République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE

Faculté des Sciences exactes

Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Thèse Présentée pour Obtenir le Doctorat LMD
Spécialité : Physique Théorique

Cordes Paraquantiques dans un Espace Temps Noncommutatif

Par :
Mohamed Ali Seridi

Devant le jury :

Président :	L. Chetouani	Prof. Université Frères Mentouri
Rapporteur :	N. Belaloui	Prof. Université Frères Mentouri
Examinateurs :	A. Bouda	Prof. Université de Béjaia
	T. Boudjedaa	Prof. Université de Jijel
	K. Ait Moussa	Prof. Université Frères Mentouri
	A. Benslama	Prof. Université Frères Mentouri

Remerciements

J *e tiens tout d'abord à exprimer mes vifs remerciements à mon directeur de thèse le Professeur Nadir Belaloui, qui m'a soutenu attentivement depuis le Master et durant toutes ces cinq dernières années de Doctorat, pour sa rigueur scientifiques qui m'a guidée, ses conseils, ses encouragements, son aide et son support qui m'a permis de participer à bien des manifestations scientifiques récentes de haut niveau. Je n'oublierai jamais sa personnalité calme et gentille et le fait qu'il n'a économisé aucun effort à donner pour mener à terme ce travail de recherche.*

J *'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury, spécialement à mon professeur Lyazid Chetouani de m'avoir honoré à présider ce jury. Egalement, tous mes respects vont aux examinateurs hôtes qui ont accepté de participer et donner de l'intérêt pour discuter cette thèse : Mr. Ahmed Bouda, professeur à l'université de Béjaia. Mr. Tahar Boudjedaa, professeur à l'université de Jijel Un grand merci également à mes enseignants et pour avoir honoré par leur présence la soutenance de cette thèse : Mr. Karim Ait Moussa, professeur à l'université des frères Mentouri pour son aide considérable que j'apprécie fortement. Mr. Achour Benslama, professeur à l'université des frères Mentouri pour les discussions fructueuses à des moments critiques lors de la réalisation de ce travail.*

A *ceux qui ont cru en moi, et qui n'ont jamais hésité à me donner tout le support dont j'avais besoin, mes parents, qui m'ont donné la vie, l'éducation. . .*

Ma petite famille : je ne trouve pas comment remercier ma grande sœur Fairouz pour sa générosité, qui m'a soutenu jusqu'au bout et surtout supporté dans tout ce que j'ai entrepris, également Mouna qui a tout le mérite de m'avoir orienté vers la physique et m'avoir aidé à trouver le trajet à suivre. A mon frère et ami Salah, à qui j'exprime tous mes remerciements pour son intérêt et son soutient moral qu'il m'a témoigné à tout moment.

Le plus grand remerciement à ma grande mère Laarfa pour ses prières à Dieu à toujours trouver des solutions à mes soucis. A nos ancêtres qui n'ont jamais été absents de nos bons souvenirs.

Un Spécial Remerciement A tous ceux qui m'ont soutenu jusqu'au bout.

Table des matières

Table des matières ii

Liste des tableaux iv

1 Introduction 1
- 1.1 Théorie des Cordes Bosoniques . . . 2
  - 1.1.1 Particule Ponctuelle . . . 2
  - 1.1.2 Corde Relativiste . . . 4
  - 1.1.3 Expansion en Modes d'Oscillateurs . . . 6
- 1.2 Quantification de la Corde Bosonique . . . 7
  - 1.2.1 Jauge Covariante . . . 8
  - 1.2.2 Jauge Transverse . . . 9
- 1.3 Paraquantification . . . 10
  - 1.3.1 Oscillateurs du Type Bosonique . . . 11
  - 1.3.2 Représentation de Green . . . 14
- 1.4 Propos de la Thèse . . . 15

2 Cordes Parabosoniques Ouvertes et Paramètres de la Noncommutativité 18
- 2.1 Le Modèle . . . 18
  - 2.1.1 Algèbre de Virasoro . . . 21
  - 2.1.2 Spectre de Masse . . . 22

3 Cordes Parabosoniques Ouvertes entre Deux Dp-Branes Parallèles dans un Espace Temps Noncommutatif 25
- 3.1 Algèbre de Virasoro . . . 26
- 3.2 Spectre de Masse . . . 27
  - 3.2.1 Redéfinition de l'Espace de Fock . . . 27
  - 3.2.2 Opérateur de Masse . . . 28

4 Cordes Parabosoniques Ouvertes entre Deux Dp-Dq Branes Parallèles dans un Espace Temps Noncommutatif 30
- 4.1 Relations Trilinéraires Modifiées et Configurations D-Branes . . . 30
- 4.2 Algèbre de Virasoro . . . 31
- 4.3 Spectre de Masse . . . 32

4.3.1 Redéfinition de l'Espace de Fock . . . 32
4.3.2 Opérateur de Masse . . . 32
4.3.3 Discussion . . . 33
4.3.3.1 Modèle sans Tachyon . . . 33

5 Cordes Parabosoniques Fermées dans un Espace Temps Noncommutatif et Réduction du Spectre 36
5.1 Algèbre de Virasoro . . . 37
5.2 Redéfinition de l'Espace de Fock . . . 38
5.3 Spectre de Masse . . . 38
5.4 Opérateur de Masse . . . 39
5.4.1 Restauration du Graviton et Réduction du Spectre . . . 40

6 Résumé 43

A Calcul de Quelques Relations Trilinéaires 45
A.1 Calcul de $\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$ . . . 45
A.2 Calcul de $\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$ . . . 48
A.3 Calcul de $\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right]$ . . . 50
A.4 Calcul de $\left[x_0^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$ . . . 51
A.5 Calcul de $\left[x_0^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$ . . . 53
A.6 Calcul de $\left[x_0^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right]$ . . . 55

B Calcul de l'Algèbre de Virasoro 57

C Calcul de Quelques Masses 59
C.1 1^{er} Niveau Excité . . . 59
C.2 2^{eme} Niveau Excité . . . 60
C.3 3^{eme} Niveau Excité . . . 61

Bibliographie 65

Liste des tableaux

2.1 Spectre de Masse : Cas Corde Ouverte. 24

3.1 Spectre de Masse : Cas Dp-Branes 28
3.2 Spectre de Masse Modifié : Cas Dp-Branes. 29

4.1 Spectre de Masse : Cas Dp-Dq Branes. 33
4.2 Spectre de Masse Modifié : Cas Dp-Dq Branes. 34

5.1 Spectre de Masse : Cas Corde Fermée. 41

À MES PARENTS …

Chapitre 1

Introduction

En physique moderne, la généralisation des concepts fondamentaux joue un rôle important dans la progression de la recherche et la découverte de nouvelles physiques. Différentes étapes de l'unification ont conduits à une meilleure maitrise des différentes théories de la physique moderne. Dès le 19ème siècle, les premières tentatives ont conduit à la théorie de l'électromagnétisme établie par Maxwell-Faraday. La constance de la célérité de la lumière dans cette théorie s'avère être la pierre angulaire pour l'unification des notions d'espace et du temps par A. Einstein dans ses théories de la relativité restreinte en 1905 et générale en 1915. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, la théorie de jauge nonabélienne fondée par Yang-Mills en 1950 a pu décrire l'ensemble des trois autres types d'interactions fondamentales. Elle est à la base conceptuelle du modèle standard de la physique des particules, elle a réussi à unifier l'électrodynamique et la mécanique quantique dans le contexte de QED et l'interaction faible dans la théorie du modèle standard de Weinberg-Salam. Avant QCD, le modèle dual était la seule théorie qui décrivait l'interaction forte entre les hadrons. Il comportait cependant deux obstacles à savoir : la théorie n'est cohérente du point de vue mathématique que si la dimension de l'espace temps est supérieure à 4 en plus de la présence dans le spectre d'une particule de spin 2 et de masse nulle qui n'avait pas sa place dans cette théorie. Une classification des hadrons par rapport aux spins et aux masses correspondantes des particules du spectre est possible dans la théorie de Regge qui regroupe les particules sur des trajectoires dans le plan à travers la relation :

$$J = \alpha M^2 = \alpha_0 + \alpha^{'} M^2. \tag{1.1}$$

où $\alpha^{'}$: constante universelle $\simeq 0.9(GeV)^{-2}$
α_0 : paramètre qui dépend de la famille de Regge choisie.

L'apparition de QCD a mis à mal le modèle dual, ce qui a conduit à son abondant jusqu'au moment où on découvre que son spectre peut être retrouvé à travers l'étude de la dynamique d'une corde et la possibilité d'associer la particule qui posait problème au graviton en plus du fait qu'en s'inspirant de l'idée de Kaluza Klein, le deuxième obstacle s'avérerait plutôt un atout qui pourrait conduire à une probable unification de la gravitation avec le modèle standard. Ce qui voulait dire que les cordes sont beaucoup plus élémentaires (échelle de Planck) que celles initialement construites pour relier deux quarks dans un hadron. C'est la naissance de ce qui a été baptisée comme la nouvelle théorie des cordes, d'abord, la théorie de la corde bosonique qui décrit aussi bien le photon que le graviton mais qui devait se propager dans un espace temps à 26 dimensions et que la présence de tachyons dans le spectre en plus du fait qu'elle ne décrit que des particules bosoniques affaiblissait la théorie. Pour remédier à ceci, il a fallu introduire des degrés de libertés fermioniques. Un pas a été fait en abaissant la dimension de l'espace temps de 26 à 10, mais ceci n'a pas directement résolu le problème, vu qu'il y a eu deux modèles différents, l'un ne décrivant que des bosons ; c'est le modèle de Neuveu-Schwarz, l'autre ne décrivant que des fermions ; c'est le modèle de Ramond. Ces deux modèles sont des modèles supersymétriques, cette supersymétrie n'est par contre définie que sur le world-sheet. On a enfin fini par construire la théorie des supercordes qui est une théorie libre de tachyons, décrivant aussi bien des bosons que des fermions dans un espace temps à 10 dimensions. Dans ce qui suit, et pour fixer les notations, on se propose de faire un petit formulaire sur la théorie de la corde bosonique.

1.1 Théorie des Cordes Bosoniques

1.1.1 Particule Ponctuelle

Considérons d'abord une particule ponctuelle relativiste qui se propage dans un espace-temps à d dimensions. Elle décrit une ligne d'univers paramétrisée par la variable τ.
L'action de cette particule est proportionelle à la longeur de cette ligne d'univers entre deux points initial et final, représentant le chemin extremum suivi par cette particule. Elle s'éxprime en fonction des coordonnées de la particule comme suit :

$$S_{pp} = -m \int ds = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}d\tau \tag{1.2}$$

La mesure de l'interval du chemin suivi par la particule à d-dimensions est donnée par :

$$(ds)^2 = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + ... + (dx_{d-1})^2 \tag{1.3}$$

la métrique utilisée dans cette mesure est :

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, \ldots, +1). \tag{1.4}$$

La variation de l'expression du Lagrangien par rapport à $\dot{x}$ nous donne le moment conjugé des coordonnées $x^\mu(\tau)$:

$$p_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}_\mu} = m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \tag{1.5}$$

de même en faisant la variation par rapport à $x^\mu(\tau)$:

$$\partial_\tau \left(m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right) = 0 \tag{1.6}$$

On obtient l'équation des contraintes suivante :

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0 \tag{1.7}$$

qui gouverne la dynamique du système exprimée par le Hamiltonien canonique suivant :

$$H_{canonique} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - L = 0 \tag{1.8}$$

Ces contraintes sont une conséquence de l'invariance de l'action par reparamétrisation τ :

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{d\tau}{d\tau'} d\tau' \\ \dot{x}^\mu &= \frac{d\tau'}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Notons cependant, qu'à cause de la racine carrée, l'action précédente n'est pas adaptée pour la description d'une particule sans masse. Pour remédier à ceci, une autre action équivalente est construire qui englobe le cas de la particule sans masse, elle est donnée par :

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau e(\tau) \left[e^{-2}(\tau) \dot{x}\dot{x} - m^2 \right] \tag{1.10}$$

où $e(\tau)$ est un champ auxillaire et la métrique associée prend la forme :

$$g_{\tau\tau} = e^2 \tag{1.11}$$

La variation de l'action (1.10) par rapport à $e(\tau)$ s'écrit :

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{e^2(\tau)} + m^2\right]\delta e(\tau) \tag{1.12}$$

qui conduit à l'équation du mouvement du champ auxillaire $e(\tau)$ donnée par :

$$e^{-2}(\tau)\dot{x}^2 + m^2 = 0 \tag{1.13}$$

d'autre part, la variation de l'action par rapport à $\dot{x}$ s'écrit :

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\tau e(\tau)\left[e^{-2}(\tau)2\dot{x}^\mu\right]\partial_\tau \delta x^\mu \tag{1.14}$$

qui conduit à l'équation du mouvement :

$$\partial_\tau(e^{-1}(\tau)\dot{x}^\mu) = 0 \tag{1.15}$$

1.1.2 Corde Relativiste

L'étude dynamique de la corde en tant qu'objet unidimensionel sera inspiréé de celle de la particule ponctuelle. En effet, par analogie à ce qui a été dit pour la particule, l'action de la corde doit être proportionelle à la surface "worldsheet" balayée lors de sa propagation dans l'espace temps. Une action qui décrit ce type de mouvement a été postulée par Nambu-Goto (N-G), formulée comme suit :

$$\begin{aligned} S_{NG} &= -T\int_\Sigma dA \\ &= -T\int_\Sigma d^2\sigma[-det(\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{X^\nu}{\partial\sigma^\beta}G_{\mu\nu})]^{\frac{1}{2}} \\ &= -T\int_\Sigma d^2\sigma[(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2X'^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.16}$$

où : $X^\mu(\tau,\sigma)$ est la variable coordonnée de la corde
et : $\dot{X}^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}$, $X'^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}$
T : est la tension de la corde reliée au paramètre $\alpha^{'}$ (de Regge) par la relation suivante :

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{1.17}$$

Les équations du mouvement sont alors obtenues :

$$\partial_\tau\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{X}^\mu}\right) + \partial_\sigma\left(\frac{\delta L}{\delta X'^\mu}\right) = 0 \tag{1.18}$$

additionnée aux conditions aux bords qui dépendent du type (ouvert ou fermé) de la corde considérée. Pour la corde fermée le worldsheet prend la forme d'un cylindre, ce qui se traduit par la condition de périodicité :

$$X^{\mu}(\sigma + \tilde{\sigma}) = X^{\mu}(\sigma) \tag{1.19}$$

où

$$\sigma = [0, \tilde{\sigma}], \tilde{\sigma} = 2\pi \tag{1.20}$$

Pour une corde ouverte, le worldsheet représente une surface avec la convention $\tilde{\sigma} = \pi$. Dans ce cas, deux genres de conditions aux bords sont alors considérés :

Neumann :

$$\frac{\delta L}{\delta X'^{\mu}}|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{1.21}$$

Dirichlet :

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}}|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{1.22}$$

Le moment conjugué de X^{μ} est défini par :

$$\Pi^{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}} = -T \frac{(\dot{X} \cdot X')X'^{\mu} - (X')^2 \dot{X}^{\mu}}{\sqrt{(X' \cdot \dot{X})^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \tag{1.23}$$

Notons ici la présence de deux équations de contraintes :

$$\begin{aligned} \dot{X}X' &= 0 \\ \dot{X}^2 + \left(X'\right)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

qui, regroupées ensemble, prennent la forme :

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = 0 \tag{1.25}$$

Les équations du mouvement se simplifient alors comme suit :

$$-\ddot{X} + X'' = 0 \tag{1.26}$$

De la même façon que pour le cas de la particule ponctuelle, là aussi, la présence de la racine carrée dans l'action de N-G ne permet pas de faire l'extension au cas des cordes fermioniques. L'action de Polyakov (formulée pour la première fois par Brink, di Vecchia et Howe[1]) décrite par l'équation ci-dessous est beaucoup plus adaptée pour ceci :

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-\det g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{1.27}$$

Notons que cette action décrit une théorie d'un champ scalaire en intéraction avec un champ gravitationel à 2d, et elle est équivalente à l'action de N-G. Le tenseur moment-énergie s'écrit alors :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-4\pi}{\sqrt{-\det g}}\frac{\delta S_p}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{l_s^2}\left[\partial_\alpha X\cdot\partial_\beta X - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\gamma X\cdot\partial_\delta X\right] \tag{1.28}$$

qui, en s'annulant, donne les équations des contraintes. De même on peut aussi dériver les équations du mouvement qui s'écrivent :

$$\frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-\det g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu\right) = 0 \tag{1.29}$$

1.1.3 Expansion en Modes d'Oscillateurs

La forme générale de la solution des équations du mouvement s'écrit comme suit :

$$X^\mu = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma) \tag{1.30}$$

avec :

$$X_L^\mu(\tau+\sigma) = \frac{x_0^\mu}{2} + \frac{\alpha' p^\mu}{2}(\tau+\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}\exp(-in(\tau+\sigma)) \tag{1.31}$$

$$X_R^\mu(\tau-\sigma) = \frac{x_0^\mu}{2} + \frac{\alpha' \tilde{p}^\mu}{2}(\tau-\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n}\exp(-in(\tau-\sigma)) \tag{1.32}$$

α et $\tilde{\alpha}$ sont des modes de Fourier vérifiant :

$$\begin{aligned}(\alpha_n^\mu)^* &= \alpha_{-n}^\mu \\ \tilde{(\alpha)}_n^\mu)^* &= \tilde{\alpha}_{-n}^\mu\end{aligned} \tag{1.33}$$

On peut alors vérifier que :

$$p^\mu = \tilde{p}^\mu, \tag{1.34}$$

et que en plus, pour la corde ouverte,

$$\alpha_n^\mu = \tilde{\alpha}_n^\mu \tag{1.35}$$

On peut noter qu'il y a trois types de coordonnées selon les conditions aux bords :

Coordonnées du type Neumann-Neumann (NN) :

$$X^\mu (\tau + \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} \exp(-in\tau) \cos(n\sigma) \tag{1.36}$$

Coordonnées du type Dirichlet-Dirichlet (DD) :

$$X^a (\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a \exp(-in\tau) \sin(n\sigma) \tag{1.37}$$

On remarque l'abscence d'un terme linéaire en τ expliqué par le fait que, pour des conditions aux bords Dirichlet, il n'éxiste plus de moment situé sur les éxtrémités de la corde.
Coordonnées du type mixtes Neumann-Dirichlet (ND) :

$$X^r (\tau, \sigma) = x_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{impaire}} \frac{2}{n} \alpha^r_{\frac{n}{2}} \exp(-i\frac{n}{2}\tau) \cos(\frac{n\sigma}{2}) \tag{1.38}$$

1.2 Quantification de la Corde Bosonique

Il éxiste deux méthodes de quantification :

1. La première consiste à traiter toutes les variables comme indépendantes et les contraintes sont considérées comme des conditions initiales, seuls les états soumis à ces conditions seront physiques ; c'est ce qu'on appelle la quantification covariante.
2. La deuxième consiste à résoudre les équations des contraintes, ceci nous permet d'éliminer les variables superflues pour avoir uniquement des variables dynamiques effectivement indépendantes ; c'est la quantification dans la jauge transverse.

1.2.1 Jauge Covariante

Les variables dynamiques $\{x_0^\mu, p^\mu, \alpha_m^\mu\}$ deviennent des opérateurs qui vérifient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned}
[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= (m\eta^{\mu\nu})\delta_{m+n,0}, \\
[x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu}, \\
[p^\mu, p^\nu] &= 0, \\
[x^\mu, x^\nu] &= 0.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Les générateurs de Virasoro s'écrivent comme suit :

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}} : \alpha_{m-p}^\mu \alpha_{p\mu} : \tag{1.40}$$

L'ambiguité d'ordre dans l'opérateur L_0, est résolue en faisant une redéfinition comme suit :

$$L_0 \to L_0 - a \tag{1.41}$$

Le faite que H et par conséquent M^2 sont contruits à partir de L_0, cette constante va modifier les éxpressions correspondantes de la manière suivante :

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_{-p}^\mu \alpha_{p\mu} - a \tag{1.42}$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_{-p}^\mu \alpha_{p\mu} - a\right) \tag{1.43}$$

Les contraintes sur les états physiques sont données par :

$$\begin{aligned}
L_n|\Psi\rangle_{phys} = 0 \quad n > 0 \\
[L_n - a]\,|\Psi\rangle_{phys} = 0
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Ce qui donne un état tachyonique pour l'état fondamental en plus de la présence des états de ghost.

On peut montrer que la théorie est libre de ghost dans le cas :

$$\begin{aligned}
D &= 26 \\
a &= 1
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Les générateurs de Virasoro,L_n, satisfont l'algèbre suivante :

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \tag{1.46}$$

dite algèbre de Virasoro.

1.2.2 Jauge Transverse

Afin de contourner les inconvenients imposés par la méthode covariante, on propose la quantification dans la jauge du cône de lumière qui consiste à fixer la jauge statique suivante :

$$n_\mu X^\mu = \lambda\tau \tag{1.47}$$

avec $n_\mu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$

On utilise les coordonnées du cône de lumière :

$$X^\pm = \frac{X^0 \pm X^{D-1}}{\sqrt{2}} \tag{1.48}$$

$$p^+ = \frac{p^0 + p^{D-1}}{\sqrt{2}} \tag{1.49}$$

en plus des composantes transverses :

$$X^I \tag{1.50}$$

$$avec \quad : I = 1, \ldots, D-2$$

La métrique de Minkowski devient :

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$$
$$\eta_{IJ} = diag(1, 1, \ldots, 1) \tag{1.51}$$

Le produit de deux vecteurs est défini par :

$$UV = -U^+V^- - U^-V^+ + U^iV^i \tag{1.52}$$

qui se transforme de la manière suivante :

$$U^\pm = U_\mp, U^i = U_i \tag{1.53}$$

Les variables dynamiques représentées par les opérateurs de la jauge du cône de lumière

$\left\{x^-, p^+, x^I, p^I, \alpha^I\right\}$ vérifient les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned} \left[x^-, p^+\right] &= i \\ \left[x^I, p^J\right] &= i\eta_{IJ} \\ \left[\alpha^I_m, \alpha^J_n\right] &= m\eta_{IJ}\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{1.54}$$

Les opérateurs de Virasoro dans ce cas s'écrivent :

$$L^\perp_m = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \alpha^I_{m-p}\alpha_{pI}. \tag{1.55}$$

et satisfont l'algèbre suivante :

$$\left[L^\perp_m, L^\perp_n\right] = (m-n)L^\perp_{m+n} + \frac{(D-2)}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}. \tag{1.56}$$

L'invariance de Lorentz dans cette jauge n'est plus manifeste, en effet, on peut montrer que :

$$\left[M^{-I}, M^{-J}\right] \neq 0. \tag{1.57}$$

en général.
L'invariance de Lorentz est violée et ne peut être rétablie que si :

$$D = 26 \quad et \quad a = 1 \tag{1.58}$$

1.3 Paraquantification

La quantification canonique est basée sur la dualité onde particule traduite à travers les equations de de Broglie, Bohr. Ces dernières sont contenues, dans les équation du mouvement de Heisenberg :

$$ih\frac{dA}{dt} = [A, H] \tag{1.59}$$

En théorie quantique relativiste, on exprime cette relation en utilisant le quadrivecteur moment energie, P_μ :

$$-\,ih\frac{\partial A}{\partial x_\mu} = [A, P_\mu] \tag{1.60}$$

$$(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H, P_1, P_2, P_3), x_\mu = (t, x_1, x_2, x_3)$$

Le passage d'une théorie classique à sa version quantique est réalisé en postulant des relations de commutation entre les variables canoniques et leurs conjuguées, en tant qu'opérateurs quantiques qui satisfont une algèbre bien définie :

$$\begin{aligned}[q_i, p_j] &= ih\delta_{ij} \\ [p_i, p_j] &= 0 \\ [q_i, q_j] &= 0\end{aligned} \tag{1.61}$$

Par contre si un système ne possède pas d'analogue classique, on devrait déterminer l'Hamiltonien et les relations de commutation satisfaisant les conditions physiques. Une approche plus générale nous donne une méthode pour quantifier ce type de systèmes à travers la nouvelle approche dite paraquantification (pour plus de détail voir [2]).

1.3.1 Oscillateurs du Type Bosonique

Considérons un champ sous forme d'une collection infinie d'oscillateurs harmoniques simples.

Le Lagrangien en terme d'oscillateurs est donné par :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2) \tag{1.62}$$

l'équation d'Euler-Lagrange correspondante s'écrit :

$$\ddot{q} + q = 0 \tag{1.63}$$

Le passage à la théorie quantique nécessite la validité au niveau quantique des équations du mouvement d'Euler- Lagrange. Combinées avec les équations (1.63) on obtient :

$$\begin{aligned}(i\dot{q} =)[q, H] &= ip \\ (ip =)[p, H] &= -iq\end{aligned} \tag{1.64}$$

La question qui se pose est : quel genre de relations de commutation doit on imposer entre les variables $\{p, q\}$ afin que (1.64) soit valide ?. Il est claire que les relations ordinaires dans (1.61) sont parmi ces relations, mais d'aprés Wigner[3] ces relations ordinaires ne sont qu'un cas particulier. Pour visualiser ceci, considérons les opérateurs :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip),$$
$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \tag{1.65}$$

Le Hamiltonien prend la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2}(aa^+ + a^+a) = N \tag{1.66}$$

Les équations de Heisenberg induites sont :

$$[a, N] = a, [a^+, N] = -a^+ \tag{1.67}$$

Le spectre de l'opérateur nombre est de la forme[2] :

$$N_n = N_0 + n \ (n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.68}$$
$$N_0 \geq 0$$

on peut alors montrer que :

$$N_0 + n = \frac{1}{2}(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2) \tag{1.69}$$

qui conduit à la relation :

$$a_{n,n+1} = a^+_{n+1,n} = \left\{ \begin{array}{cc} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & \text{n pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & \text{n impair} \end{array} \right\} \tag{1.70}$$

et donc à :

$$\langle n|[a, a^+]|n'\rangle = \delta_{n,n'} \left\{ \begin{array}{cc} 2N_0 & \text{n pair} \\ 2(1 - N_0) & \text{n impair} \end{array} \right\} \tag{1.71}$$

Si on pose $Q = 2N_0$, qu'on appellera ordre de la paraquantification, il est clair que le cas ordinaire pour les relations de commutation correspond à $N_0 = \frac{1}{2}$ $(Q = 1)$. Pour le cas $N_0 = 1$ par contre, les oscillateurs vérifient des relations trilinéaires($Q = 2$) dites "self-contained" :

$$aaa^+ - a^+aa = 2a \tag{1.72}$$

De la même façon, des relations du type trilinéaire entre les oscillateurs fermioniques peuvent être dérivées dans le cas d'un oscillateur harmonique fermionique. On peut résumer ceci de la façon suivante :

Pour Q=0 :

$$\begin{aligned} N_k &= 0 \\ [a_k, N_k] &= a_k = 0 \\ a_k &= a_k^+ = 0 \end{aligned} \tag{1.73}$$

Pour Q=1 :

$$\begin{aligned} \left[a_k, a_l^+\right]_\pm &= \delta_{k,l} \\ [a_k, a_l]_\pm &= 0 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Pour Q=2 :

$$\begin{aligned} \left\langle a_k, a_l^+, a_m \right\rangle_\pm &= 2\delta_{kl}a_m + 2\delta_{lm}a_k \\ \left\langle a_k, a_l, a_m^+ \right\rangle_\pm &= 2\delta_{lm}a_k \\ \langle a_k, a_l, a_m \rangle_\pm &= 0 \end{aligned} \tag{1.75}$$

La forme symétrisée est pour les para-fermions (signe en haut), et celle antisymétrisée est pour les para-bosons (signe en bas), et plus que Q augmente plus les relations se compliquent.
Pour remédier à ceci, une relation plus compacte trilinéaire est possible pour un système de plusieurs oscillateurs, ça se résume aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left[a_k, \left[a_l^+, a_m\right]_\mp\right] &= 2\delta_{kl}a_m \\ \left[a_k, \left[a_l^+, a_m^+\right]_\mp\right] &= 2\delta_{kl}a_m^+ \mp 2\delta_{km}a_l^+ \\ [a_k, [a_l, a_m]_\mp] &= 0 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Cependant, ces dernières ne sont pas "self-contained" car elles sont soumises à la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification suivante :

$$a_l a_k^+ |0>= Q\delta_{kl}|0> \tag{1.77}$$

Où l'état du vide vérifie :

$$a_k|0>= 0, \quad < 0|0 >= 1 \tag{1.78}$$

Il y a cependant une autre alternative qui est la représentation de Green.

1.3.2 Représentation de Green

Elle consiste en l'utilisation de relations de commutation bilinéaires (au lieu de relations trilinéaires) dites anormales. Elle se base sur la décomposition suivante pour un ordre Q de la paraquantification :

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)} , \\ a_k^+ &= \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)+} \end{aligned} \tag{1.79}$$

$a_k^{(\alpha)}$ sont les composantes de Green qui satisfont les relations de commutation bilinéaires anormales suivantes :

$$\begin{aligned} \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+}\right]_{\pm} &= \delta_{kl}, \\ \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\right]_{\pm} &= 0 \end{aligned} \tag{1.80}$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+}\right]_{\mp} = \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\right]_{\mp} = 0, (\alpha \neq \beta) \tag{1.81}$$

α est l'indice de Green.
Notons que ces équations sont équivalentes aux relations trilinéaires (1.76). Cette décomposition de Green satisfait les mêmes conditions sur l'état du vide :

$$a_k^{(\alpha)}|0 >'= 0, \forall k, \alpha. \tag{1.82}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{Q} a_k^{(\beta)+}|0 >'= Q\delta_{kl}|0 >' \tag{1.83}$$

1.4 Propos de la Thèse

L'objet de ce travail est de faire une investigation sur l'extension paraquantique d'une corde bosonique ouverte dans un espace temps noncommutatif[4]. En tant que généralisation de la quantification ordinaire, elle a été introduite pour la première fois par Green[5]. Basée sur des relations de commutations trilinéaires, la paraquantification consiste en une généralisation de l'algèbre des opérateurs de création et d'annihilation pour les bosons et fermions[2]. La première fois que la paraquantification est appliquée en théorie des cordes a été réalisée par F. Ardalan et F. Mansouri [6]. Cette étude est basée sur la manière particulière avec laquelle a été considéré le centre de masse de la corde de sorte que la théorie ne peut être formulée qu'à travers les composantes de Green. Une deuxième approche de la théorie des paracordes a été proposée dans Refs. [7–9], et, à la différence de la première, dans cette dernière, la paraquantification est établie de sorte que toutes les variables de la corde vérifient des relations de commutations trilinéaires. Le résultat essentiel est le fait que pour ces deux approches, il y a une possibilité de nouvelles dimensions critiques : $D = 2 + \frac{24}{Q}$, pour le cas parabosonique, $D = 2 + \frac{8}{Q}$, pour les cordes parafermioniques, et : $D = 3 + \frac{24}{Q}$, pour les membranes parabosoniques, Q est l'ordre de la paraquantification.

La première notion de la noncommutativité a été introduite par Heisenberg et reconsidérée par la suite par Snyder[10]. Dans la littérature, la noncommutativité a été étudiée d'une façon intensive suite au fait qu'elle apparaît naturellement dans le contexte de la théorie des cordes à l'échelle de Planck[11],en plus des propriétés et implications intéressantes obtenues en théorie des champs dans le contexte de la physique du domaine sub-Planckien.

Un argument très fort expliquant pourquoi, à l'échelle de Planck, l'espace temps devient noncommutatif a été proposé par Doplicher-Fredenhagen-Roberts[12, 13]. Cet argument combine la théorie quantique et celle de la gravité d'Einstein. En effet, leur analyse suggère que les coordonnées de l'espace temps deviennent elle mêmes des opérateurs satisfaisants une algèbre noncommutative. Si on se réfère au principe d'incertitude de Heisenberg, la mesure précise de la position de la particule engendrerait une énergie infinie qui conduirait à la formation d'un trou noir, qui empêchera toute information de sortir de ce dernier et donc toute tentative de mesure devient caduque. Une issue pour contourner ce problème est d'admettre que la notion d'espace temps en tant que variété différentiable n'est plus valable à l'échelle de Planck puisque les notions de points, de lignes, etc... n'ont plus aucun sens, ce qui nous conduit à reconsidérer la géométrie habituelle et nous oblige à faire appel à la géométrie noncommutative développée par Connes[14]. A défaut de connaître la structure exacte de la noncommutativité de l'algèbre des coordonnées, on se propose d'utiliser une des plus simples et naïves réalisation d'espaces noncommutatifs à savoir du type Plan Moyal, souvent en postulant les relations de commutations entre les coordonnées d'espace temps suivantes :

$$\left[x^i, x^j\right] = i\theta^{ij}, \tag{1.84}$$

où θ^{ij} est le paramètre constant antisymétrique de la noncommutativité. Comme c'est décrit dans [15], en théorie des cordes, la généralisation directe de l'équation (1.84) à celle des relations de commutations canoniques à temps égaux entre les champs scalaires sur le world-sheet $X^I(\tau, \sigma)$ prend la forme :

$$\left[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\right] = \begin{cases} i\theta^{IJ}, & \text{si} \quad \sigma = \sigma', \\ 0, & \text{si} \quad \sigma \neq \sigma', \end{cases} \tag{1.85}$$

Où τ et σ sont les coordonnées de la surface d'univers. Plus généralement et sous certaines conditions, les positions de deux points quelconques sur la corde peuvent être noncommutatives, ceci est décrit par une relation du type :

$$\left[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\right] = i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma'), \tag{1.86}$$

Où $i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma')$ est un paramètre nonconstant de la noncommutativité.
L'objet principal de ce travail est d'étudier le comportement de la corde lorsqu'elle se propage dans un tel espace temps noncommutatif dans le contexte du formalisme de la paraquantification[16, 17].
Il est maintenant connu qu'en théorie des cordes, la noncommutativité apparait naturellement lorsque on considère une corde bosonique ouverte en présence d'un champs de fond B de Neuveu-Schwarz. Dans cette approche, la nouvelle action conduit à des modifications dans les différentes quantités comme l'opérateur de Virasoro, l'opérateur de masse et des relations de commutations entre les modes de sorte que l'algèbre de Virasoro et l'espace de Fock restent inchangés [18–20]. Dans ce travail, on s'intéresse à la propagation d'une corde parabosonique ouverte dans un espace temps noncommutatif. À la différence de l'approche du champ B, ici la noncommutativité est postulée dès le début et ne concerne pas que les extrémités mais tous les points de la corde.
L'action demeure inchangée de sorte qu'il n'y ait aucun changement dans les équations du mouvement, les opérateurs de Virasoro et l'opérateur de masse alors que l'algèbre des modes d'oscillations et celle de Virasoro sont modifiées, ceci impose une redéfinition de l'espace de Fock.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : Dans le chapitre2, le modèle de la corde ouverte bosonique est construit dans le formalisme de la paraquantification dans un espace temps noncommutatif. On postule les relations trilinéaires entre les variables des coordonnées et moments de la corde, pour ensuite dériver celles des modes d'oscillateurs. Un nouveau terme d'anomalie de l'algèbre de Virasoro est obtenu et une redéfinition de l'espace de Fock s'avère nécésssaire afin de diagonaliser l'opérateur de masse. La restauration de l'état de masse nulle impose certaines restrictions sur le spectre et sur les paramètres de la noncommutativité.

Dans les chapitres3, 4 et 5, les mêmes questions sont développées dans le cas, d'abord, d'une corde parabosonique ouverte entre deux Dp-Branes parallèles, ensuite entre deux Dp-Dq Branes parallèles et enfin dans le cas d'une corde fermée. La restauration des états du photon et du graviton va imposer des formes spécifiques pour les matrices des paramètres de la noncommutativité, conduit à une levée partielle de la dégénérescence de la masse tout en en créant de nouvelles. En particulier, pour le cas des D-Branes, on peut construire un modèle libre de tachyon avec un état photonique lorsque plus de restrictions sur ses paramètres sont imposées d'une part, alors que La condition supplémentaire de Virasoro pour la corde fermée va conduire à une réduction du spectre d'autre part.

Chapitre 2

Cordes Parabosoniques Ouvertes et Paramètres de la Noncommutativité

2.1 Le Modèle

Alors que lors de l'étude de la corde ouverte en présence du champ de fond, le paramètre de noncommutativité est constant et est exprimé en termes des champs B constants usuels, le paramètre de noncommutativité peut cependant être nonconstant par l'introduction par exemple de champ B nontriviaux[21] ou par la considération d'une surface d'univers noncommutative, puisque cette dernière conduit directement à la noncommutativité de l'espace temps avec le paramètre nonconstant sous la forme $i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma^{'})$ (voir par exemple la Ref.[22]).

Dans la Ref.[23], l'auteur s'intéresse à la noncommutativité de la surface d'univers de la corde bosonique et étudie la propagation de la corde dans l'espace de phase noncommutatif décrit par les relations suivantes entre les variables dynamiques usuelles d'une corde bosonique dans la jauge du cône de lumière $\{x^-, p^+, X^I(\tau,\sigma), \Pi^I(\tau,\sigma)\}$ dans le cas quantique ordinaire :

$$\begin{aligned}
\left[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\right] &= i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma'), \\
\left[\Pi^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\right] &= i\gamma^{IJ}(\sigma - \sigma'), \\
\left[X^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\right] &= i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \qquad (2.1) \\
[x^-, p^+] &= i,
\end{aligned}$$

Où : $\Pi^I = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\tau X^I$ sont les moments conjugués canoniques des coordonnées de la corde X^I et $\{x^-, p^+\}$, sont les variables du centre de masse de la corde.
θ^{IJ} et γ^{IJ}, représentent respectivement les paramètres de la noncommutativité des variables coordonnées d'espace temps et des variables moments, ils sont donnés sous la forme de l'expansion de Fourier[23] :

$$\begin{aligned} \theta^{IJ}(\sigma - \sigma') &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta_k^{IJ} \exp ik(\sigma - \sigma'), \\ \gamma^{IJ}(\sigma - \sigma') &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{IJ} \exp ik(\sigma - \sigma') \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

La propriété d'Hermiticité de ces opérateurs tenseurs est exprimée comme suit :

$$\left[i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma')\right]^+ = [i\theta^{JI}(\sigma' - \sigma)], \ \left[i\gamma^{IJ}(\sigma - \sigma')\right]^+ = [i\gamma^{JI}(\sigma' - \sigma)]. \tag{2.3}$$

Noter ici que les relations (1.84) sont un cas particulier des relations plus générales dans le contexte du formalisme de la paraquantification. En effet, introduisons l'ansatz de Green suivante :

$$X^{\ I}(\tau, \sigma) = \sum_{\alpha=1}^{Q} X^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma) \tag{2.4}$$

Où $\alpha = 1, 2, \ldots, Q$ sont les indices de Green et $X^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma)$ sont les composantes de Green de $X^{\ I}(\tau, \sigma)$. Q est l'ordre de la paraquantification de sorte que $Q = 1$ corresponde au cas quantique ordinaire.
C'est la représentation de Green. (pour plus de détails, voir Ref. [2]).
Paraquantifier cette théorie consiste à écrire les relations de commutations bilinéaires suivantes (dites anormales) :

$$\begin{aligned} \left[X^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma), X^{(\alpha)\ J}(\tau, \sigma')\right] &= i\theta^{IJ}(\sigma - \sigma'), \\ \left[X^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma), X^{(\beta)\ J}(\tau, \sigma')\right]_+ &= 0; \qquad \alpha \neq \beta, \\ \left[\Pi^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma), \Pi^{(\alpha)\ J}(\tau, \sigma')\right] &= i\gamma^{IJ}(\sigma - \sigma'), \\ \left[\Pi^{(\alpha)\ I}(\tau, \sigma), \Pi^{(\beta)\ J}(\tau, \sigma')\right]_+ &= 0; \qquad \alpha \neq \beta, \\ [x^{(\alpha)\ -}, p^{(\alpha)\ +}] &= i, \\ [x^{(\alpha)\ -}, p^{(\beta)\ +}]_+ &= 0; \qquad \alpha \neq \beta, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les relations (2.5) sont équivalentes aux relations de commutations trilinéaires suivantes :

$$
\begin{aligned}
\left[X^I(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= 2i\{\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\}.\\
\left[X^I(\tau,\sigma),\left[\Pi^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= 2i\{\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\}.\\
\left[X^I(\tau,\sigma),\left[\Pi^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= 2i\{\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')+\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\}.\\
\left[\Pi^I(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= 2i\{-\eta^{IJ}\delta(\sigma'-\sigma)\Pi^K(\tau,\sigma'')+\gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\}.\\
\left[\Pi^I(\tau,\sigma),\left[\Pi^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= 2i\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')+\gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\}.\\
[X^I(\tau,\sigma),[X^J(\tau,\sigma'),A]_+] &= 2i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')A.\\
[X^I(\tau,\sigma),[\Pi^J(\tau,\sigma'),A]_+] &= 2i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')A.\\
[\Pi^I(\tau,\sigma),[\Pi^J(\tau,\sigma'),A]_+] &= 2i\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')A.\\
[x^-,[p^+,B]_+] &= 2iB.\\
[x^-,[p^+,p^+]_+] &= 4ip^+.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Où on a utilisé toutes les combinaisons possibles entre les variables dynamiques mentionnées précédemment, avec $A=\{x^-,p^+\}$, $B=\{X^I(\tau,\sigma),\Pi^I(\tau,\sigma)\}$, et $I,J,K=2,\dots,D-1$, sont les composantes transverses. C'est l'extension paraquantique de la théorie décrite par la transition entre le cas ordinaire défini dans (2.1) et celui du cas générale obtenu dans la relation (2.6) et les cordes dans ce contexte sont nommées paracordes.

En termes de modes d'oscillateurs, pour $m,n,l\neq 0$ on obtient (voir AnnexeA) :

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right] &= 2\left\{\begin{array}{c}(m\eta^{IJ}+i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ})\delta_{m+n,0}\alpha_l^K\\ +(m\eta^{IK}+i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{m+l,0}\alpha_n^J\end{array}\right\}.\\
\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,A\right]_+\right] &= 2\left\{m\eta^{IJ}+i\frac{(n)^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ}\right\}\delta_{m+n,0}A.\\
[x^-,[p^+,\alpha_m^I]_+] &= 2i\alpha_m^I.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left[p^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] &= 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\left\{\gamma_0^{IJ}\delta_{m+n,0}p_l^K+\gamma_0^{IK}\delta_{m+l,0}p_n^J\right\}.\\
\left[x^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] &= 2i\ \left\{(\tfrac{1}{2}\eta^{IJ}-\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ})p^K+(\tfrac{1}{2}\eta^{IK}-\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK})p^J\right\}\ .\\
\left[p^I,\left[x^J,p^K\right]_+\right] &= -2i\{\frac{1}{2}\eta^{IJ}+\frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\}p^K+2i\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IK}\}x^J.\\
\left[p^I,\left[x^J,x^K\right]_+\right] &= -2i\ \left\{(\tfrac{1}{2}\eta^{IJ}+\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ})x^K+(\tfrac{1}{2}\eta^{IK}+\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK})x^J\right\}\ .\\
\left[x^I,\left[x^J,p^K\right]_+\right] &= 2i\ \left\{(\theta_0^{IJ}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ})p^K+(\tfrac{1}{2}\eta^{IK}-\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK})x^J\right\}.\\
\left[x^I,\left[x^J,x^K\right]_+\right] &= 2i\ \left\{(\theta_0^{IJ}-(2\pi\alpha')^2\tau^3\gamma_0^{IJ})x^K+(\theta_0^{IK}-(2\pi\alpha')^2\tau^3\gamma_0^{IK})x^J\right\}.\\
\left[x^I,\left[p^J,A\right]_+\right] &= 2i\{\frac{1}{2}\eta^{IJ}-\frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\}A.\\
\left[x^I,\left[x^J,A\right]_+\right] &= 2i\{\theta_0^{IJ}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\}A.\\
[x^-,[p^+,C]_+] &= 2iC.\\
[A,[C,C]_+] &= 0.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

$C=x^I,p^I$, *et* $X^I(\tau,\sigma)=x^I+2\alpha'p^I\tau+i\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{n=\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I\exp(-in\tau)\cos(n\sigma)$.

2.1.1 Algèbre de Virasoro

Dans la théorie des paracordes, les générateurs de Virasoro sont donnés sous une forme symétrisée (voir Ref. [9]) :

$$L_m^{\perp}=\frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{m-p,}^I\alpha_{pI}\right]_+.\tag{2.8}$$

Une algèbre de Virasoro modifée est alors obtenue :

$$\left[L_m^{\perp},L_n^{\perp}\right]=(m-n)L_{m+n}+Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0}+\pounds_{mn,IJ}.\tag{2.9}$$

où :

$\pounds_{mn,IJ}=\sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta_{p-m}^{IJ}+\frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma_{p-m}^{IJ}\right\}\left[\alpha_{pI},\alpha_{m+n-pJ}\right]_+,$

est un nouveau terme d'anomalie dû à la noncommutativité de l'espace temps.

2.1.2 Spectre de Masse

De la même façon que pour l'opérateur de Virasoro, on déduit aussi la forme symétrisée de l'opérateur de masse :

$$M^2 = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\alpha'} [\alpha_{-n}^I, \alpha_{nI}]_+. \tag{2.10}$$

Comme c'est déja mentionné auparavant, la forme de l'opérateur de masse n'a pas été affectée par la noncommutativité, cependant, les modes d'oscillations vérifient des relations de commutations trilinéaires modifiées (2.7), de sorte que, et dûe à la présence des paramètres de la noncommutativité, les états usuels ne sont plus des états propres de ce dernier.
Il est alors nécéssaire de faire une diagonalisation simultanée de ces matrices anti-symétriques comme c'est décrit dans les équations suivantes :

$$\left(U^{-1} i\theta_m U\right)^{IJ} = D_m^{IJ} = \mu_I^{(m)} \delta^{IJ} \qquad \text{et} \qquad \left(U^{-1} i\gamma_n U\right)^{IJ} = T_n^{IJ} = \nu_I^{(n)} \delta^{IJ}$$

$$avec : [\theta_m, \gamma_n] = 0. \tag{2.11}$$

Uest une matrice de transformation unitaire. Ceci peut se faire par la redéfinition de l'espace de Fock suivante (inspirée de Ref.[15]) :

$$\frac{1}{h!} \langle \prod_{I=2}^{D-1} \prod_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I)^{\lambda_{m,I}} \rangle_+ |p^+, \vec{p}^T\ \rangle \rightarrow \frac{1}{h!} \langle \prod_{I=2}^{D-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ (U^{-1}\alpha_{-m})^I \right\}^{\lambda_{m,I}} \rangle_+ |p^+, \vec{p}^T\ \rangle. \tag{2.12}$$

$$\text{où :} \quad h = \sum_{m,I} \lambda_{m,I}.$$

la forme symétrisée $\langle \ldots \rangle_+$ est la somme des $h!$ permutations possibles des produits d'oscillateurs.
On peut vérifier que l'opérateur de masse est maintenant diagonal dans la nouvelle base, cependant, ses valeurs propres sont modifiées par la presence de celles des paramètres de la noncommutativité, ce qui affecte la dégéneresence de la masse. En particulier, pour le premier niveau excité, l'état vectoriel ordinaire correspondant au groupe de symétrie $SO(D-2)$ prend une masse et brise ainsi cette symétrie. Pour procéder à la restauration de l'état du photon de masse nulle, les conditions suivantes s'imposent :

$$-\frac{1}{\alpha'} \mu_J^{(1)} - \frac{1}{\alpha'} (2\pi\alpha')^2 \nu_J^{(1)} = 0. \tag{2.13}$$

$$\text{plus générallement :} \quad D_1 = -(2\pi\alpha')^2 T_1$$

L'application de cette condition sur les niveaux supérieurs de la masse va apporter des modifications sur la dégénéressence et les valeurs propres de certains états spécifiques comme c'est présenté dans le Tableau2.1.

TABLEAU 2.1: Spectre de Masse : Cas Corde Ouverte.

M^2	Etats de Masse	Valeurs Propres de la Masse	Application
$N=0$	$\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$-\frac{1}{\alpha'}$	$-\frac{1}{\alpha'}$
$N=1$	$(U^{-1}\alpha_{-1})^J\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$-\frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{\alpha'}\{\mu_J^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)}\}$	0
$N=2$	$(U^{-1}\alpha_{-2})^J\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\{2-\frac{1}{\alpha'}\{4\mu_J^{(2)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(2)}\}\}$	$\frac{1}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c}2-\frac{1}{\alpha'}\{4\mu_J^{(2)}+\\(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(2)}\}\end{array}\right\}$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\{2-\frac{1}{\alpha'}\{\mu_J^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)}$ $+\mu_K^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_K^{(1)}\}\}$	$\frac{1}{\alpha'}$
$N=3$	$(U^{-1}\alpha_{-3})^J\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\{4-\frac{1}{\alpha'}\{9\mu_J^{(3)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(3)}\}\}$	$\frac{1}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c}4-\frac{1}{\alpha'}\{9\mu_J^{(3)}+\\(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(3)}\}\end{array}\right\}$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\{4-\frac{1}{\alpha'}\{\mu_J^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)}$ $+4\mu_K^{(2)}+(2\pi\alpha')^2\nu_K^{(2)}\}\}$	$\frac{1}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c}4-\frac{1}{\alpha'}(4\mu_K^{(2)}+\\(2\pi\alpha')^2\nu_K^{(2)})\end{array}\right\}$
	$\frac{1}{3!}\langle(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L\rangle_+\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\{4-\frac{1}{\alpha'}\{\mu_J^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)}+\mu_K^{(1)}$ $+(2\pi\alpha')^2\nu_K^{(1)}+\mu_L^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_L^{(1)}\}\}$	$\frac{2}{\alpha'}$

Chapitre 3

Cordes Parabosoniques Ouvertes entre Deux Dp-Branes Parallèles dans un Espace Temps Noncommutatif

Avant d'aborder l'étude de la configuration plus générale d'une corde parabosonique ouverte entre deux Dp-Dq Branes parallèles positionnées en x_1^a et x_2^a respectivement, il est intéressant de voir d'abord le cas plus simple d'une configuration d'une corde parabosonique ouverte entre deux Dp-Branes parallèles séparées par la distance $(x_1^a\text{-}x_2^a)^2$, c'est à dire une corde dont les extrémités sont attachées à deux Dp-Branes de mèmes dimensionalités.

Deux types de coordonnées sont utilisées pour décrire cette théorie :

Le premier correspond aux modes d'oscillateurs NN α^i, $i = 1, q$ qui vérifie les mêmes relations trilinéaires établies précedement.

Le deuxième type correspond aux coordonnées DD données par la solution :

$$X^a(\tau,\sigma) = \overline{x}_1^a + (\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^a \exp(-in\tau)\sin n\sigma, \text{ où : } a,b,c = p+1, D-1.$$

Les modes d'oscillateurs correspondants vérifient les relations trilinéaires calculées suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_m^a, \left[\alpha_n^b, \alpha_l^c\right]_+\right] &= 2\left\{\begin{array}{c} (m\delta^{ab} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{ab} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{ab})\delta_{m+n,0}\alpha_l^c \\ +(m\delta^{ac} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{ac} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{ac})\delta_{m+l,0}\alpha_n^b \end{array}\right\}. \\
\left[\alpha_m^a, \left[\alpha_n^b, \alpha_l^j\right]_+\right] &= 2\left\{(m\delta^{ab} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{ab} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{ab})\delta_{m+n,0}\right\}\alpha_l^j. \\
\left[\alpha_m^a, \left[\alpha_n^b, A\right]_+\right] &= 2\left\{(m\delta^{ab} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{ab} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{ab})\delta_{m+n,0}\right\}A. \\
\left[x^-, \left[p^+, \alpha_n^b\right]_+\right] &= 2i\alpha_n^b.
\end{aligned}$$

3.1 Algèbre de Virasoro

La présence des deux types de modes d'oscillateurs conduit à la forme suivante de l'opérateur de Virasoro

$$L_m^{tot} = L_m^{NN} + L_m^{DD},\ m \neq 0$$

où les termes correspondants aux modes NN et DD sont donnés par :

$$L_m^{NN} = \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{i=2}^{q} \left[\alpha_{m-p}^i, \alpha_{p,i}\right]_+ \ m \neq 0 \tag{3.1}$$

$$L_m^{DD} = \frac{1}{2}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\sum_{a=p+1}^{D} \left[\alpha_{m-h}^a, \alpha_{h,a}\right]_+ \ m \neq 0 \tag{3.2}$$

qui vérifient les deux algèbres suivantes propres à chaque type de mode.

$$\left[L_m^{NN}, L_n^{NN}\right] = (m-n)L_{m+n}^{NN} + Q(p-1)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,ij}$$

$$\text{avec : } \pounds_{mn,ij} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(h-m)^2}{\alpha'}\theta_{h-m}^{ij} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma_{h-m}^{ij}\right\}\left[\alpha_{h\ i}, \alpha_{m+n-h\ j}\right]_+$$

et

$$\left[L_m^{DD}, L_n^{DD}\right] = (m-n)L_{m+n}^{DD} + Q(D-1-p)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,ab}$$

où :

$$\pounds_{mn,ab} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{i}{4} \frac{(h-m)^2}{\alpha'} \theta_{h-m}^{ab} + \frac{i}{4} \frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'} \gamma_{h-m}^{ab} \right\} [\alpha_{h\ a}, \alpha_{m+n-h\ b}]_+ \tag{3.3}$$

On peut alors montrer que l'algèbre totale se réduit à la somme des deux précédentes

$$\left[L_m^{tot}, L_n^{tot}\right] = \left[L_m^{NN}, L_n^{NN}\right] + \left[L_m^{DD}, L_n^{DD}\right].$$

on obtient finalement l'algèbre de Virasoro pour ce modèle

$$\left[L_m^{tot}, L_n^{tot}\right] = (m-n) L_{m+n}^{tot} + Q(D-2) \frac{(m^3-m)}{12} \delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,IJ}.$$

Où, $\pounds_{mn,IJ}$, qui est la somme des deux nouveaux termes d'anomalie précédents et qui représente le nouveau terme d'anomalie dû à la noncommutativité de l'espace temps.

Remarquons que si on élimine la noncommutativité (θ, $\gamma \to 0$) on retrouve le résultat dans [24, 25].

3.2 Spectre de Masse

3.2.1 Redéfinition de l'Espace de Fock

On procède à la même redéfinition précédente de l'espace de Fock tout en mettant en évidence les deux types de modes d'oscillations NN et DD.

$$\left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{p} (\alpha_{-m}^{i})^{\lambda_{m,i}}\right] \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^{D-1} (\alpha_{-n}^{a})^{\lambda_{n,a}}\right] |p^+, \vec{p}^T\rangle \to \left\{ \begin{array}{c} \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{p} \left\{(U^{-1}\alpha_{-m})^i\right\}^{\lambda,i}\right] \\ \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^{D-1} \left\{(U^{-1}\alpha_{-n})^a\right\}^{\lambda_{n,a}}\right] \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}^T\rangle$$

3.2.2 Opérateur de Masse

L'opérateur de masse obtenu à partir de la condition de la couche de masse prend la forme symétrisée suivante qui comprend la contribution des deux types de modes en question plus un terme positif qui représente la séparation des deux membranes, ce qui va entraîner un décalage du spectre de masse dans le sens positif.

$$M^2 = \left(\frac{\overline{x}_2^a - \overline{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{p}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^i, \alpha_{n\ i}\right]_+ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=p+1}^{D-1}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^a, \alpha_{n\ a}\right]_+$$

en plus de cette séparation, la noncommutativité de l'espace temps va engendrer d'autres modifications dans le spectre, comme l'absence d'états vectoriels de masses nulles. on peut visualiser ceci sur les deux premiers niveaux de masse dans le Tableau3.1 :

Tableau 3.1: Spectre de Masse : Cas Dp-Branes

	Etats Propres	Valeurs propres
$N=0$	$\|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 - \frac{1}{\alpha'}$
$N=1$	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 - (\frac{1}{\alpha'})^2\frac{1}{2}\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right)$
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^b \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 - (\frac{1}{\alpha'})^2\frac{1}{2}\left(\mu_b^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_b^{(1)}\right)$
$N=2$	$(U^{-1}\alpha_{-2})^j \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(4\mu_j^{(2)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(2)}\right)$
	$(U^{-1}\alpha_{-2})^b \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(4\mu_b^{(2)} + (2\pi\alpha')^2\nu_b^{(2)}\right)$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-1})^k]_+ \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_k^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_k^{(1)}\right)$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^b, (U^{-1}\alpha_{-1})^c]_+ \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_b^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_b^{(1)}\right) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_c^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_c^{(1)}\right)$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^j (U^{-1}\alpha_{-1})^b]_+ \|p^+, \vec{p}^T\ \rangle$	$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 + \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_b^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_b^{(1)}\right) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right)$

Remarquons alors qu'on peut déja éliminer le tachyon en fixant une séparation minimale qui permet d'avoir un état scalaire de masse nulle comme état fondamental. En effet il suffit de choisir :

$$(x_2^a - x_1^a)^2 = \left(2\pi\sqrt{\alpha'}\right)^2$$

On peut en plus imposer une condition qui permettra au premier niveau excité de redevenir état vectoriel de masse nulle. Cette condition prend la forme suivante :

$$\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right) = 2\left(\alpha^{'}\right)^2 \left(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha^{'}}\right)^2$$

En tenant compte du premier choix pour la distance de séparation, la condition redevient sous la forme finale suivante :

$$D_1 + (2\pi\alpha')^2 T_1 = 2\alpha^{'}.1$$

On peut alors voir dans le Tableau3.2 comment le spectre sera modifié pour les autres niveaux supérieurs.

TABLEAU 3.2: Spectre de Masse Modifié : Cas Dp-Branes.

	Etats Propres	Après Application
$N=0$	$\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0
$N=1$	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^b\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0
$N=2$	$(U^{-1}\alpha_{-2})^j\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\left\{4 - \frac{1}{\alpha'} \begin{array}{c} 4\mu_j^{(2)} + \\ (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(2)} \end{array}\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-2})^b\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'}\left\{4 - \frac{1}{\alpha'} \begin{array}{c} 4\mu_b^{(2)} + \\ (2\pi\alpha')^2\nu_b^{(2)} \end{array}\right\}$
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-1})^k]_+\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^b, (U^{-1}\alpha_{-1})^c]_+\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0
	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^j (U^{-1}\alpha_{-1})^b]_+\|p^+, \vec{p}^T\rangle$	0

Chapitre 4

Cordes Parabosoniques Ouvertes entre Deux Dp-Dq Branes Parallèles dans un Espace Temps Noncommutatif

4.1 Relations Trilinéraires Modifiées et Configurations D-Branes

Considérons une corde parabosonique ouverte entre deux Dp-Dq Branes parallèles ($p > q$) positionnées en x_1^a et x_2^a respectivement. En plus des deux types de coordonnées de la configuration précédentes, dans ce cas, de nouvelles coordonnées dites mixtes notées ND interviennent. elles sont données par les solutions suivantes :

$$X^r\left(\tau,\sigma\right) = \overline{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*_{impair}} \tfrac{2}{n}\alpha^r_{\frac{n}{2}} \exp\left(-i\tfrac{n}{2}\tau\right)\cos\left(\tfrac{n}{2}\sigma\right), \quad r,s,t = q+1,\ldots,p$$

qui vérifient les relations trilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[\alpha^r_{\frac{w}{2}},\left[\alpha^s_{\frac{z}{2}},\alpha^t_{\frac{g}{2}}\right]_+\right] &= 2\left\{\begin{array}{c} (\tfrac{w}{2}\delta^{rs} + i\tfrac{(\frac{z}{2})^2}{2\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{z}{2}} + i\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{z}{2}})\delta_{w+z,0}\alpha^t_{\frac{g}{2}} \\ +(\tfrac{w}{2}\delta^{rt} + i\tfrac{(\frac{g}{2})^2}{2\alpha'}\theta^{rt}_{\frac{g}{2}} + i\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rt}_{\frac{g}{2}})\delta_{w+g,0}\alpha^s_{\frac{z}{2}} \end{array}\right\}. \\
\left[\alpha^r_{\frac{w}{2}},\left[\alpha^s_{\frac{z}{2}},H\right]_+\right] &= 2\left\{(\frac{w}{2}\delta^{rs} + i\frac{(\frac{z}{2})^2}{2\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{z}{2}} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{z}{2}})\delta_{w+z,0}\right\}H. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

en plus des relations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\left[\alpha^i_m, \left[\alpha^j_n, D\right]_+\right] &= 2\left\{m\eta^{ij} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta^{ij}_n + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{ij}_n\right\}\delta_{m+n,0}D. \\
\left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] &= 2iD.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$D = \{\alpha^a_m, \alpha^r_{\frac{w}{2}}\}$,$R = \{\alpha^i_m, \alpha^r_{\frac{w}{2}}, x^-, p^+\}$,$H = \{\alpha^i_m, \alpha^a_m, x^-, p^+\}$ *et* $w, z, g \in \mathbb{Z}_{impair}$.

4.2 Algèbre de Virasoro

On introduit les opérateurs de Virasoro sous la forme suivante :

$$L^{tot}_m = L^{NN}_m + L^{DD}_m + L^{ND}_m. \qquad m \neq 0 \tag{4.3}$$

où on a rajouté un troisième terme associé aux nouveaux modes mixtes demi entiers du type ND donné par la relation :

$$L^{ND}_m = \frac{1}{2}\sum_{h\in\mathbb{Z}_{impair}}\sum_{r=q+1}^{p}\left[\alpha^r_{m-\frac{h}{2}}, \alpha_{\frac{h}{2}r}\right]_+ \quad m \neq 0 \tag{4.4}$$

qui vérifie l'algèbre :

$$\left[L^{ND}_m, L^{ND}_n\right] = (m-n)L^{ND}_{m+n} + Q\frac{(p-q)}{12}(m^3 + \frac{m}{2})\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,rs} \tag{4.5}$$

où

$$\pounds_{mn,rs} = \sum_{h\in\mathbb{Z}_{impair}}\left\{\frac{i}{4}\frac{(\frac{h}{2}-m)^2}{\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{h}{2}-m} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{h}{2}-m}\right\}\left[\alpha_{\frac{h}{2}\ r}, \alpha_{m+n-\frac{h}{2}\ s}\right]_+ \tag{4.6}$$

est le terme d'anomalie induit par les oscillateurs en modes mixtes.

L'algèbre totale de l'opérateur de Virasoro est alors obtenue en faisant l'addition des algèbres correspondants aux trois types d'oscillateurs :

$$\begin{aligned}
\left[L^{tot}_m, L^{tot}_n\right] = (m-n)L^{tot}_{m+n} + \quad & Q\quad\frac{(p-q)}{8}m\delta_{m+n,0} + Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} \\
+ \quad & \pounds_{mn,ij} + \pounds_{mn,ab} + \pounds_{mn,rs}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

La somme des trois derniers termes $\{\pounds_{mn,ij} + \pounds_{mn,ab} + \pounds_{mn,rs}\}$ donne le nouveau terme d'anomalie de la corde parabosonique ouverte entre deux Dp-Dq Branes parallèles qui se propage dans un espace temps noncommutatif.

De même, on remarque que si on élimine la noncommutativité (θ, $\gamma \to 0$) on retrouve le résultat dans [24].

4.3 Spectre de Masse

4.3.1 Redéfinition de l'Espace de Fock

Les trois types de modes d'oscillateurs seront redéfinis de la façon généralisée suivante :

$$\frac{1}{h!}\left\{\langle\left[\prod_{i=2}^{q}\prod_{m=1}^{+\infty}(\alpha_{-m}^{i})^{\lambda_{m,i}}\right]\left[\prod_{r=q+1}^{p}\prod_{l\in Z_{impair}^{+}}(\alpha_{-\frac{l}{2}}^{r})^{\lambda_{l,r}}\right]\left[\prod_{a=p+1}^{D}\prod_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{-n}^{a})^{\lambda_{n,a}}\right]\rangle_{+}\right\}|p^{+},\vec{p}^{T}\rangle$$

$$\to \quad \frac{1}{h!}\left\{\begin{array}{c}\langle\left[\prod_{i=2}^{q}\prod_{m=1}^{+\infty}\left\{(U^{-1}\alpha_{-m})^{i}\right\}^{\lambda_{m,i}}\right]\left[\prod_{r=q+1}^{p}\prod_{l\in Z_{impair}^{+}}\{(U^{-1}\alpha_{-\frac{l}{2}})^{r}\}^{\lambda_{l,r}}\right]\\ \times\left[\prod_{a=p+1}^{D}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(U^{-1}\alpha_{-n})^{a}\right\}^{\lambda_{n,a}}\right]\rangle_{+}\end{array}\right\}|p^{+},\vec{p}^{T}\rangle \tag{4.8}$$

$$\text{où :} \quad h=\sum_{m,i}\lambda_{m,i}+\sum_{l,r}\lambda_{l,r}+\sum_{n,a}\lambda_{n,a}.$$

4.3.2 Opérateur de Masse

Dans ce cas, l'opérateur de masse comporte en plus la contribution des modes mixtes ND et prend la forme :

$$M^{2}=\left(\frac{x_{2}^{a}-x_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=2}^{q}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^{i},\alpha_{ni}\right]_{+}+\sum_{n\in Z_{impair}^{+}}\sum_{r=q+1}^{p}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-\frac{n}{2}}^{r},\alpha_{\frac{n}{2}r}\right]_{+}$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{a=p+1}^{D}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^{a},\alpha_{na}\right]_{+}. \tag{4.9}$$

Le spectre de masse des trois premiers niveaux est représenté dans le Tableau4.1 avec la notation ci-dessous :

$$m_{0}^{2}=(\frac{x_{2}^{a}-x_{1}^{a}}{2\pi\alpha'})^{2}-\frac{3}{2\alpha'}Q\frac{(p-q)}{24} \quad et : \zeta_{I}^{(n)}=n^{2}\mu_{I}^{(n)}+(2\pi\alpha')^{2}\nu_{I}^{(n)}\ . \tag{4.10}$$

TABLEAU 4.1: Spectre de Masse : Cas Dp-Dq Branes.

	Etats Propres	Valeurs Propres de M^2
0	$\vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{\alpha'}$.
$\frac{1}{2}$	$(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \ \zeta_r^{(\frac{1}{2})}$.
1	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^s]_+ \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \left\{ \zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})} \right\}$.
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^a \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \zeta_a^{(1)}$.
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \zeta_j^{(1)}$.
$\frac{3}{2}$	$(U^{-1}\alpha_{-\frac{3}{2}})^r \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \zeta_r^{(\frac{3}{2})}$.
	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r\right]_+ \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \left\{ \zeta_j^{(1)} + \zeta_r^{(\frac{1}{2})} \right\}$.
	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^a, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r\right]_+ \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \left\{ \zeta_a^{(1)} + \zeta_r^{(\frac{1}{2})} \right\}$.
	$\frac{1}{3!}\langle (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^s, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^t \rangle_+ \vert p^+, \vec{p}^T \rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2 \left\{ \begin{array}{c} \zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})} \\ + \zeta_t^{(\frac{1}{2})} \end{array} \right\}$.

4.3.3 Discussion

Les modifications attribuées au spectre de masse sont dûes aux effets de la noncommutativité et de la configuration des D-branes choisie. Pour un choix général des matrices antisymmétriques θ et γ, on obtient une levée partielle de la génerescence de la masse en plus de l'abscence de l'état de masse nulle. En particulier, cette modification brise complètement la symétrie de la rotation spatiale $SO(D-2)$ des états vectoriels de masse nulle de l'espace temps commutatif. Différents modèles sont envisagés , (présence d'états vectoriels de masse nulle, modèle avec ou sans tachyon,...) en considérant des choix particuliers pour la configuration des D-branes et des matrices des paramètres de la noncommutativité.

4.3.3.1 Modèle sans Tachyon

Pour un modèle libre de tachyon, la masse de l'état fondamental dépendra de la séparation entre les deux D-branes, en accord avec la relation suivante :

$$(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 - \frac{2}{2\alpha'} Q \frac{D-2}{24} - \frac{3}{2\alpha'} Q \frac{p-q}{24} \geq 0. \tag{4.11}$$

TABLEAU 4.2: Spectre de Masse Modifié : Cas Dp-Dq Branes.

	Etats Propres	Nouvelles Valeurs Propres de M^2
0	$\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	0. Scalaire de Masse Nulle
$\frac{1}{2}$	$(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\zeta_r^{(\frac{1}{2})}$
1	$\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^s]_+\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left\{\zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})}\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^a\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	0. Scalaire de Masse Nulle
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	0. Vecteur de Masse Nulle
$\frac{3}{2}$	$(U^{-1}\alpha_{-\frac{3}{2}})^r\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{3}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\zeta_r^{(\frac{3}{2})}$
	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r\right]_+\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\zeta_r^{(\frac{1}{2})}$
2	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-1})^k\right]_+\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	0. Tenseur de Masse Nulle
	$\frac{1}{3!}\langle(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^r, (U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}})^s\rangle_+\vert p^+, \vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left\{\zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})}\right\}$

Considérons d'abord le choix d'un état fondamental scalaire de masse nulle obtenu lorsqu'on choisit la séparation entre les D-Branes comme suit :

$$(x_2^a - x_1^a)^2 = (2\pi\alpha')^2\frac{1}{\alpha'} + Q\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\frac{3(p-q)}{48}. \tag{4.12}$$

Par substitution dans la masse de l'état vectoriel $(U^{-1}\alpha_{-1})^j|p^+, \vec{p}^T\rangle$ donnée par $m_0^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\zeta_j^{(1)}$ (voir Tableau4.2) on obtient :

$$-\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha'})^2\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha'}. \tag{4.13}$$

La restauration de l'état vectoriel de masse nulle est accomplie en faisant le choix suivant des paramètres de la noncommutativité :

$$(D_1)_{jj} + (2\pi\alpha')^2(T_1)_{jj} = 2\alpha'. \tag{4.14}$$

Pour illustrer ceci, examinons dans le Tableau4.2, comment est modifié le spectre si on tient compte à la fois des deux conditions, vecteurs et état fondamental scalaire de masses nulles données dans (4.12,4.14) et appliquons les aux ordres supérieurs. Maintenent si on considère un cas plus général décrivant un état fondamental scalaire avec masse et supposons la positivité de la masse de l'état vectoriel donnée par la condition :

$$(D_1)_{jj} + (2\pi\alpha')^2(T_1)_{jj} < 2\left(\alpha'\right)^2\left\{(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'})^2 - \frac{3}{2\alpha'}Q\frac{p-q}{24}\right\} \tag{4.15}$$

L'état vectoriel massif obtenu aura un degré de liberté suplémentaire, i.e, $(q-1)$ états massifs pour chaque p^i satistfaisant, $p^2 + m^2 = 0$. On doit alors joindre un des $(d-p)$ états scalaires pour former l'état vectoriel massif. L'état scalaire joint à ce vecteur massif est la combinaison linéaire[26] :

$$(x_2^a - x_1^a)^2 (U^{-1}\alpha_{-1})^a |p^+, \vec{p}^T\rangle. \tag{4.16}$$

Chapitre 5

Cordes Parabosoniques Fermées dans un Espace Temps Noncommutatif et Réduction du Spectre

Pour fixer les notations, écrivons les solutions suivantes pour la corde férmée :

$$X^I(\tau,\sigma) = x^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{\tfrac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\tfrac{1}{m}\exp(-im\tau)(\alpha_m^I\exp(im\sigma) + \tilde{\alpha}_m^I\exp(-im\sigma)).$$

On calcule les relations trilinéaires des variables centre de masse $\{x^-, p^+, x^i, p^i\}$ et des modes d'oscillateurs $\{\alpha_m^I, \tilde{\alpha}_m^I\}$, on obtient :

$$\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = 2\left\{\begin{array}{c} (m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_{-n}^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-n}^{IJ})\delta_{m+n,0}\alpha_l^K \\ +(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_{-l}^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-l}^{IK})\delta_{m+l,0}\alpha_n^J \end{array}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{\alpha}_m^I, \left[\tilde{\alpha}_n^J, \tilde{\alpha}_l^K\right]_+\right] &= 2\left\{\begin{array}{c} (m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ})\delta_{m+n,0}\tilde{\alpha}_l^K \\ +(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{m+l,0}\tilde{\alpha}_n^J \end{array}\right\}. \\
\left[\tilde{\alpha}_m^I, \left[\alpha_n^J, \tilde{\alpha}_l^K\right]_+\right] &= 2(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\alpha_n^J\delta_{m+l,0}. \\
\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, A\right]_+\right] &= 2\{(m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_{-n}^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-n}^{IJ})\delta_{m+n,0}\}A. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

pour les modes d'oscillateurs : $l, m, n \neq 0$, et :

$$
\begin{aligned}
\left[p^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] &= \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\{\gamma_0^{IJ}p^K + \gamma_0^{IK}p^J\}. \\
\left[p^I, \left[x^J, p^K\right]_+\right] &= -2i\{\eta^{IJ} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\}p^K + \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\{\gamma_0^{IK}\}x^J. \\
\left[x^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] &= 2i\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\}p^K + 2i\{\eta^{IK} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IK}\}p^J. \\
\left[p^I, \left[x^J, x^K\right]_+\right] &= -2i\{\eta^{IJ} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\}p^K - 2i\{\eta^{IK} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IK}\}p^J. \\
\left[x^I, \left[p^J, x^K\right]_+\right] &= 2i\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\}x^K + 2i\{\theta_0^{IK} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}\}p^J. \\
\left[x^I, \left[x^J, x^K\right]_+\right] &= 2i\left\{\theta_0^{IJ} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right\}x^K + 2i\left\{\theta_0^{IK} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}\right\}x^J. \\
\left[x^I, \left[p^J, A\right]_+\right] &= 2i\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\}A. \\
\left[x^I, \left[x^J, A\right]_+\right] &= 2i\{\theta_0^{IJ} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\}A. \\
\left[p^I, \left[p^J, A\right]_+\right] &= \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}\left\{(2\pi\alpha')^2\gamma_0^{IJ}\right\}A. \\
\left[x^-, \left[p^+, C\right]_+\right] &= 2iC.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

pour les variables du centre de masse.

5.1 Algèbre de Virasoro

La forme symmétrisée des opérateurs de Virasoro est maintenue pour les deux types d'oscillateurs, ils sont donnés par :

$$
L_m^\perp = \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{m-p,}^I\alpha_{pI}\right]_+, \quad \tilde{L}_m^\perp = \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\tilde{\alpha}_{m-p,}^I\tilde{\alpha}_{pI}\right]_+. \tag{5.3}
$$

Un calcul long qui fait appel à plusieurs changements d'indices dans les différentes expressions nous conduit à l'algèbre modifiée suivante(AnnexeB) :

$$
\left[L_m^\perp, L_n^\perp\right] = (m-n)L_{m+n} + Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,IJ}. \tag{5.4}
$$

$$
\left[\tilde{L}_m^\perp, \tilde{L}_n^\perp\right] = (m-n)\tilde{L}_{m+n} + Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \tilde{\pounds}_{mn,IJ}. \tag{5.5}
$$

$$
\left[L_m^\perp, \tilde{L}_n^\perp\right] = 0. \tag{5.6}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
\pounds_{mn,IJ} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta^{IJ}_{m-p}+\frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{IJ}_{m-p}\right\}\left[\alpha_{pI},\alpha_{m+n-pJ}\right]_+ \\
\tilde{\pounds}_{mn,IJ} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta^{IJ}_{p-m}+\frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{IJ}_{p-m}\right\}\left[\tilde{\alpha}_{pI},\tilde{\alpha}_{m+n-pJ}\right]_+
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

sont les nouveaux termes d'anomalie correspondants aux deux secteurs de la corde où nous soulignons la différence de signe dans les indices des deux paramètres de la noncommutativité.

5.2 Redéfinition de l'Espace de Fock

On procède maintenant à la redéfinition de l'espace de Fock pour chacun des modes de la corde fermée à travers la forme générale de l'espace des états paraquantiques ci dessous :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h!}\langle\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{D-1}(\alpha^I_{-m})^{\lambda_{m,I}}\right]\rangle_+\frac{1}{\tilde{h}!}\langle\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{D-1}(\tilde{\alpha}^J_{-n})^{\tilde{\lambda}_{n,J}}\right]\rangle_+|p^+,\vec{p}^T\rangle \\
\rightarrow\ &\frac{1}{h!}\langle\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{D-1}\left\{(U^{-1}\alpha_{-m})^I\right\}^{\lambda_{m,I}}\right]\rangle_+\frac{1}{\tilde{h}!}\langle\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{D-1}\left\{(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-n})^J\right\}^{\tilde{\lambda}_{n,J}}\right]\rangle_+|p^+,\vec{p}^T\rangle
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

où : $h=\sum\limits_{m,I}\lambda_{m,I}$, $\tilde{h}=\sum\limits_{n,J}\tilde{\lambda}_{n,J}$.

U et $\tilde{U}$ sont respectivement les matrices unitaires qui diagonalisent celles des paramètres de la noncommutativité correspondantes aux modes d'oscillations droits et gauches de la corde.

5.3 Spectre de Masse

Commençons d'abord par remarquer que Les équations du mouvement de la théorie des cordes bosoniques, équivalentes à celles de Heisenberg ci dessous, restent inchangées dans un espace temps noncommutatif. En effet, le Hamiltonien de la corde fermée est donné par :

$$H = (\tilde{L}_0^\perp + L_0^\perp - 2). \tag{5.9}$$

On peut montrer que , dans un espace temps noncommutatif, on peut toujours écrire :

$$[(L_0^\perp + \tilde{L}_0^\perp - 2), X^I(\tau,\sigma)] = -i\frac{\partial X^I(\tau,\sigma)}{\partial \tau}. \tag{5.10}$$

On peut aussi vérifier que les conditions aditionelles de Virasoro sur les états de la corde fermée restent valides par le faite qu'il n 'y ait pas d'effet de la noncommutativité sur l'équation :

$$[P, X^I(\tau,\sigma)] = i\frac{\partial X^I(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}. \tag{5.11}$$

où :

$$P = L_0^\perp - \tilde{L}_0^\perp = N^\perp - \tilde{N}^\perp. \tag{5.12}$$

est le moment P sur la surface d'univers qui génére des translations constantes tout au long de la corde et que, seuls les états $|\lambda, \tilde{\lambda}\,\rangle$ satisfaisant la condition :

$$P_0|\lambda,\tilde{\lambda}\,\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\chi \exp\{-iP\chi\}|\lambda,\tilde{\lambda}\,\rangle = \delta_{N^\perp-\tilde{N}^\perp,0}|\lambda,\tilde{\lambda}\,\rangle = |\lambda,\tilde{\lambda}\,\rangle \tag{5.13}$$

appartiennent à l'espace des états de la corde fermée.

Maintenent, la question qui se pose est : comment la condition de validité d'état affecte les paramètres de la noncommutativité θ et γ. On peut voir ceci explicitement en imposant la condition de restauration des états de masse nulle est ses implications sur les états des niveaux supérieurs.

5.4 Opérateur de Masse

Il est exprimé en termes des deux modes de mouvements de la façon suivante :

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\sum_{I=2}^{D-1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha_{-p,}^I\alpha_{pI}\right]_+ + \frac{1}{2}\left[\tilde{\alpha}_{-p,}^I\tilde{\alpha}_{pI}\right]_+\right\}. \tag{5.14}$$

La description détaillée du spectre des états des premiers niveaux est résumée dans le Tableau5.1, où tous les états du cas ordinaire sont représentés. La condition de validité sera appliquée après restauration de l'état du graviton, ce qui induira la réduction du spectre.

5.4.1 Restauration du Graviton et Réduction du Spectre

Considérons l'état usuel du graviton de masse initiale donnée par l'équation :

$$M^2 \left\{ \begin{array}{c} (U^{-1}\alpha_{-1})^J \\ (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K \end{array} \right\} |p_+ \vec{p}^T \rangle = -\frac{1}{(\alpha')^2} \left\{ \begin{array}{c} \mu_J^{(-1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_J^{(-1)} \\ +\mu_K^{(1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_K^{(1)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} (U^{-1}\alpha_{-1})^J \\ (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}^T \rangle. \tag{5.15}$$

Afin de restaurer l'état de masse nulle, on impose la condition supplémentaire de Virasoro :

$$\tilde{L}_0^{\perp} = L_0^{\perp} \tag{5.16}$$

qui donne la condition de validité de l'état :

$$\zeta_J^{(-1)} = \zeta_K^{(1)} \tag{5.17}$$

et la masse de ce niveau devient :

$$-\frac{2}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}\{\mu_J^{(-1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_J^{(-1)}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K|p^+, \vec{p}^T \rangle. \tag{5.18}$$

$$= -\frac{2}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}\{\mu_K^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_K^{(1)}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K|p^+, \vec{p}^T \rangle. \tag{5.19}$$

maintenant, pour restaurer le groupe de symmétrie $SO(D-2)XSO(D-2)$ de l'état de masse nulle du graviton, on doit imposer encore une fois la condition (2.13) :

$$\zeta_J^{(-1)} = \zeta_K^{(1)} = 0. \tag{5.20}$$

On peut d'autre part voir comment les niveaux supérieurs seront affectés par la condition précédente. considérons alors l'état immédiatement après comme exemple :

$$\left\{ \begin{array}{c} (U^{-1}\alpha_{-2})^J \\ \frac{1}{2}[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L]_+ \end{array} \right\} |p^+, \vec{p}^T \rangle \tag{5.21}$$

exprimée en termes des modes droits, la masse prend la forme :

$$\frac{2}{\alpha'}\left\{2 - \frac{1}{\alpha'}\left\{4\mu_J^{(-2)} + (2\pi\alpha')^2\nu_J^{(-2)}\right\}\right\} \tag{5.22}$$

TABLEAU 5.1: Spectre de Masse : Cas Corde Fermée.

	Etats Propres	Valeurs Propres de M^2
0	$\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$-4.$
1	$(U^{-1}\alpha_{-1})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$-\frac{1}{(\alpha')^2}\left\{\zeta_J^{(-1)}+\zeta_K^{(1)}\right\}.$
2	$(U^{-1}\alpha_{-2})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-2})^K\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)}+\zeta_K^{(2)}\right)\right\}.$
	$(U^{-1}\alpha_{-2})^J\frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L\right]_+\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)}+\zeta_K^{(1)}+\zeta_L^{(1)}\right)\right\}.$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K\right]_+\\ \frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M\right]_+\end{array}\right\}\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-1)}+\zeta_K^{(-1)}+\zeta_L^{(1)}+\zeta_M^{(1)}\right)\right\}.$
3	$(U^{-1}\alpha_{-3})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-3})^K\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)}+\zeta_K^{(3)}\right)\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-3})^J\frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-2})^K,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L\right]_+\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)}+\zeta_K^{(2)}+\zeta_L^{(1)}\right)\right\}.$
	$\left\{\begin{array}{c}(U^{-1}\alpha_{-3})^J\\ \frac{1}{3!}\left\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M\right\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)}+\zeta_K^{(1)}+\zeta_L^{(1)}+\zeta_M^{(1)}\right)\right\}.$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-2})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K\right]_+\\ \frac{1}{3!}\left\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M,(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^N\right\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)}+\zeta_K^{(-1)}+\zeta_L^{(1)}+\zeta_M^{(1)}+\zeta_N^{(1)}\right)\right\}.$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{3!}\left\langle(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L\right\rangle_+\\ \frac{1}{3!}\left\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^N(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^P\right\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+,\vec{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8-\frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-1)}+\zeta_K^{(-1)}+\zeta_L^{(-1)}+\zeta_M^{(1)}+\zeta_N^{(1)}+\zeta_P^{(1)}\right)\right\}.$

alors qu' en termes des modes gauches, elle est donnée par :

$$\frac{2}{\alpha'}\left\{2-\frac{1}{\alpha'}\left\{\mu_K^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_K^{(1)}+\mu_L^{(1)}+(2\pi\alpha')^2\nu_L^{(1)}\right\}\right\} \tag{5.23}$$

L'application de la condition physique de l'état de masse nulle (5.20) conduit à deux masses différentes, ce qui rend nonvalide cet état du deuxième niveau ; c'est la réduction du spectre.

Chapitre 6

Résumé

Le propos de ce travail est d'examiner comment se comporte une corde parabosonique lors de sa propagation dans un espace temps noncommutatif.

Des modifications dans les algèbres de Virasoro et des modes d'oscillations ont été obtenues, alors que et contrairement à l'approche du champ B, les équations du mouvement, les opérateurs de Virasoro et de la masse demeurent inchangés. Une diagonalization simultanée des deux matrices des paramètres de la noncommutativité nécessite l'application de transformations unitaires sur les opérateurs de création, ceci exige donc une redéfinition de l'espace de Fock. Le spectre de masse est alors modifié et dépend des valeurs propres des matrices des paramètres de la noncommutativité de sorte qu'il n'y ait plus d'états vectoriels ni tensoriels sans masses. Quatres différents modèles ont été étudiés :

- Le modèle d'une corde parabosonique ouverte : un terme d'anomlie supplémentaire a été obtenu dans l'algèbre de Virasoro, la restauration de l'état photonique sans masse exige l'application des conditions (2.13) sur les matrices des paramètres de la noncommutativité une fois diagonalisées. Ceci implique des modifications au niveau de la dégénérescence et au niveau des valeurs propres pour certains états spécifiques des ordres supérieurs.
- Le modèle d'une corde parabosonique ouverte entre deux Dp Branes parallèles généralisé au cas des Dp Dq Branes parallèles : où maintenent et en plus des valeurs propres des matrices des paramètres de noncommutativité, les valeurs propres de l'opérateur de masse dépend de la séparation et de l'ordre des D-Branes. On notera alors que plus de restrictions sont exigées si on veut construire un modèle libre de tachyons avec un état photonique.

- Un modèle d'une corde parabosonique fermée : où les mêmes condition (2.13) sont exigées pour restaurer l'état sans masse du graviton, excepté que, ici, la condition supplémentaire de Virasoro (5.16) exclut certains états ordinaires du spectre habituel. C'est ce qu'on appellera la réduction du spectre.
- Comme perspectives, on poura étudier l'extension de ce qui a été réalisé pour la corde fermionique.

Annexe A

Calcul de Quelques Relations Trilinéaires

A.1 Calcul de $\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$

Commençons par calculer l'expression (I) :

$$(I) = \left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma), \left[(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'), (\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] =$$

$$\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma), \left[\dot{X}^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] + \left[\acute{X}^I(\tau,\sigma) \left[\acute{X}^J(\tau,\sigma'), \acute{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+ \tfrac{d}{d\sigma''}\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma), \left[\dot{X}^J(\tau,\sigma'), X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] + \tfrac{d}{d\sigma'}\tfrac{d}{d\sigma''}\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+ \tfrac{d}{d\sigma}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[\dot{X}^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] + \tfrac{d}{d\sigma}\tfrac{d}{d\sigma'}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+ \tfrac{d}{d\sigma}\tfrac{d}{d\sigma''}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[\dot{X}^J(\tau,\sigma'), X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] + \tfrac{d}{d\sigma'}\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$= (2\pi\alpha')^3 2i\left\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma'')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+ 2i\left\{(ik)(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + (ik)(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\tfrac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')^2\left\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') - \eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$- 2i(2\pi\alpha')\left\{\eta^{IJ}\tfrac{d}{d\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\tfrac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')^2\left\{\eta^{IJ}\tfrac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+ 2i(2\pi\alpha')\left\{(ik)(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'')\tfrac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')\left\{\eta^{IJ}\tfrac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + (ik)(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+ 2i(2\pi\alpha')^2\left\{-\eta^{IJ}\tfrac{d}{d\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\tfrac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}.$$

D'autre part le terme $(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma)$, est donné par :

$$(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma) = \sqrt{2\alpha'}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\{-im(\tau+\sigma)\}\,\alpha_m^I \tag{A.1}$$

Par substitution dans le membre de gauche de (I) on peut écrire :

$$\left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma),\left[(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'),(\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] =$$

$$(\{-i(m+n+l)\tau\}\exp\{-im\sigma\}\exp\{-in\sigma'\}\exp\{-il\sigma''\}\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right].$$

L'intégrale sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma\exp\{im'\sigma\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma'\exp\{in'\sigma'\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$, donne :

$$\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma\exp\{im'\sigma\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma'\exp\{in'\sigma'\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$$
$$(\sqrt{2\alpha'})^3\sum_{m,n,l=-\infty}^{+\infty}\exp\{-i(m+n+l)\tau\}\exp\{-im\sigma\}\exp\{-in\sigma'\}\exp\{-il\sigma''\}\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]$$

$$= (\sqrt{2\alpha'})^3\exp\{-i(m'+n'+l')\tau\}\left[\alpha_{m'}^I,\left[\alpha_{n'}^J,\alpha_{l'}^K\right]_+\right].$$

d'une part, et si on intègre d'autre part :

$$\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma\exp\{im'\sigma\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma'\exp\{in'\sigma'\}\,\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$$

$$\times\left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma),\left[(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'),(\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] =$$

$$2i(2\pi\alpha')^2\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\left\{\begin{array}{c}\gamma_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma''\exp(-il\tau)\left\{\exp(il\sigma'')+\exp(-il\sigma'')\right\}\alpha_l^K\exp(il'\sigma'')\\ +\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\gamma_{l'}^{IK}\delta_{l'+m',0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma'\exp(-in\tau)\left\{\exp(in\sigma')+\exp(-in\sigma')\right\}\alpha_n^J\exp(in'\sigma')\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2\pi i}\left\{\begin{array}{c}(n')^2\theta_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma''\sum\limits_{l\neq0}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')-\exp(-il\sigma'')\}\alpha_l^K\exp(il'\sigma'')\\ +(l')^2\theta_{l'}^{IK}\delta_{l'+m',0}\int\limits_0^{2\pi} d\sigma'\sum\limits_{n\neq0}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma')-\exp(-in\sigma')\}\alpha_n^J\exp(in'\sigma')\end{array}\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')\left\{\begin{array}{c} -(2\pi\alpha')\frac{\sqrt{2\alpha'}}{4\pi}\gamma^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''\sum\limits_{l\neq 0}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')-\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l \\ -im'\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2(2\pi)^2}\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma')+\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \end{array}\right\}$$

$$-(2\pi\alpha')\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi)^2}\left\{\begin{array}{c} m'\eta^{IJ}(\delta_{m'+n',0})\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''\sum\limits_{l\neq 0}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')-\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l \\ +m'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'\sum\limits_{n\neq 0}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma')-\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \end{array}\right\}$$

$$-(2\pi\alpha')\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi)^2}\left\{\begin{array}{c} n'\eta^{IJ}(\delta_{m'+n',0})\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'') \\ +\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l+l'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma') \\ +\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \end{array}\right\}$$

$$+i(2\pi\alpha')\left\{\begin{array}{c} (n')^2\theta^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi\alpha')2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')+\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l \\ +il'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'(-\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi)^2})\sum\limits_{n\neq 0}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma')-\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \end{array}\right\}$$

$$+i(2\pi\alpha')\left\{\begin{array}{c} (l')^2\theta^{IK}_{l'}\delta_{l'+m',0}\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi\alpha')2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-in\tau)\{\exp(in\sigma')+\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \\ +in'\eta^{IJ}\delta_{m'+n\prime,0}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''(-\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi)^2})\sum\limits_{l\neq 0}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')-\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l \end{array}\right\}$$

$$+i(2\pi\alpha')\left\{\begin{array}{c} -im'\eta^{IJ}(\delta_{m'+n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma''\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\exp(-il\tau)\{\exp(il\sigma'')+\exp(-il\sigma'')\}\exp(il'\sigma'')\alpha^K_l \\ +\gamma^{IK}_{l'}\delta_{l'+m',0}(-\alpha'\sqrt{2\alpha'})\int\limits_0^{2\pi}d\sigma'\sum\limits_{n\neq 0}\exp(-in\tau)\,\{\exp(in\sigma')-\exp(-in\sigma')\}\exp(in'\sigma')\alpha^J_n \end{array}\right\}.$$

$$= 2i(2\pi\alpha')^2\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\gamma^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\delta_{l'+l,0}+\delta_{l',l})-\sum_{l\neq 0}(\delta_{l'+l,0}-\delta_{l',l})\right\}\alpha^K_l\exp(-il\tau)$$

$$+\,2i(2\pi\alpha')^2\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\delta_{l'+m',0}\gamma^{IK}_{l'}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\delta_{n'+n,0}+\delta_{n',n})-\sum_{n\neq 0}(\delta_{n'+n,0}-\delta_{n',n})\right\}\alpha^J_n\exp(-in\tau)$$

$$+2i(n')^2\theta^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\delta_{l'+l,0}+\delta_{l',l})-\sum_{l\neq 0}(\delta_{l'+l,0}-\delta_{l',l})\right\}\alpha^K_l\exp(-il\tau)$$

$$+\,(2\alpha')m'\eta^{IJ}(\delta_{m'+n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\delta_{l'+l,0}+\delta_{l',l})-\sum_{l\neq 0}(\delta_{l'+l,0}-\delta_{l',l})\right\}\alpha^K_l\exp(-il\tau)$$

$$-(2\alpha')\tfrac{\sqrt{2\alpha'}}{2}n'\eta^{IJ}(\delta_{m'+n',0})\left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}(\delta_{l'+l,0}+\delta_{l',l})-\sum_{l\neq 0}(\delta_{l'+l,0}-\delta_{l',l})\right\}\alpha_l^K\exp(-il\tau)$$
$$+\,2i\tfrac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\delta_{l'+m',0}(l')^2\theta_{l'}^{IK}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\delta_{n'+n,0}+\delta_{n',n})-\sum_{n\neq 0}(\delta_{n'+n,0}-\delta_{n',n})\right\}\alpha_n^J\exp(-in\tau)$$

$$+2\alpha'\tfrac{\sqrt{2\alpha'}}{2}m'\eta^{IK}(\delta_{l'+n',0})\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\delta_{n'+n,0}+\delta_{n',n})-\sum_{n\neq 0}(\delta_{n'+n,0}-\delta_{n',n})\right\}\alpha_n^J\exp(-in\tau)$$
$$-\,(2\alpha')\tfrac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\delta_{l'+m',0}l'\eta^{IK}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\delta_{n'+n,0}+\delta_{n',n})-\sum_{n\neq 0}(\delta_{n'+n,0}-\delta_{n',n})\right\}\alpha_n^J\exp(-in\tau)$$

$$=2i(2\pi\alpha')^2\sqrt{2\alpha'}\gamma_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\alpha_{l'}^K\exp(-il'\tau)+2i(2\pi\alpha')\sqrt{2\alpha'}\gamma_{l'}^{IK}\delta_{l'+m',0}\alpha_{n'}^J\exp(-in'\tau)$$

$$+\sqrt{2\alpha'}2i(n')^2\theta_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\alpha_{l'}^K\exp(-il'\tau)+2\alpha'\sqrt{2\alpha'}m'\eta_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\alpha_{l'}^K\exp(-il'\tau)$$

$$-2\alpha'\sqrt{2\alpha'}n'\eta_{n'}^{IJ}\delta_{m'+n',0}\alpha_{l'}^K\exp(-il'\tau)+\sqrt{2\alpha'}2i(l')^2\theta_{l'}^{IK}\delta_{l'+m',0}\alpha_{n'}^J\exp(-in'\tau)$$

$$+\,2\alpha'\sqrt{2\alpha'}m'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\alpha_{n'}^J\exp(-in'\tau)+2\alpha'\sqrt{2\alpha'}m'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\alpha_{n'}^J\exp(-in'\tau).$$

Finalement, par identification on trouve :

$$\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]=2\left\{\begin{array}{c}(m\eta^{IJ}+i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ})\delta_{m+n,0}\alpha_l^K\\+(m\eta^{IK}+i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{m+l,0}\alpha_n^J\end{array}\right\}.$$

$$\left[p^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]=2i\left\{(\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IJ})\delta_{l,0}\alpha_l^K+\tfrac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\tfrac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{l,0}p^J\right\}.$$

$$\left[p^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right]=2i\left\{(\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IJ})p^K+\tfrac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\tfrac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})p^J\right\}.$$

A.2 Calcul de $\left[\alpha_m^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]$

On utilise les relations postulées dans (2.6) :

$$\left[(\dot{X}^I+\acute{X}^I)(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),(\dot{X}^K+\acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=$$
$$\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),\dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]+\tfrac{d}{d\sigma}\tfrac{d}{d\sigma''}\left[X^I(\tau,\sigma)\left[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$
$$+\tfrac{d}{d\sigma''}\left[\dot{X}^I(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]+\tfrac{d}{d\sigma}\left[X^I(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),\dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$=2i(2\pi\alpha')^2\left\{\gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')-\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')\right\}$$

$$+2i\left\{(ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'')+(ik)(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')\left\{-\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'')-\eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i(2\pi\alpha')\left\{(ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')+\eta^{IK}\tfrac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\exp\{im'\sigma\}\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$, on trouve :

$$(I){=}\ (2\pi\alpha')^2 2i\left\{\begin{array}{c}-\eta^{IJ}\frac{1}{2\pi}\frac{\delta_{m',0}}{2\pi\alpha'}\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{l\in Z}\exp\{-il\tau\}\frac{(\delta_{l'+l,0}+\delta_{l,l'})}{2}\alpha_l^K\\+\sum\limits_{k\in Z}\delta_{k+m',0}\delta_{k,l'}\gamma_k^{IK}(x_0^J+2\alpha'p^J\tau)\end{array}\right\}$$

$$+(2\pi\alpha')2i\left\{\begin{array}{c}-\eta^{IJ}\frac{1}{2\pi}\delta_{m',0}(-i\sqrt{2\alpha'})\sum\limits_{l\neq0}\exp\{-il\tau\}\frac{(\delta_{l'+l,0}-\delta_{l,l'})}{2i}\alpha_l^K\\-\eta^{IK}\frac{im'}{2\pi}\delta_{l'+m',0}(x_0^J+2\alpha'p^J\tau)\end{array}\right\}$$

$$+(2\pi\alpha')2i\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{k\in Z}ik\theta_k^{IJ}\delta_{k+m',0}\frac{\delta_{k,0}}{2\pi\alpha'}(\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{l\in Z}\exp\{-il\tau\}\frac{\delta_{l+l',0}+\delta_{l,l'}}{2}\alpha_l^K)\\+\eta^{IK}\frac{il'}{2\pi}\delta_{l'+m',0}(x_0^J+2\alpha'p^J\tau)\end{array}\right\}$$

$$+2i\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{k\in Z}ik\theta_k^{IJ}\delta_{k+m',0}\delta_{k,0}(-i\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{l\neq0}\exp\{-il\tau\}\frac{\delta_{l+l',0}-\delta_{l,l'}}{2}\alpha_l^K)\\\sum\limits_{k\in Z}(ik)(-ik)\theta_k^{IK}\delta_{k+m',0}\delta_{k,l'}(x_0^J+2\alpha'p^J\tau)\end{array}\right\}$$

D'autre part la substitution de (A.1) donne :

$$\left[(\dot{X}^I+\acute{X}^I)(\tau,\sigma),\left[X^J(\tau,\sigma'),(\dot{X}^K+\acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=$$

$$(\sqrt{2\alpha'})^3\sum_{m,n,l=-\infty}^{+\infty}\exp\{-i(m+l)\tau\}\exp\{-im\sigma\}\exp\{-il\sigma''\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{c}\left[\alpha_m^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\2\alpha'\tau\left[\alpha_m^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\\sum\limits_{n\neq0}i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{n}\exp(-in\tau)\cos(n\sigma')\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right\}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\exp\{im'\sigma\}\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$:

$$(II){=}\ 2\alpha'\exp\{-i(m'+l')\tau\}\left\{\begin{array}{c}\left[\alpha_{m'}^I,\left[x_0^J,\alpha_{l'}^K\right]_+\right]\\+\frac{2\alpha'2\tau}{\sqrt{2\alpha'}}\left(\begin{array}{c}i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ}\alpha_{l'}^K(\delta_{m',0})\\+(m'\eta^{IK}+i\frac{(l')^2}{2\alpha'}\theta_{l'}^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{l'}^{IK})\sqrt{2\alpha'}p^J\delta_{l'+m',0}\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

d'aprés (I) et (II) on tire le résultat du commutateur $\left[\alpha_m^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]$:

$$\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = \left\{ \begin{array}{c} -i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}\alpha_l^K\delta_{m,0} + 2m'\eta^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \\ +\frac{2i}{2\alpha'}(l')^2\theta_l^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}}2\tau\gamma_0^{IJ}\alpha_l^K\delta_{m,0} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2i\gamma_l^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \end{array} \right\}$$

pour déduire :

$$\left[p^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = \left\{ \begin{array}{c} -i\eta^{IJ}\alpha_l^K\delta_{m,0} + 2\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}m'\eta^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \\ +\frac{2i}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}(l')^2\theta_l^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\alpha_l^K\delta_{m,0} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_l^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0} \end{array} \right\}$$

$$\left[p^I, \left[x_0^J, p^K\right]_+\right] = \left\{ \begin{array}{c} -i\eta^{IJ}p^K \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}p^K + \frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}2i\gamma_0^{IK}x_0^J \end{array} \right\}$$

A.3 Calcul de $\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right]$.

$$\begin{aligned}
\left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), (X^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= \left[\dot{X}^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), (X^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] \\
&+ \frac{d}{d\sigma}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), (X^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] \\
&= (2\pi\alpha')2i \left\{ \begin{array}{c} -\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'') \\ -\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma') \end{array} \right\} \\
&+2i \left\{ \begin{array}{c} (ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'') \\ +(ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma') \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma \exp\{im'\sigma\} \frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma' \frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi} d\sigma'' \exp\{il'\sigma''\}$, on trouve :

(I)= $-(2\pi\alpha')2i\left\{\eta^{IJ}\frac{(\delta_{m',0})}{2\pi}\left\{x_0^K + 2\alpha' p^K\tau\right\} + \eta^{IK}\frac{(\delta_{m',0})}{2\pi}\left\{x_0^J + 2\alpha' p^J\tau\right\}\right\}$

d'autre part :

$$(II)=\sqrt{2\alpha'}\sum_{m\in Z}\exp(-im(\tau+\sigma))\left[\alpha_m^I, \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} x_0^J + 2\alpha' p^J\tau \\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\cos(n\sigma')\exp(-in\tau)\alpha_n^J \end{array}\right) \\ \\ ,\left(\begin{array}{c} x_0^K + 2\alpha' p^K\tau \\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum_{l\neq 0}\frac{1}{l}\cos(l\sigma'')\exp(-in\tau)\alpha_l^K \end{array}\right) \end{array}\right]_+\right]$$

$$= \sqrt{2\alpha'} \sum_{m\in Z} \exp(-im(\tau+\sigma)) \left\{ \begin{array}{c} \left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right] + 2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, p^K\right]_+\right] \\ +i\sqrt{2\alpha'} \sum_{l\neq 0} \frac{1}{l}\cos(l\sigma'')\exp(-il\tau) \\ \times \left(\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right] + 2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[p^J, \alpha_l^K\right]_+\right] \right) \\ +2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[p^J, x_0^K\right]_+\right] + (2\alpha'\tau)^2 [\alpha_m^I, \left[p^J, p^K\right]_+] \\ +i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\cos(n\sigma')\exp(-in\tau) \\ \times \left(\begin{array}{c} \left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, x_0^K\right]_+\right] + 2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, p^K\right]_+\right] \\ +i\sqrt{2\alpha'} \sum_{l\neq 0} \frac{1}{l}\cos(l\sigma'')\exp(-il\tau) \left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, v_l^K\right]_+\right] \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma \exp\{im'\sigma\} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma''$:

$$= \sqrt{2\alpha'}\exp(-im'\tau) \left\{ \begin{array}{c} \left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right] + 2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, p^K\right]_+\right] \\ +2\alpha'\tau \left[\alpha_m^I, \left[p^J, x_0^K\right]_+\right] + (2\alpha'\tau)^2 [\alpha_m^I, \left[p^J, p^K\right]_+] \end{array} \right\}$$

$$= \sqrt{2\alpha'}\exp(-im'\tau) \left\{ \begin{array}{c} \left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right] \\ +2\alpha'\tau \left\{ \begin{array}{c} -i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IJ}p^K\delta_{m,0} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}2m'\eta^{IK}x_0^J\delta_{m,0} \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}}2\tau\gamma_0^{IJ}p^K\delta_{m,0} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_0^{IK}x_0^J\delta_{m,0} \end{array} \right\} \\ +2\alpha'\tau \left\{ \begin{array}{c} -i\sqrt{2\alpha'}\eta^{IK}p^J\delta_{m,0} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}2m'\eta^{IJ}x_0^K\delta_{m,0} \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}}2\tau\gamma_0^{IK}p^J\delta_{m,0} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_0^{IJ}x_0^K\delta_{m,0} \end{array} \right\} \\ +(2\alpha'\tau)^2\frac{2}{\sqrt{2\alpha'}} \left\{ \begin{array}{c} (m\eta^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\delta_{m,0}p^K \\ +(m\eta^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{m,0}p^J \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

de (I) et (II) on déduit :

$$\left[\alpha_m^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right] = -\sqrt{2\alpha'}i\left\{\eta^{IJ}x_0^K + \eta^{IK}x_0^J\right\}(\delta_{m,0}) - 2\alpha'\tau \left\{ \begin{array}{c} \left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_0^{IK}x_0^J\delta_{m,0}\right\} \\ \left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_0^{IJ}x_0^K\delta_{m,0}\right\} \end{array} \right\}$$

pour déduire :

$$\left[p^I, \left[x_0^J, x_0^K\right]_+\right] = -i\left\{\eta^{IJ}x_0^K + \eta^{IK}x_0^J\right\} - \left\{\left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2i\gamma_0^{IK}x_0^J\right\} + \left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2i\gamma_0^{IJ}x_0^K\right\}\right\}\tau$$

A.4 Calcul de $\left[x_0^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$.

$$\left[X^J(\tau,\sigma'), \left[(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'), (\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = \frac{d}{d\sigma'}\frac{d}{d\sigma''}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), (X^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+\frac{d}{d\sigma'}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] + \frac{d}{d\sigma''}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[\dot{X}^J(\tau,\sigma'), X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+\left[X^I(\tau,\sigma),\left[\dot X^J(\tau,\sigma'),\dot X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$=2i\left\{(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i\left\{(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\dot X^K(\tau,\sigma'')+(2\pi\alpha')\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\tfrac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$+2i\left\{(2\pi\alpha')\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\tfrac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'')+(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma')\dot X^J(\tau,\sigma'')\right\}$$

$$+2i\left\{(2\pi\alpha')\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\dot X^K(\tau,\sigma'')+(2\pi\alpha')\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\dot X^J(\tau,\sigma')\right\}.$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma'\exp\{in'\sigma'\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$,on trouve :

$$(I)=2i\left\{\begin{array}{c}-(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IK}(\delta_{l',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum\limits_{n\neq0}\exp(-in\tau)\{\delta_{n+n',0}-\delta_{n,n'}\}\alpha_n^J\\ -(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IJ}(\delta_{n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum\limits_{l\neq0}\exp(-il\tau)\{\delta_{l+l',0}-\delta_{l,l'}\}\alpha_l^K\\ +(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IJ}(\delta_{n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum\limits_{l\in Z}\exp(-il\tau)\{\delta_{l+l',0}+\delta_{l,l'}\}\alpha_l^K\\ +(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IK}(\delta_{l',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum\limits_{n\in Z}\exp(-in\tau)\{\delta_{n+n',0}+\delta_{n,n'}\}\alpha_n^J\end{array}\right\}.$$

d'autre part :

$$\left[X^I(\tau,\sigma),\left[(\dot X^J+\acute X^J)(\tau,\sigma'),(\dot X^K+\acute X^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=$$

$$2\alpha'\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\{-in(\tau+\sigma')\}$$

$$\times\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\exp\{-il(\tau+\sigma'')\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]+2\alpha'\tau\left[p^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{m\neq0}\frac{1}{m}\cos(m\sigma)\exp(-im\tau)\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right\}$$

$$=2\alpha'\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\{-in(\tau+\sigma')\}$$

$$\times\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\exp\{-il(\tau+\sigma'')\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]+\sqrt{2\alpha'}\tau2\left\{\begin{array}{c}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\delta_{n,0}\alpha_l^K\\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l,0}\alpha_n^J\end{array}\right\}\\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum\limits_{m\neq0}\frac{1}{m}\cos(m\sigma)\exp(-im\tau)2\\ \left\{\begin{array}{c}(m\eta^{IJ}+i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ})\delta_{m+n,0}\alpha_l^K\\ +(m\eta^{IK}+i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{m+l,0}\alpha_n^J\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma'\exp\{in'\sigma'\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma''\exp\{il'\sigma''\}$,on trouve :

$$(II)=2\alpha'\exp\{-i(n'+l')\tau\}\left\{\left[x_0^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]+\sqrt{2\alpha'}\tau2\left\{\begin{array}{c}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\delta_{n',0}\alpha_{l'}^K\\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l',0}\alpha_{n'}^J\end{array}\right\}\right\}$$

de (I) et (II) on déduit :

$$\left[x_0^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = \frac{2i}{2\alpha'} \exp\left\{i(n'+l')\tau\right\}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{c} -(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IK}(\delta_{l',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\exp(-in\tau)\{\delta_{n+n',0}-\delta_{n,n'}\}\alpha_n^J \\ -(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IJ}(\delta_{n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{l\neq 0}\exp(-il\tau)\{\delta_{l+l',0}-\delta_{l,l'}\}\alpha_l^K \\ +(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IJ}(\delta_{n',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{l\in Z}\exp(-il\tau)\{\delta_{l+l',0}+\delta_{l,l'}\}\alpha_l^K \\ +(2\pi\alpha')\frac{1}{2\pi}\eta^{IK}(\delta_{l',0})\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{n\in Z}\exp(-in\tau)\{\delta_{n+n',0}+\delta_{n,n'}\}\alpha_n^J \end{array} \right\}$$

$$-\sqrt{2\alpha'}2\tau \left\{ \begin{array}{c} (i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\delta_{n',0}\alpha_{l'}^K \\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l',0}\alpha_{n'}^J \end{array} \right\}.$$

$$\left[x_0^I, \left[\alpha_{n'}^J, \alpha_{l'}^K\right]_+\right] = i\sqrt{2\alpha'} \left\{ \begin{array}{c} \eta^{IJ}\alpha_{l'}^K(\delta_{n',0}) \\ +\eta^{IK}\alpha_{n'}^J(\delta_{l',0}) \end{array} \right\} - \sqrt{2\alpha'}2\tau \left\{ \begin{array}{c} (i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\delta_{n',0}\alpha_{l'}^K \\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l',0}\alpha_{n'}^J \end{array} \right\}.$$

et déduire les relations :

$$\left[x_0^I, \left[p^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = i\left\{\eta^{IJ}\alpha_l^K + \eta^{IK}\sqrt{2\alpha'}p^J\delta_{l,0}\right\} - 2\tau \left\{ \begin{array}{c} i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ}\alpha_l^K \\ +i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK}\delta_{l,0}\sqrt{2\alpha'}p^J \end{array} \right\}$$

$$\left[x_0^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] = i\left\{\eta^{IJ}p^K + \eta^{IK}p^J\right\} - 2\tau \left\{ \begin{array}{c} i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ}p^K \\ +i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK}p^J \end{array} \right\}$$

A.5 Calcul de $\left[x_0^I, \left[x_0^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$

$$\left[X^J(\tau,\sigma'), \left[X^J(\tau,\sigma'), (\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = \frac{d}{d\sigma''}\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$+\left[X^I(\tau,\sigma), \left[X^J(\tau,\sigma'), \dot{X}^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right]$$

$$= 2i\left\{\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\dot{X}^K(\tau,\sigma'') + (2\pi\alpha')\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma'')\right\}$$

$$+2i\left\{\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\frac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + (-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\right\}$$

$$= (2\pi\alpha')2i \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k\in Z}\theta_k^{IJ}\exp ik(\sigma-\sigma')\frac{1}{2\pi\alpha'}(2\alpha'p^K + \sqrt{2\alpha'}\sum_{l\neq 0}\cos(l\sigma'')\exp(-il\tau)\alpha_l^K \\ +\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\left(x_0^J + 2\alpha'p^J\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\cos(n\sigma')\exp(-in\tau)\alpha_n^J\right) \end{array} \right\}$$

$$+2i\sum_{k\in Z}\left\{\begin{array}{c}\theta_k^{IJ}\exp ik(\sigma-\sigma')(i\sqrt{2\alpha'}\sum_{l\neq 0}\sin(l\sigma'')\exp(-in\tau)\alpha_l^K)\\ +(-ik)\theta_k^{IK}\exp ik(\sigma-\sigma'')\left(x_0^J+2\alpha'p^J\tau+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\cos(n\sigma')\exp(-in\tau)\alpha_n^J\right)\end{array}\right\}.$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}\exp(il'\sigma'')d\sigma''$, on trouve :

$$(I)==(2\pi\alpha')2i\left\{\begin{array}{c}\theta_0^{IJ}\delta_{k,0}\frac{1}{2\pi\alpha'}(2\alpha'p^K\delta_{l,0}+\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{l\neq 0}(\delta_{l',l}+\delta_{l',-l})\exp(-il\tau)\alpha_l^K\\ +\eta^{IK}\frac{1}{2\pi}\delta_{l',0}\left(x_0^J+2\alpha'p^J\tau\right)\end{array}\right\}$$

$$+i\left\{\theta_0^{IJ}\sqrt{2\alpha'}\sum_{l\neq 0}(\delta_{l',l}-\delta_{l',-l})\exp(-il\tau)\alpha_l^K\right\}$$

$$=2i\theta_0^{IJ}(2\alpha'p^K\delta_{l',0}+\sqrt{2\alpha'}\exp(-il'\tau)\alpha_{l'}^K)+i2\alpha'\eta^{IK}\delta_{l',0}\left(x_0^J+2\alpha'p^J\tau\right).$$

d'autre part :

$$\left[X^J(\tau,\sigma'),\left[X^J(\tau,\sigma'),(\dot{X}^K+\acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=$$

$$\sqrt{2\alpha'}\sum_{l\in Z}\exp\{-il(\tau+\sigma'')\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]+2\alpha'\tau\left[x_0^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left[p^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]+(2\alpha'\tau)^2\left[p^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\cos(n\sigma')\exp(-in\tau)\left(\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left[p^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right)\\ +i\sqrt{2\alpha'}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\cos(m\sigma)\exp(-im\tau)\left(\begin{array}{c}\left[\alpha_m^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left[\alpha_m^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right)\\ -2\alpha'\sum_{m,n\neq 0}\frac{1}{mn}\cos(m\sigma)\cos(n\sigma')\exp(-i(m+n)\tau)\left[\alpha_m^I,\left[\alpha_n^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right\}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}\exp(il'\sigma'')d\sigma''$ on toruve :

$$(II)\sqrt{2\alpha'}\exp\{-il'(\tau)\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left[x_0^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left[p^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +(2\alpha'\tau)^2\left[p^I,\left[p^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\end{array}\right\}=$$

$$\sqrt{2\alpha'}\exp\{-il'(\tau)\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left\{\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\left\{\eta^{IJ}\alpha_{l'}^K+\eta^{IK}p^J(\delta_{l',0})\right\}-2\tau\left\{\begin{array}{c}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\alpha_{l'}^K\\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l',0}p^J\end{array}\right\}\right\}\\ +2\alpha'\tau\left\{\begin{array}{c}-i\eta^{IJ}\alpha_l^K\delta_{m,0}+2\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}m'\eta^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0}\\ +\frac{2i}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}(l')^2\theta_l^{IK}x_0^J\delta_{l+m,0}\\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\alpha_l^K+\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_l^{IK}x_0^J\delta_{l,0}\end{array}\right\}\\ +(2\alpha'\tau)^2 2\left\{(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IJ})\delta_{l,0}\alpha_l^K+\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{l,0}p^J\right\}\end{array}\right\}$$

$$= \sqrt{2\alpha'}\exp\{-il'(\tau)\}\left\{\begin{array}{c}\left[x_0^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right]\\ +2\alpha'\tau\left\{\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\left\{\eta^{IJ}\alpha_{l'}^K+\eta^{IK}p^J(\delta_{l',0})\right\}-2\tau\left\{\begin{array}{c}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})\alpha_{l'}^K\\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})\delta_{l',0}p^J\end{array}\right\}\right\}\\ +2\alpha'\tau\left\{\begin{array}{c}-i\eta^{IJ}\alpha_l^K\\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\alpha_l^K+\frac{(2\pi\alpha')^2}{\sqrt{2\alpha'}2\alpha'}2i\gamma_l^{IK}x_0^J\delta_{l,0}\end{array}\right\}\\ +(2\alpha'\tau)^2 2\left\{(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IJ})\delta_{l,0}\alpha_l^K+\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK})\delta_{l,0}p^J\right\}\end{array}\right\}.$$

de (I) et (II) on déduit :

$$\left[x_0^I,\left[x_0^J,\alpha_l^K\right]_+\right] = 2i\left\{\theta_0^{Iv}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right\}\alpha_l^K+2i\sqrt{2\alpha'}\left\{\tfrac{1}{2}\eta^{IK}-\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_l^{IK}\right\}\delta_{l,0}x_0^J.$$

et donc :

$$\left[x_0^I,\left[x_0^J,p^K\right]_+\right] = 2i\left\{\left\{\theta_0^{Iv}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right\}\right\}p^K+2i\left\{\tfrac{1}{2}\eta^{IK}-\tfrac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK}\right\}x_0^J.$$

A.6 Calcul de $\left[x_0^I,\left[x_0^J,x_0^K\right]_+\right]$

$$\left[X^J(\tau,\sigma'),\left[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = 2i\left\{\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+\theta^{IK}(\sigma-\sigma')X^J(\tau,\sigma'')\right\}$$

on intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma''$, on trouve :

(I)== $2i\left\{\theta_0^{Iv}\left(x_0^K+2\alpha' p^K\tau\right)+\theta_0^{IK}\left(x_0^v+2\alpha' p^v\tau\right)\right\}.$

d'autre part on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left[X^J(\tau,\sigma'),\left[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\right]_+\right] &= \left[x_0^I,\left[x_0^J,x_0^K\right]_+\right]+2\alpha'\tau\left[x_0^I,\left[x_0^J,p^K\right]_+\right]+2\alpha'\tau\left[x_0^I,\left[p^J,x_0^K\right]_+\right]\\ &+2\alpha'\tau\left[p^I,\left[x_0^J,x_0^K\right]_+\right]+(2\alpha'\tau)^2\left[x_0^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right]\\ &+(2\alpha'\tau)^2\left[p^I,\left[p^J,x_0^K\right]_+\right]+(2\alpha'\tau)^2\left[p^I,\left[x_0^J,p^K\right]_+\right]\\ &+(2\alpha'\tau)^3\left[p^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right]+\ldots.\end{aligned}$$

On intègre sur $\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma'\frac{1}{2\pi}{}_0\int^{2\pi}d\sigma''$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}(II)&=\left[x_0^I,\left[x_0^J,x_0^K\right]_+\right]+2i\left\{\begin{array}{c}2\alpha'\tau\left\{\theta_0^{Iv}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right\}p^K\\ +\left\{\frac{1}{2}\eta^{IK}-\frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK}\right\}x_0^J\end{array}\right\}\\ &+2\alpha'\tau 2i\left\{\begin{array}{c}\left(\theta_0^{IK}+(2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}p^J\right)\\ +\left(\frac{1}{2}\eta^{IJ}-\frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\right)x_0^K\end{array}\right\}\\ &+2\alpha'\tau 2i\left\{-\frac{1}{2}\left\{\eta^{IJ}x_0^K+\eta^{IK}x_0^J\right\}-\left(\left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK}x_0^J\right\}+\left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ}x_0^K\right\}\right)\tau\right\}\\ &+(2\alpha'\tau)^2\left(\frac{2i}{2\alpha'}\frac{1}{2\pi}(2\pi\alpha')\left\{\eta^{IJ}p^K+\eta^{IK}p^J\right\}-2\tau\left\{\begin{array}{c}(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IJ})p^K\\ +(i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK})p^J\end{array}\right\}\right)\end{aligned}$$

$$+ (2\alpha'\tau)^2 \left(\left\{ \begin{array}{c} -i\eta^{IK} p^J \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'} 2\tau\gamma_0^{IK} p^J + \frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2} 2i\gamma_0^{IJ} x_0^K \end{array} \right\} \right)$$
$$+ (2\alpha'\tau)^2 \left(\left\{ \begin{array}{c} -i\eta^{IJ} p^K \\ -i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'} 2\tau\gamma_0^{IJ} p^K + \frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2} 2i\gamma_0^{IK} x_0^J \end{array} \right\} \right)$$
$$\left\{ \; +(2\alpha'\tau)^3 \left(2i \left\{ (\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IJ}) p^K + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_0^{IK}) p^J \right\} \right) \; \right\}$$

de (I) et (II) on déduit :

$$\left[x_0^I, \left[x_0^J, x_0^K \right]_+ \right] = 2i \left(\left\{ \theta_0^{Iv} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ} \right\} x_0^K + 2i \left\{ \theta_0^{IK} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK} \right\} x_0^J \right).$$

Annexe B

Calcul de l'Algèbre de Virasoro

$$[L_m, L_n] = \tfrac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha_{pI}]_+, L_n\right] = \tfrac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{array}{c} \alpha^I_{m-p}\,[\alpha_{pI}, L_n] + [\alpha^I_{m-p}\,, L_n]\alpha_{pI} \\ +\alpha_{pI}[\alpha^I_{m-p}\,, L_n] + [\alpha_{pI}, L_n]\alpha^I_{m-p} \end{array}\right\}$$

$$[\alpha_{pI}, L_n] = \tfrac{1}{4}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{array}{c} 2\alpha_{q\ J}\left(p\eta_I{}^J + i\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\theta_{n-q\ I}{}^J + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{n-q\ I}{}^J\right)\delta_{p+n-q,0} \\ +2\alpha^J_{n-q}\ \left(p\eta_{IJ} + i\frac{(q)^2}{2\alpha'}\theta_{q\ IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{q\ IJ}\right)\delta_{p+q,0} \end{array}\right\}.$$

Le changement de l'indice $q \to n-q$ donne :

$$[L_m, L_n] =$$

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{array}{c}
\alpha^I_{m-p}\left\{\begin{array}{c} 2\alpha_{q\ J}\left(p\eta_I{}^J + i\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\theta_{n-q\ I}{}^J + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{n-q\ I}{}^J\right)\delta_{p+n-q,0} \\ +2\alpha^J_{n-q}\ \left(p\eta_{IJ} + i\frac{(q)^2}{2\alpha'}\theta_{q\ IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{q\ IJ}\right)\delta_{p+q,0} \end{array}\right\} \\
+\left\{\begin{array}{c} 2\left((m-p)\eta^{IJ} + i\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\theta^{IJ}_{n-q}\ + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{IJ}_{n-q}\right)\delta_{m+n-p-q,0}\alpha_{q\ J} \\ +2\alpha^J_{n-q}\ \left((m-p)\eta^I{}_J + i\frac{(q)^2}{2\alpha'}\theta^I_{q\ J} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^I_{q\ J}\right)\delta_{m-p+q,0} \end{array}\right\}\alpha_{pI} \\
+\alpha_{pI}\left\{\begin{array}{c} 2\left((m-p)\eta^{IJ} + i\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\theta^{IJ}_{n-q}\ + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{IJ}_{n-q}\right)\delta_{m+n-p-q,0}\alpha_{q\ J} \\ +2\alpha^J_{n-q}\ \left((m-p)\eta^I{}_J + i\frac{(q)^2}{2\alpha'}\theta^I_{q\ J} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^I_{q\ J}\right)\delta_{m-p+q,0} \end{array}\right\} \\
+\left\{\begin{array}{c} 2\alpha_{q\ J}\left(p\eta_I{}^J + i\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\theta_{n-q\ I}{}^J + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{n-q\ I}{}^J\right)\delta_{p+n-q,0} \\ +2\alpha^J_{n-q}\ \left(p\eta_{IJ} + i\frac{(q)^2}{2\alpha'}\theta_{q\ IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{q\ IJ}\right)\delta_{p+q,0} \end{array}\right\}\alpha^I_{m-p}
\end{array}\right.$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty}\left\{\begin{array}{c}
4\alpha^I_{m-p}\,\alpha^J_q\,p\eta_{IJ}\delta_{p+n-q,0} + 4\alpha_{qJ}\alpha_{pI}(m-p)\eta^{IJ}\delta_{m+n-p-q,0} \\
+4\alpha_{pI}\alpha_{qJ}(m-p)\eta^{IJ}\delta_{m+n-p-q,0} + 4\alpha^J_q\alpha^I_{m-p}p\eta_{IJ}\delta_{p+n-q,0} \\
+\frac{2i}{2\alpha'}\frac{(n-q)^2}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c} \theta_{n-q\ I}{}^J\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha_{q\ J}\right]_+\delta_{p+n-q,0} + \theta_{n-q\ IJ}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha^J_q\right]_+\delta_{p+n-q,0} \\ +\theta^{IJ}_{n-q}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{q\ J}\right]_+\delta_{m+n-p-q,0} + \theta^I_{n-q\ J}\left[\alpha_{p\ I},\alpha^J_q\right]_+\delta_{m+n-p-q,0} \end{array}\right\} \\
+\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\left\{\begin{array}{c} \gamma_{n-q\ I}{}^J\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha_{q\ J}\right]_+\delta_{p+n-q,0} + \gamma^{IJ}_{n-q}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{q\ J}\right]_+\delta_{m+n-p-q,0} \\ +\gamma_{n-q\ IJ}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha^J_q\right]_+\delta_{p+n-q,0} + \gamma^I_{n-q\ J}\left[\alpha_{p\ I},\alpha^J_q\right]_+\delta_{m+n-p-q,0} \end{array}\right\}
\end{array}\right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} 4\alpha^I_{m-p}\,\alpha^J_{p+n}\,p\eta_{IJ} + 4\alpha_{m+n-p\ J}\alpha_{pI}(m-p)\eta^{IJ} \\ +4\alpha_{pI}\alpha_{m+n-p\ J}(m-p)\eta^{IJ} + 4\alpha^J_{p+n}\alpha^I_{m-p}p\eta_{IJ} \\ + \left\{ \begin{array}{c} \frac{2i}{2\alpha'}\frac{(p)^2}{2\alpha'}\left(\theta_{-p\ I}{}^{J}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha_{p+n\ J}\right]_+ + \theta_{-p\ IJ}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha^J_{p+n}\ \right]_+\right) \\ +\frac{2i}{2\alpha'}\frac{(p-m)^2}{2\alpha'}\left(\theta^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ + \theta^I_{p-m\ J}\left[\alpha_{p\ I},\alpha^J_{m+n-p}\ \right]_+\right) \end{array} \right\} \\ +\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{-p\ I}{}^{J}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha_{p+n\ J}\right]_+ + \gamma^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ \\ +\gamma_{-p\ IJ}\left[\alpha^I_{m-p}\,,\alpha^J_{p+n}\ \right]_+ + \gamma^I_{p-m\ J}\left[\alpha_{p\ I},\alpha^J_{m+n-p}\ \right]_+ \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} 4(p-n)\left[\alpha^I_{m+n-p}\,,\alpha_{p\ I}\right]_+ + 4(m-p)\left[\alpha^I_{m+n-p}\,,\alpha_{\ pI}\right]_+ \\ +\frac{2i}{2\alpha'}\frac{(p-m)^2}{2\alpha'}\left\{2\theta^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ + 2\theta^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+\right\} \\ +\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\left\{2\gamma_{p-m}{}^{IJ}\left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ + 2\gamma^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+\right\} \end{array} \right\}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{array}{c} 4(m-n)\left[\alpha^I_{m+n-p}\,,\alpha_{p\ I}\right]_+ + \frac{4i}{\alpha'}\frac{(p-m)^2}{2\alpha'}\theta^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ \\ +\frac{4i}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\gamma_{p-m}{}^{IJ}\left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (m-n)L_{m+n} + \frac{i}{4\alpha'}\frac{(p-m)^2}{2\alpha'}\theta^{IJ}_{p-m}\ \left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ \\ +\frac{i}{4\alpha'}(2\pi\alpha')^2\gamma_{p-m}{}^{IJ}\left[\alpha_{p\ I},\alpha_{m+n-p\ J}\right]_+ \end{array} \right\}$$

on déduit :

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} - QD\frac{(n^3-n)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds'_{mn,IJ} \tag{B.1}$$

et on trouve :

$$\pounds'_{mn,IJ} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{i\frac{(p-m)^2}{4\alpha'}\theta^{IJ}_{(p-m)} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{4\alpha'}\gamma^{IJ}_{p-m}\right\}\left[\alpha_{pI},\alpha_{m+n-pJ}\right]_+ \tag{B.2}$$

Annexe C

Calcul de Quelques Masses

État fondamental : $|p^+, \vec{p}^T\rangle$

$$M^2|p^+, \vec{p}^T\rangle = \sum_{I=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}\frac{1}{2\alpha'}[\alpha_{-n}^{I(\alpha)}, \alpha_{In}^{(\alpha)}]_+|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

$$= -\frac{1}{24\alpha'}\{Q(D-2)\}|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

C.1 1^{er} Niveau Excité

$$M^2\{(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p_+\vec{p}^T\rangle\} = \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{JK}[\alpha_{-n}^I, \alpha_{In}]_+\alpha_{-1K}|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1})^{JK}\{\alpha_{-1K}[\alpha_{-n}^{(\alpha)\,I}, \alpha_{In}^{(\alpha)}]_+ - 2(-\eta_{KI}$$
$$+ \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{KI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{KI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha_{-n}^I\}|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K,L=2}^{D-1}(U^{-1})^{JK}\{(2-\frac{Q(D-2)}{12})\alpha_{-1K} - \frac{2i}{2\alpha'}\theta_{KI\ 1}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-1})_L$$
$$- 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{KI\ 1}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-1})_L\}|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(2-\frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-1})^J - \frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-1})_L$$
$$- 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}n_J^{(1)}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-1})_L\}|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(2-\frac{Q(D-2)}{12}) - \frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)} - \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_J^{(1)}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+, \vec{p}^T\rangle.$$

C.2 2^{eme} Niveau Excité

Premier état :

$$M^2\{(U^{-1}\alpha_{-2})^J|p^+,\vec{p}^T\rangle\} = \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{JK}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+\alpha_{-2K}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1})^{JK}\{\alpha_{-1K}[\alpha^{(\alpha)\ I}_{-n},\alpha^{(\alpha)}_{In}]_+ - 2(-2\eta_{KI}$$
$$+ \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{KI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{KI\ n})\delta_{n-2,0}\alpha^I_{-n}\}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K,L=2}(U^{-1})^{JK}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})\alpha_{-2K}-\frac{2i}{2\alpha'}4\theta_{KI\ 2}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-2})_L$$
$$- \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\gamma_{KI\ 2}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-2})_L\}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-2})^J - \frac{2i}{2\alpha'}4m^{(2)J}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-2})_L$$
$$- \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n^{(2)J}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-2})_L\}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})-\frac{2i}{2\alpha'}4m^{(2)}_J-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n^{(2)}_J\}(U^{-1}\alpha_{-2})^J|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

Deuxième état :

$$M^2\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+|p_+\vec{p}^T\rangle = \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,L=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{JL}\{\alpha_{-1L}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+-2(-\eta_{LI}$$
$$+ \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{LI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{LI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^K|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$+\frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{KN}\{\alpha_{-1N}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+$$
$$- 2(-\eta_{NI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{NI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{NI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,L,M=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\{(2(U^{-1}\alpha_{-n})^J - \frac{i2}{2\alpha'}(U^{-1})^{JL}\theta_{LI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n}$$
$$- 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}(U^{-1})^{JL}\gamma_{LI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n})\}\delta_{n-1,0}(U^{-1}\alpha_{-1})^K|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$+ \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1})^{KN}\{\alpha_{-1\ N}[\alpha^{(\alpha)I}_{-n},\alpha^{(\alpha)}_{In}]_+ - 2(-\eta_{NI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{NI\ n}$$
$$+ i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{NI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$+\frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N,M=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\{2(U^{-1}\alpha_{-n})^K - \frac{i2}{2\alpha'}(U^{-1})^{KN}\theta_{NI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n}$$
$$- 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}(U^{-1})^{KN}\gamma_{NI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n}\delta_{n-1,0}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$+ \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,L=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1})^{JL}\{\alpha_{-1\ L}[\alpha_{-n}^{(\alpha)I},\alpha_{In}^{(\alpha)}]_+$$
$$-2(-\eta_{LI}+\frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{LI\ n}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{LI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha_{-n}^I\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^K+(4-\frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^J$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^K-\frac{2i}{2\alpha'}m_K^{(1)}\delta_{K,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^M$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}m_K^{(1)}\delta_{K,M}\ (U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^J-\frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^M$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_K^{(1)}\delta_{K,M}\ (U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^M$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_J^{(1)}\delta_{J,M}\ (U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^K-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_K^{(1)}\delta_{K,M}\ (U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^J$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^M\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+-\frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+-$$
$$\frac{2i}{2\alpha'}m_K^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_J^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2n_K^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(4-\frac{Q(D-2)}{12})-\frac{2i}{2\alpha'}(m_J^{(1)}+m_K^{(1)})-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(n_J^{(1)}+n_K^{(1)})\}\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

C.3 3^{eme} Niveau Excité

Premier état :

$$M^2\{(U^{-1}\alpha_{-3})^J|p^+,\vec{p}^T\ \rangle\} = \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{JK}[\alpha_{-n}^I,\alpha_{In}]_+\alpha_{-3K}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1})^{JK}\{\alpha_{-3K}[\alpha_{-n}^{(\alpha)\ I},\alpha_{In}^{(\alpha)}]_+-2(-3\eta_{KI}$$
$$+\frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{KI\ n}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{KI\ n})\delta_{n-3,0}\alpha_{-n}^I\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\sum_{I,K,L=2}(U^{-1})^{JK}\{(6-\frac{Q(D-2)}{12})\alpha_{-3K}-\frac{2i}{2\alpha'}9\theta_{KI\ 3}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-3})_L$$
$$-2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{KI\ 3}U^{IL}(U^{-1}\alpha_{-3})_L\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(6 - \frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-3})^J - \frac{2i}{2\alpha'}9m^{(3)J}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-3})_L$$
$$- 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}n^{(3)J}\delta_{J,L}(U^{-1}\alpha_{-3})_L\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\{(6 - \frac{Q(D-2)}{12}) - \frac{2i}{2\alpha'}9m_J^{(3)} - \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_J^{(3)}\}(U^{-1}\alpha_{-3})^J|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

Deuxième état :

$$M^2\{\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle = \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,L=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{JL}\{\alpha_{-1L}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+$$
$$- 2(-\eta_{LI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{LI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{LI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\}(U^{-1}\alpha_{-2})^K|p^+,\vec{p}^T\ \rangle$$
$$+\frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(U^{-1})^{KN}\{\alpha_{-2N}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+$$
$$- 2(-2\eta_{NI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{NI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{NI\ n})\delta_{n-2,0}\alpha^I_{-n}\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,M,L=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\{(2(U^{-1}\alpha_{-n})^J$$
$$-\frac{i2}{2\alpha'}(U^{-1})^{JL}\theta_{LI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n} - 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}(U^{-1})^{JL}\gamma_{LI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n})\}\delta_{n-1,0}(U^{-1}\alpha_{-2})^K|p^+,\vec{p}^T\ \rangle$$
$$+ \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1})^{KN}\{\alpha_{-2\ N}[\alpha^{(\alpha)I}_{-n},\alpha^{(\alpha)}_{In}]_+$$
$$- 2(-2\eta_{NI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{NI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{NI\ n})\delta_{n-2,0}\alpha^I_{-n}\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle$$
$$+\frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,N,M=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\{4(U^{-1}\alpha_{-n})^K$$
$$-\frac{i2}{2\alpha'}(U^{-1})^{KN}\theta_{NI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n} - 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}(U^{-1})^{KN}\gamma_{NI\ n}U^{IM}U^{-1}_{MI}\alpha^I_{-n}\}\delta_{n-2,0}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+,\vec{p}^T\ \rangle$$
$$+ \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{I,L=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}(U^{-1}\alpha_{-2})^K(U^{-1})^{JL}\{\alpha_{-1\ L}[\alpha^{(\alpha)I}_{-n},\alpha^{(\alpha)}_{In}]_+$$
$$- 2(-\eta_{LI} + \frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{LI\ n} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{LI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\}|p^+,\vec{p}^T\ \rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\{(6 - \frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-2})^K + (6 - \frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-2})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^J$$
$$- \frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-2})^K - \frac{2i}{2\alpha'}4m_K^{(2)}\delta_{K,M}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-2})^M$$

$$-\frac{2i}{2\alpha'}4m_K^{(2)}\delta_{K,M}\ (U^{-1}\alpha_{-2})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^J - \frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-2})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^M$$
$$- \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_K^{(2)}\delta_{K,M}\ (U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-2})^M$$

$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_J^{(1)}\delta_{J,M}\,(U^{-1}\alpha_{-1})^M(U^{-1}\alpha_{-2})^K - \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_K^{(2)}\delta_{K,M}\,(U^{-1}\alpha_{-2})^M(U^{-1}\alpha_{-1})^J$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_J^{(1)}\delta_{J,M}(U^{-1}\alpha_{-2})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^M\}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\{(6-\frac{Q(D-2)}{12})[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+ - \frac{2i}{2\alpha'}m_J^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+$$
$$-\frac{2i}{2\alpha'}4m_K^{(2)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+$$

$$-\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_J^{(1)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+ - \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2 n_K^{(2)}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+\}|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{2}\{(6-\frac{Q(D-2)}{12}) - \frac{2i}{2\alpha'}(m_J^{(1)}+4m_K^{(2)}) - \frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(n_J^{(1)}+n_K^{(2)})\}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-2})^K]_+|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

Troisième état :

$$M^2\{\frac{1}{3!} < (U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L >_+\}|p^+,\vec{p}^T\rangle = \sum_{I=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\alpha'}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+\{\frac{1}{3!}$$
$$\times < (U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L >_+\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

On développe le calcul nécessaire pour une seule permutation (les autres peuvent être déduites de la même façon) :

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{3!}\sum_{I,M=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{ (U^{-1})^{JM}\left\{\begin{array}{c}\alpha_{-1M}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+\\ -2(-\eta_{MI}+\frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{MI\ n}\\ +i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{MI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\end{array}\right\}(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L+\right\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{3!}\sum_{I,M=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}2(U^{-1}\alpha_{-1})^J - \frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{JM}\theta_{MI\ 1}\alpha^I_{-1}\\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{JM}\gamma_{MI\ 1}\alpha^I_{-1}\end{array}\right\}(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L+\\ (U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1})^{KM}\\ \times\left\{\begin{array}{c}\alpha_{-1M}[\alpha^I_{-n},\alpha_{In}]_+\\ -2(-\eta_{MI}+\frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{MI\ n}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{MI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n}\end{array}\right\}(U^{-1}\alpha_{-1})^L\end{array}\right\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{3!}\sum_{I,M,N=2}^{D-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} 2(U^{-1}\alpha_{-1})^J - \frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{JM}\theta_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\ \alpha^I_{-1} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{JM}\gamma_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \end{array}\right\} \\ \times(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L \\ +\left\{\begin{array}{c} (U^{-1}\alpha_{-1})^J \\ \times\left\{\begin{array}{c} 2(U^{-1}\alpha_{-1})^K - \frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{KM}\theta_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{KM}\gamma_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \end{array}\right\} \\ \times(U^{-1}\alpha_{-1})^L \end{array}\right\} \\ +(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1})^M \\ \times\left\{\begin{array}{c} \alpha_{-1M}[\alpha^{(\alpha)\ I}_{-n},\alpha^{(\alpha)}_{In}]_+ \\ -2(-\eta_{MI}+\frac{i}{2\alpha'}n^2\theta_{MI\ n}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{MI\ n})\delta_{n-1,0}\alpha^I_{-n} \end{array}\right\} \end{array}\right\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\frac{1}{3!}\sum_{I,M,N=2}^{D-1}\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} 2(U^{-1}\alpha_{-1})^J - \frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{JM}\theta_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\ \alpha^I_{-1} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{JM}\gamma_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{c} (U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L \\ +(U^{-1}\alpha_{-1})^J\left\{\begin{array}{c} 2(U^{-1}\alpha_{-1})^K - \frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{KM}\theta_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{KM}\gamma_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \end{array}\right\} \\ \times(U^{-1}\alpha_{-1})^L+ \\ (2-\frac{Q(D-2)}{12})(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(U^{-1})^{LM}\theta_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(U^{-1})^{LM}\gamma_{MI\ 1}U^{IN}U^{-1}_{NI}\alpha^I_{-1} \end{array}\right\} \end{array}\right\}|p^+,\vec{p}^T\rangle$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c} (6-\frac{Q(D-2)}{12}) \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(m^{(1)}_J+m^{(1)}_K+m^{(1)}_L) \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2(n^{(1)}_J+n^{(1)}_K+n^{(1)}_L) \end{array}\right\}\frac{1}{3!}(U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L|p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

Le développement analogue pour les autres permutations conduit à :

$$M^2\left\{\ \{\frac{1}{3!} < (U^{-1}\alpha_{-1})^J,(U^{-1}\alpha_{-1})^K,(U^{-1}\alpha_{-1})^L >_+\}|p^+,\vec{p}^T\rangle\ \right\}$$

$$= \frac{1}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c} (6-\frac{Q(D-2)}{12}) \\ -\frac{2i}{2\alpha'}\left\{\begin{array}{c} m^{(1)}_J \\ +m^{(1)}_K \\ +m^{(1)}_L \end{array}\right\} \\ -\frac{2i}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\left\{\begin{array}{c} n^{(1)}_J \\ +n^{(1)}_K \\ +n^{(1)}_L \end{array}\right\} \end{array}\right\}\frac{1}{3!} < (U^{-1}\alpha_{-1})^J(U^{-1}\alpha_{-1})^K(U^{-1}\alpha_{-1})^L >_+ |p^+,\vec{p}^T\rangle.$$

Bibliographie

[1] Brunner Ilka Haack Michael Baumgartl, Marco. *Strings and Fundamental Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. URL http://www.springer.com/us/book/9783642259463.

[2] S. Kamefuchi Y. Ohnukim. *Quantum Field Theory and Parastatistics*. University of Tokyo Press, 1982.

[3] Eugene P. Wigner. Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations ? *Phys. Rev.*, 77 :711–712, Mar 1950. doi : 10.1103/PhysRev.77.711. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.77.711.

[4] M. A. Seridi and N. Belaloui. Parabosonic string and space-time non-commutativity. *AIP Conference Proceedings*, 1444(1) :327–329, 2012. doi : http://dx.doi.org/10.1063/1.4715445. URL http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4715445.

[5] H. S. Green. A generalized method of field quantization. *Phys. Rev.*, 90 :270–273, Apr 1953. doi : 10.1103/PhysRev.90.270. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.90.270.

[6] Farhad Ardalan and Freydoon Mansouri. Quantum theory of dual relativistic parastring models. *Phys. Rev. D*, 9 :3341–3357, Jun 1974. doi : 10.1103/PhysRevD.9.3341. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3341.

[7] N. Belaloui and H. Bennacer. Poincaré algebra and space-time critical dimensions for parabosonic strings. *Czechoslovak Journal of Physics*, 53(9) :769–783, 2003. ISSN 0011-4626. doi : 10.1023/A:1025970432658. URL http://dx.doi.org/10.1023/A3A1025970432658.

[8] N. Belaloui and H. Bennacer. Poincaré algebra and space-time critical dimensions for paraspinnings strings. *Czechoslovak Journal of Physics*, 54(6) :621–632, 2004. ISSN 0011-4626. doi : 10.1023/B:CJOP.0000029691.20924.71. URL http://dx.doi.org/10.1023/B3ACJOP.0000029691.20924.71.

[9] L. Khodja and N. Belaloui. Low-energy parabosonic membrane : new critical dimensions and deformed noncommutativity. *Brazilian Journal of Physics*, 39 :652 – 662, 12 2009. ISSN 0103-9733. URL http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332009000600007&nrm=iso.

[10] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71 :38–41, Jan 1947. doi : 10.1103/PhysRev.71.38. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.38.

[11] Edward Witten. Non-commutative geometry and string field theory. *Nuclear Physics B*, 268(2) :253 – 294, 1986. ISSN 0550-3213. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(86)90155-0. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386901550.

[12] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and JohnE. Roberts. The quantum structure of spacetime at the planck scale and quantum fields. *Communications in Mathematical Physics*, 172(1) :187–220, 1995. ISSN 0010-3616. doi : 10.1007/BF02104515. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF02104515.

[13] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and John E. Roberts. Spacetime quantization induced by classical gravity. *Physics Letters B*, 331(1–2) :39 – 44, 1994. ISSN 0370-2693. doi : http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(94)90940-7. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394909407.

[14] A. Connes. *Non Commutative Geometry*. Academic Press, Boston, 1994.

[15] Xiao-Jun Wang. Strings in noncommutative spacetime. URL arXiv:hep-th/0503111v1.

[16] M. A. Seridi and N. Belaloui. Parabosonic strings and space time noncommutativity. *International Conference on String Theory, Strings 2013*, (Sogang University, Seoul) :24 – 29 June 2013, South Korea. URL http://strings2013.sogang.ac.kr/.

[17] M. A. Seridi and N. Belaloui. Paraantum strings in noncommutative space–time. *International Journal of Modern Physics A*, 30(30) :1550175, 2015. doi : 10.1142/S0217751X15501754. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X15501754.

[18] Rabin Banerjee, Biswajit Chakraborty, and Subir Ghosh. Noncommutativity in open string : new results in a gauge-independent analysis. *Physics Letters B*, 537(3–4) :340 – 350, 2002. ISSN 0370-2693. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(02)01944-5. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302019445.

[19] Chong-Sun Chu and Pei-Ming Ho. Non-commutative open string and d-brane. *Nuclear Physics B*, 550(1–2) :151 – 168, 1999. ISSN 0550-3213. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00199-6. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321399001996.

[20] Chong-Sun Chu and Pei-Ming Ho. Constrained quantization of open string in background b field and non-commutative d-brane. *Nuclear Physics B*, 568(1–2) :447 – 456, 2000. ISSN 0550-3213. doi : http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00685-9. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321399006859.

[21] JEN-CHI LEE. Consistent quantization of noncommutative d-brane in non-constant b field background. *Modern Physics Letters A*, 17(13) :779–783, 2002. doi : 10.1142/S0217732302007120. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732302007120.

[22] D. Kamani. Non-commutative superstring worldsheet. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 26(2) :285–291, 2002. ISSN 1434-6044. doi : 10.1140/epjc/s2002-01044-y. URL http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s2002-01044-y.

[23] S.S. Shahid-Zadeh Mousavi. Generalization of some algebras in the bosonic string theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 48(7) :2068–2071, 2009. ISSN 0020-7748. doi : 10.1007/s10773-009-9983-3. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10773-009-9983-3.

[24] D. Hamam and N. Belaloui. Open parabosonic string theory between two parallel dp-branes. *AIP Conference Proceedings*, 1444(1) :334–338, 2012. doi : http://dx.doi.org/10.1063/1.4715447. URL http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4715447.

[25] D. Hamam. *Cordes bosoniques ouvertes et D-branes dans le formalisme de la para-quantification*. Mèmoire de Magister, Université de Jijel, 2010.

[26] B. Zweibach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, New York, 2009.

International Journal of Modern Physics A
Vol. 30, No. 30 (2015) 1550175 (20 pages)

DOI: 10.1142/S0217751X15501754

Paraquantum strings in noncommutative space−time

M. A. Seridi*
Exact Sciences Faculty, Constantine 1 University,
Route Ain El-bey, Constantine 25000, Algeria
seridi_ali@yahoo.fr

N. Belaloui
Laboratory of Mathematical and Subatomic Physics,
Exact Sciences Faculty, Constantine 1 University,
Route Ain El-bey, Constantine 25000, Algeria
n_belaloui@yahoo.fr

Received 6 December 2014
Revised 23 August 2015
Accepted 8 September 2015
Published 26 October 2015

A parabosonic string is assumed to propagate in a total noncommutative target phase space. Three models are investigated: open strings, open strings between two parallel Dp–Dq branes and closed ones. This leads to a generalization of the oscillators algebra of the string and the corresponding Virasoro algebra. The mass operator is no more diagonal in the ordinary Fock space, a redefinition of this later will modify the mass spectrum, so that, neither massless vector state nor massless tensor state are present. The restoration of the photon and the graviton imposes specific forms of the noncommutativity parameter matrices, partially removes the mass degeneracy and gives new additional ones. In particular, for the D-branes, one can have a tachyon free model with a photon state when more strict conditions on these parameters are imposed, while, the match level condition of the closed string model induces the reduction of the spectrum.

Keywords: Parastrings; noncommutativity; Fock space redefinition; spectrum reduction.

PACS numbers: 11.10.Nx, 11.25.−w, 11.25.Uv

1. Introduction

The purpose of this work[a] is to investigate the paraquantum extension of a bosonic string in a noncommutative space–time. The paraquantization as a generalization

*Corresponding author.
[a]Preliminary versions of this work were presented in: Strings 2013 Conference, Seoul, South Korea, and in CIPSA 2013, Constantine, Algeria.

of the quantization was first introduced by Green.[1] Based on trilinear commutation relations, the paraquantization consists in a generalization of creation–annihilation operators algebra for the bosons and the fermions.[2] A first study of the paraquantum string theory was done by Ardalan and Mansouri.[3] This study is based on a particular manner in which the mass center variables of the string are to be handled. A second study of the parastring theory was proposed in Refs. 4–6, where the paraquantization was done, so that the string variables verify trilinear commutation relations. The main result is that for the two approaches, there is a possibility of new critical dimensions: $D = 2 + \frac{24}{Q}$ for the parabosonic case, $D = 2 + \frac{8}{Q}$ for the paraspinning strings, and $D = 3 + \frac{24}{Q}$ for the parabosonic membrane and Q is the order of the paraquantization.

The first notion of noncommutativity was introduced by Heisenberg and reconsidered by Snyder.[7] The noncommutativity has been intensively studied in the literature following the fact that it arises in the context of string theory[8] at the Planck scale, although that interesting properties and implications in field theories are obtained in the context of the physics at sub-Planckian domain. A very strong argument for why space–time at Planck scale becomes noncommutative was provided by Doplicher, Fredenhagen and Roberts.[9,10] This argument combines quantum theory and Einstein's theory of gravity. Indeed, their analysis suggests that space–time coordinates, by themselves become operators, satisfying noncommutative algebra and according to the Heisenberg's uncertainty principle, precise measurement of the position of a particle implies the supply of an infinite energy, which leads to a formation of a black hole. The later forbids the outflow of information, and accordingly the measurement is doomed to fail. One of the issues to get around this problem is the assumption that space–time being a differentiable manifold will break down at the Planck scale since the ordinary notion of points, lines, etc. do not make any sense and one is forced to use the noncommutative geometry developed by Connes.[11] Due to the lack of knowledge of the exact noncommutative structure of the algebra of coordinates, in this paper, we will use one of the simplest and naive realization of the noncommutative spaces; the Moyal plane, usually postulating the following commutations relations among space–time coordinates:

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}\,, \tag{1}$$

where θ^{ij} is a constant antisymmetric noncommutativity parameter. As it is described in Ref. 12, in string theory, the direct generalization of Eq. (1) to the equal time canonical commutation relations of the worldsheet scalar field $X^I(\tau,\sigma)$ are as follows:

$$\left[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\right] = \begin{cases} i\theta^{IJ} & \text{if } \sigma = \sigma'\,, \\ 0 & \text{if } \sigma \neq \sigma'\,, \end{cases} \tag{2}$$

where τ and σ are worldsheet coordinates. More generally and under certain conditions, the position of any two points on strings may be noncommutative, this is described by a relation like:

$$[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')] = i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma'), \tag{3}$$

where $i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')$ is a nonconstant noncommutativity parameter.

The main object of this work is to ask what happens when a string propagates in such a noncommutative background in the context of the paraquantum formalism. In string theory, the noncommutativity appears naturally when we consider an open bosonic string in the presence of a NS background B-field. In this approach, the new action leads to modified quantities as the Virasoro operators, the mass operator, the commutation relations of the modes, so that the Virasoro algebra and the Fock space remain unchanged.[13–15] In this work, we investigate a parabosonic string theory in a noncommutative space–time. Unlike the B-field approach, here, the noncommutativity is postulated in the beginning and does not concern only the endpoints but all the points of the string. The action remains unchanged, so that, there is no modification in the equations of motion, the Virasoro operators and the mass operator, while the oscillator modes and the Virasoro algebras are modified, this imposes a redefinition of the Fock space.

This paper is organized as follows. In Sec. 2, we construct a model of an open bosonic string theory in the formalism of the paraquantization in a noncommutative space–time. Trilinear commutation relations between string coordinates and momenta variables are postulated and those in terms of modes are obtained. A new anomaly term in the Virasoro algebra is obtained and a redefinition of the Fock space is necessary in order to diagonalize the mass operator. The massless state restoration imposes some restrictions on the spectrum and the noncommutativity parameters. In Secs. 3 and 4, the same questions are discussed in the case of the open parabosonic string between two parallel Dp–Dq branes and the closed ones. The restoration of the photon and the graviton states imposes specific forms of the noncommutativity parameter matrices, partially removes the mass degeneracy and gives new additional ones. In particular, for the D-branes, one can have a tachyon free model with a photon state when more strict conditions on these parameters are imposed, while the match level condition of the closed string induces a reduction of the spectrum.

2. Free Open Parabosonic String

2.1. *The model*

While in the study of open strings in the presence of background fields, the noncommutativity parameter is constant and is given in terms of the usually constant B-field, the NC parameter can also be nonconstant, for example by introducing a nontrivial B-field,[16] or by considering a noncommutative string worldsheet since this later directly leads to the noncommutativity of the space–time with the nonconstant parameter in the form, $i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')$ (see for example Ref. 17).

In Ref. 18, the author is interested to the noncommutative worldsheet of the bosonic string and he studies the string propagating in the noncommutative phase space described by the following relations between the usual dynamical variables of a bosonic string in the lightcone gauge $\{x^-, p^+, X^I(\tau,\sigma), \Pi^I(\tau,\sigma)\}$ in the ordinary quantum case:

$$\begin{aligned}
\left[X^I(\tau,\sigma), X^J(\tau,\sigma')\right] &= i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[\Pi^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\right] &= i\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[X^I(\tau,\sigma), \Pi^J(\tau,\sigma')\right] &= i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[x^-, p^+\right] &= i\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

where $\Pi^I = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\tau X^I$, are the canonical conjugate momenta of the string coordinates X^I and $\{x^-, p^+\}$ are the mass center variables of the string.

Here, θ^{IJ} and γ^{IJ} represent respectively the noncommutativity parameters of the space–time coordinates and momenta variables and they are given in a Fourier expansion[18]

$$\begin{aligned}
\theta^{IJ}(\sigma-\sigma') &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta_k^{IJ} \exp ik(\sigma-\sigma')\,,\\
\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma') &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{IJ} \exp ik(\sigma-\sigma')\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

The hermiticity property of these parameters are expressed as follows:

$$\begin{aligned}
\left[i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\right]^+ &= \left[i\theta^{JI}(\sigma'-\sigma)\right],\\
\left[i\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\right]^+ &= \left[i\gamma^{JI}(\sigma'-\sigma)\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Note here that the relation (1) is a particular case of a more general relation in the context of the paraquantization formalism. Indeed, let us introduce the following Green's ansatz:

$$X^I(\tau,\sigma) = \sum_{\alpha=1}^{Q} X^{(\alpha)I}(\tau,\sigma)\,, \tag{7}$$

where $\alpha = 1, 2, \ldots, Q$ are the Green indices and $X^{(\alpha)I}(\tau,\sigma)$ are the Green components of $X^I(\tau,\sigma)$. Q is the order of the paraquantization such that the value $Q = 1$ corresponds to the ordinary quantum case. This is the so-called Green representation (for more details see Ref. 2). Then, paraquantizing this theory consists in writing the following bilinear commutation relations of an anomalous case:

$$\begin{aligned}
\left[X^{(\alpha)I}(\tau,\sigma), X^{(\alpha)J}(\tau,\sigma')\right] &= i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[X^{(\alpha)I}(\tau,\sigma), X^{(\beta)J}(\tau,\sigma')\right]_+ &= 0\,; \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\left[\Pi^{(\alpha)I}(\tau,\sigma), \Pi^{(\alpha)J}(\tau,\sigma')\right] &= i\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\,,\\
\left[\Pi^{(\alpha)I}(\tau,\sigma), \Pi^{(\beta)J}(\tau,\sigma')\right]_+ &= 0\,; \quad \alpha\neq\beta\,,\\
\left[x^{(\alpha)-}, p^{(\alpha)+}\right] = i\,, \quad \left[x^{(\alpha)-}, p^{(\beta)+}\right]_+ &= 0\,; \quad \alpha\neq\beta\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Relations (8) are equivalent to the following trilinear commutation relations:

$$
\begin{aligned}
&\Big[X^I(\tau,\sigma),\big[X^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\big]_+\Big]\\
&\qquad = 2i\big\{\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\big\}\,,\\
&\Big[X^I(\tau,\sigma),\big[\Pi^J(\tau,\sigma'),X^K(\tau,\sigma'')\big]_+\Big]\\
&\qquad = 2i\big\{\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')X^K(\tau,\sigma'')+\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\big\}\,,\\
&\Big[X^I(\tau,\sigma),\big[\Pi^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\big]_+\Big]\\
&\qquad = 2i\big\{\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')+\eta^{IK}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\big\}\,,\\
&\Big[\Pi^I(\tau,\sigma),\big[X^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\big]_+\Big]\\
&\qquad = 2i\big\{-\eta^{IJ}\delta(\sigma'-\sigma)\Pi^K(\tau,\sigma'')+\gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')X^J(\tau,\sigma')\big\}\,,\\
&\Big[\Pi^I(\tau,\sigma),\big[\Pi^J(\tau,\sigma'),\Pi^K(\tau,\sigma'')\big]_+\Big]\\
&\qquad = 2i\big\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'')+\gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\big\}\,,\\
&\qquad\big[X^I(\tau,\sigma),[X^J(\tau,\sigma'),A]_+\big] = 2i\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')A\,,\\
&\qquad\big[X^I(\tau,\sigma),[\Pi^J(\tau,\sigma'),A]_+\big] = 2i\eta^{IJ}\delta(\sigma-\sigma')A\,,\\
&\qquad\Big[\Pi^I(\tau,\sigma),\big[\Pi^J(\tau,\sigma'),A\big]_+\Big] = 2i\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')A\,,\\
&\qquad\qquad\big[x^-,[p^+,B]_+\big] = 2iB\,,\\
&\qquad\qquad\big[x^-,[p^+,p^+]_+\big] = 4ip^+\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

where we have considered all the possible combinations between the above-mentioned dynamical variables with $A=\{x^-,p^+\}$, $B=\big\{X^I(\tau,\sigma),\Pi^I(\tau,\sigma)\big\}$ and I, J, $K=2,\dots,D-1$, are the transverse components. This is the paraquantum extension of the theory described by the transition between the ordinary case defined by relations (4) and the generalized case obtained in relations (9) and the strings in the context of this extension are called parastrings.

In terms of oscillator modes and for m, n, $l\neq 0$, we obtain (see Appendix)

$$
\begin{aligned}
\Big[\alpha_m^I,\big[\alpha_n^J,\alpha_l^K\big]_+\Big] &= 2\bigg\{\bigg(m\eta^{IJ}+i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ}\bigg)\delta_{m+n,0}\alpha_l^K\\
&\quad+\bigg(m\eta^{IK}+i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{IK}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{IK}\bigg)\delta_{m+l,0}\alpha_n^J\bigg\}\,,\\
\Big[\alpha_m^I,\big[\alpha_n^J,A\big]_+\Big] &= 2\bigg\{m\eta^{IJ}+i\frac{(n)^2}{2\alpha'}\theta_n^{IJ}+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{IJ}\bigg\}\delta_{m+n,0}A\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[x^-, [p^+, \alpha_m^I]_+\right] &= 2i\alpha_m^I\,,\\
\left[p^I, [p^J, p^K]_+\right] &= 2i\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\{\gamma_0^{IJ}\delta_{m+n,0}p_l^K + \gamma_0^{IK}\delta_{m+l,0}p_n^J\}\,,\\
\left[x^I, [p^J, p^K]_+\right] &= 2i\bigg\{\left(\frac{1}{2}\eta^{IJ} - \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\right)p^K\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\eta^{IK} - \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK}\right)p^J\bigg\}\,,\\
\left[p^I, [x^J, p^K]_+\right] &= -2i\left\{\frac{1}{2}\eta^{IJ} + \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}p^K + 2i\left\{\frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\alpha')^2}\gamma_0^{IK}\right\}x^J\,,\\
\left[p^I, [x^J, x^K]_+\right] &= -2i\bigg\{\left(\frac{1}{2}\eta^{IJ} + \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\right)x^K\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\eta^{IK} + \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK}\right)x^J\bigg\}\,,\\
\left[x^I, [x^J, p^K]_+\right] &= 2i\bigg\{\left(\theta_0^{IJ} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right)p^K\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\eta^{IK} - \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IK}\right)x^J\bigg\}\,,\\
\left[x^I, [x^J, x^K]_+\right] &= 2i\left\{\left(\theta_0^{IJ} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\right)x^K + \left(\theta_0^{IK} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}\right)x^J\right\}\,,\\
[x^I, [p^J, A]_+] &= 2i\left\{\frac{1}{2}\eta^{IJ} - \frac{1}{2\alpha'}(2\pi\alpha')^2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}A\,,\\
[x^I, [x^J, A]_+] &= 2i\{\theta_0^{IJ} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\}A\,,\\
[x^-, [p^+, C]_+] &= 2iC\,, \quad [A, [C, C]_+] = 0\,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$C = \{x^I, p^I\}$ and $X^I(\tau,\sigma) = x^I + 2\alpha' p^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^I\exp(-in\tau)\cos(n\sigma)$.

2.2. *Lightcone Virasoro algebra*

In parastring theory, the Virasoro generators are given in a symmetrized form (see Ref. 6)

$$
L_m^\perp = \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{m-p,}^I\alpha_{pI}\right]_+\,. \tag{11}
$$

A modified Virasoro algebra is obtained

$$
\left[L_m^\perp, L_n^\perp\right] = (m-n)L_{m+n} + Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,IJ}\,, \tag{12}
$$

where

$$\pounds_{mn,IJ} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta^{IJ}_{p-m} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{IJ}_{p-m} \right\} [\alpha_{pI}, \alpha_{m+n-pJ}]_+ \,,$$

is a new anomaly term due to the noncommutativity of the space–time.

2.3. *The spectrum*

As for the Virasoro operators, we deduce the symmetrized form of the mass operator,

$$M^2 = \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\alpha'} [\alpha^I_{-n}, \alpha_{nI}]_+ \,. \tag{13}$$

As it is mentioned earlier, the mass operator form is not affected by the noncommutativity, however, the oscillator modes verify a modified trilinear commutation relations (10), so that the presence of the noncommutativity parameters, the ordinary states are no more eigenstates of this later.

It is then necessary to diagonalize simultaneously both antisymmetric matrices as described by the following equations:

$$(U^{-1} i\theta_m U)^{IJ} = D^{IJ}_m = \mu^{(m)}_I \delta^{IJ}$$

and

$$(U^{-1} i\gamma_n U)^{IJ} = T^{IJ}_n = \nu^{(n)}_I \delta^{IJ}$$

with

$$[\theta_m, \gamma_n] = 0 \,. \tag{14}$$

U is an unitary matrix transformation. This could be done by the following Fock space redefinition (inspired from Ref. 12):

$$\frac{1}{h!}\left\langle \prod_{I=2}^{D-1} \prod_{m=1}^{\infty} (\alpha^I_{-m})^{\lambda_{m,I}} \right\rangle_+ \to \frac{1}{h!}\left\langle \prod_{I=2}^{D-1} \prod_{m=1}^{\infty} \{(U^{-1}\alpha_{-m})^I\}^{\lambda_{m,I}} \right\rangle_+ \,, \tag{15}$$

where

$$h = \sum_{m,I} \lambda_{m,I} \,.$$

The symmetrized form $\langle \cdots \rangle_+$ is the sum of the $h!$ possible permutations of oscillator products.

We can verify that the mass operator is diagonal in the new basis, however, the mass eigenvalues are modified by the presence of the noncommutativity parameter eigenvalues which affect the mass degeneracy. In particular, for the first excited level, the ordinary vector state $(U^{-1}\alpha_{-1})^J |p^+ \mathbf{p}^T\rangle$, with the symmetry group

$SO(D-2)$ takes mass and so breaks this symmetry. Indeed,

$$M^2(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+\mathbf{p}^T\rangle$$
$$= -\frac{1}{2(\alpha')^2}\Big\{\mu_J^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)}\Big\}(U^{-1}\alpha_{-1})^J|p^+,\mathbf{p}^T\rangle\,. \tag{16}$$

In order to restore the massless photon state, we have to impose the following condition:

$$-\frac{1}{\alpha'}\mu_J^{(1)} - \frac{1}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\nu_J^{(1)} = 0\,, \tag{17}$$

more generally,

$$D_1 = -(2\pi\alpha')^2 T_1\,.$$

Applying this condition on higher mass levels, some modification on the degeneracy and the eigenvalues of some specific states are obtained. This will be detailed in the following sections.

3. Open Parabosonic String on Parallel Dp–Dq Branes

3.1. *Modified trilinear relations*

Let us consider a parabosonic string between two parallel Dp–Dq branes ($p > q$). Three types of coordinates are used to describe this theory. The first gives the Neuman–Neuman (NN) oscillator modes: α^i, $i = 1,\dots,q$, which verify the same trilinear relations as in the previous section. The second is the Dirichlet–Dirichlet (DD) coordinates given by the solution

$$X^a(\tau,\sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^a\exp(-in\tau)\sin n\sigma\,,$$

with a, b, $c = p+1$, D. Here, $\bar{x}_1^a$, $\bar{x}_2^a$ are the locations of the Dp and Dq branes, respectively. The third is the mixed ND ones given by the solution

$$X^r(\tau,\sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\in z_{\text{odd}}}\frac{2}{n}\alpha^r_{\frac{n}{2}}\exp\left(-i\frac{n}{2}\tau\right)\cos\left(\frac{n}{2}\sigma\right), \quad r,s,t = q+1,p\,.$$

In the same way as for the case of relations (10), one can again derive the following relations from (9) and obtain:

$$\Big[\alpha_m^a,\big[\alpha_n^b,\alpha_l^c\big]_+\Big] = 2\bigg\{\left(m\delta^{ab} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{ab} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{ab}\right)\delta_{m+n,0}\alpha_l^c$$
$$+\left(m\delta^{ac} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_l^{ac} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_l^{ac}\right)\delta_{m+l,0}\alpha_n^b\bigg\}\,, \tag{18}$$

$$\Big[\alpha_m^a,\big[\alpha_n^b,R\big]_+\Big] = 2\bigg\{m\delta^{ab} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_n^{ab} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_n^{ab}\bigg\}\delta_{m+n,0}R\,,$$

for DD oscillator modes and

$$\left[\alpha^r_{\frac{w}{2}}, \left[\alpha^s_{\frac{z}{2}}, \alpha^t_{\frac{g}{2}}\right]_+\right] = 2\left\{\left(\frac{w}{2}\delta^{rs} + i\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{z}{2}} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{z}{2}}\right)\delta_{w+z,0}\alpha^t_{\frac{g}{2}} + \left(\frac{w}{2}\delta^{rt} + i\frac{\left(\frac{g}{2}\right)^2}{2\alpha'}\theta^{rt}_{\frac{g}{2}} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rt}_{\frac{g}{2}}\right)\delta_{w+g,0}\alpha^s_{\frac{z}{2}}\right\}, \tag{19}$$

$$\left[\alpha^r_{\frac{w}{2}}, \left[\alpha^s_{\frac{z}{2}}, H\right]_+\right] = 2\left\{\left(\frac{w}{2}\delta^{rs} + i\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{z}{2}} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{z}{2}}\right)\delta_{w+z,0}\right\}H\,,$$

for ND oscillator modes, in addition to:

$$\begin{aligned}\left[\alpha^i_m, \left[\alpha^j_n, D\right]_+\right] &= 2\left\{m\eta^{ij} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta^{ij}_n + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{ij}_n\right\}\delta_{m+n,0}D\,,\\ \left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] &= 2iD\,,\end{aligned} \tag{20}$$

$D = \left\{\alpha^a_m, \alpha^r_{\frac{w}{2}}\right\}$, $R = \left\{\alpha^i_m, \alpha^r_{\frac{w}{2}}, x^-, p^+\right\}$, $H = \{\alpha^i_m, \alpha^a_m, x^-, p^+\}$ and $w, z, g \in Z^+_{\mathrm{odd}}$.

3.2. *Virasoro algebra*

We introduce the Virasoro operator in this form

$$L^{\mathrm{tot}}_m = L^{\mathrm{NN}}_m + L^{\mathrm{DD}}_m + L^{\mathrm{ND}}_m\,, \quad m \neq 0\,. \tag{21}$$

The NN term is the same as the one of Sec. 2, where the two others are given by

$$\begin{aligned}L^{\mathrm{DD}}_m &= \frac{1}{2}\sum_{h\in z}\sum_{a=p+1}^{D}\left[\alpha^a_{m-h}, \alpha_{h,a}\right]_+\,,\\ L^{\mathrm{ND}}_m &= \frac{1}{2}\sum_{h\in Z_{\mathrm{odd}}}\sum_{r=q+1}^{p}\left[\alpha^r_{m-\frac{h}{2}}, \alpha_{\frac{h}{2}r}\right]_+\,, \quad m \neq 0\,.\end{aligned} \tag{22}$$

The algebra of the total Virasoro operators is given as follows:

$$\left[L^{\mathrm{tot}}_m, L^{\mathrm{tot}}_n\right] = (m-n)L^{\mathrm{tot}}_{m+n} + Q\frac{(p-q)}{8}m\delta_{m+n,0} + Q(D-2)\frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,ij} + \pounds_{mn,ab} + \pounds_{mn,rs}\,, \tag{23}$$

where

$$\begin{aligned}\pounds_{mn,ab} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(h-m)^2}{\alpha'}\theta^{ab}_{h-m} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{ab}_{h-m}\right\}[\alpha_{ha}, \alpha_{m+n-hb}]_+\,,\\ \pounds_{mn,rs} &= \sum_{h\in z_{\mathrm{odd}}}\left\{\frac{i}{4}\frac{\left(\frac{h}{2}-m\right)^2}{\alpha'}\theta^{rs}_{\frac{h}{2}-m} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma^{rs}_{\frac{h}{2}-m}\right\}\left[\alpha_{\frac{h}{2}r}, \alpha_{m+n-\frac{h}{2}s}\right]_+\,.\end{aligned} \tag{24}$$

The expression of the three added terms $\{\pounds_{mn,ij} + \pounds_{mn,ab} + \pounds_{mn,rs}\}$ is the new anomaly term of the Virasoro algebra in the case of a parabosonic open string on parallel Dp–Dq branes in a noncommutative space–time.

3.3. *The spectrum*

3.4. *Fock space redefinition*

Considering the three types of oscillators, Fock space redefinition in (15) is generalized as follows:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h'!}\left\{\left\langle\left[\prod_{i=2}^{q}\prod_{m=1}^{+\infty}\left(\alpha_{-m}^{i}\right)^{\lambda_{m,i}}\right]\left[\prod_{r=q+1}^{p}\prod_{l\in Z_{\text{odd}}^{+}}\left(\alpha_{-\frac{l}{2}}^{r}\right)^{\lambda_{l,r}}\right]\right.\right.\\
&\quad\times\left.\left.\left[\prod_{a=p+1}^{D}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_{-n}^{a}\right)^{\lambda_{n,a}}\right]\right\rangle_{+}\right\}|p^{+},\mathbf{p}^{T}\rangle\\
&\quad\to\frac{1}{h'!}\left\{\left\langle\left[\prod_{i=2}^{q}\prod_{m=1}^{+\infty}\left\{(U^{-1}\alpha_{-m})^{i}\right\}^{\lambda_{m,i}}\right]\right.\right.\\
&\quad\times\left[\prod_{r=q+1}^{p}\prod_{l\in Z_{\text{odd}}^{+}}\left\{\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{l}{2}}\right)^{r}\right\}^{\lambda_{l,r}}\right]\\
&\quad\times\left.\left.\left[\prod_{a=p+1}^{D}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{(U^{-1}\alpha_{-n})^{a}\right\}^{\lambda_{n,a}}\right]\right\rangle_{+}\right\}|p^{+},\mathbf{p}^{T}\rangle\,,
\end{aligned}\tag{25}$$

where

$$h'=\sum_{m,i}\lambda_{m,i}+\sum_{l,r}\lambda_{l,r}+\sum_{n,a}\lambda_{n,a}\,.$$

3.5. *Mass spectrum*

In the same way, the mass operator is generalized to include the ND and DD oscillators in addition to the D-branes separation term:

$$\begin{aligned}
M^{2}=&\left(\frac{x_{2}^{a}-x_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=2}^{q}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^{i},\alpha_{ni}\right]_{+}\\
&+\sum_{n\in Z_{\text{odd}}^{+}}\sum_{r=q+1}^{p}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-\frac{n}{2}}^{r},\alpha_{\frac{n}{2}r}\right]_{+}\\
&+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{a=p+1}^{D}\frac{1}{2\alpha'}\left[\alpha_{-n}^{a},\alpha_{na}\right]_{+}\,.
\end{aligned}\tag{26}$$

The mass spectrum of the first three levels is given in Table 1 by taking

$$m_{0}^{2}=\left(\frac{x_{2}^{a}-x_{1}^{a}}{2\pi\alpha'}\right)^{2}-\frac{3}{2\alpha'}Q\frac{(p-q)}{24}\quad\text{and}\quad\zeta_{I}^{(n)}=n^{2}\mu_{I}^{(n)}+(2\pi\alpha')^{2}\nu_{I}^{(n)}\,.\tag{27}$$

Table 1. Dp–Dq branes mass spectrum.

	Eigenstates	M^2 eigenvalues
0	$\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{\alpha'}$
$\frac{1}{2}$	$\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_r^{\left(\frac{1}{2}\right)}$
1	$\frac{1}{2}\left[\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^s\right]_+ \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_r^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \zeta_s^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^a \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_a^{(1)}$
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_j^{(1)}$
$\frac{3}{2}$	$\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{3}{2}}\right)^r \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_r^{\left(\frac{3}{2}\right)}$
	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r\right]_+ \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_j^{(1)} + \zeta_r^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$
	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^a, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r\right]_+ \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_a^{(1)} + \zeta_r^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$
	$\frac{1}{3!}\left\langle \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^s, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^t \right\rangle_+ \vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$m_0^2 + \frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_r^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \zeta_s^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \zeta_t^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$

3.6. *Discussion*

The attributed modifications to the mass spectrum are due to both the D-branes configuration and the noncommutativity effects. In fact, for general choice of antisymmetric matrices θ and γ, we have a partial removal of the mass degeneracy and no massless states in this model. In particular, this modification completely breaks the spatial rotation $SO(D-2)$ symmetry of the massless vector states on original commutative background. Different models are then envisaged (with or without tachyons, the presence of massless vector states, etc.) by taking particular choices on the D-branes configuration and the noncommutativity parameter matrices.

3.6.1. *Tachyon free model*

The fundamental state mass for tachyon free model depends on the D-branes separation

$$\left(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{2}{2\alpha'}Q\frac{D-2}{24} - \frac{3}{2\alpha'}Q\frac{p-q}{24} \geq 0\,. \tag{28}$$

Let us first take the choice of a massless scalar ground state which is obtained when we take the D-branes separation to be

$$(x_2^a - x_1^a)^2 = (2\pi\alpha')^2\frac{1}{\alpha'} + Q\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\frac{3(p-q)}{48}\,. \tag{29}$$

Table 2. Modified spectrum for the D-branes.

	Eigenstates	New M^2 eigenvalues
0	$\|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	0. Massless scalar
$\frac{1}{2}$	$\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_r^{(\frac{1}{2})}$
1	$\frac{1}{2}\left[\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^s\right]_+ \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})}\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^a \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	0. Massless scalar
	$(U^{-1}\alpha_{-1})^j \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	0. Massless vector
$\frac{3}{2}$	$\left(U^{-1}\alpha_{-\frac{3}{2}}\right)^r \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{3}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_r^{(\frac{3}{2})}$
	$\frac{1}{2}\left[\left(U^{-1}\alpha_{-1}\right)^j, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r\right]_+ \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{2\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \zeta_r^{(\frac{1}{2})}$
2	$\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\alpha_{-1})^j, (U^{-1}\alpha_{-1})^k\right]_+ \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	0. Massless tensor
	$\frac{1}{3!}\left\langle (U^{-1}\alpha_{-1})^j, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^r, \left(U^{-1}\alpha_{-\frac{1}{2}}\right)^s\right\rangle_+ \|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2 \left\{\zeta_r^{(\frac{1}{2})} + \zeta_s^{(\frac{1}{2})}\right\}$

By substituting this in the mass of the vector state $(U^{-1}\alpha_{-1})^j|p^+, \mathbf{p}^T\rangle$ given by $m_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2\zeta_j^{(1)}$ (see Table 1), we obtain the result

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^2\left(\mu_j^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_j^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha'}\,. \tag{30}$$

To restore the massless vector state, one must choose the noncommutativity parameter matrices such that

$$(D_1)_{jj} + (2\pi\alpha')^2(T_1)_{jj} = 2\alpha'\,. \tag{31}$$

As an example, let us see in Table 2, how the spectrum is modified if we take the case of both massless vector and scalar ground state conditions given in (29) and (31) and apply them to the higher levels.

Now, if we consider a more general case which describes a massive scalar ground state and suppose the positivity of the vector state mass given by the condition:

$$(D_1)_{jj} + (2\pi\alpha')^2(T_1)_{jj} < 2(\alpha')^2\left\{\left(\frac{x_2^a - x_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 - \frac{3}{2\alpha'}Q\frac{p-q}{24}\right\}, \tag{32}$$

the obtained massive vector will have one more degree of freedom, i.e. $(q-1)$ massive states for each p^i satisfying, $p^2 + m^2 = 0$. We must then join one of the $(p-q)$ scalar states to form the massive vector. The scalar state joined to the massive vector is the linear combination[19]

$$(x_2^a - x_1^a)^2(U^{-1}\alpha_{-1})^a|p^+, \mathbf{p}^T\rangle\,. \tag{33}$$

4. Closed Parabosonic String Model

To fix the notation, we give the ordinary coordinates solutions:

$$X^I(\tau,\sigma) = x^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}$$

$$\times \exp(-im\tau)\big(\alpha_m^I \exp(im\sigma) + \tilde{\alpha}_m^I \exp(-im\sigma)\big)\,.$$

From Eqs. (9), the trilinear relations of the mass center variables $\{x^-, p^+, x^i, p^i\}$ and the oscillator modes $\{\alpha_m^I, \tilde{\alpha}_m^I\}$ are calculated to give:

$$\begin{aligned}
\Big[\alpha_m^I, \big[\alpha_n^J, \alpha_l^K\big]_+\Big] &= 2\Bigg\{\left(m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_{-n}^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-n}^{IJ}\right)\delta_{m+n,0}\alpha_l^K \\
&\quad + \left(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_{-l}^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-l}^{IK}\right)\delta_{m+l,0}\alpha_n^J\Bigg\}\,, \\
\Big[\tilde{\alpha}_m^I, \big[\tilde{\alpha}_n^J, \tilde{\alpha}_l^K\big]_+\Big] &= 2\Bigg\{\left(m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_{n}^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{n}^{IJ}\right)\delta_{m+n,0}\tilde{\alpha}_l^K \\
&\quad + \left(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_{l}^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{l}^{IK}\right)\delta_{m+l,0}\tilde{\alpha}_n^J\Bigg\}\,, \\
\Big[\tilde{\alpha}_m^I, \big[\alpha_n^J, \tilde{\alpha}_l^K\big]_+\Big] &= 2\left(m\eta^{IK} + i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta_{l}^{IK} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{l}^{IK}\right)\alpha_n^J\delta_{m+l,0}\,, \\
\Big[\alpha_m^I, \big[\alpha_n^J, A\big]_+\Big] &= 2\Bigg\{\left(m\eta^{IJ} + i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta_{-n}^{IJ} + i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma_{-n}^{IJ}\right)\delta_{m+n,0}\Bigg\}A
\end{aligned} \tag{34}$$

for the oscillator modes: $l, m, n \neq 0$, and

$$\begin{aligned}
\Big[p^I, \big[p^J, p^K\big]_+\Big] &= \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\{\gamma_0^{IJ}p^K + \gamma_0^{IK}p^J\}\,, \\
\Big[p^I, \big[x^J, p^K\big]_+\Big] &= -2i\left\{\eta^{IJ} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}p^K + \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}(2\pi\alpha')^2\{\gamma_0^{IK}\}x^J\,, \\
\Big[x^I, \big[p^J, p^K\big]_+\Big] &= 2i\left\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}p^K + 2i\left\{\eta^{IK} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IK}\right\}p^J\,, \\
\Big[p^I, \big[x^J, x^K\big]_+\Big] &= -2i\left\{\eta^{IJ} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}x^K - 2i\left\{\eta^{IK} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IK}\right\}x^J\,, \\
\Big[x^I, \big[p^J, x^K\big]_+\Big] &= 2i\left\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}x^K + 2i\{\theta_0^{IK} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}\}p^J\,, \\
\Big[x^I, \big[x^J, x^K\big]_+\Big] &= 2i\{\theta_0^{IJ} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\}x^K + 2i\{\theta_0^{IK} - (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IK}\}x^J\,,
\end{aligned}$$

$$\left[x^I, \left[p^J, A\right]_+\right] = 2i\left\{\eta^{IJ} - \frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}2\tau\gamma_0^{IJ}\right\}A\,,$$

$$\left[x^I, \left[x^J, A\right]_+\right] = 2i\{\theta_0^{IJ} + (2\pi\alpha')^2\tau^2\gamma_0^{IJ}\}A\,,$$

$$\left[p^I, \left[p^J, A\right]_+\right] = \frac{2i}{2\alpha'}\frac{2}{\alpha'}\{(2\pi\alpha')^2\gamma_0^{IJ}\}A\,,$$

$$\left[x^-, \left[p^+, C\right]_+\right] = 2iC \tag{35}$$

for the mass center variables.

4.1. *Lightcone Virasoro algebra*

The Virasoro operators are given by:

$$L_m^\perp = \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{m-p,}^I \alpha_{pI}\right]_+\,,$$

$$\tilde{L}_m^\perp = \frac{1}{4}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left[\tilde{\alpha}_{m-p,}^I \tilde{\alpha}_{pI}\right]_+ \tag{36}$$

and the modified algebra is

$$\left[L_m^\perp, L_n^\perp\right] = (m-n)L_{m+n} + Q(D-2) \times \frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \pounds_{mn,IJ}\,, \tag{37}$$

$$\left[\tilde{L}_m^\perp, \tilde{L}_n^\perp\right] = (m-n)\tilde{L}_{m+n} + Q(D-2) \times \frac{(m^3-m)}{12}\delta_{m+n,0} + \tilde{\pounds}_{mn,IJ}\,, \tag{38}$$

$$\left[L_m^\perp, \tilde{L}_n^\perp\right] = 0\,, \tag{39}$$

where

$$\pounds_{mn,IJ} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta_{m-p}^{IJ} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma_{m-p}^{IJ}\right\}[\alpha_{pI}, \alpha_{m+n-pJ}]_+\,,$$

$$\tilde{\pounds}_{mn,IJ} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{i}{4}\frac{(p-m)^2}{\alpha'}\theta_{p-m}^{IJ} + \frac{i}{4}\frac{(2\pi\alpha')^2}{\alpha'}\gamma_{p-m}^{IJ}\right\}[\tilde{\alpha}_{pI}, \tilde{\alpha}_{m+n-pJ}]_+\,, \tag{40}$$

are the new anomaly terms for the two sectors.

4.2. *Fock space redefinition*

We proceed to the redefinition of the Fock space for each moving mode which is given in the general form of the paraquantum state space of the closed strings:

$$\frac{1}{h!}\left\langle\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{D-1}(\alpha_{-m}^{I})^{\lambda_{m,I}}\right]\right\rangle_{+}\frac{1}{\tilde{h}!}\left\langle\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{D-1}(\tilde{\alpha}_{-n}^{J})^{\tilde{\lambda}_{n,J}}\right]\right\rangle_{+}|p^{+},\mathbf{p}^{T}\rangle$$
$$\rightarrow\frac{1}{h!}\left\langle\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{I=2}^{D-1}\{(U^{-1}\alpha_{-m})^{I}\}^{\lambda_{m,I}}\right]\right\rangle_{+}$$
$$\times\frac{1}{\tilde{h}!}\left\langle\left[\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{J=2}^{D-1}\{(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-n})^{J}\}^{\tilde{\lambda}_{n,J}}\right]\right\rangle_{+}|p^{+},\mathbf{p}^{T}\rangle\,, \tag{41}$$

with

$$h=\sum_{m,I}\lambda_{m,I}\,,\quad \tilde{h}=\sum_{n,J}\tilde{\lambda}_{n,J}\,.$$

U and $\tilde{U}$ are the unitary matrices that diagonalize the noncommutativity matrices induced, respectively from the right and the left oscillator modes.

4.3. *The spectrum*

First, we note that the additional Virasoro condition on the closed string states are still valid, indeed, one can verify that there is no effect of the noncommutativity on the Heisenberg analog equation

$$[P,X^{I}(\tau,\sigma)]=i\frac{\partial X^{I}(\tau,\sigma)}{\partial\sigma}\,, \tag{42}$$

where

$$P=L_0^{\perp}-\tilde{L}_0^{\perp}=N^{\perp}-\tilde{N}^{\perp}\,, \tag{43}$$

is the worldsheet momentum P, which generates constant translations along the string, so that, only the states $|\lambda,\tilde{\lambda}\rangle$ satisfying the condition

$$P_0|\lambda,\tilde{\lambda}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\chi\exp\{-iP\chi\}|\lambda,\tilde{\lambda}\rangle=\delta_{N^{\perp}-\tilde{N}^{\perp},0}|\lambda,\tilde{\lambda}\rangle=|\lambda,\tilde{\lambda}\rangle\,, \tag{44}$$

belong to the closed string states space. Now, the question is how can the state validity condition affect the noncommutativity parameters θ and γ. The massless states restoration condition and its implication on the higher level states will show this explicitly.

Table 3. Closed parabosonic string mass spectrum before modification.

	Eigenstates	M^2 eigenvalues
0	$\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	-4
1	$(U^{-1}\alpha_{-1})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$-\frac{1}{(\alpha')^2}\left\{\zeta_J^{(-1)} + \zeta_K^{(1)}\right\}$
2	$(U^{-1}\alpha_{-2})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-2})^K\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)} + \zeta_K^{(2)}\right)\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-2})^J\frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L\right]_+\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)} + \zeta_K^{(1)} + \zeta_L^{(1)}\right)\right\}$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-1})^J, (U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+ \\ \frac{1}{2}[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M]_+\end{array}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{4 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-1)} + \zeta_K^{(-1)} + \zeta_L^{(1)} + \zeta_M^{(1)}\right)\right\}$
3	$(U^{-1}\alpha_{-3})^J(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-3})^K\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)} + \zeta_K^{(3)}\right)\right\}$
	$(U^{-1}\alpha_{-3})^J\frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-2})^K, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L\right]_+\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)} + \zeta_K^{(2)} + \zeta_L^{(1)}\right)\right\}$
	$\left\{\begin{array}{c}(U^{-1}\alpha_{-3})^J \\ \frac{1}{3!}\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-3)} + \zeta_K^{(1)} + \zeta_L^{(1)} + \zeta_M^{(1)}\right)\right\}$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}[(U^{-1}\alpha_{-2})^J, (U^{-1}\alpha_{-1})^K]_+ \\ \frac{1}{3!}\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^N\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-2)} + \zeta_K^{(-1)} + \zeta_L^{(1)} + \zeta_M^{(1)} + \zeta_N^{(1)}\right)\right\}$
	$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{3!}\langle(U^{-1}\alpha_{-1})^J, (U^{-1}\alpha_{-1})^K, (U^{-1}\alpha_{-1})^L\rangle_+ \\ \frac{1}{3!}\langle(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^M(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^N(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^P\rangle_+\end{array}\right\}\vert p^+, \mathbf{p}^T\rangle$	$\frac{1}{\alpha'}\left\{8 - \frac{1}{\alpha'}\left(\zeta_J^{(-1)} + \zeta_K^{(-1)} + \zeta_L^{(-1)} + \zeta_M^{(1)} + \zeta_N^{(1)} + \zeta_P^{(1)}\right)\right\}$

4.3.1. *Mass operator*

It is expressed in terms of both left and right modes in this way:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{I=2}^{D-1} \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\alpha_{-p,}^I \alpha_{pI} \right]_+ + \frac{1}{2} \left[\tilde{\alpha}_{-p,}^I \tilde{\alpha}_{pI} \right]_+ \right\}. \tag{45}$$

A detailed description of the spectrum (before modification) for the first level states could be found in Table 3, where all the states in the ordinary case are represented. The validity condition will be applied when we restore the graviton state, which will induce the spectrum reduction.

4.3.2. *Restoring the graviton and the spectrum reduction*

Let us consider the usual graviton state given by the following eigenvalue equation:

$$\begin{aligned} M^2 &\left\{ \begin{matrix} (U^{-1}\alpha_{-1})^J \\ (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K \end{matrix} \right\} |p^+ \mathbf{p}^T\rangle \\ &= -\frac{1}{(\alpha')^2} \left\{ \mu_J^{(-1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_J^{(-1)} + \mu_K^{(1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_K^{(1)} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \begin{matrix} (U^{-1}\alpha_{-1})^J \\ (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K \end{matrix} \right\} |p^+, \mathbf{p}^T\rangle \,. \end{aligned} \tag{46}$$

To restore the massless state, one has to first impose the match level condition:

$$\tilde{L}_0^{\perp} = L_0^{\perp}\,, \tag{47}$$

which gives the validity condition for the state

$$\zeta_J^{(-1)} = \zeta_K^{(1)} \tag{48}$$

and the mass of this level becomes

$$-\frac{1}{\alpha'}\frac{2}{\alpha'} \left\{ \mu_J^{(-1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_J^{(-1)} \right\} (U^{-1}\alpha_{-1})^J (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K |p^+, \mathbf{p}^T\rangle \tag{49}$$

$$= -\frac{1}{\alpha'}\frac{2}{\alpha'} \left\{ \mu_K^{(1)} + (2\pi\alpha')^2 \nu_K^{(1)} \right\} (U^{-1}\alpha_{-1})^J (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K |p^+, \mathbf{p}^T\rangle\,, \tag{50}$$

so, to restore the symmetry group $SO(D-2) \times SO(D-2)$ of the graviton massless state, we need to impose the condition (17)

$$\zeta_J^{(-1)} = \zeta_K^{(1)} = 0\,. \tag{51}$$

Now, one can see how the higher levels will be affected with the previous condition, let us take the next state as an example

$$\left\{ \begin{matrix} (U^{-1}\alpha_{-2})^J \\ \frac{1}{2}\left[(\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^K, (\tilde{U}^{-1}\tilde{\alpha}_{-1})^L \right]_+ \end{matrix} \right\} |p^+, \mathbf{p}^T\rangle\,, \tag{52}$$

expressed in terms of the right modes, the mass is:

$$\frac{2}{\alpha'}\left\{2 - \frac{1}{\alpha'}\{4\mu_J^{(-2)} + (2\pi\alpha')^2\nu_J^{(-2)}\}\right\}, \tag{53}$$

while, in terms of the left modes, it is given by

$$\frac{2}{\alpha'}\left\{2 - \frac{1}{\alpha'}\left\{\mu_K^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_K^{(1)} + \mu_L^{(1)} + (2\pi\alpha')^2\nu_L^{(1)}\right\}\right\}. \tag{54}$$

Applying the physical condition of the massless state (51), we find indeed that the two results are not equal, so that this state of the second level is not valid, this is the spectrum reduction.

5. Summary

In this work, we investigated a parabosonic string in a noncommutative space–time. Generalized oscillator modes and Virasoro algebras are obtained, while and unlike the B-field approach, the equations of motion, the Virasoro and the mass operators remain unchanged. To diagonalize simultaneously both the two noncommutativity parameter matrices, unitary transformations are applied on the creation oscillators, this requires a redefinition of the Fock space. The mass spectrum is modified and depends on the two noncommutativity parameter matrices eigenvalues, so that, there is no massless vector or tensor states. Three different cases are studied:

- An open parabosonic string, where a new anomaly term of the Virasoro algebra is obtained and the conditions (17) are imposed on the diagonalized noncommutativity parameter matrices to restore the massless photon state, this modifies the degeneracy and the eigenvalues of some specific states of the higher mass levels.
- An open parabosonic string between two parallel Dp–Dq branes, where now, and in addition to the noncommutativity matrices eigenvalues, the mass operator eigenvalues depend on the separation and the orders of the D-branes. More restrictions are then required to construct a tachyon free model with a photon state.
- A closed parabosonic string, where the same conditions (17) of the open string case, are required to restore the massless graviton state except that, here, the additional Virasoro match levels condition (47), does not permit to maintain certain ordinary states in the spectrum. This is what we call the reduction of the spectrum.

Appendix

Here, and as an example, one can see how the oscillator modes trilinear relations are derived from relations (9).

Calculus of the oscillator modes trilinear relations: $\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right]$. First, using relations in (9) we get

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma), \left[(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'), (\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')\right]_+\right] \\
&= (2\pi\alpha')^3 2i\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma'')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\} \\
&\quad + 2i\left\{(ik)(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\frac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + (ik)(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\frac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad + 2i(2\pi\alpha')^2\left\{\gamma^{IJ}(\sigma-\sigma')\frac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') - \eta^{IK}\frac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad - 2i(2\pi\alpha')\left\{\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')\frac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\frac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\frac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad + 2i(2\pi\alpha')^2\left\{\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\frac{d}{d\sigma''}\delta(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad + 2i(2\pi\alpha')\left\{(ik)(-ik)\theta^{IJ}(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \eta^{IK}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma'')\frac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad + 2i(2\pi\alpha')\left\{\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma}\delta(\sigma-\sigma')\frac{d}{d\sigma''}X^K(\tau,\sigma'') + (ik)(-ik)\theta^{IK}(\sigma-\sigma'')\Pi^J(\tau,\sigma')\right\} \\
&\quad + 2i(2\pi\alpha')^2\left\{-\eta^{IJ}\frac{d}{d\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')\Pi^K(\tau,\sigma'') + \gamma^{IK}(\sigma-\sigma'')\frac{d}{d\sigma'}X^J(\tau,\sigma')\right\}.
\end{aligned}
$$

On the other hand, one can write $(\dot{X}^I + \acute{X}^I)$ in terms of oscillator modes, we get:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \left[(\dot{X}^I + \acute{X}^I)(\tau,\sigma), [(\dot{X}^J + \acute{X}^J)(\tau,\sigma'), (\dot{X}^K + \acute{X}^K)(\tau,\sigma'')]_+\right] \\
&= \left(\sqrt{2\alpha'}\right)^3 \sum_{m,n,l=-\infty}^{+\infty} \exp\{-i(m+n+l)\tau\}\exp\{-im\sigma\} \\
&\qquad \times \exp\{-in\sigma'\}\exp\{-il\sigma''\}\left[\alpha_m^I, \left[\alpha_n^J, \alpha_l^K\right]_+\right],
\end{aligned}
$$

we integrate over

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma \exp\{im'\sigma\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma' \exp\{in'\sigma'\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma'' \exp\{il'\sigma''\},
$$

we find:

$$
(\sqrt{2\alpha'})^3 \exp\{-i(m'+n'+l')\tau\}\left[\alpha_{m'}^I, \left[\alpha_{n'}^J, \alpha_{l'}^K\right]_+\right].
$$

Applying the same integral on (I), and using the above Fourier expansion for θ and γ, we get:

$$\begin{aligned}
&4\alpha'\sqrt{2\alpha'}m'\eta^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\alpha^K_{l'}\exp(-il'\tau)\\
&\quad+2i\sqrt{2\alpha'}(n')^2\theta^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\alpha^K_{l'}\exp(-il'\tau)\\
&\quad+2i(2\pi\alpha')^2\sqrt{2\alpha'}\gamma^{IJ}_{n'}\delta_{m'+n',0}\alpha^K_{l'}\exp(-il'\tau)\\
&\quad+4\alpha'\sqrt{2\alpha'}m'\eta^{IK}\delta_{l'+m',0}\alpha^J_{n'}\exp(-in'\tau)\\
&\quad+2i\sqrt{2\alpha'}(l')^2\theta^{IK}_{l'}\delta_{l'+m',0}\alpha^J_{n'}\exp(-in'\tau)\\
&\quad+2i(2\pi\alpha')\sqrt{2\alpha'}\gamma^{IK}_{l'}\delta_{l'+m',0}\alpha^J_{n'}\exp(-in'\tau)\,.
\end{aligned}$$

Finally, from (I) and (II) we find:

$$\begin{aligned}
\left[\alpha^I_m,\left[\alpha^J_n,\alpha^K_l\right]_+\right]&=2\left\{\left(m\eta^{IJ}+i\frac{n^2}{2\alpha'}\theta^{IJ}_n+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{IJ}_n\right)\delta_{m+n,0}\alpha^K_l\right.\\
&\quad\left.+\left(m\eta^{IK}+i\frac{l^2}{2\alpha'}\theta^{IK}_l+i\frac{(2\pi\alpha')^2}{2\alpha'}\gamma^{IK}_l\right)\delta_{m+l,0}\alpha^J_n\right\}.
\end{aligned}$$

References

1. H. S. Green, *Phys. Rev.* **90**, 270 (1953).
2. Y. Ohnukim and S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics* (University of Tokyo Press, 1982).
3. F. Ardalan and F. Mansouri, *Phys. Rev. D* **9**, 3341 (1974).
4. N. Belaloui and H. Bennacer, *Czech. J. Phys.* **53**, 769 (2003).
5. N. Belaloui and H. Bennacer, *Czech. J. Phys.* **54**, 621 (2004).
6. L. Khodja and N. Belaloui, *Braz. J. Phys.* **39**, 652 (2009).
7. H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947).
8. E. Witten, *Nucl. Phys. B* **268**, 253 (1986).
9. S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *Commun. Math. Phys.* **172**, 187 (1995).
10. S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *Phys. Lett. B* **331**, 39 (1994).
11. A. Connes, *Non-Commutative Geometry* (Academic Press, Boston, 1994).
12. X.-J. Wang, Strings in noncommutative spacetime, arXiv:hep-th/0503111v1.
13. R. Banerjee and B. Chakraborty, *Phys. Lett. B* **537**, 340 (2002).
14. C.-S. Chu and P.-M. Ho, *Nucl. Phys. B* **550**, 151 (1999).
15. C.-S. Chu and P.-M. Ho, *Nucl. Phys. B* **568**, 447 (2000).
16. J.-C. Lee, *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 779 (2002).
17. D. Kamani, *Eur. Phys. J. C* **26**, 285 (2002).
18. S. S. S.-Z. Mousavi, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 2068 (2009).
19. B. Zweibach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, New York, 2009), pp. 331–345.

Abstract

A parabosonic string is assumed to propagate in a total noncommutative target phase space. Four models are investigated : open strings, open strings between two parallel Dp branes generalized to the case of parallel Dp Dq branes and closed ones.

This leads to a generalization of the oscillators algebra of the string and the corresponding Virasoro algebra. The mass operator is no more diagonal in the ordinary Fock space, a redefinition of this later will modify the mass spectrum, so that, neither massless vector state nor massless tensor state are present.

The restoration of the photon and the graviton imposes specific forms of the noncommutativity parameters matrices, partially removes the mass degeneracy and gives new additional ones. In particular, for the D-branes, one can have a tachyon free model with a photon state when more strict conditions on these parameters are imposed, while, the match level condition of the closed string model induces the reduction of the spectrum.

Keywords : Parastrings ; Noncommutativity ; Fock Space Redefinition ; Spectrum Reduction.

ملخص

اعتبرنا ان اوتارا شبه بوزونية تنتشر في طور فضاء محدد لاتبادلي كليا.
قمنا بدراسة اربعة نظريات الاوتار المفتوحة، الاوتار المفتوحة بين غشائي Dpمتوازيين، الحالة العامة لغشائيDq Dp والاوتار المغلقة.

تم تعميم جبرالمذبذبات للاوتار وجبر "فيرازورو" بالمقابل. لم تبقى مصفوفة عامل الكتلة قطرية في فضاء "فوك" الطبيعي، و بإعادة تعريفه يعدل طيف الكتلة تلقائيا، فلا وجود لحالات شعاعية ولا حتى لحالات موترات بدون كتلة.

إسترجاع حالات الفوطون و الغرافيتون يفرض اشكالا خاصة على مصفوفات المتغيرات اللاتبادلية التي ترفع جزئيا إنحلال الكتلة وتفتح المجال لانماط جديدة.

إستثنائيا في حالة الغشاء, بإمكاننا الحصول على نموذج خال من حالة الطاكيون مع وجود حالة الفوطون إذا قمنا بفرض شروط خاصة على تلك المتغيرات، في حين ان شرط تناظرالمستويات الخاص بالاوتارالمغلوقة يحدث إختزالا في طيف الكتلة.

الكلمات المفتاحية: الاوتار، اللاتبادلية، إعادة تعريف فضاء فوك، إختزال الطيف.

Résumé

Une corde parabosonique est supposée se propager dans un espace de phase cible totalement noncommutatif. Quatre modèles sont alors développés : la corde ouverte, la corde ouverte entre deux Dp branes parallèles généralisée au cas Dp Dq branes parallèles et enfin la corde fermée.

Ceci conduit à une généralisation des algèbres des oscillateurs de la corde et de Virasoro. L'opérateur de masse n'est plus diagonal dans l'espace de Fock ordinaire, la redéfinition de ce dernier impliquera une modification du spectre de masse de sorte que ni états vectoriels ni états tensoriels sans masses n'y figurent.

La restauration du photon et du graviton impose des formes spécifiques pour les matrices des paramètres de la noncommutativité, lève partiellement la dégénérescence de la masse tout en en créant de nouvelles. En particulier, pour le cas des D-branes, un modèle libre de tachyons incluant l'état du photon est possible si des conditions plus fortes sont appliquées sur ces paramètres, alors que, la condition de Virasoro supplémentaire pour la corde fermée induira la réduction du spectre.

Mots clés : Paracordes ; Noncommutativité ; Redéfinition de l'Espace de Fock ; Réduction du Spectre.