta^2} \right] \tag{2.29.b}$$

$$T_2^{+} = 0 \tag{2.30.a}$$

$$S_2^+ = 0 \quad (2.30.b)$$

## **2.10 Transferts thermique et massique**

Dans la présente étude on s'intéresse au calcul du taux de transfert de chaleur et de masse au sein du fluide, qui sont exprimées à travers les nombres de Nusselt et Sherwood.

### **2.10.1 Valeur locale du nombre de Nusselt**

La définition générale du nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{qa}{\lambda \Delta T} \quad (2.31)$$

$q$  : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta T$  : écart de température  $T_1 - T_2$ .

Soit :

$$q = -\lambda \left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=cste} \quad (2.32)$$

Il vient donc :

$$Nu = - \left. \frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=cste} \quad (2.33)$$

### **2.10.2 Nombre de Nusselt moyen**

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu d\theta \quad (2.34)$$

### **2.10.3 Valeur locale du nombre de Sherwood**

La définition générale du nombre de Sherwood est :

$$Sh = \frac{Ja}{D \Delta S} \quad (2.35)$$

$J$  : densité du flux de la masse à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta S$  : écart de concentration  $S_1 - S_2$ .

Soit :

$$J = -D \left. \frac{1}{h} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\eta=cste} \quad (2.36)$$

Il vient donc :

$$Sh = - \left. \frac{1}{H} \frac{\partial S^+}{\partial \eta} \right|_{\eta=cste} \quad (2.37)$$

#### **2.10.4 Nombre de Sherwood moyen**

Le nombre de Sherwood moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{\text{Sh}} = \frac{1}{\theta_{\text{NN}} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{\text{NN}}} \text{Sh} \, d\theta \quad (2.38)$$

#### **2.11 Conclusion**

Après avoir développé les équations de conservation, de mouvement, de chaleur et de masse ainsi que les conditions aux limites qui leurs sont associées, nous allons modéliser numériquement le problème. Dans le prochain chapitre, nous présentons la résolution numérique de notre modèle mathématique.

# Formulation Numérique

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la formulation numérique de notre problème. Actuellement, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur, de masse, etc., ce sont les méthodes des différences finies, des volumes finis et des éléments finis.

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre précédent montre qu'en maintenant le nombre de Prandtl et le rapport des rayons ( $C_1 = r_2/r_1$ ) constants, cinq paramètres influencent les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration dans l'espace annulaire, ce sont:

- l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .
- le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ .
- le rapport des forces de flottabilités  $N$ .
- le nombre de Lewis  $Le$ .
- l'excentricité relative de l'espace annulaire formé par les deux cylindres excentrés  $C_2 = e/r_1$ .

Dans notre travail, nous utilisons:

- trois valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ :  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ .
- deux valeurs de l'excentricité relative  $C_2$ : 0.25, 0.5 et 0.75.

Nous avons utilisé des pas  $\Delta\eta$  et  $\Delta\theta$  constants.

Plus précisément, nous posons:

$$\Delta\eta = \frac{\eta_1 - \eta_{NI}}{NI - 1}$$

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

Avec:

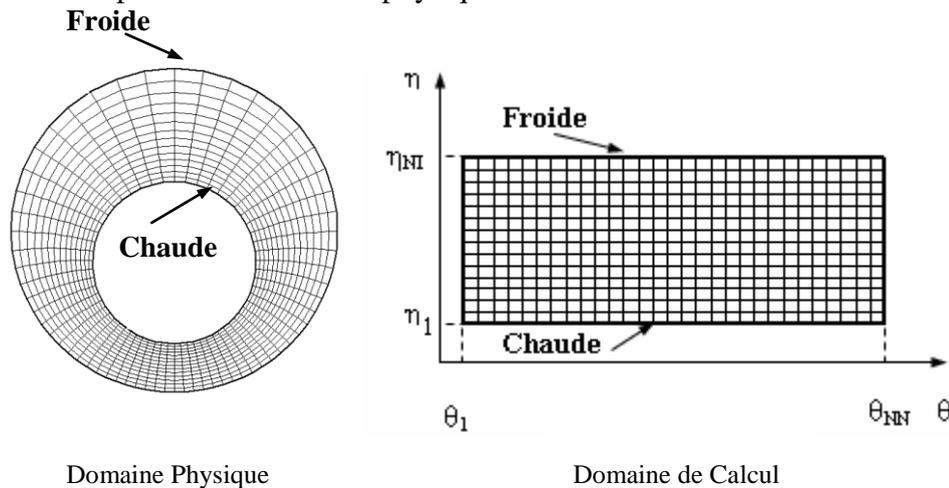
NI : le nombre de points suivant  $\eta$ .

NN : le nombre de points suivant  $\theta$ .

## 3.2 Méthode de résolution numérique

Pour la résolution du système d'équations (2.22), (2.23) et (2.24) qui sont de type parabolique et les conditions aux limites associées, nous considérons une solution numérique par la méthode des volumes finis. Cette méthode est développée par **S.V. PATANKAR** [3], elle consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes finis, et transformer un problème exact et continu en un problème approché et discret. Alors que pour l'équation (2.26) qui est de type elliptique, nous considérons une solution numérique par un développement en série de Taylor, cette dernière est bien illustrée par **E.F. NOGOTOV** [4].

La figure 3.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.



**Figure 3.1** Domaine physique et domaine de calcul.

### **3.2.1** Volume élémentaire d'intégration

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $\eta$  et  $\theta$  en un ensemble de volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" égaux à «  $H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$  ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité comme épaisseur dans la direction  $Z$ ).

Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$  et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres,  $e$ ,  $w$ ,  $n$  et  $s$ . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points  $E$ ,  $W$ ,  $N$  et  $S$ . Les variables scalaires (vorticité, température et concentration) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds  $E$  et  $N$  sont pris dans les directions des coordonnées positives de  $\theta$  et  $\eta$  respectivement et les nœuds  $W$  et  $S$  dans les sens contraires.

La figure (3.2) représente un volume fini-typique et son voisinage dans un domaine de calcul.

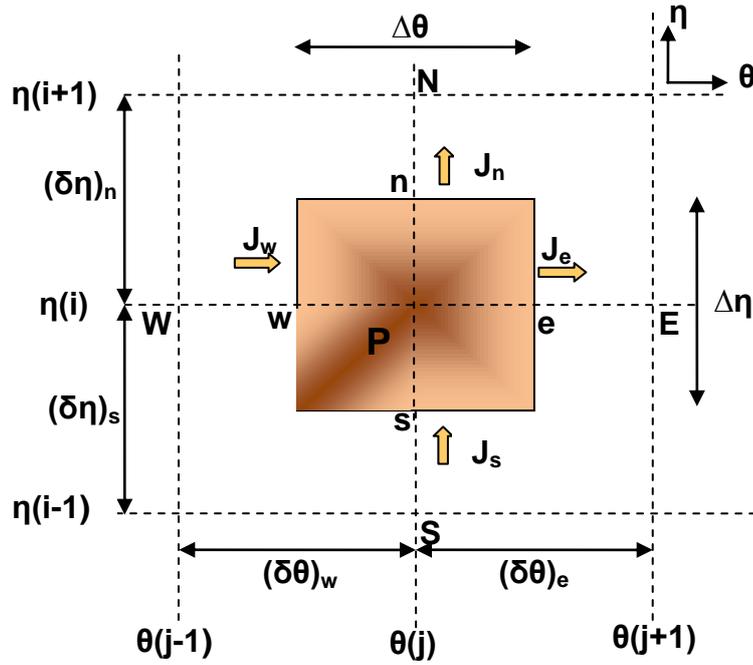


Figure 3.2 : Représentation schématique du volume de contrôle entourant le nœud P

### 3.2.2 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert de chaleur et de masse par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation de la chaleur (2.22), de la masse (2.23) et l'équation du mouvement (2.24).

Elles s'écrivent, compte tenu de l'équation de continuité (2.18), respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (HV_{\eta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_{\theta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (HV_{\eta}^+ S^+ - \frac{\partial S^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_{\theta}^+ S^+ - \frac{\partial S^+}{\partial \theta}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (HV_{\eta}^+ \omega^+ - Pr \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_{\theta}^+ \omega^+ - Pr \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta}) = H.Ra_{\tau}.Pr$$

$$\left( \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} + N \left\{ \begin{array}{l} [-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \eta} \\ [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \right)$$

(3.3)

Ces trois équations sont de la forme générale:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) = S_{\varphi} \quad (3.3)$$

Avec :

**Tableau 3.1 Les sources et les coefficients de diffusion des variables  $\varphi$**

équation	$\varphi$	$\Gamma_{\varphi}$	$S_{\varphi}$
3.1	$T^+$	1	0
3.2	$S^+$	1/Le	0
3.3	$\omega^+$	Pr	$H.Ra_T.Pr \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta,\theta)\cos(\alpha) + G(\eta,\theta)\sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \\ [F(\eta,\theta)\sin(\alpha) - G(\eta,\theta)\cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}$ $+ N \left\{ \begin{array}{l} [-F(\eta,\theta)\cos(\alpha) - G(\eta,\theta)\sin(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \eta} + \\ [-F(\eta,\theta)\sin(\alpha) + G(\eta,\theta)\cos(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}$

$\varphi$  : fonction générale (soit  $T^+$ , soit  $S^+$ , soit  $\omega^+$ ).

$\Gamma_{\varphi}$  : coefficient adimensionnel.

$S_{\varphi}$  : terme de source.

L'équation de discrétisation d'une variable est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de la variable  $\varphi$ .

$$\iint_{ws} \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+ \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) d\eta d\theta + \iint_{ws} \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+ \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) d\eta d\theta = \iint_{ws} S_{\varphi} d\eta d\theta$$

Ou bien :

$$\iint_{ws} \left[ \frac{\partial (H V_{\eta}^+ \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial (H V_{\theta}^+ \varphi)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta = \iint_{ws} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right] d\eta d\theta + \iint_{ws} S_{\varphi} d\eta d\theta$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de  $\varphi$ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour

approcher les variations de  $\varphi$  entre les points du maillage. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

Posons:

$$\left. \begin{aligned} J_\eta &= \left( HV_\eta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \\ J_\theta &= \left( HV_\theta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Où  $J_\eta$  et  $J_\theta$  sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portant ces valeurs dans l'équation (3.3), on obtient:

$$\frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S_\varphi \quad (3.5)$$

L'intégration de l'équation (3.5) dans le volume de contrôle donne:

$$J_n - J_s + J_e - J_w = \bar{S}_\varphi \Delta V \quad (3.6)$$

$J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\bar{S}_\varphi$  est la valeur moyenne de  $S$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\varphi_P$  (au nœud P) et se mettre sous la forme:

$$\bar{S}_\varphi = S_0 + S_p \varphi_P \quad (3.7)$$

Il est souhaitable lors de la linéarisation que  $S_p$  soit négatif ( $S_p < 0$ ), car un  $S_p$  positif peut causer une divergence.

Par suite l'équation (3.7) devient:

$$J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_p \varphi_P) \Delta V \quad (3.8)$$

Si on intègre l'équation de continuité (2.21) dans le volume de contrôle, on obtient:

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.9)$$

$F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$  sont les débits massiques à travers les faces respectives du volume de contrôle:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (H V_\eta^+)_n \Delta \theta \\ F_s &= (H V_\eta^+)_s \Delta \theta \\ F_e &= (H V_\theta^+)_e \Delta \eta \\ F_w &= (H V_\theta^+)_w \Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En multipliant l'équation (3.9) par la fonction  $\varphi_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.8), il vient:

$$(J_n - F_n \varphi_P) - (J_s - F_s \varphi_P) + (J_e - F_e \varphi_P) - (J_w - F_w \varphi_P) = (S_0 + S_p \varphi_P) \Delta V \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} J_n - F_n \varphi_p &= a_N (\varphi_p - \varphi_N) \\ J_s - F_s \varphi_p &= a_S (\varphi_s - \varphi_p) \\ J_e - F_e \varphi_p &= a_E (\varphi_p - \varphi_E) \\ J_w - F_w \varphi_p &= a_W (\varphi_w - \varphi_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.11) on obtient :

$$a_N(\varphi_p - \varphi_N) - a_S(\varphi_s - \varphi_p) + a_E(\varphi_p - \varphi_E) - a_W(\varphi_w - \varphi_p) = (S_0 + S_p \cdot \varphi_p) \cdot \Delta V \quad (3.13)$$

La substitution des relations précédentes conduit à l'équation finale de discrétisation suivante:

$$a_p \varphi_p = a_N \varphi_N + a_S \varphi_s + a_E \varphi_E + a_W \varphi_w + b \quad (3.14)$$

Avec:

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W - S_p \Delta V \quad (3.15)$$

$$b = S_0 \Delta V \quad (3.16)$$

D'après **S.V. PATANKAR [3]**, la deuxième règle de base exige que les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  doivent être tous positifs, d'où la fonction d'interpolation A ( $|P|$ ) doit être positive:

$$A(|P|) = \left\| 0, (1-0,1|P|)^5 \right\|$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \|\ F_s, 0\| \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \|\ F_w, 0\| \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Les conductances de diffusion  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta \theta}{(\delta \eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta \theta}{(\delta \eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta \eta}{(\delta \theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta \eta}{(\delta \theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Les nombres de Péclet  $P_e$ ,  $P_w$ ,  $P_n$  et  $P_s$  sont définis dans l'équation (3.19):

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration  $(\delta\theta)_n$ ,  $(\delta\theta)_s$ ,  $(\delta\eta)_e$  et  $(\delta\eta)_w$  peuvent être égaux ou non aux pas de calcul  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$  respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$ . Considérons que les interfaces e, w, s et n sont les milieux des nœuds (P, E), (P, W), (P, N) et (P, S).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.14) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_P$  doit être négatif et le coefficient  $a_P$ , doit être égal à la somme des autres coefficients et  $S_P \Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variables dépendantes  $T^+$ ,  $S^+$  et  $\omega^+$ . Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\varphi$  et la source  $S_\varphi$  sont définis dans le tableau 3.1.

### **3.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur**

Réécrivons l'équation (3.14) en remplaçant la fonction générale  $\varphi$  aux nœuds P, E, W, N et S par la température adimensionnelle en ces nœuds, il vient:

$$a_P T_P^+ = a_N T_N^+ + a_S T_S^+ + a_E T_E^+ + a_W T_W^+ + b \quad (3.21)$$

Comme dans l'équation (3.1), le terme de source  $S_T$  s'annule, le coefficient b s'annule également et le coefficient  $a_P$  figurant dans l'équation (3.15) devient:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.22)$$

Où  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.17).

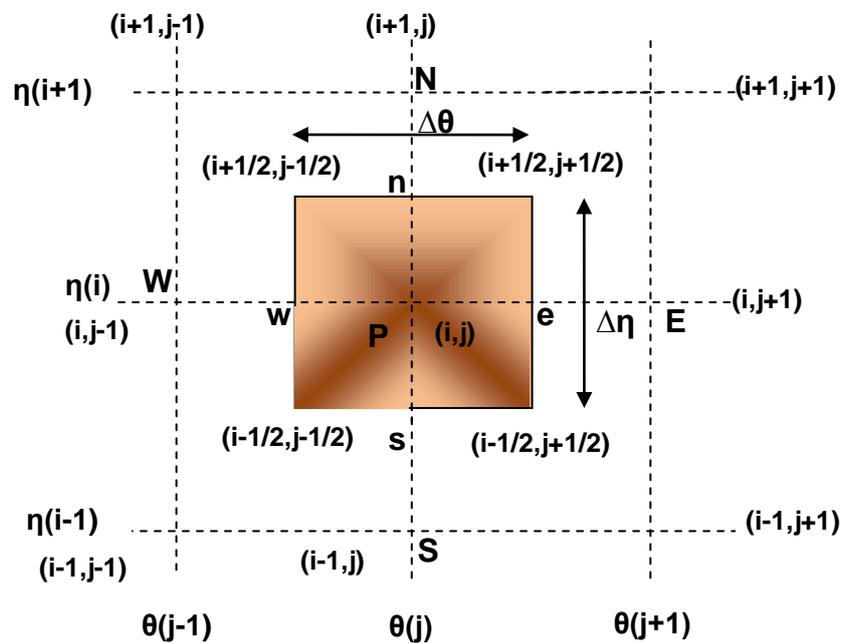
En introduisant la fonction de courant adimensionnelle  $\psi^+$  dans le système (3.10), il vient:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \Delta\theta \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n \\ F_s &= \Delta\theta \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s \\ F_e &= \Delta\eta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e \\ F_w &= \Delta\eta \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\begin{aligned} \psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2} \end{aligned}$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface « e » est établi d'après la démarche de **NOGOTOV** [4], comme suit : (voir figure 3.3).



**Figure 3.3 : Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le volume de contrôle**

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right]$$

Par suite la fonction  $F_e$  s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.a)$$

De la même façon, on écrit le gradient à l'interface « w ».

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta \eta}$$

$$= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \eta}$$

Et la fonction  $F_w$  est donnée par

$$F_w = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.24.b)$$

De la même façon, le gradient à l'interface « n » est défini par :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)}{\Delta \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

On en déduit:

$$F_n = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.c)$$

Le gradient à l'interface « s » s'exprime par la relation :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

Et l'expression  $F_s$  devient :

$$F_s = \frac{1}{4} \left[ \psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1) \right] \quad (3.24.d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient  $\Gamma_\varphi$  prend la valeur 1.

En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21), on écrit W, P, E, N et S respectivement  $(i,j-1)$ ,  $(i,j)$ ,  $(i,j+1)$ ,  $(i+1,j)$ ,  $(i-1,j)$ .

Les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i, j)$ .

Ainsi l'équation (3.21) peut s'écrire sous la forme:

$$a_p T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) \quad (3.27)$$

### **3.3.1 Discrétisation des Conditions aux limites**

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir:

➤ Sur la paroi du cylindre circulaire extérieur ( $I=NI$ ).

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

➤ Sur la paroi du cylindre circulaire intérieur ( $I=1$ ).

$$a_p = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

### **3.4 Discrétisation de l'équation de la masse**

Nous avons établi les mêmes calculs, mais le coefficient  $\Gamma_\varphi$  prend la valeur  $(1/Le)$ .

En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= Le F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= Le F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= Le F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= Le F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21), on écrit W, P, E, N et S respectivement  $(i,j-1)$ ,  $(i,j)$ ,  $(i,j+1)$ ,  $(i+1,j)$ ,  $(i-1,j)$ .

Les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont pris au nœud  $(i, j)$ .

Ainsi l'équation (3.21) peut s'écrire sous la forme:

$$a_P S^+(i, j) = a_E S^+(i, j+1) + a_W S^+(i, j-1) + a_N S^+(i+1, j) + a_S S^+(i-1, j) \quad (3.30)$$

### **3.4.1 Discrétisation des Conditions aux limites**

Pour satisfaire les conditions imposées à la concentration des parois, on doit avoir:

➤ Sur la paroi du cylindre circulaire extérieur ( $I=NI$ ).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

➤ Sur la paroi du cylindre circulaire intérieur ( $I=1$ ).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

### **3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement**

L'équation discrétisée (3.13) peut se mettre sous forme:

$$a_P \omega_P^+ = a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + b \quad (3.31)$$

L'identification du coefficient  $a_P$  à celui de l'équation (3.15) donne:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W$$

avec:

$$S_P \Delta V = 0$$

Les coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  ont pour expressions celles données par le système (3.17).

Lorsque le coefficient  $\Gamma_\varphi$  est égal à (Pr), comme nous l'avons montré dans le tableau 3.1, aux interfaces e, w, n et s; les coefficients  $D_e$ ,  $D_w$ ,  $D_n$  et  $D_s$  se déduisent des expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \text{Pr} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \text{Pr} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{\text{Pr}} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= \frac{F_s}{\text{Pr}} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= \frac{F_e}{\text{Pr}} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= \frac{F_w}{\text{Pr}} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Les coefficients  $F_n$ ,  $F_s$ ,  $F_e$  et  $F_w$  ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.24.a), (3.24.b), (3.24.c) et (3.24.d).

Dans le tableau 3.1, nous pouvons constater que le terme constant  $S_0$  du terme de source est donnée par:

$$S_0 = H.Ra_T \cdot \text{Pr} \left\{ \begin{aligned} &\left[ [F(\eta, \theta)\cos(\alpha) + G(\eta, \theta)\sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \right. \\ &\left. [F(\eta, \theta)\sin(\alpha) - G(\eta, \theta)\cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right] \\ &+ N \left\{ \begin{aligned} &\left[ -F(\eta, \theta)\cos(\alpha) - G(\eta, \theta)\sin(\alpha) \right] \frac{\partial S^+}{\partial \eta} + \\ &\left[ -F(\eta, \theta)\sin(\alpha) + G(\eta, \theta)\cos(\alpha) \right] \frac{\partial S^+}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Par conséquent, le coefficient b devient:

$$b = S_0 \Delta V$$

Avec:

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1$$

b s'écrit donc:

$$\begin{aligned}
b = H^3 \cdot Ra_T \cdot Pr \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \\
+ N \left\{ \begin{array}{l} [-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \eta} + \\ [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \Delta \eta \Delta \theta
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Avec:

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2 \Delta \eta} \tag{3.36}$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2 \Delta \theta} \tag{3.37}$$

$$\left. \frac{\partial S^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{S^+(i+1, j) - S^+(i-1, j)}{2 \Delta \eta} \tag{3.38}$$

$$\left. \frac{\partial S^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{S^+(i, j+1) - S^+(i, j-1)}{2 \Delta \theta} \tag{3.39}$$

Pour homogénéiser le système on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds W, P, E, N et S deviennent respectivement  $(i, j-1)$ ,  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j)$ .

Les coefficients  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$ ,  $a_W$  et  $b$  sont pris au nœud  $(i, j)$ .

L'équation du mouvement discrétisée (3.28) s'écrit finalement:

$$a_P \omega_P^+(i, j) = a_N \omega_N^+(i+1, j) + a_S \omega_S^+(i-1, j) + a_E \omega_E^+(i, j+1) + a_W \omega_W^+(i, j-1) + b \tag{3.40}$$

### 3.5.1 Discrétisation des Conditions aux limites

En déterminant la vorticité  $\omega^+$  sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par

**P.J. ROACHE [6]**, qui a exprimé  $\omega^+$  en fonction de  $\psi^+$  et utilisé un développement de Taylor:

➤ condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur ( $I=1$ ).

$$\omega_1^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right]_{\eta=\eta_1}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi interne ( $i=1, j$ ):

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(1, j) = -\frac{1}{H^2(1)} \left[ \frac{\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\psi^+(2, j) - \psi^+(1, j)) \right]$$

➤ Sur la paroi du cylindre extérieur (I=NI).

$$\omega_2^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right]_{\eta=\eta_2}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit:

$$\omega^+(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI)} \left[ \frac{\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI, j)) \right]$$

### **3.6 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant**

Récrivons l'équation adimensionnelle (2.26) sous la forme suivante:

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right) \quad (3.41)$$

Nous remarquons que l'identification de cette équation à l'équation (3.3) est compliquée, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons le développement de Taylor:

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}$$

Avec:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.42)$$

Nous en déduisons:

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \left[ \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \quad (3.43)$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S et s'écrit :

$$\psi^+(i,j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) + \psi^+(i-1,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i,j+1) + \psi^+(i,j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i,j)\omega^+(i,j) \right] \quad (3.44)$$

### 3.6.1 Discrétisation des Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux parois, que nous avons déterminées dans les équations (2.27.a) et (2.29.a), deviennent:

➤ Condition sur la paroi du cylindre circulaire intérieur (I=1):

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^+(1,j) + 4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^+(1,j) = \frac{4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{3} \quad (3.45.a)$$

➤ Condition sur la paroi du cylindre circulaire extérieur (I=NI):

$$\psi^+(NI,j) = \frac{4\psi^+(NI-1,j) - \psi^+(NI-2,j)}{3} \quad (3.45.b)$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "relaxations successives".

### 3.7 Discrétisation des composantes de la vitesse

Les équations (2.25.a) et (2.25.b) nous donnent respectivement les composantes adimensionnelles  $V_{\eta}^+$  et  $V_{\theta}^+$  de la vitesse; **P.J. ROACHE** [6], utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui nous donne:

$$V_{\eta}^+(i,j) = \left. \frac{1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \quad (3.46.a)$$

$$V_{\theta}^+(i,j) = \left. \frac{-1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{-1}{H(i,j)} \left[ \frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right] \quad (3.46b)$$

$$\forall (i,j) \quad \begin{array}{l} i \neq 1; i \neq NI \\ j \neq 1; j \neq NN \end{array}$$

### 3.8 Algorithme de calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.27), (3.30), (3.40) et (3.44) nous utilisons la méthode proposée par **E. F. NOGOTOV** [4].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une **méthode itérative à coefficients de relaxation** :

$$T^{n+1}(i,j) = (1-G_T)T^n(i,j) + \left(\frac{G_T}{a_p}\right) [a_E T^n(i,j+1) a_W T^{n+1}(i,j-1) + a_N T^n(i+1,j) + a_S T^{n+1}(i-1,j)] \quad (3.47)$$

$$S^{n+1}(i,j) = (1-G_S)S^n(i,j) + \left(\frac{G_S}{a_p}\right) [a_E S^n(i,j+1) a_W S^{n+1}(i,j-1) + a_N S^n(i+1,j) + a_S S^{n+1}(i-1,j)] \quad (3.48)$$

$$\omega^{n+1}(i,j) = (1-G_W)\omega^n(i,j) + \left(\frac{G_W}{a_p}\right) [a_E \omega^n(i,j+1) a_W \omega^{n+1}(i,j-1) + a_N \omega^n(i+1,j) + a_S \omega^{n+1}(i-1,j)] \quad (3.49)$$

$$\psi^{n+1}(i,j) = (1-G_P)\psi^n(i,j) + \frac{G_P}{2} \left( \frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right) \left[ \frac{\psi^n(i+1,j) + \psi^{n+1}(i-1,j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i,j+1) + \psi^{n+1}(i,j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i,j)\omega^{n+1}(i,j) \right] \quad (3.50)$$

n : ordre de l'intégration.

La solution par un procédé itératif ne converge pas toujours, une divergence peut avoir lieu suite aux non-linéarités. Pour éviter cette divergence, le processus de convergence est ralenti d'une itération à une autre. Le moyen permettant de contrôler la divergence est appelé technique de sous-relaxation.

Les paramètres  $G_T$ ,  $G_S$ ,  $G_W$  et  $G_P$  sont les "facteurs de sous-relaxation", compris entre 0 et 1, qui sont introduits pour accélérer la convergence et donc diminuer le nombre d'itérations. Leurs valeurs dépendent, en principe, de la valeur du nombre de Rayleigh (Ra).

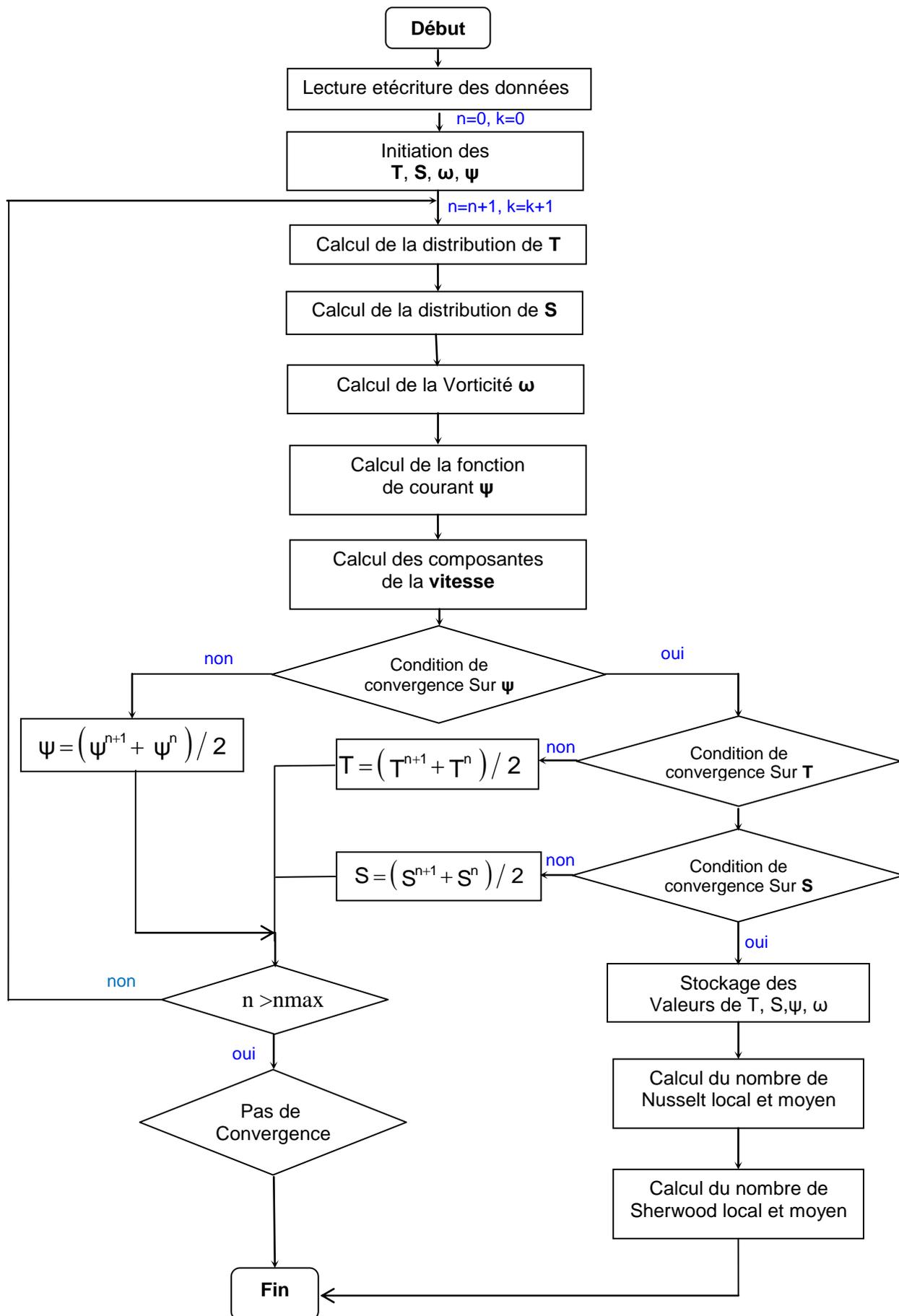
Nous résolvons le système d'équations (3.47), (3.48), (3.49) et (3.50) de la façon suivante :

- ❶ Initialisation des valeurs de la température, de la concentration, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.
- ❷ Calcul de la distribution de la température.
- ❸ Calcul de la distribution de la concentration.
- ❹ Calcul de la vorticité.
- ❺ Calcul de la distribution de la fonction de courant.
- ❻ Calcul des composantes des vitesses.
- ❼ Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de  $\psi$  par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

- ❽ Le même critère est utilisé pour la température.

- ⑨ Le même critère est utilisé pour la concentration.
- ⑩ Stockage des valeurs de  $T$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ .



### **3.9 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode numérique des volumes finis et des différences finies pour la résolution du modèle mathématique.

Dans le prochain chapitre, nous présentons les résultats obtenus et leurs discussions.

# Résultats et discussions

## 4.1 Introduction

Après avoir mis au point et validé notre modèle numérique grâce aux résultats disponibles dans la littérature, nous nous proposons d'étudier les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale dans un espace annulaire formé par les deux cylindres excentrés caractérisés respectivement par les excentricités relatives ( $C_2=0.25, 0.5$  et  $0.75$ ) et le rapport des rayons ( $C_1=2.6$ ).

Parmi les paramètres gouvernant le système d'équations, nous distinguons le nombre de Lewis ( $0.5 \leq Le \leq 100$ ) qui caractérise le rapport des diffusions thermique et solutale, le nombre de Rayleigh thermique ( $10^2 \leq Ra_T \leq 5.10^4$ ) qui caractérise le gradient de température, le rapport des forces de poussées solutale et thermique ( $-10 \leq N \leq 5$ ) qui caractérise le rapport des gradients de concentration et de température, et enfin le nombre de Prandtl ( $Pr=0.71$ ) caractérisant la nature du fluide.

Dans notre étude, nous avons utilisé les conditions pariétales, thermique et massique suivantes :

- La paroi cylindrique externe est maintenue isotherme à la température  $T_2$ .
- La paroi cylindrique interne (est maintenue isotherme à la température  $T_1 > T_2$ ).
- La paroi cylindrique externe est portée à la concentration  $S_2$ .
- La paroi cylindrique interne est portée à la concentration  $S_1$  ( $S_1 > S_2$ ).

## 4.2 Etude du maillage

Dans cette étude plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ( $\alpha=90^\circ$  et  $C_2 = 0.5, Le=1, N=1$ , pour  $Ra_T=10^3, Ra_T=10^4$  et  $Ra_T=5.10^4$ ), pour voir leurs effets sur les résultats, le tableau 4.1 nous montre donc, la variation du nombre de Nusselt (Sherwood) moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage (81x111).

**Tableau 4.1: Variation du nombre de Nusselt (Sherwood) et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds**

NI xNN	$Ra_T = 10^3$		$Ra_T = 10^4$		$Ra_T = 5.10^4$	
	(ou $\overline{Sh}$ ) $\overline{Nu}$	$\Psi_{\max}$	(ou $\overline{Sh}$ ) $\overline{Nu}$	$\Psi_{\max}$	(ou $\overline{Sh}$ ) $\overline{Nu}$	$\Psi_{\max}$
11x41	3.869	1.097	4.916	7.811	6.255	15.426
21x51	3.879	1.105	4.892	7.838	6.323	15.612
31x61	3.886	1.111	4.962	8.367	6.368	15.697
41x71	3.891	1.109	4.971	8.540	6.355	15.806
51x81	3.896	1.109	4.954	8.006	6.411	16.210
61x91	3.894	1.106	4.858	8.050	6.385	15.595
71x101	3.893	1.105	4.760	7.491	6.369	16.955
81x111	3.893	1.103	4.523	6.573	6.220	17.216
91x121	3.891	1.103	4.515	6.711	6.229	17.208

### 4.3 Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature

Pour valider notre code de calcul et vérifier l'exactitude numérique de la présente étude, nous avons procédé à des comparaisons avec des résultats disponibles dans la littérature entre autres, **Kuehn et al. [7]** et **Guj et al. [9]**.

#### 4.3.1 Pour le cas concentrique

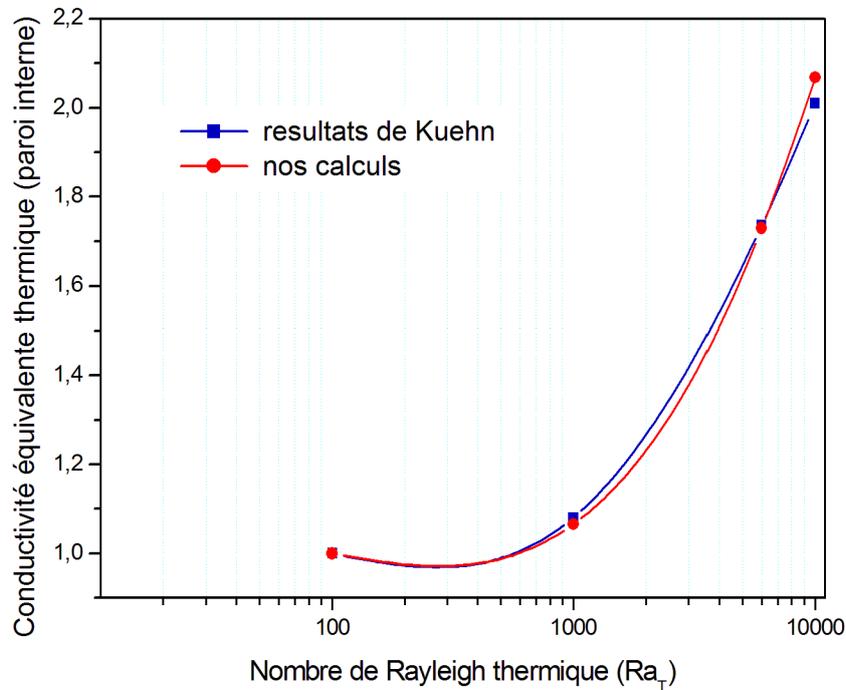
**Kuehn et al. [7]** ont élaboré une étude expérimentale et numérique sur la convection naturelle dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques et horizontaux dont le rapport des rayons a été pris égal à 2.6, ils ont calculé une conductivité thermique équivalente locale, définie comme étant le rapport d'un gradient de température lors d'un échange convectif, sur un gradient de température lors d'un échange conductif :

$$K_{\text{éq}} = \frac{\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\text{convection+conduction}}}{\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{\text{conduction}}}$$

Ensuite, ils calculent une valeur moyenne de cette grandeur. Pour valider notre code de calcul, nous avons comparé la valeur moyenne issue de nos calculs avec leurs résultats. Le tableau 4.2 et la figure 4.1 illustrent bien cette comparaison et nous remarquons que quantitativement nos résultats et les leurs sont en très bon accord.

**Tableau 4.2 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de Kuehn et al. [7] avec nos résultats**

Etude Numérique	Pr	0.7	0.7	0.7	0.7
	Ra	$10^2$	$10^3$	$6 \times 10^3$	$10^4$
Paroi interne	Kuehn et al	1.00	1.08	1.74	2.00
	nos calculs	1.00	1.07	1.73	2.07
	Ecart (%)	0	1.4	0.3	2.8
Paroi externe	Kuehn et al	1.00	1.08	1.73	2.01
	nos calculs	1.00	1.07	1.74	2.08
	Ecart (%)	0	1.7	0.05	3.5



**Figure 4.1: Variation de la conductivité équivalente thermique ( $K_{éq}$ ) de la paroi interne avec le nombre de Rayleigh thermique.**

#### **4.3.2 Pour le cas excentrique**

En outre, et dans le cas excentrique cette fois-ci, une autre validation de la solution numérique présente est obtenue en comparant les résultats du présent travail et ceux de **Guj et al. [9]** qui ont étudié la convection naturelle entre deux anneaux excentriques horizontaux, la comparaison a été donc faite pour deux valeurs du nombre de Rayleigh et avec une excentricité relative de 0.75 (voir le tableau 4.3). Ce tableau illustre que nos résultats et les

leurs sont aussi en bon accord les écarts ne dépassant pas 3%. Ces comparaisons sont encourageantes et valident le code de calcul proposé.

**Tableau 4.3 Comparaison de nos résultats avec ceux de Guj et al. [9]**

Résultats (21 x41)	Références	C <sub>2</sub> =0.75	
		Ra=5.3x10 <sup>3</sup>	4.59 x 10 <sup>4</sup>
$\Psi_{\max}$	Guj et al.	15.35	28.04
	Nos calculs	15.00	28.62
	E (%)	2.28	2.02

#### **4.4 Résultats et discussions**

##### **4.4.1 Influence du nombre de Rayleigh thermique**

###### **4.4.1.1 Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant**

Dans les figure (4.2-4.4), les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant sont tracées pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique lorsque le rapport des forces de poussées solutale et thermique  $N=1$ , le nombre de Lewis ( $0.5 \leq Le \leq 10$ ), l'excentricité relative  $C_2=0.5$  et l'angle d'inclinaison  $\alpha=90^\circ$ .

La cavité étudiée présente une symétrie par rapport à son axe vertical, ce qui justifie l'obtention d'une structure d'écoulement formé par deux cellules symétriques opposées. Du côté gauche, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique et du côté droit, il est de sens contraire (les particules du fluide se déplacent vers le haut sous l'action des forces de la poussée d'Archimède).

Nous pouvons voir que, pour un faible nombre de Rayleigh  $Ra_T=10^3$  le transport de chaleur et de masse au sein de l'espace annulaire est essentiellement contrôlée par les processus simultané de conduction thermique et massique. L'écoulement s'organise en deux cellules qui tournent très lentement dans des sens opposés, Cela est dû au mouvement ascendant des particules de fluide sous l'effet de la flottabilité lié aux gradients de température, qui se réchauffent le long de la paroi chaude et les mouvements vers le bas des particules de fluide sous l'effet de la gravité, qui se refroidissent le long de la paroi froide. La structure des isothermes et des isoconcentrations qui sont parallèles et épousent assez bien le profil de la cavité signifie que les transferts thermique et massique sont purement diffusifs. Les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur ces figures sont très petites.

Pour  $Ra_T = 10^4$  les isothermes et les isoconcentrations se modifient sensiblement et finissent par adopter un panache en forme de champignon qui commence par apparaître sur la paroi chaude, le sens de déformation des isothermes est conforme à la direction de rotation

des lignes de courant. La distribution de la température est décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. En régime laminaire, on peut dire que, sous l'action du mouvement des particules qui décollent de la paroi chaude, les lignes isothermes se « voûtent » et s'éloignent de la paroi à cet endroit. Les valeurs des fonctions de courant augmentent ce qui signifie que le transfert de chaleur par convection commence à prendre place.

Pour  $Ra_T=5.10^4$ , les isothermes et les isoconcentrations se tordent de plus en plus vers le haut de l'enceinte tout en restant stratifié sous le cylindre chaud impliquant que le mode de la convection domine. L'augmentation de  $Ra_T$  exprime une intensification significative de la convection naturelle induite par un effet thermique de flottabilité et montre que l'écoulement reste organisé en deux cellules principales tournant dans des sens opposés mais à une vitesse plus élevée. Les valeurs de la fonction de courant augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique ce qui est évident. Le transfert de chaleur reste dominé par le mode de conduction dans la moitié inférieure de notre espace annulaire (dû à la stratification du fluide). La distribution de la concentration demeure avec un comportement similaire qui correspond à un transfert de masse réalisé par un mode de diffusion pure. Il convient de souligner que les isothermes et les isoconcentrations sont similaires, pour  $Le=1$ .

Quand  $Le=0.5$  les isothermes, les isoconcentrations et les deux cellules des lignes de courant perdent le caractère symétrique par rapport à l'axe vertical médian, ceci pour les grandes valeurs du Rayleigh thermique et cela est dû au fait que nous n'avons plus la même valeur pour les diffusivités, thermique et massique.

Pour  $Le=10$  la distribution des isothermes et des isoconcentrations montrent que le panache massique rétrécit par rapport au panache thermique ceci est dû à la diffusivité thermique du milieu qui est 10 fois celle de la diffusivité solutale, ce qui bien illustré pour le cas  $Ra_T=5.10^4$  (fig. 4.4.c).

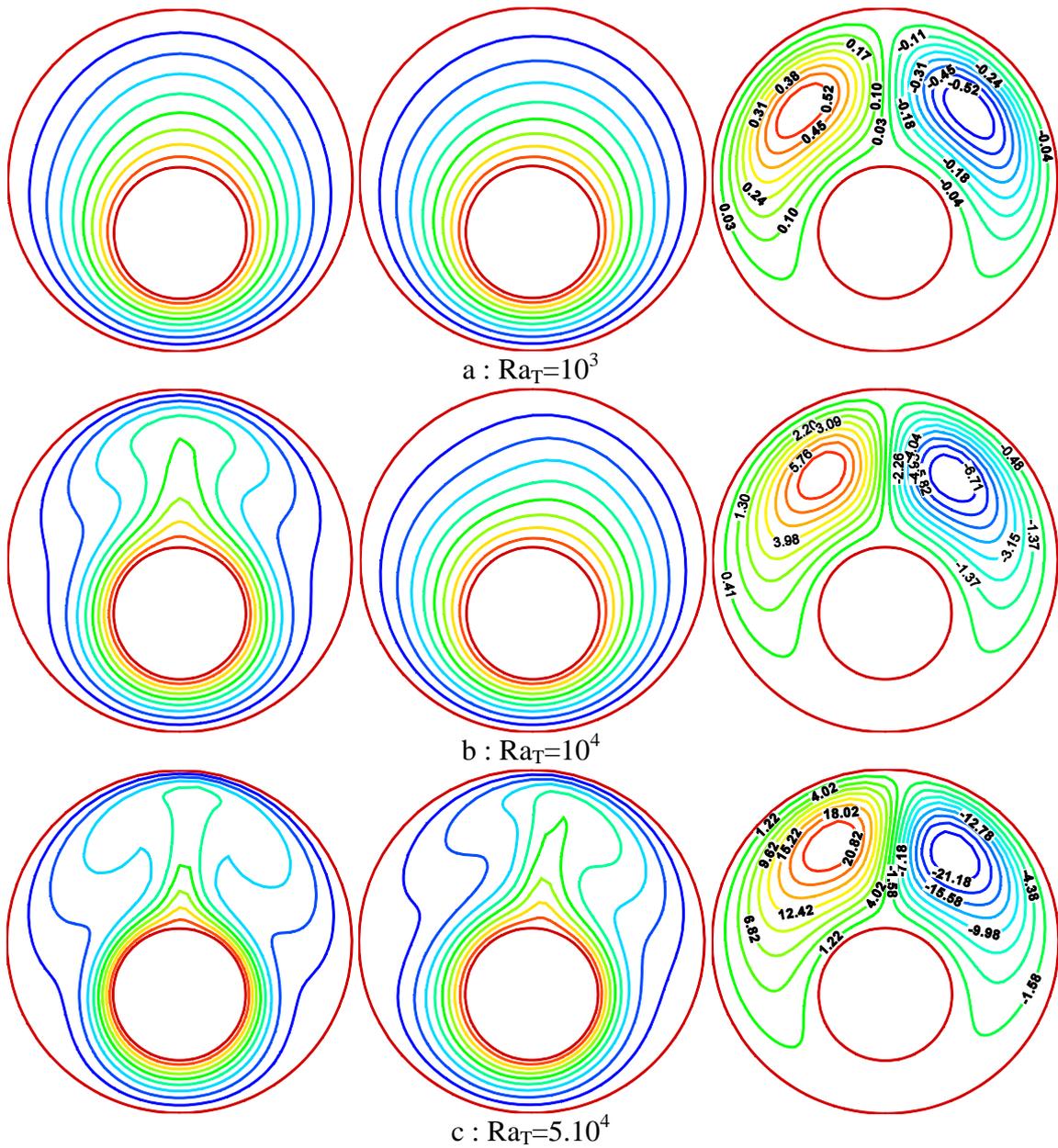


Figure 4.2 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Le=0.5$  et  $N=1$  et différents  $Ra_T$ .

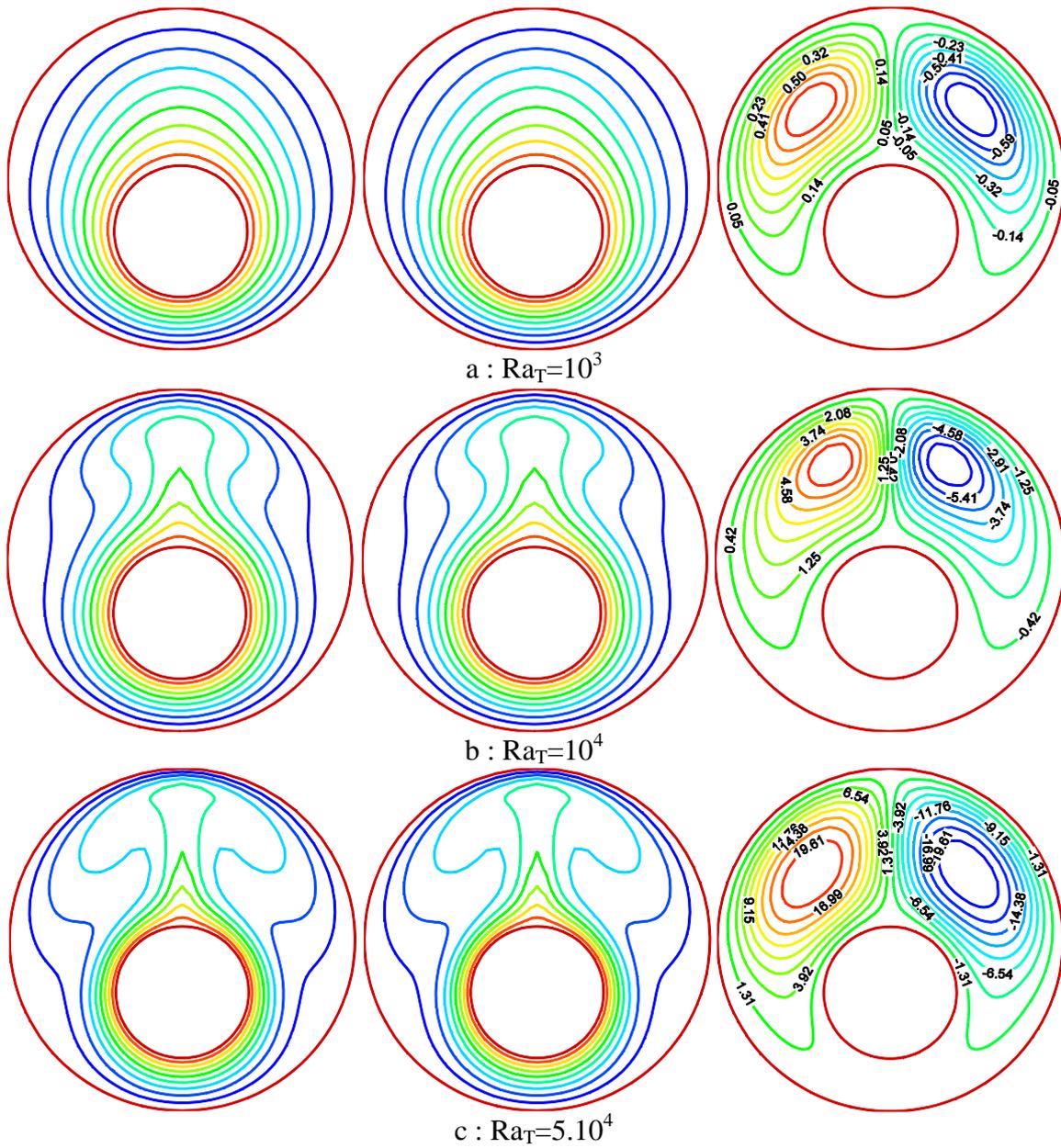
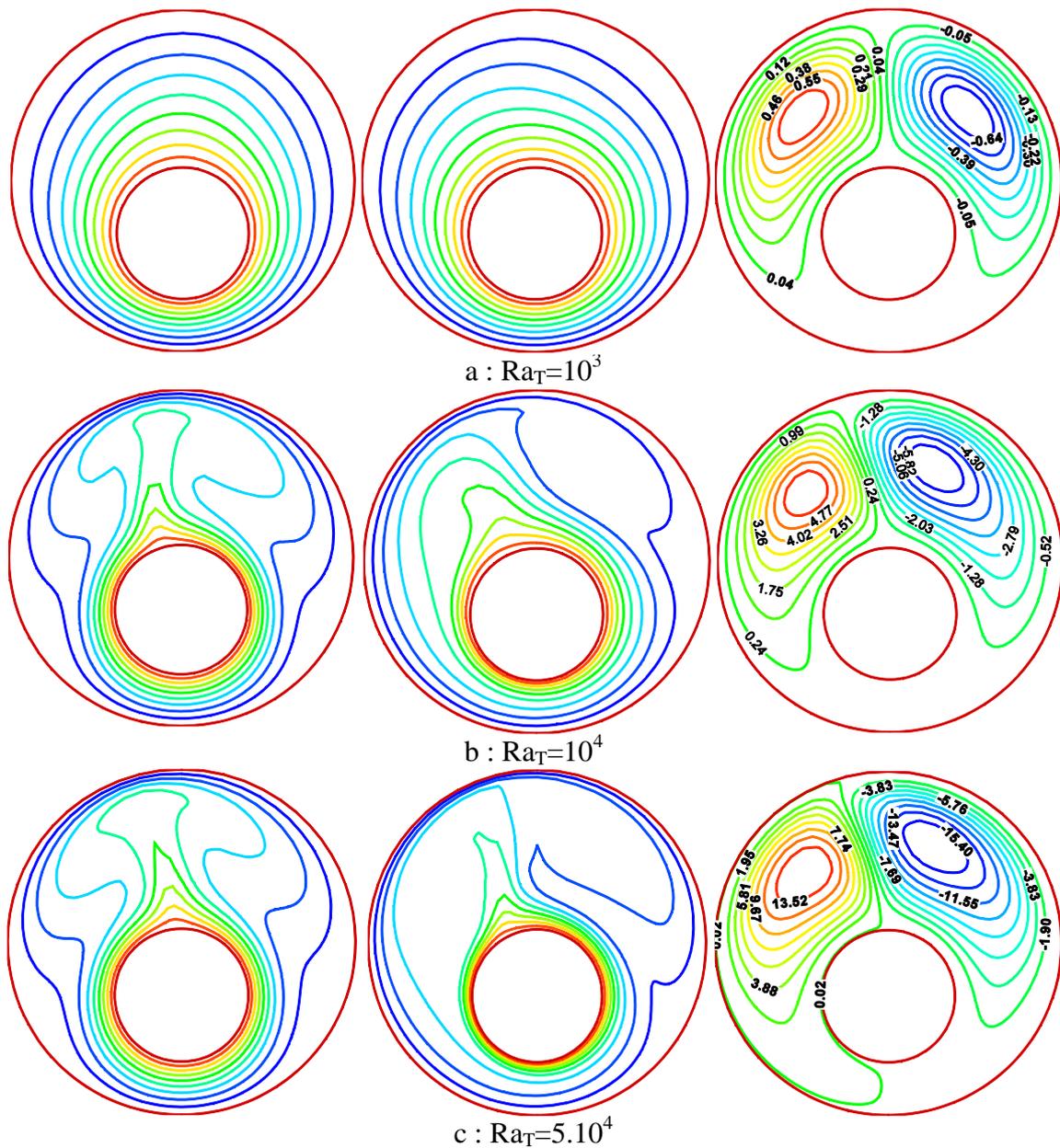


Figure 4.3 :Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Le=1$  et  $N=1$  et différents  $Ra_T$ .



**Figure 4.4 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Le=10$  et  $N=1$  et différents  $Ra_T$ .**

#### **4.4.1.2 Nombre de Nusselt et de Sherwood locaux**

Nous déterminons les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isoconcentrations, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres.

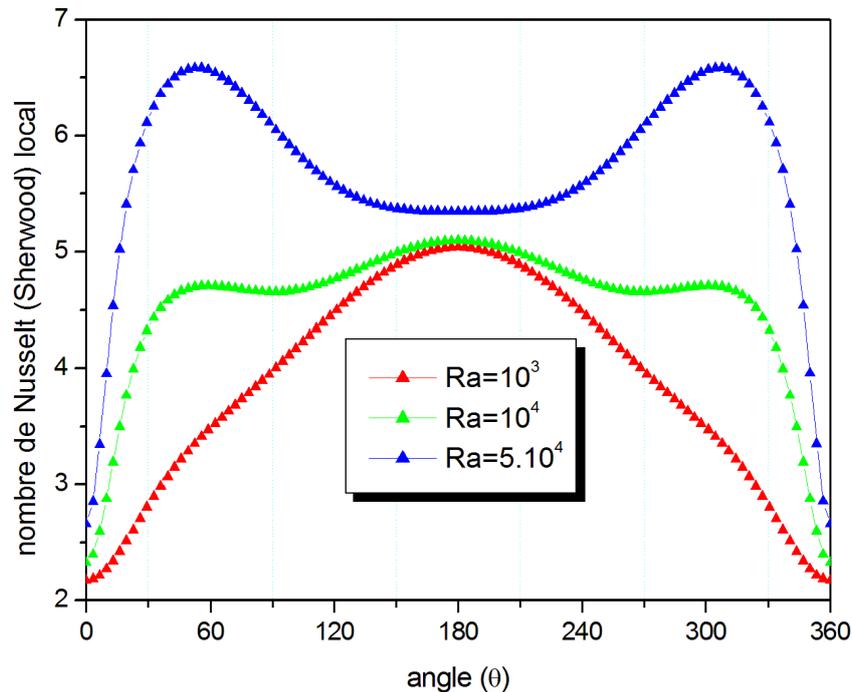
Nous avons illustré dans les figures (4.5) et (4.6) les variations des nombres de Nusselt locaux  $Nu_i$  et  $Nu_e$  (Sherwood locaux  $Sh_i$  et  $Sh_e$ ) le long des parois interne et externe (pour  $\alpha=90^\circ$ ), ces figures nous permettent de constater que les nombres de Nusselt local  $Nu$

caractérisant le transfert de chaleur et de Sherwood local  $Sh$  caractérisant le transfert de masse augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique.

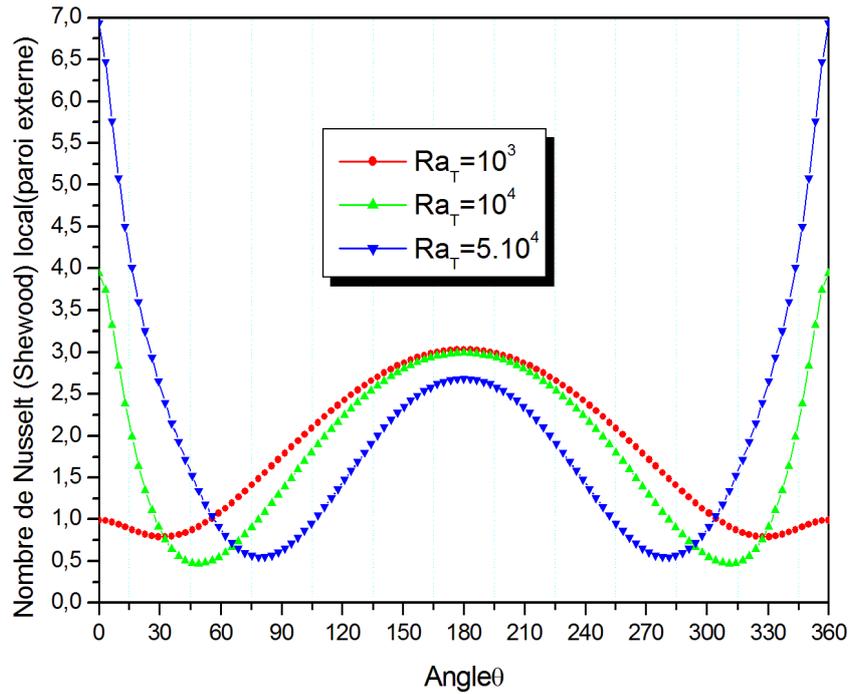
Pour les variations des nombres de Nusselt (Sherwood) illustrées sur la figure 4.5, pour la paroi interne, elles montrent l'existence d'un minimum (à la position angulaire  $\theta=180^\circ$ ) correspondant à la juxtaposition de deux cellules tournant en sens inverse et aussi de deux maximums (aux positions angulaires  $\theta=45^\circ$  et  $\theta=315^\circ$ ). Ces cellules éloignent le fluide de la paroi chaude dans le cas d'un minimum, et l'amènent vers celle-ci dans le cas d'un maximum, ceci dans le cas d'un nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T > 10^4$ ). Il est constaté qu'aux faibles valeurs du nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T = 10^3$ ),  $Nu_i$  ( $Sh_i$ ) présentent un seul maximum à  $\theta=180^\circ$  et deux minimums à  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=360^\circ$ , en raison d'un mode conducto-diffusif où le fluide est presque immobile.

Sur la paroi externe, les variations des nombres de Nusselt (Sherwood) illustrées sur la figure 4.6, sont inversées du moment que nous sommes en présence d'un espace annulaire fermé (si le fluide quitte la paroi chaude, il arrive à la paroi froide et vice-versa).

En conclusion l'accroissement des transferts, thermique et massique est donc d'autant plus marqué que le nombre de Rayleigh thermique augmente.



**Figure 4.5: Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) locaux sur la paroi interne pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$ ,  $Le=1$  et différents  $Ra_T$ .**



**Figure 4.6: Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) locaux sur la paroi externe pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$ ,  $Le=1$  et différents  $Ra_T$ .**

#### **4.4.1.3 Nombre de Nusselt et de Sherwood moyens**

Les figures (4.7) et (4.8) illustrent bien la variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) moyens respectivement en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour différentes valeurs du nombre de Lewis. Sur la figure (4.7), à partir de  $Ra_T=10^3$ , on remarque un accroissement monotone du transfert thermique et ce pour les différentes valeurs du nombre de Lewis utilisé, mais à partir de  $Ra_T=10^4$ , le nombre de Nusselt moyen diminue légèrement quand le nombre de Lewis augmente. Sur la figure (4.8), on remarque qu'à partir de  $Ra_T=10^3$  nous avons un accroissement important du transfert massique, le nombre de Sherwood moyen augmente quand le nombre de Lewis augmente. En résumé, on peut dire que ces deux figures (4.7-4.8) illustrent bien le fait qu'une augmentation du nombre de Lewis entraîne une diminution du taux de transfert thermique et une augmentation du taux de transfert massique.

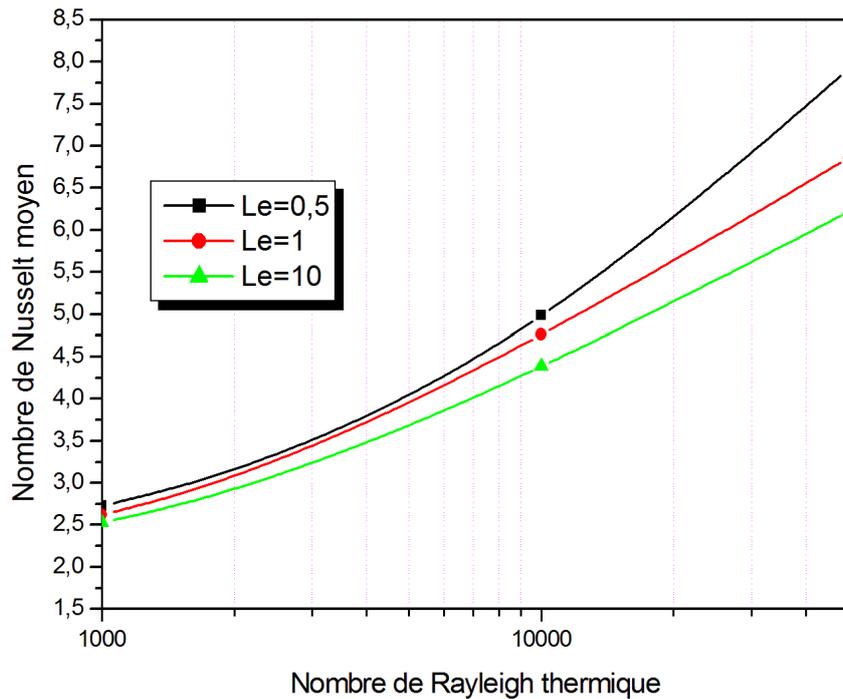


Figure 4.7 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$  et différents  $Le$ .

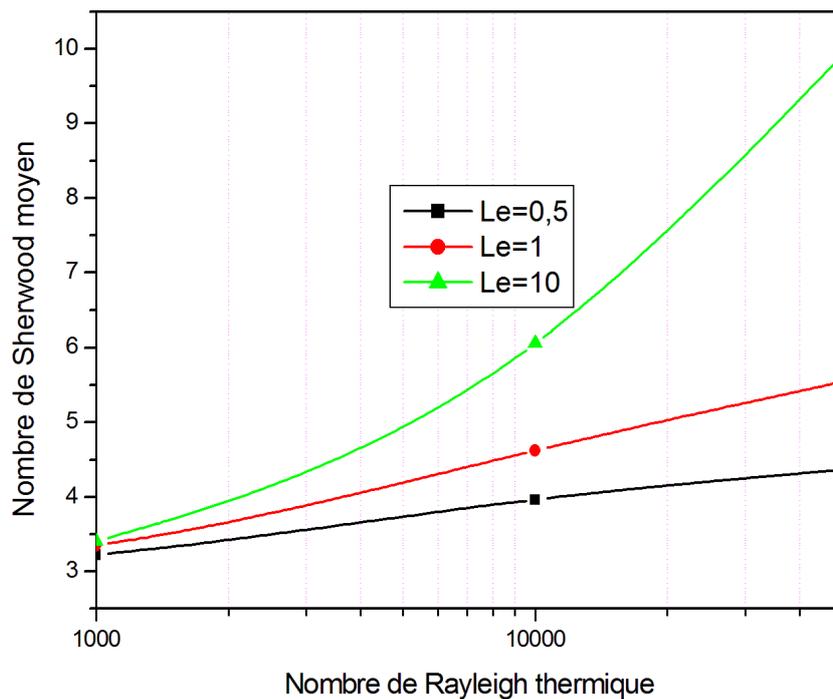


Figure 4.8: Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$  et différents  $Le$ .

#### 4.4.2 Influence du nombre de Lewis

##### 4.4.2.1 Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant

L'effet du nombre de Lewis ( $Le$ ) sur les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant, et pour différentes valeurs du rapport des forces de poussées solutale et thermique  $N$  est illustré sur les figures (4.9-4.10). Comme le nombre de Lewis est le rapport de la

diffusivité thermique sur la diffusivité massique, quatre valeurs de ce nombre ont été considérées ( $Le=0.5, 1, 10$  et  $100$ ), tandis que les paramètres suivants sont maintenus constants ( $Ra_T=5.10^4, C_1=2.6, C_2=0.5, \alpha=90^\circ$ ).

Pour  $Le=0.5$ , les isothermes, les isoconcentrations et les deux cellules des lignes de courant perdent le caractère symétrique par rapport à l'axe vertical médian, ceci est dû au fait que nous n'avons plus la même valeur pour les diffusivités, thermique et massique. Les transferts de chaleur et de masse restent dominés respectivement par les modes de conduction et de diffusion pure dans la moitié inférieure de notre espace annulaire (dus à la stratification du fluide).

Pour  $Le=1$ , il convient de souligner que les isothermes et les isoconcentrations sont similaires à cause des deux diffusivités massique et thermique qui sont égales.

Lorsque le nombre de Lewis augmente, les distributions de température et de concentration sont différentes, elles traduisent une diffusivité thermique 10 (100) fois plus importante que la diffusivité massique, la stratification solutale est faible en forme de panache repoussé par une stratification thermique dominant le cœur de la cavité. Il est évident que cette situation où la diffusivité thermique est plus importante que la diffusivité massique aura une conséquence sur la distribution de la température et de la concentration où on observe une nette dominance de la stratification thermique, par rapport à la stratification solutale. Pour  $N=1$  et  $5$ , les deux forces de poussées solutale et thermique agissent dans la même direction. Le flux reste organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées. Les isothermes et les isoconcentrations présentent les mêmes formes de structures marquées par une accélération car les deux écoulements naturels d'origine thermique et solutal s'additionnent.

Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Lewis entraîne une diminution de l'intensité de la circulation du fluide dans l'espace annulaire pour de faibles valeurs de  $N$ , mais pour un nombre de Lewis  $Le \geq 10$  et  $N=5$  les valeurs de la fonction de courant sont presque constantes ceci est dû à la diminution de la force de poussée thermique résultant de l'augmentation du nombre de Lewis.

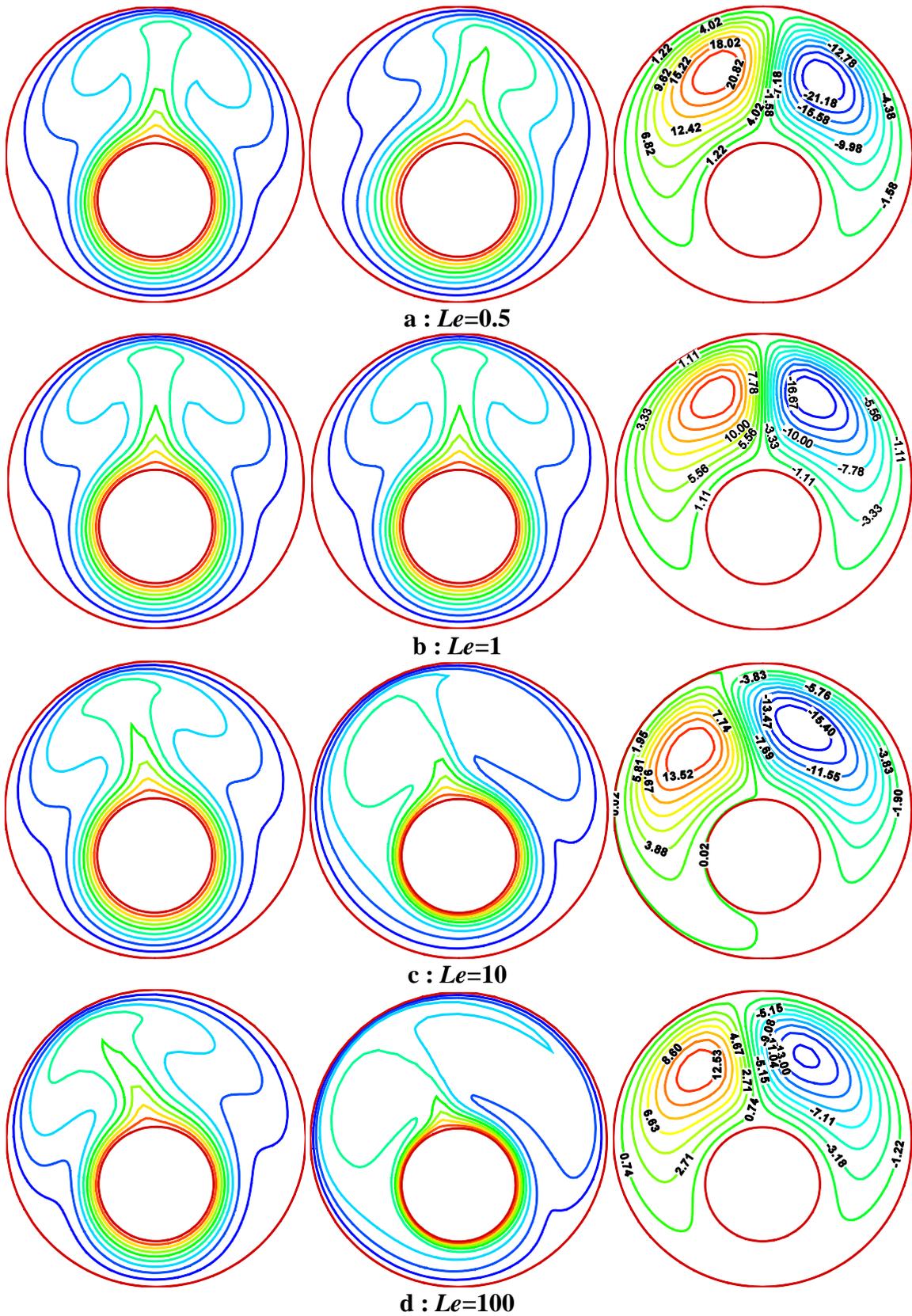


Figure 4.9 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Ra_T=5.10^4$ ,  $N=1$  et différents  $Le$ .

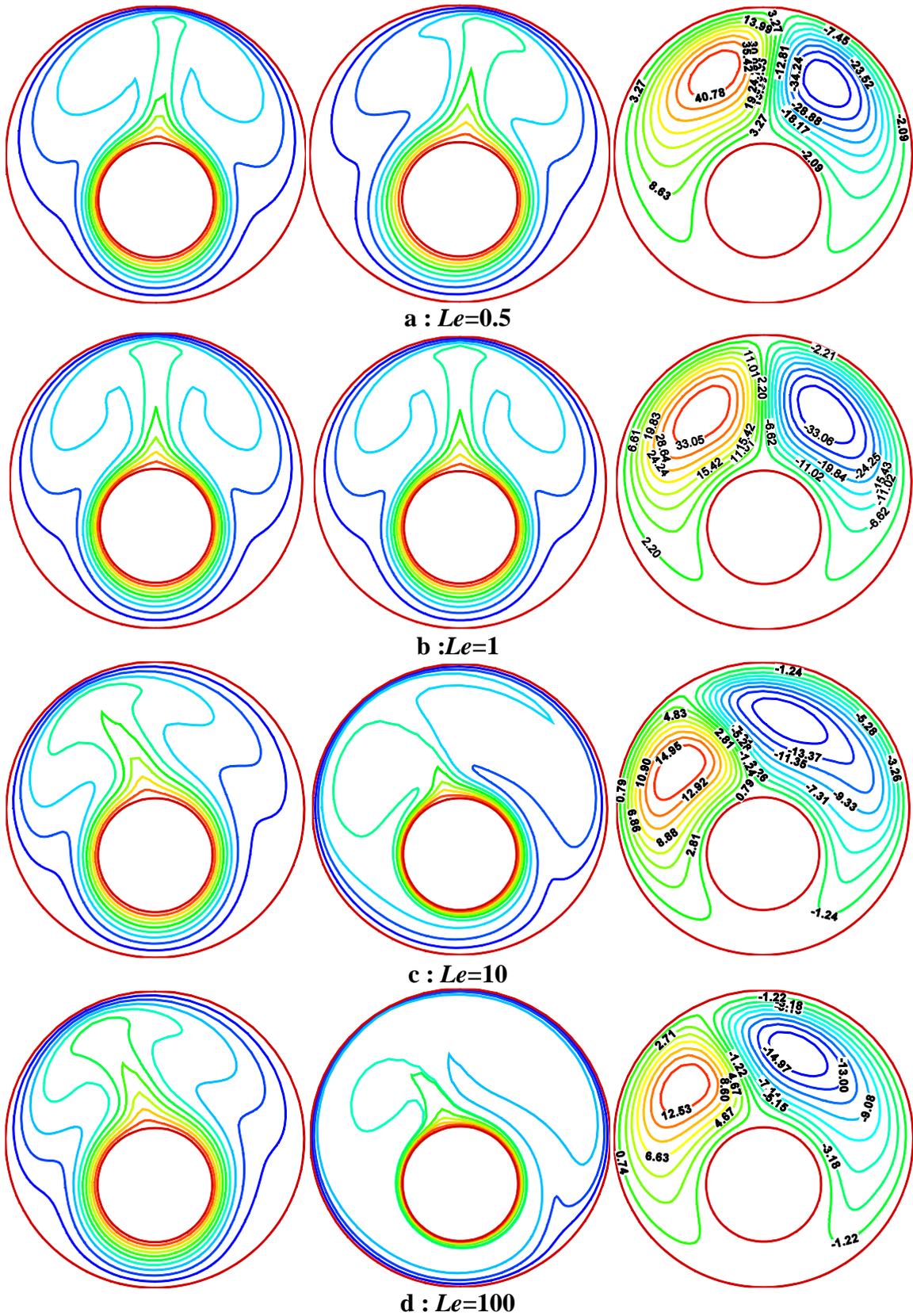


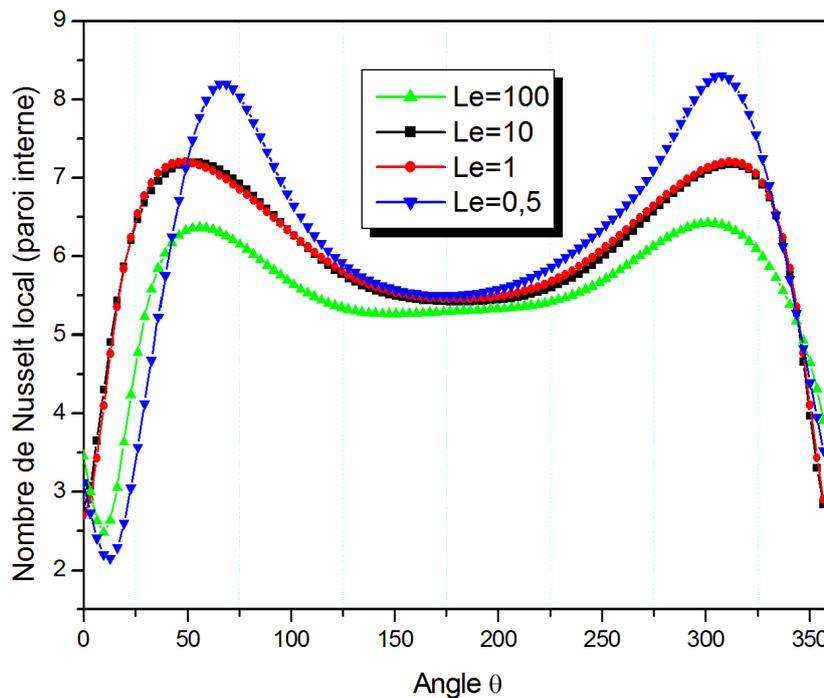
Figure 4.10 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Ra_T=5.10^4$ ,  $N=5$  et différents  $Le$ .

#### 4.4.2.2 Nombres de Nusselt et de Sherwood locaux

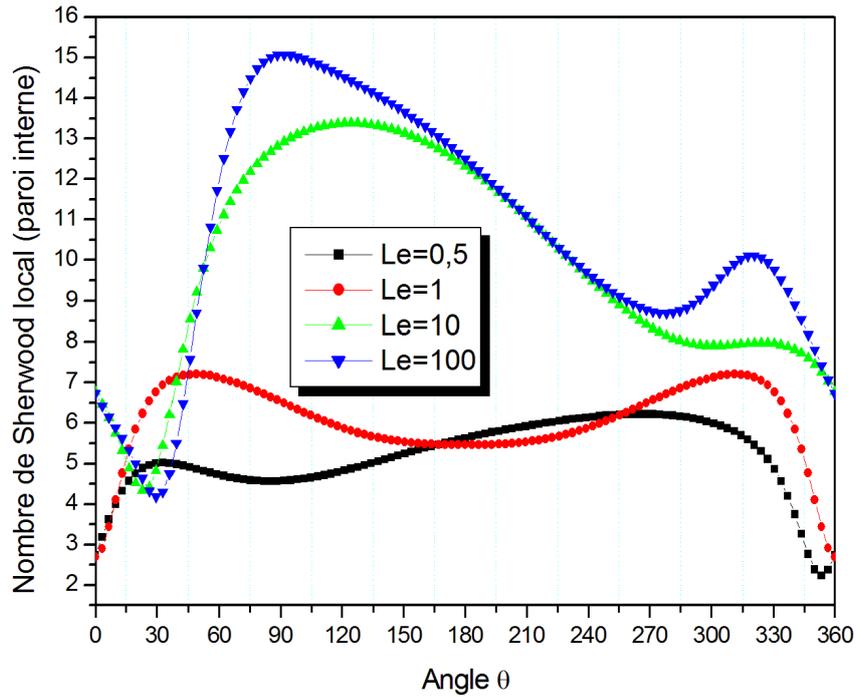
Nous avons illustré sur les figures (4.11) et (4.12) les variations des nombres de Nusselt locaux  $Nu$  (de Sherwood locaux  $Sh$ ) le long de la paroi interne (pour  $\alpha=90^\circ$ ).

Pour les variations des nombres de Nusselt illustrées sur la figure 4.11, elles montrent l'existence d'un minimum (à la position angulaire  $\theta=180^\circ$ ) correspondant à la juxtaposition de deux cellules tournant en sens inverse et aussi de deux maximums (aux positions angulaires  $\theta=50^\circ$  et ( $\theta=70^\circ$  pour  $Le=0.5$ ) et  $\theta=315^\circ$ ). Cette figure nous permet de constater que le nombre de Nusselt local  $Nu$  décroît avec l'augmentation du nombre de Lewis. Ce décroissement est dû à la diminution de la force de poussée thermique résultant de l'augmentation du nombre de Lewis.

La figure 4.12, illustre bien les variations du nombre de Sherwood au niveau de la paroi interne, cette figure nous permet de constater que le nombre de Sherwood local  $Sh$  s'accroît avec l'augmentation du nombre de Lewis.



**Figure 4.11: Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi interne pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $Le$ .**



**Figure 4.12: Variation du nombre de Sherwood local sur la paroi interne pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $Le$ .**

#### 4.4.2.3 Nombres de Nusselt et de Sherwood moyens

Les figures (4.13) et (4.14) illustrent bien l'influence du nombre de Lewis sur la variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens respectivement pour deux valeurs du rapport des forces de poussées solutale et thermique ( $N=1$  et  $5$ ). Quelle que soit la valeur de ce dernier, on constate un accroissement monotone du taux de transfert massique  $Sh$  et un décroissement du taux de transfert thermique  $Nu$  avec l'augmentation du nombre de Lewis, néanmoins ce décroissement se stabilise au-delà de  $Le=10$  pour le taux de transfert de chaleur, ceci d'une part, d'autre part, pour un nombre de Lewis fixe, les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens augmentent avec l'augmentation de la valeur du rapport des forces de poussées  $N$ .

La figure (4.15) représente l'effet du nombre de Lewis sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens. On remarque qu'avec l'augmentation du nombre de Lewis le nombre de Sherwood moyen augmente et le nombre de Nusselt moyen diminue. En d'autres termes, les transferts de chaleur et de masse évoluent en sens inverse quand le nombre de Lewis augmente. Notons que les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont les mêmes pour  $Le=1$ .

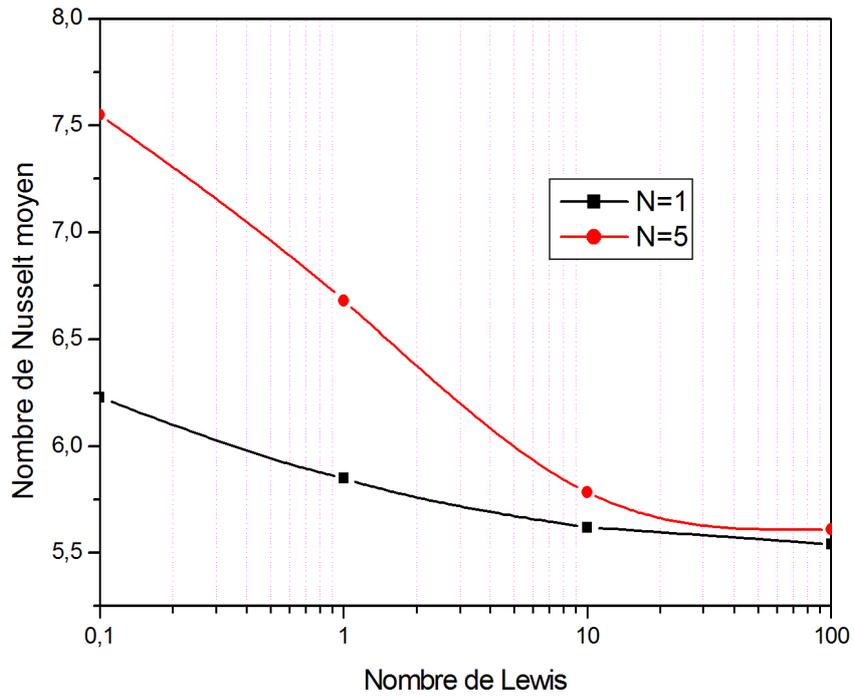


Figure 4.13 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents N.

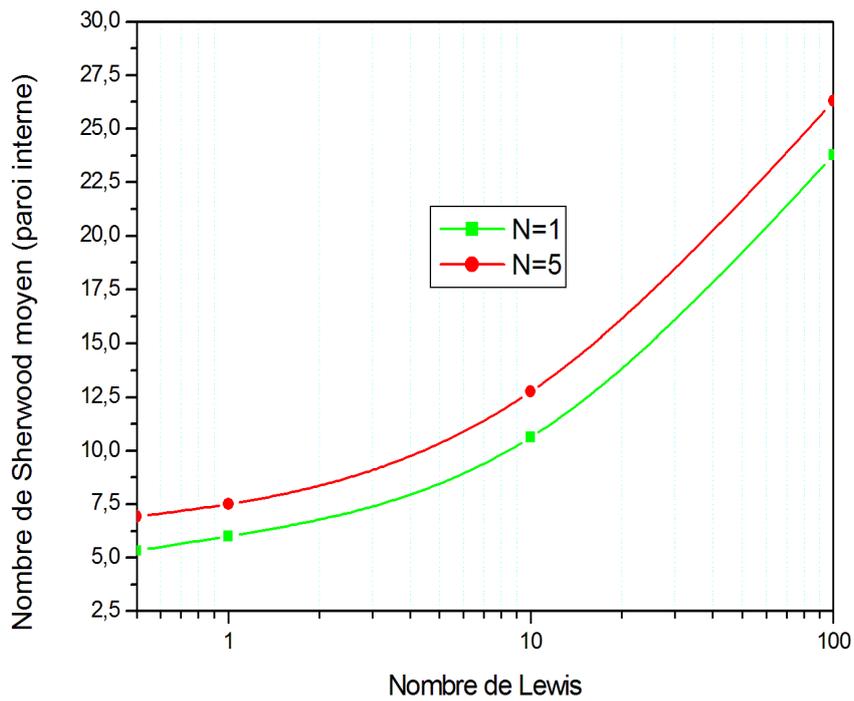
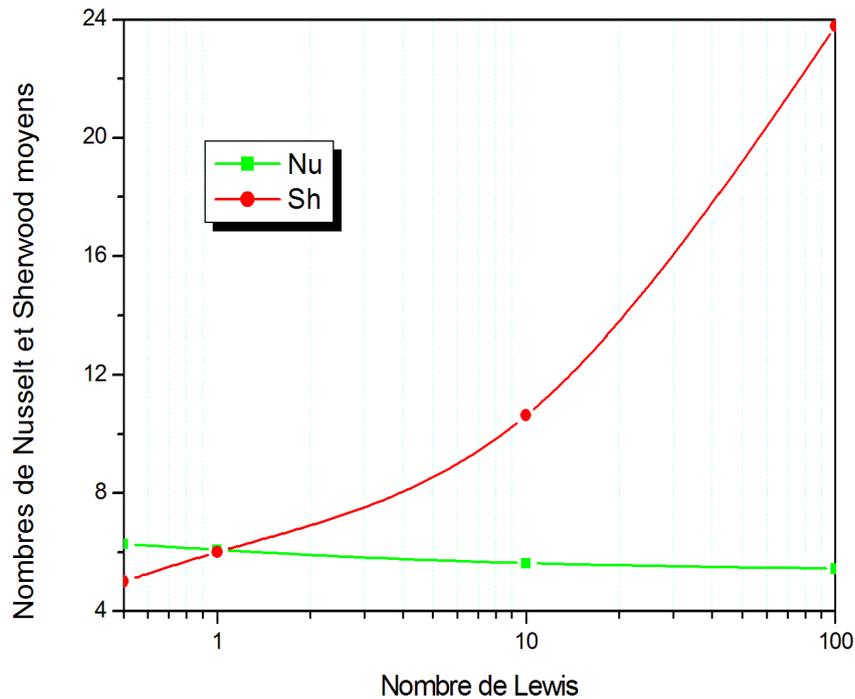


Figure 4.14 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents N.



**Figure 4.15 : Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=1$  et  $Ra_T=5.10^4$ .**

#### **4.4.3 Influence du rapport des forces de poussées solutale et thermique**

##### **4.4.3.1 Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant**

Les figures (4.16-4.17) illustrent l'effet du rapport des forces de poussées solutale et thermique  $N$  sur les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant, lorsque le nombre de Lewis égal à 1 et 10, l'angle d'inclinaison  $\alpha=90^\circ$ , l'excentricité relative  $C_2=0.5$  et le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T=5.10^4$ .

Pour le cas  $Le=1$ , illustré par la figure 4.16, la diffusivité thermique est égale à la diffusivité massique, les forces de poussées solutale et thermique sont comparables, les isothermes et les isoconcentrations se confondent quelle que soit la valeur de  $N$ .

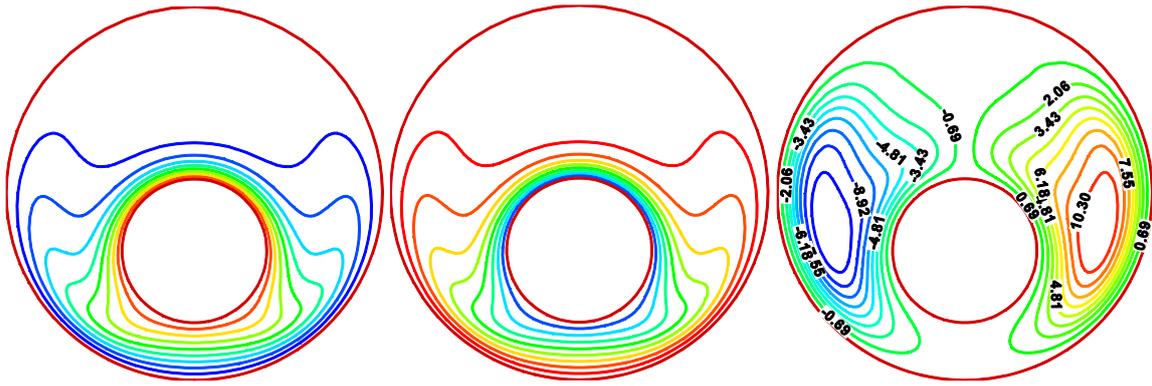
Lorsque  $N=-10$  et  $-5$ , le flux reste organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées, mais l'écoulement cette fois-ci se fait en sens inverse que pour le cas coopérant, ceci indique que les forces de poussées thermique et massique s'opposent dans ce cas-là.

Pour  $N=0$ , l'écoulement est entraîné uniquement par la force de poussée thermique. Les lignes de courant du fluide s'organisent essentiellement en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées, nous sommes en présence d'une convection naturelle thermique pure.

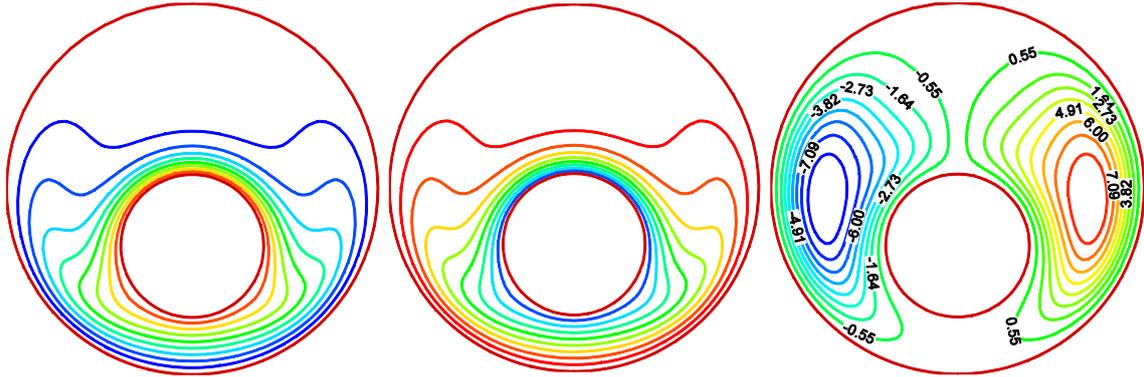
Pour le cas coopérant ( $N > 0$ ), les deux forces de poussées solutale et thermique agissent dans le même sens, ce qui donne une intensification de l'écoulement vu la valeur de la fonction de courant maximale qui augmente d'une manière significative pour le cas  $N=5$ .

Lorsque  $Le=10$ , cas illustré par la figure 4.17, nous remarquons que les distributions de température et de concentration sont différentes, le flux reste organisé en deux cellules principales qui tournent dans des directions opposées.

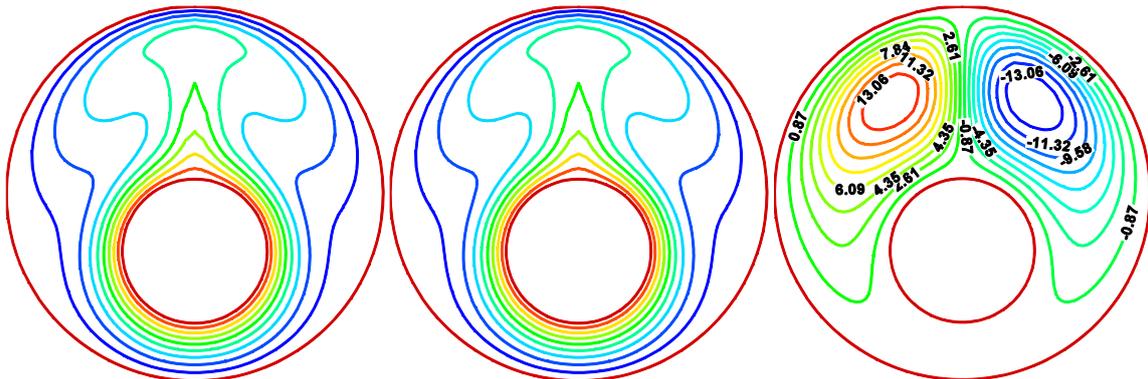
Il est clair aussi, sur cette figure que pour  $N \geq 0$  la force de poussée solutale qui augmente avec  $N$  coopère avec la poussée thermique, et de ce fait, les valeurs de la fonction de courant augmentent, ceci d'une part, d'autre part et de manière générale, pour  $|N| \geq 5$ , la distribution des isothermes et des isoconcentrations montrent que le panache massique rétrécit par rapport au panache thermique ceci est dû à la diffusivité thermique du milieu qui est 10 fois celle de la diffusivité solutale. Il est évident que cette situation où la diffusivité thermique est plus importante que la diffusivité massique aura une conséquence sur la distribution de la température et de concentration où on observe une nette dominance de la stratification thermique, par rapport à la stratification solutale.



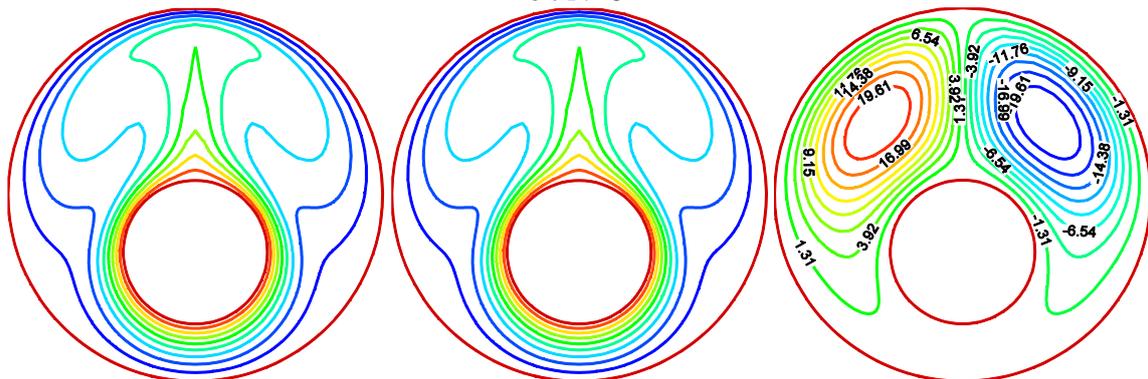
a :  $N=-10$



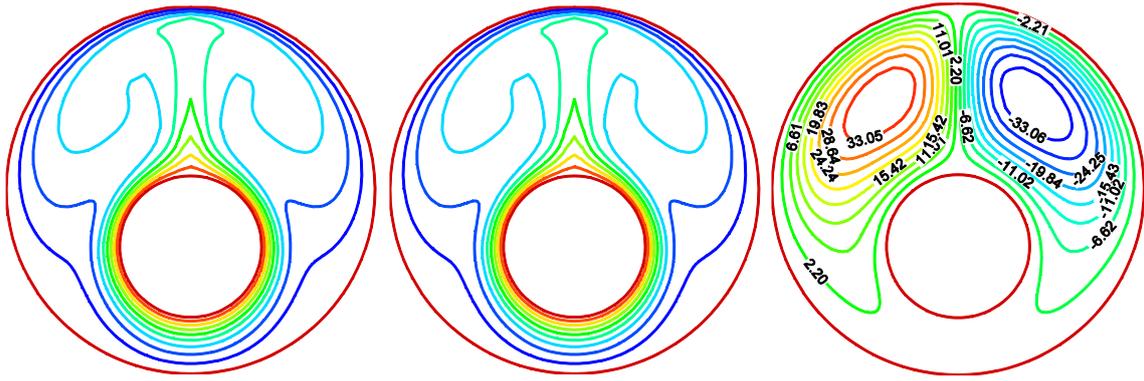
b :  $N=-5$



c :  $N=0$

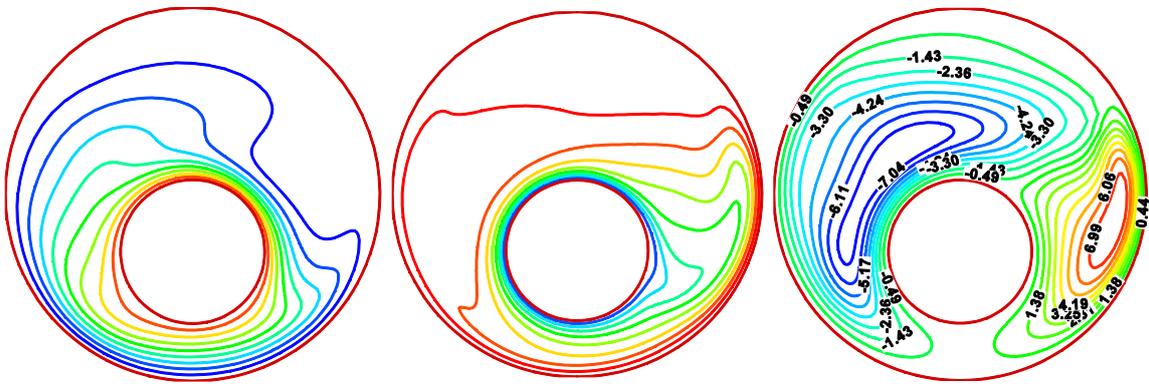


d :  $N=1$

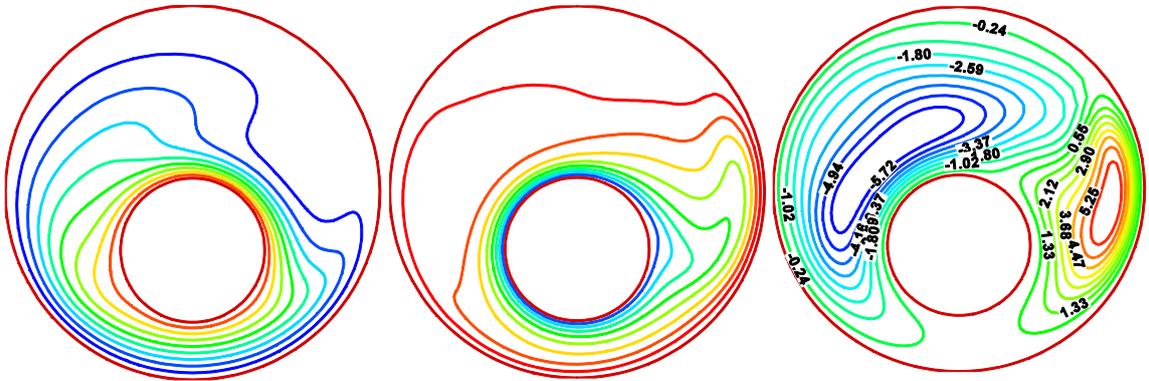


e : N=5

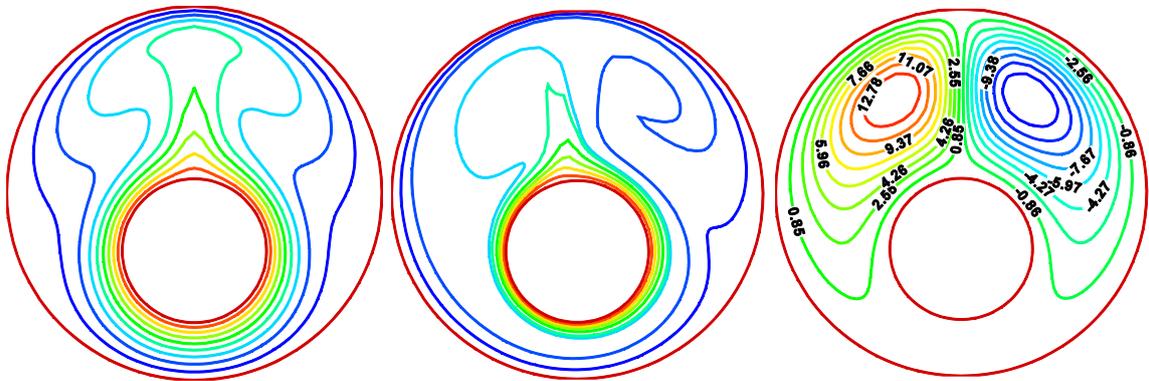
Figure 4.16 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Ra_T=5.10^4$ ,  $Le=1$  et différents N.



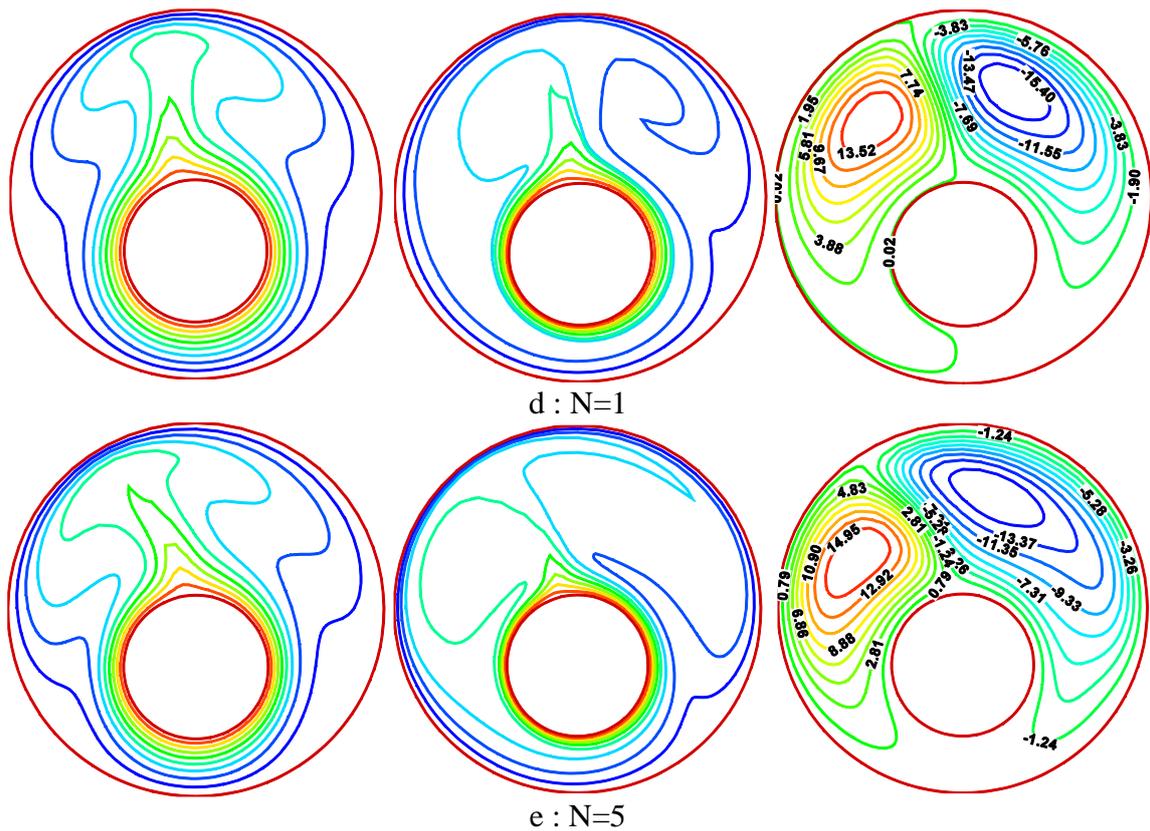
a : N=-10



b : N=-5



c : N=0



**Figure 4.17 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $C_2=0.5$ ,  $Ra_T=5.10^4$ ,  $Le=10$  et différents  $N$ .**

#### 4.4.3.2 Nombres de Nusselt et de Sherwood locaux

Les figures (4.18-4.21) illustrent l'influence du rapport des forces de poussées solutale et thermique  $N$  sur la variation des nombres de Nusselt  $Nu$  (de Sherwood  $Sh$ ) locaux, pour le cas coopérant et opposant respectivement sur la paroi du cylindre intérieur et extérieur.

Pour les deux cas coopérant et opposant, les nombres de Nusselt (de Sherwood) locaux augmentent avec l'augmentation en valeur absolue du rapport des forces de poussées solutale et thermique  $|N|$ .

La figure (4.18) pour le cas coopérant montre l'existence d'un minimum (à la position angulaire  $\theta=180^\circ$ ) correspondant à la juxtaposition de deux cellules tournant en sens inverse et éloignant dans ce cas-là le fluide de la paroi interne et aussi l'existence de deux maximums (aux positions angulaires  $\theta=45^\circ$  et  $\theta=315^\circ$ ).

La figure (4.19) pour le cas opposant, les phénomènes sont inversés par rapport au cas coopérant.

Sur la paroi externe, les variations des nombres de Nusselt (Sherwood) illustrées sur les figures (4.20) et (4.21), sont inversées par rapport à celles de la paroi interne des figures (4.18) et (4.19), du moment que nous sommes en présence d'un espace annulaire fermé (si le

fluide quitte la paroi chaude dans une position angulaire, il arrive à la paroi froide dans cette même position et vice-versa).

En conclusion l'accroissement des transferts, thermique et massique est donc d'autant plus marqué que la valeur absolue du rapport des forces de poussées, solutale et thermique  $N$  augmente.

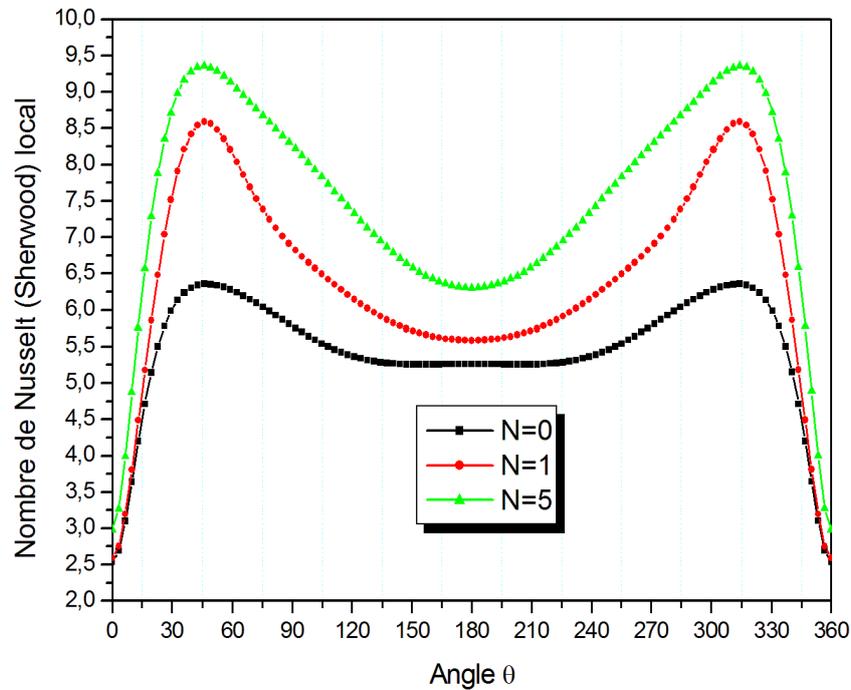


Figure 4.18 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi interne pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Le=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas coopérants).

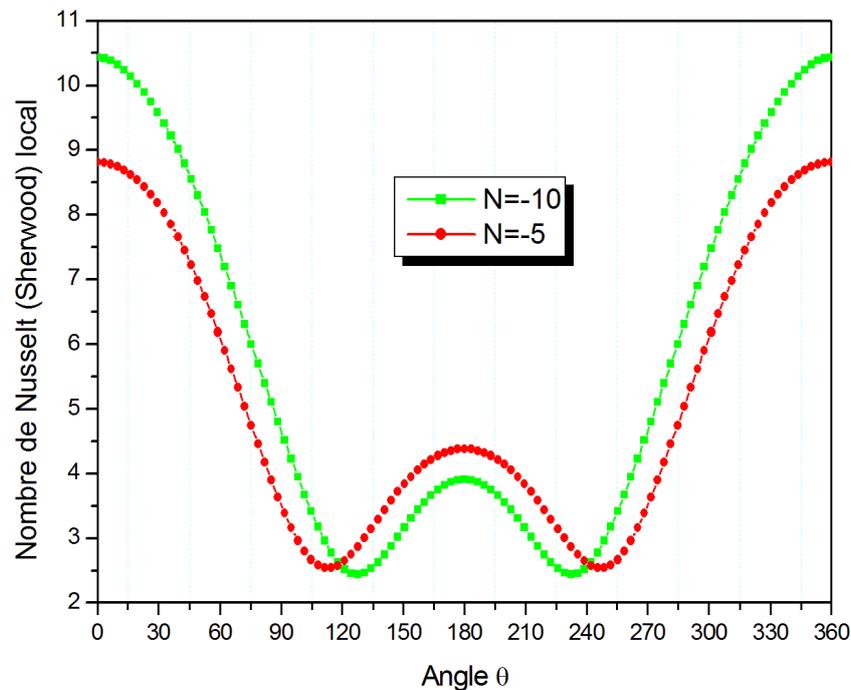
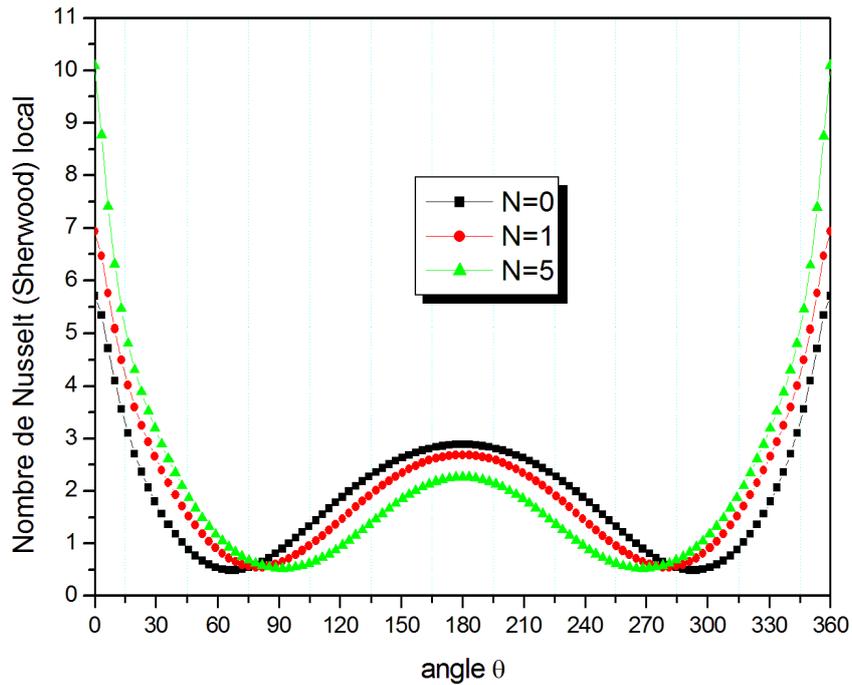
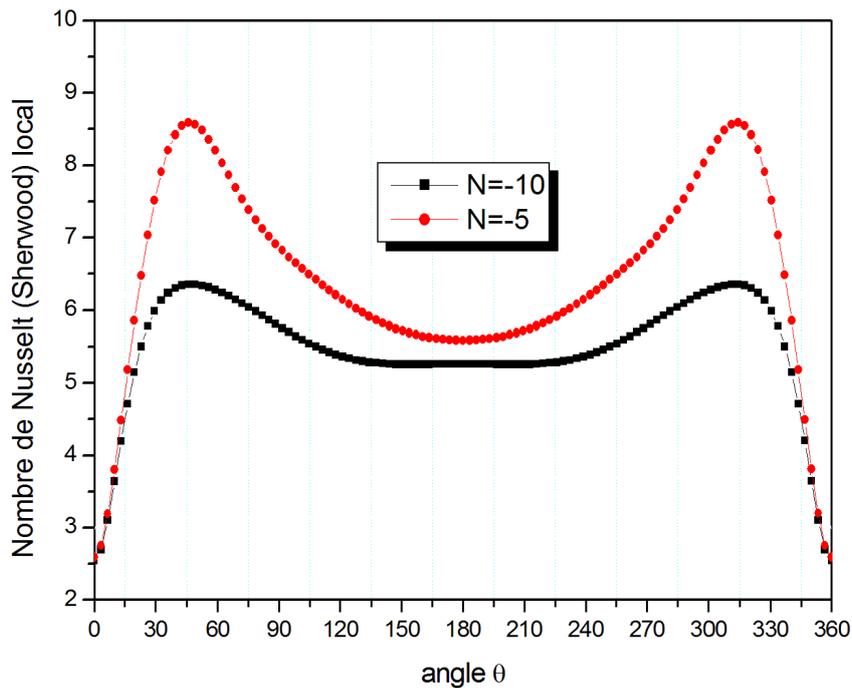


Figure 4.19 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi interne pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Le=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas opposés).



**Figure 4.20 :** Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi externe pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Le=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas coopérant).

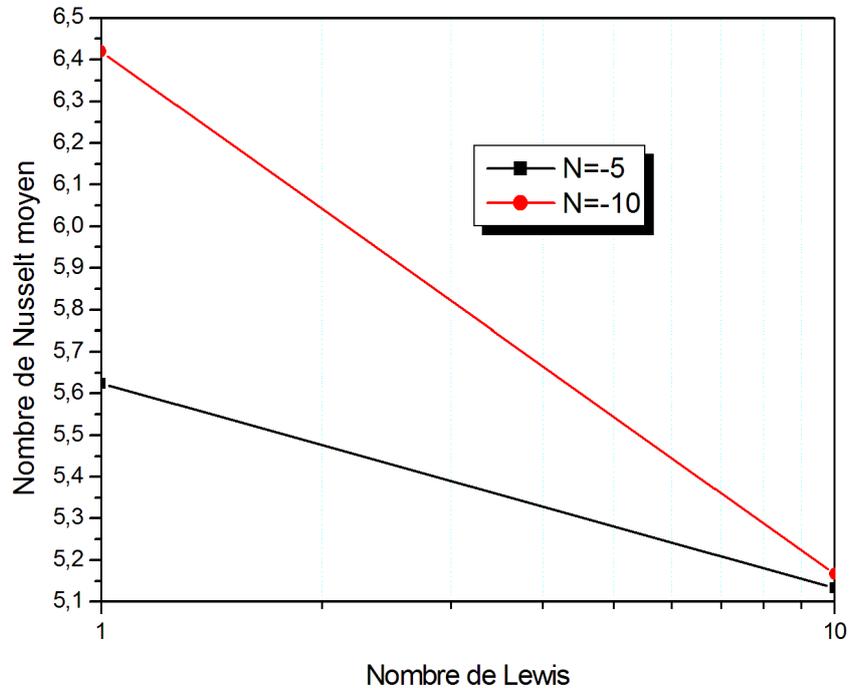


**Figure 4.21 :** Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) local sur la paroi externe pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Le=1$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas opposant).

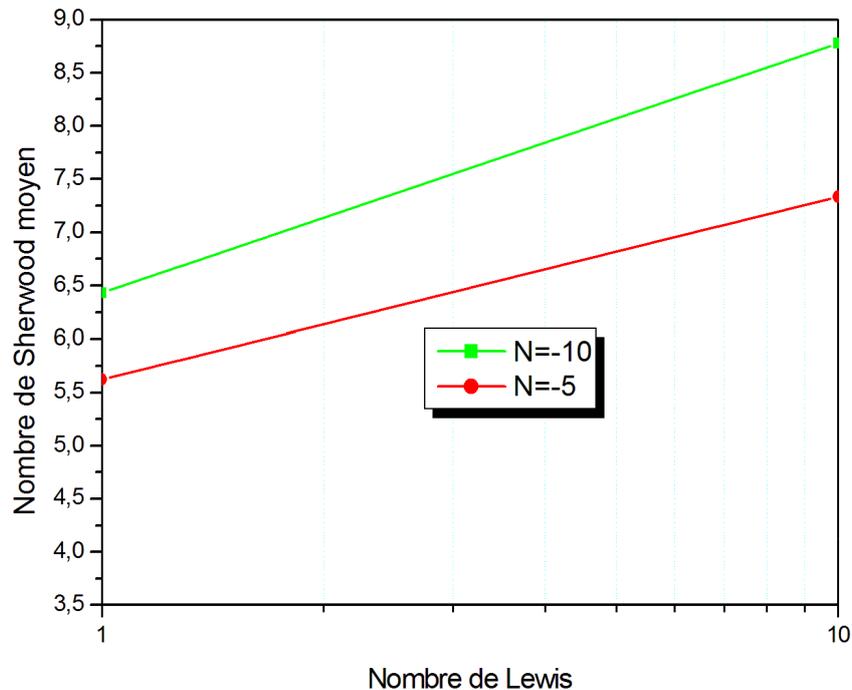
#### 4.4.3.3 Nombres de Nusselt et de Sherwood moyens

Les figures (4.22-4.25) illustrent bien les variations des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens respectivement en fonction du nombre de Lewis pour différentes valeurs du rapport des forces de poussées solutale et thermique (cas opposant et coopérant respectivement) et pour un nombre de Rayleigh thermique égal à  $5.10^4$ . Quelle que soit la

valeur du nombre de Lewis et pour des valeurs absolues de  $|N| \geq 0$ , on constate que les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens augmentent avec l'augmentation de la valeur absolue du rapport des forces de poussées  $N$ . On remarque aussi un décroissement du taux de transfert thermique et un accroissement monotone du taux de transfert massique avec l'augmentation du nombre de Lewis  $Le$ .



**Figure 4.22 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas opposant).**



**Figure 4.23 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents  $N$  (cas opposant).**

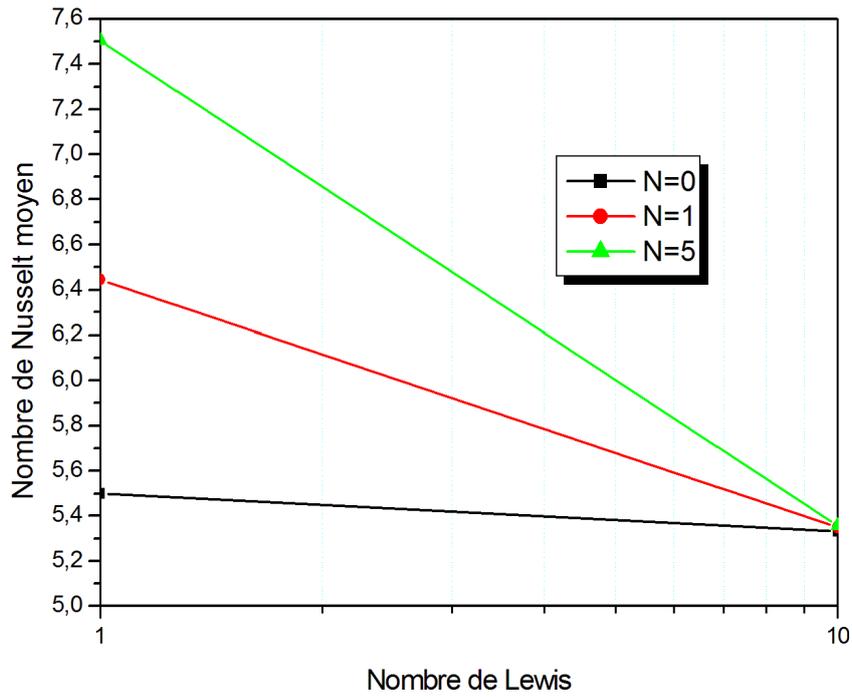


Figure 4.24 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents N (cas coopérant).

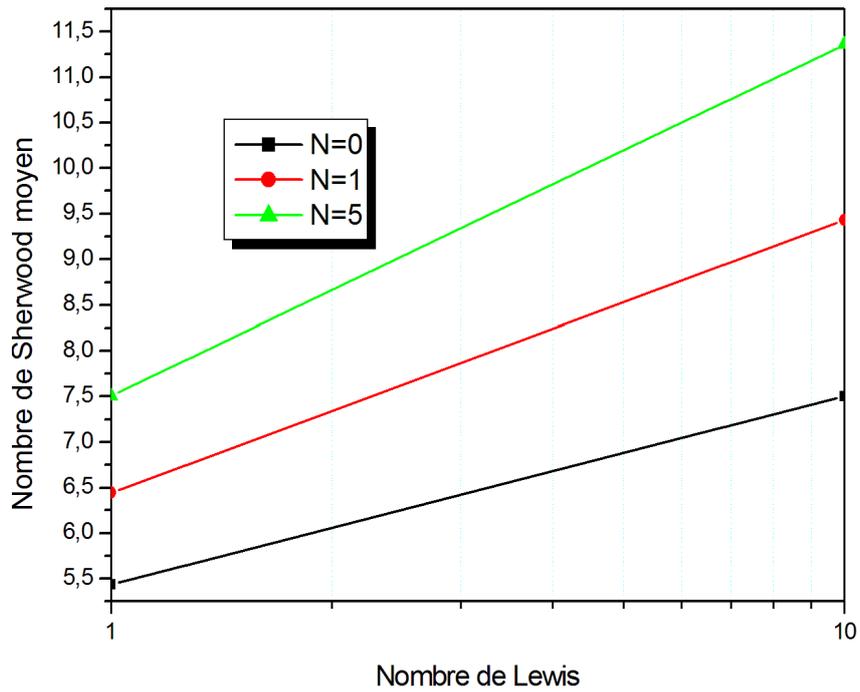


Figure 4.25 : Variation du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Lewis pour  $C_2=0.5$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $Ra_T=5.10^4$  et différents N (cas coopérant).

#### **4.4.4 Influence de l'angle d'inclinaison $\alpha$**

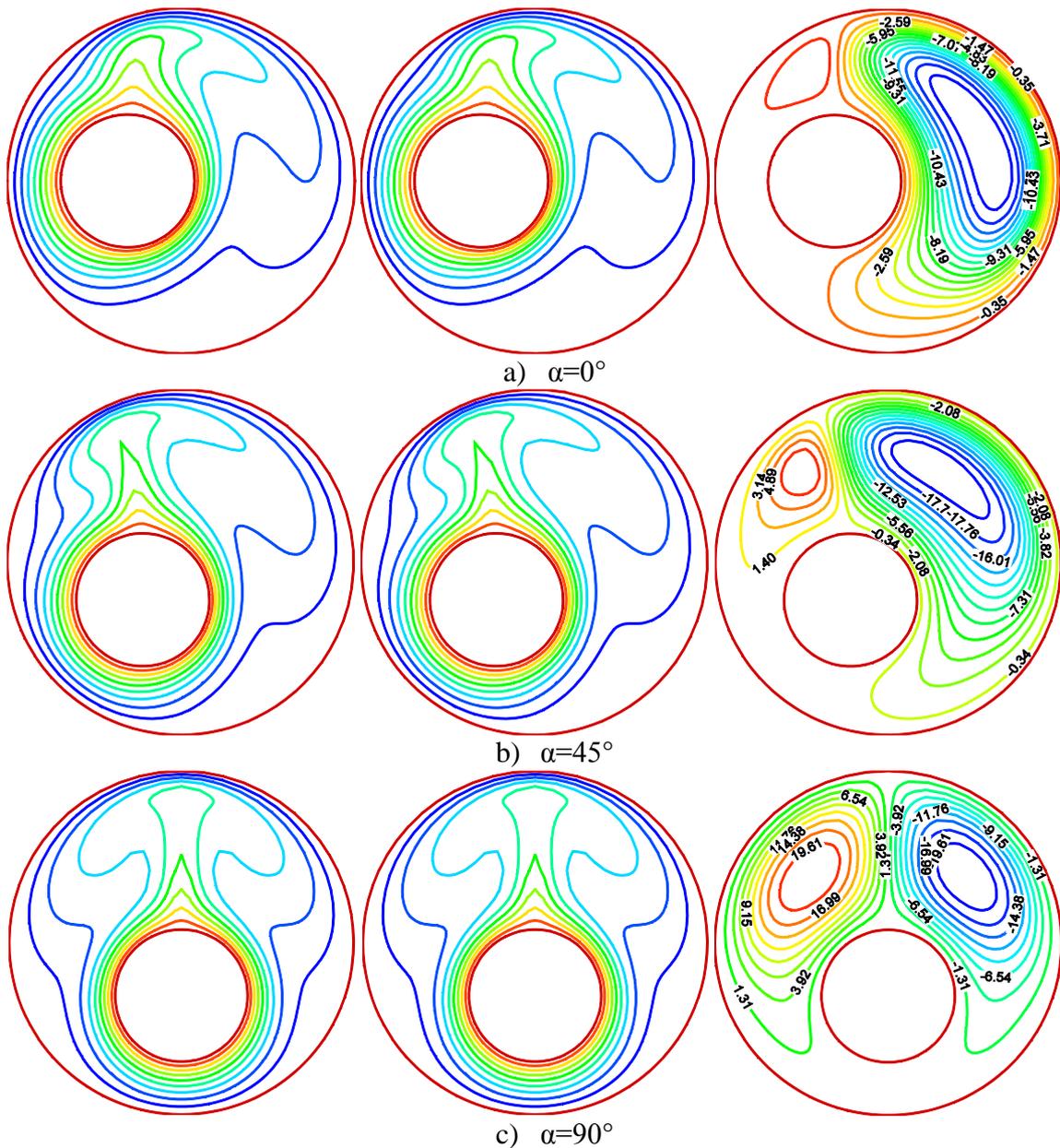
##### **4.4.5.1 Isothermes, isoconcentrations et lignes de courant**

Pour pouvoir étudier la convection thermosolutale dans un espace annulaire incliné, il faut examiner l'influence de l'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur et de masse et sur l'écoulement. Dans cette partie, nous examinons donc l'effet de l'inclinaison du système, l'angle  $\alpha$  est calculé à partir de l'horizontale dans le sens trigonométrique. Pour ce faire nous avons utilisé pour les configurations géométriques considérées trois valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ).

Pour  $\alpha=0^\circ$ , nous remarquons sur la figure (4.26.a) le développement d'une seule cellule convective tournant dans le sens horaire dans notre espace annulaire.

Quand  $\alpha=45^\circ$ , la zone de rétrécissement de l'espace annulaire se déplace vers le bas, par contre la zone d'élargissement se déplace vers le haut ce qui permet le déplacement du centre de la grande cellule tournant dans le sens horaire vers le haut et l'apparition d'une petite cellule contrarotative de l'autre côté du plan vertical médian.

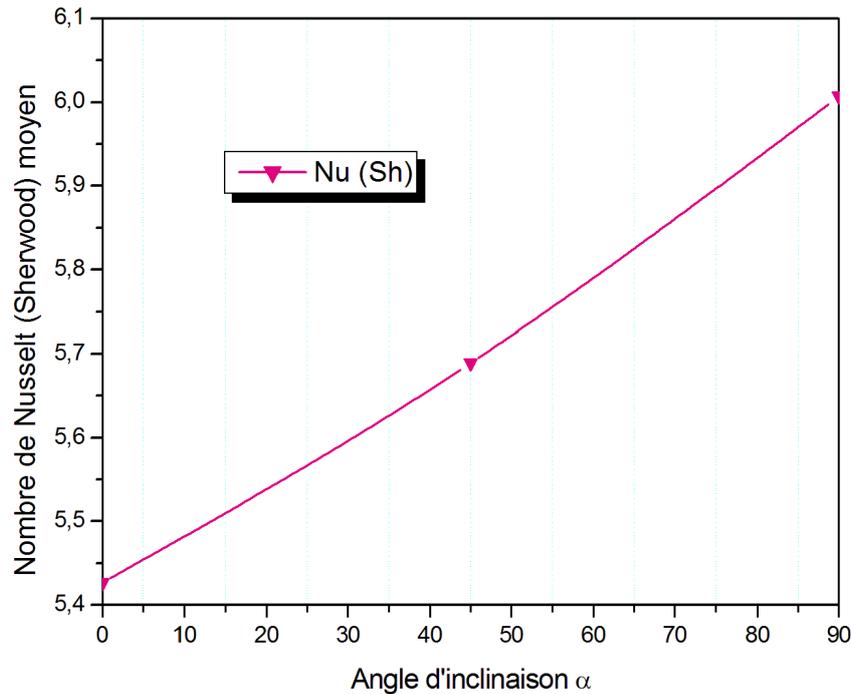
Pour  $\alpha=90^\circ$ , notre espace annulaire admet dans ce cas-là un axe de symétrie qui est le plan vertical médian, ce qui permet à l'écoulement de s'organiser en deux cellules contrarotatives par rapport à ce plan vertical, nous remarquons aussi que les isothermes et les isoconcentrations se modifient sensiblement et finissent par adopter un panache en forme de champignon. Les valeurs de la fonction de courant augmentent avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ .



**Figure 4.26 : Les isothermes, les isoconcentrations et les lignes de courant pour  $C_2=0.5$ ,  $Ra_T=5.10^4$ ,  $N=1$ ,  $Le=1$  et différents  $\alpha$ .**

#### **4.4.5.2 Nombres de Nusselt et de Sherwood moyens**

La figure (4.27) qui illustre les variations des nombres de Nusselt (de Sherwood) moyens sur la paroi interne en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , montre que ces nombres augmentent au fur et à mesure que l'inclinaison du système augmente. Ceci nous permet de conclure que les taux de transferts s'améliorent d'autant plus que notre espace annulaire admet une symétrie par rapport au plan vertical médian.



**Figure 4.27 : Variation du nombre de Nusselt (de Sherwood) moyen sur la paroi interne en fonction de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  pour  $C_2=0.5$ ,  $Le=1$ ,  $N=1$  et  $Ra_T=5.10^4$ .**

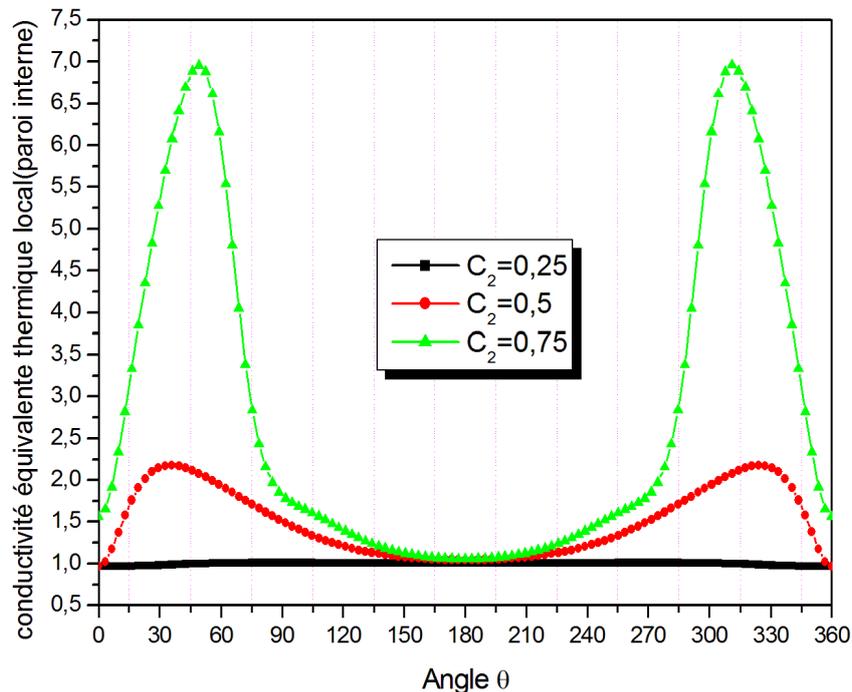
#### **4.4.5 Influence de l'excentricité relative**

Puisque cette étude examine la convection naturelle thermosolutale dans un espace annulaire dont la géométrie varie avec l'excentricité, la conductivité thermique équivalente est le paramètre le plus approprié pour comparer les transferts de chaleur intervenant dans les diverses géométries considérées. Le nombre de Nusselt est proportionnel à la valeur globale du taux de transfert de chaleur qui se compose des modes conduction et convection, en considérant que la conductivité thermique équivalente représente le rapport du transfert de chaleur total entre les cylindres intérieur et extérieur, le nombre de Nusselt n'est pas un bon indicateur du transfert de chaleur en comparant les différentes géométries.

La conductivité thermique équivalente locale est définie comme étant le rapport du nombre de Nusselt local d'une surface au voisinage de laquelle un fluide est en mouvement au nombre de Nusselt local qui serait calculé si le fluide était statique. La conductivité thermique équivalente globale est donnée par le rapport des nombres moyens de Nusselt pour l'un ou l'autre cas.

La figure (4.28) illustre l'influence de l'excentricité relative sur la conductivité thermique équivalente locale pour un angle d'inclinaisons  $\alpha=90^\circ$ , un nombre de Lewis  $Le=1$ , un rapport des forces de poussées solutale et thermique  $N=0$  et un nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T=5.10^4$ . Nous remarquons que la conductivité thermique équivalente locale

augmente avec l'augmentation de l'excentricité relative, ce qui dénote d'une intensification de la convection naturelle.



**Figure 4.28 : Influence de l'excentricité relative  $C_2$  sur la conductivité équivalente thermique locale (paroi interne) pour  $\alpha=90^\circ$ ,  $Le=1$ ,  $N=0$  et  $Ra_T=5.10^4$ .**

#### **4.5 Conclusion**

Dans ce quatrième chapitre nous avons fait une étude du maillage, ensuite nous avons validé notre code de calcul avec deux cas l'un est concentrique et l'autre est excentrique issu de la littérature et enfin nous avons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens, sur les parois interne et externe de l'enceinte, qui sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, de l'excentricité relative, des forces de poussées solutale et thermique, et de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , pour voir leur effet sur les transferts de chaleur et de masse au sein de l'enceinte considérée.

# Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude numérique de la convection naturelle bidiffusive bidimensionnelle laminaire et permanente dans un espace annulaire situé entre deux cylindres excentrés horizontaux, rempli d'un fluide binaire newtonien et incompressible. Le fluide est l'air et la substance diffusée dans l'enceinte est la vapeur d'eau. Les deux parois cylindriques sont soumises à des températures  $T_1$  et  $T_2$  et des concentrations  $S_1$  et  $S_2$  constantes.

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de chaleur et de masse à travers les parois de l'enceinte. Ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Nous avons mis au point un code de calcul numérique, basé sur une méthode aux volumes finis, qui permet de déterminer les champs de température et de concentration et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens, les nombres de Sherwood locaux et moyens et les conductivités équivalentes thermiques locales sur les parois de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système. Nous avons examiné l'influence du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du rapport des forces de poussée thermique et solutale, de l'angle d'inclinaison du système et de l'excentricité relative de notre espace annulaire sur l'écoulement en régime stationnaire.

En premier lieu, les résultats des simulations numériques ont montré, que pour un faible nombre de Rayleigh thermique, le transport de chaleur et de masse au sein de l'espace annulaire est essentiellement contrôlé par le processus de conduction et de diffusion pure. Lorsque le nombre de Rayleigh thermique augmente, le rôle de la convection devient prépondérant.

Dans une autre étape, nous avons analysé l'influence du nombre de Lewis. Lorsque  $Le=1$ , les stratifications thermique et solutale se développent d'une façon similaire, ceci d'une part, d'autre part, pour  $Le>1$  la stratification solutale est faible en forme de panache repoussé par une stratification thermique dominant le cœur de la cavité. L'augmentation du nombre de Lewis entraîne une diminution de l'intensité de la circulation du fluide dans l'espace annulaire pour de faibles valeurs de  $N$ . Les transferts de chaleur et de masse évoluent en sens inverse quand le nombre de Lewis augmente.

L'influence du rapport des forces de poussée thermique et solutale  $N$ , montre que les taux de transfert thermique et massique augmentent avec l'augmentation de la valeur absolue du rapport des forces de poussée  $N$ .

Pour l'effet de l'inclinaison  $\alpha$ , les résultats ont montré que les taux de transferts s'améliorent d'autant plus que notre espace annulaire admet une symétrie par rapport au plan vertical médian.

Dans une dernière partie les résultats concernant l'influence du paramètre géométrique ont montré que la conductivité thermique équivalente locale augmente avec l'augmentation de l'excentricité relative, ce qui dénote d'une intensification de la convection naturelle.

L'étude de la convection naturelle bidiffusive dans ces espaces annulaires mériterait d'être approfondie. Une suite intéressante à ce travail serait de généraliser l'algorithme développé en appliquant d'autres conditions aux frontières de notre enceinte. Il serait aussi intéressant de remplacer le fluide binaire avec un fluide à plusieurs constituants.

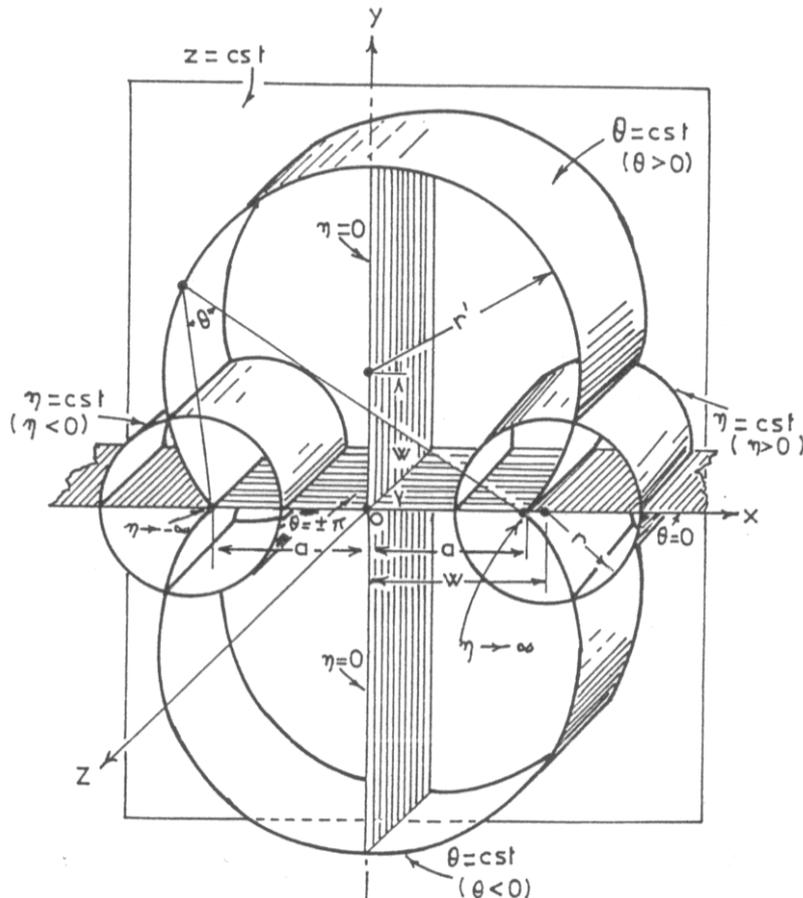
# Coordonnées Bicylindriques

## A.1 Introduction

Dans le référentiel bipolaire représenté sur la figure(A.1), nous observons dans le plan (xy) deux groupes de cercles:

- Les cylindres définies par  $u=\text{constant}$ , tracés autour des deux pôles  $x=-a$  et  $x=+a$ , centrés sur l'axe (x).
- Les cylindres définis par  $v=\text{constant}$ , centrés sur l'axe (y).

La translation de ces cercles parallèlement à l'axe (z) engendre une famille de cylindres. Les coordonnées  $(\eta,\theta,z)$  sont dites "coordonnées bicylindriques" [1,2]. Les surfaces  $\eta=\text{constantes}$  sont des cylindres dont les axes sont dans le plan xz; les surfaces  $\theta=\text{constantes}$  sont des cylindres avec des axes dans le plan yz et les surfaces  $z=\text{constantes}$  sont des plans parallèles.



**Figure A.1 :Représentation schématique des coordonnées bicylindriques**

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées bicylindriques s'effectue à l'aide des relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y &= \frac{a \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$f(z) = a \frac{e^{\bar{z}_1} + 1}{e^{\bar{z}_1} - 1}$$

avec:

$$z_1 = \eta + i\theta$$

posons :

$$f(z_1) = x + iy$$

On peut aussi écrire cette fonction sous la forme:

$$f(z_1) = a \operatorname{coth}\left(\frac{\eta - i\theta}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

Considérons la quantité:

$$\operatorname{coth}(\eta + i\theta) = \frac{\operatorname{ch}(\eta + i\theta)}{\operatorname{sh}(\eta + i\theta)} = \frac{e^\eta e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{e^\eta e^{i\theta} - e^{-\eta} e^{-i\theta}}$$

En développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{coth}(\eta + i\theta) = \frac{\operatorname{ch}(\eta)\operatorname{sh}(\eta) + i \sin(\theta)\cos(\theta)(\operatorname{sh}^2(\eta) - \operatorname{ch}^2(\eta))}{\cos^2(\theta)\operatorname{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta)\operatorname{ch}^2(\eta)}$$

Comme:

$$\operatorname{ch}^2(\eta) - \operatorname{sh}^2(\eta) = 1$$

Et

$$\operatorname{ch}(\eta)\operatorname{sh}(\eta) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\eta)$$

Il vient:

$$\operatorname{coth}(\eta + i\theta) = \frac{0.5(\operatorname{sh}(2\eta) - i \sin(2\theta))}{\cos^2(\theta)\operatorname{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta)\operatorname{ch}^2(\eta)}$$

Soit encore:

$$\operatorname{coth}(\eta + i\theta) = \frac{\operatorname{sh}(2\eta) - i \sin(2\theta)}{\operatorname{ch}(2\eta) + \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)} \quad (\text{A.3})$$

Puisque,

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

La relation (A.3) se ramène à :

$$\coth(\eta + i\theta) = \frac{\operatorname{sh}(2\eta) - i \sin(2\theta)}{\operatorname{ch}(2\eta) - \cos(2\theta)}$$

On en déduit:

$$\coth\left(\frac{\eta - i\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}(\eta) + i \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)}$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$x + iy = a \left( \frac{\operatorname{sh}(\eta) + i \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \right) \quad (\text{A.4})$$

L'identification de la partie réelle à x et de la partie imaginaire à y donne :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \\ y &= \frac{a \sin(\theta)}{\operatorname{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \end{aligned} \right\}$$

## **A.2 Démonstration géométrique**

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos(\theta) = \operatorname{ch}(\eta) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\eta) \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta)$$

Soit :

$$\cos^2(\theta) = \left( \operatorname{ch}(\eta) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right)^2 \quad \text{et} \quad \sin^2(\theta) = \left( \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right)^2$$

On en déduit :

$$\left( \operatorname{ch}(\eta) - \frac{a}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right)^2 + \left( \frac{y}{x} \operatorname{sh}(\eta) \right)^2 = 1$$

Après arrangement, nous obtenons:

$$(x - a \coth(\eta))^2 + y^2 = a^2 \coth^2(\eta) - a^2 \quad (\text{A.5})$$

comme :

$$a^2 \coth^2(\eta) - a^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(\eta)}$$

L'équation (A.5) devient:

$$(x - a \coth(\eta))^2 + y^2 = \frac{a^2}{\text{sh}^2(\eta)} \quad (\text{A.6})$$

C'est l'équation d'une famille de cercles dont les centres sont situés à l'abscisse  $x = a \coth(\eta)$  et de rayon  $a/|\text{sh}(\eta)|$ .

On remarque que la valeur de ce rayon tend vers l'infini lorsque  $\eta$  devient très petit. Cela signifie que la surface  $\eta$  se réduit au plan  $yz$ .

Le centre du cercle se déplace sur l'axe ( $x$ ) lorsque  $\eta$  varie si bien qu'il est situé en  $x=a$ , lorsque  $\eta$  tend vers l'infini.

Un calcul analogue conduit à:

$$x^2 + (y - a \cot(\theta))^2 = \frac{a^2}{\sin^2(\theta)} \quad (\text{A.7})$$

Cette équation représente une famille de cercles de rayon  $a/|\sin\theta|$ , qui passe par deux point fixes (pôles) de coordonnées ( $x=+a, y=0$ ) et ( $x=-a, y=0$ ).

Dans le système de coordonnées bicylindriques,  $\eta$  varie entre  $(-\infty)$  et  $(+\infty)$ . Les valeurs positives et négatives de  $\eta$  correspondent aux cercles dont les abscisses des centres sont respectivement positives et négatives.

### **A.3 Coefficients métriques**

En coordonnées cartésiennes, un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires ( $r, \theta$ ),  $(ds)^2$  est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1(du_1)^2 + h_2(du_2)^2$$

Ou:  $u_1$  et  $u_2$  sont des coordonnées curvilignes; les quantités  $h_1$  et  $h_2$ , les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a ( $h_x=h_y=1$ ) et en coordonnées bicylindriques:

$$h_\eta = h_\theta = \frac{a}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes :

$$h_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \quad (\text{A.8})$$

$$h_{\theta}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (\text{A.9})$$

$$h_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \quad (\text{A.10})$$

Par suite, nous obtenons:

$$h_{\eta}^2 = h_{\theta}^2 = \frac{a^2}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \quad (\text{A.11})$$

$$h_z^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc...

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \vec{a}_{\eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{a}_{\theta} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h} (\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)) \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} [(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^{-1} u] + \frac{\partial}{\partial \theta} [(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^{-1} v] \right\} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

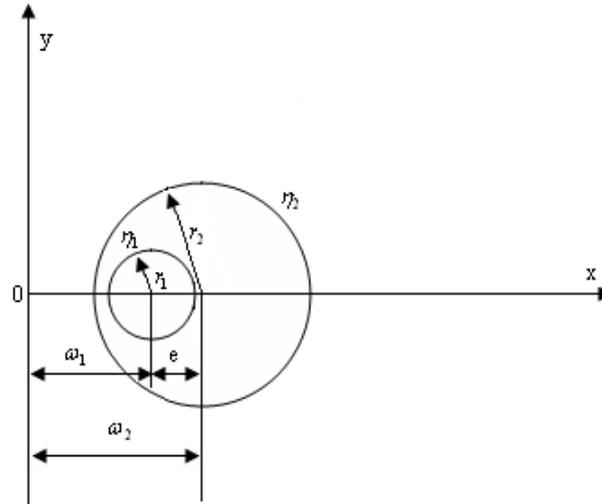
$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{V} &= \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \vec{a}_{\eta} + \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \vec{a}_{\theta} \\ &+ \frac{\vec{a}_z}{h} (\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)) \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u}{\text{ch}(\eta) - \cos(\theta)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

Avec :  $\vec{a}_{\eta}$ ,  $\vec{a}_{\theta}$ ,  $\vec{a}_z$  vecteurs unitaires suivant  $\eta, \theta, z$ .

Exemple :

Cas de deux cylindres d'axes parallèles excentrés (voir figure A.2).



**Figure A.2 : Représentation schématique de deux cylindres excentrés**

Sur cette figure, la distance entre les deux axes est donnée par :

$$e = \omega_2 - \omega_1$$

Avec :

$$\omega_1 = a \coth(\eta_1)$$

$$\omega_2 = a \coth(\eta_2)$$

Par suite:

$$e = a (\coth(\eta_2) - \coth(\eta_1))$$

D'où :

$$e = a \left( \frac{\text{ch}(\eta_2)}{\text{sh}(\eta_2)} - \frac{\text{ch}(\eta_1)}{\text{sh}(\eta_1)} \right) = \frac{a \text{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\text{sh}(\eta_2) \cdot \text{sh}(\eta_1)}$$

On en déduit :

$$e = r_1 \frac{\text{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\text{sh}(\eta_2)} = r_2 \frac{\text{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\text{sh}(\eta_1)}$$

Soit encore :

$$\frac{e}{r_1} = \frac{\text{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\text{sh}(\eta_2)} = C_2 = \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{e}{r_2} = \frac{\text{sh}(\eta_1 - \eta_2)}{\text{sh}(\eta_1)} = C_2' = \text{constante} \quad (\text{A.17})$$

La constante a est reliée aux rayons  $r_1$  et  $r_2$  par la relation :

$$a = r_1 \text{sh}(\eta_1) = r_2 \text{sh}(\eta_2)$$

D'où :

$$\frac{\text{sh}(\eta_1)}{\text{sh}(\eta_2)} = \frac{r_2}{r_1} = C_1 = \text{constant} \quad (\text{A.18})$$

Connaissant les valeurs de  $C_2$  et  $C_1$  figurant dans les équations (A.17) et (A.18), on peut déterminer facilement les valeurs de  $\eta_1, \eta_2$  à l'aide des relations suivantes :

$$\eta_1 = \ln \left[ C_1^2 - C_2^2 - 1 + \sqrt{(C_1^2 - C_2^2 + 1 - 2C_1)(C_1^2 - C_2^2 + 1 + 2C_1)} \right] - \ln(2C_2) \quad (\text{A.19})$$

$$\eta_2 = \ln \left[ C_1^2 + C_2^2 - 1 + \sqrt{(C_1^2 - C_2^2 + 1 - 2C_1)(C_1^2 - C_2^2 + 1 + 2C_1)} \right] - \ln(2C_1.C_2) \quad (\text{A.20})$$

#### **A.4 Formulation des équations de continuité, de la chaleur et du mouvement dans le système de coordonnées bicylindriques**

##### **A.4.1 Equation de continuité**

En coordonnées curvilignes orthogonales, la divergence du vecteur  $\vec{v}$  est donnée par:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 v_3) \right] \quad (\text{A.22})$$

Avec:

$x_1, x_2, x_3$  : coordonnées curvilignes.

$h_1, h_2, h_3$  : coefficient métriques suivant  $x_1, x_2, x_3$ .

$v_1, v_2, v_3$  : composantes de vitesses  $x_1, x_2, x_3$ .

Puisqu'en coordonnées bicylindriques, nous avons:

$$h_1 = h_\eta$$

$$h_2 = h_\theta$$

$$h_3 = 1$$

Alors la relation (A.22) devient :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h v_\theta) \right] \quad (\text{A.23})$$

Ainsi  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , se traduit par:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h v_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h v_\theta) = 0 \quad (\text{A.24})$$

##### **A.4.2 Equation de la chaleur**

L'équation (2.4) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{V} \text{grad} T = \frac{\lambda}{\rho c p} \text{div}(\text{grad} T) \quad (\text{A.25})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.25) donne :

$$(\overrightarrow{Vgrad}) T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{A.25.a})$$

Des relations (A.13) et (A.23), nous déduisons :

$$\text{div}(\overrightarrow{grad} T) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{A.25.b})$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{A.26})$$

#### **A.4.3 Equation de la masse**

L'équation (2.4) peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{Vgrad} S = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{div}(\overrightarrow{grad} S) \quad (\text{A.27})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.27) donne :

$$(\overrightarrow{Vgrad}) S = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (\text{A.27.a})$$

Des relations (A.13) et (A.23), nous déduisons :

$$\text{div}(\overrightarrow{grad} S) = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{A.27.b})$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right] \quad (\text{A.28})$$

#### **A.4.4 Equation du mouvement**

Réécrivons l'équation (2.8) sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{Vgrad} \omega = g \cdot \beta_T \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + g \cdot \beta_S \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial S}{\partial x} \cos(\alpha) \right) + \nu \text{div}(\overrightarrow{grad} \omega) \quad (\text{A.29})$$

Nous expliciterons tout d'abord les deux expressions suivantes :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) \quad (\text{A.29.a})$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial S}{\partial x} \cos(\alpha) \right) \quad (\text{A.29.b})$$

En fonction de  $\eta$  et  $\theta$ .

D'après la relation(A.1), nous pouvons écrire :

$$dx = \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} d\eta + \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} d\theta \quad (\text{A.30.a})$$

et

$$dx = -\frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} d\theta - \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} d\eta \quad (\text{A.30.b})$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de  $d\eta$  et  $d\theta$  :

$$d\eta = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} dx - \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} dy \right] \quad (\text{A.30.c})$$

$$d\theta = -\frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} dy + \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} dx \right] \quad (\text{A.30.d})$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \right] \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ -\frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.31.a})$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.31.b})$$

Comme les dérivées partielles de T et S par rapport à x et y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.32.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{A.32.b})$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.32.c})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{A.32.d})$$

Alors, en utilisant les relations (A.31.a), (A.31.b) et (A.32) nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) \cos(\theta))^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) \cos(\theta))^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ -\frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33.b})$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) \cos(\theta))^2} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) \cos(\theta))^2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33.c})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2}{a^2} \left[ -\frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \frac{\partial S}{\partial \eta} - \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))^2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33.d})$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.27.a), il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))}{a} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial S}{\partial x} \cos(\alpha) = \frac{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))}{a} \left\{ [-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \eta} + [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \theta} \right\} \quad (\text{A.35})$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{a(1 - \cos(\theta)\text{ch}(\eta))}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{a \sin(\theta)\text{sh}(\eta)}{(\text{ch}(\eta) - \cos(\theta))} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.36})$$

Finalement, l'équation du mouvement (A.29) s'écrit :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{g\beta_T}{h} \left\{ \begin{aligned} &[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} + \\ &[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} + \frac{g\beta_S}{h} \left\{ \begin{aligned} &[-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \eta} \\ &+ [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial S}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} + \frac{v}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.37})$$

## Références Bibliographiques

- [1] **P. Moon and E. Spencer**, Field theory Handbook, Springer, p. 349, Berlin, 1971.
- [2] **P. Moon and E. Spencer**, Field theory Engineers, D. VAN. Nostrand company, LTD, Toronto, p. 356, Canada, 1961.
- [3] **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and fluid flow, McGraw-Hill book company, New York, 1980.
- [4] **E.F. Nogotov**, Applications of Numerical Heat Transfer, McGraw-Hill book company, New York, 1978.
- [5] **E. Saadjan**, Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques, Polytechnica, Paris, 1998.
- [6] **P.J. Roache**, Computational Fluid Dynamics, Hermosa, 1982.
- [7] **T.H. Kuehn and R.J. Goldstein**, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinders, J. Fluid Mech, vol. 74, pp. 695-719, 1976.
- [8] **T.H. Kuehn and R.J. Goldstein**, An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, ASME J. Heat Transfer, vol. 100, pp. 635-640, 1978.
- [9] **G. Guj and F. Stella**, Natural convection in horizontal eccentric annuli: Numerical study, Numer Heat Transfer, vol. 27, pp. 89-105, 1995.
- [10] **M. Djezzar and M. Daguinet**, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts, 1<sup>ST</sup> International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications, Beirut-Lebanon, 2004.
- [11] **M. Djezzar and M. Daguinet**, Contribution à l'étude de la convection dans différents espaces annulaires, soumis à différentes conditions de chauffage, Thèse de Doctorat d'état, Université Mentouri Constantine, 2005.
- [12] **M. Djezzar, A. Chaker and M. Daguinet**, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of internal eccentricity, Revue des Energies Renouvelables, vol. 8(1), 2005.
- [13] **M. Djezzar and M. Daguinet**, Natural steady convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of the slope angle, Journal of Applied Mechanics Transaction of the ASME, vol. 72, 2006.

- [14] **C. Ghernoug, M. Djezzar and A. Bouras**, The natural convection in annular space located between two horizontal eccentric cylinders: The Grashof number effect, *Energy Procedia*, vol. 36, pp. 293-302, 2013.
- [15] **D.A. Nield**, the thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem, *J. Fluid Mechanics*, vol. 29, pp.545-558, 1967.
- [16] **D.A.Nield**, Onset of thermohaline convection in porous medium, *Water Resources Research*, vol. 4, pp. 553-560, 1968.
- [17] **P. Ranganathanand and R. Viskanta**, Natural convection in a square cavity due to combined driving forces, *Num. Heat. Transfer*, vol. 14, pp. 35-59, 1988.
- [18] **K. Ghorayeb, H. Khallouf and A. Mojtabi**, Influence du nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement de double diffusion convection, *Entropie*, vol. 198, pp. 97-101, 1996.
- [19] **K. Ghorayeb, H. Khallouf and A. Mojtabi**, Onset of oscillatory flows in double-diffusive convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 42, pp. 629-643, 1999.
- [20] **V.A.F. Costa**, Double diffusive natural convection in a square enclosure with heat and mass diffusive walls, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 40, pp. 4061-4071, 1997.
- [21] **V. Sévélédér and J.P. Petit**, Flow structures induced by opposing forces in double diffusion natural convection in a cavity, *Numerical Heat and mass Transfer Part A*, vol. 15, pp. 431-444, 1989.
- [22] **C. Béghein, F. Haghghat and F. Allard**, Numerical Study of Double Diffusive Natural Convection in a Square Cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 35, pp. 833-846, 1992.
- [23] **M. Mamou, P. Vasseur and E. Bigen**, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure, *Heat and Mass Transfer*, vol. 32, pp. 115-125, 1996.
- [24] **I. Sezai and A.A. Mohamad**, Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradient, *Phys. Fluids*, vol. 12, pp. 2210-2223, 2000.
- [25] **A. Abidi, L. Kolsi, M.N. Borjini and H. Ben Aissia**, Etude numérique de la convection naturelle doublement diffusive dans une cavité cubique : Effets des conditions sur les parois horizontales, 13èmes Journées Internationales de Thermique, Albi, France, du 28 au 30 Août 2007.
- [26] **G.V. Kuznetsov and M.A. Sheremet**, A numerical simulation of double-diffusive conjugate natural convection in an enclosure, *Int. J. Thermal. Sci*, vol. 50, pp. 1878-1886, 2011.

- [27] **O.V. Trevisan and A. Bejan**, Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 28, pp. 1597-1611, 1985.
- [28] **K. Ghorayeb and A.Mojtabi**, La convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Heat transfer, Reactive media, Combustion, serie II, pp. 19-27, 1997.
- [29] **S. Benissaad and M. Afrid**, Influence du nombre de Grashof sur la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire à faible rapport de forme, *Entropie*, vol. 242, pp. 44-55, 2002.
- [30] **D. Akrouf, M. Betrouni, D. Kalache, S. Hamaili and N. Chabane-Chaouche**, Etude instationnaire d'écoulement en double diffusion avec gradient opposé en température et en concentration, *Rev. Energ. Ren*, pp. 99-104, 2000.
- [31] **Y. Kamotani, J.S. Wang, S. Ostrach and H.D. Jiang**, Experimental study of natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 28 (1), pp. 165-173, 1985.
- [32] **J.W. Lee and J.M. Hyun**, Double diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 33(8), pp. 1619-1632, 1990.
- [33] **J.W. Lee and J.M. Hyun**, Double diffusive convection in a rectangle with cooperating horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 33(8), pp. 1605-1617, 1990.
- [34] **J.W. Lee and J.M. Hyun**, Time-dependent double diffusive in a stably stratified fluid under lateral heating, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34 (9), pp. 2409-2421, 1991.
- [35] **S. Benissaad, M. Afrid and Z. Nemouchi**, Simulation tridimensionnelle de la convection naturelle à double diffusion dans le cas opposant, *Sciences & Technologie A*, vol. 25, pp. 37-47, 2007.
- [36] **R. Bennacer and D. Gobin**, Cooperating thermosolutal convection in enclosures-I. Scale analysis and mass transfer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 39(13), pp. 2671-2681, 1996.
- [37] **T. Nishimura, M. Wakamatsu and A.M. Morega**, Oscillatory double-diffusive convection in a rectangular enclosure with combined horizontal temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, pp. 1601-1611, 1998.
- [38] **A. J. Chamkha and H. Al-Naser**, Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with opposing temperature and concentration gradients, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 45, pp. 2465-2483, 2002.

- [39] **R. Nikbakhti and A. B. Rahimi**, Double-diffusive natural convection in a rectangular cavity with partially thermally active side walls, *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, vol. 43 (4), pp. 535-541, 2012.
- [40] **A. Teamah, A.F. Elsafty and E.Z. Massoud**, Numerical simulation of double-diffusive natural convective flow in an inclined rectangular enclosure in the presence of magnetic field and heat source, *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 52, pp. 161-175, 2012.
- [41] **K.F. Shi and W.Q. Lu**, Numerical simulation of double-diffusive convection with cross gradients, *J. Eng. Thermophys.*, vol. 26 (2), pp. 328-330, 2005.
- [42] **K.F. Shi and W.Q. Lu**, Time evolution of double-diffusive convection in a vertical cylinder with radial temperature and axial solutal gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 49 (6), pp. 995-1003, 2006.
- [43] **A.M. Al-Amiri and K.M. Khanafer**, Numerical simulation of double-diffusive mixed convection with in a rotating horizontal annulus, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45 (6), pp. 567-578, 2006.
- [44] **M.A. Teamah**, Numerical simulation of double diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 46, pp. 637-648, 2007.
- [45] **J.S. Hyung, K.C. Won and M.H. Jae**, Double diffusive convection in a rotating annulus with horizontal temperature and vertical solutal gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 36, pp. 3773-3782, 1993.
- [46] **R.D. Simitev**, Double-diffusive natural convection in a rotating cylindrical annulus with conical caps, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 186(3-4), pp.183-190, 2011.
- [47] **A. Bouras, M. Djezzar, H. Naji and C. Ghernoug**, Numerical computation of double-diffusive natural convective flow within an elliptic-shape enclosure, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 57, pp. 183-192, 2014.
- [48] **P.W. Shipp, M. Shoukri and M.B. Carver**, Double diffusive natural convection in a closed annulus, *Num Heat Transfer*, vol. 24, pp. 339-356, 1993.
- [49] **P.W. Shipp, M. Shoukri and M.B. Carver**, Effect of thermal Rayleigh and Lewis numbers on double diffusive natural convection in closed annulus, *Num Heat Transfer*, vol. 24, pp. 451-465, 1993.
- [50] **D. Akrou**, Effet d'hystérésis en convection thermosolutale avec des gradients croisés: Etang de stockage, *Rev. Energ. Ren.*, vol. 3, pp. 39- 47, 2000.

- [51] **T.F. Lin, W.R. Chang and J. Chang**, Unsteady double diffusive convection with opposed buoyancy forces in a vertical enclosure, *ASME, HTD*, vol. 198, pp. 83-90, 1992.
- [52] **M. Boussaid, A. Mezenner and M. Bouhaded**, Convection naturelle de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale, *Int. J. Thermal. Sci*, vol. 38, pp. 363-371, 1999.
- [53] **J.H. Jang, W.M. Yan and H.C. Liu**, Natural convection heat and mass transfer along a vertical wavy surface, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 46, pp. 1075-1083, 2003.
- [54] **S.U. Rahman**, Natural convection along vertical wavy surfaces an experimental study, *Chemical Engineering Journal*, vol. 84, pp.587-591, 2001.
- [55] **K. Khanafer, K. Vafai, A. Kangarlu**, Water diffusion in biomedical systems as related to magnetic resonance imaging, *Magn Reson Imaging*, vol. 21, pp. 17-31, 2003.
- [56] **A.M. Al-Amiri, K.M. Khanafer and I. Pop**, Numerical simulation of combined thermal and mass transport in a square lid-driven cavity, *Int. J. Therm. Sci*, vol. 46 (7), pp. 662-671, 2007.
- [57] **W.M. Yan, T.F. Lin and Y.L. Tsay**, Evaporative cooling of liquid film through interfacial heat and mass transfer in a vertical channel, I. Experimental study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, pp. 1105-1111, 1991.
- [58] **W.M. Yan**, Evaporative cooling of liquid film in turbulent mixed convection channels flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, pp. 3719-3729, 1998.
- [59] **W.M. Yan**, Mixed convection heat and mass transfer in rectangular ducts rotating about parallel axis, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 42, pp. 2955-2965, 1999.
- [60] **O. Oulaid, B. Benhamou and N. Galanis**, Flow reversal in combined laminar mixed convection heat and mass transfer with phase change in a vertical channel, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 31, pp. 711-721, 2010.
- [61] **H. Xu, R. Xiao, F. Karimi, M. Yang and Y. Zhang**, Numerical study of double diffusive mixed convection around a heated cylinder in an enclosure, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 78, pp. 169-181, 2014.
- [62] **H. Xu, B. Li, J. Chen, Q. Lou, Z. Yan and M. Yang**, A Lattice BGK simulations of the double diffusive mixed convection in an enclosure with different outlet locations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 92, pp. 158-172, 2016.

**Résumé:** Une étude numérique du phénomène de la convection naturelle thermosolutale en régime laminaire et permanent dans un espace annulaire, situé entre deux cylindres excentrés horizontaux orienté selon un angle  $\alpha$  est étudiée. Les parois sont soumises à des températures  $T_1$  et  $T_2$  et des concentrations  $S_1$  et  $S_2$  constantes. L'écoulement est entraîné par les forces des poussées, thermique et solutale. L'espace annulaire est parcouru par un fluide binaire newtonien et incompressible. Le fluide est l'air et la substance diffusée dans l'enceinte est la vapeur d'eau. Le nombre de Prandtl est fixé à (0,71) mais les nombres de Rayleigh thermique, de Lewis, le rapport des forces de flottabilité, l'angle d'inclinaison et l'excentricité relative varient. En utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, l'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles: les équations de continuité, des quantités de mouvement, de la température et de l'espèce sont exprimées dans un système de coordonnées dites "Bicylindriques", pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Un code de calcul a été mis au point, ce dernier utilise les volumes finis, pour la discrétisation des équations et afin de montrer sa fiabilité, l'auteur compare des résultats issus de ce dernier avec d'autres résultats similaires existant dans la littérature et il examine l'effet de l'inclinaison du système, du nombre de Rayleigh thermique, du nombre de Lewis, du rapport des forces de flottabilité et de l'excentricité relative sur les résultats obtenus que ce soit qualitativement ou quantitativement.

**Mots-clés:** convection naturelle thermosolutale, équations de Boussinesq, espaces annulaires, enceintes fermées, Formulation vorticité-fonction de courant, coordonnées bicylindriques.

## العنوان: الدراسة العددية للحمل الطبيعي الحراري المادي داخل تجويفات مغلقة.

**ملخص:** قمنا في إطار هذا العمل بدراسة عددية للحمل الطبيعي الحراري المادي المتدفق بصفة رقائقية و دائمة و الموجود في تجويف حلقي محصور بين أسطوانتين أفقيتين غير متمركزتين و مائلتين بزاوية  $\alpha$  بالنسبة للأفق بالنسبة لشروط هذا التسخين افترضنا الجدار الداخلي و الخارجي لهذا التجويف ثابت درجة الحرارة  $T_1$  و التركيز  $S_1$  بالنسبة للجدار الداخلي و  $T_2$  و  $S_2$  بالنسبة للجدار الخارجي. التدفق مدفوع من طرف قوى الطفو الحرارية و المادية. هذا الفضاء الحلقي مملوء بمائع نيوتوني غير منضغط. المائع الموجود داخل هذا النطاق هو الهواء و المادة المنتشرة فيه هي بخار الماء. نأخذ القيمة 0.71 لعدد Prandtl ثابتة (حالة الهواء) و لكن قيم الأعداد Rayleigh الحراري و Lewis وقوة الطفو و اللاتمرکز النسبي متغير. باستخدام تقريب Boussinesq و صيغة التدويم-دالة التيار. كتب نموذج هذا التدفق بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية: معادلات الاستمرارية، كميات الحركة، الحرارة و المادة صيغت في جملة لإحداثيات أسطوانية-مزدوجة لا متمركزة، لتسهيل كتابة الشروط الحدية و تغيير المجال المنحني إلى مجال مستطيل الشكل برنامج معلوماتي وضع للقيام بمختلف الحسابات لدراسة هذه الجملة، باستعمال طريقة الحجوم المنتهية. بعدها قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع نتائج مماثلة لأبحاث أخرى. في هذه الحالة قمنا بدراسة تأثير عدد Rayleigh الحراري، عدد Lewis، اللاتمرکز النسبي وقوة الطفو و زاوية الميل كميًا و كيفيًا.

**المفاتيح:** الحمل الطبيعي الحراري المادي، معادلات بوسينسك، فضاءات حلقيه، طريقة الحجوم المنتهية، تجويفات مغلقة.

**Title:** *Numerical approach of the thermosolutal natural convection, in closed enclosures.*

**Summary:** The problem related to thermosolutal natural laminar and permanent convection in horizontal annulus situated between two eccentric cylinders filled with Newtonian and incompressible binary fluid oriented at an arbitrary angle  $\alpha$  is examined numerically. The inner cylinder is heated with hot temperature  $T_1$  and high concentration  $S_1$  while the outer cylinder is maintained at a cold constant temperature  $T_2$  and low concentration  $S_2$ . The fluid is air and the substance diffused in the enclosure is the vapor. The flow is driven by the thermal and solutal buoyancies. The annular space is filled by a Newtonian and incompressible fluid. The number of Prandtl is fixed at (0.71) but the thermal Rayleigh number, the Lewis number, the slope angle, the relative eccentricity and the buoyancy ratio vary. By using the approximation of Boussinesq and the vorticity-stream function formulation, the flow is modeled by the differential equations with the derivative partial: the equations of continuity, the momentum, the energy and mass are expressed in a frame of reference known as "bicylindrical", to facilitate the writing of the boundary conditions and to transform the curvilinear field into a rectangular one. A computer code was developed, the latter uses finished volumes, for the discretization of the equations and in order to show its reliability, the authors compare results resulting from the latter with other similar results existing in the literature and they examine the effects of the slope of the system, of the relative eccentricity, of the thermal Rayleigh number, of the Lewis number and of the buoyancy ratio values on the results obtained that it is qualitatively or quantitatively.

**Keywords:** thermosolutal natural convection, Boussinesq equations, annular space, closed enclosures, vorticity-stream function formulation, bicylindrical coordinates.