

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat en Sciences en Physique

Spécialité : Physique Energétique

Option : Photothermique

THEME

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES TRANSFERTS DE CHALEUR ET DE MASSE AU
SEIN D'UN ESPACE ANNULAIRE ELLIPTIQUE D'AXE HORIZONTAL**

PAR

BOURAS ABDELKARIM

Soutenue le : 17/12 /2015

Devant le jury :

Présidente :	Mme	A. CHAKER	Professeur	Université Frères Mentouri Constantine
Rapporteur :	Mr	M. DJEZZAR	Professeur	Université Frères Mentouri Constantine
Examineurs :	Mr	N. BELLEL	Professeur	Université Frères Mentouri Constantine
	Mr	M. GUELLAL	Professeur	Université Sétif 1
	Mr	H. NAJI	Professeur	Université d'Artois Lille-France
	Mr	A. RAHMANI	M.C.A	Université d'Oum El Bouaghi

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur DJEZZAR Mahfoud, Professeur à l'Université Frères Mentouri Constantine de m'avoir guidé tout le long de cette recherche, et de n'avoir jamais cessé de me prodiguer ses conseils et suggestions.

Je tiens à remercier sincèrement Madame CHAKER Abla, Professeur à l'Université Frères MENTOURI Constantine qui a bien voulu présider mon jury d'examen et ce malgré ces nombreuses occupations.

Je remercie vivement Monsieur NAJI Hassane, Professeur à l'Université d'Artois à Lille, Nord de la France qui, en m'accueillant dans son laboratoire, durant mon stage, a contribué à la finalisation de mon travail, je le remercie également d'avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je tiens à remercier également Monsieur BELLEL Nadir, Professeur à l'Université Frères MENTOURI Constantine, Monsieur GUELLAL Messaoud Professeur à l'Université de Sétif 1 et Monsieur RAHMANI Ahmed, M.C.A à l'Université d'Oum El Bouaghi qui en acceptant de lire cette thèse et d'apporter leurs remarques pertinentes me font l'honneur de faire partie de mon jury d'examen.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à l'élaboration de ce travail.

Nomenclature

Lettres latines

A_1, A_2	Grands axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur, [m]
B_1, B_2	Petits axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur, [m]
C	Concentration, [kg.m ⁻³]
C_p	Chaleur massique à pression constante, [J.kg ⁻¹ K ⁻¹]
D_h	Longueur caractéristique, [m]
e_1	Excentricité de l'ellipse interne
e_2	Excentricité de l'ellipse externe
\bar{g}	Accélération de la pesanteur, [m.s ⁻²]
h	Coefficient métrique, [m]
H	Coefficient métrique adimensionnel, [-]
Le	Nombre de Lewis, [-]
N	Rapport des forces de flotabilité, [-]
Nu	Nombre de Nusselt local, [-]
Nu_a	Nombre de Nusselt moyen, [-]
P	Pression au sein du fluide, [N/m ²]
Pr	Nombre de Prandtl, [-]
Ra	Nombre de Rayleigh, [-]
Sh_a	Nombre de Sherwood, [-]
Sh_a	Nombre de Sherwood moyen, [-]
T	Température du fluide, [K]
ΔT	Ecart de température, [K]
ΔC	Ecart de concentration, [kg.m ⁻³]
t	Temps, [s]
V_η, V_θ	Composantes de la vitesse suivant θ et η , [m.s ⁻¹]
x, y	Coordonnées cartésiennes, [m]

Lettres grecques

α	angle d'inclinaison du système, [$^{\circ}$]
α_T	Diffusivité thermique, [m^2s^{-1}]
α_S	Diffusivité massique, [m^2s^{-1}]
β_T	Coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]
β_C	Coefficient d'expansion solutale, [m^3kg^{-1}]
Γ_{Φ}	Coefficient de diffusion
η, θ, z	Coordonnées elliptiques, [m]
λ	Conductivité thermique du fluide, [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$]
ν	Viscosité cinématique, [m^2s^{-1}]
ρ	Masse volumique du fluide, [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]
Ψ	Fonction de courant, [m^2s^{-1}]
ω	Vorticité, [s^{-1}]
τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses

Indices

i	Intérieur
o	Extérieur.
η	Suivant la coordonnée η
θ	Suivant la coordonnée θ
+	Paramètres adimensionnels

Liste Des Tableaux

Tableau (3.1) : Les sources et les coefficients de diffusion des variables Φ	32
Tableau (4.1) : Variation des nombres de Nusselt moyens extérieur et intérieur en fonction du nombre de nœuds	51
Tableau (4.2) : Validation du code avec les nombres de Nusselt moyens interne et externe pour $Pr = 0.70$, $Le = 1.0$, $N = 0$, et $e_2 = 0.4$	51
Tableau (4.3) : Validation du code avec le nombre de Nusselt moyen interne pour $Pr = 0.70$, $Le = 1.0$ et $N = 0$	52

Liste des Figures

Figure 2.1: Section droite du système étudié	19
Figure 2.2 : Représentation schématique des coordonnées elliptiques	24
Figure3.1: Domaine physique et domaine de calcul	30
Figure 3.2: Représentation schématique du volume de contrôle	30
Figure3.3: Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le Maillage	37
Figure4.1: Isothermes et lignes de courant pour $Ra=50$, $Pr=0.702$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha = 0^\circ$	53
Figure4.2: Isothermes et lignes de courant pour $Ra = 10^3$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha = 0$	53
Figure 4.3: Isothermes et lignes de courant pour $Ra = 10^4$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha = 0$	54
Figure 4.4: Isothermes et lignes de courant pour for $Ra = 2.10^4$ and $Pr=0.702$, $e_1 = 0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha = 0$	54
Figure 4.5: Isothermes et lignes de courant pour $Ra = 10^2$, $e_1 = 0.8$, $e_2=0.4$, $\alpha = 0^\circ$ (a) $Pr = 0,25$ et (b) $Pr = 0,7$	55
Figure 4.6: Isothermes et lignes de courant pour $Ra = 4.10^4$, $e_1 = 0.8$, $e_2=0.4$, $\alpha = 0^\circ$ (a) $Pr = 0,25$ et (b) $Pr = 0,7$	56
Figure 4.7: L'effet de nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen pour $Ra=10^4$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha = 0^\circ$	57
Figure 4.8: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations de $Ra = 10^3$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha = 0^\circ$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0,86$ et $e_2 = 0,688$	59
Figure 4.9: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations de $Ra = 10^5$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha = 0^\circ$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0,86$ et $e_2 = 0,688$	59
Figure 4.10: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations de $Ra = 10^6$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha = 0^\circ$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0,86$ et $e_2 = 0,688$	60
Figure 4.11: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations de $Ra=2.10^6$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha = 0^\circ$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0,86$ et $e_2 = 0,688$	60
Figure 4.12: Variation du nombre de Nusselt local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr = 0.8$, $Ra = 10^4$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2=0.6$	61
Figure. 4.13: Variation du nombre de Nusselt local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr = 0.8$, $Ra = 10^5$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $Pr = 0.702$, $e_1 = 0,86$ et $e_2 = 0,688$	61
Figure 4.14: Variation du nombre de Sherwood local sur les parois de l'enceinte intérieure et	62

extérieure pour $Pr = 0.8$, $Ra = 10^4$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2 = 0.6$

Figure 4.15: Variation du nombre de Sherwood local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr = 0.8$, $Ra = 10^5$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2 = 0$ 63

Figure 4.16: variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Rayleigh thermique avec $Pr = 0.7$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2 = 0.6$ 63

Figure 4.17: variation des nombre de Nusselt et Sherwood moyens en fonction du nombre de Prandtl avec $Ra = 10^5$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2 = 0.6$ 64

Figure 4.18: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 0.3$, $Ra = 10^3$, $Le = 2$, $N = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$ et $e_2 = 0.6$ 65

Figure 4.19: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 1.0$, $Ra = 10^3$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$, $e_2 = 0.6$, $Le = 2$ et $N = 1$ 65

Figure 4.20: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 0.3$, $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$, $e_2 = 0.6$, $Le = 2$ et $N = 1$ 66

Figure 4.21: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 1.0$, $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$, $e_2 = 0.6$, $Le = 2$ et $N = 1$ 66

Figure 4.22: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 0.3$, $Ra = 6 \cdot 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$, $e_2 = 0.6$, $Le = 2$ et $N = 1$ 67

Figure 4.23: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr = 1$, $Ra = 6 \cdot 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $e_1 = 0.8$, $e_2 = 0.6$, $Le = 2$ et $N = 1$ 67

Figure 4.24: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^3$, $\alpha = 0^\circ$, $e_2 = 0.5$, $Le = 2$ et $N = 1$. a) $e_1 = 0.58$, b) $e_1 = 0.68$, c) $e_1 = 0.74$, d) $e_1 = 0.78$ 74

Figure 4.25: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 5 \cdot 10^3$, $\alpha = 0^\circ$, $e_2 = 0.5$, $Le = 2$ et $N = 1$. a) $e_1 = 0.58$, b) $e_1 = 0.68$, c) $e_1 = 0.74$, d) $e_1 = 0.78$ 76

Figure 4.26: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $e_2 = 0.5$, $Le = 2$ et $N = 1$. a) $e_1 = 0.58$, b) $e_1 = 0.68$, c) $e_1 = 0.74$, d) $e_1 = 0.78$ 78

Figure 4.27: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 5 \cdot 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $e_2 = 0.5$, $Le = 2$ et $N = 1$. a) $e_1 = 0.58$, b) $e_1 = 0.68$, c) $e_1 = 0.74$, d) $e_1 = 0.78$ 82

Figure 4.28: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $e_2 = 0.5$, $Le = 2$ et $N = 1$. a) $e_1 = 0.58$, b) $e_1 = 0.68$, c) $e_1 = 0.74$, d) $e_1 = 0.78$ 82

Figure 4.29: l'effet des conductivités équivalentes moyennes sur la paroi interne 83

Figure 4.30: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 0.5$, $e_2 = 0.6$, $e_1 = 0.8$ et $N = 1$ 84

Figure 4.31: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 1$, $e_2 = 0.6$, $e_1 = 0.8$ et $N = 1$ 84

Figure 4.32: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=2$, $e_2=0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	85
Figure 4.33: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=3$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	85
Figure 4.34: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=4$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	86
Figure 4.35: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=5$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	86
Figure 4.36: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=10$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	87
Figure 4.37: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=20$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	87
Figure 4.38: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=50$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	88
Figure 4.39: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=100$, $e_2 = 0.6$, $e_1= 0.8$ et $N=1$	88
Figure 4.40: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 0$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	90
Figure 4.41: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	91
Figure 4.42: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 5$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	91
Figure 4.43: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 10$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	92
Figure 4.44: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 20$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	92
Figure 4.45: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= 50$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	93
Figure 4.46: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= -1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	93
Figure 4.47: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N= -5$, $e_2 = 0.6$ et $e_1= 0.8$	94
Figure 4.48: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$,	94

$N = -10$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$

Figure 4.49: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 1$, $N = -20$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 95

Figure 4.50: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 1$, $N = -50$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 95

Figure 4.51: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = 0$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 96

Figure 4.52: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = 1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 96

Figure 4.53: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = 5$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 97

Figure 4.54: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = 5$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 97

Figure 4.55: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = -1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 98

Figure 4.56: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = -5$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 98

Figure 4.57: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 5$, $N = -10$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 99

Figure 4.58: Variation du nombre de Nusselt moyen avec le rapport de poussée N pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 100

Figure 4.59: Variation du nombre de Sherwood moyen avec le rapport de poussée N pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le = 1$, $e_2 = 0.6$ et $e_1 = 0.8$ 100

Table des Matières

Nomenclature

Table Des Figures

Liste Des Tableaux

Introduction Générale 01

Chapitre 1 Revue Bibliographique

1.1. Généralités 04

1.1.1. Lois fondamentales de la dynamique 04

1.1.2. Approximation de Boussinesq 04

1.2. La convection naturelle 05

1.2.1. La convection naturelle dans des enceintes fermées 05

1.2.2. La convection naturelle entre deux cylindres 09

1.2.3. La convection naturelle double diffusive 11

Chapitre 2 Formulation mathématique

2.1. Introduction 16

2.2. Modèle physique 16

2.3. Equations générales 17

2.4. Hypothèses simplificatrices 17

2.4.1. Equation de continuité 17

2.4.2. Equation de quantité de mouvement (ou équation de Navier-Stokes) 18

2.4.3. Equation de l'énergie 18

2.4.4. Equation de la masse 18

2.5. Formulation indicielle 18

2.6. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes 19

2.7. Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement 20

2.8. Introduction des coordonnées elliptiques	21
2.9. Adimensionnement des équations de conservation	22
2.10. Coefficients d'échange de la chaleur	24
2.10.1. Valeur locale des nombres de Nusselt et de Sherwood:	24

Chapitre 3 Formulation Numérique

3.1. Introduction	25
3.2. La méthode des volumes finis	25
3.2.1. Volume élémentaire d'intégration	26
3.2.2. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable Φ dans le volume de contrôle	27
3.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie	32
3.3.1. Discrétisation des Conditions aux limites	35
3.4. Discrétisation de l'équation d'espèces	35
3.4.1. Discrétisation des Conditions aux limites	37
3.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	37
3.5.1. Discrétisation des Conditions aux limites	39
3.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant	40
3.6.1. Discrétisation des Conditions aux limites	41
3.7. Discrétisation des composantes de la vitesse	41
3.8. Technique de sous relaxation	41
3.9. Processus du calcul	42

Chapitre 4 Résultats et Discussions

4.1. Introduction	45
4.2. Etude du maillage	45
4.3. Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature	46
4.4. Première partie (convection naturelle)	47

4.4.1. Effet du nombre de Rayleigh	47
4.4.2. Effet de nombre de Prandtl	49
4.4.2.1. Effet du nombre de Prandtl sur les lignes de courant et isothermes	49
4.4.2.2. Effet du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen	51
4.5. Deuxième partie (convection double diffusive)	53
4.5.1. L'influence du nombre de Rayleigh	53
4.5.2. La variation du nombre de Nusselt local sur la paroi intérieure et extérieure	56
4.5.3. Effet du nombre de Rayleigh sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens	59
4.5.4. Effet du nombre de Prandtl sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens	60
4.5.5. Effet du nombre de Prandtl sur les isolignes	60
4.5.6. L'influence de l'excentricité interne	64
4.5.7. Effet du nombre de Lewis	82
4.5.8. Influence du rapport des forces de poussée N	88
4.5.8. a) : Pour $Le=1$	89
4.5.8. b) : Pour $Le=5$	95
4.5.9. Effet du rapport de poussée N sur les nombre de Nusselt et Sherwood moyens :	98
Conclusion	100
Annexe	101
Références Bibliographiques	110
Résumés	116

Introduction

Introduction

Le point de départ de ce manuscrit est le phénomène de la convection. Ce phénomène étant très vaste nous ne pourrions pas présenter tous ses aspects. Nous allons nous restreindre premièrement à la convection thermique. Mais qu'est-ce que la convection thermique? Ce phénomène a été découvert au XVIIIème siècle par le physicien français Bénard.

Le transfert de chaleur entre des parois et un fluide est un processus par lequel de l'énergie est échangée sous forme de chaleur grâce au gradient de température qui peut exister entre ces deux milieux. Comme le gradient de pression, le gradient de température va donner naissance à une nouvelle force (poussée d'Archimède) dont il faudra tenir compte dans l'établissement du bilan total des forces appliquées à une particule fluide en mouvement. En fait la différence de température aura pour conséquence une modification de la densité déclenchant ainsi un mouvement au sein du fluide du fait de la poussée d'Archimède. Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, s'appelle "convection". Le mouvement du fluide peut être naturel ou forcé.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection naturelle, convection forcée et convection mixte.

La convection naturelle:

Le phénomène de convection naturelle thermique apparaît spontanément, sous le seul effet des différences de masse volumique résultantes des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (le champ gravifique,...)

La convection forcée:

La convection est dite forcée quand il existe une cause de mouvement autre que les variations de températures du fluide, cette cause étant seule à prendre en compte, en raison de son importance relative.

La convection mixte:

La convection mixte est le résultat de la superposition d'un écoulement de convection forcée et d'un écoulement de convection naturelle. Lorsque les écoulements de convection forcée et de convection naturelle vont dans le même sens, on est en présence d'un écoulement de convection mixte favorable. Dans le cas contraire, on assiste à un écoulement de convection mixte défavorable.

Depuis une vingtaine d'années, un autre type de transport convectif en milieux fluides attire l'attention des chercheurs, c'est la convection **double diffusive ou thermosolutale** qui s'exprime en présence de deux composants différents, pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés, le gradient de concentration est induit par le gradient thermique.

Le phénomène de la double diffusion a été découvert la première fois par Stommel [1].

L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années, à la convection naturelle thermosolutale est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles tels que : le dessalement d'eau de mer, la distillation, la climatisation, le séchage du bois, le refroidissement des composants électroniques, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, les opérations de dessalement de l'eau de mer les procédés de séchage, l'isolation thermique, les écoulements géophysiques, la croissance cristalline, ...etc.

La résolution d'un problème type de convection double diffusive en cavité fermée se ramène à prédire les champs de température, de concentration et de vitesse ainsi que l'intensité de l'écoulement en fonction des divers paramètres du problème. Il est également important de prédire les taux de transferts thermique (nombre de Nusselt) et massique (nombre de Sherwood) correspondants.

Parmi les travaux concernant les enceintes fermées la plus grande majorité a été consacrée à la géométrie annulaire, formée par l'espace compris entre deux sphères ou deux cylindres horizontaux.

Cependant, dans cette étude nous traiterons la convection naturelle thermosolutale dans des espaces annulaires elliptiques,

Contenu de la thèse :

L'objectif du présent travail est d'étudier la convection naturelle double diffusive dans un espace annulaire, délimité par deux tubes elliptiques horizontaux et confocaux, orienté selon un angle α par rapport à l'horizontale. Les deux parois cylindriques interne et externe sont maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$ et aux concentrations C_1 et C_2 avec $C_1 > C_2$. Cet espace annulaire est parcouru par un fluide newtonien et incompressible. A notre connaissance, cette configuration n'a pas encore été étudiée (en convection double diffusive). Le code de calcul mis au point pourra donc aisément être appliqué à ce cas.

La présentation de cette thèse est articulée de la façon suivante:

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection thermique et/ou solutale en cavité fermée, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

Dans le deuxième chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur et de masse à l'aide de la formulation fonction de courant-vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq, et présentons une analyse théorique utilisant les coordonnées elliptiques bien adaptées à la géométrie du système.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisation des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développés. Les équations de type parabolique décrivant l'écoulement sont discrétisées à l'aide de la méthode des volumes finis [2,3] tandis que l'équation de la fonction de courant qui est de type elliptique l'est à l'aide d'un développement en série de Taylor, les équations ainsi obtenues

sont résolues par une méthode itérative à coefficients de sous-relaxation successives (Successive Under Relaxation) [4].

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par la présentation d'une étude du maillage, ensuite nous validons les résultats de ce code de calcul avec des résultats de la littérature. Les résultats numériques obtenus sont présentés sous formes des lignes de courant, des contours de température et de concentrations, ainsi que des nombres locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood. L'effet de l'excentricité, des nombres de Prandtl et de Sherwood sur les transferts thermique et massique sont également étudiés.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus. Quelques recommandations pour les études futures sont finalement émises.

Chapitre 1

Revue Bibliographique

Revue Bibliographique

1.1. GENERALITES

1.1.1. Lois fondamentales de la dynamique

Les équations générales qui régissent la convection naturelle sont celles de la mécanique des fluides. La différence essentielle qui fait l'originalité de ce phénomène concerne la présence de forces volumiques faisant intervenir le terme de gravité \vec{g} dans la formulation du problème.

Les équations de départ sont donc : correspondant respectivement à l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité), à l'équation de conservation de quantité de mouvement (ou équations de Navier-Stokes), à l'équation de la chaleur (ou équation de l'énergie) et à l'équation de masse (ou équation de concentration).

Pour formaliser la convection, il faut décrire le couplage des champs de température, de concentration, de pression et de vitesse.

En 1903, à l'époque même où Bénard et Rayleigh s'intéressaient à la convection, Boussinesq propose une simplification de ces équations de conservation de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique.

1.1.2. Approximation de Boussinesq

Cette approximation suppose que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendantes de la température et de la pression, et que le fluide est incompressible. Elle néglige aussi les variations de densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , et considère que la masse volumique ρ dépend linéairement de la température et de la concentration, ce qui se traduit par :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)]$$

où :

T et C : représentent respectivement la température et la concentration du fluide en un point du système.

T_0 , C_0 et ρ_0 : représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence.

β_T : est le coefficient d'expansion thermique (constant).

β_C : est le coefficient d'expansion solutal (constant).

Avec :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_T$$

$$\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_C$$

Pour la plupart des fluides β_T est positif à température et pression ordinaire, à l'exception de l'eau au-dessous de 4^o C, par contre β_C peut être négatif ou positif en fonction de la contribution des composantes de diffusion à la densité de fluide.

A titre d'exemple, dans le cas où l'eau est considérée comme un solvant et le sel comme un soluté, le coefficient β_C est négatif car le sel contribue à l'augmentation de la densité de l'eau. Par contre dans le cas d'un mélange air-vapeur d'eau, le coefficient β_C est positif car l'air humide est moins dense que l'air sec.

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à ρ_0 . Le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des deux parois étant négligées). Nous admettons que le problème est bidimensionnel.

1.2. La convection naturelle :

La convection naturelle est un phénomène important de la mécanique des fluides. Elle est généralement due à des variations de la masse volumique causées par une distribution non uniforme de la température et de la concentration des espèces dans un mélange. Pour cette raison on parle de convection thermique et de convection d'origine solutale. Les gradients de température et de concentration peuvent agir selon le cas, ensemble ou en opposition, donnant ainsi naissance à des comportements dynamiques intéressants. Deux variantes sont possibles : pour la convection thermosolutale, les gradients de chaleur et de concentration sont tous les deux imposés sur les frontières du système, tandis que dans le problème de Soret, le gradient de concentration est induit par le gradient thermique. Ce dernier phénomène est connu sous le nom de l'effet Soret (1880).

1.2.1. La convection naturelle dans des enceintes fermées

L'étude de la convection naturelle dans des enceintes fermées a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales en raison de leur importance dans de nombreuses applications d'ingénierie: les isolants thermiques, cryogénie, systèmes de stockage thermique, refroidissement de l'électronique, des échangeurs de chaleur, etc.

Akrouf [6] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité avec un gradient vertical en concentration et un gradient horizontal en température. Ils ont étudié l'effet du nombre de poussée N qui caractérise le rapport des forces de volume d'origine solutal et thermique pour $Pr=7.0$, $Le =100$ et $A=2.0$ sur les transferts.

Yang et al [7] ont analysé la réponse de l'écoulement dans une cavité verticale de grande extension dont l'une de ses parois verticales est soumise à une température qui varie périodiquement dans le temps. Pour des fréquences faibles et élevées, ils ont observé que les caractéristiques de l'écoulement s'accordent bien avec celles de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale soumise aux mêmes conditions thermiques. Calcagni et al [8] ont effectué une étude expérimentale de la convection naturelle laminaire d'air dans une cavité bidimensionnelle et rectangulaire avec un chauffage localisé sur la paroi inférieure et un refroidissement symétrique à travers deux côtés verticaux. La paroi supérieure était maintenue adiabatique. Hasnaoui et al [9] ont étudié numériquement la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée soumise par le bas à une variation sinusoïdale de la température pour un nombre de Prandtl égal à 0,71 (air) et pour des nombres de Rayleigh variant de 10^5 à 10^6 . Ho et al [10] ont étudié la convection naturelle dans des enceintes rectangulaires verticale avec un chauffage partiel des parois, numériquement et expérimentalement pour dévoiler surtout l'influence du rapport d'aspect de l'enceinte. La simulation numérique a été menée pour un rapport d'aspect variant de 1 à 10 et le nombre de Rayleigh modifié dans la plage comprise entre 10^3 et 10^7 . De la simulation, ils ont trouvé que l'effet du rapport d'aspect de l'enceinte sur le nombre moyen de Nusselt tend à diminuer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Novembre et al [11] ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée avec chauffage à travers la paroi inférieure et refroidissement le long d'un côté. T. Fusegi et al [12] ont utilisé une simulation numérique d'une cavité différentiellement chauffée et ont déterminé la corrélation suivante : $Nu=0,163.Ra^{0.282}$. Les équations de Navier Stokes d'un fluide de Boussinesq contenu dans une cavité verticale différentiellement chauffée admettent pour une certaine valeur du nombre de Rayleigh une solution numérique instationnaire quasi périodique dont la nature est explicitée par Quere et al [13]. Cuesta et al [14] ont mené une étude numérique d'écoulement de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique aux parois parfaitement conductrices pour déterminer les structures d'écoulement avec le nombre de Rayleigh entre 7.10^3 et 10^8 . Pallares et al. [15] ont effectué une étude numérique tridimensionnelle de la convection naturelle dans une cavité cubique chauffée par le bas, pour trois nombres de

Prandtl $Pr = 0,71$, 10 et 130. Les six parois sont considérés comme rigides et immobiles. Ces travaux numériques mettent en évidence la complexité des structures présentes dans l'écoulement. Dans le cas de parois latérales adiabatiques, et pour $Ra_H \leq 6 \times 10^4$ et $Pr \leq 130$, ils ont observé la présence de 7 structures d'écoulement dont la stabilité intrinsèque dépend des nombres de Prandtl et Rayleigh. Pour des parois latérales conductrices, seulement 3 des 7 structures sont présentes en régime laminaire. Massimo Corcione [16] ont fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans des enceintes rectangulaires, remplies d'air et soumises à un gradient de température vertical, en considérant plusieurs conditions thermiques pour les parois latérales. Un modèle numérique développé spécifiquement basé sur l'algorithme SIMPLER est utilisée pour la solution des équations de Navier Stokes, les simulations sont effectuées pour plusieurs valeurs du rapport d'aspect « largeur/hauteur » de l'enceinte variant entre 0.66 et 8 et le nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^6 . L. Adjlout et al. [17] ont examiné numériquement la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée inclinée à paroi verticale ondulée, et différentiellement chauffée. Les essais ont été réalisés pour différents angles d'inclinaison, les amplitudes et les nombres de Rayleigh tandis que le nombre de Prandtl est maintenu constant. Deux configurations géométriques ont été utilisées à savoir une et trois ondulations. Les résultats obtenus montrent que l'ondulation de la paroi chaude influe sur le débit et le taux de transfert de chaleur dans la cavité. Le nombre de Nusselt moyen diminue comparant avec la cavité carrée. La tendance du transfert de chaleur local est ondulée. La fréquence de ce dernier est différente de la fréquence de la paroi ondulée. B. Abourida et al [18] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée soumise à différents modes de chauffage par les côtés. La température de la paroi chauffée varie de façon sinusoïdale dans le temps, alors que celle de la paroi opposée est maintenue constante ou varie sinusoïdalement dans le temps. Les paramètres de l'étude sont l'amplitude ($0 \leq a \leq 0,8$) et sa période τ ($0,001 \leq \tau \leq 1$), le nombre de Rayleigh ($10^4 \leq Ra \leq 10^6$) et le nombre de Prandtl ($Pr = 0,7$). Pour des combinaisons adéquates de ces paramètres, la variation des deux températures imposées offre la possibilité de contrôler le transfert thermique à travers la paroi froide de la cavité. B. Calgani et al [19] ont étudié expérimentalement et numériquement le transfert de chaleur en convection naturelle dans des enceintes carrées chauffées par-dessous et refroidies à partir des parois latérales. Leur étude est concentrée sur l'effet de l'augmentation de la longueur de la source sur le développement de l'échange de chaleur. Les études numérique et expérimentale montrent un transfert conductif pour $Ra \leq 10^4$ (nombre de Rayleigh), alors que le phénomène

convectif se développe complètement pour $Ra \approx 10^5$, et le nombre de Nusselt local Nu est évalué à la surface de la source de chaleur et présente une allure symétrique près des sources de chaleur. Q.H. Deng et al [20] ont étudié expérimentalement et numériquement l'influence du nombre de Rayleigh et de la dimension de la partie chauffée sur le transfert de chaleur dans une enceinte carrée et des enceintes rectangulaires.

Pour les cavités d'air inclinées, El. Sherbiny [21] insiste sur l'importance de l'angle d'inclinaison de la couche d'air et les conséquences de ce paramètre sur le phénomène de convection naturelle. Pour le transfert de chaleur, les corrélations qu'il a établies dépendent de l'angle d'inclinaison de la cavité ainsi que du nombre de Rayleigh. Elles sont valables pour une valeur du rapport de forme égal à 20 et pour un angle d'inclinaison variant de 120° à 180° . El Sherbiny, a développé d'autres corrélations pour des angles d'inclinaison variant de 60° à 90° . A. Bairi et al [22] ont fait une étude numérique et expérimentale de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée inclinée pour deux rapports de forme $A=0.75$ et 1.5 . Ils ont analysé le taux de transfert de chaleur obtenu pour une large gamme des paramètres suivants :

- La valeur du nombre de Rayleigh comprise entre 10 et 10^8 .
- L'angle d'inclinaison variant entre 0° et 360° .

Ils ont ensuite comparé les résultats numériques obtenus avec des résultats expérimentaux et ont proposé une corrélation qui présente une déviation maximale de plus ou moins 6% entre les résultats expérimentaux et numériques. Ghassemi et al [23] proposent une étude sur l'effet de l'angle d'inclinaison sur l'écoulement et le transfert thermique d'un fluide dans une cavité carrée différentiellement chauffée où les parois verticales sont soumises à différentes températures tandis que les parois formant un angle avec l'horizontale sont adiabatiques, les équations gouvernant la convection naturelle sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis. Tang [24] a étudié l'effet du rapport d'aspect sur la convection naturelle dans l'eau, près de sa densité maximum. Il a conclu que le rapport d'aspect a un impact fort sur les modèles d'écoulement et les distributions de température dans les enceintes rectangulaires.

Pour les cavités semi-cylindriques peu de travaux ont été réalisés, nous pouvons citer les travaux de K.C. Karki et al.[25] qui ont étudié par voie numérique la convection naturelle laminaire où des solutions sont obtenues pour trois zones chauffées différemment suivant l'axe axial de la cavité. Les résultats sont présentés pour les deux valeurs du nombre de Grashof $Gr = (5 \times 10^3 \text{ et } 5 \times 10^4)$ et les trois valeurs du nombre de Reynolds ($Re = 10, 20, 50$), pour un nombre de Prandtl égal 0,7.

1.2.2. La convection naturelle entre deux cylindres

Une revue bibliographique sur la convection naturelle dans une cavité cylindrique est donnée par Kuehn et al [26], [27] qui ont présenté les résultats numériques et expérimentaux pour ces configurations sur une large gamme de nombres de Rayleigh, nombre de Prandtl, diamètres et excentricités. Torrance et al [28] ont étudié numériquement la convection d'air dans une enceinte cylindrique verticale, induite par un petit point chaud centralement situé sur le fond. Des solutions ont été obtenues pour des nombres de Grashof jusqu'à 4×10^{10} . A. Benkhelifa et al [29] ont étudié numériquement la convection naturelle en régime permanent dans une cuve cylindrique. Cette enceinte, de rapport $H/R=1$, est chauffée au niveau de ses parois latérale et supérieure et est refroidie au niveau de sa paroi inférieure. L'écoulement est supposé bidimensionnel (axisymétrique) et laminaire. Le fluide considéré est de l'eau. Le modèle numérique développé a été résolu par l'algorithme SIMPLE en utilisant un schéma d'approximation de la "loi de puissance".

L'influence du nombre de Rayleigh, sur le transfert thermique et le champ dynamique a été examinée. Farouk et al [30] ont calculé la convection mixte et naturelle d'un cylindre circulaire isotherme dans un canal vertical bidimensionnel avec des parois adiabatiques ($\beta=0.1667$) dans le régime d'écoulement stationnaire. M. GUESTAL [31] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire de l'hydrogène liquide (nombre de Prandtl $Pr = 1.29$) dans une enceinte cylindrique horizontale avec chauffage partiel à travers la partie supérieure du cylindre. La longueur de la source a été variée de 10 à 50% du périmètre du cylindre. La partie supérieure non chauffée de la paroi de l'enceinte a été considérée comme isotherme. Ils ont utilisé la méthode numérique des volumes finis pour la discrétisation des équations différentielles partielles du modèle mathématique. Le nombre de Rayleigh varie dans l'intervalle 10^3-10^6 . Rahnama et al [32] ont étudié numériquement l'effet des ailettes sur la convection naturelle turbulente entre deux cylindres horizontaux concentriques en présence d'ailettes radiales attachées sur la paroi intérieure du cylindre intérieur. Les équations de conservation sont résolues par la méthode des différences finies, pour un nombre d'ailettes sélectionné entre 2 à 12. Deux configurations différentes sont étudiées pour le cas de deux et quatre ailettes radiales pour révéler l'effet de la hauteur d'ailette et la configuration à ailettes. On peut regrouper leurs résultats dans les points suivants : l'arrangement d'ailettes n'a pas un effet considérable sur le transfert de la chaleur, bien que la prédiction de son effet sur l'écoulement et les champs de température sont remarquables pour le cas de quatre ailettes, et des hauteurs d'ailettes plus élevées causent un certain blocage qui s'effectue sur le

mouvement de fluide, pour toutes les configurations, les résultats indiquent que les nombres de Nusselt locaux augmentent avec une augmentation du nombre de Rayleigh. Lee et Minkowycz [33], ont étudié expérimentalement les caractéristiques du transfert thermique de deux cylindres coaxiaux, l'un des deux étant tournant, dans le domaine des nombres de Taylor $(Ta)_m$ allant de 10^3 à 2×10^7 , avec des nombres de Reynolds axiaux Re compris entre 50 et 1000. Les mesures de transfert massique de naphthaline sont effectuées pour obtenir les coefficients de transfert thermique. Quatre configurations de systèmes coaxiaux ont été choisies pour étudier les phénomènes fondamentaux qui ont lieu dans les espaces annulaires. Les surfaces des cylindres constituant l'espace annulaire sont toutes deux lisses ou l'une lisse et l'autre axialement rainurée.

El-Sherbiny et al [34] ont étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle laminaire dans des couches liquides annulaires entre deux cylindres isothermes horizontaux concentriques de températures différentes. L'étude numérique est faite pour un nombre de Prandtl $0.01 \leq Pr \leq 10^3$ et le nombre de Rayleigh $10^2 \leq Ra \leq 10^6$ et pour le rapport des rayons $RR=r_o/r_i$, $2 \leq RR \leq 10$. Les résultats montrent que la valeur maximale de la vitesse est proche des parois. Une diminution continue le long du rayon est représentée avec des changements plus élevés près des parois des cylindres. Aucun autre changement n'a été remarqué pour $Pr \geq 10$.

1.2.3. La convection naturelle double diffusive

La convection naturelle double diffusive est le processus qui se produit lorsque le flux est généré par la flottabilité en raison de la température et des gradients simultanés de concentration. Ces flux présentent des structures complexes qui interagissent avec les mécanismes de transport de masse et de chaleur qui y règne, et dont une compréhension en profondeur est de plus en plus recherchée.

Ils peuvent être trouvés dans un large éventail de domaines tels que les systèmes électroniques de refroidissement, le séchage, l'électrochimie, les procédés de revêtement, floteur de la fabrication du verre, le chauffage des bâtiments, le stockage de l'énergie, le transport d'un contaminant dans les sols saturés, de la géophysique et ainsi de suite...

La quête d'une meilleure compréhension (expérimentalement et / ou numériquement) de la double diffusion dans une cavité fermée est en cours depuis longtemps et a donné lieu à une recherche fructueuse. Il est à noter que la plupart des études s'intéressant à la convection double diffusive ont porté soit sur des cavités rectangulaires ou cylindrique avec la présence

d'obstacles intégrés à l'intérieur. Pour ces enceintes, l'attention a été portée aux paramètres pertinents, tels que le rapport d'aspect de l'enceinte, l'angle d'inclinaison, les conditions aux limites, le paramètre de flottabilité, etc. La plus grande partie de ces études est bidimensionnelle et est essentiellement de nature numérique. Au-delà de la solution purement diffusive, la plupart des auteurs ont trouvé à l'état stable soit la structure unicellulaire ou la structure multicellulaire, en fonction des paramètres de contrôle.

Boussaid [35] a étudié le transfert naturel de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale chauffée par la paroi inférieure et refroidie par la paroi inclinée supérieure. Les équations relatives sont résolues par la méthode des volumes finis. Les résultats montrent des configurations d'écoulement dépendant de l'inclinaison de la paroi supérieure. Ainsi, pour de faibles angles d'inclinaison, l'écoulement est du type Rayleigh-Bénard : par contre, pour les fortes inclinaisons, l'écoulement s'apparente plutôt au cas de la cavité rectangulaire chauffée différentiellement. L'influence des sollicitations thermosolutales, de la nature des espèces en présence et de la géométrie de la cavité sur les taux de transfert de chaleur et de masse en fonction des sollicitations thermosolutales, de la nature des espèces en présence et de la géométrie de la cavité est aussi analysée. L'augmentation de l'allongement de la cavité conduit à celle des taux de transferts de chaleur et de masse. La diminution du nombre de Lewis augmente ces mêmes taux. La sollicitation solutale est de même nature que la sollicitation thermique. K.Ghorayeb [36] a étudié la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire de parois horizontales isolées verticales soumises à des gradients horizontaux de température et de concentration différents, dans cette étude le rapport des forces de volume solutal et thermique est égale à -1. Ils ont étudié la stabilité linéaire de la solution d'équilibre pour une cellule rectangulaire jusqu'au cas limite de la cellule d'extension infinie. M. Mamou et al [37] ont présenté une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide à double diffusion contenue dans une cavité rectangulaire soumise à une chaleur uniforme le long des côtés verticaux avec : $1 \leq Ra_T \leq 10^7$; $0 \leq N \leq 10^5$; $10^{-3} \leq Le \leq 10^3$. Krishnan [38] a étudié numériquement la transition entre le régime diffusif pur et le régime convectif, ainsi que la transition entre le régime stationnaire unicellulaire et des régimes oscillants dans le cas d'une cavité carrée, pour un nombre de Prandtl égal à 1 et un nombre de Lewis égal à 3.161. C. Béghein et al [39] ont étudié la convection thermosolutale, en régime stationnaire, dans une cavité carrée remplie d'air, soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration, en examinant l'influence du rapport N sur les taux de transfert de chaleur et de masse, et l'influence du nombre de Lewis sur le mouvement du fluide, dans les cas

d'écoulements à force de poussée thermique dominante ($Ra_T=10^7$, $Ra_S=0$) et à force de poussée solutale dominante ($Ra_T=0$, $Ra_S=10^7$). Le nombre de Lewis varie de 0.3 à 5. Shipp et al [40] ont étudié l'influence des nombres de Rayleigh thermique et Lewis sur la structure de l'écoulement et les valeurs moyennes de Nu et Sh pour une cavité annulaire remplie de fluide binaire. D. Akrouf et al [41] ont étudié numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une cavité, rectangulaire. Les parois horizontales de l'enceinte sont chauffées et refroidies et un gradient de concentration vertical est maintenu. Ils ont étudié essentiellement le cas d'une cavité de rapport d'aspect égal à deux dans un milieu fluide, pour un nombre de Lewis égal à 100. Le nombre de Grashof varie entre 10^3 et 10^5 . S. Benissaad et al [42] ont effectué une étude numérique tridimensionnelle de la convection naturelle bidiffusive transitoire dans une enceinte rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration horizontaux. Avec un intervalle du Nombre de Grashof solutal entre 3×10^5 et 5×10^5 . L'écoulement est entraîné par les forces des poussées, thermique et solutale opposées. Les résultats montrent le caractère tridirectionnel de l'écoulement près des parois isothermes et le caractère tridirectionnel de l'écoulement près des parois verticales adiabatiques. La variation du nombre de Grashof solutal a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulement et plusieurs bifurcations entre ces écoulements. Yan et al [43] ont étudié les effets combinés des forces d'Archimède de diffusion thermique et massique dans un écoulement en convection naturelle en anneaux verticaux. Ces auteurs se sont intéressés aux effets de la température des parois mouillées, du rapport des rayons et de l'humidité relative de l'air à l'entrée et du facteur de forme sur les nombre de Nusselt et de Sherwood. Ghachem et al. [44] ont effectué une analyse numérique de la convection naturelle double diffusive et de la production d'entropie dans un séchoir solaire en trois dimensions pour évaluer les effets du rapport de flottabilité pour des gradients de température et de concentration dans le cas opposé, avec un intérêt particulier pour les aspects tridimensionnels. Teamah et al [45] ont étudié numériquement un écoulement à double diffusion de convection naturelle dans une enceinte rectangulaire inclinée en présence de champ magnétique et d'une source de chaleur. Les auteurs ont conclu que :l'angle d'inclinaison affecte les forces de flottabilité et le champ magnétique réduit le transfert de chaleur et de circulation de fluide en raison de l'effet de retard de la force de corps électromagnétique, aussi, Teamah et al [46] ont effectué numériquement une étude sur la convection naturelle à double diffusion dans une enceinte rectangulaire avec couvercle isolé mobile. Chen et al [47] ont effectué une étude de la convection à double diffusion en anneau vertical jusqu'à $Ra=10^7$. Ils ont étudié l'influence de

divers paramètres essentiels tels que le rapport des forces de flottabilité, le rapport d'aspect, et le rapport de rayon. Papanicolaou et al [48] ont calculé numériquement la double diffusion de la convection naturelle dans une enceinte trapézoïdale asymétrique avec parois verticales de température et de gradients de concentration. Chen et al. [49] ont étudié la convection à double diffusion turbulente. Les auteurs ont utilisé le modèle de Boltzmann avec Ra jusqu'à 10^{11} et $0,1 \leq N \leq 2$. Ils ont constaté que la relation de loi de puissance entre Nusselt (Nu), le rapport des forces de flottabilité (N) et le nombre de Rayleigh (Ra) existe encore au régime turbulent. Tout récemment, Nikbakhti et al [50] ont analysé numériquement le transfert de chaleur et de masse pour l'air contenu dans une cavité rectangulaire avec des murs partiellement thermiquement actifs. Kuznetsov et al [51] ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection double diffusive en régime transitoire dans une enceinte en trois dimensions ayant des parois d'épaisseur finies remplies d'air et soumises à la température et aux gradients de concentration. Au point de vue 3D, certains travaux ont été effectués sur un flux de convection naturelle à double diffusion à l'intérieur des enceintes [52-56], pour ne citer que quelques-uns.

Beaucoup de travaux publiés ont été élaborés concernant la convection dans des cavités à paroi mobiles. Parmi ces travaux nous citons : Sheu et al [57] qui ont mené une étude numérique détaillée sur les trois dimensions couvercle cavité. Al-Amir et al. [58] ont étudié la convection mixte stable dans une cavité de couvercle axé carré sous les effets combinés de flottabilité de diffusion thermique et de masse. Ils ont observé que le transfert de chaleur et de masse sont améliorés pour les faibles nombres de Richardson. Mohamed et al [59] ont étudié numériquement l'écoulement de convection mixte double diffusive dans l'enceinte rectangulaire avec isolant à couvercle déplacé en présence des gradients de température et de concentration horizontaux. Récemment, Maiti [60] a mené une étude numérique de production combinée de chaleur et de masse dans une cavité carrée à couvercle axé soumis à des gradients de température et de concentration. Il a montré que les paramètres opérationnels, à savoir Re , Gr_t , Gr_c ont des effets importants sur la structure de l'écoulement, et les champs de transfert de chaleur et de masse. Al-Amiri et al. [61] ont étudié aussi numériquement le transfert de chaleur par convection double diffusive dans un anneau cylindrique horizontalement. Dans ce travail, ils se sont intéressés aux effets de l'amplitude et de la fréquence sur le nombre de Nusselt moyen. Simitev [62] a mené une étude de la convection naturelle à double diffusion dans un anneau cylindrique rotatif avec des bouchons coniques.

Une étude numérique effectuée par Al-Amiri et al [63] sur la convection double diffusive dans un anneau horizontal. Le cylindre intérieur est chauffé plus que le cylindre extérieur qui a été mis en rotation dans le sens anti-horaire pour introduire l'effet de la convection forcée. Ils ont analysé les effets des différents paramètres tels que le nombre de Rayleigh thermique, la flottabilité, le nombre de Lewis, et l'amplitude sur les caractéristiques d'écoulement et de transfert de chaleur. Teamah [64] a mené une simulation numérique de la convection mixte laminaire double diffusive d'un anneau horizontal à deux dimensions, le cylindre intérieur tourne dans le sens antihoraire pour montrer l'effet de convection forcée. Les résultats obtenus pour les deux nombres moyens de Nusselt et Sherwood ont été corrélés en termes de nombre de Lewis, nombre de Rayleigh thermique et le rapport de la flottabilité.

Mais, jusqu'à présent, les études sur les flux de la convection naturelle pour les cavités cylindriques elliptiques sont très rares, en effet, on cite entre autres celle de Djeddar et al [65], [66], qui ont simulé le cas de la convection naturelle dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques confocaux, en utilisant la formulation en variables primitives, ils ont pu déceler des écoulements multicellulaires, pour certaines géométries quand le nombre de Grashof augmente, ceci pour les trois conditions thermiques pariétales utilisées.

Elshamy et al [5] ont étudié numériquement la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux et horizontaux, et ont développé des corrélations pratiques. H.C.Topakoglu et al [67] ont étudié analytiquement la convection thermique laminaire et permanente entre deux tubes à sections elliptiques et homofocales dans différentes conditions de chauffage, en utilisant les équations de Navier-Stokes et d'énergie. Ils ont montré que le problème est conditionné par un nombre caractéristique qui est le produit du gradient adimensionnel, longitudinal, uniforme de la température pariétale par le nombre de Péclet. Ils ont obtenu la valeur du nombre de Nusselt pour différentes formes de la section de passage. Abdel-Wahed et.al [68] ont étudié l'écoulement laminaire en développement et le transfert thermique dans un tube elliptique avec un rapport d'axes de 0,5. Le fluide en mouvement est l'air et deux conditions thermiques sont considérées: la première avec le tube à température uniforme et l'autre avec une distribution pariétale de température linéaire dans la direction longitudinale et sans variation transversalement. Les résultats hydrodynamiques sont présentés sous forme d'une séquence de profils de vitesse sur les axes grand et petit, mesurés à différentes distances axiales depuis l'entrée du tube. La chute de pression statique due à l'effet combiné du développement de l'écoulement et du frottement pariétal est aussi étudiée. Sakalis et.al [69] ont mené une étude numérique de l'écoulement incompressible laminaire,

hydrodynamique entièrement développé et thermiquement en développement dans les canaux elliptiques, avec un rapport d'aspect a^* elliptique variant de 0,25 à 0,99 (ce qui est presque un conduit circulaire). La paroi de conduit est soumise successivement à une température constante, puis à une température variable. Pour le conduit isotherme, des résultats numériques obtenus indiquent que le coefficient de frottement augmente avec la diminution du rapport d'aspect a^* . Y.D. Zhu et al. [73] ont mené une étude numérique sur la convection naturelle entre deux cylindres elliptiques confocaux, en utilisant une méthode différentielle quadratique, ils ont trouvé que la position de l'axe majeur du tube elliptique intérieur affecte la distribution des lignes de courant mais légèrement le nombre de Nusselt moyen.

Il est à signaler que les études dans le domaine de la convection naturelle double diffusive dans des espaces elliptiques sont très rares (inexistantes dans notre revue bibliographique).

Dans ce travail, nous présentons une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans un espace annulaire, situé entre deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux.

Chapitre 2

Formulation mathématique

2.1. Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices, les équations mathématiques de ce problème, équation de conservation de masse, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), d'énergie et concentration sous les formes dimensionnelles et adimensionnelles ainsi que les conditions aux limites appropriées.

2.2. Modèle physique

Considérons un espace annulaire, rempli d'un fluide newtonien en l'occurrence de l'air humide, situé entre deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux. Le modèle physique étudié est représenté sur la figure 2.1, les deux parois elliptiques interne et externe sont isothermes maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2 , et aux concentrations C_1 et C_2 , avec $T_1 > T_2$ et $C_1 > C_2$. Comme représenté, les deux cylindres peuvent être inclinés d'un angle φ par rapport au plan horizontal. Le système considéré est bidimensionnel.

Il se produit donc dans l'enceinte une convection naturelle thermique et massique que nous nous proposons d'étudier numériquement.

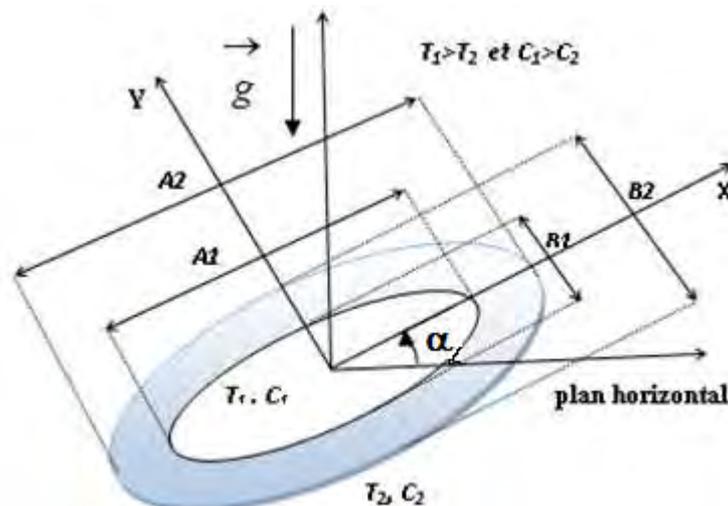


Figure 2.1. Section droite du système étudié

2.3. Equations générales:

Le traitement du problème physique envisagé nécessite l'utilisation d'équations gouvernantes qui sont des équations aux dérivées partielles déduites des principes classiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

- Loi de Lavoisier (principe de conservation de la masse) pour établir l'équation de continuité; (fluide incompressible).

- Deuxième loi de Newton (principe de conservation de la quantité de mouvement) pour établir les équations de quantité de mouvement.
- Loi de conservation d'énergie (Premier principe de la thermodynamique) pour établir l'équation de l'énergie.
- Le principe de conservation de la masse mène à l'équation de concentration.

2.4. Hypothèses simplificatrices

Posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le régime d'écoulement est laminaire et permanent.
- Le fluide binaire est newtonien.
- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
- Le transfert d'énergie par rayonnement est négligé.
- Les interactions entre le transfert de chaleur et de masse (effets de Soret et Dufour) sont négligeables.
- Il n'y a ni réaction chimique ni source de chaleur et de masse.
- Le fluide est incompressible à propriétés physiques constantes et par ailleurs nous supposons être dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

2.4.1. Equation de continuité :

Elle est déduite du principe de conservation de la masse et s'exprime sous la forme:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

2.4.2. Equation de quantité de mouvement (ou équation de Navier-Stokes) :

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement et les causes qui le produisent. Donc, on peut indiquer que le taux de variation de la quantité de mouvement, contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures, qui lui sont appliquées. L'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \operatorname{grad}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (2.2)$$

2.4.3. Equation de l'énergie :

Le premier principe de la thermodynamique indique que le taux de variation de l'énergie est égal au bilan de la quantité de chaleur dégagée par conduction, du travail de compression et de la dissipation visqueuse, ce qui est interprété par l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})T = \alpha_T \nabla^2 T \quad (2.3)$$

2.4.4. Equation de la masse :

Le principe de conservation de l'espèce mène à l'équation de concentration suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})C = \alpha_C \nabla^2 C \quad (2.4)$$

Avec :

ρ : masse volumique.

α_T : diffusivité thermique.

α_C : diffusivité massique.

\vec{V}, \vec{g} : vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.

P : tenseur des contraintes.

T, C : sont respectivement la température et la concentration.

2.5. Formulation indicelle:

Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.5)$$

Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)] g$$

Equation de la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

Equation de la masse:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_C \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (2.8)$$

Avec :

P : pression du fluide.

τ_{ij} : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

$$\tau_{ij} = -\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.9)$$

Où :

μ : Viscosité dynamique du fluide

δ_{ij} : Fonction delta de Kronecker

2.6. Formulation des équations en coordonnées cartésiennes :

Le problème étant bidimensionnel et permanent donc les équations de continuité, du mouvement, de la température et d'espèces s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \sin(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_C \Delta C] + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.11.a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + g \cdot \cos(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_C \Delta C] + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.11.b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_C \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

2.7. Elimination du terme de pression de l'équation du mouvement :

En dérivant les projections de l'équation du mouvement sur les axes ox et oy , respectivement par rapport à y et à x .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \cdot \cos(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_C \Delta C] \right) \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.14.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \cdot \sin(\alpha) [\beta_T \Delta T - \beta_C \Delta C] \right) \\ &+ \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.14.b)$$

Puis en soustrayant l'équation (2.14.a) de (2.14.b) et en utilisant l'équation de continuité ainsi que la définition de la fonction de vorticité ω , nous obtenons:

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \beta_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + g \beta_C \left(\frac{\partial C}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial C}{\partial x} \cos(\alpha) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.15)$$

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.16)$$

2.8. Introduction des coordonnées elliptiques :

Il est commode donc de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites "elliptiques" (η, θ) [69] permettent, précisément dans notre cas d'obtenir ce résultat.

Dans le système de coordonnées (η, θ, z) , les surfaces $\eta = \text{constantes}$ sont des cylindres elliptiques, les surfaces $\theta = \text{constantes}$ sont des cylindres hyperboliques et les surfaces $z = \text{constantes}$ sont des plans parallèles. Comme l'illustre la figure 2.2.

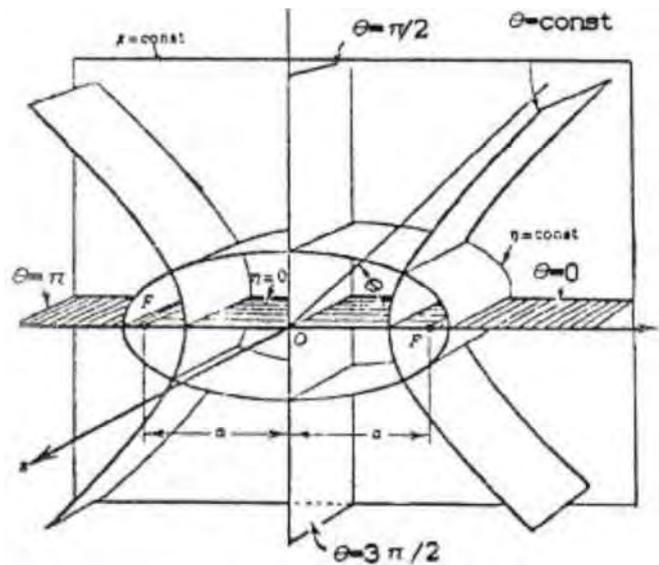


Figure 2.2. Représentation schématique des coordonnées elliptiques

La paroi du cylindre elliptique extérieur est représentée par $\eta = \eta_e = \text{constante}$, celle du cylindre elliptique intérieur par $\eta = \eta_i = \text{constante}$, l'axe des x correspond à $\eta = 0$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes (voir l'annexe) :

$$\begin{aligned} x &= a c h \eta \cos \theta \\ y &= a s h \eta \sin \theta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les équations de continuité, température, mouvement et de concentration s'écrivent respectivement :

$$V_{\eta} \frac{\partial(HV_{\eta})}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial(HV_{\theta})}{\partial \theta} = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{\eta}}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{g\beta_T}{h} \left\{ [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} \\ + \frac{g\beta_C}{h} \left\{ [-F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial C}{\partial \eta} + [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial C}{\partial \theta} \right\} \\ + \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} V_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha_T \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \\ V_{\eta} \frac{\partial C}{\partial \eta} + V_{\theta} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \alpha_C \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{\text{sh}(\eta) \cos(\theta)}{\sqrt{\text{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta)}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{\text{ch}(\eta) \sin(\theta)}{\sqrt{\text{sh}^2(\eta) + \sin^2(\theta)}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En introduisant la fonction de courant ψ , de façon à vérifier identiquement l'équation de continuité, il vient :

$$\begin{aligned} V_{\eta} &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_{\theta} &= - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\omega = - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.24)$$

2.9. Adimensionnement des équations de conservation:

L'emploi des variables réduites dans les équations permet d'approcher de plus près la réalité des phénomènes physiques, car leurs existences et leurs évolutions sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé pour les étudier. On peut dire aussi que ces variables permettent d'obtenir des informations générales, qui jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir, moyennant des grandeurs caractéristiques, des changements de variables.

Les équations du problème sont rendues adimensionnelles à l'aide des grandeurs de référence suivantes :

$D_h=a$ (distance focale définie dans le système de coordonnées elliptiques), longueur caractéristique, choisie arbitrairement.

$$H = \frac{h}{D_h} H = \frac{h}{D_h}, \quad V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{\alpha_T} V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{\alpha_T}, \quad V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{\alpha_T} V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{\alpha_T}, \quad \omega^+ = \omega \frac{D_h^2}{\alpha_T} \omega^+ = \omega \frac{D_h^2}{\alpha_T},$$

$$\Psi^+ = \frac{\Psi}{\alpha_T}, \quad T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad C^+ = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

$$\text{avec: } h = a [\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta]^{1/2} T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} H = \frac{h}{D_h}$$

les équations (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21), deviennent: $V_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (HV_\eta^+) + V_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (HV_\theta^+) = 0$

$$V_\eta \frac{\partial (HV_\eta^+)}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial (HV_\theta^+)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.25)$$

$$H V_\eta^+ \frac{\partial}{\partial \eta} (\omega^+) + H V_\theta^+ \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega^+) = H \text{RaPr} \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

$$+ N \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right)$$

$$HV_\eta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + HV_\theta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.27)$$

$$HV_\eta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \eta} + HV_\theta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 C^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.28)$$

$$\text{Avec :} \quad \omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.29)$$

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques du problème.

Ces paramètres, sont quatre nombres:

Le nombre de Prandtl : $Pr = \nu / \alpha$

Le nombre de Rayleigh : $Ra = (g\beta_T \Delta TH^3) / \alpha \nu$

Le nombre de Lewis : $Le = \alpha_T / \alpha_C$

Le rapport des forces de poussée solutale et thermique: $N = (\beta_C \Delta C) / (\beta_T \Delta T)$

Où les composantes V_η^+ , V_θ^+ de la vitesse adimensionnelles sont définies par :

$$V_n^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \quad (2.30.a)$$

$$V_\theta^+ = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \quad (2.30.b)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont:

- Pour la paroi intérieure chaude ($\eta = \eta_i = \text{cst}$):

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0 \quad (2.31.a)$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.31.b)$$

$$T_1^+ = 1 \text{ et } C_1^+ = 1 \quad (2.31.c)$$

- Pour la paroi extérieure froide ($\eta = \eta_e = \text{cst}$):

$$V_\eta^+ = V_\theta^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} = 0 \quad (2.32.a)$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.32.b)$$

$$T_2^+ = 0 \text{ et } C_2^+ = 0 \quad (2.32.c)$$

2.10. Coefficients de transfert :

2.10.1. Valeurs locales des nombres de Nusselt et de Sherwood:

Il est utile de rappeler que, selon la façon dont les conditions aux limites sur les températures et les concentrations sont associées, soit le cas coopérant ou le cas opposé sont produits. Ici, nous nous sommes limités à l'étude du cas coopérant.

Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sont donnés respectivement par:

$$\text{Nu} = -\frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta = \text{cste}}$$

(2.33)

$$\text{Sh} = - \frac{1}{H} \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cste} \quad (2.34)$$

Les transferts de chaleur et de masse sur les parois sont exprimés par les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens, respectivement, définis par:

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{1}{\theta_{\text{NN}} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{\text{NN}}} \text{Nu} \cdot d\theta \quad \overline{\text{Nu}} = \frac{1}{\theta_{\text{NN}} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{\text{NN}}} \text{Nu} d\theta \quad (2.35)$$

$$\overline{\text{Sh}} = \frac{1}{\theta_{\text{NN}} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{\text{NN}}} \text{Sh} \cdot d\theta \quad (2.36)$$

Après avoir posé les équations, dynamique, thermique et massique, ainsi que les conditions aux limites associées, nous allons résoudre le problème. Pour cela la méthode des volumes finis a été choisie pour la discrétisation des équations. Les questions relatives à la technique de résolution, au traitement des interfaces ainsi que la validation du code de calcul sont abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Formulation Numérique

3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base qui régissent les phénomènes d'écoulements et de transferts thermique et massique de fluides. Ces équations consistent en un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et fortement couplées. La solution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée. On les résout donc numériquement.

Plusieurs méthodes sont disponibles dans la littérature. On peut citer à titre d'exemple :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.

Pour notre cas, nous avons utilisé deux méthodes qui sont très utilisées dans la solution numérique des problèmes de transferts en l'occurrence la méthode des volumes finis et une méthode aux différences centrées, ces deux dernières sont bien exposées par S.V. PATANKAR [70] et par E. NOGOTOV [71], pour la résolution du système d'équations aux dérivées partielles (2.26), (2.27), (2.28) qui sont de type parabolique et leurs conditions aux limites associées, nous avons choisi la méthode des volumes finis par contre pour l'équation (2.29) qui est de type elliptique une méthode aux différences centrées a été adoptée.

3.2. La méthode des volumes finis :

Cette méthode a été utilisée avec succès par plusieurs chercheurs, elle est décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar [70].

Le domaine de calcul dans cette méthode est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volumes de contrôle. La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations aux dérivées partielles de type parabolique, décrites au chapitre précédent, sur chaque volume de contrôle. Chacun de ces derniers englobe un nœud dit "nœud principal",

La figure 3.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.

Nous avons utilisé des pas $\Delta\eta$ et $\Delta\theta$ constants.

Plus précisément, nous posons:
$$\Delta\eta = \frac{\eta_{NI} - \eta_1}{NI - 1} \quad \text{et} \quad \Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN - 1}$$

Avec:

NI : le nombre de points suivant η .

NN : le nombre de points suivant θ .

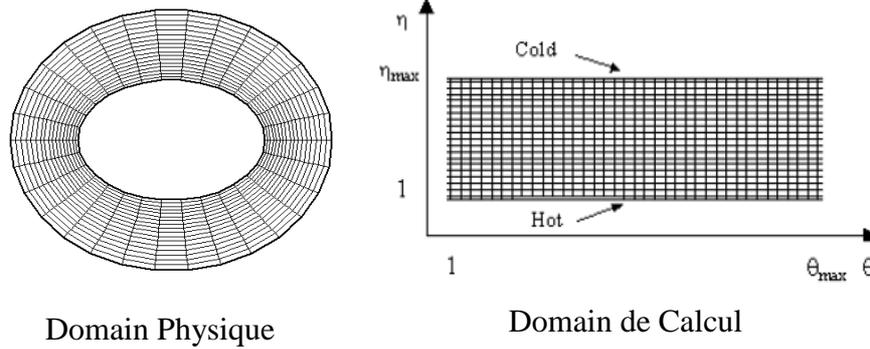


Figure. 3.1. Domaine physique et domaine de calcul

3.2.1. Volume élémentaire d'intégration

On découpe l'espace annulaire selon les directions η et θ en un ensemble de volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" égaux à $\langle H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1 \rangle$. (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité comme épaisseur dans la direction Z). Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales «est», «ouest», «nord» et «sud», sont désignées respectivement, par les lettres, e, w, n et s. Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N et S. Les variables scalaires (vorticité, température, concentration) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis. Donc les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique.

Les nœuds E et N sont pris dans les directions des coordonnées positives de θ et η respectivement et les nœuds W et S dans les sens contraires.

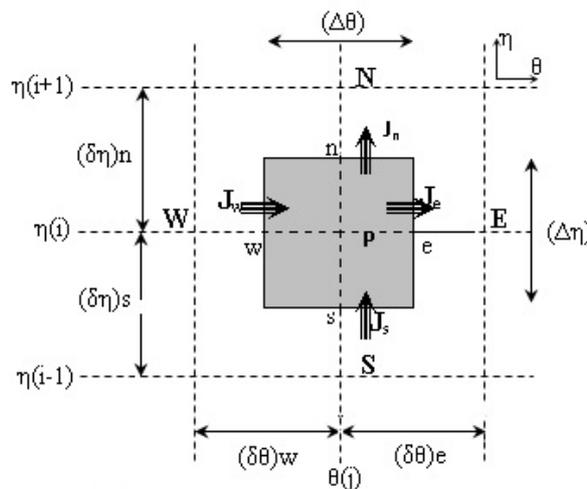


Figure 3.2. Représentation schématique du volume de contrôle

La figure 3.2 représente une volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul, sur cette figure, le volume de contrôle entourant le nœud P est limité par les faces notées w, n, e et s

3.2.2. Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable ϕ dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, nous considérons l'équation de transfert sous sa forme générale.

Pour bien comprendre cette méthode nous considérons d'abord l'équation du mouvement (2.26), l'équation de la chaleur (2.27) et l'équation de la concentration (2.28).

Elles s'écrivent, compte tenu de l'équation de continuité (2.25), respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^+ \omega^+ - \text{Pr} \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^+ \omega^+ - \text{Pr} \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} \right) = \text{H.Ra.Pr} \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ - [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$+ N \left\{ \begin{array}{l} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \\ [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^+ T^+ - \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^+ C^+ - \frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^+ C^+ - \frac{1}{\text{Le}} \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Ces trois équations sont de la forme générale :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(H V_{\eta}^+ \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H V_{\theta}^+ \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = S_{\phi} \quad (3.4)$$

Tableau 3.1. Les sources et les coefficients de diffusion des variables φ

Equation	φ	Γ_φ	S_φ
3.1	ω^+	Pr	$\text{H.Ra. Pr} \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ - \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}$ $+ N \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \\ \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}$
3.2	T^+	1	0
3.3	C^+	1/Le	0

Avec:

φ : Fonction générale (ω^+ , T^+ ou C^+).

Γ_φ : Coefficient adimensionnel.

S_φ : Terme de source.

L'équation de discrétisation d'une variable φ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique. Ci-après, nous présentons un cas de discrétisation d'une équation de transfert de φ .

$$\int_{w_s}^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathbf{H} \mathbf{V}_\eta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) d\eta d\theta + \int_{w_s}^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{H} \mathbf{V}_\theta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) d\eta d\theta = \int_{w_s}^e \int_s^n S_\varphi d\eta d\theta$$

ou bien :

$$\underbrace{\int_{w_s}^e \int_s^n \left[\frac{\partial(\mathbf{H} \mathbf{V}_\eta^+ \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\mathbf{H} \mathbf{V}_\theta^+ \varphi)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta}_1 = \underbrace{\int_{w_s}^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right] d\eta d\theta}_2 + \underbrace{\int_{w_s}^e \int_s^n S_\varphi d\eta d\theta}_3$$

Les termes 1, 2 et 3 représentent les intégrales doubles dans le volume fini (entre les faces w-e et s-n), des termes de la convection, de la diffusion et de la source de ϕ . Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons le schéma de la loi de puissance (Power-Law) pour approcher les variations de ϕ entre les points du maillage. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable.

Posons:

$$\left. \begin{aligned} J_\eta &= \left(HV_\eta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \\ J_\theta &= \left(HV_\theta^+ \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\}$$

Où J_η et J_θ sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portant ces valeurs dans l'équation (3.4), on obtient:

$$\frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S_\phi \quad (3.5)$$

L'intégration de l'équation (3.5) dans volume de contrôle donne:

$$J_n - J_s + J_e - J_w = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (3.6)$$

J_e, J_w, J_n et J_s sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne de S dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de ϕ_p (au nœud P) et se mettre sous la forme:

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_p \cdot \phi_p \quad (3.7)$$

Avec $S_p < 0$

Par suite l'équation (3.6) devient:

$$J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \quad (3.8)$$

Si on intègre l'équation de continuité (2.25) dans le volume de contrôle, on obtient:

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (3.9)$$

Où F_n, F_s, F_e et F_w sont les débits massiques à travers les surfaces de ce volume:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (H V_\eta^+)_n \cdot \Delta\theta \\ F_s &= (H V_\eta^+)_s \cdot \Delta\theta \\ F_e &= (H V_\theta^+)_e \cdot \Delta\eta \\ F_w &= (H V_\theta^+)_w \cdot \Delta\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En multipliant l'équation (3.9) par la fonction ϕ_p et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (3.8), il vient:

$$\begin{aligned} (J_n - F_n \cdot \phi_p) - (J_s - F_s \cdot \phi_p) + (J_e - F_e \cdot \phi_p) \\ - (J_w - F_w \cdot \phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} J_n - F_n \cdot \phi_p &= a_N (\phi_p - \phi_N) \\ J_s - F_s \cdot \phi_p &= a_S (\phi_S - \phi_p) \\ J_e - F_e \cdot \phi_p &= a_E (\phi_p - \phi_E) \\ J_w - F_w \cdot \phi_p &= a_W (\phi_W - \phi_p) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (3.11), on obtient:

$$\begin{aligned} a_N (\phi_p - \phi_N) - a_S (\phi_S - \phi_p) + a_E (\phi_p - \phi_E) \\ - a_W (\phi_W - \phi_p) = (S_0 + S_p \cdot \phi_p) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (3.13)$$

On obtient donc enfin l'équation de discrétisation :

$$a_p \phi_p = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.14)$$

Avec:

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W - S_p \Delta V \quad (3.15)$$

$$b = S_0 \cdot \Delta V \quad (3.16)$$

D'après PATANKAR [70], la fonction $A(|P|)$, est donnée par:

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1|P|)^5 \right\|$$

Le symbole $\|A, B\|$ signifie que le maximum entre A et B est choisi.

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Les grandeurs D_e , D_w , D_n et D_s , sont définies par:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \cdot \Delta\theta}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \cdot \Delta\eta}{(\delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

P_e , P_w , P_n et P_s sont les nombres de Péclet définis par:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Les pas d'intégration $(\delta\theta)_n$, $(\delta\theta)_s$, $(\delta\eta)_e$ et $(\delta\eta)_w$ peuvent être égaux ou non aux pas de calcul $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$ respectivement. Ils sont choisis constants et égaux aux $\Delta\theta$ et $\Delta\eta$. Considérons que les interfaces e, w, s et n sont les milieux des nœuds (P, E), (P, W), (P, N) et (P, S).

Dans ces conditions les grandeurs précédentes s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\varphi)_n \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\varphi)_s \cdot \Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\varphi)_e \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\varphi)_w \cdot \Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (3.14) tous les coefficients doivent être positifs, S_p doit être négatif et le coefficient a_p , doit être égal à la somme des autres coefficients et $S_p \Delta V$.

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variable dépendantes : ϕ est l'une de ces variables T^+ , ω^+ et C^+ . Pour chaque variable, le coefficient de diffusion Γ_ϕ et la source S_ϕ sont définis dans le tableau 3.1.

3.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de l'énergie est intégrée dans le volume fini typique de dimension H^2 . $(\Delta\eta)_p$. $(\Delta\theta)_p$. En suivant les mêmes étapes de discrétisation, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_p T_p^+ = a_p T_p^+ + a_s T_s^+ + a_e T_e^+ + a_w T_w^+ + b \quad (3.21)$$

Comme dans l'équation (3.2), le terme de source S_T s'annule, le coefficient b s'annule également et le coefficient a_p figurant dans l'équation (3.15) devient:

$$a_p = a_n + a_s + a_e + a_w \quad (3.22)$$

Où a_n , a_s , a_e et a_w ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.17).

En introduisant la fonction de courant adimensionnelle ψ^+ dans le système (3.10), il vient:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n \\ F_s &= \Delta\theta \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s \\ F_e &= \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e \\ F_w &= \Delta\eta \left(-\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite nous supposons que :

$$\begin{aligned} \psi_n^+ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_s^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)}{2} \\ \psi_e^+ &= \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)}{2} \\ \psi_w^+ &= \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j-1)}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le développement du gradient de la fonction de courant à l'interface « e » est établi d'après la démarche de NOGOTOV [71], comme suit : (voir figure 3.3).

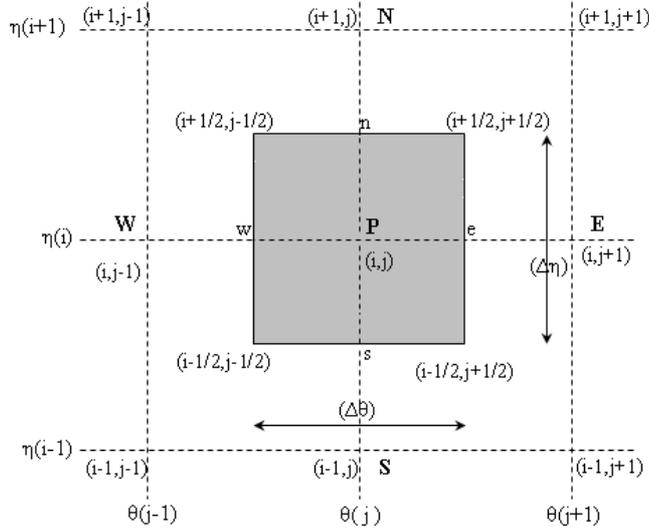


Figure 3.3. Représentation schématique des nœuds P, E, W et S dans le maillage

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)}{\Delta \eta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] \\ &- \frac{1}{2\Delta \eta} \left[\frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

Par suite la fonction F_e s'écrit :

$$F_e = \frac{1}{4} \left[\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.25.a)$$

De la même façon, on écrit le gradient à l'interface « w ».

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta}\right)_w &= \frac{\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)}{\Delta \eta} \\ &= \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i-1, j-1)}{4\Delta \eta} \end{aligned}$$

Et la fonction F_w est donnée par

$$F_w = \frac{1}{4} \left[\psi^+(i-1, j-1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j) \right] \quad (3.25.b)$$

De la même façon, le gradient à l'interface « n » est défini par :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)}{\Delta \theta}$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{1}{2\Delta \Delta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$- \frac{1}{2\Delta \Delta} \left[\frac{\psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)}{2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n = \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

On en déduit:

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.25.c)$$

Le gradient à l'interface « s » s'exprime par la relation :

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)}{4\Delta \theta}$$

Et l'expression F_s devient :

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.25.d)$$

Comme nous l'avons montré précédemment dans le tableau 3.1, le coefficient Γ_ϕ prend la valeur 1.

En portant cette valeur dans le système (3.20), les coefficients D_e , D_w , D_n et D_s s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \\ D_e = D_w &= \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Par suite, les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.21), on écrit W, P, E, N et S respectivement $(i,j-1)$, (i,j) , $(i,j+1)$, $(i+1,j)$ et $(i-1,j)$.

Les coefficients a_E , a_W , a_N et a_S sont pris au nœud (i, j) .

Ainsi l'équation (3.21) peut s'écrire sous la forme:

$$a_P T^+(i, j) = a_E T^+(i, j+1) + a_W T^+(i, j-1) + a_N T^+(i+1, j) + a_S T^+(i-1, j) \quad (3.28)$$

3.3.1. Discrétisation des Conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la température des parois, on doit avoir:

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ($I=NI$).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ($I=1$).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

3.4. Discrétisation de l'équation d'espèces:

L'équation discrétisée (3.14) peut se mettre sous la forme:

$$a_P C_P^+ = a_P C_P^+ + a_S C_S^+ + a_E C_E^+ + a_W C_W^+ + b \quad (3.29)$$

L'identification du coefficient a_P à celui de l'équation (3.15) donne:

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.30)$$

Les coefficients a_S , a_N , a_E et a_W ont pour expressions celles données par le système (3.17).

Lorsque le coefficient Γ_ϕ est égal $1/Le$, comme nous l'avons montré dans le tableau 3.1, aux interfaces e, w, n et s; les coefficients D_e, D_w, D_n et D_s se déduisent des expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= \frac{1}{Le} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= Le F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= Le F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= Le F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= Le F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Pour homogénéiser les notations dans l'équation (3.29), on écrit W, P, E, N et S respectivement $(i,j-1), (i,j), (i,j+1), (i+1,j)$ et $(i-1,j)$.

Les coefficients a_E, a_W, a_N et a_S sont pris au nœud (i, j) .

Ainsi l'équation (3.29) peut s'écrire sous la forme:

$$a_P C^+(i, j) = a_E C^+(i, j+1) + a_W C^+(i, j-1) + a_N C^+(i+1, j) + a_S C^+(i-1, j) \quad (3.33)$$

3.4.1. Discrétisation des Conditions aux limites

Pour satisfaire les conditions imposées à la concentration **prés des parois**, on doit avoir:

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ($I=NI$).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ($I=1$).

$$a_P = 1$$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \text{ et } S_T = 1$$

3.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation discrétisée (3.14) peut se mettre sous forme:

$$a_p \omega_p^+ = a_N \omega_N^+ + a_S \omega_S^+ + a_E \omega_E^+ + a_W \omega_W^+ + b \quad (3.34)$$

L'identification du coefficient a_p à celui de l'équation (3.15) donne:

$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (3.35)$$

Avec: $S_p \Delta V = 0$

Les coefficients a_S , a_N , a_E et a_W ont pour expressions celles données par le système (3.17).

Lorsque le coefficient Γ_ϕ est égal à Pr , comme nous l'avons montré dans le tableau 3.1, aux interfaces e, w, n et s; les coefficients D_e , D_w , D_n et D_s se déduisent des expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} D_n = D_s &= Pr \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ D_e = D_w &= Pr \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Les nombres de Péclet dans le système (3.19) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{P_r} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_s &= \frac{F_s}{P_r} \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \\ P_e &= \frac{F_e}{P_r} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \\ P_w &= \frac{F_w}{P_r} \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Les coefficients F_e , F_w , F_n et F_s ont respectivement les mêmes expressions que dans le système (3.25.a), (3.25.b), (3.25.c) et (3.25.d).

Dans le tableau 3.1, nous pouvons constater que le terme constant (S_0) du terme de source est donnée par:

$$\begin{aligned}
S_0 = \text{Ra. Pa.} & \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ - \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \\
+ N & \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \eta} - \\ \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Par conséquent, le coefficient b devient:

$$b = S_0 \Delta V$$

Avec:

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \theta \cdot 1$$

b s'écrit donc:

$$\begin{aligned}
b = H^2 \cdot \text{Ra. Pr} & \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \\ - \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \\
+ N & \left\{ \begin{array}{l} \left[F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \eta} - \\ \left[F(\eta, \theta) \sin(\alpha) + G(\eta, \theta) \cos(\alpha) \right] \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \end{array} \right\} \Delta \eta \cdot \Delta \theta
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Avec:

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)}{2 \Delta \eta} \tag{3.40}$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)}{2 \Delta \theta} \tag{3.41}$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{C^+(i+1, j) - C^+(i-1, j)}{2 \Delta \eta} \tag{3.42}$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{C^+(i,j+1) - C^+(i,j-1)}{2 \Delta \theta} \quad (3.43)$$

Pour homogénéiser on utilise les notations citées au paragraphe précédent, les nœuds W, P, E, N et S deviennent respectivement $(i,j-1)$, (i,j) , $(i,j+1)$, $(i+1,j)$ et $(i-1,j)$.

Les coefficients a_N , a_S , a_E , a_W et b sont pris au nœud (i,j) .

L'équation du mouvement discrétisée (3.34) s'écrit finalement:

$$\begin{aligned} a_P \omega_P^+(i,j) &= a_N \omega_N^+(i+1,j) + a_S \omega_S^+(i-1,j) \\ &+ a_E \omega_E^+(i,j+1) + a_W \omega_W^+(i,j-1) + b \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.5.1. Discrétisation des Conditions aux limites

En déterminant la vorticité ω^+ sur les parois, nous utilisons la méthode élaborée par ROACHE [72], qui a exprimé ω^+ en fonction de ψ^+ et utilisé un développement de Taylor:

- condition sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ($I=1$).

$$\omega_1^+ = - \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right]_{\eta=\eta_1}$$

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi interne ($i=1, j$):

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit :

$$\omega^+(1, j) = - \frac{1}{H^2(1)} \left[\frac{\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)}{(\Delta \theta)^2} + \frac{2}{(\Delta \eta)^2} (\psi^+(2, j) - \psi^+(1, j)) \right]$$

- Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ($I=NI$).

$$\omega_2^+ = - \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right]_{\eta=\eta_2}$$

La vorticité sur cette paroi s'écrit:

$$\omega^+(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI)} \left[\frac{\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (\psi^+(NI-1, j) - \psi^+(NI, j)) \right]$$

3.6. Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

Réécrivons l'équation adimensionnelle (2.29) sous la forme suivante:

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right) \quad (3.45)$$

Nous remarquons que l'identification de cette équation à l'équation (3.4) est compliquée, c'est pourquoi pour la discrétiser nous utiliserons le développement de Taylor:

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} \right|_{i,j}$$

Avec:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.46)$$

Nous en déduisons:

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \left[\frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1) - 2\psi^+(i, j)}{(\Delta\theta)^2} \right] \quad (3.47)$$

La fonction de courant au nœud P sera donc exprimée en fonction de celle aux nœuds W, N, E et S et s'écrit:

$$\psi^+(i, j) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \left[\frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i, j) \omega^+(i, j) \right] \quad (3.48)$$

3.6.1. Discrétisation des Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux parois, que nous avons déterminées dans les équations (2.31.a) et (2.32.a), deviennent:

- Condition sur la paroi du cylindre elliptique intérieur (I=1):

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{1,j} = \frac{-3\psi^+(1,j) + 4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{2\Delta\eta} = 0$$

$$\psi^+(1,j) = \frac{4\psi^+(2,j) - \psi^+(3,j)}{3} \quad (3.49.a)$$

- Condition sur la paroi du cylindre elliptique extérieur (I=NI):

$$\psi^+(NI,j) = \frac{4\psi^+(NI-1,j) - \psi^+(NI-2,j)}{3} \quad (3.49.b)$$

Nous obtenons donc un système d'équations linéaires que nous résolvons par la méthode itérative de "relaxations successives".

3.7. Discrétisation des composantes de la vitesse

L'équation (2.32.a) nous donne respectivement les composantes adimensionnelles V_η^+ et V_θ^+ de la vitesse; ROACHE [72], utilise les différences centrées pour obtenir une expression discrétisée de ces composantes, ce qui nous donne:

$$V_\eta^+(i,j) = \left. \frac{1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)}{2\Delta\theta} \right] \quad (3.50.a)$$

$$V_\theta^+(i,j) = \left. \frac{-1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_{i,j} = \frac{-1}{H(i,j)} \left[\frac{\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)}{2\Delta\eta} \right] \quad (3.50.b)$$

$$\forall (i,j) \quad \begin{array}{l} i \neq 1 \quad ; \quad i \neq NI \\ j \neq 1 \quad ; \quad j \neq NN \end{array}$$

3.8. Technique de sous relaxation

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équation, on distingue les méthodes itératives. Ces dernières sont généralement plus utilisées pour :

- Des systèmes de grandes tailles
- Des systèmes dont les équations algébriques sont à caractère non linéaire et couplé.

Dans cette catégorie de méthode, on utilise la technique de relaxation pour contrôler la convergence du processus itératif (ralentir ou accélérer la convergence).

3.9. Processus de calcul

Pour résoudre le système d'équations (3.28), (3.33), (3.44) et (3.48) nous utilisons la méthode proposée par E.F. NOGOTOV [71].

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante adaptée précisément à une résolution à l'aide d'une **méthode itérative à coefficients de sous-relaxation** :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - R_T)T^n(i, j) + \left(\frac{R_T}{a_P}\right) \left[a_E T^n(i, j+1) + a_W T^{n+1}(i, j-1) + a_N T^n(i+1, j) + a_S T^{n+1}(i-1, j) \right] \quad (3.51)$$

$$C^{n+1}(i, j) = (1 - R_T)C^n(i, j) + \left(\frac{R_T}{a_P}\right) \left[a_E C^n(i, j+1) + a_W C^{n+1}(i, j-1) + a_N C^n(i+1, j) + a_S C^{n+1}(i-1, j) \right] \quad (3.52)$$

$$\omega^{n+1}(i, j) = (1 - R_\omega)\omega^n(i, j) + \left(\frac{R_\omega}{a_P}\right) \left[a_E \omega^n(i, j+1) + a_W \omega^{n+1}(i, j-1) + a_N \omega^n(i+1, j) + a_S \omega^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) \right] \quad (3.53)$$

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - R_P)\psi^n(i, j) + \frac{R_P}{2} \left[\frac{1}{(\Delta\eta)^2} + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right]^{-1} \left[\frac{\psi^n(i+1, j) + \psi^{n+1}(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + \frac{\psi^n(i, j+1) + \psi^{n+1}(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + H^2(i, j)\omega^{n+1}(i, j) \right] \quad (3.54)$$

n : ordre de l'itération.

Nous résolvons le système d'équations (3.51), (3.52), (3.53) et (3.54) de la façon suivante :

1/ Initialisation des valeurs de la température, de la concentration, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.

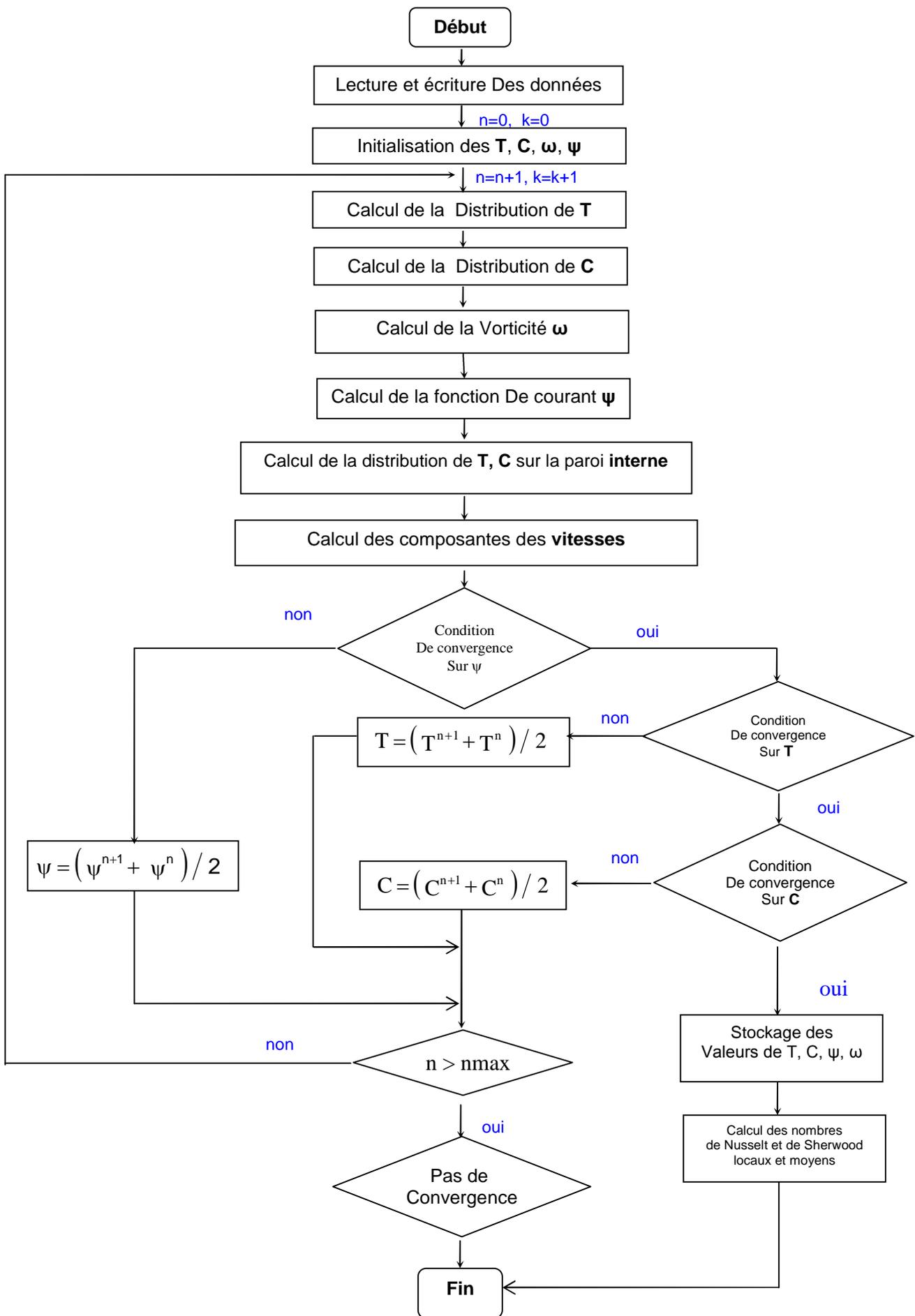
2/ Calcul de la distribution de la température.

- 3/ Calcul de la distribution de la concentration.
- 4/ Calcul de la vorticité.
- 5/ Calcul de la distribution de la fonction de courant.
- 6/ Calcul des composantes des vitesses.

7/ Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement significatif de la valeur de ψ par rapport au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

- 7/ Le même critère est utilisé pour la température.
- 8/ Le même critère est utilisé pour la concentration.
- 8/ Stockage des valeurs de T, C, ω , ψ .



Chapitre 4

Résultats Et Discussions

4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques de la convection naturelle double diffusive dans un espace annulaire elliptique.

Parmi les paramètres gouvernant le système étudié, le nombre de Rayleigh (Ra) thermique qui caractérise l'écart de la température, le rapport des forces de flottabilité (N) qui caractérise le rapport des forces de poussée, solutale et thermique, le nombre de Lewis (Le) qui caractérise le rapport de diffusions thermique et solutale, l'excentricité interne e_1 , et enfin le nombre de Prandtl caractérisant la nature du fluide.

La gamme de variation des paramètres est : $50 \leq Ra \leq 2.10^6$, $0.2 \leq Pr \leq 1$, $0.5 < Le < 100$ et $(-50) < N < (50)$.

Nous considérons plusieurs espaces annulaires elliptiques caractérisés par l'excentricité du tube elliptique intérieur et extérieur.

Dans notre étude, nous avons utilisé les conditions pariétales thermiques suivantes :

- La paroi cylindrique externe est maintenue isotherme à la température T_2 et à la concentration C_1 .
- La paroi cylindrique interne est maintenue isotherme à la température ($T_1 > T_2$) et à la concentration C_2 ($C_1 > C_2$).

4.2. Etude du maillage

Dans cette étude plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ($Le=2$, $N=1$, $Pr=0.70$, $Ra=10^2$, 10^3 et 5.10^3 , $\phi=0^\circ$, $e_1=0,6$ et $e_2=0,4$), pour voir leurs effets sur les résultats. Le tableau 4.1 nous montre donc, la variation des nombres de Nusselt moyens intérieur et extérieur, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage (96x91) qui réalise un bon compromis entre précision et temps de calcul.

Tableau 4.1. Variation des nombres de Nusselt moyens extérieur et intérieur en fonction du nombre de nœuds.

	$\theta_{NI} \times \eta_{NN}$	16x11	26x21	36x31	46x41	56x51	66x61	76x71	86x81	96x91	101x101
Ra=10 ²	Nu_i	1.30	1.36	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	Nu_o	0.81	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88
Ra=10 ³	Nu_i	1.59	1.72	1.77	1.80	1.81	1.82	1.83	1.83	1.83	1.83
	Nu_o	0.99	1.07	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
Ra=5.10 ³	Nu_i	2.42	2.66	2.75	2.80	2.83	2.85	2.87	2.88	2.89	2.89
	Nu_o	1.49	1.64	1.70	1.73	1.74	1.76	1.77	1.77	1.78	1.78

Tableau 4.2. Variation des nombres de Sherwood moyens extérieur et intérieur en fonction du nombre de nœuds pour $Le=2$.

	$\theta_{M \times \eta_{NN}}$	16x11	26x21	36x31	46x41	56x51	66x61	76x71	86x81	96x91	101x101
$Ra=10^2$	Sh_i	1.32	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46
	Sh_o	0.82	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
$Ra=10^3$	Sh_i	2.23	2.38	2.42	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.45	2.45
	Sh_o	1.39	1.48	1.51	1.52	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53
$Ra=5.10^3$	Sh_i	3.44	3.67	3.73	3.77	3.80	3.81	3.82	3.83	3.84	3.84
	Sh_o	2.15	2.29	2.33	2.35	2.37	2.38	2.39	2.39	2.40	2.40

4.3. Comparaison des résultats issus de ce code de calcul avec ceux de la littérature

Parce que jusqu'à présent, les recherches sur la convection naturelle à double diffusion dans un espace annulaire compris entre deux cylindres elliptiques, sont rares ou inexistantes, nous avons considéré le problème de la convection naturelle pure qui a été étudié par Elshamy [5] et Zhu [73] pour valider le présent code de calcul.

Le tableau 4.3 comporte les valeurs du nombre de Nusselt moyen (Nu) interne et externe pour la présente étude et celle de El Shamy [5]. Le tableau 4.3 comporte les valeurs du nombre de Nusselt moyen (Nu) interne pour la présente étude et celle de Zhu [73]. On constate que nos résultats sont similaires avec ceux présentés par El Shamy et Zhu, avec un pourcentage d'erreur acceptable.

Tableau 4.3. Validation du code de calcul avec les nombre de Nusselt moyens interne et externe pour $Pr=0.70$, $Le = 1.0$, $N=0$, et $e_2 = 0.4$.

e_1	α (°)	Ra	Nu_o Nos calculs	Nu_o ([5])	Er (%)	Nu_i Nos calculs	Nu_i ([5])	Er (%)
0.86	90	10^4	1.37	1.35	1	3.72	3.68	1
0.86	90	4.10^4	1.80	1.93	6	4.86	5.34	8
0.90	0	10^4	1.09	1.19	8	3.45	3.53	2

Tableau 4.4. Validation du code de calcul avec les nombres de Nusselt moyens internes pour $Pr = 0.70$, $Le = 1.0$ et $N = 0$.

e_1	e_2	α (°)	Ra	Nu_i Nos calculs	Nu_i ([73])	Er (%)
0.95	0.75	0	10^4	3.29	3.33	1
0.90	0.5	0	10^4	3.42	3.60	5

4.4. Première partie (convection naturelle)

Dans cette partie, les simulations ont été effectuées pour les nombres de Rayleigh égaux respectivement à 50, 10^3 , 10^4 et 2.10^4 et le nombre de Prandtl variant entre 0.2 et 0.7.

4.4.1. Effet du nombre de Rayleigh

Les figures (4.1-4.4) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra lorsque $\alpha=0^\circ$. Nous notons que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical fictif médian.

Les isothermes de la figure 4.1 correspondant à Ra=50 sont des courbes fermées concentriques et parallèles, dans ce cas, la répartition de la température est simplement décroissante de la paroi chaude à la paroi froide. Les lignes de courant de la même figure montrent que l'écoulement s'opère en deux cellules principales qui tournent très lentement dans des directions opposées. Les valeurs de la fonction de courant sont très faibles. Dans ce cas l'essentiel des transferts thermiques se fait par conduction au niveau de la paroi chauffée.

Pour Ra= 10^3 sur la figure 4.2 les lignes isothermes se modifient sensiblement, et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur la même figure augmentent aussi sensiblement, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif, mais il reste relativement faible.

Pour Ra = 10^4 , les lignes isothermes illustrées sur la figure4.3 changent de forme et finissent par adopter la forme d'un champignon. La distribution de la température diminue à partir de la paroi chaude vers la paroi froide. La direction de la déformation des isothermes est conforme au sens de rotation des lignes de courant. En régime laminaire, les particules qui décollent de la paroi chaude au niveau de l'axe de symétrie s'éloignent de la paroi chaude à cet endroit. Dans ce cas là, la convection naturelle prédomine et les valeurs des fonctions de courant augmentent.

Sur la figure 4.4, quand Ra= 2.10^4 , le taux de transfert thermique et les valeurs de la fonction de courant sont plus élevés. Donc nous remarquons que quand le nombre de Rayleigh augmente le taux de transfert thermique augmente aussi.

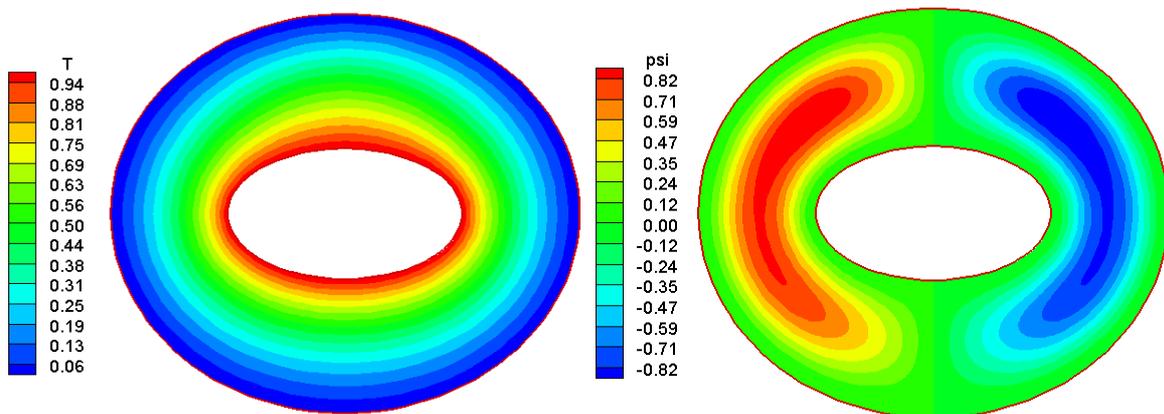


Figure4.1. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=50$, $Pr=0.702$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha=0^\circ$.

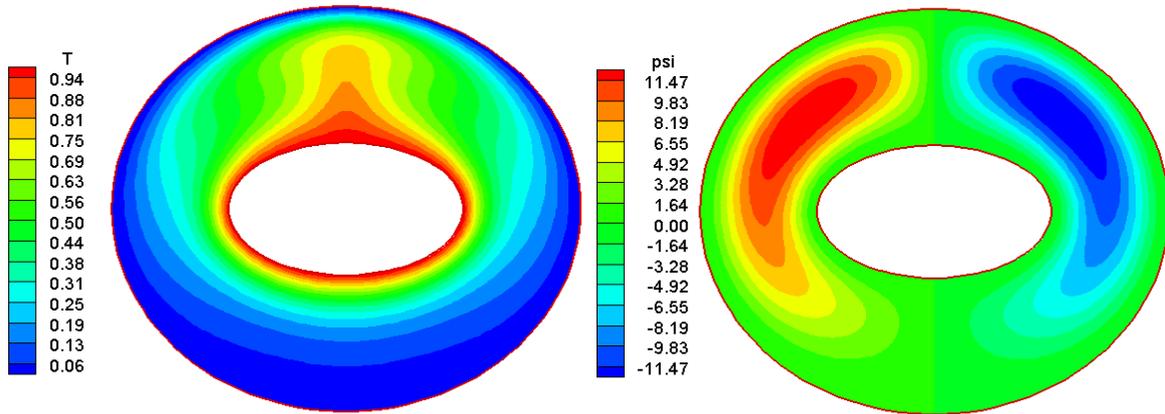


Figure4.2. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=10^3$, $Pr=0.702$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha=0^\circ$.

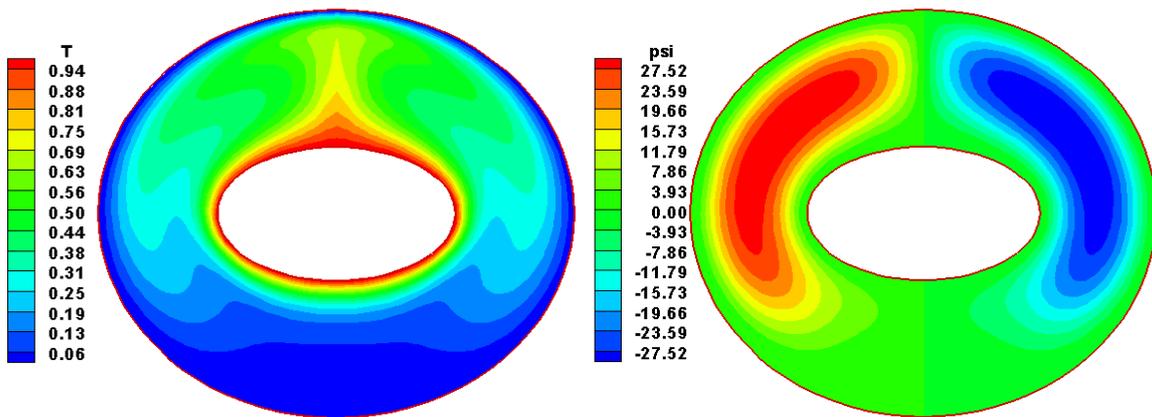


Figure4.3. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=10^4$, $Pr=0.702$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha=0^\circ$.

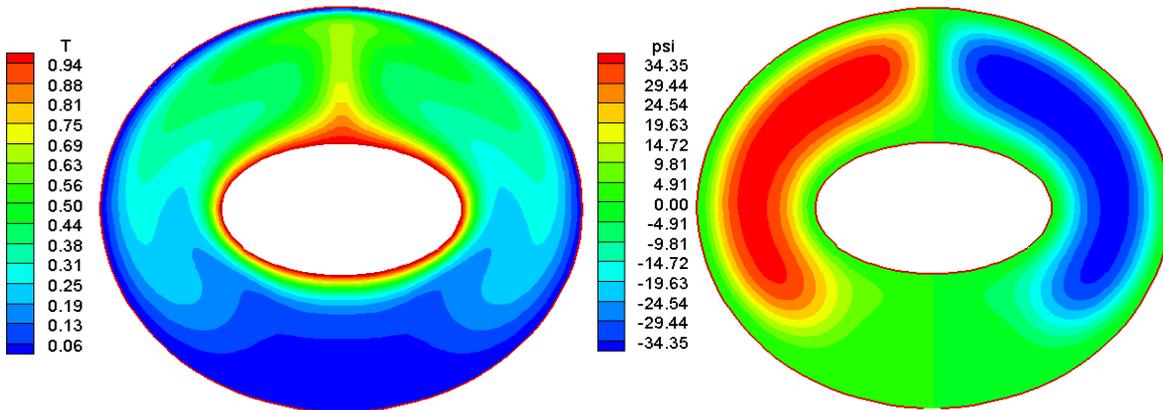


Figure 4.4. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=2.10^4$, $Pr=0.702$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha=0^\circ$.

4.4.2. Effet du nombre de Prandtl:

4.4.2.1. Effet du nombre de Prandtl sur les lignes de courant et les isothermes

La figure4.5 illustre l'effet du nombre de Prandtl Pr sur les lignes de courant et les isothermes.

Pour mettre en évidence l'effet du nombre de Prandtl sur l'écoulement, en maintenant le nombre de Rayleigh constant $Ra = 10^2$, nous lui affectons deux valeurs distinctes $Pr=0,25$ et

0,7. Lorsque $Pr=0,25$, les lignes de courant du fluide s'organise en deux cellules principales qui tournent très lentement dans des sens opposés avec une valeur maximale $\Psi_{max}=0,27$, ce qui dénote d'une convection naturelle faible. Quand le nombre de Prandtl augmente ($Pr=0,7$) la convection naturelle est toujours faible, la valeur maximale de la fonction de courant ($\Psi_{max}=0,80$). Donc pour un nombre de Rayleigh faible ($Ra=10^2$) la variation du nombre de Prandtl de 0,25 à 0,7 n'influe pas sur l'écoulement et il n'y a pas de changement significatif dans les valeurs maximales de la fonction de courant.

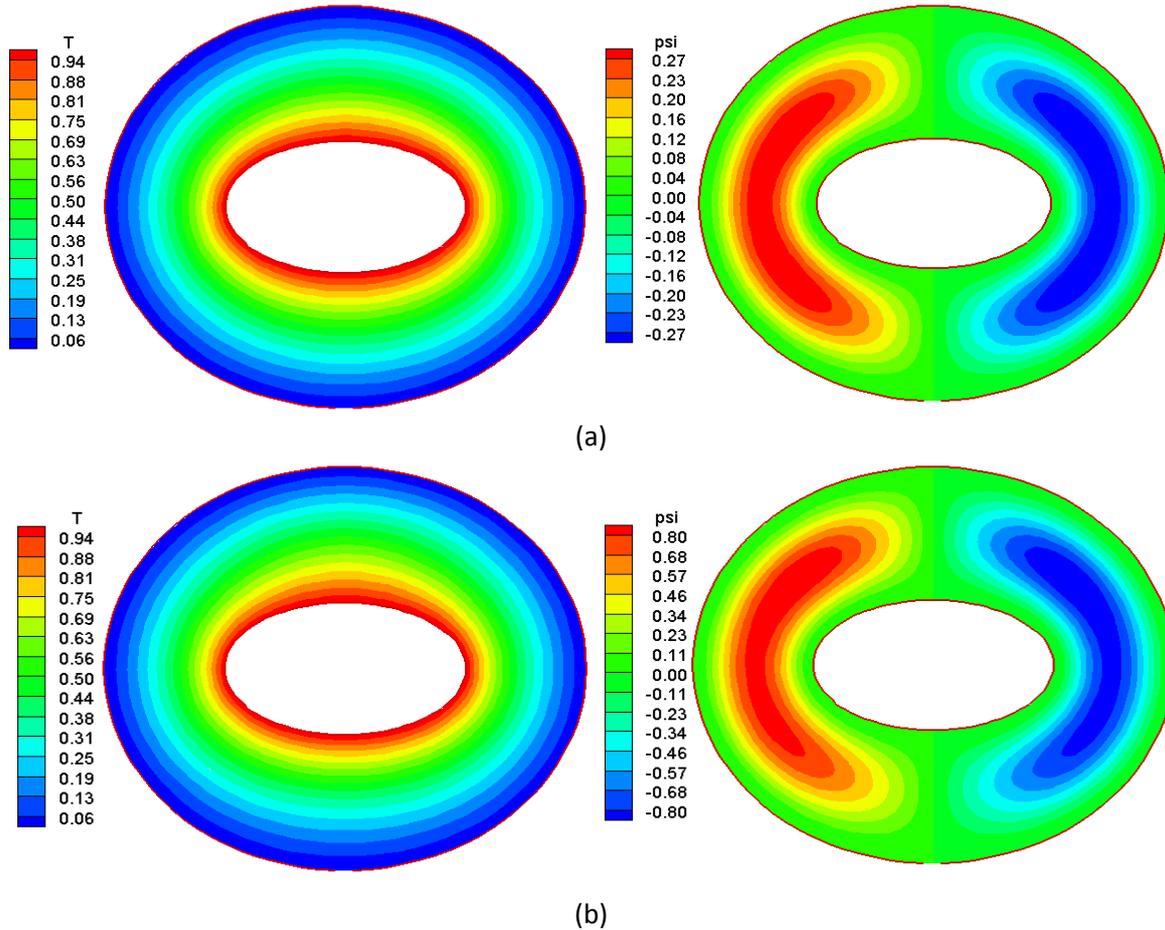
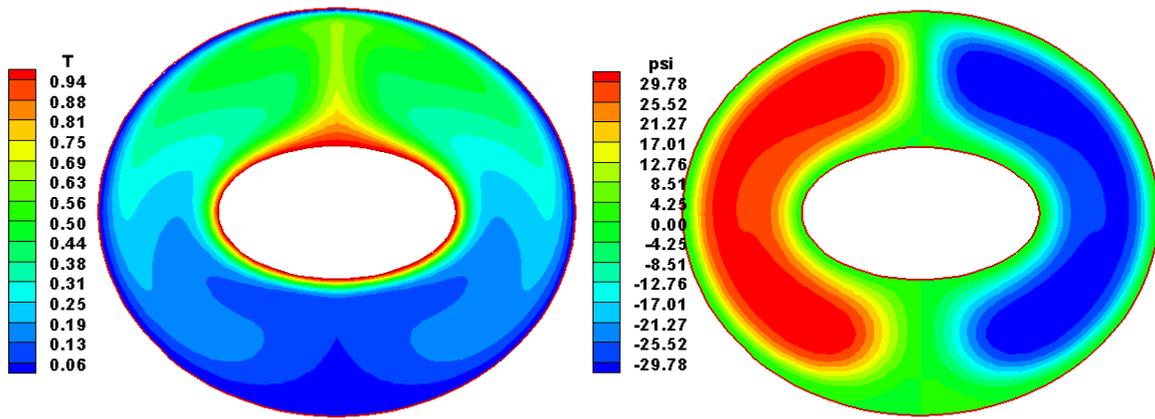


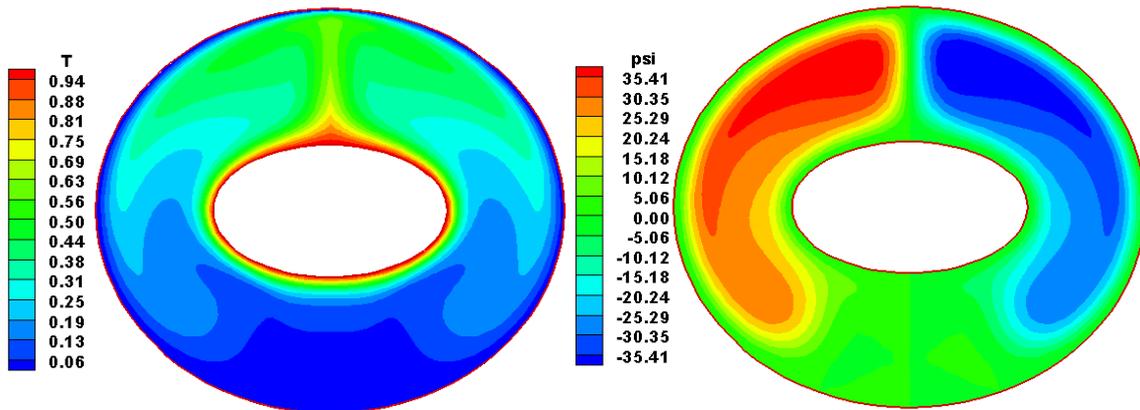
Figure 4.5. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=10^2$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$, $\alpha=0^\circ$ (a) $Pr=0,25$ et (b) $Pr=0,7$

La figure 4.6 illustre l'effet du nombre de Prandtl Pr sur les lignes de courant et les isothermes pour le nombre de Rayleigh $Ra=4.10^4$.

Pour $Pr = 0,25$ nous remarquons que les valeurs des lignes de courant augmentent pour atteindre la valeur maximale ($\Psi_{max} = 29,78$), et en augmentant le nombre de Prandtl à $Pr=0,7$, les valeurs des lignes de courant augmentent de plus en plus ($\Psi_{max} = 35,46$), donc nous pouvons dire que lorsque le nombre de Prandtl augmente pour $Ra = 4.10^4$, l'écoulement s'intensifie de plus en plus.



(a)



(b)

Figure 4.6. Isothermes et lignes de courant pour $Ra=4.10^4$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$, $\alpha= 0^\circ$ (a) $Pr=0,25$ et (b) $Pr=0,7$

4.4.2.2. Effet du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen

Pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, variant entre 0,3 et 0,7 à $Ra=10^4$, La figure 4.7 montre l'influence du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen. On constate que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

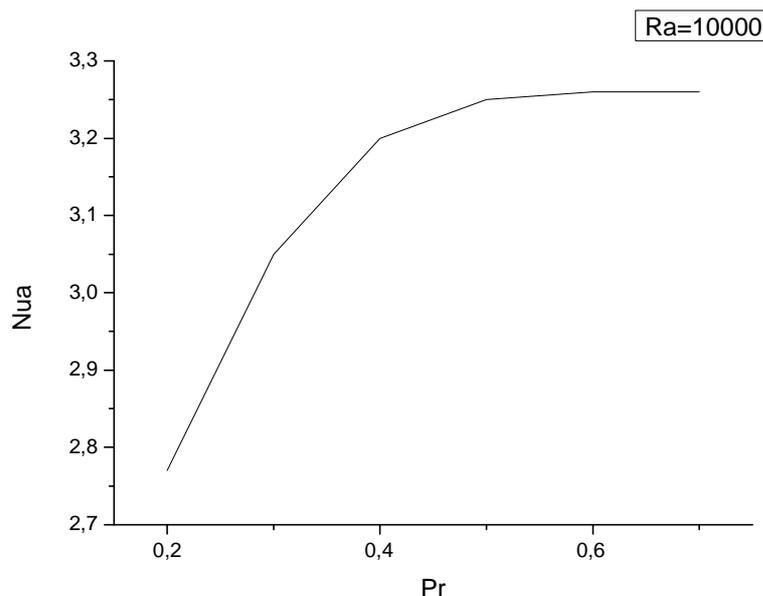


Figure 4.7. L'effet de nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen pour $Ra=10^4$, $e_1=0.8$, $e_2=0.4$ et $\alpha=0^\circ$.

4.5. Deuxième partie (double diffusive)

Dans cette partie, les simulations ont été effectuées pour le nombre de Prandtl (Pr), variant entre 0.3 et 0.8, le nombre de Lewis (Le), variant entre 0.5 et 100, le rapport de la flottabilité, N variant entre -50 et 50 et pour huit nombres de Rayleigh, Ra (10^2 , 10^3 , 10^4 , 5.10^4 , 10^5 , 5.10^5 , 6.10^5 , 10^6), notre étude a été menée pour les deux cas coopérant (les forces de flottabilité thermique et solutale agissent dans le même sens, $N \geq 0$), et opposant (les deux forces s'opposent $N < 0$). Nous examinons en particulier l'influence des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les mécanismes de transferts de chaleur et de masse.

4.5.1. L'influence du nombre de Rayleigh

Les figures (4.8-4.11) représentent les isothermes, les iso-concentrations et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh lorsque $\alpha=0^\circ$.

Nous notons que ces figures montrent que le régime de l'écoulement est monocellulaire.

Dans la partie gauche de l'espace annulaire, la cellule tourne dans le sens trigonométrique et du côté droit, elle tourne dans la direction opposée (les particules du fluide se déplacent vers le haut sous l'action des forces de la poussée d'Archimède).

La figure 4.8 montre que les isothermes et les iso-concentrations sont des courbes presque parallèles et concentriques ce qui dénote que pour un faible nombre de Rayleigh $Ra=10^3$, le transport de masse dans l'espace annulaire est essentiellement contrôlé par le processus de diffusion. Les lignes de courant de fluide s'organisent en deux cellules qui tournent très lentement dans des directions opposées.

Pour $Ra=10^5$, la figure 4.9 illustre le fait que les isothermes et les iso-concentrations se transforment et finissent par adopter la forme d'un champignon. Nous notons également que, dans ce cas, la distribution des températures et des concentrations sont différentes car le

nombre de Lewis est égal à 2,0 ce qui traduit une diffusivité thermique 2 fois plus importante que la diffusivité solutale.

Lorsque le nombre de Rayleigh devient important, $Ra=10^6$, les figures 4.10 et 4.11 montrent que les isothermes et les iso-concentrations sont plus confinées près des parois et qu'au milieu de l'espace annulaire les valeurs de ces isolignes sont presque constantes dans la moitié supérieure de ce dernier.

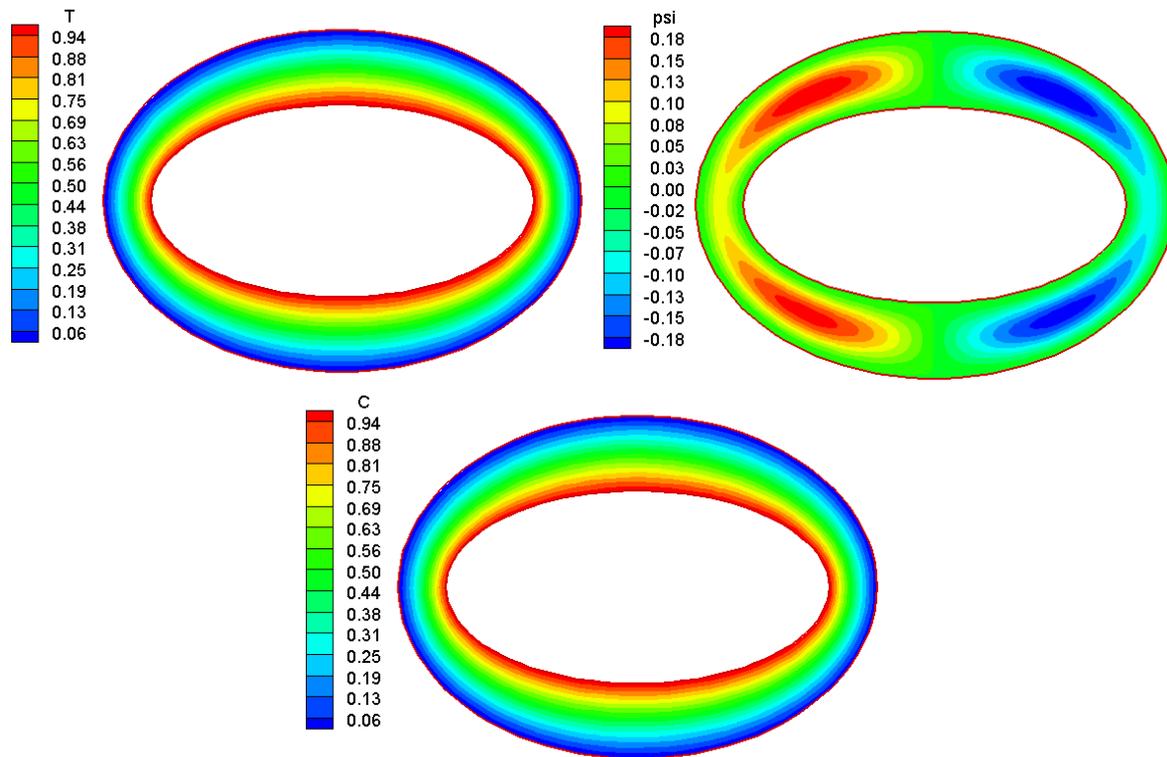


Figure 4.8: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^3$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $Pr=0.702$, $e_1=0,86$ et $e_2=0,688$

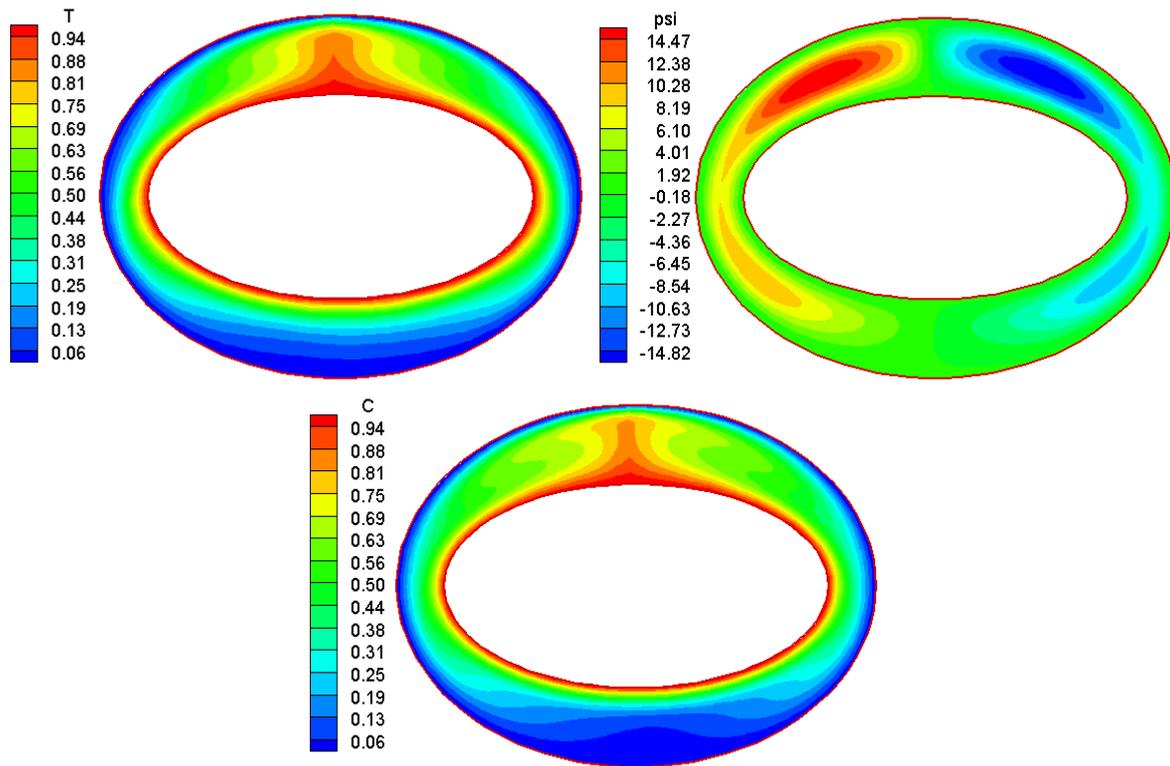


Figure 4.9: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $Pr=0.702$, $e_1=0.86$ et $e_2=0.688$.

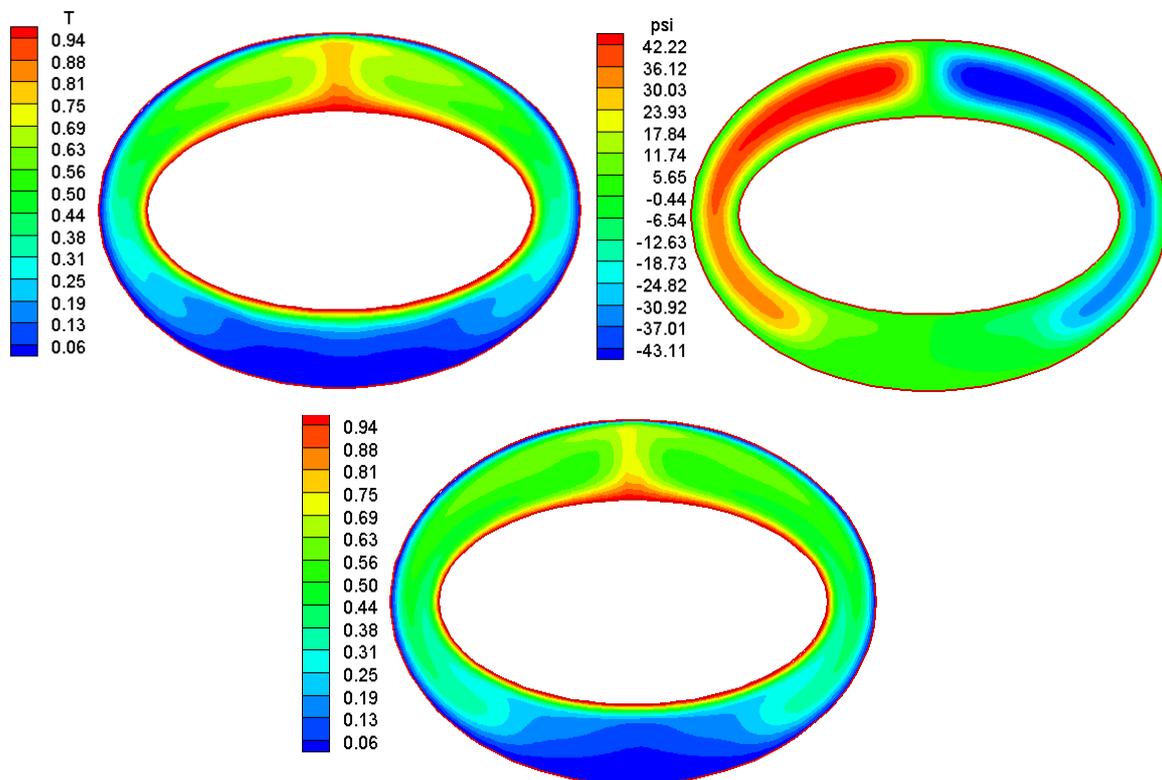


Figure 4.10: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^6$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $Pr=0.702$, $e_1=0.86$ et $e_2=0.688$.

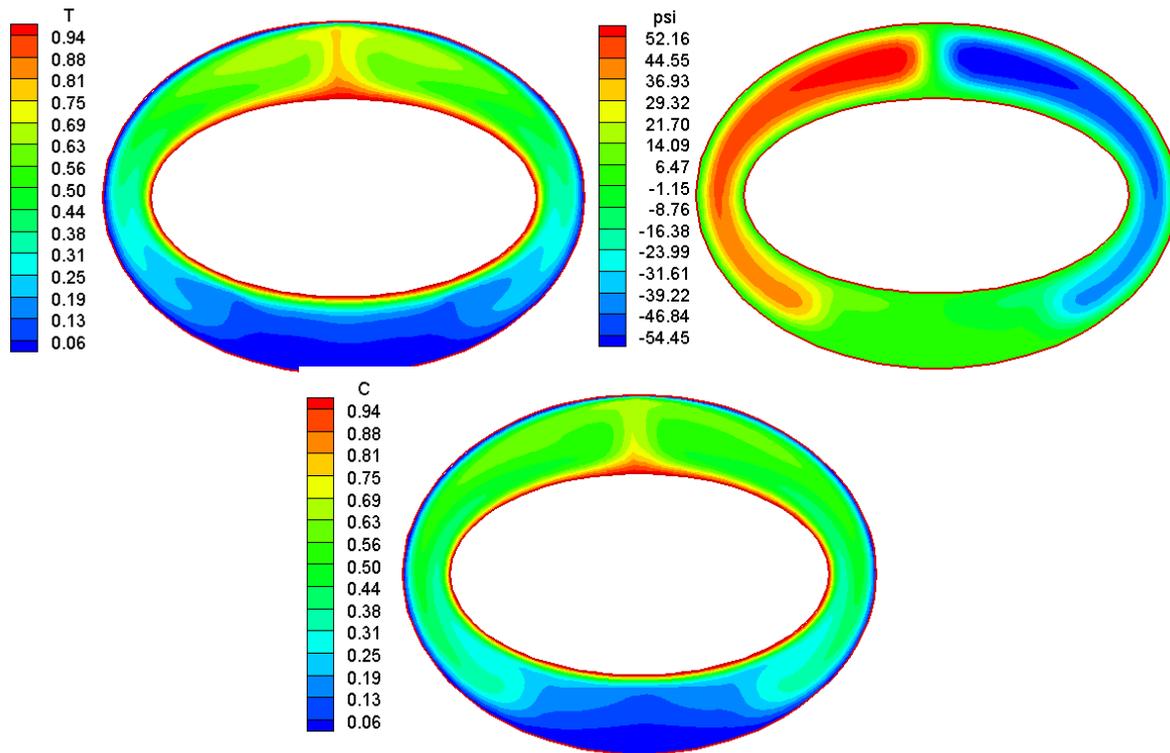


Figure4.11: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=2.10^6$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $Pr=0.702$, $e_1=0,86$ et $e_2=0,688$.

4.5.2. Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux sur les parois intérieure et extérieure:

La variation du nombre de Nusselt local sur les parois intérieure et extérieure de l'enceinte est représentée sur les figures 4.12 et 4.13 pour deux valeurs du nombre de Rayleigh 10^4 et 10^5 , tandis que les paramètres suivants sont maintenus constants ($Pr = 0,8$, $Le=2$, $n=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0,8$ et $e_2=0,6$). Nous remarquons, par exemple sur ces figures, que la valeur du nombre de Nusselt sur la paroi extérieure est maximum lorsque l'angle θ est égal à 90° et elle est minimum quand l'angle θ est égal à 270° . Sur la paroi interne, les variations sont inversées. Les mêmes remarques peuvent être faites pour le nombre de Sherwood local le long de parois intérieure et extérieure, mais avec des valeurs plus élevées comme l'illustrent les figures 4.14 et 4.15.

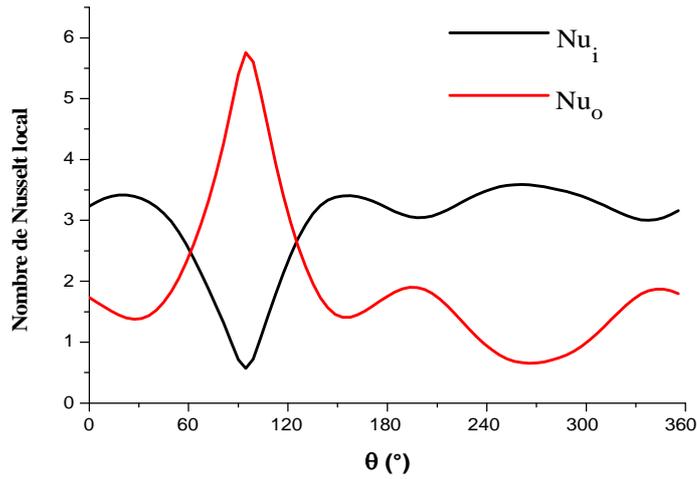


Figure4.12: Variation du nombre de Nusselt local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr=0.8$, $Ra=10^4$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

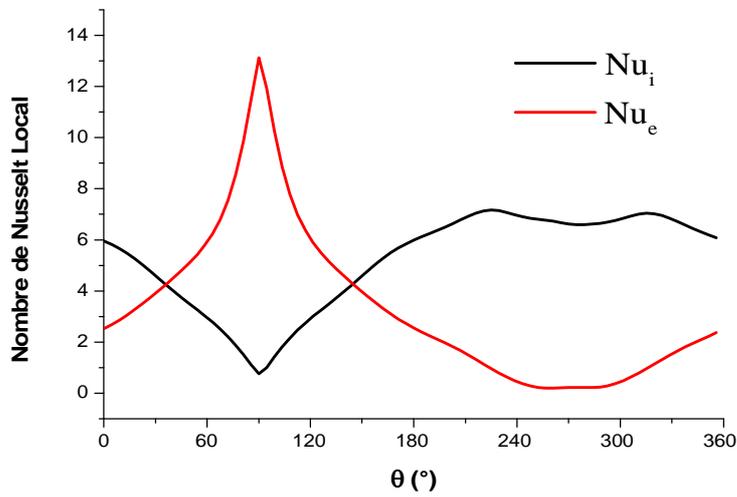


Figure. 4.13: Variation du nombre de Nusselt local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr=0.8$, $Ra=10^5$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

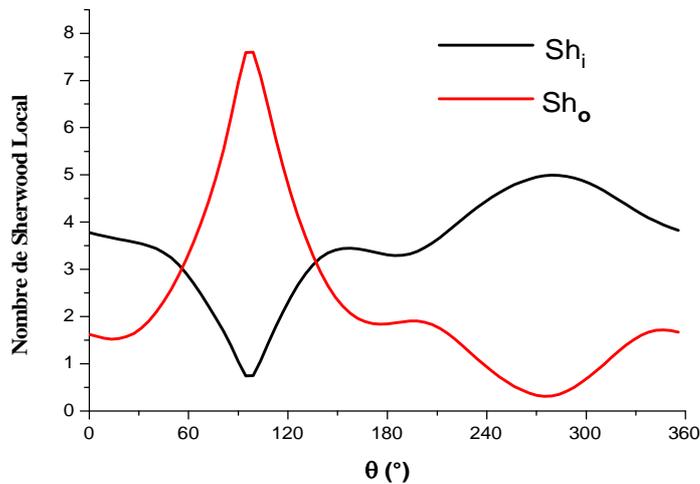


Figure4.14: Variation du nombre de Sherwood local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr=0.8$, $Ra=10^4$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

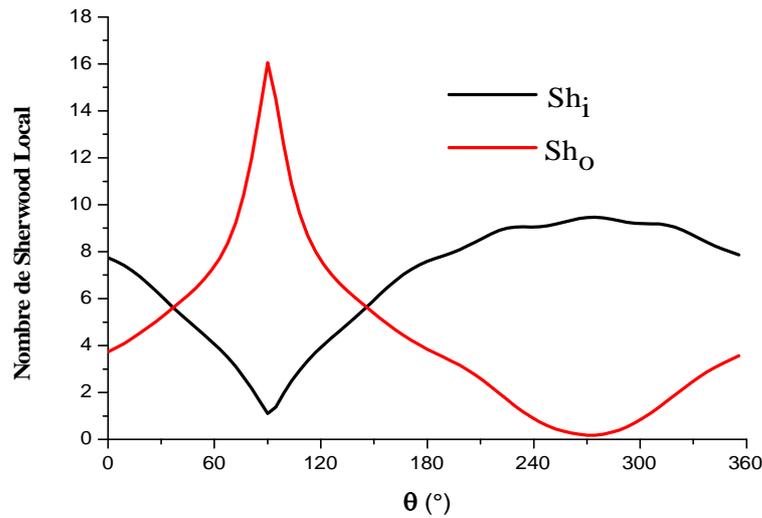


Figure. 4.15:Variation du nombre de Sherwood local sur les parois de l'enceinte intérieure et extérieure pour $Pr=0.8$, $Ra=10^5$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

4.5.3. Effet du nombre de Rayleigh sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens

L'effet du nombre de Rayleigh thermique sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens est illustré dans la figure. 4.16. Ces résultats montrent, qu'en dessous de $Ra=10^3$, les valeurs de Nu_a et Sh_a sont pratiquement semblables et ont les mêmes valeurs, quand $Ra>10^3$, l'augmentation du nombre de Rayleigh donne une augmentation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens Cette augmentation est plus importante pour le nombre de Sherwood moyen.

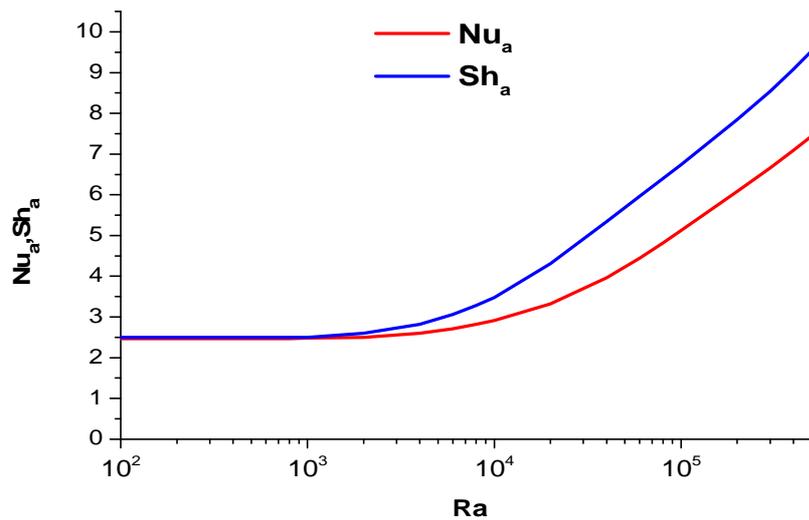


Figure4.16: Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Rayleigh thermique pour $Pr=0.7$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

4.5.4. Effet du nombre de Prandtl sur les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens

La figure 4.17 illustre la variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Prandtl. On peut voir que les valeurs des deux nombres augmentent lentement à mesure que le nombre de Prandtl augmente. Mais, lorsque la valeur de ce dernier atteint la valeur 0.7, ces valeurs restent constantes quelle que soit l'augmentation du nombre de Prandtl.

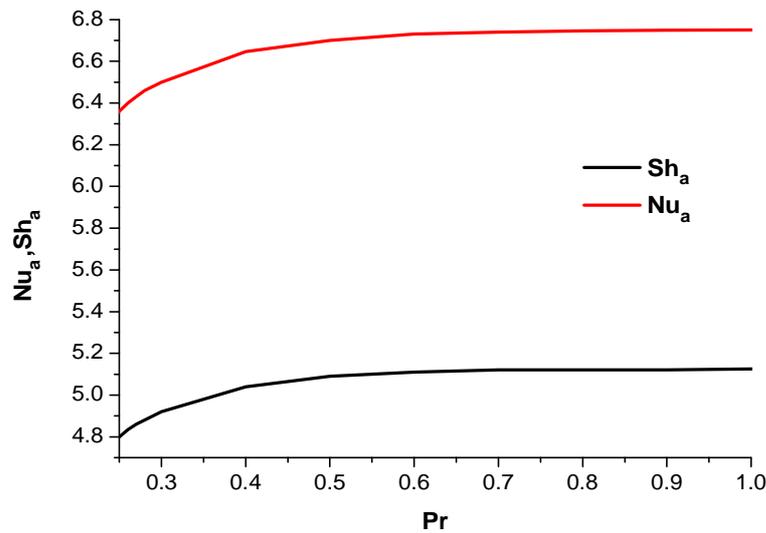


Figure.4.17: Variation des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens en fonction du nombre de Prandtl pour $Ra=10^5$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

4.5.5. Effet du nombre de Prandtl sur les isolignes

Les figures (4.18, 4.19), (4.20, 4.21) et (4.22,4.23) représentent l'effet du nombre de Prandtl (0.3,1.0) sur les isothermes, les lignes de courant et les iso-concentrations respectivement pour $Ra=10^3$, 10^5 et 6.10^5 , en maintenant constants les paramètres suivants : $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

A faible nombre de Rayleigh ($Ra=10^3$) sur les figures (4.18), (4.19) on constate que les taux de transfert de chaleur et de masse sont faibles, les valeurs de la fonction de courant sont relativement faibles aussi. Par contre pour $Pr = 0,3$ et $Ra = 6.10^5$ comme illustré sur la figure 4.22 les valeurs de la fonction de courant atteignent une valeur maximale $\Psi_{max} = 40,91$, donc l'écoulement s'intensifie. En augmentant le nombre de Prandtl $Pr=1$, la figure 4.23 montre que les valeurs des lignes de courant atteignent une valeur maximale plus importante $\Psi_{max}=49,35$, ce qui dénote que l'écoulement s'intensifie de plus en plus, donc on peut conclure que lorsque le nombre de Prandtl Pr augmente, l'écoulement s'intensifie pour des nombres de Rayleigh importants.

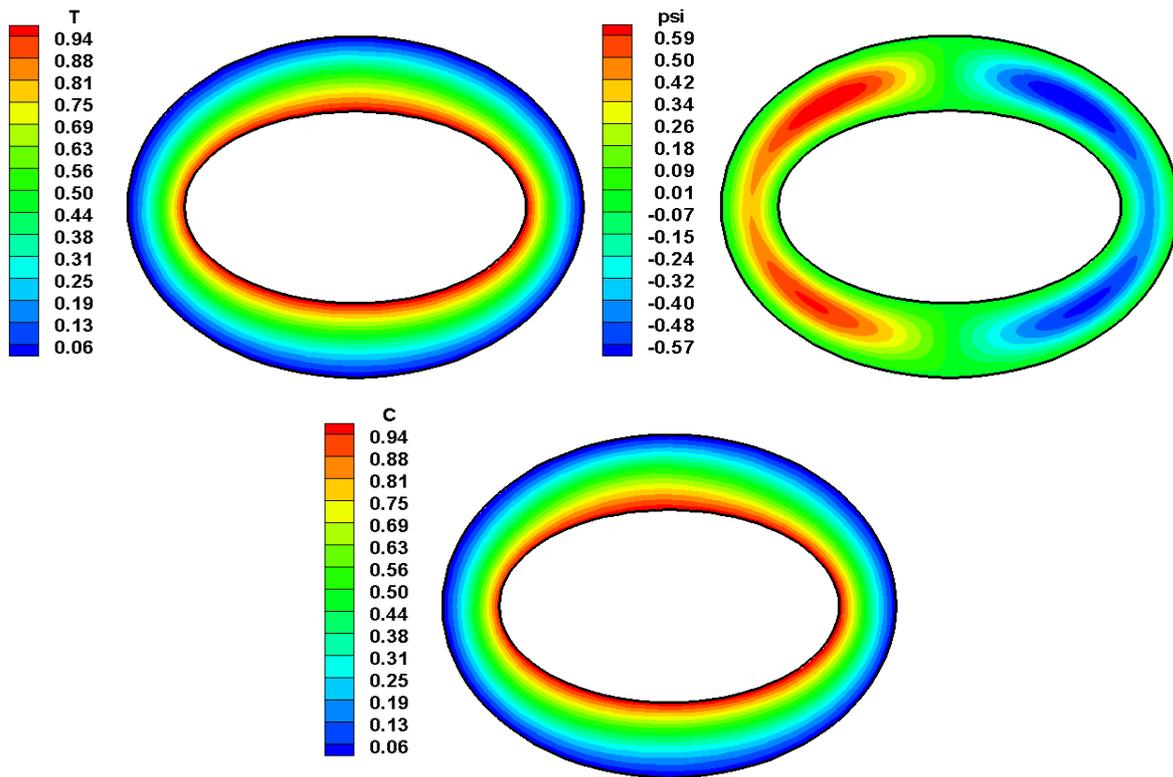


Figure. 4.18: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=0.3$, $Ra=10^3$, $Le=2$, $N=1$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$.

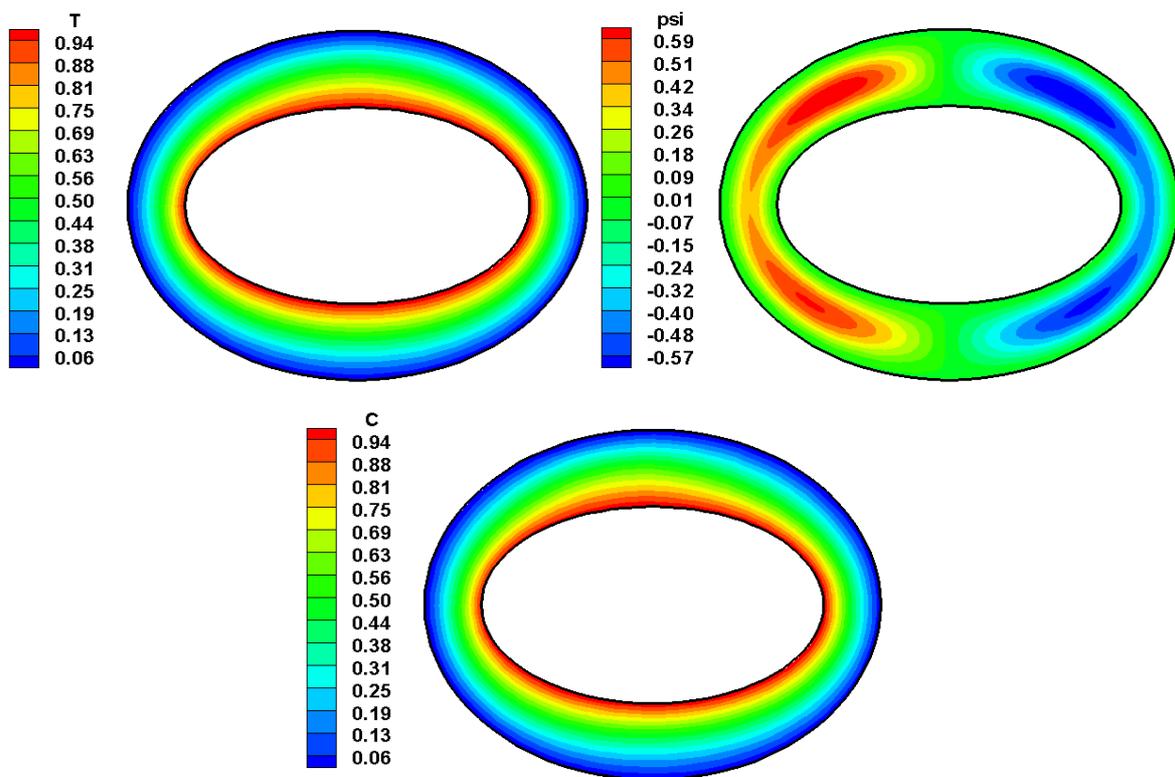


Figure. 4.19: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=1.0$, $Ra=10^3$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$, $e_2=0.6$, $Le=2$ et $N=1$.

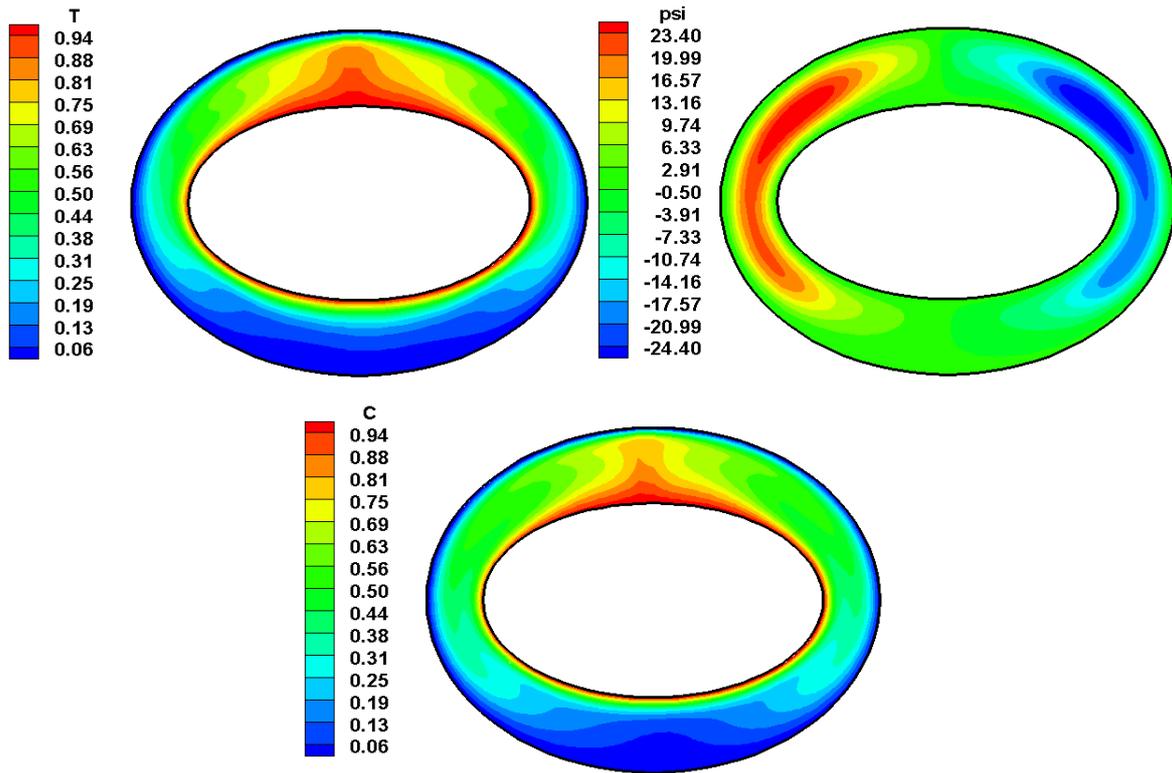


Figure.4.20: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=0.3$, $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$, $e_2=0.6$, $Le=2$ et $N=1$.

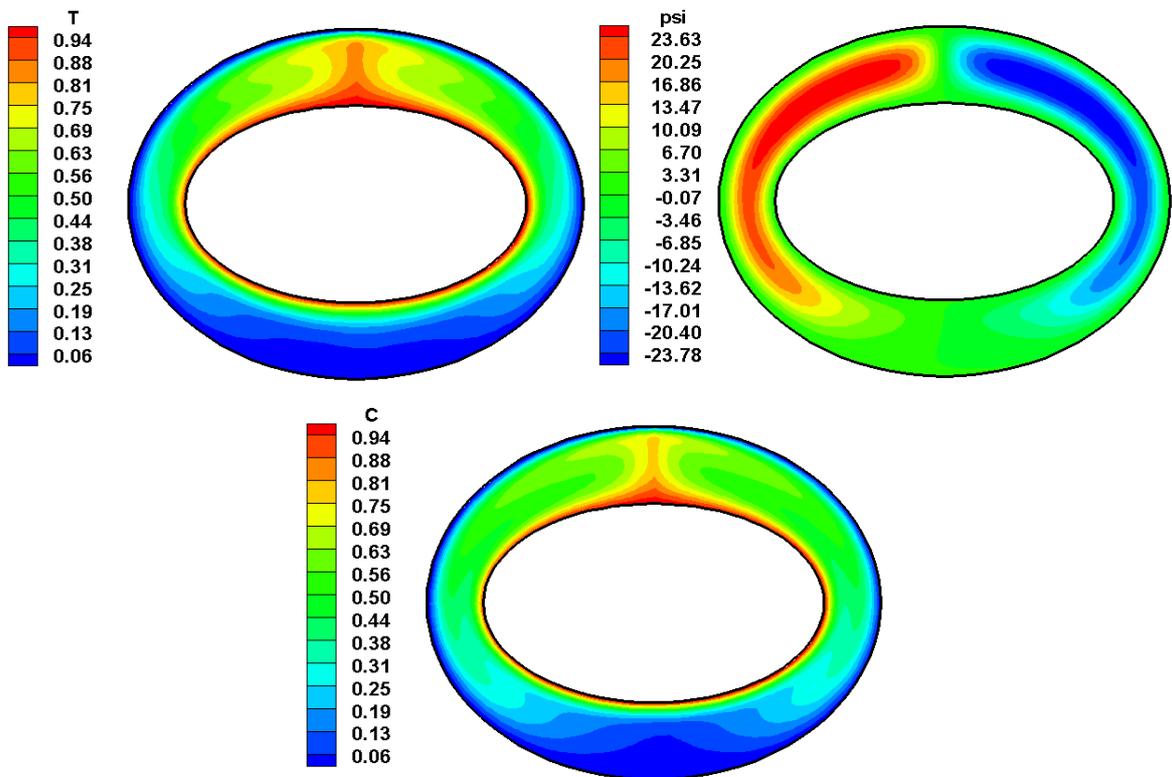


Figure. 4.21: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=1.0$, $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$, $e_2=0.6$, $Le=2$ et $N=1$.

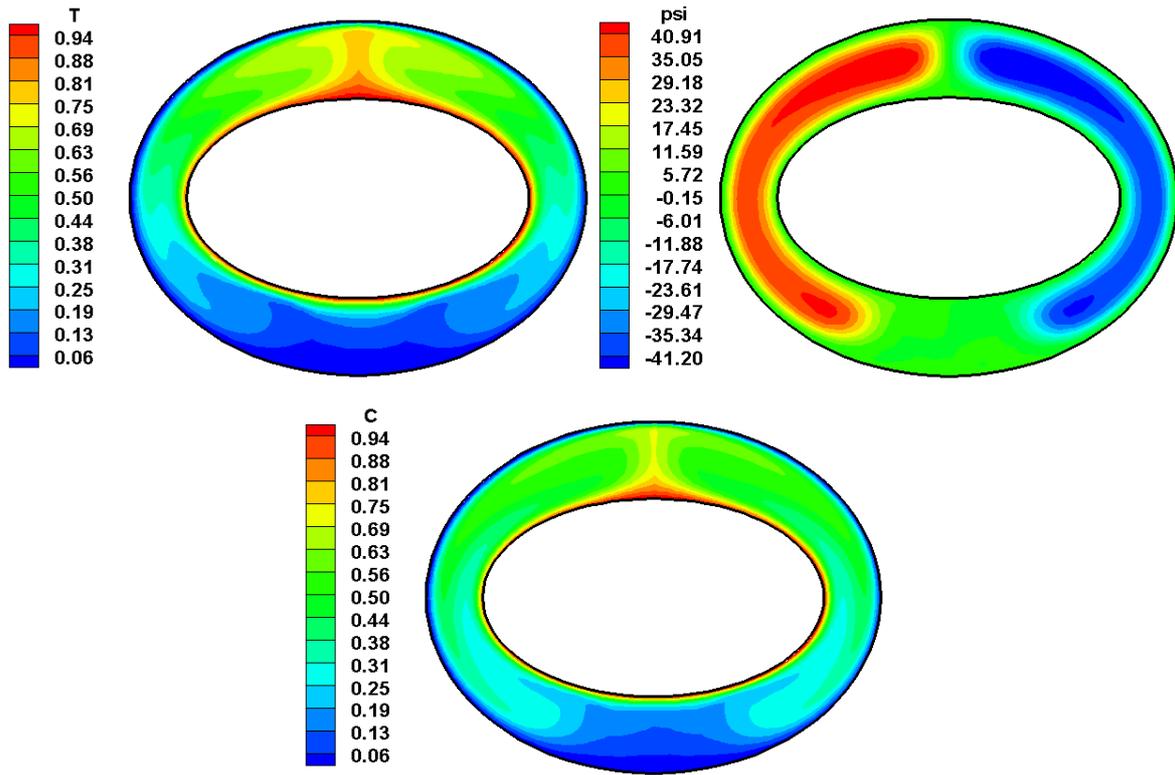


Figure.4.22: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=0.3$, $Ra=6.10^5$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$, $e_2=0.6$, $Le=2$ et $N=1$.

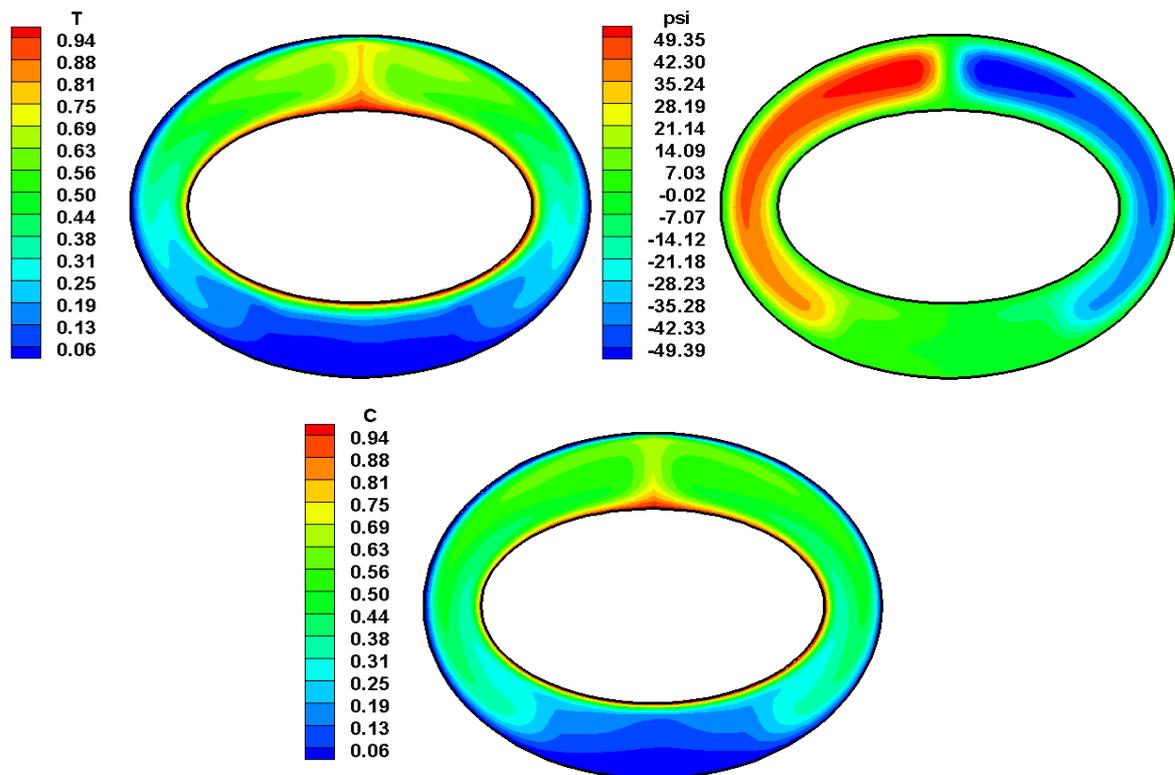


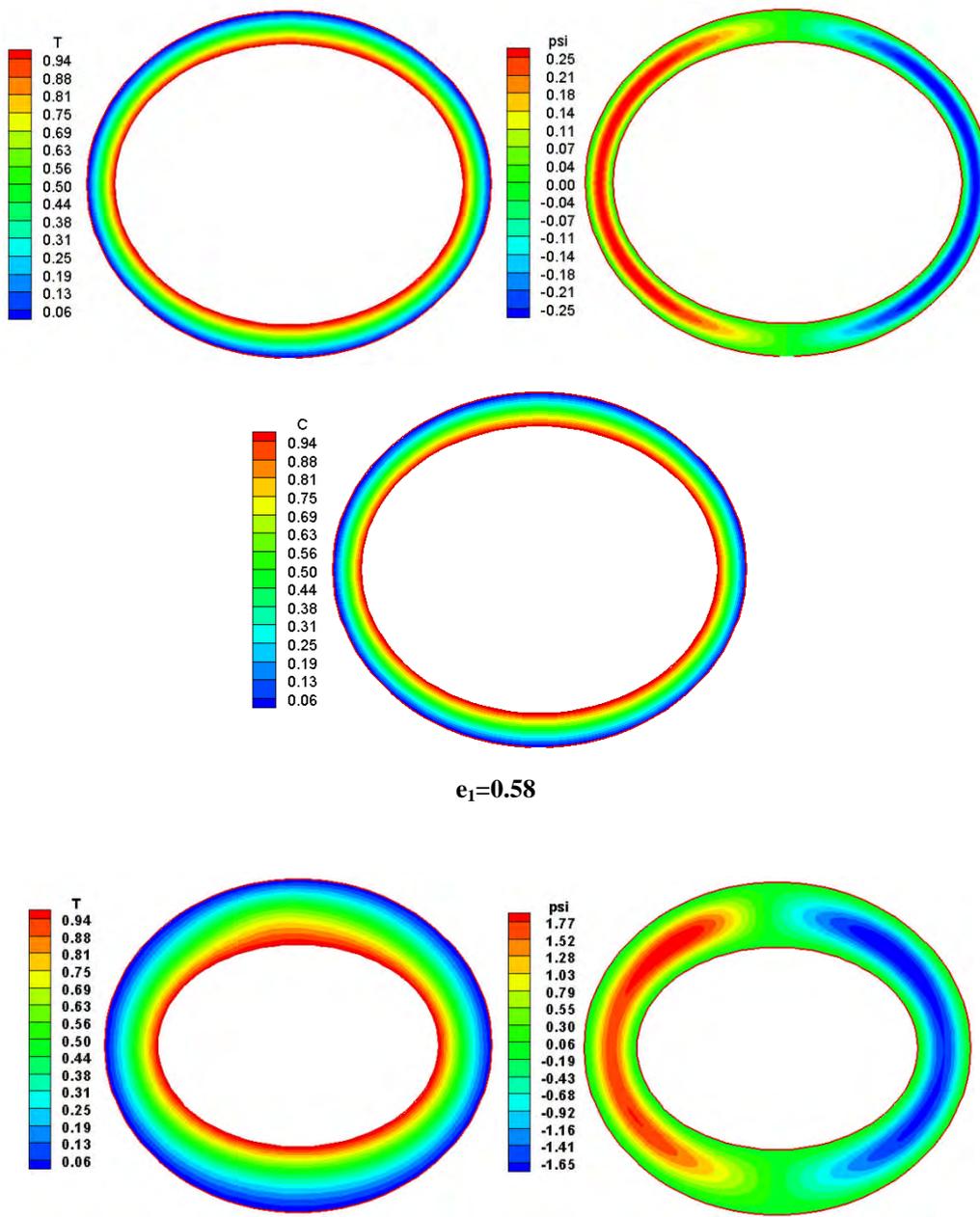
Figure. 4.23: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Pr=1$, $Ra=6.10^5$, $\alpha=0^\circ$, $e_1=0.8$, $e_2=0.6$, $Le=2$ et $N=1$.

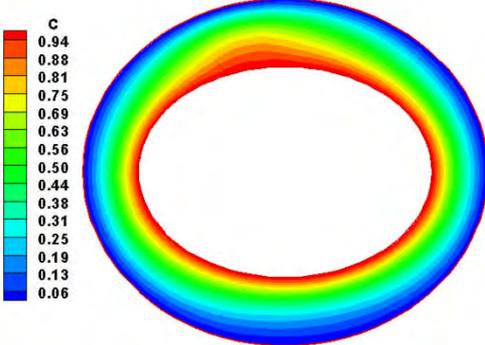
4.5.6. L'influence de l'excentricité interne (e_1):

L'effet de l'excentricité du cylindre elliptique interne (e_1) est illustré sur les figures (4.24), (4.25), (4.26)(4.27), et (4.28). Pour $\alpha=0^\circ$ et $Ra=10^3, 5.10^3, 10^4, 5.10^4$ et 10^5 avec $e_2=0.5$.

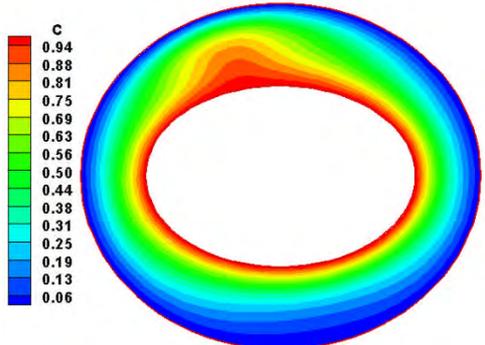
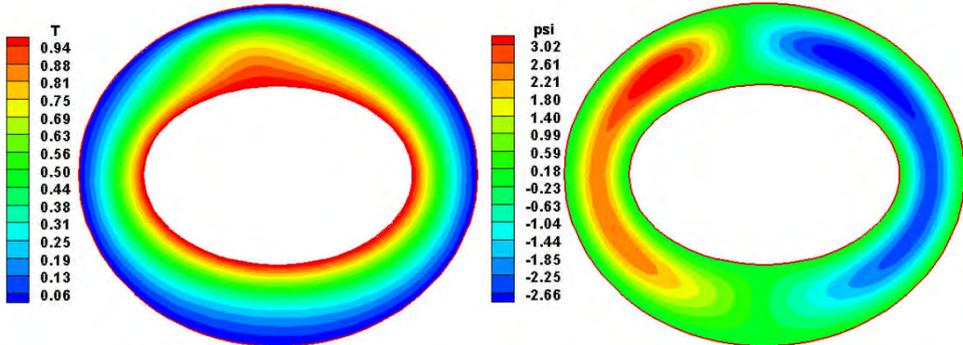
Nous avons utilisé quatre valeurs de e_1 (0.58, 0.688 ,0.74 et 0.78) pour déterminer les distributions des isothermes, des isoconcentrations ainsi que les lignes de courant.

Les figures citées ci-dessus nous permettent de remarquer que quelque-soit l'espace annulaire utilisé (c'est-à-dire quelque-soit la valeur de e_1 utilisée) quand on augmente la valeur du nombre de Rayleigh, le taux de transfert de chaleur et de masse ainsi que les valeurs de la fonction de courant maximales augmentent, et l'augmentation de la valeur de l'excentricité du cylindre elliptique e_1 , provoque un élargissement de l'espace annulaire (augmentation de la distance entre les deux parois elliptiques interne et externe), ce qui se traduit par une intensification de la convection naturelle double diffusive.

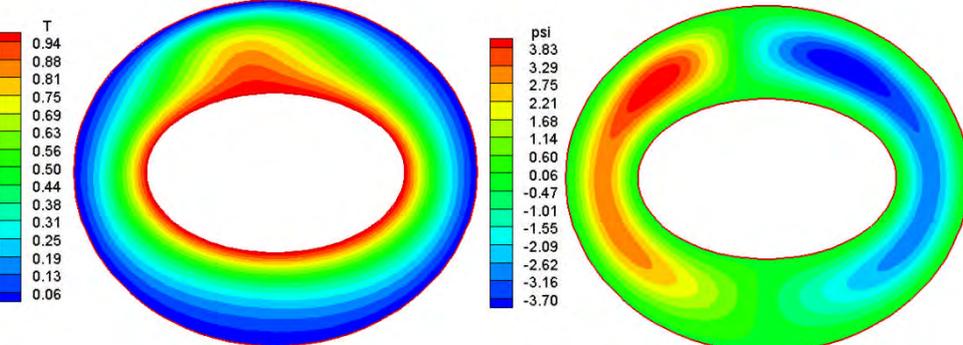


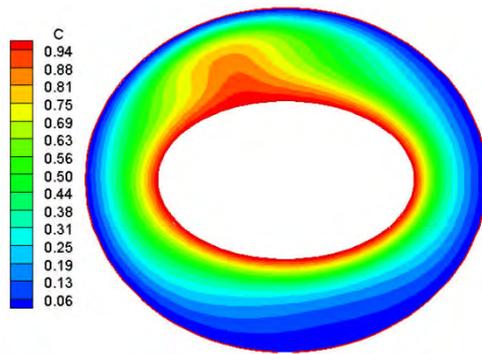


$e_1=0.688$



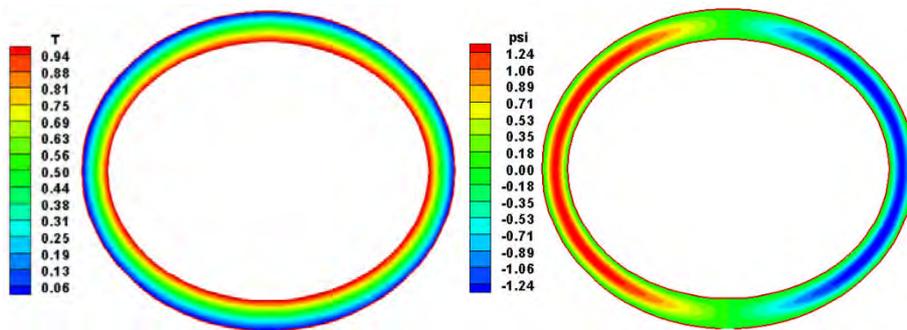
$e_1=0.74$



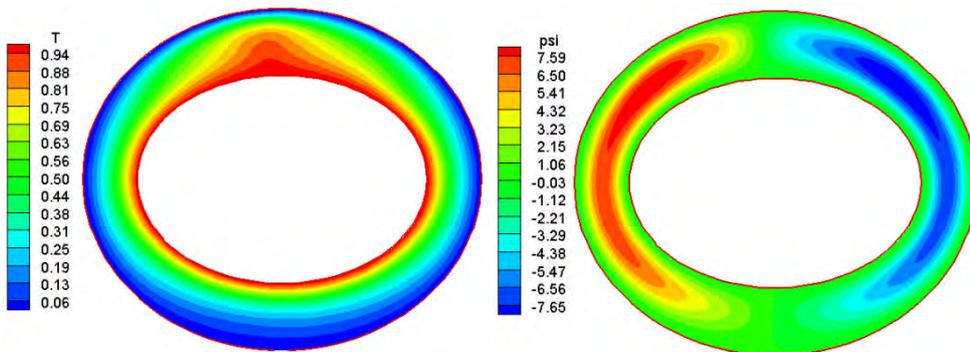


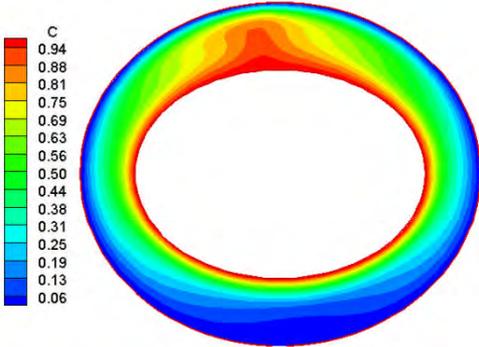
$e_1=0.78$

Figure 4.24: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^3$, $\alpha=0^\circ$, $e_2=0.5$, $Le=2$ et $N=1$.

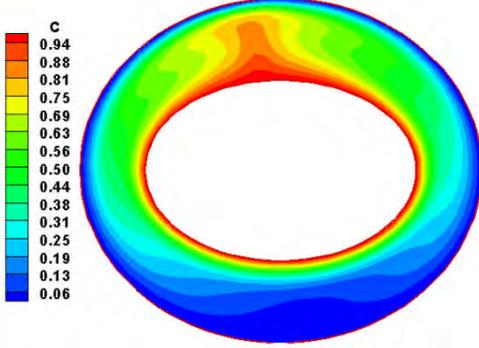
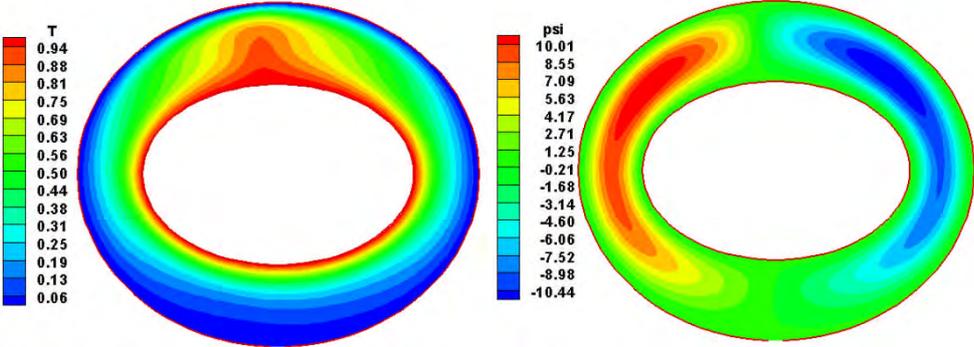


$e_1=0.58$

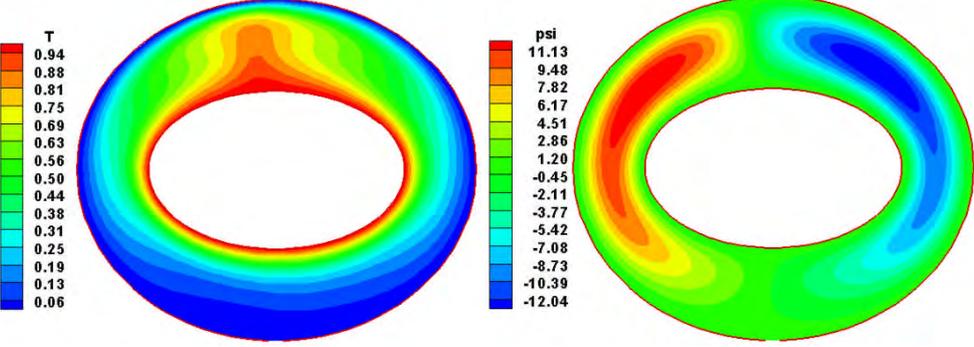


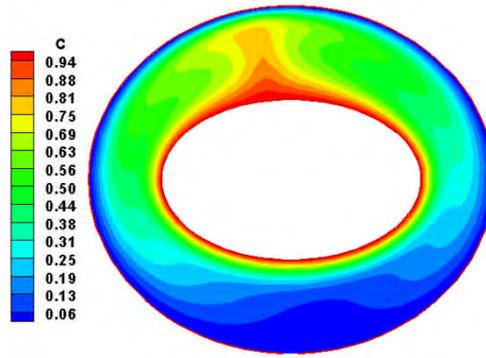


$e_1=0.688$



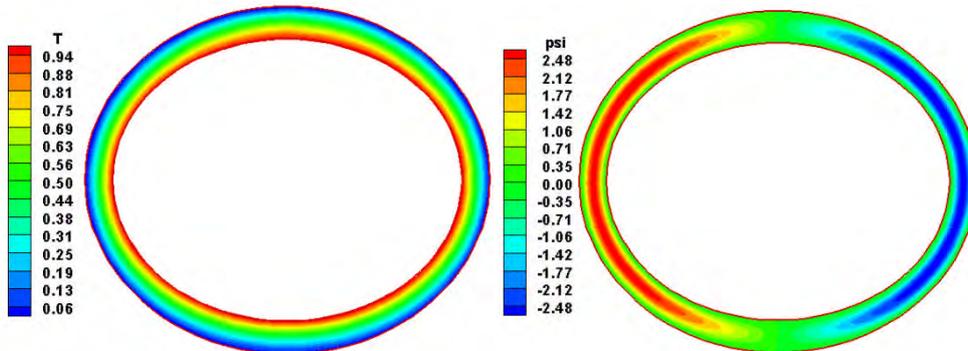
$e_1=0.74$



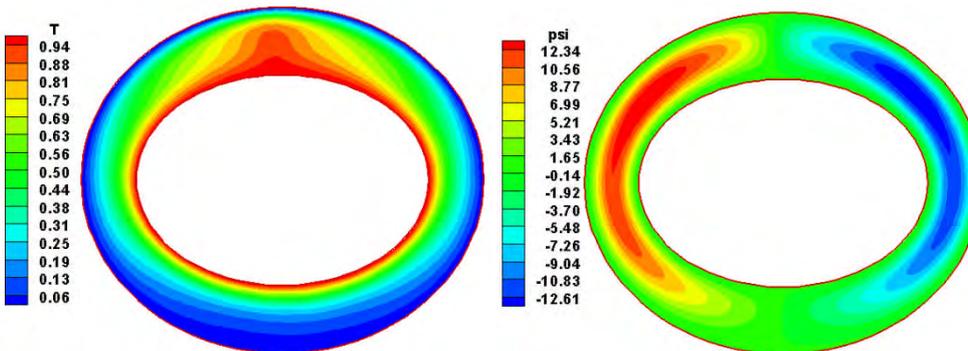
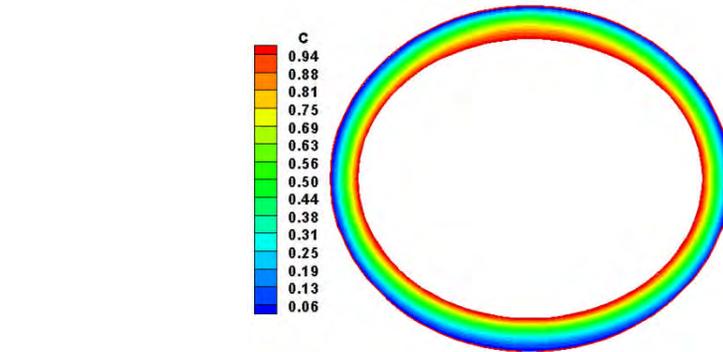


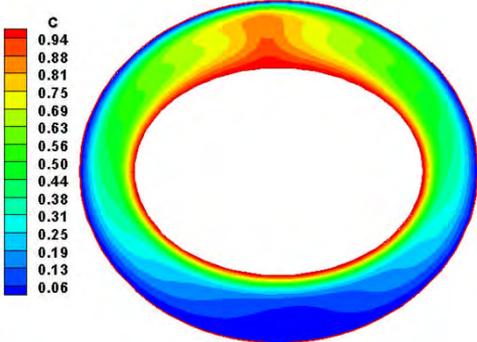
$e_1=0.78$

Figure 4.25. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations por $Ra=5.10^3$, $\alpha=0^\circ$, $e_2=0.5$, $Le=2$ et $N=1$.

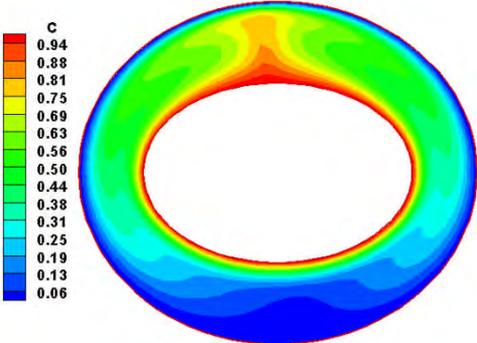
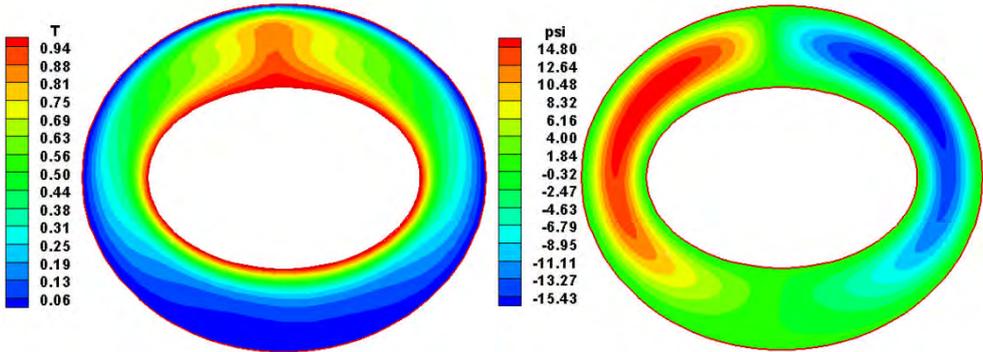


$e_1=0.58$

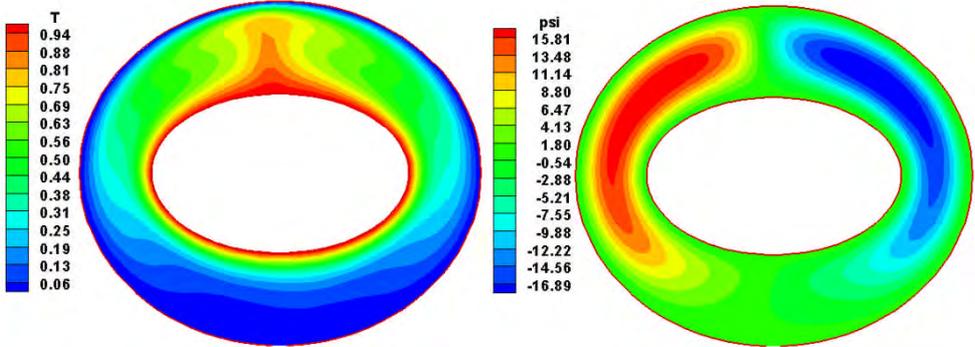


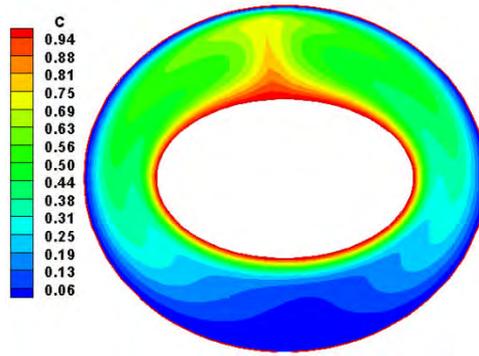


$e_1=0.688$



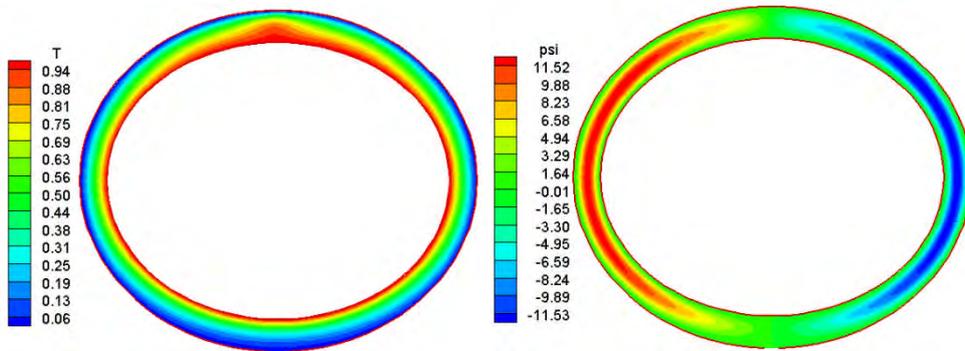
$e_1=0.74$



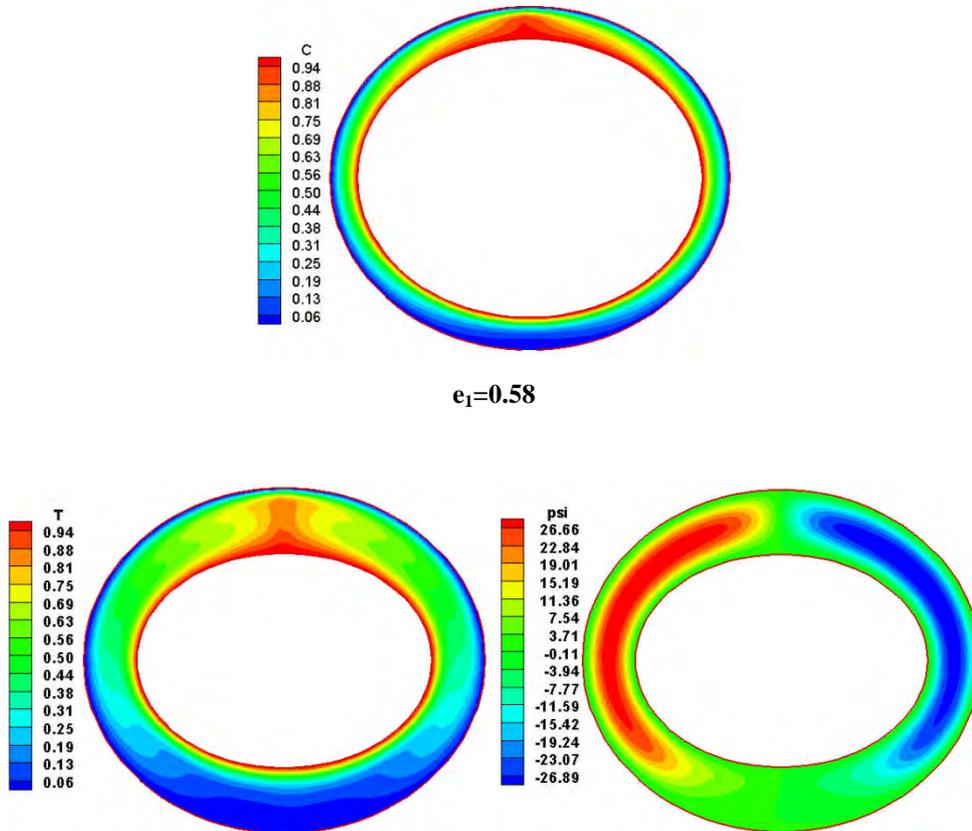


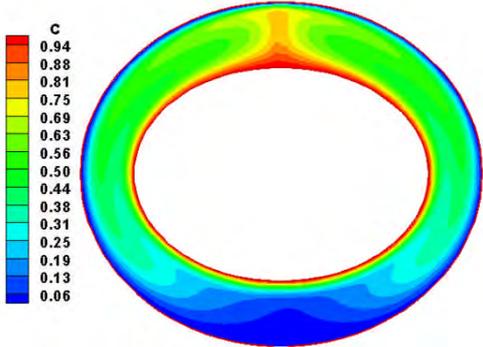
$e_1=0.78$

Figure 4.26: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $e_2=0.5$, $Le=2$ et $N=1$.

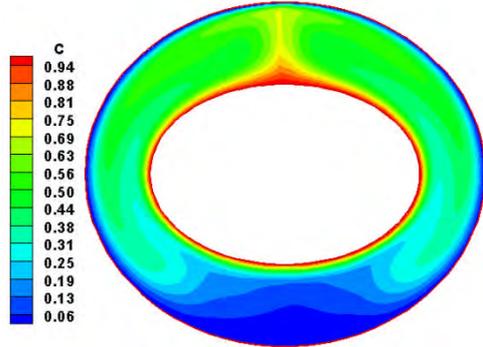
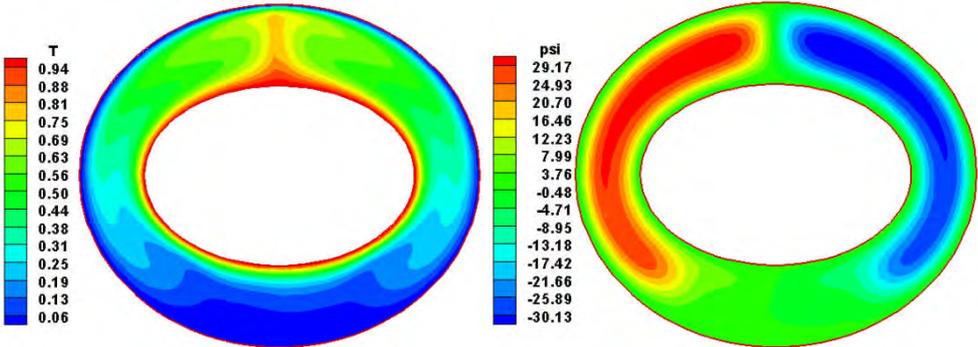


$e_1=0.58$

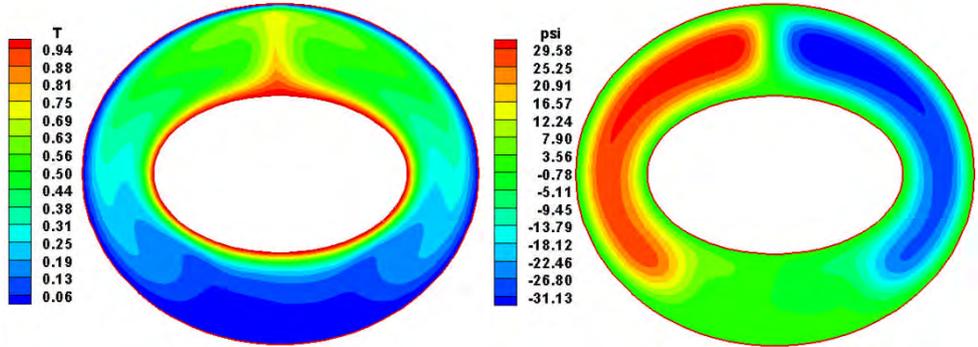


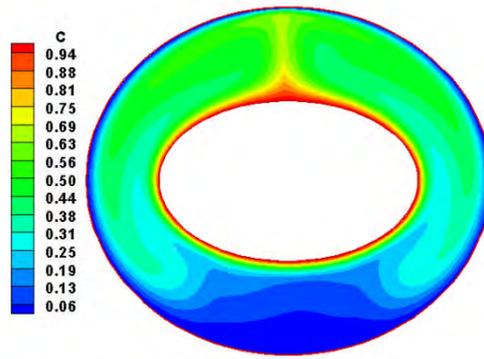


$e_1=0.688$



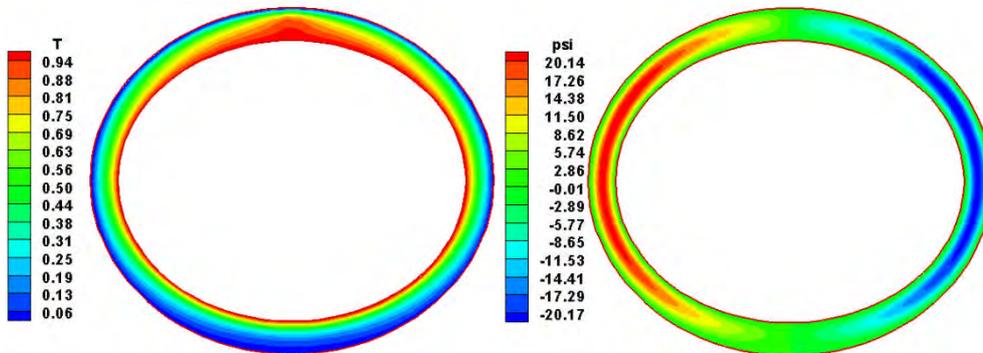
$e_1=0.74$



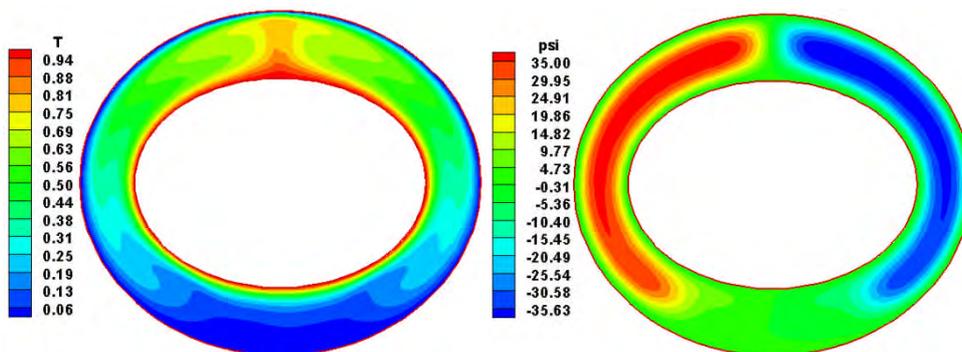


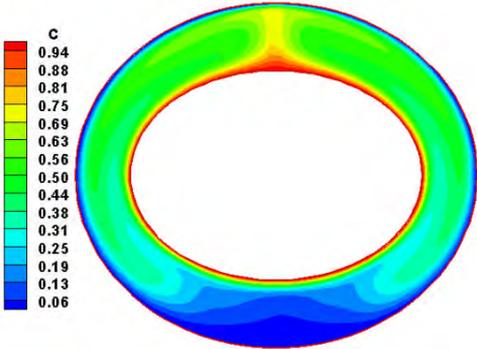
$e_1=0.78$

Figure 4.27 : Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=5.10^4$, $\alpha=0^\circ$, $e_2=0.5$, $Le=2$ et $N=1$.

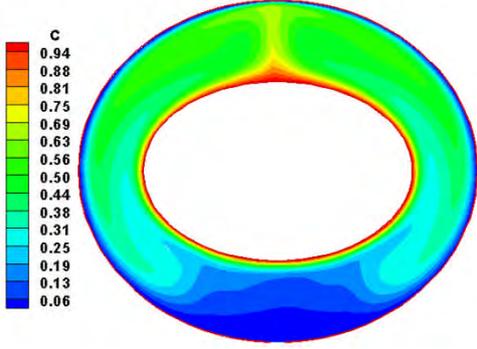
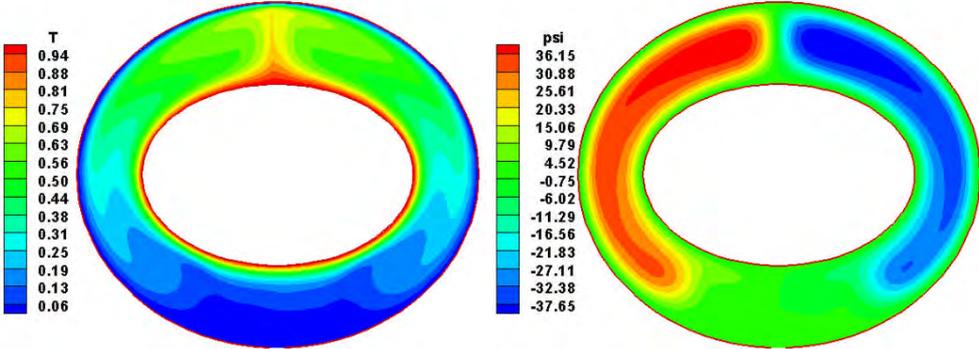


$e_1=0.58$

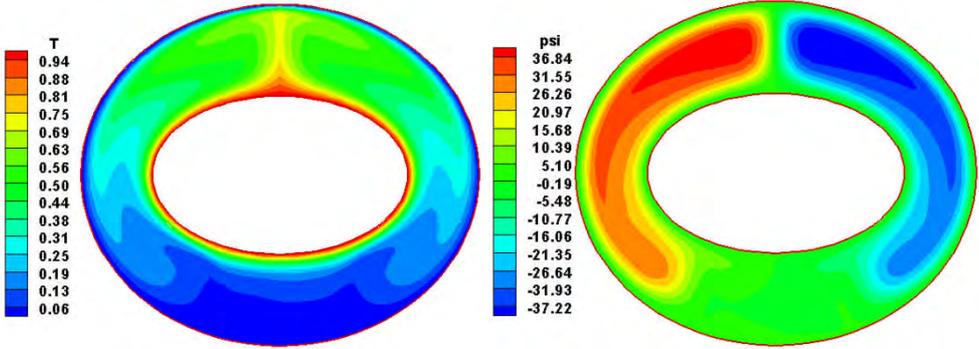




$e_1=0.688$



$e_1=0.74$



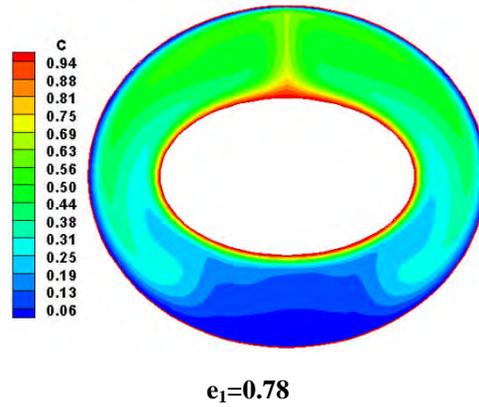


Figure 4.28: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha=0^\circ$, $e_2=0.5$, $Le=2$ et $N=1$.

Puisque cette étude examine la convection naturelle double diffusive dans un espace annulaire dont la géométrie varie avec l'excentricité, la conductivité thermique équivalente est le paramètre le plus approprié pour comparer les transferts de chaleur intervenant dans les diverses géométries considérées. Le nombre de Nusselt est proportionnel à la valeur globale du taux de transfert de chaleur qui se compose des modes conduction et convection, en considérant que la conductivité thermique équivalente représente le rapport du transfert de chaleur total entre les cylindres elliptiques intérieur et extérieur, le nombre de Nusselt n'est pas un bon indicateur du transfert de chaleur en comparant les différentes géométries.

La conductivité thermique équivalente locale est définie comme étant le rapport du nombre de Nusselt local d'une surface au voisinage de laquelle un fluide est en mouvement au nombre de Nusselt local qui serait calculé si le fluide était statique. La conductivité thermique équivalente globale est donnée par le rapport des nombres moyens de Nusselt pour l'un ou l'autre cas.

$$\lambda_{eq} = \frac{\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{convection+conduction}}{\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{conduction}}$$

En faisant varier la valeur de l'excentricité (e_1) du cylindre elliptique interne pour un nombre de Rayleigh égal à 5.10^4 , nous remarquons sur la figure 4.29 que la conductivité thermique équivalente globale λ_{eq} augmente avec l'augmentation de l'excentricité (e_1), ce qui dénote d'une intensification de la convection naturelle thermique.

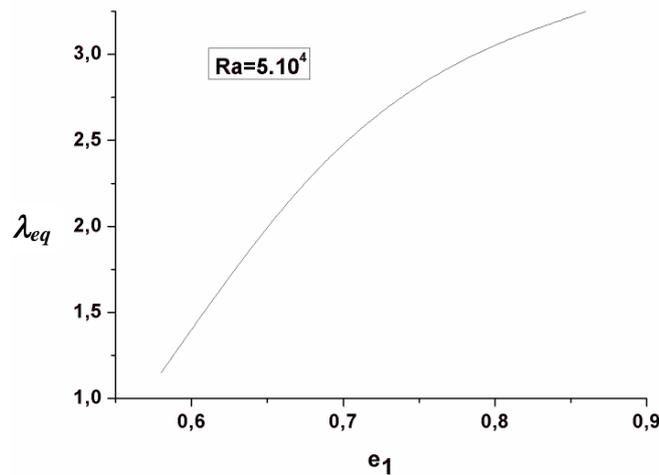


Figure 4.29. Effet de l'excentricité e_1 sur la conductivité équivalente globale sur la paroi interne.

4.5.7. Effet du nombre de Lewis:

Les résultats que nous allons maintenant présenter concernent les transferts thermique et massique ainsi que les structures de l'écoulement dans une enceinte annulaire délimitée par les parois de deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux. Pour une gamme du nombre de Lewis variant de 0.5 à 100, $N=1$, $\theta=0^\circ$ et $Ra=10^5$.

Comme illustré sur la figure 4.30. On remarque que pour un faible nombre de Lewis $Le=0.5$, le transfert de masse à l'intérieur de notre espace annulaire est principalement véhiculé par le processus de la diffusion. Pour $Le=1$, sur la figure 4.31. Puisque le nombre de Lewis compare la diffusivité thermique à la diffusivité solutale et dans ce cas les forces de flottabilité thermique et solutale sont comparables, les isothermes et les isoconcentrations se confondent. Pour un nombre de Lewis $Le > 1$, les figures (4.32-4.38) montrent que le panache massique rétrécit par rapport au panache thermique au fur et à mesure que le nombre de Lewis augmente ceci est dû à la diffusivité thermique du milieu qui est entrain d'augmenter en augmentant le nombre de Lewis, aussi les valeurs de la fonction de courant diminuent ce qui dénote d'une diminution de l'intensité de l'écoulement. L'épaisseur de la couche limite solutale est plus mince que la couche limite thermique autour du cylindre elliptique interne. Par conséquent, le taux de transfert de masse est supérieur au taux de transfert de chaleur.

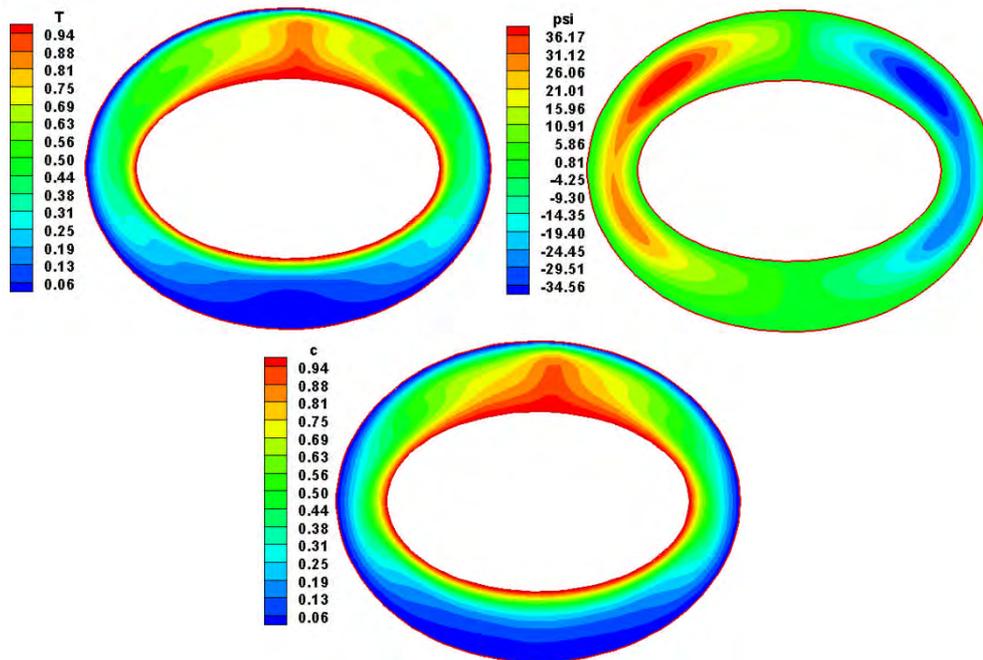


Figure 4.30. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=0.5$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

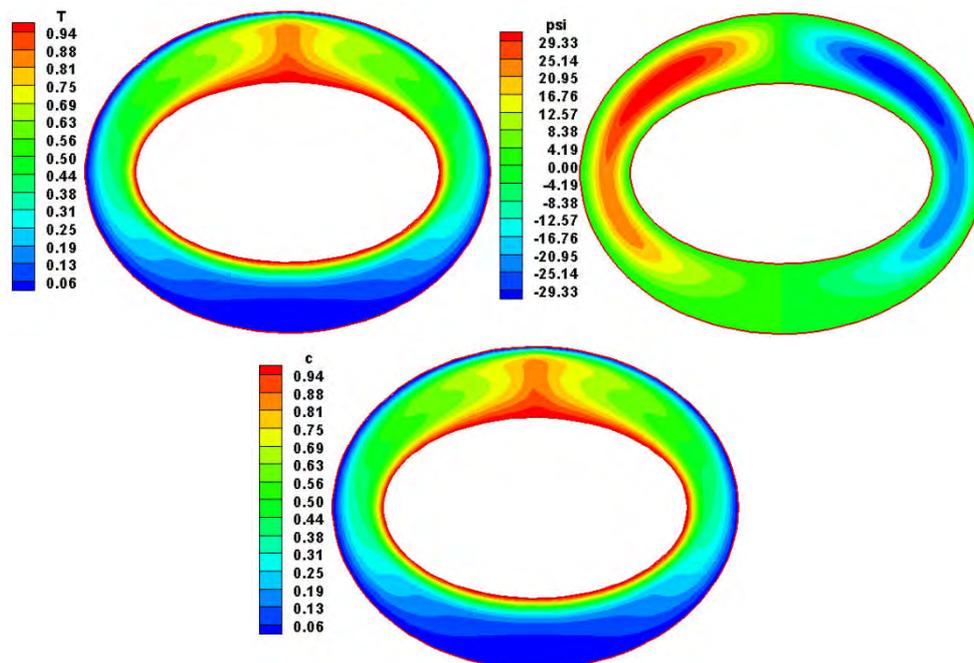


Figure 4.31. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

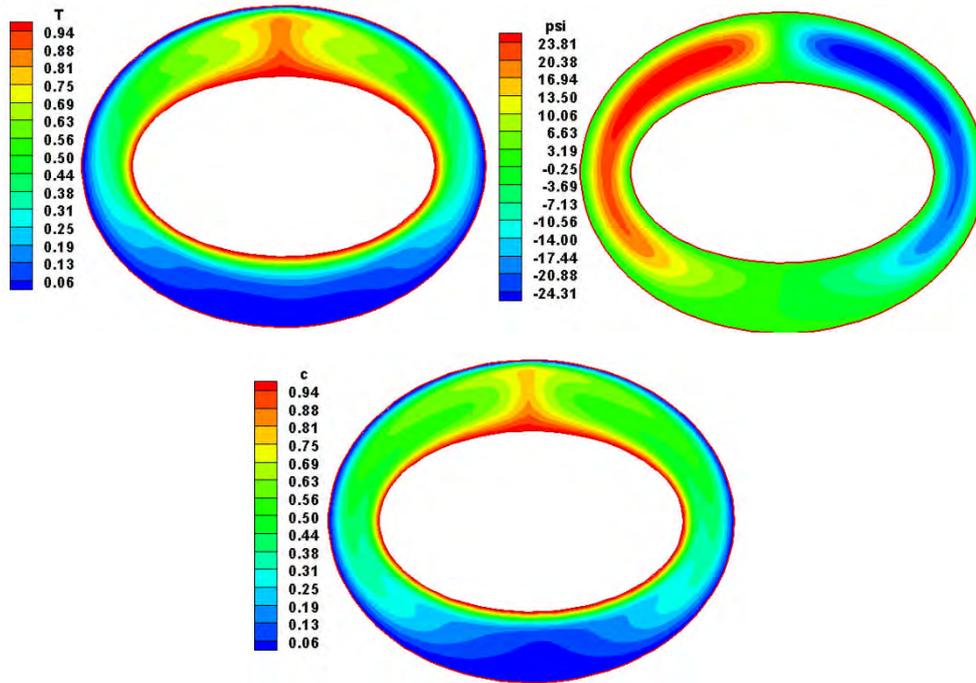


Figure 4.32. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=2$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

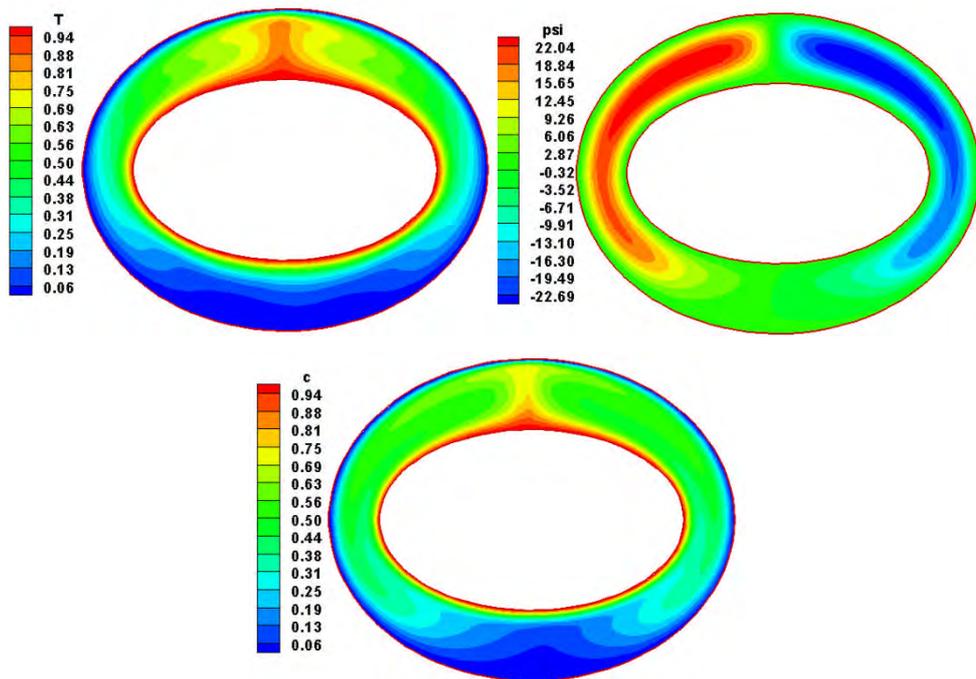


Figure 4.33. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=3$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

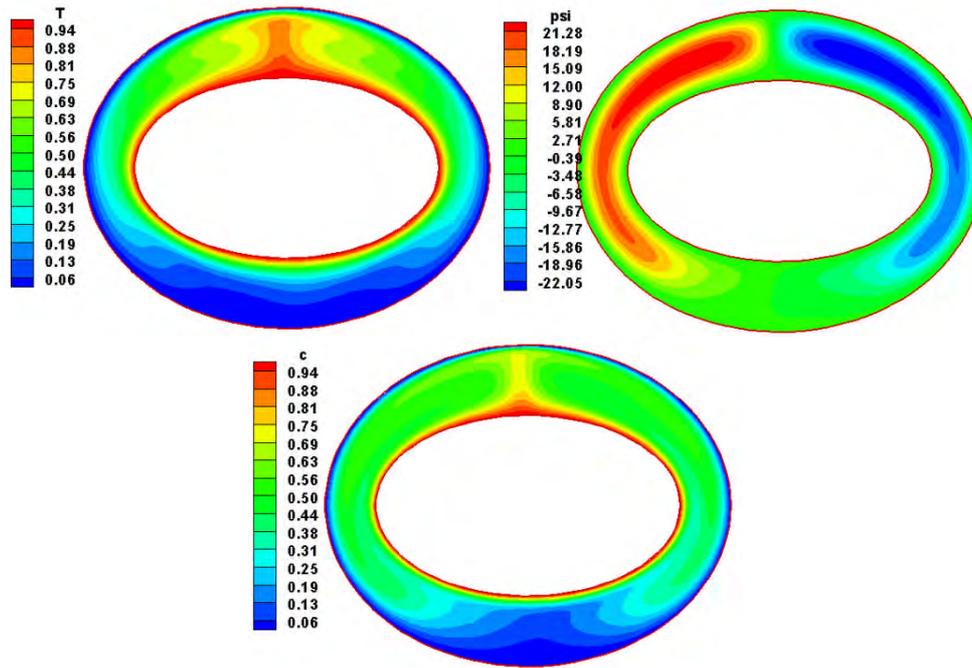


Figure 4.34. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=4$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

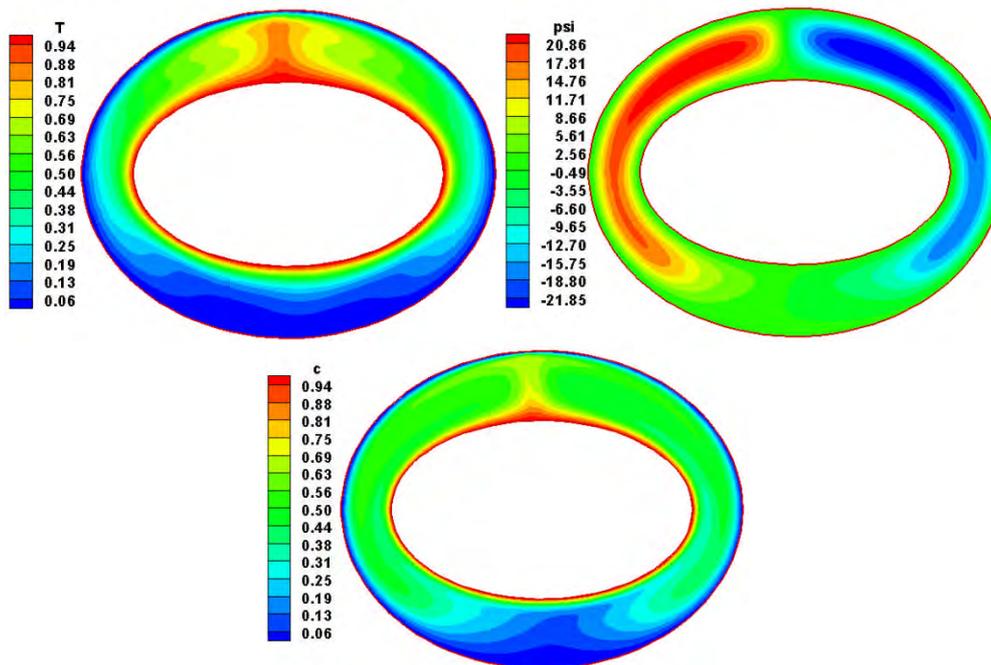


Figure 4.35. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

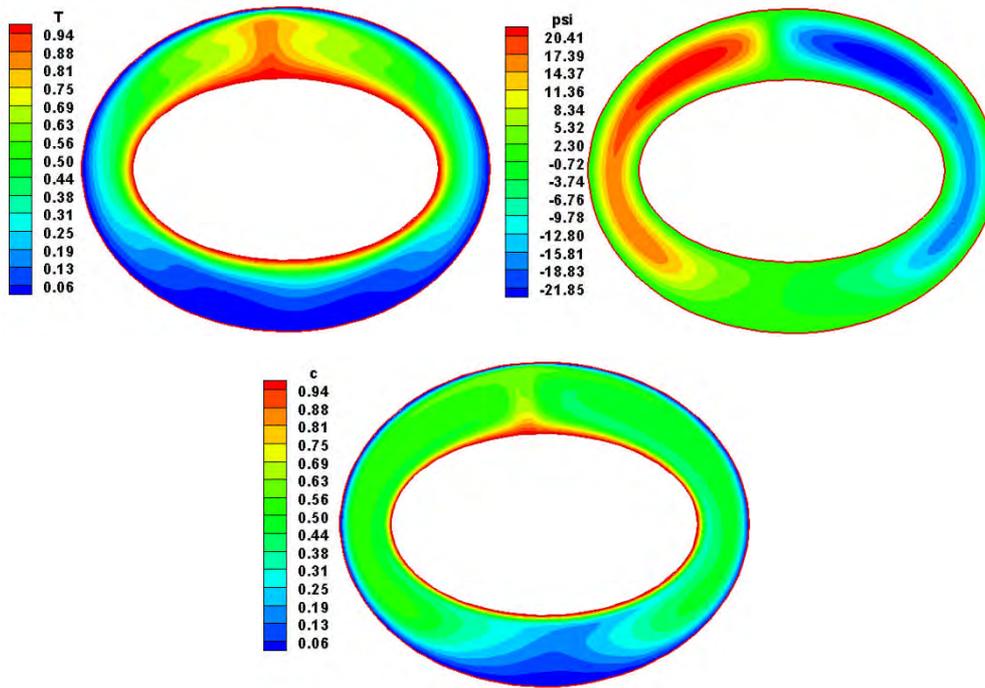


Figure 4.36. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=10$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

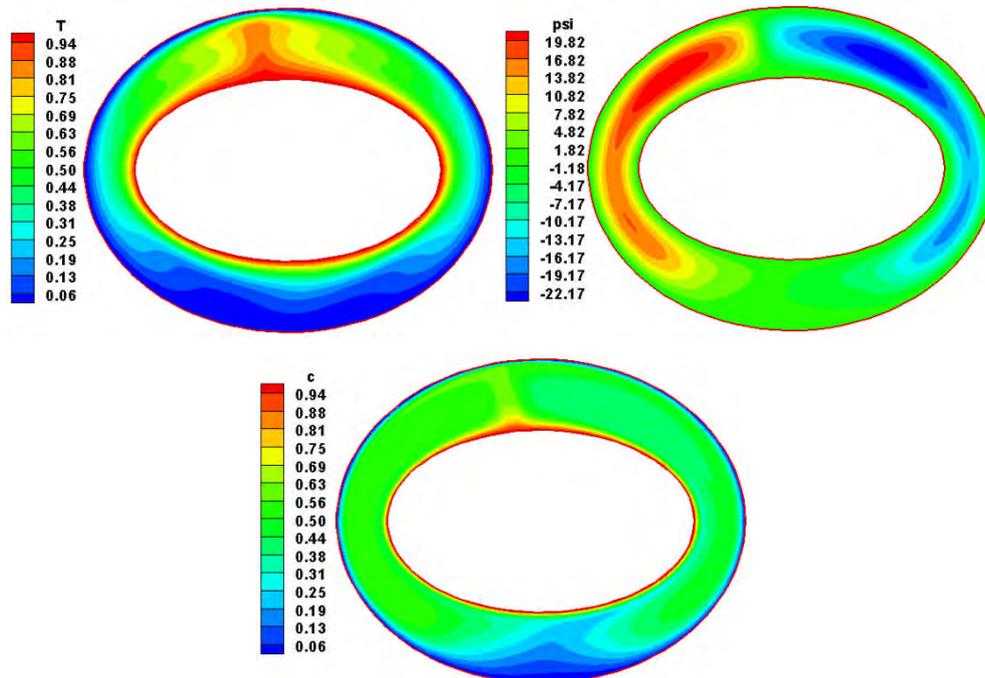


Figure 4.37. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^5$, $\alpha=0^\circ$, $Le=20$, $e_2=0.6$, $e_1=0.8$ et $N=1$.

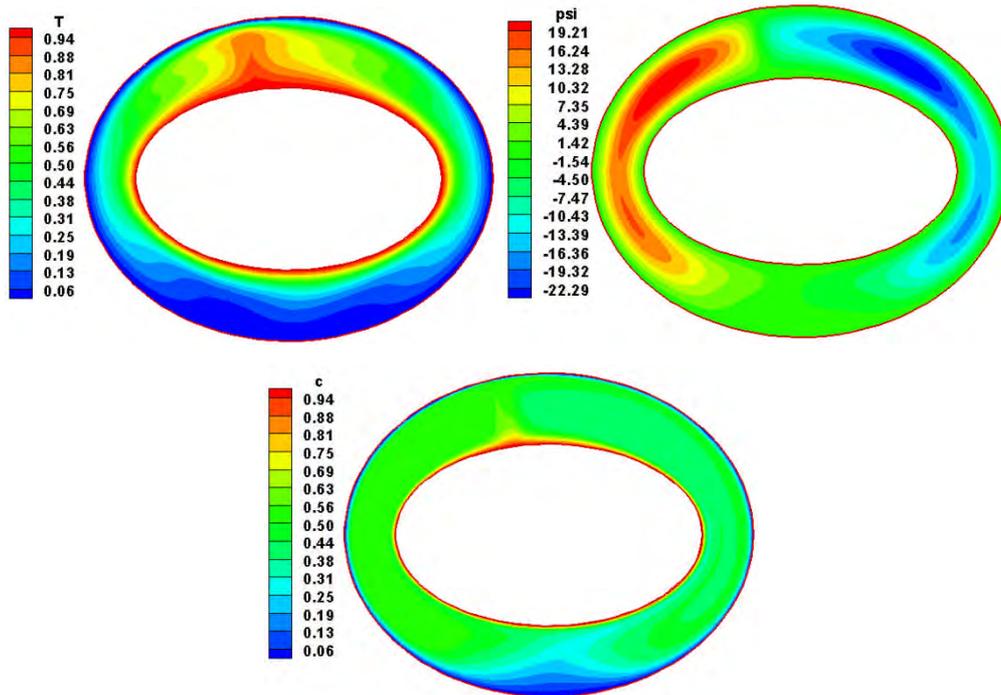


Figure 4.38: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=50$, $e_2 = 0.6$, $e_1 = 0.8$ et $N=1$.

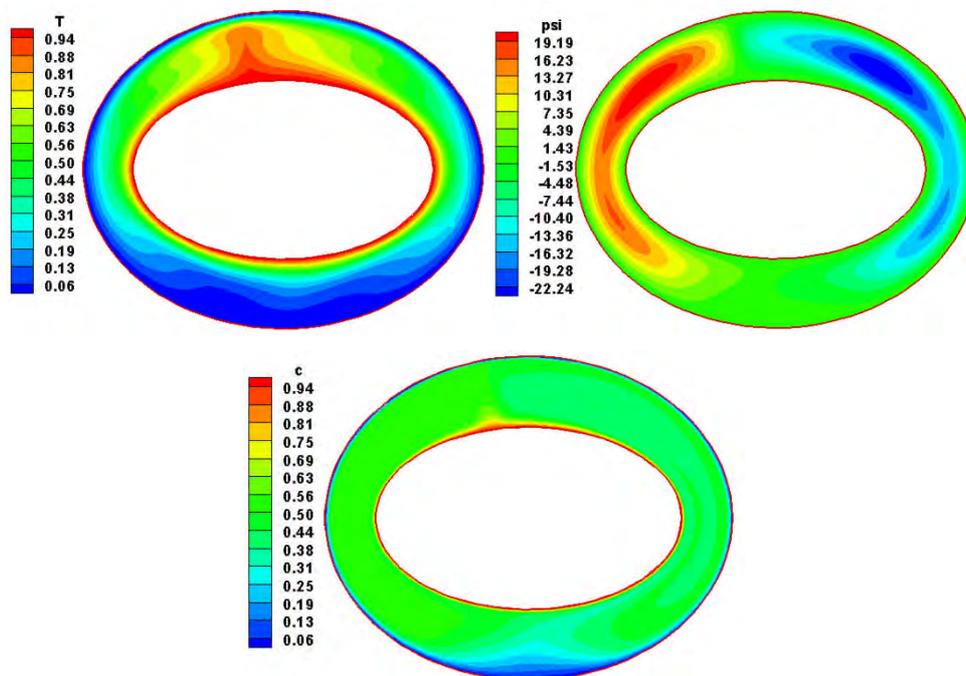


Figure 4.39: Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^5$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=100$, $e_2 = 0.6$, $e_1 = 0.8$ et $N=1$.

4.5.8. Effet du rapport des forces de poussée N :

Nous mettons en évidence dans cette partie, l'effet du rapport des forces de poussée thermique et solutale sur la structure de l'écoulement, les profils des isothermes et des isoconcentrations ainsi que sur les taux de transfert de chaleur et de masse. Nous considérons aussi bien le cas de la convection thermosolutale coopérante (les forces de flottabilité thermique et solutale agissent dans le même sens, $N \geq 0$) et les deux forces s'opposent ($N < 0$). La gamme des valeurs envisagées ici s'étend de -50 à 50 pour N et le nombre de Lewis ($Le=1$ et 5) les autres paramètres sont maintenus constants ($Pr=0.702$ et $Ra=10^6$).

Pour la valeur de $Le=1$, illustrée sur les figures (4.40-4.50) les stratifications thermique et solutale sont semblables, les isothermes et les isoconcentrations se confondent quelque-soit la valeur de N . Pour la valeur du rapport de poussée $N=0$, (fig. 4.40), dans cette situation, les forces de flottabilité solutales sont nulles et le déplacement des particules s'effectue sous le seul effet du gradient thermique. Lorsque $N=-1$, (fig. 4.46) les forces de flottabilité thermique et solutale sont comparables et opposées, nous sommes en présence d'une stratification thermique et massique les isothermes et isoconcentrations sont des courbes concentriques autour du cylindre elliptique interne et par conséquent il n'y a pas de recirculation dans l'espace annulaire les valeurs de la fonction de courant sont donc pratiquement nulles. Pour les valeurs de $N > 1$, illustrées sur les figures (4.41-4.45), on remarque que les valeurs de la fonction de courant qui augmentent dans même le sens dénotant d'une intensification de l'écoulement. Par contre pour les valeurs de $N < -1$, illustrées sur les figures (4.47-4.50), l'écoulement se fait en sens inverse que pour le cas précédent, Ceci indique que les forces de flottabilités thermique et massique agissent dans ce cas-là en sens inverse.

Lorsque $Le = 5$, qu'on illustre sur les figures (4.51-4.57), nous remarquons dans cette situation, que les distributions de température et de concentration sont différentes car le nombre de Lewis est égal à 5 , ce qui traduit une diffusivité thermique 5 fois plus importante que la diffusivité solutale. On remarque aussi que ces isolignes sont très serrées près des parois, ce qui se traduit par un transfert de chaleur et de masse intense près de ces dernières.

4.5.8. a) : Pour $Le=1$

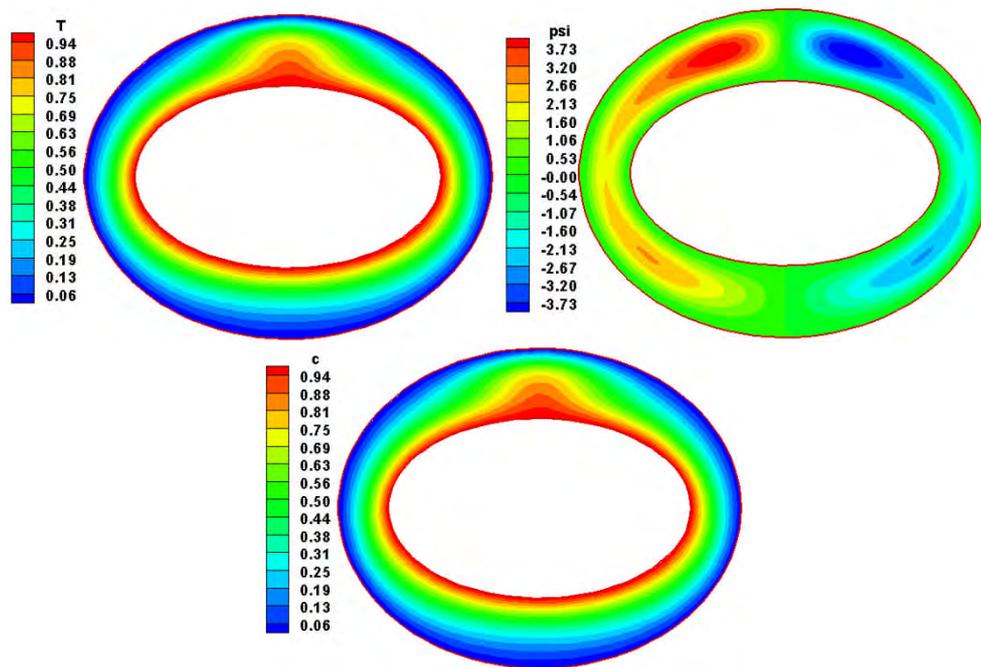


Figure 4.40. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=0$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

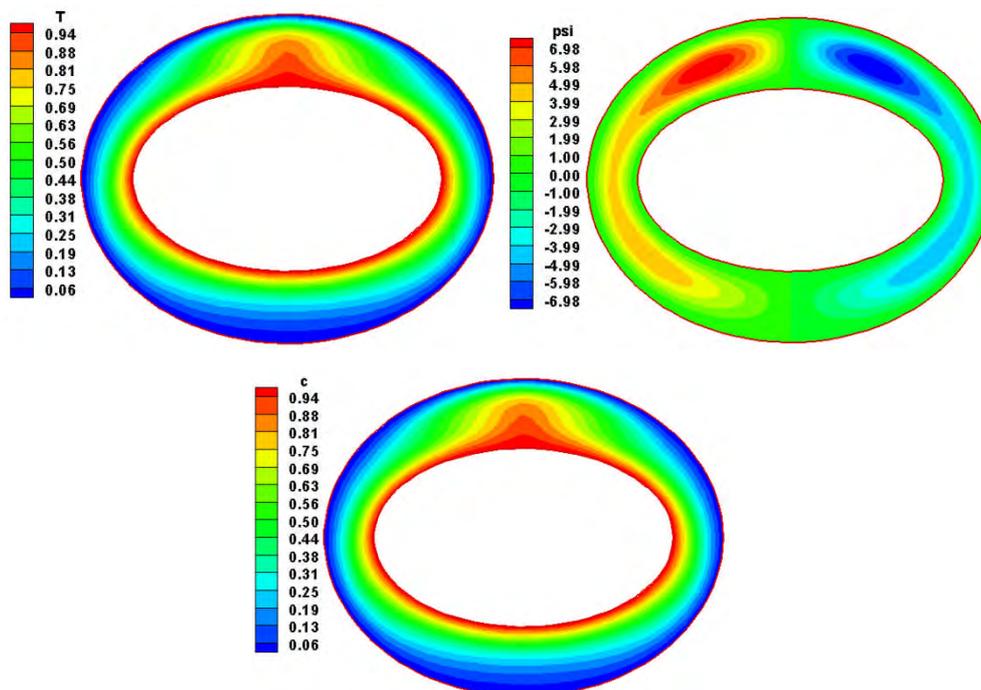


Figure 4.41. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=1$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

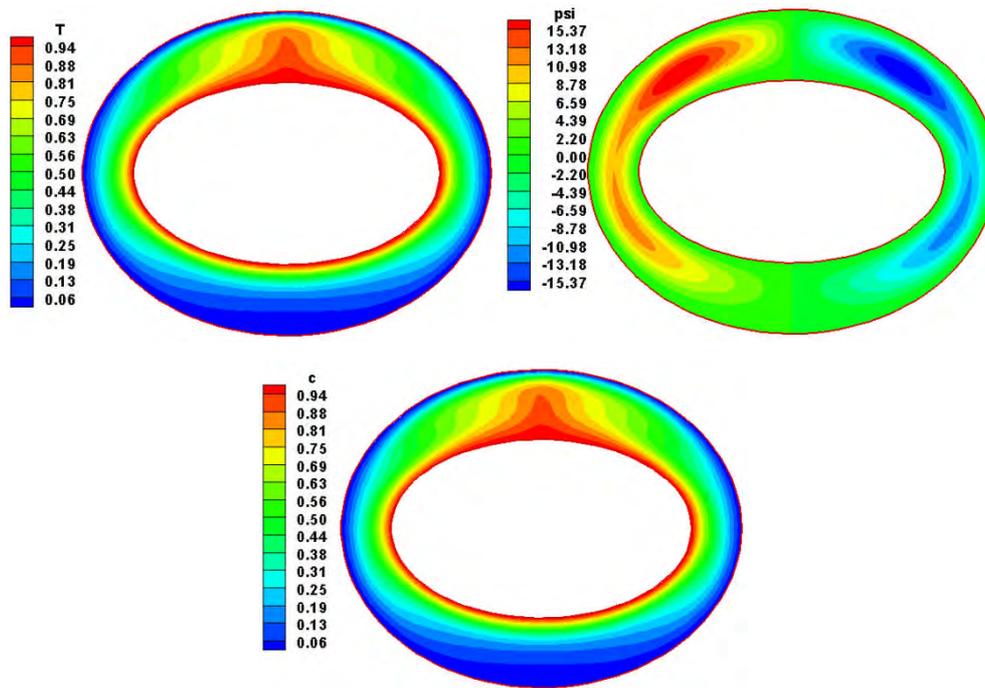


Figure 4.42. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=5$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

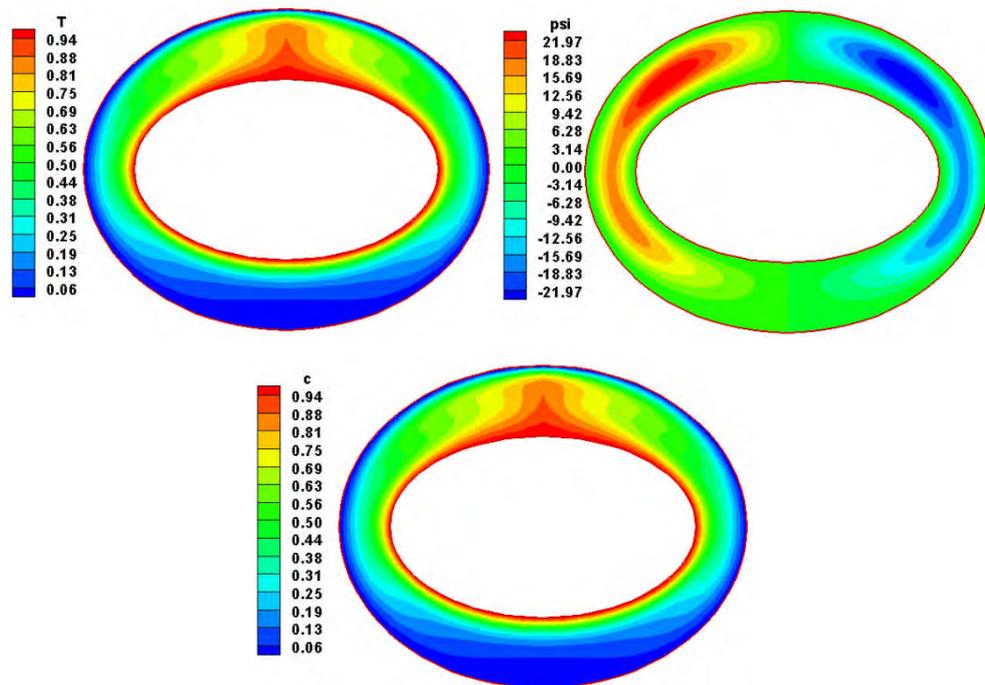


Figure 4.43. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=10$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

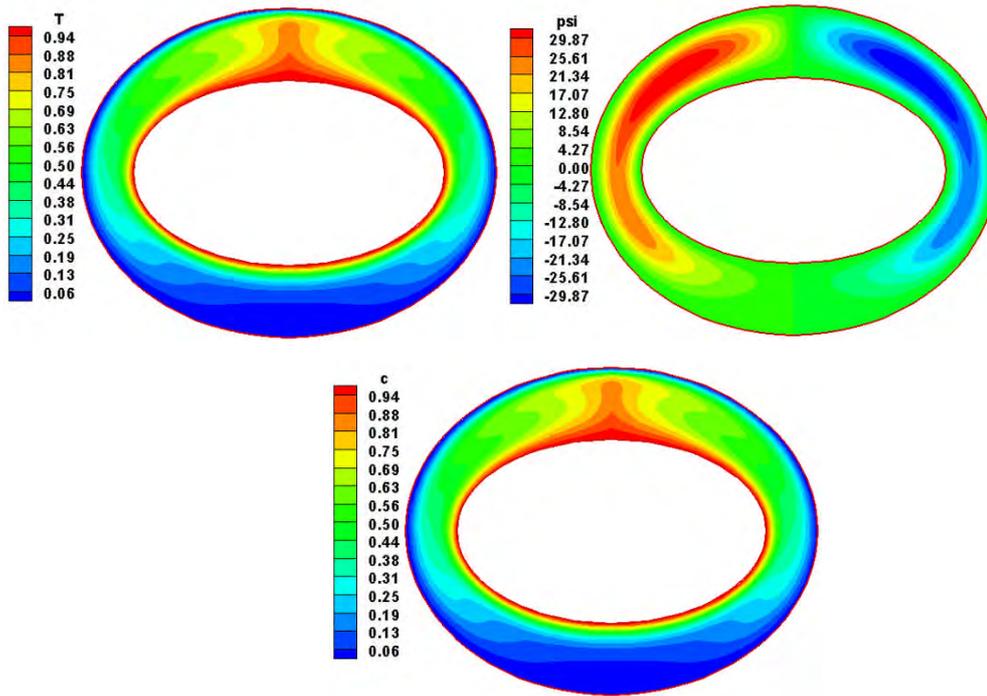


Figure 4.44. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N=20$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

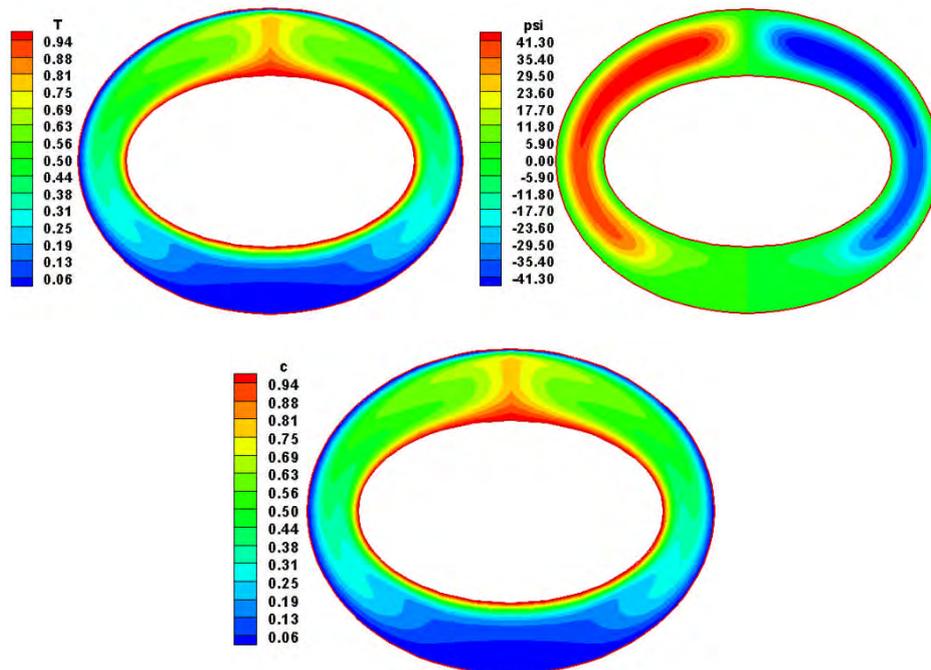


Figure 4.45. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $N=50$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

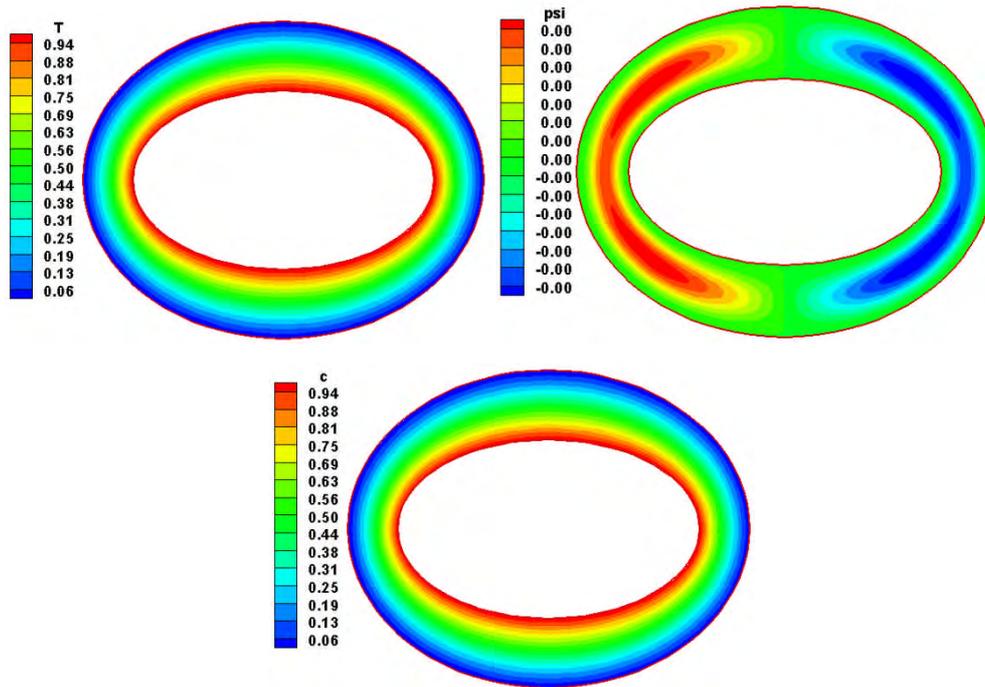


Figure 4.46. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=-1$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

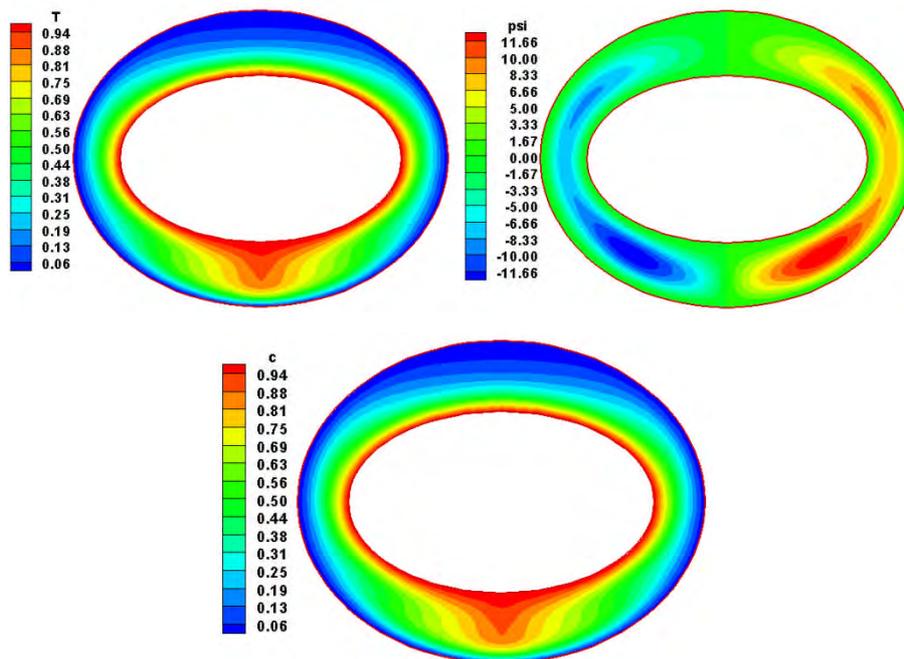


Figure 4.47. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=-5$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

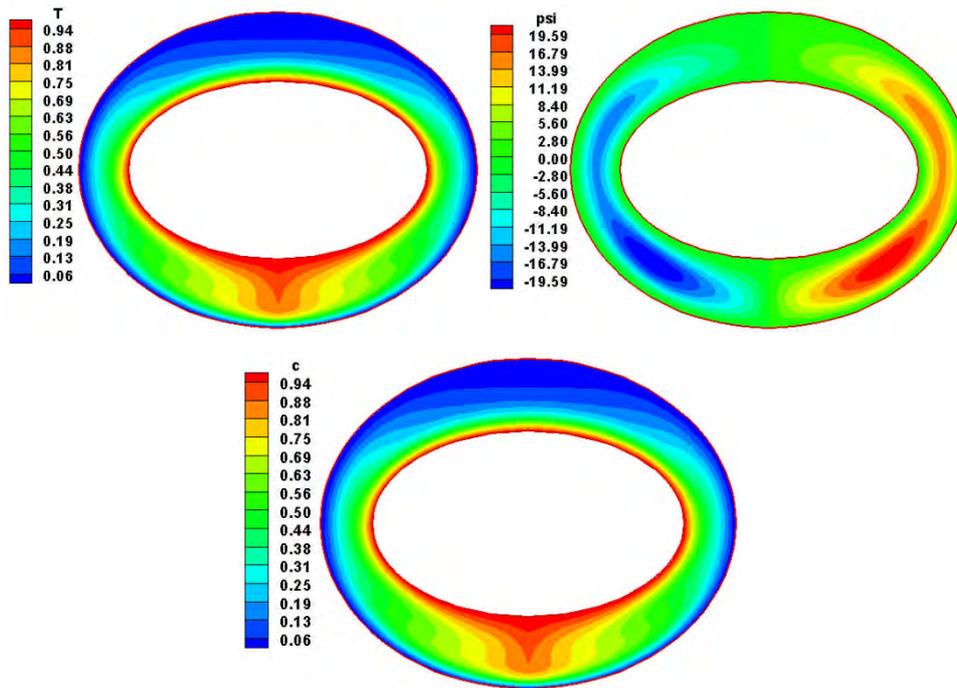


Figure 4.48. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=-10$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

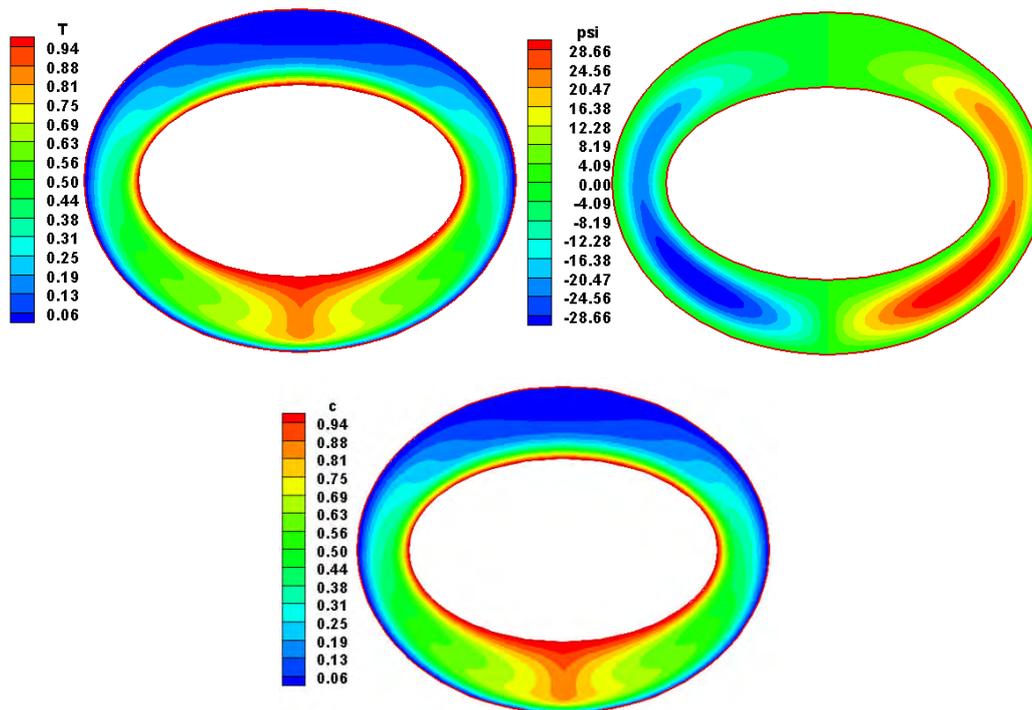


Figure 4.49. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=-20$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

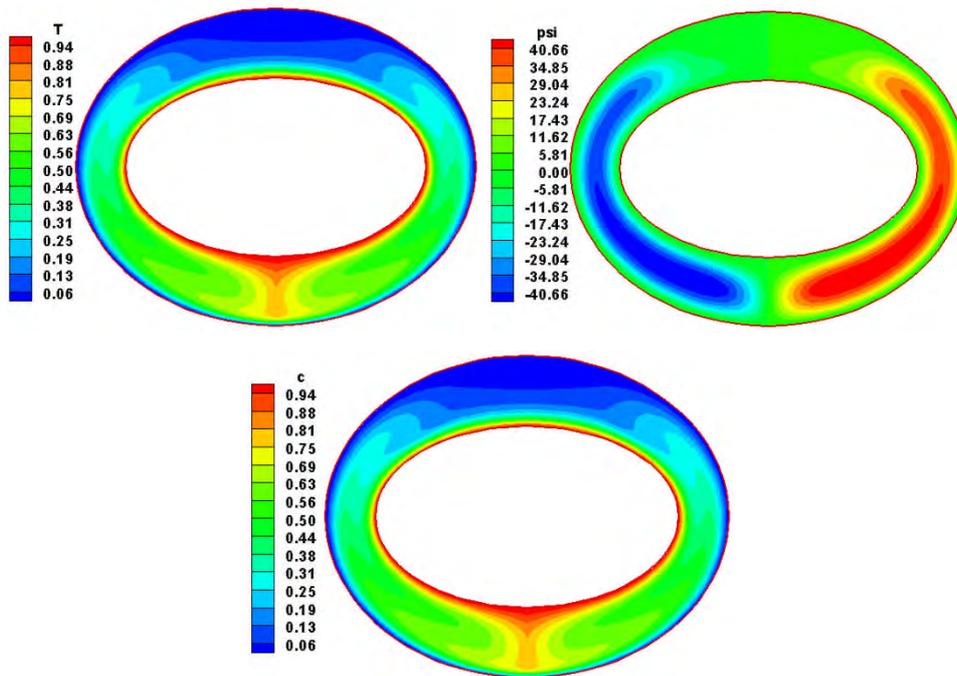


Figure 4.50. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=1$, $N=-50$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

4.5.8. b) : Pour $Le=5$

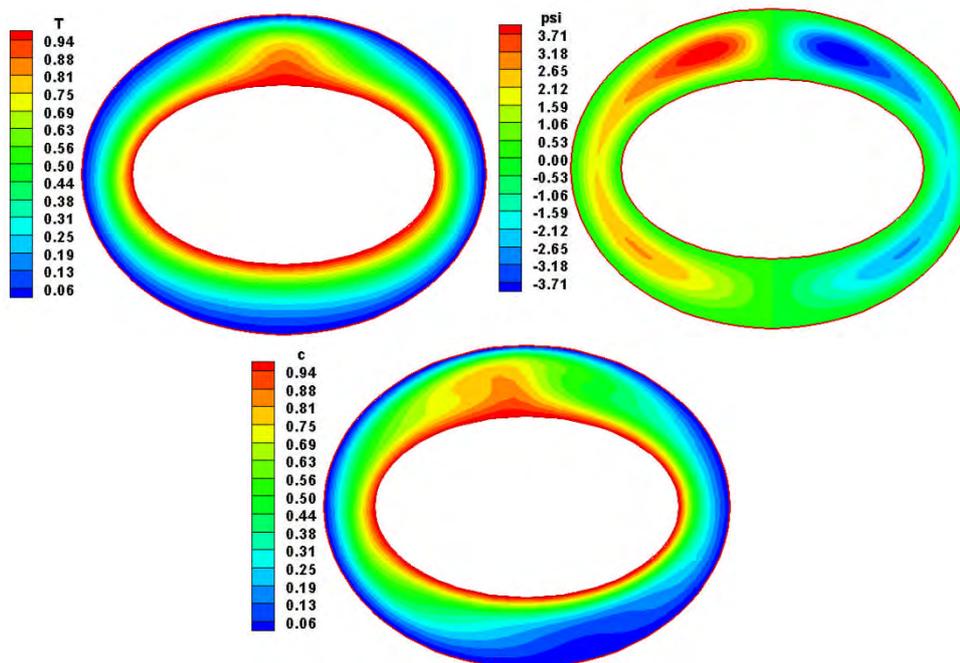


Figure 4.51. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=0$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

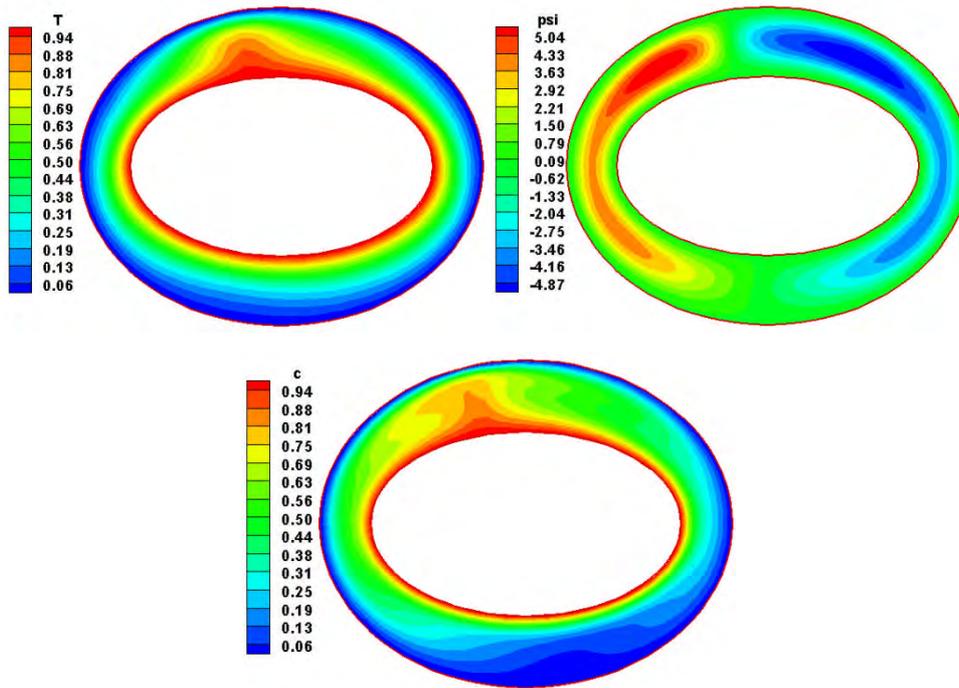


Figure 4.52. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=5$, $N=1$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

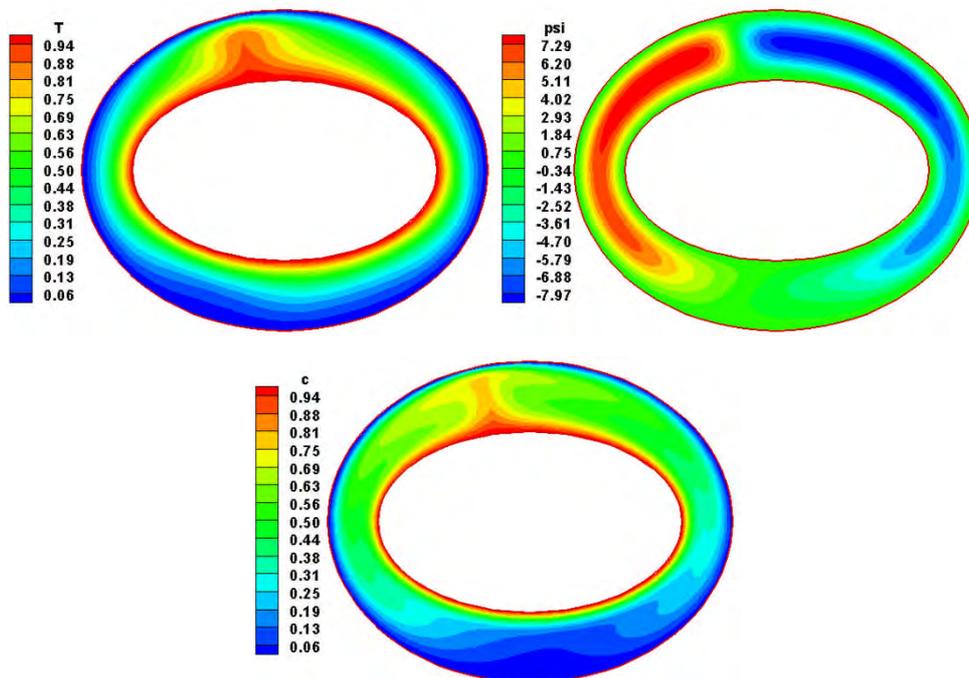


Figure 4.53. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=5$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

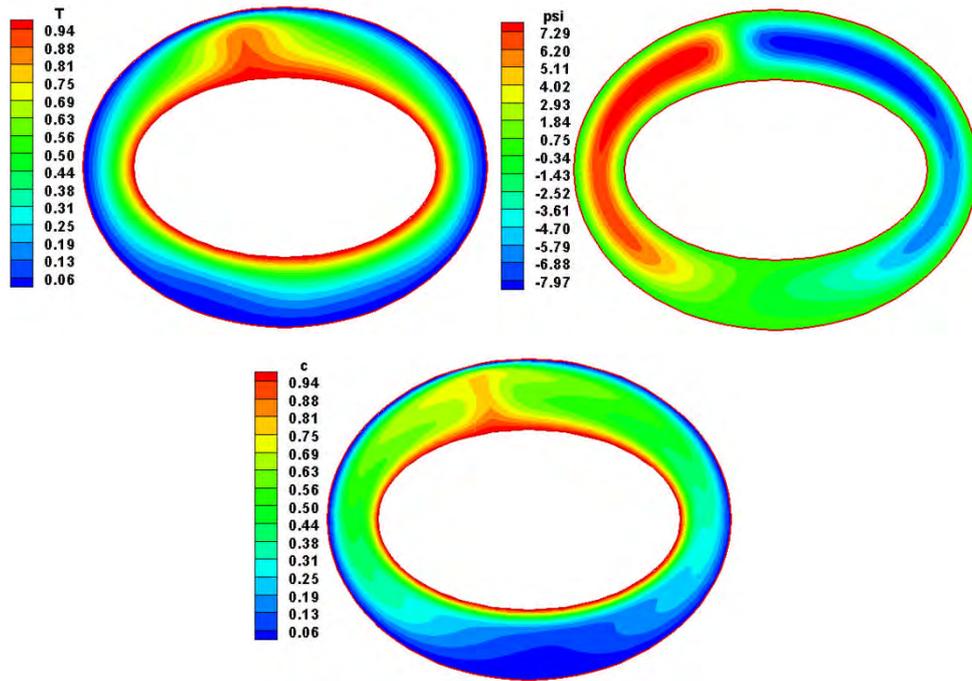


Figure 4.54. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=5$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

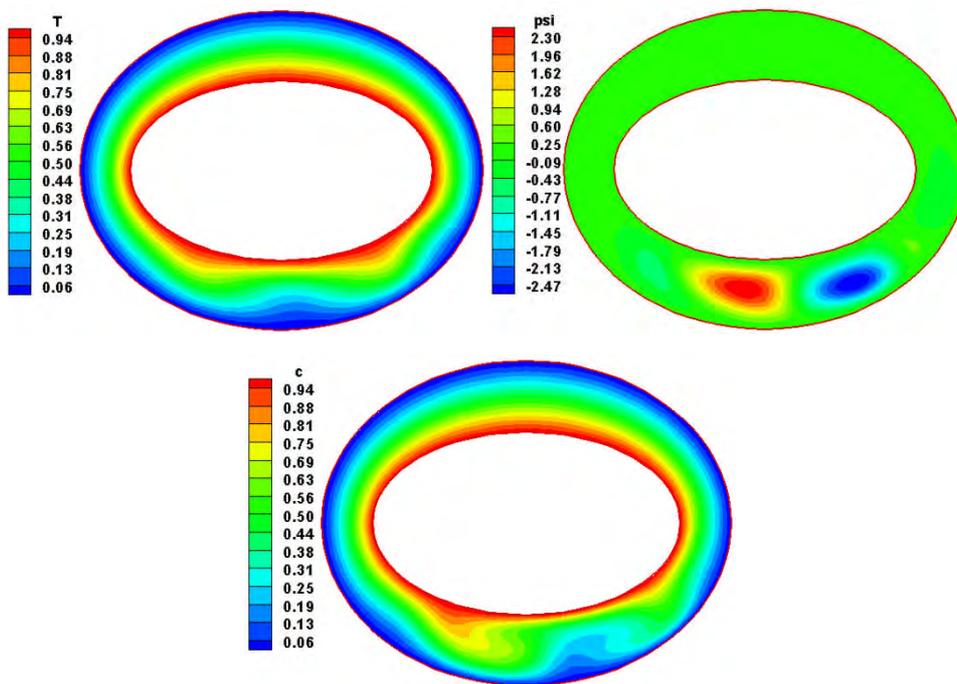


Figure 4.55. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=-1$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

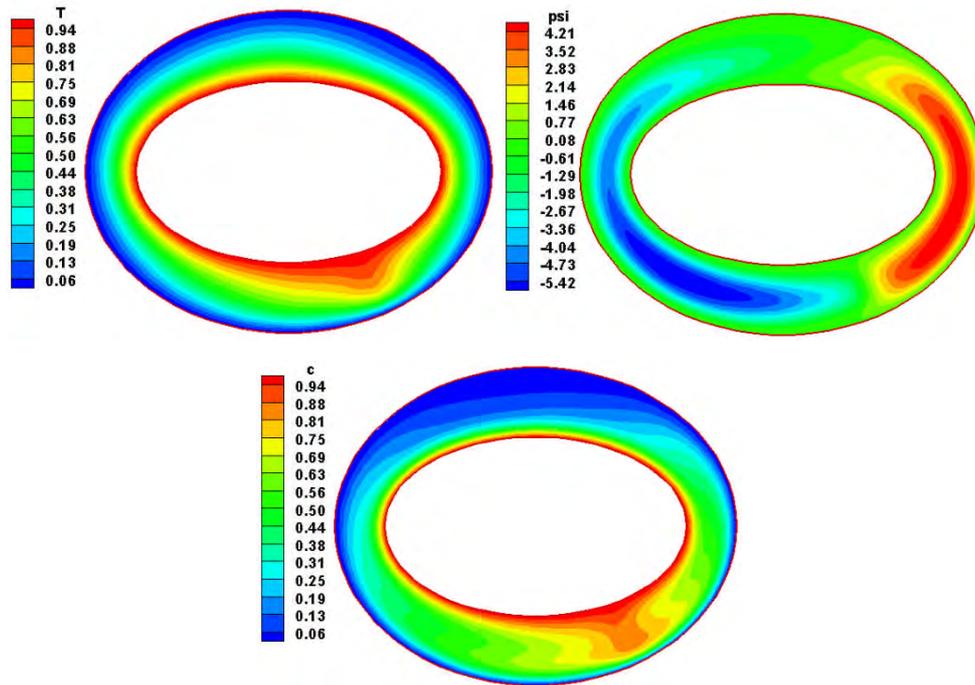


Figure 4.56. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra=10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=-5$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

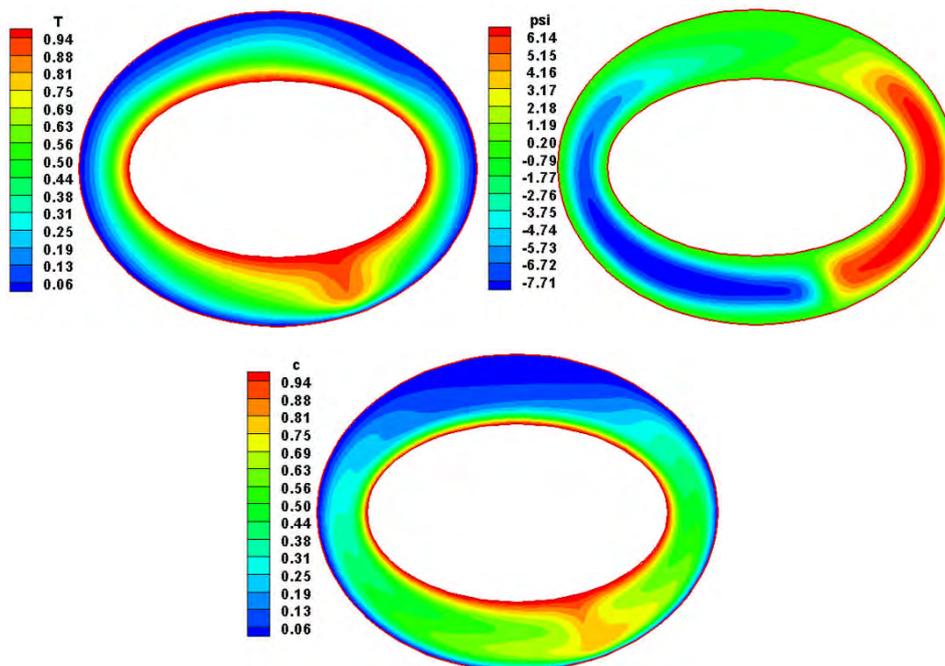


Figure 4.57. Isothermes, lignes de courant et iso-concentrations pour $Ra =10^4$, $\alpha=0^\circ$, $Le=5$, $N=-10$, $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$.

4.5.9. Effet du rapport de poussée N sur les nombre de Nusselt et de Sherwood moyens :

Dans cette partie, nous examinons l'effet de la valeur du rapport des forces de poussée thermique et solutale «rapport de flottabilité » sur les nombre de Nusselt et de Sherwood moyens, pour un nombre de Rayleigh et Lewis constants ($Ra = 10^4$ et $Le = 1$).

Les figures 4.58 et 4.59 montrent qu'il y a un rapport de flottabilité critique $N_{cr} = -1$, où les valeurs des nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont minimums. Leurs valeurs diminuent avec l'augmentation des valeurs de N , quand $N < N_{cr}$ et augmentent avec l'augmentation de la valeur de N quand $N > N_{cr}$, où nous constatons qu'il y a presque une symétrie par rapport à la valeur de la flottabilité critique ($N_{cr} = -1$).

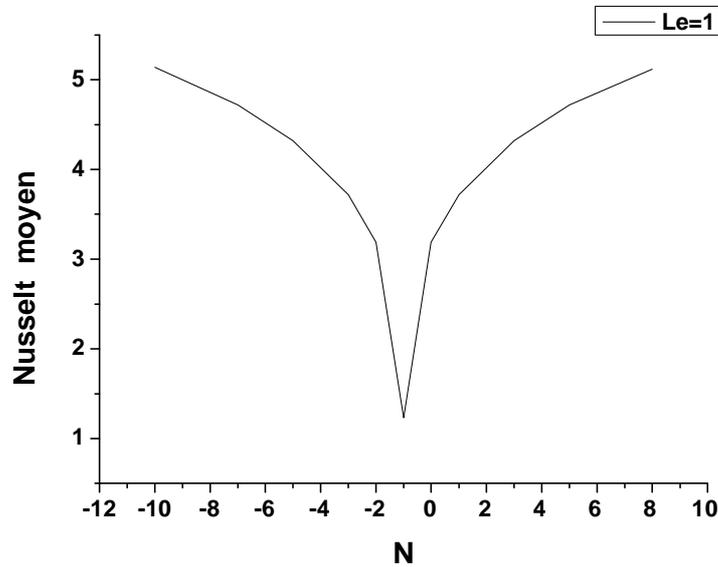


Figure 4.58: Evolution du transfert de chaleur moyen avec le rapport de poussée N pour $Ra=10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $e_2 = 0.4$ et $e_1= 0.688$.

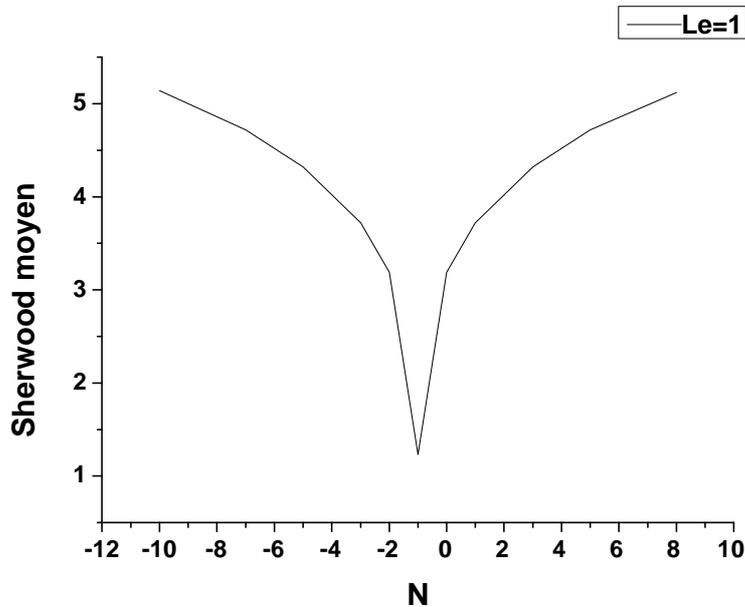


Figure 4.59: Evolution du transfert de matière moyen avec le rapport de poussée N pour $Ra = 10^4$, $\alpha = 0^\circ$, $Le=1$, $e_2 = 0.4$ et $e_1= 0.688$.

Conclusion

Conclusion

Nous avons étudié la convection naturelle double-diffusive bidimensionnelle et laminaire dans une enceinte délimitée par deux cylindres elliptiques confocaux horizontaux.

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de mouvement au sein du fluide, de chaleur à travers les parois actives de l'enceinte et de masse. Ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement. Nous avons mis au point un programme de calcul, basé sur une méthode aux volumes finis, qui permet de déterminer les champs de température, de concentration et la distribution de la fonction de courant au sein du fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système.

L'influence des nombres de Rayleigh, de Lewis et de Prandtl, ainsi que le rapport des forces de volumes et l'excentricité du cylindre elliptique interne, sur l'écoulement, en régime permanent, a été notamment examinée.

Les résultats des simulations numériques ont montré que pour un faible nombre de Rayleigh $Ra=10^3$, le transport de masse dans l'espace annulaire est essentiellement véhiculé par le processus de diffusion. Lorsque le nombre de Rayleigh devient important, $Ra=10^5$ et 10^6 , les gradients de température et de concentration sont très importants. Le mouvement d'origine solutale prédomine toujours dans ce cas.

Pour l'effet du nombre de Prandtl sur les isothermes, les lignes de courant, et les iso-concentrations, l'augmentation de ce dernier montre pas d'effet significatif sur les lignes isothermes pour les deux valeurs de $Pr=0,25$ et $0,7$. Par contre lorsque le nombre de Rayleigh devient important, l'effet du nombre de Prandtl apparaît sur les isothermes.

Pour l'effet de l'excentricité du cylindre elliptique e_1 interne, nous avons remarqué qu'avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, le taux de transfert de chaleur, de masse et la valeur de la fonction de courant maximale augmentent avec l'augmentation de la valeur de l'excentricité du cylindre elliptique interne e_1 , l'augmentation de cette dernière entraîne un élargissement de l'espace annulaire ce qui favorise une intensification de la convection naturelle double diffusive.

Pour ce qui est des perspectives qu'on peut envisager comme suite logique à ce travail, on peut citer:

- L'étude d'un écoulement en 3D.
- L'étude d'un écoulement en régime turbulent.
- Applications d'autres conditions pariétales thermiques et massiques

Annexe

COORDONNEES ELLIPTIQUES

A.1. Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure A.1, nous observons dans le plan (xy) un groupe d'ellipses et un groupe de paraboles :

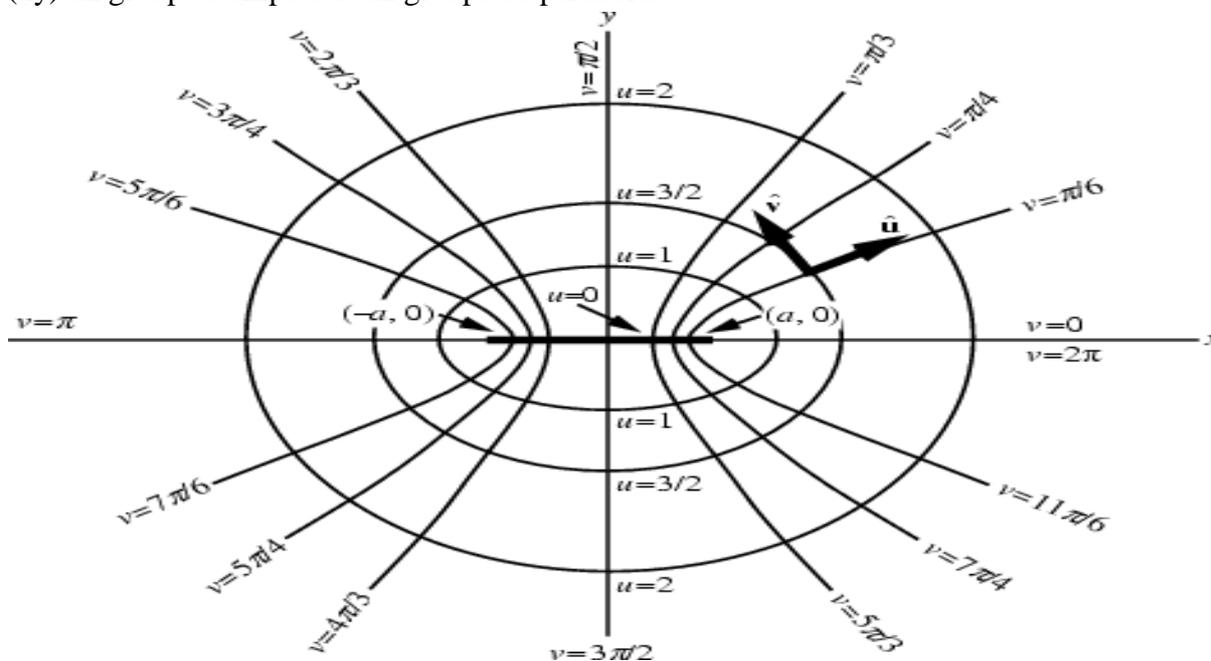


Figure A.1. Représentation schématique des coordonnées elliptiques

- Les ellipses sont définies par $u = \text{constant}$, dont le grand axe est confondu avec l'axe (x).
- Les hyperboles sont définies par $v = \text{constant}$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ y &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Soit :

$$z = a \operatorname{chw} \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$z = x + i y \quad \text{et} \quad w = \eta + i \theta$$

Nous avons :

$$\operatorname{chw} = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{e^{\eta} e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

en développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{chw} = \cos \theta \operatorname{ch} \eta + i \sin \theta \operatorname{sh} \eta \quad (\text{A.3})$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (A.2), il vient :

$$z = x + i y = a \operatorname{ch} \eta = a (\cos \theta \operatorname{ch} \eta + i \sin \theta \operatorname{sh} \eta) \quad (\text{A.4})$$

L'identification de la partie réelle à x et de la partie imaginaire à y donne :

$$x = a \cos \theta \operatorname{ch} \eta$$

$$y = a \sin \theta \operatorname{sh} \eta$$

A.2. Démonstration géométrique

A partir du système (A.1), on a :

$$\cos \theta = \frac{x}{a \operatorname{ch} \eta} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{a \operatorname{sh} \eta}$$

soit :

$$\cos^2 \theta = \frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} \quad \text{et} \quad \sin^2 \theta = \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta}$$

comme :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

on en déduit :

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1 \quad (\text{A.5})$$

on pose :

$$\left. \begin{aligned} A &= a \operatorname{ch} \eta \\ B &= a \operatorname{sh} \eta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

et comme :

$$\operatorname{ch} \eta > \operatorname{sh} \eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

on se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipses de grand axe $A = a \operatorname{ch} \eta$ et de petit axe

$$B = a \operatorname{sh} \eta$$

L'équation (A.5) sera donc de la forme :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{A.7})$$

A.3. Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaire (r, θ) , $(ds)^2$ est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (du_1)^2 + h_2 (du_2)^2$$

Où :

u_1 et u_2 sont des coordonnées curvilignes, les quantités h_1 et h_2 les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a $h_x = h_y = 1$ et en coordonnées elliptiques :

$$h_\eta = h_\theta = a (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (A.1) et les définitions suivantes :

$$h^2 \eta = \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \right]^2 \quad (\text{A.8})$$

$$h^2 \theta = \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial \theta} \right]^2 \quad (\text{A.9})$$

$$h^2 z = \left[\frac{\partial x}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial z} \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

par suite en obtient :

$$h_\eta^2 = h_\theta^2 = a^2 (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) \quad (\text{A.11})$$

$$h_z^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc...

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{a}_3$$

avec :

h_1, h_2, h_3 : coefficients métriques.

x_1, x_2, x_3 : coordonnées curvilignes.

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right\}$$

avec :

V_1, V_2, V_3 : composantes de la vitesse suivant x_1, x_2, x_3 .

$$h_4 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{V} = & \frac{1}{h_4} \left\{ h_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 \cdot V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 \cdot V_2) \right] \vec{a}_1 + \right. \\ & \left. h_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 \cdot V_3) \right] \vec{a}_2 + h_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot V_1) \right] \vec{a}_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_4} \left[\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \right)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \right)}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \right)}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} h_1 = h_\eta \\ h_2 = h_\theta \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h_\eta = h_\theta = h$$

et nous avons aussi :

$$\begin{cases} x_1 = \eta \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} ; \quad \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_\eta \\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_\theta \\ \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_z \end{cases} \quad \text{vecteurs unitaires suivant } \eta, \theta \text{ et } z$$

Ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes :

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{A.13})$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{rot} \vec{V} = \left[\frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{a}_\eta + \left[\frac{\partial V_\eta}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right] \vec{a}_\theta \\ + \left[h \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \vec{a}_z \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{A.16})$$

A.3.1. Exemple

Cas de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux (fig.A.2).

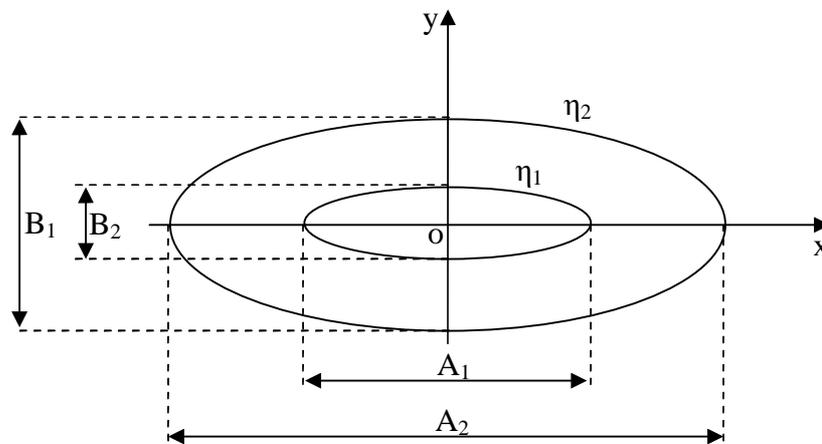


Figure A.2. Représentation schématique de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux

Les relations (A.6) nous donnent :

$$\frac{A}{B} = \coth \eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (\text{A.17})$$

on en déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A + B}{A - B} \quad (\text{A.18})$$

soit encore :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A + B}{A - B} \right) \quad (\text{A.19})$$

nous aurons donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \right) \quad (\text{A.19.a})$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_2 + B_2}{A_2 - B_2} \right) \quad (\text{A.19.b})$$

A.3.2. Excentricité de l'ellipse

L'excentricité d'une ellipse est donné par :

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad (\text{A.20})$$

avec : $0 < e < 1$

et A et B sont respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse.

D'autre part la relation (A.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{sh}^2 \eta} \quad (\text{A.21})$$

comme :

$$\text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1$$

on en déduit :

$$\text{ch}^2 \eta - 1 = \text{sh}^2 \eta \quad (\text{A.22})$$

en remplaçant (A.22) dans (A.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{ch}^2 \eta - 1}$$

d'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

soit encore :

$$\frac{1}{\text{ch} \eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

on obtient donc :

$$e = \frac{1}{\text{ch} \eta} \quad (\text{A.23})$$

on aura donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$e_1 = \frac{1}{\text{ch} \eta_1} \quad (\text{A.23.a})$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$e_2 = \frac{1}{\text{ch} \eta_2} \quad (\text{A.23.b})$$

Les relations (A.21), (A.22) et (A.23) donnent :

$$\text{th}^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - e^2$$

on aura donc :

$$\text{th} \eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1}$$

ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(\text{th} \eta + 1)}{\text{th} \eta - 1}$$

qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right] \quad (\text{A.23.c})$$

A.4. Formulation des équations de continuité, de la chaleur et du mouvement dans le système de coordonnées elliptiques

A.4.1. Equation de continuité

Notre problème étant bidimensionnel, la relation (A.15) s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) \right] \quad (\text{A.24})$$

Ainsi $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) = 0 \quad (\text{A.25})$$

A.4.2. Equation de la chaleur

L'équation (1.7) peut se mettre sous la forme :

$$\left(\vec{V} \cdot \operatorname{grad} \right) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} T \right) \quad (\text{A.26})$$

Compte tenu de l'expression du gradient donnée par la relation (A.13), le premier membre de (A.26) donne :

$$\left(\vec{V} \cdot \operatorname{grad} \right) T = \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{A.26.a})$$

Des relations (A.13) et (A.24), nous déduisons :

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{grad} T \right) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.26.b})$$

Nous obtenons donc :

$$V_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.27})$$

A.4.3. Equation du mouvement

Réécrivons l'équation (1.9) sous la forme suivante :

$$\left(\vec{V} \cdot \operatorname{grad} \right) \omega = g \beta \left(-\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right) + \nu \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \omega \right) \quad (\text{A.28})$$

Nous expliciterons tout d'abord l'expression suivante :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \quad (\text{A.28.a})$$

en fonction de η et θ .

D'après les relations (A.1), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \\ dx &= a \cos \theta \operatorname{sh} \eta d\eta - a \sin \theta \operatorname{ch} \eta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.29.a})$$

et

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = a \sin\theta \operatorname{ch}\eta d\eta + a \cos\theta \operatorname{sh}\eta d\theta \quad (\text{A.29.b})$$

A partir de ces valeurs nous déterminons les valeurs de $d\eta$ et $d\theta$:

$$d\eta = \frac{1}{a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta - \sin^2 \theta)} [a \cos\theta \operatorname{sh}\eta dx + a \sin\theta \operatorname{ch}\eta dy] \quad (\text{A.29.c})$$

$$d\theta = \frac{1}{a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta - \sin^2 \theta)} [-a \sin\theta \operatorname{ch}\eta dx + a \cos\theta \operatorname{sh}\eta dy] \quad (\text{A.29.d})$$

Par suite on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta \operatorname{sh}\eta}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-\sin\theta \operatorname{ch}\eta}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.30.a})$$

Nous remarquons que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.30.b})$$

Comme les dérivées partielles de T par rapport à x et à y sont définies par :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.31.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{A.31.b})$$

En tenant compte de la relation (A.30.b), l'équation (A.31.b) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{A.31.c})$$

Alors, en utilisant les relations (A.30.a), (A.31.a) et (A.31.c) nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[\cos\theta \operatorname{sh}\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \sin\theta \operatorname{ch}\eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.32.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[\sin\theta \operatorname{ch}\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} + \cos\theta \operatorname{sh}\eta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.32.b})$$

En portant ces valeurs dans l'expression (A.28.a), il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha = \frac{1}{a (\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \left[\frac{(-\cos \theta \text{sh} \eta \cos \alpha + \sin \theta \text{ch} \eta \sin \alpha)}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{(\cos \theta \text{sh} \eta \sin \alpha + \sin \theta \text{ch} \eta \cos \alpha)}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.33})$$

On peut écrire la relation qui précède sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha = \frac{1}{h} \left[(-F(\eta, \theta) \cos \alpha + G(\eta, \theta) \sin \alpha) \frac{\partial T}{\partial \eta} + (F(\eta, \theta) \sin \alpha + G(\eta, \theta) \cos \alpha) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.34})$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{\cos \theta \text{sh} \eta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{\sin \theta \text{ch} \eta}{(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.35})$$

Finalemnt, l'équation du mouvement (A.28) s'écrit :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{g\beta}{h} \left\{ [-F(\eta, \theta) \cos \alpha + G(\eta, \theta) \sin \alpha] \frac{\partial T}{\partial \eta} + [F(\eta, \theta) \sin \alpha + G(\eta, \theta) \cos \alpha] \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \frac{v}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{A.36})$$

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] **H. Stommel and A.B Arons** , An Oceanographic Curiosity: the Perpetual Salt Fountain, Deep-Sea Research, Vol. 3, pp.152-153, (1956) .
- [2] **Ferziger .J and Peric M.**, Computational methods for fluid dynamics, 3rd Edition Verlag Berlin Heidelberg (2002).
- [3] **E. Saadjan**, Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques, Polytechnica, Paris, (1998).
- [4] **R. Burden and J. Faire**, Numerical Analysis, Ninth Edition, Boston USA, Juillet (2010).
- [5] **M. M. Elshamy, M. N. Ozisik, and J. P. Coulter**, Correlation for laminar natural convection between con focal horizontal elliptical cylinders, Numer. Heat Transfer, Part A. Vol.18, pp.95-112, (1990).
- [6] **D. Akrou** , Effet d'Hystérésis en Convection Thermosolutal avec des Gradients Croisés : Etang de Stockage, Rev. Energ. Ren.Vol. 3, pp.39 – 47, (2000).
- [7] **H.Q. Yang, K.T. Yang and Q. Xia**, Periodic laminar convection in a vertical cavity, int. J. heat Mass transfer Vol. 32 (11), pp.2199-2207, (1989).
- [8] **B. Calcagni, F. Marsili and M. Paroncini**, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, Appl. Thermal Engrg.Vol. 25, pp. 2522–2531, (1995).
- [9] **H.S. Hasnaoui, E. Bilgen and P. Vasseur** , Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below, J. Thermophys. Heat Transfer, Vol. 6, pp. 255–264, (1992).
- [10] **C.J. Ho and J.Y. Chang**, A study of natural convection heat transfer in a vertical rectangular enclosure with two-dimensional discrete heating: effect of aspect ratio, Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 37 (6), pp. 917–925, (1994).
- [11] **M. November and M.W.Nansteel**, Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30(11), pp. 2433-40, (1987).
- [12] **T. Fusegi, J.M. Hyun and K. Kuwahara** three –dimensional simulation of natural convection in sidewall-heated cube, International Journal of Heat and mass Transfer, Vol.39, pp. 563-57, (1996).
- [13] **P. Le Quen ,T . Alziary de Roquefort**, On the nature of unsteady natural convection flows in vertical cavities, C.R. Acad. Sc.Vol. 301(12), pp.861–866, (1985).
- [14] **J. Pallares, I. Cuesta and F.X. Grau**, Laminar and turbulent Rayleigh–Bénard convection in a perfectly conducting cubical cavity, International Journal of Heat and Fluid Flow Vol. 23(3), pp. 346–358, (2002).

- [15] **J. Pallares, F.X. Grau, and F. Giralt**, Flow Transitions in Laminar Rayleigh-Bénard Convection in a Cubical Cavity at Moderate Rayleigh Numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42 , pp.753–769, (1999).
- [16] **Massimo Corcione**, Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above, *Int J. Thermal Sciences*, Vol. 42, pp. 199–208, (2003).
- [17] **L. Adjout, O. Imine, A. Azzi and M. Belkadi**, Laminar natural convection in an inclined cavity with a wavy wall, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 45, pp. 2141-2152, (2002).
- [18] **BtissamAbourida, Mohammed Hasnaoui and Samira Douamna**, Natural convection in a square cavity with vertical boundaries submitted to periodic temperatures, *Revue générale de Thermique* Vol. 37(9), pp. 788–800, October (1998).
- [19] **B. Calcagni, F. Marsili and M. Paroncini**, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Applied Thermal Engineering* Vol. 25, pp. 2522–2531, (2005).
- [20] **Q.H. Deng, G. F. Tang and Y. Li**, A combined temperature scale for analyzing natural convection in rectangular enclosures with discrete wall heat sources, *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 45 , pp. 3437–3446, (2002).
- [21] **S.M.Elsherbiny**, Free convection in inclined air layers heated from above. *Int.J. Heat Mass Transfer* Vol. 39, pp. 3925–3930, (1996).
- [22] **Bairi, A., N .Laraqi and Garcia de Maria**, Numerical and experimental study of natural convection in tilted parallelepipedic cavities for large Rayleigh numbers. *Exp. Therm. Fluid Sci.* Vol. 31, pp. 309–324, (2007).
- [23] **M. GHASSEMI, M.Pirmohammadi, Gh.A.Sheikhzadeh** , A Numerical Study of Natural Convection in a Tilted Cavity with Two Baffles Attached to its Isothermal Walls. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, Vol. 2 (3), pp.61–68, (2007).
- [24] **W. Tong**, Aspect ratio effect on natural convection in water near its density maximum temperature. *Int. J. Heat Fluid Flow* Vol. 20 (6), pp. 624–633 ,(1999).
- [25] **K.C. KARKI and P.S. SATHYAMURTHY**, Laminar mixed convection in a horizontal semi-circular duct with axially. *Int. J. Heat and Mass Transfer*.Vol.25, pp. 171- 189, (1994).
- [26] **T. H. Kuehn and J. Goldstein**, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 695-719, (1976).
- [27] **T. H. Kuehn and J. Goldstein**, An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 100. pp. 635-640, (1978).
- [28] **C. Torrance K.E. and Rockett J.A**, Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below. *J. Fluid Mech*, Vol. 36, pp. 33-54, (1969).

- [29] **A. Benkhelifa, M.A. Harhad and M. Belhamel**, Etude Numérique de la Convection Naturelle dans une Cuve Cylindrique, *Rev. Energ. Ren* , pp 37-41, (1999).
- [30] **B. Farouk and S.I. Güçeri**, Natural and mixed convection heat transfer around a horizontal cylinder within confining walls, *Num. HeatTransf. Part A5*, pp. 329–341, (1982).
- [31] **M. GUESTAL**, Modélisation de la convection naturelle laminaire de l'hydrogène liquide dans une enceinte cylindrique horizontale avec chauffage partiel par le haut, (JITH 2013) Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, (2013).
- [32] **M. Rahnama and M. Farhadi**, Effect of radial fins on two-dimensional turbulent natural convection in horizontal annulus, *International journal of Thermal Sciences* Vol. 43, pp. 255-264, (2004).
- [33] **Y. N. Lee, Et W. J. Minkowycz**, Heat transfer characteristics of the annulus of tow-axial cylinders with one cylinder rotating. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 4(32), pp. 711-722, (1989).
- [34] **S. M. El-Sherbiny and A. R. Moussa**, Effects of Prandtl number on natural convection in horizontal annular cavities, *Journal of Alexandria Engineering*, Vol. 43, pp. 561-576, (2004).
- [35] **Boussaid**, Convection naturelle de chaleur et de masse dans une cavité trapézoïdale, *int.j.therm. sci*, Vol. 38, pp. 363-371, (1999).
- [36] **K. Ghorayeb**, La convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide ,*Heattransfer, Reactive media, Comustionserie II*, pp. 19-27, (1997).
- [37] **M. Mamou, E. Bilgen and P.Vasseur**, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure. *Heat Mass Transfer*, Vol. 32, pp.115– 125, (1996).
- [38] **R.Krish**. A numerical study of the instability of double diffusive convection in a square enclosure with a horizontal temperature and concentration gradient, *Proc of ASME National Heat Transfer Conference*, ASME .New York, pp.357-368, Philadelphia (1989).
- [39] **C. Béghein, F. Allard and F. Haghghat**, Etude numérique de la double diffusion dans une cavité carrée. *Int. J Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 833–846, (1992).
- [40] **Shipp,P.W., Shoukrin , M., and Carver, M.B**, Double diffusive natural convection in a closed annulus.,*Int.J.Heat Mass Transfer*,Vol. 24, pp. 339-356, (1993).
- [41] **D. Akrou, M. Betrouni, D. Kalache, S. Hamaili and N. Chabane-Chaouche**, Etude Instationnaire d'Écoulement en Double Diffusion avec Gradient Opposé en Température et en Concentration. *Rev. Energ. Ren*, pp. 99-104, (2000).
- [42] **S.Benissad,M.Afrid and A.Bellanour**, étude numérique de la convection naturelle thermosolutale opposée tridimensionnelle. *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy, Constructions, Architecture Section LII (LVI)*, pp.109– 124, (2006).

- [43] **Yan W. M. and Lin D**, Natural convection heat and mass transfer in vertical annuli with film evaporation and condensation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 1143-1151, (2001).
- [44] **K. Ghachem, L Kolsi , C .Mâatki, A. Kadhim Hussein and M.Borjini**, Numerical simulation of three-dimensional double diffusive free convection flow and irreversibility studies in a solar distiller , *I C in Heat and Mass Transfer*. Vol. 39, pp.869–876, (2012).
- [45] **A. Teamah, Ahmad F. Elsafty and Enass Z. Massoud**, Numerical simulation of double-diffusive natural convective flow in an inclined rectangular enclosure in the presence of magnetic field and heat source, *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 52, pp. 161–175, (2012).
- [46] **M.A. Teamah and W.M. El-Maghlany**, Numerical simulation of double-diffusive mixed convective flow in rectangular enclosure with insulated moving lid, *Int. J. Thermal Sci.* Vol. 49, pp.1625-1638, (2010).
- [47] **Chen S., Tolke J., and Krafczyk M.** Numerical investigation of double-diffusive (natural) convection in vertical annuluses with opposing temperature and concentration gradients. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 31, pp. 217–226, (2010).
- [48] **E. Papanicolaou and V. Belessiotis**. Double-diffusive natural convection in an asymmetric trapezoidal enclosure: unsteady behavior in the laminar and the turbulent-flow regime. *Int. J Heat Mass Transfer* Vol. 48, pp. 191-209, (2005).
- [49] **S. Chen , H. Liu and Ch. Zheng**, Numerical study of turbulent double-diffusive natural convection in a square cavity by LES-based lattice Boltzmann model, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 55, (17-18), pp.4862-4870, (2012).
- [50] **R. Nikbakhti and A. B. Rahimi**, Double-diffusive natural convection in a rectangular cavity with partially thermally active side walls . *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers* Vol.ume 43(4), pp. 535-541, (July 2012).
- [51] **G.V. Kuznetsov and M.A. Sheremet**, A numerical simulation of double-diffusive conjugate natural convection in an enclosure, *Int. J. Thermal Sci.*, Vol. 50, pp. 1878-1886, (2011).
- [52] **K. Kamakura and H. Ozoe**, Double-diffusive natural convection in a rectangle with horizontal temperature and concentration gradient resulting incooperating buoyancy forces near the vertical walls, *J. Materials Process. Manufacturing Sci.* Vol. 5 (3), pp. 183–196, (1997).
- [53] **L.W. Wang and C.Y. Wei**, Natural convection heat and mass transfer in a vertical annular enclosure, in: *Proc. Symposium on Transfer Phenomena and Applications*, pp. 401–406, (1992).
- [54] **I. Sezai, and A. A. Mohamed**, Double diffusion convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients, *Phys. Fluids*, Vol. 12, pp. 2210-2223, (2000).

- [55] **M. Krafczyk, S. Chen and J. Tölke**, Numerical investigation of double-diffusive convection in vertical annuli with opposing temperature and concentration gradients. *Int. J. Heat Fluid Flow* Vol. 31, pp. 217–226, (2010).
- [56] **H.J. Sung, W.K. Cho and J.M. Hyun**, Double-diffusive convection in a rotating annulus with horizontal temperature and vertical solutal gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 36, pp. 3773–3782, (1993).
- [57] **T.W.H. Sheu and S.F. Tsai**, Flow topology in a steady three-dimensional lid-driven cavity, *Computers & Fluids* Vol. 31, pp. 911–934, (2002).
- [58] **Al-Amiri AM, Khanafer KM and I Pop**, Numerical simulation of combined thermal and mass transport in a square lid-driven cavity. *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 46 (7), pp. 662-671, (2007).
- [59] **M.A. Teamah and W.M. El-Maghlany**, Numerical simulation of double-diffusive mixed convective flow in rectangular enclosure with insulated moving lid. *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 49(9), pp. 1625-1638, (2010).
- [60] **D.K. Maiti**, Numerical study on heat/mass transfer by shear/thermal/solutal-convection in a cavity under counteracting buoyancies, *Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 245-257, (2011).
- [61] **A.M. Al-Amiri, K. M. Khanafer and M.F. Lightstone**, Unsteady numerical simulation of double diffusive convection heat transfer in a pulsating horizontal heating annulus, *Heat Mass Transfer* Vol. 42 (11), pp. 1007-1015, (2006).
- [62] **R.D. Simitev**, Double-diffusive natural convection in a rotating cylindrical annulus with conical caps, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* Vol. 186(3-4), pp.183-190, (2011).
- [63] **A.M. Al-Amiri and K. M. Khanafer**, Numerical simulation of double-diffusive mixed convection with in a rotating horizontal annulus, *International Journal of Thermal Sciences* Vol. 45 (6), pp. 567-578, (2006).
- [64] **M.A. Teamah**, Numerical simulation of double-diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder. *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 46, pp. 637-648, (2007).
- [65] **M. Djezzar, A. Chaker, and M. Daguinet**, Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of internal eccentricity. *Revue des Energies Renouvelables*, Vol. 8, pp. 63-72, (Juin 2005).
- [66] **M. Djezzar and M. Daguinet**, Natural steady convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of the slope angle. *Journal of Applied Mechanics Transaction of the ASME*, Vol. 72, pp. 88-95, (Janvier 2006).
- [67] **H.C. Topakoglu and O.A. Arnas**, Convective heat transfer for steady laminar flow between two confocal elliptic pipes with longitudinal uniform wall temperature gradient, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.17, pp.1487-1498, (1974).
- [68] **R.M. Abd-Elwahed, A.E. Attia and M.A. Hifni**, Experiments on laminar flow and heat transfer in an elliptical duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.27, pp. 2397-2413, (1984).

- [69] **V.D. Sakalis, P.M. Hatzikonstantinou and N. Kafousias**, Thermally developing flow in elliptic ducts with axially variable wall temperature distribution, *Int.J. Heat and Mass Transfer*, Vol.45, pp.25-35, (2002).
- [70] **S.V. Patankar**, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, NewYork (1980).
- [71] **E.F. Nogotov**, *Applications of Numerical Heat Transfer*, McGraw-Hill book company, NewYork (1978).
- [72] **P.J. ROACHE**, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa (1982).
- [73] **Zhu, Y. D., Shu, C., Qiu, J., and Tani, J**, Numerical Simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method, *Int. J. Heat. Mass.Trans.*, 47, pp. 797-808, (2004).

Résumé :

Dans ce travail l'auteur présente une étude numérique des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans un espace annulaire, délimité par deux tubes elliptiques horizontaux et confocaux rempli d'un fluide newtonien, en régime laminaire et permanent. Le phénomène de la convection thermosolutale est régi par: les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration qui sont exprimées dans un système de coordonnées dites "elliptiques", pour faciliter l'écriture des conditions aux limites et transformer le domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Les deux parois elliptiques sont soumises à un gradient thermique ($\Delta T = T_1 - T_2$) et un gradient solutal ($\Delta C = C_1 - C_2$).

En utilisant l'approximation de Boussinesq et la formulation vorticité-fonction de courant, la résolution de ces équations est basée sur un schéma de discrétisation aux volumes finis et l'influence des principaux paramètres de contrôle: le nombre de Rayleigh (Ra), le nombre de Lewis (Le), le nombre de Prandtl (Pr), le rapport des forces de volume et l'excentricité interne (e_1) sur la structure de l'écoulement ainsi que, sur les taux de transfert de chaleur et de masse a été examinée

Mots clés : convection naturelle thermosolutale, approximation de Boussinesq, formulation vorticité-fonction de courant, coordonnées elliptiques.

مساهمة لدراسة انتقال الحرارة والكتلة في حلقة إهليلجية أفقية المحور

ملخص:

قدم المؤلف دراسة عددية لظاهرة انتقال الحرارة والكتلة عن طريق الحمل الحراري الطبيعي، الموجود في تجويف حلقي محصور بين أسطوانتين إهليلجيتين أفقيتين متمركزتين. ظاهرة الانتشار الحراري ترتبط بمعادلات الاستمرارية، كميات الحركة، الحرارة ومعادلة الكتلة وحلها يكون وفق نظام احداثيات يسمى "الاحداثيات الإهليلجية"، لتسهيل كتابة الشروط الحدية وتغيير المجال المنحني بالمجال العلى مستطيل. بالنسبة لشروط هذا التسخين افتراضنا الجدار الداخلي والخارجي لهذا التجويف ثابت درجة الحرارة والتركيز، C_1 ، T_1 بالنسبة للجدار الداخلي و C_2 ، T_2 بالنسبة للجدار الخارجي مع $T_1 > T_2$ و $C_1 > C_2$.

استخدم تقريب بوسيناسك و صيغة التدويم-دالة تيار، وأخذ بعين الاعتبار تأثير اعداد التحكم الرئيسية: عدد لرايلي (Ra)، عدد لويس (Le)، وعدد برنديل (Pr) ونسبة الدفع (N) واللاتمركز الداخلي (e_1) على تكوين التدفق، وعلى معدلات انتقال الحرارة والكتلة.

المفاتيح: الحمل الحراري-الكتلي الطبيعي، تقريب بوسيناسك، صيغة التدويم- دالة تيار، الإحداثيات الإهليلجية

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF HEAT AND MASS TRANSFER IN A HORIZONTAL ELLIPTICAL SPACE ANNULUS

Abstract :

In this investigation the author presents a numerical study of heat and mass transfer by natural convection in an annular space delimited by two horizontal and confocal elliptical cylinders filled with a Newtonian fluid in laminar and steady-state regime. The phenomenon of thermosolutal convection is governed by the equations of mass conservation, equations of momentum, energy and concentration expressed in a coordinate system called "elliptical" to facilitate writing boundary conditions and transform the area into a curved rectangular field. The two elliptical walls of the isothermal enclosure, with a constant concentration, T_1 and C_1 to the inner wall, T_2 and C_2 to the outer wall, with $T_1 > T_2$ and $C_1 > C_2$.

Using the Boussinesq approximation and the vorticity-stream function formulation, we study the influence of the main control parameters: the Rayleigh number (Ra), the Lewis number (Le), the Prandtl number (Pr), the buoyancy ratio (N) and the internal volume of eccentricity (e1) on the structure of the flow and, on heat and mass transfer rates.

Key-words: Thermosolutal natural convection, Boussinesq Approximation, vorticity-stream function formulation, elliptic coordinates.