REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre
Série

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME :

PROCESSUS DE CREATION DE PAIRES DE PARTICULES ET EQUATIONS RELATIVISTES DEPENDANTES DU TEMPS

Par
Hamil Bilel
Soutenue le 29/02/2016

Devant le Jury:

Président:	**B. BENTAG**	**Prof. Univ. Frères Mentouri Constantine**
Rapporteur:	**L.CHETOUANI**	**Prof. Univ. Frères Mentouri Constantine**
Examinateurs:	**A. BOUMALI**	**Prof. Univ. Larbi Tébessi Tébessa**
	M. AOUACHRIA	**Prof. Univ. Batna 1 Batna**

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Lyazid Chetouani qui ma donné la chance de préparer cette thèse sous sa direction. Ses conseils ont été indispensables pour réaliser ce travail. Je tiens particulièrement à le remercier de la liberté d'action qu'il ma donné et de sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme.

Je remercie Mme B. Bentag Professeur au laboratoire de la physique mathématique et de la physique subatomique de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements vont également aux honorables professeurs A. Boumali, M. Aouachria, Tahar membres du jury de soutenance qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Un grand merci aussi à toutes les personnes qui ne sont pas citées et qui ont néanmoins contribuées à ce travail.

Bilel Hamil.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

La mécanique quantique est la branche de la physique qui décrit à l'échelle atomique et subatomique les phénomènes fondamentaux. Elle fut développée au début de XXème siècle, afin de résoudre les différents problèmes que la physique classique ne pouvait expliquer, comme le rayonnement du corps noirs, l'effet photo-électrique et ceci grâce à l'introduction de la fameuse constante de Planck.

Deux aspects différencient la mécanique quantique de la mécanique classique :

- des règles sur l'additivité des probabilités

-l'existence de grandeurs physiques ne pouvant se manifester que par des quantités discrètes.

En mécanique quantique, l'état de la particule est représenté par sa fonction d'onde et son évolution dans le temps est régie par la fameuse équation de Schrödinger[1] qui, comme on le sait n'inclus pas les principes de la relativité restreinte. Cependant avec la relation de dispersion relativiste et avec les règles de quantification, on obtient l'équation de Klein-Gordon-Fock, qui toutefois présente des difficultés comme la densité de probabilité non toujours positive à cause de la présence de la dérivée temporelle du second ordre nécessitant ainsi une autre réinterprétation.

En 1928 [2], Dirac, au moyen de concepts nouveaux obtient une équation de type matriciel où la fonction d'onde n'est plus à une seule composante mais à quatre composantes (spineur). Cette équation développée se ramène à un système de quatre équations couplées et le principal avantage de son équation est que la densité de probabilité est cette fois-ci bien définie positive. C'est ainsi que cette équation a été trouvée bien adaptée pour décrire le mouvement des électrons et qu'à la limite de vitesse faible donne l'équation de Schrödinger. Le fait surprenant de cette équation est qu'elle prédit l'existence de particules de charge opposée à celle de l'électron et de même masses appelées anti-électrons [3].

C. Anderson [4] découvre expérimentalement lorsque les photons à haute énergie provenant des rayons cosmiques heurtent un écran en plomb, des électrons sont produits et également des particules de même masse et de charge opposée. Ces dernières peuvent s'annihiler avec des électrons pour produire, à nouveau, des photons. Il semble que ces électrons positifs correspondent aux anti-électrons de la théorie de Dirac. Anderson [5] appellera cette particule positron, terme adopté actuellement.

Comme formalisme en mécanique quantique pour une bonne description des phénomènes physiques, l'intégrale de chemin semble de nos jours le meilleur outil grâce au fait qu'il met, très explicitement, en correspondance les mécaniques classique et quantique. La principale caractéristique de l'intégrale de chemin est que dans la limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$ la contribution à l'intégrale provient essentiellement des chemins qui sont au voisinage immédiat du chemin "classique".

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au processus de création de paires afin d'utiliser un certain noyau ou propagateur pour déterminer la probabilité relative à ce processus. Le noyau étant connu pour jouer un rôle central dans le formalisme des intégrales de chemins puisqu'il s'exprime comme une somme sur tous les chemins possibles où un poids (de module =1) est affecté à chaque chemin. L'action est la phase relative au poids.

Lorsque le vide est perturbé par un champ de Volkov, c'est à dire de type onde plane nous savons qu'il n'y a pas de création de paires [6]. De même pour la combinaison onde plane+ champ magnétique, la probabilité est également nulle.

Dans le 2ème chapitre de cette thèse, le processus de création de paires est considéré avec un champ de Volkov de type onde plane non abélien, le groupe ayant N générateurs (SU(N)). Le calcul du noyau par les intégrales de chemins ayant été déjà effectué dans le cadre du magister [7, 8] nous le déterminons analytiquement suivant une autre approche purement algébrique au moyen simplement de quelques transformations et nous montrons également que cette interaction est incapable de créer des paires de particules de spin 0 et 1/2.

Le 3ème chapitre est consacré au calcul de la probabilité de création sur un espace-temps non commutatif, c'est-a-dire les relations d'anticommutation relatives aux positions et impulsions ne sont pas celles standard mais modifiées. La méthode consiste à déterminer d'abord l'action effective et ensuite nous calculons la trace de Schwinger pour extraire la probabilité de création de paires de particules.

nous voudrons voir dans le 3ème chapitre

-l'effet de l'onde sur la création de paires de particules

-l'effet de champ électromagnétique constante et uniforme sur la création de paires de particules.

Dans le 4ème chapitre, nous nous sommes intéressés aux équations de Klein-Gordon et de Dirac pour obtenir les solutions lorsqu'on a des potentiels mobiles (non statiques) de la forme $V\left(x-vt\right)$ se déplaçant avec une vitesse v constante. Notre traitement consiste simplement à effectuer des changements de repère et grâce à l'invaraince de Lorentz nous ramenons les équations en question à des équations où les potentiels sont statiques

Comme application, le potentiel est choisi simple de la forme "Step" de la forme $V_0\theta\left(x-vt\right)$ afin de déterminer analytiquement les coefficients de transmission et de réflexion. Le cas de la barrière infinie mobile (cas limite du potentiel "step") est également considéré. Le résultat obtenu est que la condition $R\pm T=1$ n'est valable que sur la paroi mobile (à $x=vt$)

Chapitre 2

Création de paires par un champ non-abélien

2.1 Introduction

Le phénomène de la création de paires de particules a été initialement considéré par Schwinger (1951) [6] dans l'étude du problème de l'interaction entre un champ spinoriel et un champ électrique constant et montra que la probabilité de création des paires des particules se calcule à partir de la partie imaginaire de l'action effective. En addition, il est connu que le champ magnétique seul ne peut créer de paires de particules, mais couplé avec un champ électrique la probabilité de création est modifiée. De même, il a été montré qu'il n'y a pas de création de paires de particules lorsque le vide est perturbé par le champ d'onde plane seul ou combiné avec un champ magnétique.

Différentes méthodes ont été développées pour étudier le processus de création de paires de particules : technique de diagonalisation de l'Hamiltonien [9, 10], intégrale de chemin [11, 12], approximation semi-classique WKB [13, 14], transformation de Bougolioubov [15, 16] en addition, la méthode basée sur la transition amplitude vide-vide.

Le but de ce chapitre est l'étude de processus de création à partir du vide de paires de particules de spin 0 et 1/2 sous l'effet de l'action de champ extérieur de type non abélien.

Aussi, le but de ce chapitre est de montrer que la probabilité de création de paires de particules à partir du vide sous l'effet de l'action d'une onde plane non abélien est nulle.

Un champ non abélien particulier de type Volkov, obéit aux propriétés suivantes :

-il est développable sur la base des générateurs $\{T^a\}_a$ du groupe $SU(N)$,

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \qquad ;a = 1, ..., N^2 - 1, \tag{2.1}$$

où les A_μ^a sont des composantes partielles.

-il est une fonction uniquement du produit kx, où k est le 4-vecteur onde tel que

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0, \tag{2.2}$$

-il satisfait à la condition de jauge de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{2.3}$$

condition équivalente à

$$k_\mu \dot{A}^\mu = 0, \tag{2.4}$$

ou encore

$$kA = 0. \tag{2.5}$$

Dans ce chapitre, l'espace temps $x^\mu = \left(x^0; \overrightarrow{x}\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ est muni de la métrique $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$ et nous notons par m la masse de la particle et g la constante de couplage. Les générateurs T_a vérifient en outre :

$$[T_a \ ,T_b] = T_a \ T_b - T_b T_a = i f_{ab}{}^c T_c \ , \tag{2.6}$$

$$\mathrm{tr}\left(T_a T_b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \ , \tag{2.7}$$

$$[T_a\ ,T_b]_+ = T_a\ T_b + T_b T_a = \frac{1}{N}\delta_{ab} + d_{ab}{}^c T_c\ , \tag{2.8}$$

où $f_{ab}{}^c$ sont les constantes de structure du groupe $SU(N)$ (anti-symétriques dans toute permutation d'indice) et que pour $N = 2$ et $3, (2T_a\ )$ peut être est représenté respectivement par les matrices de Pauli et Gell-Mann. Les constantes $d_{ab}{}^c$ sont réelles et symétriques dans toute permutation d'indice.

Pour determiner la probabilité, d'abord nous démarrons avec l'action effective S_{eff} en utilisant l'amplitude vide-vide $\mathcal{A}_{cre}$, ces deux quantités étant reliés par

$$\mathcal{A}_{cre} = \exp(iS_{eff})\ \ , \tag{2.9}$$

et la probabilité est définie par

$$\mathcal{P}_{cre} = 1 - |\mathcal{A}_{cre}|^2 . \tag{2.10}$$

D'abord, considérons les particules chargés de Klein Gordon.

2.2 Particules de Klein-Gordon

2.2.1 Amplitude (vide-vide) et action effective

Pour une particule chargée de spin 0 soumise à un champs non abélien, l'amplitude (vide-vide) est

$$\mathcal{A}(vac - vac) = \int D\phi D\phi^* \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right], \tag{2.11}$$

où

$$\mathcal{L} = \phi^* \hat{O}_{KG}\phi\ , \tag{2.12}$$

est la densité lagrangienne et $\hat{O}_{KG} = (i\partial - gA(kx))^2 - m^2$ est l'opérateur de Klein-Gordon.

Pour calculer cette amplitude, considerons les fonctions propres $\psi_n(x)$ de l'opérateur $\hat{O}_{KG}$

$$\hat{O}_{KG}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x), \quad \int d^4x\psi_n(x)\,\psi_m^*(x) = \delta_{nm}, \tag{2.13}$$

et développons le champ ϕ sur cette base

$$\phi(x) = \sum_n a_n\psi_n(x). \tag{2.14}$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \mathcal{A}(vac - vac) = N'\int \prod_i da_i \prod_j da_j^* \exp\left[i\sum_n |a_n|^2 \lambda_n\right] \\ \qquad = N\prod_n \frac{1}{\lambda_n} = \frac{N}{\det \hat{O}_{KG}} \end{cases}, \tag{2.15}$$

où N est une constante qui sera fixée ultérieurement. Ainsi, le calcul de l'amplitude vide-vide se ramène simplement au calcul d'un déterminant.

En utilisant la formule

$$\frac{1}{\det \hat{O}_{KG}} = \exp\left[-tr \ln \hat{O}_{KG}\right], \tag{2.16}$$

et l'égalité

$$\ln a = c^{st} - \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \exp[isa], \tag{2.17}$$

alors l'amplitude vide-vide devient

$$\mathcal{A}(vac - vac) = e^{iS_{eff}}, \tag{2.18}$$

où S_{eff} est l'action effective qui s'exprime au moyen de la somme des éléments diagonaux de l'opérateur $e^{is\hat{O}_{KG}}$

$$S_{eff} = -tr\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \langle x| \exp\left[is\left((p - gA)^2 - m^2\right)\right] |x\rangle, \tag{2.19}$$

où le symbole $tr = tr_{T_a} tr_x$ est la trace relative aux générateurs de groupe SU(N) et sur l'espace de configuration. La trace tr_x se calcule en déterminant le propagateur.

Determinons alors ce propagateur.

2.2.2 Propagateur

Le propagateur de Klein-Gordon pour une particule chargée soumise à l'action de champs d'ondes planes non abélien relatif à l'espace de configuration est solution de :

$$\left(\left(\hat{p}_f - g\hat{A}_f\right)^2 - m^2\right) K_{KG}\left(x_f, x_i\right) = \delta\left(x_f - x_i\right), \tag{2.20}$$

et selon Schwinger ; $K\left(x_f, x_i\right)$ est l'élément de matrice d'un opérateur K :

$$K_{KG}\left(x_f; x_i\right) = \langle x_f \mid K_{KG} \mid x_i\rangle \ , \tag{2.21}$$

tel que : les $\mid x\rangle$ sont considérés comme les états propres de l'opérateur $\hat{x}$ formant une base orthonormée $\hat{x}_\mu \left|x\right\rangle = x_\mu \left|x\right\rangle$, $\left\langle x_f \left|x_i\right.\right\rangle = \delta\left(x_f - x_i\right), \int \mid x\rangle dx\langle x \mid = 1$. L'opérateur moment conjugué est representé par $\hat{p}^\mu$ tel que : $\hat{p}^\mu \left|p\right\rangle = p^\mu \left|p\right\rangle$, $\left\langle p_f \left|p_i\right.\right\rangle = \delta\left(p_f - p_i\right)$, $\left[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu\right] = ig_{\mu\nu}$, où $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ est le tenseur de Minkowski.

Sous forme opératorielle l'équation (2.20) sécrit :

$$\left[\left(\hat{p} - gA\left(k\hat{x}\right)\right)^2 - m^2\right] K = 1. \tag{2.22}$$

Alors :

$$\left\{\begin{array}{c} K_{KG} = \frac{1}{\left[\left(\hat{p} - gA\left(k\hat{x}\right)\right)^2 - m^2\right]} \\ K_{KG}\left(x_f; x_i\right) = \langle x_f \mid \frac{1}{\left(\hat{p} - gA\left(k\hat{x}\right)\right)^2 - m^2} \mid x_i\rangle \end{array}\right. . \tag{2.23}$$

Sachant que $A_\mu^a\left(k\hat{x}\right)$ dépend uniquement de $k\hat{x}$, il est donc utile de réduire le mouvement quadridimensienel à un mouvement unidimensionel. Dans ce but, introduisons dans l'expression (2.23) une contrainte $\varphi = kx$ à travers l'identité suivante

$$\int d\varphi_f d\varphi_i \ \delta(\varphi_i - kx_i)\delta(\varphi_f - kx_f) = \int d\varphi_f d\varphi_i \ \delta(\varphi_i - kx_i)\delta(\varphi_f - \varphi_i - k\left(x_f - x_i\right)) = 1. \tag{2.24}$$

La notation bra et ket nous semble plus commode en considérant un autre opérateur

$$\hat{\varphi} = k\hat{x},\ \hat{\varphi} \mid \varphi\rangle = \varphi \mid \varphi\rangle \ , \tag{2.25}$$

et son moment conjugué $\hat{p}_\varphi$ qui est tel que

$$[\hat{\varphi}, \hat{p}_\varphi] = i. \tag{2.26}$$

Les vecteurs de base $|\varphi\rangle$ et $|p_\varphi\rangle$ sont définis par les équations suivantes

$$\hat{\varphi}\,|\varphi\rangle = \varphi\,|\varphi\rangle\,,\ \hat{p}_\varphi\,|p_\varphi\rangle = p_\varphi\,|p_\varphi\rangle \ \ , \tag{2.27}$$

et le produit scalaire est

$$\left\langle \varphi_f \right| \varphi_i\rangle = \delta(\varphi_f - \varphi_i - k\,(x_f - x_i)). \tag{2.28}$$

L'expression de K devient alors

$$K_{KG} = \int\int d\varphi_f d\varphi_i\ \delta(\varphi_i - kx_i)\delta(\varphi_f - \varphi_i - k\,(x_f - x_i))\frac{1}{\left(\hat{p}_f - gA\left(\varphi_f\right)\right)^2 - m^2}\delta\left(x_f - x_i\right), \tag{2.29}$$

où

$$K_{KG} = \int\int d\varphi_f d\varphi_i\ \delta(\varphi_i - kx_i)\langle x_f, \varphi_f \mid \frac{1}{\left(\hat{p} - gA\left(\hat{\varphi}\right)\right)^2 - m^2} \mid x_i, \varphi_i\rangle, \tag{2.30}$$

Considérons maintenant le dénominateur.

Avec la condition de jauge de Lorentz ce denominateur devient

$$\hat{D} = \left(\hat{p} - gA\left(\hat{\varphi}\right)\right)^2 - m^2 = \hat{p}^2 - 2g\hat{p}A\left(\hat{\varphi}\right) + g^2A^2\left(\hat{\varphi}\right) - m^2. \tag{2.31}$$

En considérant les varibles du cône de lumière, le troisième terme est égal à

$$\left\{\begin{array}{c} A^2\left(\hat{\varphi}\right) = A^a\left(\hat{\varphi}\right)A^b\left(\hat{\varphi}\right)T_aT_b \\ = A^a\left(\hat{\varphi}\right)A^b\left(\hat{\varphi}\right)\left(\frac{1}{2N}\delta_{ab} + \frac{1}{2}d^c_{ab}T_c + \frac{i}{2}f^c_{ab}T_c\right) \\ = \frac{A_aA^a}{2N} \end{array}\right. \ ,$$

à cause de l'antisymmetrie $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$ et qu'avec ces mêmes variables du cône de lumière

[17] le champ peut être réduit à une seule composante dans l'espace-temps de Minkowski $\left(A_+^a \neq 0, A_-^a = A_1^a = A_2^a = 0\right)$.

Alors, D prend une forme linéaire

$$\hat{D} = \hat{p}^2 - 2g\left(\hat{p}A^a\left(\hat{\varphi}\right)\right)T_a + g^2\frac{A_a\left(\hat{\varphi}\right)A^a\left(\hat{\varphi}\right)}{2N} - m^2, \tag{2.32}$$

relative aux generateurs T_a.

Maintenant, effectuons le changement $\hat{p}_\mu \to \hat{p}_\mu + k_\mu\hat{p}_\varphi$. Puisque $[\hat{x}\ ,\hat{p}_\varphi] = [\hat{p}\ ,\hat{p}_\varphi] = 0$, la relation $[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = ig_{\mu\nu}$, reste inchangée. On obtient

$$\hat{D} \to \hat{p}^2 + 2\left(k\hat{p}\right)\hat{p}_\varphi - 2g\left(\hat{p}A^a\left(\hat{\varphi}\right)\right)T_a + g^2\frac{A_a\left(\hat{\varphi}\right)A^a\left(\hat{\varphi}\right)}{2N} - m^2, \tag{2.33}$$

et nous remarquons que

$$\hat{D} \to \hat{p}^2 + 2\left(k\hat{p}\right)\hat{p}_\varphi\left(1 - \frac{1}{\hat{p}_\varphi}\frac{2g\left(\hat{p}A^a\left(\hat{\varphi}\right)\right)T_a - g^2\frac{A_a(\hat{\varphi})A^a(\hat{\varphi})}{2N}}{2\left(k\hat{p}\right)}\right) - m^2. \tag{2.34}$$

Comme l'inverse de la dérivée

$$\frac{1}{\hat{p}_\varphi}\left(.\right) = i\int^{\hat{\varphi}} du\left(.\right)\ , \tag{2.35}$$

est une intégrale, nous avons

$$\hat{D} \to \hat{p}^2 + 2\left(k\hat{p}\right)\hat{p}_\varphi\left(1 - i\int^{\hat{\varphi}} du\frac{2gT_a\left(\hat{p}A^a\left(u\right)\right) - g^2\frac{A_a(u)A^a(u)}{2N}}{2\left(k\hat{p}\right)}\right) - m^2, \tag{2.36}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\hat{D} \ &= \ \hat{p}^2 - m^2 + 2\left(k\hat{p}\right)\exp\left[i\int^{\hat{\varphi}} du\frac{2gT_a\hat{p}A^a - g^2\frac{A_aA^a}{2N}}{2\left(k\hat{p}\right)}\right]\times \\ &\quad \hat{p}_\varphi\exp\left[-i\int^{\hat{\varphi}} du\frac{2gT_a\hat{p}A^a - g^2\frac{A_aA^a}{2N}}{2\left(k\hat{p}\right)}\right],\end{aligned} \tag{2.37}$$

qui est facile à verifier en tenant compte du fait que $[\hat{p}, \hat{\varphi}] = 0$. Successivement, nous plaçons les exponentielles à gauche et à droite

$$\hat{D}=\exp\left[ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\left\{\hat{p}^2+2k\hat{p}\hat{p}_\varphi-m^2\right\}\exp\left[ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{g\frac{A_aA^a}{2N}-2T_a\hat{p}A^a}{2k\hat{p}}\right]. \tag{2.38}$$

Effectuons encore le changement suivant $\hat{p}_\mu\rightarrow\hat{p}_\mu-k_\mu\hat{p}_\varphi$, On obtient

$$\hat{D}=\exp\left[ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\left\{\hat{p}^2-m^2\right\}\exp\left[-ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]. \tag{2.39}$$

Alors l'inverse de l' élément de matrice de D prends la forme

$$\begin{aligned}\left\langle x_f,\varphi_f\right|\frac{1}{\hat{D}}\left|\varphi_i,x_i\right\rangle &= \left\langle x_f,\varphi_f\right|\exp\left[-ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\frac{1}{\hat{p}^2-m^2}\\ &\quad\exp\left[ig\int^{\hat{\varphi}}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\left|\varphi_i,x_i\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.40}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\left\langle x_f,\varphi_f\right|\frac{1}{\hat{D}}\left|\varphi_i,x_i\right\rangle &= \delta(\varphi_f-\varphi_i-k\left(x_f-x_i\right))\left\langle x_f\right|\exp\left[-ig\int^{\varphi_f}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\\ &\quad\frac{1}{\hat{p}^2-m^2}\exp\left[ig\int^{\varphi_i}du\frac{2T_a\hat{p}A^a-g\frac{A_aA^a}{2N}}{2k\hat{p}}\right]\left|x_i\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.41}$$

La forme du propagateur $K_{KG}(x_f,x_i)$ n'étant pas symétrique en i et f , introduisons pour cela, d'abord la représentation intégrale de la fonction δ

$$\delta(\varphi_f-\varphi_i-k\left(x_f-x_i\right))=\int\frac{dp_{\varphi_f}}{2\pi}\exp\left\{ip_{\varphi_f}(\varphi_f-\varphi_i-k\left(x_f-x_i\right))\right\}, \tag{2.42}$$

et aprés intégrations sur les variables φ_f et φ_i nous obtenons l'expression du propagateur

$$K_{KG}=\left\langle x_f\right|\exp\left(ig\int^{kx_f}du\frac{g\frac{A_aA^a}{2N}-2T_a\hat{p}A^a}{2k\hat{p}}\right)\frac{1}{\hat{p}^2-m^2}\exp\left(i\int^{kx_i}du\frac{2gT_a\hat{p}A^a-g^2\frac{A_aA^a}{2N}}{2\left(k\hat{p}\right)}\right)\left|x_i\right\rangle. \tag{2.43}$$

Pour éliminer les opérateurs impulsions $\hat{p}$, dans (2.43) nous introduisons également des relations de fermeture

$$\int |p\,\rangle d^4p\langle\, p| = 1\ , \tag{2.44}$$

sachant que le passage de $|\ x\rangle$ à $|\ p\rangle$ se fait au moyen de produit scalaire

$$\langle x \mid p\rangle = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2}. \tag{2.45}$$

Finalement, la forme définitive du propagateur est

$$K_{KG}\left(x_f, x_i\right) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left[-ip\left(x_f - x_i\right) - i\int_{kx_i}^{kx_f} du \frac{2gT_a(pA^a(u)) - \frac{g^2}{2N}(A_a(u)A^a(u))}{2(kp)}\right]}{p^2 - m^2}. \tag{2.46}$$

Maintenant, il est possible de déterminer les fonctions d'onde et le spectre des énergies.

Comme il y a 2 pôles dans l'expression précédente $p_+^0 = \omega - i\varepsilon$ et $p_-^0 = -\omega + i\varepsilon$, où $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ est l'énergie d'une particule libre, il est facile de déterminer des fonctions d'onde en utilisant la méthode des résidus

- pour $\tau_b > \tau_a$, le contour d'intégration (1/2 cercle) qui englobe p_+^0 est choisi en dessous de l'axe

- et pour $\tau_b < \tau_a$,le contour d'intégration (1/2 cercle) qui englobe p_-^0 est choisi au dessus de l'axe .

C'est ainsi que nous obtenons la décomposition spectrale suivante :

$$K_{KG}\left(x_f, x_i\right) = -i\theta\left(\tau_f - \tau_i\right)\sum_{\alpha}\int d^3p\Psi_{\alpha,p}^{(+)}\left(x_f\right)\Psi_{\alpha,p}^{(+)\times}\left(x_i\right) - i\theta\left(\tau_i - \tau_f\right)\sum_{\alpha}\int d^3p\Psi_{\alpha,p}^{(-)}\left(x_f\right)\Psi_{\alpha,p}^{(-)\times}\left(x_i\right)\ , \tag{2.47}$$

et les fonctions d'onde (normalisées) décrivant le mouvement de la particule de K-G sous l'action du champ non-abelien son données par

$$\Psi_{\alpha,p}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-ipx + \frac{ig^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int^{kx}\left(A_\mu^a A_a^\mu\right)d\varphi - \frac{ig}{kp}T_a\int_0^{kx} p^\mu A_\mu^a d\varphi\right] w_\alpha. \tag{2.48}$$

Nous pouvons finalement écrire la fonction d'onde suivant la forme

$$\Psi^{+}_{\alpha,p}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2p^0}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{\left\{-ipx+\frac{ig^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int^{kx}(A^a_\mu A^\mu_a)d\varphi\right\}} \left[\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\theta} T_a \left(\frac{gi}{pk}\int_0^{kx}(A^a p)\,du\right)\right] w_\alpha \ , \tag{2.49}$$

avec

$$\theta = \left[\left(\frac{g}{kp}\right)\left(\frac{1}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(\int^{kx}\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi')\right)d\varphi'\right)\left(\int^{kx}\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi'')\right)d\varphi''\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.50}$$

2.2.3 Probabilité de création de paires

La probabilité de création de paires est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{cre} = 1 - \left|\mathcal{A}_{cre}\right|^2 \\ \quad = 1 - e^{-2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}} \end{cases} . \tag{2.51}$$

En prenant la trace $\int d^4x\,(.)$ (c'est-a-dire, la somme des éléments diagonaux du propagateur $\overset{x_f\to x_i}{\longrightarrow} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m^2})$, il apparait un facteur infini provenant du volume $\int d^4x = V_4$, tandis que la trace tr_{T_a} sur les générateurs du groupe n'est pas nécessaire, l'action effective est simplement

$$S_{eff} = 0 \ , \tag{2.52}$$

et par conséquent la probabilité de création de paires dans ce cas de spin 0 est

$$\mathcal{P} = 0. \tag{2.53}$$

Ainsi, il ne peut y avoir de création de paires de particules avec cette onde plane de type non abélien.

2.3 Equation de Dirac

La densité lagrangienne pour le champ de Dirac $\ominus$ couplé minimalement au champ électromagnétique externe A_μ est :

$$\mathcal{L} = \bar{\ominus}\left(\hat{\not{p}} - g\hat{\not{A}}T - m\right)\ominus \ , \tag{2.54}$$

et l'amplitude de transition vide -vide en présence d'un champ électromagnétique externe A_μ est donnée par le rapport de déterminants [18, 19]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(vac - vac) &= \exp\left[-tr \ln \frac{\hat{\not{p}} - m + i\varepsilon}{\hat{\not{p}} - g\hat{\not{A}}T - m + i\varepsilon}\right] \ , \\ &= \frac{1}{\det O} \ , \end{aligned} \tag{2.55}$$

avec

$$O = \frac{\hat{\not{p}} - m + i\varepsilon}{\hat{\not{p}} - g\hat{\not{A}}T - m + i\varepsilon}, \tag{2.56}$$

où $\hat{\not{a}} = \gamma^\mu \hat{a}_\mu$ et le symbole $tr = tr_x tr_{T_a} tr_\gamma$ est le produit respectivement des traces relative à l'espace de configuration, à générateurs du groupe SU(N) et aux matrices de Dirac.

Utilisons le fait qu'il existe une matrice C de conjugaison de charge qui a la propriété

$$C\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t \ , \tag{2.57}$$

et comme le déterminant reste inchangé

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(vac - vac) = \exp&\left[-tr \ln \frac{C\hat{\not{p}}C^{-1} - m - i\varepsilon}{C\hat{\not{p}}C^{-1} - gC\hat{\not{A}}C^{-1}T - m - i\varepsilon}\right] \\ &= \frac{1}{\det \hat{O}^c} \end{aligned} \right. \ , \tag{2.58}$$

où $\hat{O}^c$ est le conjugué de charge de $\hat{O}$. Alors, l'amplitude de transition vide -vide est

$$\mathcal{A}(vac - vac) = \frac{1}{\sqrt{\det \hat{O}\hat{O}^c}} \ , \tag{2.59}$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\hat{p}^2 - m^2}{\left(\hat{\not{p}} - g\hat{\not{A}}T\right)^2 - m^2}\right]. \tag{2.60}$$

Avec l'intégrale

$$\ln \frac{a}{b} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left[e^{isb} - e^{isa} \right], \tag{2.61}$$

il apparait pour l'amplitude de transition vide-vide la forme suivante

$$\mathcal{A}(vac - vac) = e^{iS_{eff}} \ , \tag{2.62}$$

où

$$\begin{aligned} S_{eff} &= tr \ln \frac{\hat{p}^2 - m^2}{\left(\hat{\not p} - g\hat{\not A}T\right)^2 - m^2}, \\ &= tr \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left(-ism^2\right) \left\{ \exp\left[is \left(\hat{\not p} - g\hat{\not A}T\right)^2 \right] - \exp\left[is\hat{p}^2\right] \right\}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

est l'action effective, qui indirectement pour la daterminer nécessite la connaissance du propagateur suivant

$$S_D\left(x_f, x_i\right) = \langle x_f \mid \frac{1}{\left(\hat{\not p} - g\hat{\not A}T\right)^2 - m^2} \mid x_i \rangle. \tag{2.64}$$

En utilisant la Ref. [20], il est facile de montrer que

$$\left(\hat{\not p} - g\hat{\not A}T\right)^2 = \hat{p}^2 - \ m^2 + g^2 \left(\not A^a T_a\right)^2 - 2gA^a T_a p - ig\not k \dot{\not A}^a T_a \ , \tag{2.65}$$

où $\dot{A}$ est la dérivation par rapport à kx. En utilisant le cône de lumière, le carré est calculable

$$\begin{aligned} \left(\ \gamma^\mu A_\mu^a \ T_a\right)^2 &= \left(\frac{1}{N}\delta_{ab} + d_{ab}{}^c T_c + \frac{i}{2} f_{ab}{}^c T_c\right) \left(g_{\mu\upsilon} + \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\right) A_\mu^a \ A_\nu^b \ , \\ &= \frac{A_\mu^a \ A_a^\mu}{2N} \ , \end{aligned} \tag{2.66}$$

et nous remarquons qu'il est indépendant des générateurs.

Nous introduisons la même identité

$$\int\int d\varphi_f d\varphi_i\ \delta(\varphi_i - kx_i)\delta(\varphi_f - \varphi_i - k(x_f - x_i)) = 1\ , \tag{2.67}$$

pour réduire le mouvement quadri dimensionnel en un mouvement unidimensionnel. Après le changement

$$p_\mu \to p_\mu + k_\mu p_\varphi. \tag{2.68}$$

L'expression de propagator se réduit à :

$$\begin{aligned} S_D(x_f, x_i) &= \int\int d\varphi_f d\varphi_i\ \delta(\varphi_i - kx_i)\left\langle x_f, \varphi_f\right| \exp\left(ig\int^{\hat{\varphi}} du \frac{g\frac{A_a A^a}{2N} - 2T_a \hat{p}A^a - i\not{k}\dot{\not{A}}T}{2(k\hat{p})}\right) \\ &\frac{1}{\{\hat{p}^2 + 2k\hat{p}\hat{p}_\varphi - m^2\}} \exp\left(ig\int^{\hat{\varphi}} du \frac{2T_a\hat{p}A^a - g\frac{A_a A^a}{2N} + i\not{k}\dot{\not{A}}T}{2(k\hat{p})}\right)\left|\varphi_i, x_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.69}$$

où il nous reste à éliminer la fonctions δ. A l'aide de sa représentation intégrale et en changeant $p^\mu \longrightarrow p^\mu - k^\mu p_\varphi$,nous obtenons

$$\begin{aligned} S_D(x_f, x_i) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m^2}\exp\left\{-ip(x_f - x_i) + \frac{ig^2}{2pk}\int_{kx_i}^{kx_f}\frac{A_\mu^a A_a^\mu}{2N}du - \right. \\ &\left.\frac{ig}{pk}\left[\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^a T_a\ \right)du - \frac{i\not{k}}{2}\left[\not{A}^a(\varphi_f) - \not{A}^a(\varphi_i)\right]T_a\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Ce résultat est conforme avec celui obtenu suivant l'approche path integral [7, 8]. Après avoir développé en série le facteur $e^{\left\{\frac{-ig}{pk}\left[\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^a T_a\ \right)du + \frac{i\not{k}}{2}\left[\not{A}^a(\varphi_f) - \not{A}^a(\varphi_i)\right]T_a\right]\right\}}$, le résultat étant expression linéaire des générateurs du groupe SU(N), alors il est facile de montrer que nous avons pour S_D l' expression suivante

$$\begin{aligned} S_D &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m^2}\exp\left[-ip(x_f - x_i) + \frac{ig^2}{2pk}\int_{kx_i}^{kx_f}\frac{\left(A_\mu^a A_a^\mu\right)}{2N}du\right]\cos\theta \times \\ &\left\{\left(1\ - igT_a\frac{\tan\theta}{\theta(pk)}\int_{kx_i}^{kx_f}(pA^a(u))\,du\right) + \frac{e\not{k}\left(\not{A}^a(x_f) - \not{A}^a(x_i)\right)}{2kp}\right. \\ &\left.\times\left[\frac{\tan\theta}{\theta}T_a + \frac{g}{pk}\int_{kx_i}^{kx_f}du\frac{pA^a}{2N}\left(\frac{g}{pk}\frac{\theta\ - \tan\theta}{\theta^3}T_b\int_{kx_i}^{kx_f}pA^b du - i\frac{\tan\theta}{\theta}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Il est clair que le champ non-abelien disparait dans l'élément diagonal du propagateur $S_D(x_f, x_i) \overset{x_f \to x_i}{\to} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2}$, et par conséquent il n'est pas nécessaire de considérer les traces sur les générateurs du groupe SU(N) et sur les matrices de Dirac, bien que $trT_a = 0$ et $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$. Finallement, le résultat pour l'action effective est simple

$$S_{eff} = 0 \ , \tag{2.72}$$

et la probabilité est également nulle

$$\mathcal{P} = 0. \tag{2.73}$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé par un calcul algébrique la probabilité de création à partir du vide des paires de particules en utilisant un champ non-Abélien SU(N) ayant la forme d'une onde plane sur le cône de lumière et notre résultat est consistent avec celui de l'onde plane de Volkov considéré par Schwinger i.e. avec un seul champ non-Abélien il n'y a pas de production de paires de particules et également il n'ya pas de phénomène non linéaire dans le vide. Suivant Schwinger pour avoir une probabilité non nulle ($\mathcal{P} \neq 0$), au moins deux ondes seraient nécessaires pour produire des paires de particules.

Notons enfin que la fonction de Green ont été obtenu sans utiliser les fonctions d'onde et que la renormalisation des fonctions de vertex des masses fermioniques sont en principe calculables.

Chapitre 3

Création de paires par un champ non-commutative

3.1 Introduction

L'espace-temps quantifié a été introduit vers la fin des années 40 par Snyder [21, 22] sous le nom de géométrie non commutative de Snyder à cause de la modification apportées aux relations de commutation. Le but était d'éliminer les divergences à court distance (ultra violette) de la théorie de champs. Mais avec le succès obtenu par la théorie de la renormalisation cette voie fut abandonnée mais récemment, l'espace non commutatif connait un regain d'intérêt au vu des nombreux articles parus sur ce domaine.

Il est connu que les problèmes exactement solubles sont utiles car ils permettent d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes et les applications physiques peuvent être trouvées dans le domaine par exemple, de la matière condensée comme l'effet Hall quantique et dans la géométrie non commutative [23, 24, 25, 26, 27, 28].

Notre but dans ce chapitre, est de calculer la probabilité de création de paires à partir du vide de particule de spin 1/2 chargée soumise à un champ extérieur de type non-commutative.

Les champs considérés sont :

-champ d'une onde plane

-champ électromagnétique constante et uniforme.

3.2 Mécanique quantique dans un espace-temps non commutatif

La mécanique quantique dans un espace-temps non commutatif, se réfère à une mécanique quantique dont l'algèbre des coordonnées est non canonique. En toute généralité on a :

$$[\hat{q}_\mu, \hat{q}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, [\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = ig_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

où $\theta_{\mu\nu}$ est un paramètre antisymétrique .

Dans ce cas, il existe un changement de coordonnées local défini par [29]

$$\hat{q}_\mu = \hat{x}_\mu - \frac{1}{2}\theta_{\mu\alpha}\hat{p}^\alpha \text{ et } \hat{p}_\nu = \hat{p}_\nu, \tag{3.2}$$

qui permet de recouvrir les relations de commutation habituelles.

La non-commutativité des 4-vecteurs impulsions s'interprète comme s'il y avait indirectement présence d'un champ électromagnétique, où $\theta_{\mu\nu}$ jouerait le rôle de tenseur électromagnétique. Nous adoptons la notation suivante :

- l'opérateur $\hat{q}_\mu$ caractérisé les générateurs de l'algèbre de Heisenberg déformée

-et par $\hat{x}_\mu$ l'opérateur caractérisé les générateurs de l'algèbre de Heisenberg

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = 0, [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = ig_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

Le moyen habituel de réaliser l'algèbre non-commutative consiste à déformer le produit ordinaire. Ainsi, plutôt que d'utliser des fonctions dépendant des coordonnées non-commutatives $\hat{q}_\mu$ avec le produit ordinaire, nous utilisons des fonctions dépendantes des variables commutantes $\hat{x}_\mu$ mais avec le produit $*$ étoile qui, dans le cas particulier $\theta_{\mu\alpha} = C^{st}$ est défini par

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} * \mathcal{G})(x) &= e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}}\mathcal{F}(x_\mu)\mathcal{G}(x_\nu), \\ &= \mathcal{F}(x)\mathcal{G}(x) + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_\mu\mathcal{F}\partial_\nu\mathcal{G} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\theta_{\alpha\beta}\theta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\mu\mathcal{F}\partial_\beta\partial_\nu\mathcal{G} + ..., \end{aligned} \tag{3.4}$$

Le produit $(\mathcal{F} * \mathcal{G})$ est associatif mais non commutatif, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant deux fonctions dépendantes de x.

En mécanique quantique ordinaire, le 4-vecteur A_μ agit sur la fonction d'onde ψ comme un opérateurde multiplication, mais en mécanique quantique non-commutative l'opération multiplication x est remplacé par $*$ (étoile) définie comme suit

$$\begin{aligned} A * \psi &= A\psi + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_\mu A \partial_\nu \psi + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \theta_{\alpha\beta}\theta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\mu A \partial_\beta \partial_\nu \psi + ..., \\ &= A\psi + \sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta_{\alpha\beta}\theta_{\mu\nu}...\partial_\alpha\partial_\mu...Ap_\beta p_\nu...\psi, \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si l'on considère la transformée de Fourier

$$A(x) = \int dk e^{ikx} A(k), \tag{3.6}$$

il est facile de voir que

$$\begin{aligned} A * \psi &= A\psi + \int dk \sum_{n=1}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{(-k\theta p)^n}{n!} e^{ikx} A(k)\psi, \\ A * \psi &= \int dk e^{ik\left(x - \frac{\theta p}{2}\right)} A(k)\psi, \\ A * \psi &= A\left(x - \frac{\theta p}{2}\right)\psi, \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi il y a deux manières de considérer l'espace-temps non commutatif :

- le produit ordinaire mplacé par le produit star($*$)

-ou bien remplacer $\hat{x} \to x - \frac{\theta p}{2}$ i.e. . Ce remplacement correspond au "shift de Bopp".

3.3 Propagateur

La fonction de Green d'une particule de spin 1/2 relativiste se déplaçant sous l'action d'un champ électromagnétique externe A^μ satisfait à l'équation de Dirac

$$\left(\hat{\not p} - e\,\hat{\not A} - m\right) S(x_f, x_i) = \delta(x_f - x_i). \tag{3.8}$$

Cette fonction de Green $S(x_f, x_i)$ peut être representée comme un élément de matrice d'un opérateur S

$$S\left(x_f, x_i\right) = \langle x_f \mid S \mid x_i \rangle, \tag{3.9}$$

où $\mid x\rangle$ est la représentation quadriposition verifiant $\hat{x}^\mu \mid x\rangle = x^\mu \mid x\rangle$ avec $\hat{x}^\mu$ l'opérateur quadriposition conjugué canonique de $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$ et satisfaisant aux relations de commutations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 0, [\hat{q}^\mu, \hat{q}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \;\; [\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0 \\ [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = ig^{\mu\nu}, \;\; [k_\mu \hat{q}^\mu, k_\nu \hat{q}^\nu] = k_\mu \theta^{\mu\nu} k_\nu = k\theta k = 0 \end{array} \right. , \tag{3.10}$$

ainsi, l'équation (3.8) prend la forme opératorielle suivante

$$\left(\hat{\not{p}} - e\;\hat{\not{A}} - \;m\right) S = I, \tag{3.11}$$

où I est l'opérateur identité. La solution formelle de (3.11) est

$$\left\{ \begin{array}{c} S = \frac{1}{\left(\hat{\not{p}} - e\;\hat{\not{A}} - \;m\right)} \\ S\left(x_f, x_i\right) = \left(\hat{\not{p}}_f - e\;\hat{\not{A}}_f + \;m\right) G\left(x_f, x_i\right) \end{array} \right. , \tag{3.12}$$

G est la nouvelle fonction de Green

$$G\left(x_f, x_i\right) = \langle x_f \mid \frac{1}{\left(\hat{\not{p}} - e\;\hat{\not{A}} - \;m\right)\left(\hat{\not{p}} - e\;\hat{\not{A}} + \;m\right)} \mid x_i \rangle. \tag{3.13}$$

En profitant de la technique du temps propre de Schwinger pour un opérateur bosonique, notre fonction de Green s'écrira au moyen d'une intégrale sur le temps propre bosonique s .

$$G(x_f, x_i) = -i \int_0^\infty ds \left\langle x_f \right| \exp\left\{ is\left[\left(\hat{p} \;- e\;\hat{A}\right)^2 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu \mathcal{K}_{\mu\nu} - m^2 \right]\right\} \left| x_i \right\rangle, \tag{3.14}$$

le tenseur non commutatif $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ est défini par

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\left[A_\mu, A_\nu\right]. \tag{3.15}$$

Cette fonction de Green que nous proposons de calculer dans ce chapitre pour les 2 interaction citées plus haut.

Traitons maintenant le problème relativiste de la particule de Dirac soumise à l'onde de Volkov dans l'espace-temps deformé (non commutatif).

3.3.1 Onde de Volkov dans l'espace non commutatif

Fonction de Green

Nous considérons dans cette section, un champ non commutatif de type Volkov, c'est à dire qu'il obéit aux propriétés suivantes :

-sa forme est $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu \left(k\hat{x} - \frac{k\theta\hat{p}}{2} \right)$

-il dépend du produit $k\hat{x}$, où le 4-vecteur d'onde k vérifiant la condition du photon de masse nulle $k^2 = 0$.

Le 4-potentiel A_μ satisfait en outre à la condition de jauge de Lorentz.

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{3.16}$$

condition équivalente à

$$k_\mu \dot{A}^\mu = 0, \tag{3.17}$$

ou encore à

$$kA = 0. \tag{3.18}$$

Pour ce cas simple, la fonction de Green a pour expression

$$G(x_f, x_i) = -i \int_0^\infty ds \left\langle x_f \right| \exp \left\{ -is \left[\left(\hat{p} \ - e \ \hat{A} \right)^2 - m^2 - ie\not{k}\dot{\not{A}} \right] \right\} \left| x_i \right\rangle , \tag{3.19}$$

il est facile de montrer que

$$\left[A_\mu, A_\nu \right] = \left[A_\mu \left(kq \right), A_\nu \left(kq \right) \right] = 0, \tag{3.20}$$

Pour continue nous exploitons les propiétés de la forme choisie pour le 4-potentiel $A_\rho \left(k\hat{x} - \frac{k\theta\hat{p}}{2} \right)$

en incorporant l'identité

$$\int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i)\delta(\varphi_f - \varphi_i - k(x_f - x_i)) = 1, \tag{3.21}$$

qui rend la variable kx indépendant du 4-vecteur de position x , en suite en faisant le changement $\hat{p} \to \hat{p} + k\hat{p}_\varphi$, G après arrangement, devient :

$$\begin{aligned} G &= -i\int_0^\infty dsd\varphi_f d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \left\langle x_f, \varphi_f \right| \exp\left\{is\left(\hat{p}^2 - m^2 + 2k\hat{p}p_\varphi + \right.\right. \\ & \left.\left. e^2\ \hat{A}^2 - 2e\hat{A}\hat{p} - iek\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}\right)\right\} \left|\varphi_i, x_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.22}$$

ou encore

$$\begin{aligned} G &= -i\int_0^\infty ds \int d\varphi_f d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \left\langle x_f, \varphi_f \right| \exp\left\{is\left[\hat{p}^2 - m^2 + \right.\right. \\ & \left.\left. 2k\hat{p}p_\varphi \left(1 + \frac{1}{p_\varphi}\frac{e^2\ \hat{A}^2 - 2e\hat{A}\hat{p} - iek\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}}\right)\right]\right\} \left|\varphi_i, x_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.23}$$

et comme l'inverse de la dérivée

$$\frac{1}{\hat{p}_\varphi}(.) = i\int^{\hat{\varphi}} du\,(.)\,, \tag{3.24}$$

est une intégrale, nous avons

$$\begin{aligned} G &= -i\int_0^\infty ds \int d\varphi_f d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \left\langle x_f, \varphi_f \right| \exp\left\{is\left[\hat{p}^2 - m^2 + \right.\right. \\ & \left.\left. 2k\hat{p}p_\varphi \left(1 + i\int^{\hat{\varphi}} \frac{e^2\ \hat{A}^2 - 2e\hat{A}\hat{p} - iek\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}} du\right)\right]\right\} \left|\varphi_i, x_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant les propiétés du champs de Volkov, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} & \exp\left(ie\int^{\hat{\varphi}} \frac{e\ \hat{A}^2 - 2\hat{A}\hat{p} - ik\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}} du\right) \left(\hat{p}^2 + 2k\hat{p}p_\varphi\right) \exp\left(ie\int^{\hat{\varphi}} \frac{2\hat{A}\hat{p} - e\ \hat{A}^2 + ik\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}} du\right) \\ = & \left(\hat{p}^2 + 2k\hat{p}p_\varphi + e^2\ \hat{A}^2 - 2e\hat{A}\hat{p} - iek\!\!\!/\dot{A\!\!\!/}\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Alors la fonction de Green a maintenant la forme suivante

$$\begin{aligned} G &= -i \int ds d\varphi_f d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \langle x_f, \varphi_f | \exp\left\{ ie \int^{\hat{\varphi}} \frac{e\ \hat{A}^2 - 2\hat{A}\hat{p} - ik\!\!\!/ \dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}} du \right\} \\ & \quad e^{is\left(\hat{p}^2 - m^2\right)} \exp\left\{ ie \int^{\hat{\varphi}} \frac{2\hat{A}\hat{p} - e\ \hat{A}^2 + ik\!\!\!/ \dot{A\!\!\!/}}{2k\hat{p}} du \right\} |\varphi_i, x_i\rangle . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pour éliminer les opérateurs $\hat{p}$, nous introduisons également des relations de fermeture

$$\int |p\,\rangle d^4p \langle\, p| = 1, \tag{3.28}$$

sachant que

$$\langle x \mid p \rangle = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^2}, \tag{3.29}$$

nous obtenons pour G la forme suivante

$$\begin{aligned} G &= -i \int ds \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d\varphi_f d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \delta(\varphi_f - \varphi_i - (kx_f - kx_i)) \\ & \quad \exp\left\{ -ip\left(x_f - x_i\right) + is\left(p^2 - m^2\right) + ie \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{e\ A^2 - 2pA - ik\!\!\!/ \dot{A\!\!\!/}}{2kp} du \right\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

il nous reste maintenant à effectuer l'intégration sur les variables φ_f et φ_i pour éliminer les 2 fonctions delta de Dirac, le calcul est grandement facilité par l'identité suivante :

$$\delta(\varphi_f - \varphi_i - k\left(x_f - x_i\right)) = \int \frac{dp_{\varphi_f}}{2\pi} \exp\left\{ ip_{\varphi_f}(\varphi_f - \varphi_i - k\left(x_f - x_i\right)) \right\}, \tag{3.31}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} G &= -i \int ds \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{ -ip\left(x_f - x_i\right) + is\left(p^2 - m^2\right) + \right. \\ & \quad \left. ie \int_{kx_i - \frac{k\theta p}{2}}^{kx_f - \frac{k\theta p}{2}} \frac{e\ A^2\left(\phi\right) - 2pA\left(\phi\right) - ik\!\!\!/ \dot{A\!\!\!/}\left(\phi\right)}{2kp} d\phi \right\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

et nous déduisons aprés dérivation, la forme définitive du propagateur relative à notre problème

$$
\begin{aligned}
S &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\left(1+\frac{e\not{k}\not{A}_f}{kp}\right)\left(\hat{\not{p}}+m\right)\left(1-\frac{e\not{k}\not{A}_i}{kp}\right)}{p^2-m^2+i\varepsilon} \times \\
&\exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{ie}{2kp}\int_{kx_i-\frac{k\theta p}{2}}^{kx_f-\frac{k\theta p}{2}}\left[eA^2\left(\phi\right)-2pA\left(\phi\right)\right]d\phi\right\}. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

La fonction de Green déterminée, nous avons utilisé un calcul de résidus et par comparaison à la décomposition spectrale

$$
S\left(x_f.x_i\right) = -i\theta\left(\tau_f-\tau_i\right)\sum_{\pm\sigma}\int d^3p\Psi^+_{\sigma,p}\left(x_f\right)\bar{\Psi}^+_{\sigma,p}\left(x_i\right) - i\theta\left(\tau_i-\tau_f\right)\sum_{\pm\sigma}\int d^3p\Psi^-_{\sigma,p}\left(x_f\right)\bar{\Psi}^-_{\sigma,p}\left(x_i\right), \qquad (3.34)
$$

nous avons extrait les fonctions d'onde et le spectre des énergies pour la paricule de Dirac

$$
\begin{aligned}
\Psi^+_{\sigma,p} &= \frac{\left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-ipx+\frac{i}{2kp}\int^{kx-\frac{kp\theta}{2}}\left[e^2A^2\left(\phi\right)-2gpA\left(\phi\right)\right]d\phi\right\} \\
&\times\left(1+\frac{e}{kp}\not{k}\not{A}\left(kx-\frac{kp\theta}{2}\right)\right)u_\sigma\left(p\right), \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum_{.\pm\sigma} u_\sigma\left(p\right)\bar{u}_\sigma\left(p\right) = \frac{(\hat{p}+m)}{2m} \\
\sum_{.\pm\sigma} v_\sigma\left(p\right)\bar{v}_\sigma\left(p\right) = \frac{(-\hat{p}+m)}{2m}
\end{array}
\right., \qquad (3.36)
$$

sont les projecteurs sur les états d'énergie positive et négative (respectivement).

Faisons une application physique en calculant la probabilité de création de paires de particule de spin 1/2 en perturbant le vide par l'onde plane (l'espace-temps étant non commutatif)

Probabilité de création de paires

La probabilité est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{cre} = 1 - |\mathcal{A}_{cre}|^2 \\ \mathcal{A} = e^{iS_{eff}} \end{cases}, \tag{3.37}$$

et l'action effective a pour expression

$$\begin{aligned} S_{eff} &= tr \int \frac{ds}{s} \int \frac{d^4 p e^{-ip(x-y)+is\left(p^2-m^2\right)}}{(2\pi)^4} \times \\ & \left[\exp\left\{ \frac{i}{2kp} \int_{ky-\frac{k\theta p}{2}}^{kx-\frac{k\theta p}{2}} \left[e^2 A^2 - 2epA - 2ie\not{k}\dot{\not{A}} \right] d\phi \right\} - 1 \right]_{x=y} . \end{aligned} \tag{3.38}$$

En prenant la trace $tr_x = \int d^4 x \ \ (x = y)$, nous obtenons

$$S_{eff} = 0, \tag{3.39}$$

et ainsi la probabilité de création de paire est nulle

$$\mathcal{P}_{cre} = 0, \tag{3.40}$$

c'est à dire que l'onde plane dans l'espace non commutatif n'a aucune influence sur le vide et donc il n'y pas de processus de création de paires.

3.3.2 Champ élctromagnétique constante et uniforme

Fonction de Green

Dans ce cas, nous utilisons le 4-potentiel A_μ suivant

$$A_\mu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \hat{q}^\nu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \left(\hat{x}^\nu - \frac{\theta^{\nu\alpha} \hat{p}_\alpha}{2} \right), \tag{3.41}$$

où le tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ est une matrice (4×4) dont le premier indice contravariant dénote la ligne et le deuxième indice covariant indique la coulonne, est défini par

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

dont les valeurs propres sont $\pm F^{(1)}$et $\pm F^{(2)}$

$$\begin{cases} F^{(1)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mathcal{F} + i\mathcal{G}} + \sqrt{\mathcal{F} - i\mathcal{G}} \right) \\ F^{(2)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mathcal{F} + i\mathcal{G}} - \sqrt{\mathcal{F} - i\mathcal{G}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(H^2 - E^2 \right) = \mathcal{F}; \vec{E}.\vec{B} = \mathcal{G} \end{cases} . \tag{3.43}$$

Le tenseur de non commutativité $\theta^{\alpha\beta}$ apparaissent dans l'équation (3.41) écrit comme

$$\theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_x & -\theta_y & -\theta_z \\ \theta_x & 0 & \vartheta_z & -\vartheta_y \\ \theta_y & -\vartheta_z & 0 & \vartheta_x \\ \theta_z & \vartheta_y & -\vartheta_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Cette définition est analogue à celle du tenseur de l'électromagnétisme $F_{\mu\nu}$. Les valeurs propres de $\theta^{\alpha\beta}$ sont :

$$\begin{cases} \theta^{(1)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mathcal{A} + i\mathcal{B}} + \sqrt{\mathcal{A} - i\mathcal{B}} \right) \\ \theta^{(2)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\mathcal{A} + i\mathcal{B}} - \sqrt{\mathcal{A} - i\mathcal{B}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\vartheta^2 - \theta^2 \right) = \mathcal{A}; \vec{\theta}.\vec{\vartheta} = \mathcal{B} \end{cases} . \tag{3.45}$$

Dans ce cas la fonction de Green à calculer est

$$\begin{aligned} G &= -i \int ds e^{-ism^2} \langle x_f | \exp \left\{ is \left[\left(\hat{p}_\mu + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \hat{x}^\nu - \frac{e}{4} F_{\mu\nu} \theta^{\nu\alpha} \hat{p}_\alpha \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{ie}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\alpha} \left(\delta_\nu^\alpha - \frac{e}{4} F_{\beta\nu} \theta^{\alpha\beta} \right) \right] \right\} | x_i \rangle . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Pour construire pour G la forme integrale de chemin, nous utilisons la méthode usuelle qui élimine les opérateurs et qui consiste à :

- d'abord subdiviser l'intervalle $[x_i, x_f]$ en N parties égales

-à insérer $(N-1)$ relations de fermeture

$$\int |x\rangle \langle x| \, d^4x = 1, \tag{3.47}$$

-à insérer N relations de fermeture

$$\int |p\rangle \langle p| \, d^4p = 1, \tag{3.48}$$

où les vecteurs $\mid p\rangle$ sont tels que

$$\hat{p}^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle , \tag{3.49}$$

-à utiliser le produit scalaire

$$\langle x \mid p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \exp(ipx), \tag{3.50}$$

pour changer de base $\mid x\rangle \rightarrow \mid p\rangle$.

Nous obtenons alors pour G la forme continue suivante

$$G = -i\mathcal{T} \int_0^\infty ds \int_{\widetilde{x}_i}^{\widetilde{x}_f} \mathcal{J} D\widetilde{x} D\widetilde{p} \exp \left\{ i \int_0^s \left[\widetilde{p}\dot{\widetilde{x}} + \left(\widetilde{p} + \frac{e}{2}\mathcal{K}\widetilde{x} \right)^2 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu} - m^2 \right] d\tau \right\}, \tag{3.51}$$

où nous avons noté par

$$\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{p}_\mu = \mathcal{M}_\mu^\alpha p_\alpha \ , \widetilde{x} = \mathcal{M}^{-1}x, \mathcal{K}_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}\mathcal{M}_\nu^\alpha \text{ avec } \mathcal{M}_\mu^\alpha = \left(\delta_\mu^\alpha - \frac{e}{4}F_{\mu\nu}\theta^{\nu\alpha} \right) \\ D\widetilde{x} = \prod_{j=1}^{N} d\widetilde{x}_j, D\widetilde{p} = \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d\widetilde{p}_j}{(2\pi)^4}, \end{array} \right. , \tag{3.52}$$

dans ce cas, nous introduisons le symbôle $\mathcal{T}$ qui est le $\mathcal{T}-$ produit à cause du problème d'ordre des matrices γ qui ne commutent pas.

$\mathcal{J}$: est le Jacobien de la transformation relatif au changement $x \rightarrow \widetilde{x}$.

L'expression (3.51) est la fonction de Green pour une particule de Dirac soumise à un champ électromagnétique $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ constante et uniforme dans une espace commutative qui comme on le sait, admet une solution exacte. Suivant [6, 30, 31] ; la fonction de Green est donné par

$$\begin{aligned} G &= \frac{-1}{16\pi^2}\mathcal{J}\int\frac{ds}{s^2}\left(\det\frac{\sinh\left(se\mathcal{K}\right)}{se\mathcal{K}}\right)^{\frac{-1}{2}}\Phi\left(\widetilde{x_f};\widetilde{x}_i\right) \\ & \exp\left\{-\frac{ie}{4}\left(\widetilde{x_f}-\widetilde{x}_i\right)\mathcal{K}\coth\left(se\mathcal{K}\right)\left(\widetilde{x_f}-\widetilde{x}_i\right)+\frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu}-ism^2\right\}, \end{aligned} \tag{3.53}$$

la fonction $\Phi\left(\widetilde{x_f};\widetilde{x}_i\right)$ est solution de

$$\left[\partial_\mu^{\widetilde{x_f}}-eA_\mu\left(\widetilde{x_f}\right)-\frac{e\mathcal{K}_{\mu\nu}}{2}\left(\widetilde{x_f}-\widetilde{x}_i\right)\right]\Phi\left(\widetilde{x_f};\widetilde{x}_i\right)=0, \tag{3.54}$$

la solution de l'éq (3.54) est

$$\Phi\left(\widetilde{x_f};\widetilde{x}_i\right)=\exp\left\{\int_{\widetilde{x}_i}^{\widetilde{x_f}}\left[A\left(\widetilde{x}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{K}\left(\widetilde{x}-\widetilde{x}_i\right)\right]d\widetilde{x}\right\},$$

Pour obtenir le propagateur de Dirac solutions de l'équation de Dirac du premier ordre, les états superflus doivent être éliminés en faisant agir l'opérateur $\left(\hat{\not p}-e\ \hat{\not A}+\ m\right)$ sur la fonction de Green G, nous obtenons alors la solutions complete à notre problème

$$\begin{aligned} S &= \frac{-1}{16\pi^2}\left[\left(i\not\partial_f-e\hat{\not A}_f\right)+m\right]\mathcal{J}\int\frac{ds}{s^2}\left(\det\frac{\sinh\left(se\mathcal{K}\right)}{se\mathcal{K}}\right)^{\frac{-1}{2}}\Phi\left(\widetilde{x_f};\widetilde{x}_i\right) \\ & \exp\left\{-\frac{ie}{4}\left(\widetilde{x_f}-\widetilde{x}_i\right)\mathcal{K}\coth\left(se\mathcal{K}\right)\left(\widetilde{x_f}-\widetilde{x}_i\right)+\frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu}-ism^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Probabilité de création de paires

En prenant la trace $tr_{\widetilde{x}}=\int d^4\widetilde{x}\ \ (\widetilde{x}_i=\widetilde{x}_f=\widetilde{x})$, nous obtenons

$$S_{eff}=\frac{-1}{16\pi^2}\int d\widetilde{x}\int\frac{ds}{s^3}e^{-ism^2}tr_\gamma\left[\left(\det\frac{\sinh\left(se\mathcal{K}\right)}{se\mathcal{K}}\right)^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu}}-1\right]. \tag{3.56}$$

Il nous reste à calculer que $\left(\det\frac{\sinh(se\mathcal{K})}{se\mathcal{K}}\right)^{\frac{-1}{2}}$ et $tr_\gamma e^{\frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu}}$. Puisque la trace d'une matrice est une propriété intrinsèque de la matrice, nous choisissons pour cela une représentation pour laquelle $\mathcal{K}$ a la forme simple suivante

$$\mathcal{K}=P\mathcal{K}_sP^{-1}\ \text{ où }\ \left(\mathcal{K}_s\right)_{\mu\nu}=\left(F_s\right)_{\mu\alpha}\left(\delta+\frac{e}{4}\theta_sF_s\right)^\alpha_{\ \nu}, \tag{3.57}$$

où

$$F_s = \begin{pmatrix} F^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F^{(2)} \end{pmatrix}, \theta_s = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

après quelques manipulations, nous obtenons

$$\begin{cases} tre^{\left(\frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\mathcal{K}_{\mu\nu}\right)} = 4\cosh\left[esF^{(1)}\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(1)}F^{(1)}\right) + esF^{(2)}\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(2)}F^{(2)}\right)\right] \\ \left(\det\frac{\sin(se\mathcal{K})}{se\mathcal{K}}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{(se)^2F^{(1)}F^{(2)}\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(1)}F^{(1)}\right)\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(2)}F^{(2)}\right)}{\sinh\left[seF^{(1)}\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(1)}F^{(1)}\right)\right]\sinh\left[seF^{(2)}\left(1+\frac{e}{4}\theta^{(2)}F^{(2)}\right)\right]} \end{cases}, \tag{3.59}$$

et finalement, l'action effective a maintenant la forme suivante

$$S_{eff} = -\int\frac{ds}{s^3}\frac{e^{-ism^2}}{4\pi^2}\left\{\frac{\cosh\left\{es\left[F^{(1)}\left(\frac{4+e\theta^{(1)}F^{(1)}}{4}\right)+F^{(2)}\left(\frac{4+e\theta^{(2)}F^{(2)}}{4}\right)\right]\right\}}{\frac{\sinh\left[seF^{(1)}\left(\frac{4+e\theta^{(1)}F^{(1)}}{4}\right)\right]}{seF^{(1)}\left(\frac{4+e\theta^{(1)}F^{(1)}}{4}\right)}\frac{\sinh\left[seF^{(2)}\left(\frac{4+e\theta^{(2)}F^{(2)}}{4}\right)\right]}{seF^{(2)}\left(\frac{4+e\theta^{(2)}F^{(2)}}{4}\right)}} - 1\right\}. \tag{3.60}$$

Examinons les trois cas détails suivants :

1er cas : $H = 0$ Dans ce cas nous avons

$$F^{(1)} = -E, \theta^{(1)} = -\theta, F^{(2)} = \theta^{(2)} = 0, \tag{3.61}$$

et la probabilité totale de création de paires est donnée par

$$\mathcal{P}_{cre} = 2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}. \tag{3.62}$$

Dans $S_{eff}^{\times}$ changeons s en $-s$, la probabilité de création de paires est donc

$$\mathcal{P}_{cre} = i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2}\frac{e^{-ism^2}}{4\pi^2}\left\{eE\left(\frac{4+e\theta E}{4}\right)\coth\left[esE\left(\frac{4+e\theta E}{4}\right)\right] - \frac{1}{s}\right\}. \tag{3.63}$$

Cette intégrale, d'après la théorème de la résidus est une somme infinie de terme.

Les pôles $s = \frac{-in\pi}{eE\left(\frac{4+e\theta E}{4}\right)}$ $(n = 1, 2, ...)$, se trouvent sur l'axe imaginaire, la probabilité de création de paires est une somme sur tous les résidus relatifs à ces pôles :

$$\mathcal{P}_{cre} = \sum_{n=1} \frac{e^2 E^2 \left(\frac{4+e\theta E}{4}\right)^2}{2\pi^3 n^2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE\left(\frac{4+e\theta E}{4}\right)}}. \tag{3.64}$$

2ème cas : $E = 0$ dans ce cas nous avons

$$F^{(1)} = iH, \theta^{(1)} = i\vartheta, F^{(2)} = \theta^{(2)} = 0, \tag{3.65}$$

et aprés avoir changé s en $-it$, nous avons alors pour S_{eff} une expression pour la variable t :

$$S_{eff} = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{dt}{t^2} e^{-tm^2} \left\{ eH \left(1 - \frac{e}{4}\vartheta H\right) \coth\left[teH\left(1 - \frac{e}{4}\vartheta H\right)\right] - \frac{1}{t} \right\}, \tag{3.66}$$

nous remarquons que l'action effective est réelle, ce qui signifie que la probabilité de création de paires est nulle

$$\mathcal{P}_{cre} = S_{eff} - S_{eff}^{\times} = 0.$$

3ème cas : $\theta^{\alpha\beta} = 0$ dans ce cas nous avons

$$S_{eff} = \frac{-1}{4\pi^2} \int \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left\{ \frac{(se)^2 F^{(1)} F^{(2)} \cosh\left[es\left(F^{(1)} + F^{(2)}\right)\right]}{\sinh\left[egF^{(1)}\right] \sinh\left[egF^{(2)}\right]} - 1 \right\}. \tag{3.67}$$

Ce résultat est en accord avec celui de la reférence [6]

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculé la probabilité de création de paires de particules lorsque le vide est perturbé par un champ extérieur dans un espace-temps non commutatif suivant la technique de Schwinger basée sur la détermination de l'action effective, en prenant comme interaction l'onde plane et le champ électromagnétique constant et uniforme. Comme résultat, nous avons montré que l'onde plane n'a aucune influence sur le processus de la création de paires et que la probabilité de création de paires de particules par un champ électrique constant a été modifiée et finalement le champ magnétique seul ne peut également créer des paires de particules dans un espace-temps non commutatif.

Chapitre 4

Barrière mobile

4.1 Introduction

La plupart des problèmes traités dans les ouvrages de mécanique quantique sont des problèmes stationnaires. Lorsque l'hamiltonien ne dépend pas du temps, en général il n'y a pas de difficultés pour trouver les énergies des différents états du systèmes. Cependant si l'hamiltonien dépend du temps, l'obtention de la solution n'est pas facile à trouver et dans certains cas on se contente de la solution approchée au moyen de méthodes d'approximation.

Les systèmes quantiques dépendant du temps ont fait l'objet de beaucoup d'intérêt ces dernières années dans différents domaines. Citons par exemple quelques travaux sur l'optique quantique [32], la phase de Berry [33], l'effet d'Aharonov-Bohm [34] et l'effet de Hall quantique [35].

C'est ainsi que pour certaines formes de potentiel dépendant du temps des méthodes comme les intégrales de chemins [36, 37], la seconde quantification [38], la représentation de Heisenberg [39], la méthode de séparation des variables [40], la méthode de la supersymétrie [41] et la méthode des invariants [42] ont été élaborées pour le traitement.

Parmi les applications étudiées en mécanique quantique non-relativiste le plus important est l'oscillateur harmonique avec la masse et la fréquence dépendant du temps traité dans [43, 44, 45], le potentiel linéaire dépendant du temps étudié [46, 47, 48], etc.

Dans le cas relativiste le nombre de cas solubles est assez limité. Citons quelques uns [49, 50, 51] et notamment les systèmes avec des conditions aux limites dépendant de temps comme le modèle qui rend compte de la présence de particules cosmiques à très grande vitesse introduit par Fermi dans les années 50 [52], le puits de potentiel infini dont la paroi mobile se déplace avec une vitesse v constante [53, 54, 55], le puits dont l'une des parois oscille et dont le fond est un oscillateur harmonique et dont la fréquence dépend de temps, [56, 57].

Pour les systèmes se déplaçant avec une vitesse v constante citons le potentiel mobile step traité par Toshiharu [58], où il détermine dans le cadre non relativiste les coefficients de transmission et de réflexion. Pour les systèmes relativistes avec parois mobiles, l'aspect mathématique a été considéré par Moore [59] et l'effet de l'accélération sur une paroi dans le processus de de création de paires peut être trouvé dans les articles suivant [60, 61, 62].

Dans ce chapitre, nous considérons le problème d'une particule relativiste sans spin et avec un spin 1/2 soumise à un potentiel $V\left(y-vt\right)$ c'est à dire se déplaçant avec une vitesse v constante. La méthode pour traiter cette forme de potentiel est la suivante : des transformations de type espace-temps que l'on fait suivre d'une tranformation sur la fonction d'onde sont uilisées pour le problème dependant du temps est ramené à un problème indépendant du temps.

D'abord nous donnons la méthode générale pour un potentiel $V(y-vt)$ en considerant les équations de Klein-Gordon et de Dirac et ensuite nous choisissons la forme standard qui est la barrière step mobile $\theta(y-vt)$ comme cas special pour determiner les coefficients de transmission et de réflexion.

4.2 Méthode pour $V\left(y-vt\right)$

4.2.1 Particule de K-G

Considérons une particule scalaire sans spin décrit par l'équation Klein-Gordon et interagissant avec potentiel $A_0=V\left(y-vt\right)$

$$\left[D_\mu D^\mu-m^2\right]\psi=0, \tag{4.1}$$

où

$$D_0=\frac{i\partial}{\partial t}-V\left(y-vt\right)\ \text{ et }\ D_1=\frac{i\partial}{\partial y}, \tag{4.2}$$

et v est la vitesse.

Notre approche consiste à transformer l'équation de KG avec le potentiel mobile avec une vitesse v en une équation similaire mais où le potentiel ne dépend plus du temps. Ainsi la solution du problème dépendant du temps peut être déduite grâce à l'invariance de Lorentz .

Pour cela, utilisons la transformation de Lorentz $(y,t) \rightarrow (x,\tau)$ definie comme suit

$$x = \lambda\left(y - vt\right), \qquad \tau = \lambda\left(t - vy\right), \tag{4.3}$$

où

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{4.4}$$

est le facteur bien connu en relativité.

Il est facile de voir que les dérivées partielles et la fonction d'onde se transforment comme suit

$$\left\{\begin{array}{c} D'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu D_\nu \\ \frac{\partial}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial \tau}\right) \\ \psi\left(y,t\right) \rightarrow S\bar{\psi}\left(x,\tau\right) \end{array}\right. , \tag{4.5}$$

où $\psi\left(y,t\right)$ est solution de l'équation de Klein Gordon dans les coordonée (y,t) et $\bar{\psi}\left(x,\tau\right)$ la nouvelle fonction d'onde dans le nouveau système de coordonées (x,τ).

L'équation de KG transformée est donc la suivante

$$\left\{\begin{array}{c} \left[D'_\nu D'^\nu - m^2\right] S\bar{\psi}\left(x,\tau\right) = 0 \\ \left[\left[i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) - V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 - m^2\right] S\bar{\psi}\left(x,\tau\right) = 0 \\ \left[\left(\frac{i\partial}{\partial \tau} - \lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + iv\lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 - m^2\right] S\bar{\psi}\left(x,\tau\right) = 0 \end{array}\right. , \tag{4.6}$$

et si on choisit S comme suit

$$S = e^{-iv\lambda\int^x du V\left(\frac{u}{\lambda}\right)}, \tag{4.7}$$

alors nous obtenons la nouvelle équation de KG dans le système de coordonées (x,τ)

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right]\bar{\psi} = 0, \tag{4.8}$$

où maintenant le potentiel est indépendant du temps.

Considérons maintenant les équations de continuité.

Il est facile de former l'équation de continuité dans le système de coordonnées (x, τ) à partir de (4.8)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\bar{\rho}+\frac{\partial}{\partial x}\bar{\mathcal{J}} =0 \tag{4.9}$$

et d'obtenir ainsi la densité

$$\bar{\rho} =i\left(\bar{\psi}^{*}\frac{\partial}{\partial \tau}\bar{\psi}-\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial \tau}\bar{\psi}^{*}\right)-2\lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\left|\bar{\psi}\right|^{2}, \tag{4.10}$$

et la densité de courant

$$\bar{\mathcal{J}} =i\left(\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial x}\bar{\psi}^{*}-\bar{\psi}^{*}\frac{\partial}{\partial x}\bar{\psi}\right). \tag{4.11}$$

En utilisant les transformations (4.5), le passage au système de coordonnées (y, t) étant simple, les équations de continuité deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}+v\bar{\mathcal{J}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\mathcal{J}}+v\bar{\rho}\right) =0, \tag{4.12}$$

i.e. de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{J} =0, \tag{4.13}$$

Donc, le passage $(\rho, \mathcal{J}) \rightarrow \left(\bar{\rho}, \bar{\mathcal{J}}\right)$ est ainsi donnée par la relation

$$\rho=\bar{\rho}+v\bar{\mathcal{J}} \text{ et } \mathcal{J}=\bar{\mathcal{J}}+v\bar{\rho}, \tag{4.14}$$

i.e. que $(\rho, \mathcal{J})$ se transforme comme un 4-vecteur dans une transformation de Lorentz

4.2.2 Particule de Dirac

Pour une particule de spin 1/2 en interaction avec le potentiel mobile, son mouvement à (1+1) dimensions est decrit par l'équation de Dirac suivante

$$\left[\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right]\psi=0, \tag{4.15}$$

où les matrices γ

$$\gamma^0 \longrightarrow \sigma^3, \gamma^1 \longrightarrow i\sigma^2, \tag{4.16}$$

peuvent être remplacées par les matrices de Pauli σ^3, σ^2 . L'espace temps étant muni de la métrique $g^{\mu\nu} = (+, -)$

Passons à la transformation de fonction d'onde (spineur) des particule de spin 1/2 sous une transformation de Lorentz.

Comme précedemment, pour une particule de spin 1/2 dont la fonction d'onde (spineur) est solution de l'équation de Dirac, on a $D'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu D_\nu$ le lien entre les deux fonctions d'onde (spineur) étant

$$\psi = e^{-iv\lambda \int^x du V\left(\frac{u}{\lambda}\right)} U \bar{\psi}. \tag{4.17}$$

Dans le système $(x;\tau)$, l'éq. de Dirac étant

$$\begin{cases} \left\{\gamma^0 \left[i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) - V\right] + \gamma^1 \left[i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\right] - m\right\} e^{-iv\lambda \int^x du V\left(\frac{u}{\lambda}\right)} U\bar{\psi} = 0 \\ \left\{\hat{\gamma}^0 \left(\frac{i\partial}{\partial \tau} - \lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) + \hat{\gamma}^1 \frac{i\partial}{\partial x} - m\right\} U\bar{\psi} = 0 \end{cases}, \tag{4.18}$$

où les nouvelles matrices $\hat{\gamma}$ sont liées aux anciennes matrices γ par

$$\hat{\gamma}^0 = \lambda\left(\gamma^0 - v\gamma^1\right) \text{ et } \hat{\gamma}^1 = \lambda\left(\gamma^1 - v\gamma^0\right), \tag{4.19}$$

et qui verifient

$$\left[\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\right]_+ = 2g^{\mu\nu}, \tag{4.20}$$

i.e. la même relation d'anticommutation relatives aux γ.

Comme U est la matrice de passage relative aux matrices $\gamma \to \hat{\gamma}$ et dont le lien est donnée

$$U^{-1}\hat{\gamma}^\mu U = \gamma^\mu, \tag{4.21}$$

il est facile alors de lobtenir. Son expression est

$$\begin{cases} U = e^{\frac{\varphi}{2}\gamma^0\gamma^1} = e^{\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\sigma^2} = \cosh\frac{\varphi}{2} + \sigma^1 \sinh\frac{\varphi}{2} \\ \tanh\varphi = v \end{cases}, \tag{4.22}$$

La nouvelle équation de Dirac est finalement

$$\left\{\gamma^0\left(\frac{i\partial}{\partial\tau}-\lambda V\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)+\gamma^1\frac{i\partial}{\partial x}-m\right\}\bar{\psi}=0, \tag{4.23}$$

où le potentiel est egalement indépendant du temps.

Dans le système (x,τ) la densité $\bar{\rho}$ et le courant $\bar{\mathcal{J}}$ sont donnés par

$$\bar{\rho}=\bar{\psi}^{+}\bar{\psi},\quad \bar{\mathcal{J}}=\bar{\psi}^{+}\sigma_x\bar{\psi}, \tag{4.24}$$

et comme $\left(\bar{\rho},\bar{\mathcal{J}}\right)$ se transforme comme un 4-vecteur dans une transformation de Lorentz, on a également

$$\rho=\bar{\rho}+v\bar{\mathcal{J}} \text{ et } \mathcal{J}=\bar{\mathcal{J}}+v\bar{\rho}. \tag{4.25}$$

Comme application choisissons pour des raisons pédagogiques la barrière mobile step pour illustrer nos calculs précédents et qui a l'avantage d'avoir été considéré dans pratiquement tous les livres de mécanique quantique.

4.3 Application

Considérons la particule de spin 0 ou 1/2 en mouvemnt sous l'éffet de l'action d'un potentiel dont la forme et la suivante

$$V\left(y-\nu t\right)=V_0\theta\left(y-\nu t\right)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{pour } y<vt \\ V_0 & \text{pour } x>vt \end{array}\right., \tag{4.26}$$

ou V_0 est constante positive.

Dans le système de coordonnées (x,τ) le potentiel $V\left(y-\nu t\right)$ prent la forme

$$V\left(y-\nu t\right)\rightarrow V\left(\frac{x}{\lambda}\right)=V_0\theta\left(\frac{x}{\lambda}\right)=V_0\theta\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x<0 \\ V_0 & \text{pour } x>0 \end{array}\right.. \tag{4.27}$$

4.3.1 Equation de K-G

L'équation de Klein Gordon dans le système de coordonnées (x, τ) avec le potentiel step s'écrit

$$\left[\left(\frac{i\partial}{\partial\tau} - \lambda V_0 \theta\left(x\right)\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right]\bar{\psi} = 0.$$

Distinguons comme d'habitude les deux régions $x < 0$ et $x > 0$.

D'abord la région $x < 0$, nous avons l'équation

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right]\bar{\psi}_I = 0, \tag{4.28}$$

dont la solution est

$$\bar{\psi}_I\left(x, \tau\right) = e^{-i\varepsilon\tau}\left[e^{ipx} + Be^{-ipx}\right] \text{ avec } \varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}. \tag{4.29}$$

Dans la region $x > 0$, l'équation est

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda_0\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right]\bar{\psi}_{II} = 0, \quad \text{avec } \lambda_0 = \lambda V_0, \tag{4.30}$$

et sa solution est

$$\bar{\psi}_{II}\left(x; t\right) = Ce^{-i(\varepsilon\tau - qx)} \text{ avec } q = \pm\sqrt{\left(\varepsilon - \lambda_0\right)^2 - m^2}, \tag{4.31}$$

où C, B sont des constantes et q est l'impulsion dans la région II.

Pour $x < 0$, le signe $+$ est choisi pour la racine carrée ce qui corresponds à des particules se propageant vers la droite avec une énergie positive. Pour $x > 0$ le signe de la racine carrée dans la région II ne peut pas être être fixé à ce niveau.

Comme d'habitude $\bar{\psi}$ et sa dérivée doivent être continues au point $x = 0$. Nous obtenons le système

$$\left\{\begin{array}{c} e^{-i\varepsilon\tau}\left(1 + B\right) = e^{-i\varepsilon\tau}C \\ e^{-i\varepsilon\tau}\left(1 - B\right) = e^{-i\varepsilon\tau}\frac{q}{p}C \end{array}\right., \tag{4.32}$$

qui permet de déterminer les constantes

$$B = \frac{p-q}{p+q} \quad \text{et} \quad C = \frac{2p}{p+q}. \tag{4.33}$$

Passons au calcul des coefficients de réflexion et de transmission.

Les coefficients de réflexion et de transmission se calculent en utilisant les définitions (4.11) des courants. L'expression du courant dans la région I est

$$\bar{\mathcal{J}}_I = 2ip\left(1 - \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2\right), \tag{4.34}$$

cette expression de $\bar{\mathcal{J}}_I$ est précisément la différence de deux flux : le flux incident $\bar{\mathcal{J}}_{inc} = 2ip$, et le flux réfléchi $\bar{\mathcal{J}}_{ref} = -2ip\left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2$.

Dans la région II nous avons de même

$$\bar{\mathcal{J}}_{II} = \bar{\mathcal{J}}_{tra} = i\left(q + q^*\right)\left|\frac{2p}{p+q}\right|^2 e^{i(q-q^*)y}. \tag{4.35}$$

Le rapport de deux courants transmis et incident constitue le coefficient de transmission

$$\bar{\mathcal{T}} = \left|\frac{\bar{\mathcal{J}}_{tra}}{\bar{\mathcal{J}}_{inc}}\right| = \frac{(q+q^*)}{2p}\left|\frac{2p}{p+q}\right|^2 e^{i(q-q^*)y}, \tag{4.36}$$

et le rapport du courant réfléchie et incident nous donne le coefficient de réflexion :

$$\bar{\mathcal{R}} = \left|\frac{\bar{\mathcal{J}}_{ref}}{\bar{\mathcal{J}}_{inc}}\right| = \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2. \tag{4.37}$$

Discutons maintenant ces résultats en considérant les 3 cas différents :

1-$\lambda_0 < (\varepsilon - m)$ l'énergie cinétique est plus grande que la barrière. Dans ce cas p et q sont réels et on a

$$\bar{\mathcal{R}} = \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2, \bar{\mathcal{T}} = \frac{q}{p}\left|\frac{2p}{p+q}\right|^2 \quad \text{et } \bar{\mathcal{R}} + \bar{\mathcal{T}} = 1. \tag{4.38}$$

L'onde incidente est partiellement réfléchie et partiellement transmise.

2- $(\varepsilon - m) < \lambda_0 < (\varepsilon + m)$, Dans ce cas $q = i\alpha$ devient imaginaire et on trouve que

$$\bar{\mathcal{R}} = 1, \bar{\mathcal{T}} = 0. \tag{4.39}$$

L'onde incidente est totalement réfléchie.

3-$\lambda_0 > (\varepsilon - m)$, Dans ce cas q est réel mais doit être choisi négatif

$$\mathcal{R} = \left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2, \mathcal{T} = \frac{q}{p}\left(\frac{2p}{p-q}\right)^2 \text{ et } \bar{\mathcal{R}} - \bar{\mathcal{T}} = 1. \tag{4.40}$$

La probabilité est toujours conservée ce qui se traduit par un coefficient de transmission <0 et un coefficient de réflexion >1. Ce résultat peut être réinterpréter suivant Klein (paradoxe) à l'aide de paires de particule.

En utilisant les expressions (4.10) et (4.29), (4.31) les densités de probabilité dans les deux régions I et II se calculent aisément

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{\rho}_I = 2i\varepsilon\left(1 + \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2 + \frac{p-q}{p+q}e^{-2ipx} + \frac{p-q^*}{p+q^*}e^{2ipx}\right) & \text{pour x<0} \\ \bar{\rho}_{II} = 2i\left|\frac{2p}{p+q}\right|^2(\varepsilon - \lambda_0) & \text{pour x>0} \end{array}\right., \tag{4.41}$$

où la continuité $\bar{\rho}_I(x=0) = \bar{\rho}_{II}(x=0)$ ou $\varepsilon\left(1 + \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2 + \frac{p-q}{p+q} + \frac{p-q^*}{p+q^*}\right) = \left|\frac{2p}{p+q}\right|^2(\varepsilon - \lambda_0)$ est satisfaite.

Les équations (4.29) et (4.31) peuvent être regroupées pour être écrites sous forms d'une seule équation incluant les solutions relatives à $x < 0$ et $x > 0$

$$\bar{\psi}(x;t) = e^{-i\varepsilon\tau}\left\{\theta(-x)\left[e^{ipx} + \frac{p-q}{p+q}e^{-ipx}\right] + \theta(x)\frac{2p}{p+q}e^{iqx}\right\}. \tag{4.42}$$

Pour le cas limite de barrière infini ($V_0 \to \infty$), nous avons

$$\lim_{V_0\to\infty}\frac{p-q}{p+q} = -1, \lim_{V_0\to\infty}\frac{2p}{p+q} = 0, \tag{4.43}$$

la fonction d'onde solution de l'équation de K-G pour une particule en interaction avec le potentiel step infini est

$$\bar{\psi} = C\theta(-x)e^{-i\varepsilon\tau}\sin(px). \tag{4.44}$$

les coeffcients $\bar{\mathcal{T}}_\infty$ et $\bar{\mathcal{R}}_\infty$

$$\bar{\mathcal{T}}_\infty = \lim_{V_0\to\infty}\bar{\mathcal{T}} = 0, \bar{\mathcal{R}}_\infty = \lim_{V_0\to\infty}\bar{\mathcal{R}} = 1. \tag{4.45}$$

Dans le système de coordonnées (y,t), la fonction d'onde dans les regions I et II est

$$\left\{\begin{array}{c} \psi_I = e^{i\lambda[-(\varepsilon+vp)t+(p+v\varepsilon)y]} + \left(\frac{p-q}{p+q}\right) e^{-i\lambda[(\varepsilon-vp)t+(p-v\varepsilon)y]} \\ \psi_{II} = \left(\frac{2p}{p+q}\right) e^{i\lambda[-(\varepsilon+v(q-v\lambda_0))t+(q+v(\varepsilon-\lambda_0))y]} \end{array}\right. . \tag{4.46}$$

Remarquons que l'energie dans le repère (y,t) n'est pas conservée dans les deux régions I et II à cause du fait que le problème traité içi est un problème dépendant du temps. La densité du courant dans la région I est

$$\mathcal{J}_I = \bar{\mathcal{J}}_I + v\bar{\rho}_I = 2i\left\{p+v\varepsilon - \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2 (p-v\varepsilon) + v\varepsilon\left[\frac{p-q^*}{p+q^*}e^{2i\lambda p(y-vt)} + \frac{p-q}{p+q}e^{-2i\lambda p(y-vt)}\right]\right\}, \tag{4.47}$$

alors que les courant incident et réfléchi sont

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{\mathcal{J}}_{inc} = 2i\,(p+v\varepsilon) \\ \bar{\mathcal{J}}_{ref} = 2i\left\{-\left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2 (p-v\varepsilon) + v\varepsilon\left[\frac{p-q^*}{p+q^*}e^{2i\lambda p(y-vt)} + \frac{p-q}{p+q}e^{-2i\lambda p(y-vt)}\right]\right\} \end{array}\right. . \tag{4.48}$$

Dans la région II le courant est

$$\mathcal{J}_{II} = \bar{\mathcal{J}}_{II} + v\bar{\rho}_{II} = i\left|\frac{2p}{p+q}\right|^2 \left[(q^*+q) + 2v\,(\varepsilon-\lambda_0)\right] e^{i\lambda(q-q^*)(y-vt)},$$

et les coefficients de transmission et de réflexion sont pour différents cas, respectivement :

a) $V_0 < (\varepsilon - m)\sqrt{1-v^2}$, q est réel et positif

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{R} = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 - \frac{2v\varepsilon}{p+v\varepsilon}\frac{p-q}{p+q}\left\{\frac{p-q}{p+q} + \cos\left(2\lambda p\,(y-vt)\right)\right\} \\ \mathcal{T} = \left(\frac{2p}{p+q}\right)^2 \frac{q+v(\varepsilon-\lambda_0)}{p+v\varepsilon} \end{array}\right. , \tag{4.49}$$

nous avons $\mathcal{R}+\mathcal{T}|_{y=vt} = 1\ \forall v$. pour $v=0$, $\mathcal{R} = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$, $\mathcal{T} = \frac{q}{p}\left(\frac{2p}{p+q}\right)^2$, $\mathcal{R}+\mathcal{T}=1$

b)$(\varepsilon - m)\sqrt{1-v^2} < V_0 < (\varepsilon + m)\sqrt{1-v^2}$, $q = i\alpha$ est imaginaire

$$\left\{\begin{array}{c} \mathcal{R} = 1 - \frac{2v\varepsilon}{p+v\varepsilon}\left\{1 + \frac{p^2-\alpha^2}{p^2+\alpha^2}\cos\left(2\lambda p\,(y-vt)\right) - \frac{2p\alpha}{p^2+\alpha^2}\sin\left(2\lambda p\,(y-vt)\right)\right\} \\ \mathcal{T} = \frac{4vp^2}{p^2+\alpha^2}\frac{\varepsilon-\lambda_0}{p+v\varepsilon}e^{-2\lambda\alpha(y-vt)} \end{array}\right. , \tag{4.50}$$

et nous pouvons vérifier que $\mathcal{R}+\mathcal{T}|_{y=vt}=1$ seulement à $y=vt$ et nous remarquons que dans ce cas $\mathcal{T}\neq 0$. pour $v=0$, nous avons $\mathcal{R}=1$, $\mathcal{T}=0$.

c) $V_0>(\varepsilon-m)\sqrt{1-v^2}$,$q$ est réel

$$\begin{cases} \mathcal{R}=\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2-\frac{2v\varepsilon}{p+v\varepsilon}\frac{p+q}{p-q}\left\{\frac{p+q}{p-q}+\cos\left(2\lambda p\left(y-vt\right)\right)\right\} \\ \mathcal{T}=\frac{q-v(\varepsilon-\lambda_0)}{p+v\varepsilon}\left(\frac{2p}{p-q}\right)^2 \end{cases}. \quad (4.51)$$

Dans ce cas, nous pouvons vérifier que $\mathcal{R}-\mathcal{T}|_{y=vt}=1$ ($\mathcal{R}>1$ et $\mathcal{T}<0$) et ce résultat connu, montre que le comportement n'est pas classique. En faisant appel à l'antiparticule, ce résultat peut être réinterprété et dans ce cas il n'y a pas de paradoxe (Klein).

Pour un vitesse nulle $v=0$, $\mathcal{R}=\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2$ et $\mathcal{T}=\frac{q}{p}\left(\frac{2p}{p-q}\right)^2$ nous avons $\mathcal{R}-\mathcal{T}=1$.

Grâce à l'invariance de l'équation de KG, la solution dans le système de coordinées (y,t), peut être déduite et son expression dans les deux régions est la suivante

$$\begin{aligned}\psi_{\rightarrow} &= \left\{\theta\left(vt-y\right)\left[e^{i\lambda[-(\varepsilon+vp)t+(p+v\varepsilon)y]}+\left(\frac{p-q}{p+q}\right)e^{-i\lambda[(\varepsilon-vp)t+(p-v\varepsilon)y]}\right]+\right.\\ &\left.\theta\left(x-vt\right)\left(\frac{2p}{p+q}\right)e^{i\lambda[-(\varepsilon+v(q-v\lambda_0))t+(q+v(\varepsilon-\lambda_0))y]}\right\}. \quad (4.52)\end{aligned}$$

Pour $V_0\rightarrow\infty$, i.e. la barrière mobile est infinie, la fonction d'onde dans ce cas est

$$\bar{\psi}=C\theta\left(vt-y\right)e^{-i\lambda\varepsilon(t-vy)}\sin\left(p\lambda\left(y-vt\right)\right), \quad (4.53)$$

et les coeffcients $\mathcal{T}_\infty$ et $\mathcal{R}_\infty$ sont

$$\mathcal{T}_\infty=\lim_{V_0\rightarrow\infty}\mathcal{T}=0, \mathcal{R}_\infty=\lim_{V_0\rightarrow\infty}\mathcal{R}=1-\frac{4v\varepsilon}{p+v\varepsilon}\sin^2\left[p\lambda\left(y-vt\right)\right]. \quad (4.54)$$

4.3.2 Equation de Dirac

L'équation de Dirac dans le système de coordonnées (x,τ) relative à une particule relativiste de spin 1/2 et de masse m avec le potentiel step, s'écrit

$$\left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda V_0\theta\left(x\right)\right)-\sigma^2\frac{\partial}{\partial x}-m\right]\bar{\psi}=0. \quad (4.55)$$

Le potentiel étant indépendant de temps, les solutions sont de la forme $\bar{\psi}(x,\tau) = e^{-i\varepsilon\tau}\bar{\psi}(x)$ où $\bar{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \Phi(x) & F(x) \end{pmatrix}^T$ est un spineur et où ses composantes verifient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left(\varepsilon - \lambda V_0 \theta\left(\frac{x}{\lambda}\right) - m\right)\Phi + \frac{i\partial}{\partial x}F = 0 \\ \left(\varepsilon - \lambda V_0 \theta\left(\frac{x}{\lambda}\right) + m\right)F + \frac{i\partial}{\partial x}\Phi = 0 \end{cases}. \tag{4.56}$$

Comme dans le cas du spin 0, on doit raccorder les solutions des deux regions au point $x = 0$ Distinguons les deux régions $x < 0$ et $x > 0$.

-Région I : $x < 0$

$$\begin{cases} (\varepsilon - m)\Phi + \frac{i\partial}{\partial x}F = 0 \\ (\varepsilon + m)F + \frac{i\partial}{\partial x}\Phi = 0 \end{cases}. \tag{4.57}$$

où la solution générale est

$$\bar{\psi}_I(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{\varepsilon+m} \end{pmatrix} e^{ipx} + B\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-p}{\varepsilon+m} \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad , \quad p = \sqrt{\varepsilon^2 + m^2}. \tag{4.58}$$

Le premier et le deuxième terme de l'éq (4.58) correspondent aux ondes incidente et réfléchie

-Region II : $x > 0$ l'équation de Dirac se modifie et devient

$$\begin{cases} (\varepsilon - \lambda_0 - m)\Phi + \frac{i\partial}{\partial x}F = 0 \\ (\varepsilon - \lambda_0 + m)F + \frac{i\partial}{\partial x}\Phi = 0 \end{cases}, \tag{4.59}$$

et la solution générale est la suivante

$$\bar{\psi}_{II}(x) = C\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q}{\varepsilon-\lambda_0+m} \end{pmatrix} e^{iqx} \quad , \quad q^2 = (\varepsilon - \lambda_0)^2 - m^2. \tag{4.60}$$

La continuité de la dérivée de la fonction d'onde n'étant pas nécessaire, puisque seule la continuité de la fonction d'onde au point x=0 nous donne

$$\begin{cases} 1 + B = C \\ 1 - B = \frac{q(\varepsilon+m)}{p(\varepsilon-\lambda_0+m)}C \end{cases}, \tag{4.61}$$

ce qui permet de déterminer les constantes

$$B = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}; C = \frac{2}{1+\kappa} \text{ avec } \kappa = \frac{q}{p}\frac{\varepsilon + m}{\varepsilon - \lambda_0 + m}. \tag{4.62}$$

Comme le courant est défini par : $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\psi}^{+}\sigma_x\bar{\psi}$, alors les courants à gauche et à droite du potentiel sont :

$$\bar{\mathcal{J}}_I = \frac{2p}{\varepsilon + m}\left(1 - |B|^2\right) \text{ and } \bar{\mathcal{J}}_{II} = \frac{q + q^*}{(\varepsilon - \lambda_0) + m}|C|^2 e^{-i(q^* - q)x}. \tag{4.63}$$

Les particules venant de la gauche ont une impulsion p et une densité de courant $\bar{\mathcal{J}}_{inc} = \frac{2p}{\varepsilon+m}$; les particules réfléchies par le potentiel ont une impulsion $-p$ et une densité courant $\bar{\mathcal{J}}_{ref} = -\frac{2p}{\varepsilon+m}|B|^2$.

Les coefficient de réflexion et de transmission sont égaux respectivement à :

$$\bar{\mathcal{R}} = \left|\frac{\bar{\mathcal{J}}_{ref}}{\bar{\mathcal{J}}_{inc}}\right| = \left|\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right|^2, \tag{4.64}$$

$$\bar{\mathcal{T}} = \left|\frac{\bar{\mathcal{J}}_{II}}{\bar{\mathcal{J}}_{inc}}\right| = \left|\frac{2}{1+\kappa}\right|^2 \frac{\varepsilon + m}{2p}\frac{q + q^*}{(\varepsilon - \lambda_0) + m}|C|^2 e^{-i(q^* - q)y}. \tag{4.65}$$

Dans la région II ; nous distinguons trois cas suivant la hauteur du potentiel.

1-Hauteur peu élevée : $\lambda_0 < (\varepsilon - m)$, q est réel

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^2, \mathcal{T} = \frac{4\kappa}{(1+\kappa)^2}, \mathcal{R} + \mathcal{T} = 1, \tag{4.66}$$

i.e que la reflexion et la transmission sont partielles et que la probabilité totale est conservée.

2-Hauteur moyenne : $(\varepsilon - m) < \lambda_0 < (\varepsilon + m)$, $q = i\beta$ est purement imaginaire

$$\mathcal{R} = 1 \text{ and } \mathcal{T} = 0, \mathcal{R} + \mathcal{T} = 1. \tag{4.67}$$

i.e. que la réflexion est totale et que rien n'est transmis. La probabilité totale se conserve également.

3-Hauteur élevée : $\lambda_0 > (\varepsilon + m)$, q réel et négatif

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2, \mathcal{T} = \frac{4\kappa}{(1-\kappa)^2}, \mathcal{R} - \mathcal{T} = 1. \tag{4.68}$$

Il y a toujours conservation de la probabilité mais le coefficient de transmission est $\mathcal{T}<0$ et le coefficient de réflexion est $\mathcal{R}>1$. Ce qui correspond au fameux paradoxe de Klein qui peut être résolu en introduisant des antiparticules génèrant un courant négatif se propageant vers la droite.

Comme la densité dans les deux régions sont égales à

$$\begin{cases} \bar{\rho}_I = \left\{ \left(1 + \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right) \left(1 + |B|^2\right) + \left(1 - \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right) \left(Be^{-2ipx} + B^* e^{2ipx}\right) \right\} \\ \bar{\rho}_{II} = \left\{ 1 + \left| \frac{q}{(\varepsilon-\lambda_0)+m} \right|^2 \right\} |C|^2 \, e^{i(q-q^*)x} \end{cases}, \tag{4.69}$$

et au point x=0 on a $\bar{\rho}_I\,(x=0) = \bar{\rho}_{II}\,(x=0)$ i.e. que la continuité à x=0 est bien satisfaite.

Revenons au système de coordonnées (y,t) : les courants à gauche et à droite de la barrière de potentiel sont respectivement

$$\begin{cases} \mathcal{J}_I = \frac{2p\left(1-|B|^2\right)}{\varepsilon+m} + v \left\{ \left(1 + |B|^2\right) \left(1 + \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right) + \left(1 - \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right) \left(Be^{-2i\lambda p(y-vt)} + B^* e^{2i\lambda p(y-vt)}\right) \right\} \\ \mathcal{J}_{II} = \left\{ \frac{q+q^*}{(\varepsilon-\lambda)+m} + v \left(1 + \left| \frac{q}{(\varepsilon-\lambda_0)+m} \right|^2\right) \right\} |C|^2 \, e^{i\lambda(q-q^*)(y-vt)} \end{cases}, \tag{4.70}$$

où le courant dans la région I est la somme de deux courants incident et réflechi

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{inc} = \frac{2p}{\varepsilon+m} + v\left(1 + \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right) \\ |\mathcal{J}_{ref}| = |B|^2 \left(\frac{2p}{\varepsilon+m} - v\left(1 + \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)\right) - v\left(1 - \frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)\left(Be^{-2i\lambda p(y-vt)} + B^* e^{2i\lambda p(y-vt)}\right) \end{cases}. \tag{4.71}$$

A simple calcul permet d'obtenir respectivement les coefficients de reflexion et de transmission en considerant les cas suivants

a) $V_0 < (\varepsilon - m)\sqrt{1-v^2}$, q est réel

$$\begin{cases} \mathcal{R} = \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^2 - 2v\frac{1-\kappa}{1+\kappa} \left\{ \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \frac{1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m} + v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} + \frac{1-\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m} + v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} \cos\left(2\lambda p\,(y - vt)\right) \right\} \\ \mathcal{T} = \frac{4}{(1+\kappa)^2} \frac{\frac{2q}{\varepsilon-\lambda_0+m} + v\left(1+\frac{q^2}{(\varepsilon-\lambda_0+m)^2}\right)}{\frac{2p}{\varepsilon+m} + v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} \end{cases}, \tag{4.72}$$

et nous avons $\mathcal{R} + \mathcal{T}|_{y=vt} = 1$ à $y = vt$. si $v = 0$, $\mathcal{R} = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}$, $\mathcal{T} = \frac{4\kappa}{1+\kappa}$. La condition $\mathcal{R} + \mathcal{T}$ =1 est satisfaite.

b) $(\varepsilon - m)\sqrt{1-v^2} < V_0 < (\varepsilon + m)\sqrt{1-v^2}$, $q = i\beta$ est imaginaire

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R} = 1 - 2v\left\{\frac{1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} + \frac{1-\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)}\left[\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cos\left(2\lambda p\left(x-vt\right)\right) - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\sin\left(2\lambda p\left(y-vt\right)\right)\right]\right\} \\ \mathcal{T} = \frac{4v}{1+\alpha^2}\frac{1+\frac{\beta^2}{(\varepsilon-\lambda_0+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)}e^{-2\beta\lambda(y-vt)} \end{array}\right., \tag{4.73}$$

avec $\alpha = \frac{\beta}{p}\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon-\lambda_0+m}$. Nous pouvons vérifier que $\mathcal{R}+\mathcal{T} = 1$ à la limite au $y = vt$. Nous remarquons que le coefficient de transmission $\mathrm{T}|_{y=vt} \neq 0$ et $\mathrm{R}|_{y=vt} < 1$. Si $v = 0$, $\mathcal{T} = 0$ et $\mathcal{R} = 1$.

c) $V_0 > (\varepsilon + m)\sqrt{1-v^2}$, q est réel. Les coefficients $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ prennent la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R} = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2 - 2v\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\left\{\frac{1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} + \frac{1-\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)}\cos\left(2\lambda p\left(y-vt\right)\right)\right\} \\ \mathcal{T} = \frac{4}{(1-\kappa)^2}\frac{\frac{2q}{\varepsilon-\lambda+m} - v\left(1+\frac{q^2}{(\varepsilon-\lambda_0+m)^2}\right)}{\frac{2p}{\varepsilon+m}+v\left(1+\frac{p^2}{(\varepsilon+m)^2}\right)} \end{array}\right., \tag{4.74}$$

nous avons encore $\mathcal{R} - \mathcal{T}|_{y=vt} = 1$ et dans ce cas il y a paradoxe qui s'explique par l'introduction de l'antiparticle(positron).

Si $v = 0$, $\mathcal{R} = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2$, $\mathcal{T} = \frac{4\kappa}{(1-\kappa)^2}$, R−T= 1.

Finalement, la fonction d'onde totale dans les deux regions est

$$\begin{aligned} \psi_{\rightarrow} &= e^{\frac{\varphi}{2}\sigma^1}\left\{\theta\left(vt-x\right)\left[\begin{pmatrix}1\\ \frac{p}{\varepsilon+m}\end{pmatrix}e^{i\lambda[-(\varepsilon+vp)t+(p+v\varepsilon)y]} + \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\begin{pmatrix}1\\ \frac{-p}{\varepsilon+m}\end{pmatrix}e^{-i\lambda[(\varepsilon-vp)t+(p-v\varepsilon)y]}\right]\right. \\ &\quad \left. +\theta\left(x-vt\right)\frac{2}{1+\kappa}\begin{pmatrix}1\\ \frac{q}{\varepsilon-\lambda_0+m}\end{pmatrix}e^{i\lambda[-(\varepsilon+v(q-v\lambda_0))t+(q+v(\varepsilon-\lambda_0))y]}\right\}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

4.3.3 Particule de Dirac sans masse à (2+1)D

Considérons le problème d'une particule relativiste de spin 1/2 sans masse (2+1)D en présence d'un potentiel step. L'équation de Dirac s'écrit

$$\left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V_0\theta\left(r-vt\right)\right) - \sigma^2\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^1\frac{\partial}{\partial y}\right]\Psi\left(t,x,y\right) = 0, \tag{4.76}$$

où $V_0\theta\left(r-vt\right)$ est le potentiel step à (2+1)D qui se déplace avec une vitesse v constante et où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance radiale. Il est naturel de passer aux coordonnées polaires définies par

$$x = r\cos\phi; y = r\sin\phi. \tag{4.77}$$

Comme les dérivées partielles se transforment comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{array} \right. , \tag{4.78}$$

l'équation de Dirac devient alors

$$\left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V_0\theta\left(r - vt\right)\right) - \left(\sigma^2\cos\phi - \sigma^1\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma^1\cos\phi + \sigma^2\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\Psi\left(t, r, \phi\right) = 0. \tag{4.79}$$

La solution à chercher est de la forme

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\sigma^2\sigma^1\frac{\phi}{2}}\Psi', \tag{4.80}$$

et sachant que

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\sigma^2\sigma^1\frac{\phi}{2}}\sigma^1 e^{\sigma^2\sigma^1\frac{\phi}{2}} = \sigma^1\cos\phi - \sigma^2\sin\phi \\ e^{\sigma^2\sigma^1\frac{\phi}{2}}\sigma^2 e^{\sigma^2\sigma^1\frac{\phi}{2}} = \sigma^2\cos\phi + \sigma^1\sin\phi \end{array} \right. , \tag{4.81}$$

l'équation de Dirac devient

$$\left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V_0\theta\left(r - vt\right)\right) - \sigma^2\frac{\partial}{\partial r} + \sigma^1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\Psi'\left(t, r, \phi\right) = 0. \tag{4.82}$$

Grâce à $e^{i\ell\phi}\left(\ell = 0, \pm 1, \pm 2, ..\right)$, l'opérateur $L_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}$ est éliminé et avec la transformation de Lorentz $(r, t) \rightarrow (R, \tau)$ et aprés le changement défini par $\Psi' \rightarrow \bar{\Psi}$

$$\Psi' \rightarrow e^{i\ell\phi - iv\lambda_0\int^R \theta(u)du}e^{\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\sigma^2}\bar{\Psi}\left(t, R\right), \tag{4.83}$$

où $\tanh\varphi = v$. L'équation de Dirac prend la nouvelle forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda_0\theta\left(R\right)\right) - \sigma^2\frac{\partial}{\partial R} + i\sigma^1 U_\ell\left(R, \tau\right)\right]\bar{\Psi}_\ell\left(t, R\right) = 0 \\ U_\ell\left(R - v\tau\right) = \frac{\ell}{\lambda\left|R - v\tau\right|} \end{array} \right. , \tag{4.84}$$

où maintenant le potentiel step est independandu temps, en notant qu'il y a apparition d'un terme dépendant du temps de type Coulomb. L'équation (4.84) ne peut ētte separée à cause du fait que U_ℓ depend de R et de τ.

Cependant, pour $v << 1$, $\frac{\ell}{\lambda|R-v\tau|} \simeq \frac{\ell}{\lambda|R|} + v\tau\frac{\ell}{\lambda R^2}$ (avec $\ell \neq 0$), l'équation avec step +Coulomb est soluble en principe, le terme dependant du temps $v\tau\frac{\ell}{\lambda R^2}$ peut être consideré comme une perturbation.

Par contre pour, $\ell = 0$, l'équation

$$\left[\sigma^3\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda_0\theta\left(R\right)\right) - \sigma^2\frac{\partial}{\partial R}\right]\bar{\Psi}_{\ell=0} = 0, \tag{4.85}$$

est analytiquement soluble. Dans le système (R, τ) la solution est

-Région 1

$$\bar{\Psi}_I = \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{ipR} + B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-ipR}\right], \tag{4.86}$$

-Région 2

$$\bar{\Psi}_{II} = C\frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{iqR}, \tag{4.87}$$

où $p^2 = \varepsilon^2$ et $q^2 = (\varepsilon - \lambda_0)^2$

La continuité de $\bar{\psi}\left(x\right)$ en $R = 0$ nous donne le système

$$\begin{cases} 1 + B = C \\ 1 - B = C \end{cases}, \tag{4.88}$$

dont la solution est : $B = 0$ et $C = 1$

Pour des particuled de masse nulle, cette condition implique qu'il n'y a pas de reflexions pour le potentiel step. Alors, la fonction d'onde dans les deux regions est

$$\bar{\Psi}_{\ell=0} = \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\sqrt{2}}\left[\theta\left(-R\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{ipR} + \theta\left(R\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{iqR}\right], \tag{4.89}$$

et en calculant les courants associes aux ondes incidente et transmise on obtient :

$$\bar{\mathcal{J}}_{inc} = 1 \text{ et } \bar{\mathcal{J}}_{tra} = 1. \tag{4.90}$$

Ainsi, nous pouvons voir que $\mathcal{R} = 0$ et $\mathcal{T} = 1$ $\forall v$ .Dans le système (r, φ, t) , la fonction d'onde devient

$$\Psi_{\ell=0} = \frac{e^{-i\lambda\varepsilon(t-vr)+\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} \\ e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \left[\theta\left(vt - r\right) e^{i\lambda p(r-vt)} + \theta\left(r + vt\right) e^{i\lambda(q-v\lambda_0)(r-vt)}\right]. \tag{4.91}$$

4.4 Conclusion

Pour conclure, nous avons dans ce chapitre considéré une particule de spin 0 et 1/2 en présence d'un potentiel mobile. Dans la 1ère section nous avons donné une méthode qui est basée sur des transformations de variable pour ramener le potentiel mobile à un potentiel fixe. Dans la $2^{ème}$ section, nous avons considéré le potentiel mobile avec une forme particulière step et avons solutionné l'équation de KG et Dirac. La solution a été obtenue sous forme analytique et les coefficients de réflexion et de transmission ont été donnés pour la forme particulière step.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans cette thèse qui traite essentiellement des équations de Klein Gordon (spin 0) et Dirac (spin 1/2), nous pouvons voir qu'elle se compose de trois chapitres :

Dans le chap.2, il a été considéré le problème d'une particule relativiste de spin 0 et 1/2 soumise à l'action d'un champ de type non abélien ayant des propriétés similaires à celle de l'onde plane de Volkov mais avec en plus des générateurs de groupe SU(N). En déterminant la fonction de Green d'abord par l'introduction d'une identité pour réduire l'espace dans lequel s'effectue le mouvement et ensuite par l'utilisation de relations de fermeture pour éliminer les opérateurs positions et impulsions, il a été trouvé que la probabilité est nulle dans les deux cas de spin 0 et 1/2.i.e. qu'il n'y a pas de processus de création de paires pour le type de champ non abélien considéré. La probabilité étant déterminée via la partie imaginaire de l'action effective.

Dans le chap.3, le processus de création de paires de particules est également considéré dans le cadre de la géométrie non commutative et plus particulièrement pour un espace-temps non commutatif. L'action effective a été déterminée pour les deux formes de champ particulières qui sont les suivantes :

- onde plane de type Volkov $A_\mu \left(kx - \frac{k\theta p}{2} \right)$

-champ électromagnétique de tenseur constant.

La probabilité de création de paires de particule trouvée égale à zéro ($\mathcal{P}_{cre} = 0$) pour l'onde plane dépendant du produit kx et obéissant à la condition de jauge de Lorentz et également pour un champ magnétique constant. Mais pour un champ électrique il y a modification de la probabilité puisqu'elle a été trouvée non nulle.

Enfin le chap.4 a été consacré aux systèmes dépendant du temps c'est à dire que le mouvement dans un espace temps à (1+1) dimensions d'une particule relativiste de spin 0 et 1/2 soumise à l'action du potentiel mobile de forme $V(y - vt)$ est étudié

A titre d'illustration, le potentiel mobile est pris de forme simple "step", ce qui nous a permis de solutionner les équations de Klein Gordon et Dirac et d'extraire analytiquement les coefficients de transmission et de réflexion à partir des fonctions d'onde.

Bibliographie

[1] E. Schrodinger : Phy, Rev. 28, 6 (1926).

[2] P. A. M. Dirac : Proceedings of the Royal Society of London A 117, 610 (1928) et 118, 351 (1928).

[3] P. A. M. Dirac : Proceedings of the Royal Society of London A 133, 60 (1931).

[4] C. D. Anderson : Science 76, 238 (1932).

[5] C. D. Anderson : Physical Review 43, 491 (1933).

[6] J. Schwinger : Phys. Rev. 82, 664 (1951).

[7] B. Hamil and L. Chetouani : Int. J. Theor. Phys. 53, 482 (2014).

[8] Bilel Hamil and Lyazid Chetouani : ISRN High Energy Physics, Volume 2014 (2014), Article ID 375695

[9] A. A. Grib, S. G. Mamayev, and V .M .Mostepanenko,Vacuum Quantum Effects in Strong Fields (Friedmann Lab. Publ.,St. Petersburg 1994).

[10] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko : Gen. Rel. Grav. 7, 535 (1976).

[11] S. W. Hawking and J. B. Hartle : Phys. Rev. D 13, 2188 (1976).

[12] D. M. Chitre and J. B. Hartle : Phys. Rev D 16, 251 (1977).

[13] S. Biswas, A. Shaw and B. Modak : Int. J. Mod. Phys. 15, 3717 (2000).

[14] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar : Class. Quant. Grav. 12, 1591 (1995).

[15] A. I. Nikishov and Y. I. Ritus : Zh. Eksp. Teor. Fiz. 52,1707 (1967) (Sov. Phys.-JETP 25, 1135 (1967)).

[16] A. I. Nikishov : JETP 30, 660 (1970).

[17] S. Coleman : Phys. Lett. B 70,59 (1977).

[18] C. Itzykson and J. B. Zuber, Quantum Field Theory, (Mc Graw- Hill, N.Y 1980).

[19] E. Brezin and C. Itzyksqn : Phys. Rev. D 2, 7 (1970).

[20] A.V. Koshelkin : Phy. Lett. B 683, 205 (2010).

[21] H. S. Snyder : Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[22] C. N. Yang : Phys. Rev. 72, 874 (1947).

[23] K. Li1 and S.Dulat : Eur. Phys. J. C 46, 825 (2006).

[24] H. Benzair, M. Merad and T. Boudjedaa : Modern Physics Letters A 28, 1350144 (2013).

[25] B. Mirzaa, R. Narimani, M. Zarei : Eur. Phys. J. C 48, 641 (2006).

[26] S. Bourouaine and A. Benslama : J. Phys. A : Math. Gen. 38, 7389 (2005).

[27] D.M. Gitman and V.G. Kupriyanov : Eur. Phys. J. C 54, 325 (2008).

[28] C. Alexandrou, R. Rosenfelder, A. W. Schreiber : Phys. Rev. A 59, 1762 (1999).

[29] L.Kang : Modern Physics Letters A 20, 2165 (2005).

[30] D. Gitman and S. I. Zlatev : Phys. Rev. D 55, 7701(1997).

[31] W. Cruz : J. Phys. A : Math. Gen. 30, 5225(1997).

[32] C.C. Gerry : Phys. Rev. A 312721 (1985) .

[33] M. Berry : Proc. R. Soc. London A 392, 45 (1984) ; C.M. Cheng and P.C.W. Fung : J. Phys. A : Math. Gen. 21, 4115 (1988) .

[34] C.A. Mead : Rev. Mod. Phys. 64, 51 (1992).

[35] R.E. Prange and S.M. Girvin (Eds.) : The Quantum Hall Effect, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[36] R. P. Feynman and A. R. Hibbs,Quantum Mechanics and Path Integrals (New York, Mc Graw Hill, 1965)

[37] L. Chetouani ,L. Guechi,T. F. Hammann : Phys. Rev. A 40, 1157 (1989)

[38] H. G. Oh, H. R. Lee, T. F. George, and C. I. Um, Phys. Rev. A 39, 5515 (1989)

[39] J.Y. Ji, J. K. Kim, and S. P. Kim : Phys. Rev. A 51, 4268 (1995)

[40] C. J. Efthimiou and D. Spector : Phys. Rev. A 49, 2301 (1994)

[41] B. F. Samsonov : J. Phys. A : Math. Gen. 33, 591(2000)

[42] H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld : J. Math. Phys. 10, 1458 (1969)

[43] I.A. Pedrosa : Phys. Rev. A 55 3219 (1997)

[44] K.H. Yeon, K.K. Lee, C.I. Um, T.F. George and L.N. Pandey : Phys. Rev. A 48, 2716(1993)

[45] K.H. Yeon, D.H. Kim, C.I. Um, T.F. George and L.N. Pandey : Phys.Rev. A 55, 4023(1997)

[46] I.Guedes : Phys. Rev. A 63, 034102 (2001).

[47] M. Feng : Phys. Rev. A 64, 034101 (2001).

[48] J. Bauer : Phys. Rev. A 65, 036101 (2002).

[49] R.R. Landima nd I. Guedes : Phys. Rev. A 61,054101 (2000).

[50] A.S. de Castro and A. de Sousa Dutra : Phys. Rev. A 67, 054101 (2003).

[51] M. Maamache and H. Lakehal : Europhys. Lett. 67 ; 695 (2004).

[52] E. Fermi : Phys. Rev. 75, 1169(1949).

[53] S. W. Doescher and M. H. Rice : Am. J. Phys. 37, 1246(1969).

[54] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and D. E. Nikonov : J. Math. Phys. 34, 3391(1993).

[55] A. Munier, J.R. Burgan, M. Feix, E. Fijalkow : J. Math. Phys. 22, 1219 (1981).

[56] A. J Makowski, S.T. Dembinski : Phys. Lett. A 154, 217 (1991).

[57] A. J Makowski, P. Peplowski : Phys. Lett. A 163, 143 (1992).

[58] Toshiharu SAMURA and Masato OHMUKAI : arxiv.quant-ph/0411113v1(2004).

[59] G. T. Moore : J. Math. Phys. 11, 2679 (1970).

[60] P. C. W. Davies and S. A. Fulling : Proc. R. Soc. Lond. A .356, 237 (1977).

[61] L. H. Ford and A. Vilenkin : Phys. Rev. D 25, 2569 (1982).

[62] W. R. Walker : Phys. Rev. D 31, 767 (1984).

دراسة خلق أزواج من الجسيمات و المعادلات النسبية المتعلقة بالزمن

ملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة خلق أزواج من جسيمات عزمها اللمفي يساوي الصفر و $1/2$ تحت تأثير حقل خارجي هدا الاعتماد على طريقة شوينغر لحساب احتمال خلق أزواج من الجسيمات و أيضا قمنا بدراسة معادلة ديراك و كلاين تحت تأثير كمون متعلق بالزمن.

درسنا خلق أزواج من الجسيمات تحت تأثير كمون خارجي لا تبادلي ولقد برهنا باستعمال طريقة بسيطة أن احتمال خلق أزوج من الجسيمات يساوي الصفر في حالة حقل خارجي لا تبادلي على شكل أمواج كهرومغناطيسية مستوية.

في إطار الهندسة اللاتبدلية قمنا بدراسة خلق أزواج من جسيمات تحت تأثير نوعين من التفاعل : أمواج كهرومغناطيسية مستوية و حقل كهرومغناطيسي ثابت و منتظم , في حالة أمواج كهرومغناطيسية مستوية أو حقل مغناطيسي بينا آن احتمال خلق أزواج معدوم آما في حالة حقل كهربائي فهو غير معدوم .

في الأخير , بإدخال تحويلات لورنتز استطعنا تحويل معادلة ديراك و كلاين المتعلقة بالزمن إلى معادلات غير متعلقة بالزمن, وقمنا بحساب معامل الانعكاس و معامل الانتقال في حالة حاجز كموني متحرك.

الكلمات المفتاحية :

حقل لاتبدلي, هندسة لاتببدلية , تحويلات لورنتز.

PROCESS OF PAIR CREATION OF PARTICLE AND TIME DEPENDENT RELATIVISTIC EQUATIONS

Abstract:
In this work, we are interested to the process of pair creation of spin 0 and 1/2 particle from the vacuum, by using the Schwinger technique based on the determination of the effective action and also on the obtaining of solution of Klein Gordon and Dirac equations when the potential has a dependency in vt, v being the velocity v (constant).
In the process of pair creation, first a field of wave type Volkov and non-abelian with N generators (SU (N)) is considered in order to calculate analytically and algebraically the probability by using simple transformations. We have established for this form of interaction, that it is impossible to create particle pairs for the two cases of spin 0 and 1/2.
In the framework of the geometry of the non-commutative space-time, the same creation process is reconsidered with as interactions, the plane wave and the constant and uniform electromagnetic field. As a result, it was shown that the plane wave has no influence on the creative process and that the probability with a constant electric field is modified and that the magnetic field, only, can not create particle pairs.
Finally, thanks to the invariance of Lorentz transformation the Klein Gordon and Dirac equations with a potential moving with a constant velocity v, it has been shown that solutions are obtained from these same equations with a static potential (not mobile) i.e. independent of time. As a special case, the form of potential "step" was considered mobile.
Key words: non-abelian field, pair creation, no-commutative space, Lorentz transformation

Résumé
Dans ce travail, nous nous sommes intéressé au processus de création de paires de particule de spin 0 et 1/2 à partir du vide, en utilisant la technique de Schwinger basée sur la détermination de l'action effective et également sur l' obtention de la solution des équations de Klein Gordon et de Dirac lorsque le potentiel a une dépendance en vt, v étant la vitesse v (constante).
Pour le processus de création de paires, un champ de Volkov de type onde plane non-abélien ayant N générateurs (groupe SU(N)) est d'abord considéré pour calculer analytiquement et de manière algébrique la probabilité en utilisant de simples transformations. Nous avons alors établi pour cette forme d'interaction qu'il est impossible de créer des paires de particule pour les deux cas de spin 0 et 1/2.
Dans le cadre de la géométrie de l'espace-temps non-commutatif, le même processus de création est reconsidéré avec comme interaction, l'onde plane ainsi que le champ électromagnétique constant et uniforme. Comme résultat, il a été montré que l'onde plane n'a aucune influence sur le processus de création et que la probabilité avec un champ électrique constant se modifie et que le champ magnétique seul ne peut créer des paires de particule.
Enfin, grâce à l'invariance dans une transformation de Lorentz des équations de Klein Gordon et de Dirac avec un potentiel se déplaçant avec une vitesse v constante, il a été montré que l'obtention des solutions s'effectue à partir de ces mêmes équations avec un potentiel statique (non mobile) c'est à dire indépendant du temps. Comme cas particulier, le potentiel de forme "Step" mobile a été considéré.

Mots clés: champ non-abélien, espace-temps non commutatif, transformations de Lorentz, potentiel mobile.