

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERSCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FRERES MENTOURI–CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

THESE

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT

3^{ème} CYCLE (LMD) EN PHYSIQUE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME :

**ETUDE THEORIQUE ET APPLICATIONS EN CALCUL
QUANTIQUE ENTANGLEMENT ET DECOHERENCE**

PRESENTÉE PAR :

MOHAMED FAROUK GHITI

Soutenu le : .../... /2015

Devant le jury

Président:

Mr. Achour Benslama Prof. Université frères Mentouri, Constantine

Rapporteur:

Mr. Nouredine Mebarki Prof. Université frères Mentouri, Constantine

Examineurs:

Mr. Habib Aissaoui Prof. Université frères Mentouri, Constantine

Mr. Mounir Boussahel M.C.A. Université Mohamed Boudiaf, Msila

Remerciement

Je tient tout d'abord à remercier infiniment Mr. Noureddine Mebarki pour avoir accepté de diriger ce travail, Je lui remercie pour sa qualité humaine, pour son aide ainsi que pour ses conseils précieux durant les années que j'ai passées au sein du laboratoire de physique mathématique et subatomique (LPMS).

Je voudrait remercier tout les enseignants du LPMS qui m'ont enseignés durant ma formation. Je tient à remercier aussi tout mes collègues de ce laboratoire.

Je remercie également Mr. Achour Benslama d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, sans oublier les autres membres de jury, Mr. Habib Aissaoui et Mr. Mounir Boussahel.

Je remercie aussi Mr. Habib Aissaoui pour son aide et de m'avoir enseigné certaines astuces en Maple et surtout en LaTeX.

Je tient à remercier infiniment ma famille pour le soutien et je ne sais pas comment dire « merci » à mes parents pour avoir toujours été disponibles durant mes études.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Information et Intrication Quantiques	9
2.1	Introduction	9
2.2	L'intrication Quantique	11
2.3	La mesure de L'intrication	12
2.3.1	La Concurrence	12
2.3.2	L'entropie de Von Neumann	14
3	Intrication des Etats Cohérents Paraquantiques	17
3.1	Introduction	17
3.2	Théorie de la Paraquantification	18
3.2.1	Introduction	18
3.2.2	Formalisme Mathématique	20
3.3	Les Etats Intelligents Généralisés	23
3.4	Les Etats Cohérents	25
3.5	Les Etats Intelligents Paraquantiques	26
3.5.1	Les Etats Intelligents Paraquantiques Pairs	28
3.5.2	Les Etats Intelligents Paraquantiques Impairs	28
3.6	Intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs	30
3.6.1	Etude Numérique de L'intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs	33
3.7	Intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Impairs	36

4	Intrication des Modes Fermioniques-Antifermioniques dans L'espace-temps de Bianchi I Non Commutatif	39
4.1	Introduction	39
4.2	La Géométrie Non Commutative	41
4.2.1	Motivation	41
4.2.2	Formalisme Mathématique	42
4.2.3	L'équation de Dirac Non Commutative	44
4.3	La Création des Paires des Modes Fermioniques-Antifermioniques	45
4.4	Intrication des Modes Fermioniques-Antifermioniques créés Dans L'espace-temps de Bianchi I non commutatif	54
4.5	Discussion des Résultats Numériques	56
5	Conclusion	65
A	Calcul du Produit Scalaire des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs	67
B	Calcul du Produit Scalaire des Etats Cohérents Paraquantiques Impairs	71
C	L'équation de Dirac Non Commutative	75
D	Le Formalisme Mathématique Non commutatif	77
E	Construction de L'équation de Dirac Non Commutative à Partir du Principe de Moindre Action	79
F	Calcul de $\Gamma(x + iy) ^2$	83
	Bibliographie	85

Table des figures

3.1	La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = \pi$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.3, 1.5]$ et $c \in [0, 2]$	34
3.2	La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = 0$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.3, 1.5]$ et $c \in [0, 2]$	35
3.3	La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = 0$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.95, 1.05]$ et $c \in [0, 2]$	35
4.1	La variation de $S_{Q.E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité θ dans la région I	57
4.2	La variation de $S_{Q.E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité θ dans la région II	57
4.3	La variation de $S_{Q.E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité $\theta \in [-0.09, 0.09]$ sous forme des contours	58
4.4	La variation de $S_{Q.E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité $\theta \in [-0.09, 0.09]$ en 3D	58
4.5	La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ dans la région I . . .	59
4.6	La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ dans la région II . . .	59

4.7	La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} et du paramètre de la non commutativité θ sous forme des contours	59
4.8	Le potentiel chimique μ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ	61
4.9	Le potentiel chimique μ en fonction de $S_{Q.E}^{max}$	61
4.10	La densité de création des paires \hat{n} en fonction de $S_{Q.E}^{max}$	62
4.11	$S_{Q.E}^{max}$ en fonction du paramètre θ	62

Chapitre 1

Introduction

L'information quantique est l'intersection de deux disciplines qui sont : la théorie de la mécanique quantique et la théorie classique de l'information. L'information quantique est la théorie de l'utilisation des spécificités de la physique quantique pour le traitement et la transmission de l'information. La question fondamentale posée par cette nouvelle discipline se base sur l'idée : est ce qu'en utilisant des systèmes quantiques pouvons - nous améliorer la communication actuelle et le calcul classique?. La théorie de l'information quantique essaie d'interpréter les concepts de la physique quantique à partir du point de vue de la théorie de l'information. Inversement l'information et la computation sont des concepts intrinsèquement physiques, puisqu'ils se reposent sur des systèmes physiques dans lesquels l'information est stockée et par lesquels cette information est manipulée. L'introduction de la théorie quantique est en train de révolutionner la façon dont nous traitons l'information. L'information quantique est devenue un champ de recherche indépendant et très actif. Les dernières années ont vu un grand nombre des travaux importants décrivant les éléments de base de l'information quantique [1–5]. Contrairement à l'information classique dont l'unité de base est le bit qui peut prendre uniquement une des deux valeurs 0 ou 1, l'unité de base de l'information quantique est le quantum bit ou qubit tout simplement. Le qubit est un objet quantique à deux

dimensions dans l'espace d'Hilbert \mathbb{C}^2 . L'expression "deux dimensions" signifie qu'on peut représenter l'état d'un qubit par une superposition linéaire de deux états quantiques orthogonaux. La notation la plus utilisée pour représenter les deux états d'un qubit est $|0\rangle$ pour l'état de base et $|1\rangle$ représente l'état excité. En utilisant cette notation l'état d'un qubit peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.1)$$

tels que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Il est très intéressant de mentionner que les progrès les plus remarquables dans ce champ sont : le protocole de la téléportation quantique, la cryptographie quantique et le calcul quantique. Leur cadre mathématique a permis les chercheurs d'inventer des nouveaux concepts comme l'ordinateur quantique. Le thème commun entre tous ces aspects de l'information quantique est une propriété quantique connue par l'intrication quantique ou bien l'entanglement quantique (dans le chapitre 2 on va voir l'intrication en détail). Donc l'intrication quantique est au coeur de nombreuses tâches de l'information quantique et pour cette raison, les travaux présentés dans cette thèse se basent sur l'intrication. C'est à dire, l'importance de ce phénomène quantique qui n'a aucun équivalent dans le monde classique nous a inspiré à étudier l'intrication dans différents contextes. L'objectif majeur de la plupart des travaux de recherche publiés dans le champ de l'intrication est de trouver un type ou bien un mode d'intrication des états quantiques bien déterminés qui peut être solide et robuste contre l'interaction avec l'environnement. Celui là revient à trouver un état intriqué qu'on peut l'utiliser afin d'éviter la décohérence.

Dans le chapitre 2, on va parler un petit peu sur l'information quantique, les nouvelles caractéristiques et aussi la puissance de cette nouvelle discipline par rapport à la théorie classique de l'information. On va discuter aussi quelques propriétés d'un aspect quantique qui est largement utilisé dans l'information quantique et considéré comme la pierre angulaire de cette théorie. Dans ce

chapitre on va présenter deux quantités qui ont été utilisées dans cette thèse pour quantifier l'intrication quantique bipartite (intrication de deux systèmes quantiques). Tout d'abord on va commencer par la notion d'un état intriqué et un état non intriqué ou bien séparable et quelques propriétés de ces états. Pour quantifier l'intrication dans un état bipartite donné, le meilleur scénario est d'utiliser la concurrence notée C ($C \in [0, 1]$), telle que $C = 0$ représente un état séparable, et $C = 1$ qui est la valeur maximale de C , représente un état qui a une intrication maximale. Une autre quantité utilisée dans cette thèse est l'entropie de Von Neumann $S(\hat{\rho})$ pour un état pur représenté par sa matrice de densité $\hat{\rho}$. L'entropie de Von Neumann a pour but de quantifier les corrélations quantiques entre les systèmes quantiques. L'entropie de Von Neumann est bornée, telle que sa valeur maximale qui représente un état intriqué d'une façon maximale égale à 1 et la valeur 0 est pour un état séparable.

Dans le chapitre 3 en utilisant le formalisme mathématique de la théorie de la paraquantification caractérisée par un paramètre réel Q , qui est une généralisation de la quantification canonique, de telle sorte, les opérateurs d'annihilations et de créations ne satisfont plus les relations de commutations bilinéaires ordinaires mais plutôt des relations de commutations trinéaires. Les états cohérents jouent un rôle très important dans l'optique quantique. L'état cohérent noté $|\alpha\rangle$ a été défini par Roy J. Glauber comme l'état propre de l'opérateur d'annihilation avec une valeur propre α . Plusieurs définitions ont été proposées pour les états cohérents. Les états cohérents sont un cas particulier des états intelligents, tels que ces derniers minimisent la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger. Donc, notre approche consiste à construire tout d'abord les états intelligents paraquantiques à l'aide d'une équation aux valeurs propres vérifiée par ces états. Après, on déduit facilement les états cohérents à partir des états intelligents (on va les voir en détail dans le chapitre 3). Des conditions nécessaires et suffisantes ont été développées pour que la concurrence C prenne sa valeur maximale $C = 1$ et par conséquent l'intrication bipartite soit maximale. En va utiliser ces conditions afin de voir si un

état qui est déjà intriqué d'une façon maximale restera intriqué d'une façon maximale dans la paraquantification. C'est à dire un état robuste contre la déformation de l'algèbre. Le but de ce travail présenté dans ce chapitre est d'étudier l'intrication des états cohérents paraquantiques et voir l'effet de la déformation de l'algèbre sur l'intrication quantique bipartite, c'est à dire, voir l'influence de la paraquantification sur les états cohérents intriqués à travers la variation de la concurrence C en fonction du paramètre paraquantique " c " et du paramètre " α " qui caractérise l'état cohérent paraquantique. Le comportement de la concurrence C en fonction des paramètres " c " et " α " a été présenté sous forme des graphes.

La majorité des investigations sur le phénomène de l'intrication supposent que notre espace est plat, non relativiste et la géométrie de l'espace n'est plus prise en considération lors de l'étude de l'intrication, sachant qu'un grand nombre des systèmes utilisés dans l'implémentation de l'information quantique impliquent des systèmes relativistes comme les photons. Donc on doit intégrer la relativité dans le champ de l'information quantique ce qui nous donne une nouvelle discipline qui est l'information quantique relativiste. Dans le chapitre 4 on va étudier l'intrication quantique mais dans un autre cadre, le cadre relativiste, et on suppose que la géométrie de l'espace-temps est non commutative caractérisée par un paramètre " θ ". Il est montré que la réponse de l'intrication quantique à la dynamique de l'expansion de l'univers est affectée par le type du champ utilisé, bosonique ou fermionique, aussi bien que la structure géométrique de l'espace-temps. dans notre étude, on va commencer tout d'abord par l'analyse du mécanisme de création des paires de particules-antiparticules dans un espace-temps homogène et anisotrope avec une métrique non commutative bien déterminée. L'équation de Dirac a été obtenue, donc le premier pas vers la détermination de la densité de création des paires \hat{n} consiste à résoudre cette équation. La deuxième étape se base sur l'étude du comportement asymptotique des solutions dans les deux régions $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ qu'on les suppose asymptotiquement plates. En utilisant la notion des champs *in* et

les champs *out* on peut montrer que le champ dans la région *in* correspond à un état intriqué dans la région *out*. Puisque l'état intriqué est pur et bipartite, donc l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ sera le meilleur moyen pour quantifier l'intrication entre les modes fermioniques-antifermioniques. Selon les valeurs et le signe du paramètre θ l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ peut prendre trois expressions différentes. Nos résultats montrent que le comportement de $S_{Q.E}$ dépend fortement du paramètre de la non commutativité θ , des fréquences des modes k_{\perp} et de la structure de l'espace-temps. Nos résultats sont présentés dans ce chapitre sous forme des figures 2D et 3D qui représentent l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ en fonction du paramètre de la non commutativité θ et les fréquences des modes k_{\perp} . Comme nous allons voir dans ce chapitre, la non commutativité joue deux rôles très importants et avec des effets opposés sur l'intrication, une fois joue le rôle de la gravitation ce qui provoque la diminution de l'intrication entre les modes fermions-antifermions, et une fois joue le rôle d'une force répulsive mais juste pour certaines valeurs de θ , qui augmente le taux d'intrication entre ces modes. On termine notre étude sur l'intrication quantique par une conclusion générale qui résume les résultats que nous avons obtenus au cours de cette étude.

Chapitre 2

Information et Intrication Quantiques

2.1 Introduction

La théorie de l'information quantique est l'intersection de deux fameuses théories : la mécanique quantique et la théorie de l'information. L'idée principale de la théorie de l'information quantique se base sur le stockage, le traitement et l'utilisation de l'information dans les systèmes quantiques [1]. La question fondamentale posée par cette théorie est : pouvons - nous utiliser les systèmes quantiques pour améliorer la communication actuelle et le calcul qu'on le considère comme classique ?. Les vingt dernières années ont vu une énorme masse de travail décrivant les éléments de base de cette théorie et comment les systèmes quantiques peuvent perfectionner les différents aspects de l'information [1-5]. Des travaux très intéressants ont été publiés dans ce champ, notons que ceux les plus remarquables qu'il faut mentionner sont : le protocole de la téléportation quantique, la cryptographie quantique et le calcul quantique. Le point commun entre tous ces aspects de l'information quantique est le concept de l'intrication quantique (entanglement quantique). L'intrication a été considérée comme la source principale de la théorie de l'information

quantique et l'un des aspects de base de la théorie quantique. L'intrication quantique a été initialement vue comme une problématique de la mécanique quantique [6] devient aujourd'hui la pierre angulaire de l'information quantique.

On cite deux exemples à travers lesquels on peut voir nettement comment l'intrication peut perfectionner la théorie classique de l'information. Le premier exemple est le protocole de la téléportation quantique [7], le deuxième est l'algorithme de Shor [8]. Le protocole de la téléportation quantique est une méthode d'envoyer ou bien d'échanger efficacement l'information quantique entre deux points distants en utilisant l'intrication quantique. L'algorithme de Shor est un algorithme qui écrit un entier en ses facteurs premiers en exploitant l'intrication. Cet algorithme présente une différence radicale vis à vis le temps nécessaire de trouver le résultat en utilisant un algorithme classique qui fait la même tâche. Donc comprendre profondément la nature de l'intrication quantique est l'une des tâches principales de la théorie de l'information quantique. L'utilisation vaste de l'intrication quantique dans les différents aspects de l'information quantique a inspiré les chercheurs à l'analyser dans différents contextes pour la bien exploiter et bénéficier de son importance. Du côté théorique le champ de l'intrication devenait un champ de recherche très actif. Le développement théorique de l'intrication a été dépassé et actuellement les chercheurs passent à une autre étape qui consiste à l'investigation expérimentale de l'intrication, c'est à dire la réalisation expérimentale. Celle-là, a été effectuée par le groupe de Zeilinger qui a réussi d'échanger l'information quantique sous forme des photons à une distance de 143 km [9] et le groupe de Rempe qui a réussi d'échanger l'information sous forme des atomes à deux niveaux à une distance de 21 m [10]. Le grand succès de ces expériences a motivé les gens de chercher s'il y a une possibilité d'exploiter l'intrication dans la communication par satellites en orbite de la terre [11]. Pour garantir une implémentation efficace de la communication quantique sur une longue distance on a besoin d'une compréhension approfondie des différents effets dû au

mouvement des satellites et le champ gravitationnel de la terre qui peuvent agir sur l'intrication. (pour plus de détails sur la mécanique et information quantiques voir le livre de Nielsen [2] et les deux tomes du livre "principles of quantum computation and information" [5]).

2.2 L'intrication Quantique

L'intrication qui est considérée comme une propriété quantique, est une conséquence du principe de superposition et la structure du produit tensoriel de l'espace d'Hilbert. Elle joue un rôle très important dans le champ de l'information quantique car elle est au coeur de nombreuses tâches de l'information quantique telles que la téléportation quantique et la cryptographie quantique. La théorie de l'intrication a un objectif qui est la quantification de l'intrication. La question principale de la théorie de l'intrication quantique est : pour un état arbitraire donné, comment peut-on déterminer si cet état est intriqué ou non ?. Notre point du départ sera la question : que veut dire un état intriqué et un état non intriqué, mathématiquement et physiquement ?. Dans la théorie quantique l'état d'un système quantique est représenté par un vecteur noté $|\psi\rangle$ dans l'espace d'Hilbert \mathcal{H} à n dimension. Donc un état de deux systèmes A et B est un vecteur dans l'espace $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ à $n \times n'$ dimension noté $|\psi\rangle_{AB}$. Les éléments de l'espace \mathcal{H}_{AB} s'écrivent donc :

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \quad (2.1)$$

Selon la structure de l'espace d'Hilbert on peut donner les définitions suivantes :

- **Définition 1 :** Un état $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ est non intriqué ou bien séparable si l'on peut l'écrire sous la forme

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (2.2)$$

Physiquement, cela signifie que les deux systèmes sont indépendants et les observateurs peuvent faire des manipulations ou des mesures sur l'un des deux systèmes sans influencer le résultat de mesure sur l'autre système.

● **Définition 2** : Si on ne peut pas écrire l'état $|\psi\rangle_{AB}$ sous forme d'un produit tensoriel des états des deux sous-systèmes A et B donc, on dit que notre état est intriqué.

Dans ce cas là, on ne peut pas faire des mesures sur un système indépendamment de l'autre, ce qui signifie que les deux systèmes sont en corrélation même s'ils sont séparés par de grandes distances spatiales, les deux systèmes ne sont pas indépendants et il faut les considérer comme un système unique [12–14].

2.3 La mesure de L'intrication

Dans cette partie on va rappeler les quantités de mesure utilisées dans cette thèse pour calculer l'intrication quantique. La théorie de l'intrication essaie de quantifier le taux de l'intrication inhérent dans les systèmes quantiques à travers plusieurs quantités de mesures. Dans ce chapitre on va voir deux quantités - la concurrence et l'entropie de Von Neumann - car ces dernières sont les deux quantités qu'on a utilisées afin de mesurer l'intrication quantique bipartite dans notre travail de recherche.

2.3.1 La Concurrence

La concurrence est une quantité utilisée pour mesurer l'intrication bipartite. Au début elle est considérée comme une quantité auxiliaire utilisée pour calculer une autre quantité de mesure appelée l'intrication de la formation (entanglement of formation) des systèmes quantiques bipartites [15]. Cependant la concurrence est considérée comme une quantité de mesure indépendante [16].

Supposons que notre état intriqué $|\psi\rangle$ bipartite est défini par :

$$|\psi\rangle = \mu|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + \nu|\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle \quad (2.3)$$

sachant que μ et ν sont des nombres complexes, $|\alpha\rangle$ et $|\gamma\rangle$ sont les états normalisés du premier système, $|\beta\rangle$ et $|\delta\rangle$ sont les états normalisés du deuxième système. Notre travail de recherche se base uniquement sur le cas non orthogonal, c'est à dire les produits $\langle\alpha|\gamma\rangle$ et $\langle\beta|\delta\rangle$ sont non nuls. La renormalisation de l'état (Eq. 2.3) nous donne la formule suivante :

$$|\psi\rangle = a|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + b|\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle \quad (2.4)$$

sachant que $a = \mu/N$, $b = \nu/N$ et

$$N = \sqrt{|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu\nu^*\langle\gamma|\alpha\rangle\langle\delta|\beta\rangle + \mu^*\nu\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\beta|\delta\rangle} \quad (2.5)$$

Les états $|\alpha\rangle$ et $|\gamma\rangle$ sont des états non orthogonaux linéairement indépendants, donc on définit une base orthogonale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ telle que :

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |\alpha\rangle, & |1\rangle &= (\gamma - p_1|\alpha\rangle) / N_1 & \text{pour le système 1} \\ |0\rangle &= |\beta\rangle, & |1\rangle &= (\delta - p_1|\beta\rangle) / N_2 & \text{pour le système 2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où :

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle\alpha|\gamma\rangle, & N_1 &= \sqrt{1 - |p_1|^2} \\ p_2 &= \langle\beta|\delta\rangle, & N_2 &= \sqrt{1 - |p_2|^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'intrication de l'état $|\psi\rangle$ à deux systèmes quantiques (qubit) s'exprime en fonction de la concurrence notée C par la relation suivante [17] :

$$C = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| \quad (2.8)$$

et :

$$|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle \quad (2.9)$$

Notons que le signe " \sim " signifie l'opération spin-flip effectuée sur l'état $|\psi^*\rangle$ sachant que $|\psi^*\rangle$ est le complexe conjugué de $|\psi\rangle$ dans la base standard $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$. σ_y est l'opérateur de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que notre état $|\psi\rangle$ soit intriqué d'une façon maximale, il faut que la concurrence $C = 1$ qui peut s'écrire sous la formule suivante [18] :

$$C = \frac{2|\mu\nu|\sqrt{(1-|p_1|^2)(1-|p_2|^2)}}{|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu\nu^*p_1^*p_2 + \mu^*\nu p_1p_2^*} \quad (2.10)$$

La concurrence varie entre 0 et 1, sachant que $C = 0$ pour un état séparable ou un état non intriqué et $C = 1$ pour un état qui a une intrication maximale.

2.3.2 L'entropie de Von Neumann

L'entropie de Von Neumann ou l'entropie quantique est l'une des plus simples quantités utilisées pour mesurer l'intrication quantique. L'entropie de Von Neumann d'un état quantique représenté par sa matrice de densité $\hat{\rho}$ notée $S(\hat{\rho})$ est donnée par :

$$S(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) \quad (2.11)$$

L'entropie de Von Neumann s'écrit en fonction des valeurs propres de $\hat{\rho}$ sous la forme :

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_j \lambda_j \log_2 \lambda_j \quad (2.12)$$

Où λ_j sont les valeurs propres de $\hat{\rho}$. Notons que l'entropie de von Neumann a une valeur minimale et une valeur maximale, $0 \leq S(\hat{\rho}) \leq 1$, telle que $S(\hat{\rho}) = 0$ pour un état pur ($S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$). L'entropie de Von Neumann atteint la valeur maximale qui égale à 1 pour un état pur bipartite intriqué d'une façon maximale. L'entropie de Von Neumann est utilisée pour mesurer les

corrélations quantiques des états purs bipartites, c'est à dire les états purs qui contiennent uniquement deux systèmes. On considère un espace d'Hilbert bipartite noté $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sachant que $\dim \mathcal{H}_A = n$, $\dim \mathcal{H}_B = m$ et $n \leq m$. Dans ce cas là, on peut former une base orthonormée des espaces d'Hilbert $\{|\mu_i^A\rangle\}_{i=1}^n$ et $\{|\nu_j^B\rangle\}_{j=1}^m$ telle que :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\mu_i^A\rangle |\nu_i^B\rangle \quad (2.13)$$

où α_i sont les coefficients de Schmidt satisfaisant la condition $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$. En utilisant la décomposition de Schmidt [2] on peut trouver les matrices de densités réduites des sous-systèmes A et B qui sont de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 |\mu_i^A\rangle \langle \mu_i^A| \\ \hat{\rho}_B &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 |\nu_i^B\rangle \langle \nu_i^B| \end{aligned} \quad (2.14)$$

Puisque les matrices de densités sont diagonales et ont le même spectre, on peut mesurer le taux d'intrication par le calcul de la mixité des états réduits et pour faire ça, il suffit juste d'utiliser l'un des états réduits $\hat{\rho}_A$ ou $\hat{\rho}_B$. L'entropie est définie pour un état pur bipartite par l'entropie de Von Neumann de l'un des deux systèmes comme suit :

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) \quad (2.15)$$

où $\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}_{AB})$ et $\hat{\rho}_B = Tr_A(\hat{\rho}_{AB})$ sont les matrices de densités réduites des systèmes A et B respectivement. Si $\hat{\rho}$ est un état séparable comme $|\uparrow\uparrow\rangle$ donc $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$ sont des états purs, alors l'entropie de Von Neumann égale à 0. Maintenant, si on a un état qui a une intrication maximale de la forme suivante :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (2.16)$$

dans ce cas $\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ (\mathbf{I} est la matrice identité) l'entropie est donnée par :

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B) = 1 \quad (2.17)$$

(la valeur maximale de l'entropie). On mentionne que les états bipartites dont les matrices de densités réduites sont $\frac{1}{2}\mathbf{I}$ maximisent l'entropie de Von Neumann comme les états de Bell qui sont des états intriqués d'une manière maximale. Dans les chapitres de cette thèse, on va utiliser la concurrence et l'entropie de Von Neumann pour mesurer l'intrication des états cohérents paraquantiques et l'intrication entre les modes fermioniques-antifermioniques respectivement.

Chapitre 3

Intrication des Etats Cohérents

Paraquantiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier l'intrication quantique bipartite des états cohérents dans un cadre généralisé. On va utiliser le formalisme mathématique de la généralisation des relations de commutations ordinaires entre les variables dynamiques aux relations trilineaires qui nous donne une théorie quantique généralisée qu'on va l'appeler la théorie de la paraquantification qui dépend d'un paramètre réel Q [19–27]. Ensuite, on va dériver les états cohérents paraquantiques - qui sont un cas particulier des états intelligents paraquantiques [28] - en utilisant le formalisme paraquantique. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un état soit intriqué d'une façon maximale qui ont été établies dans l'algèbre ordinaire se sont examinées dans le cadre paraquantique. Le but de ce travail se base essentiellement sur l'étude de l'effet de la paraquantification ainsi que l'effet du paramètre de cohérence qui caractérise l'état cohérent sur l'intrication bipartite de ces états et par conséquent voir les nouvelles caractéristiques de l'intrication paraquantique bipartite. Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2 on va faire un rappel sur les

notions de base de la théorie de la paraquantification et quelques propriétés mathématiques. La section 3.3 contient un rappel sur les états intelligents généralisés et leurs propriétés. Dans la section 3.4 on va présenter les états cohérents et ses différentes définitions. Dans la section 3.5 nous présentons les états intelligents paraquantiques pairs et impairs. Ensuite dans la section 3.6 on va calculer l'intrication des états cohérents paraquantiques pairs en utilisant la concurrence en fonction des paramètres α , c et θ . Dans cette section on va présenter une étude numérique de l'intrication paraquantique et les différents effets du paramètre de la paraquantification c en plus du paramètre de la cohérence α sur la concurrence C où on voit la variation de C en fonction de ces paramètres. A la fin dans la section 3.7 on étudie l'intrication des états cohérents paraquantiques impairs.

3.2 Théorie de la Paraquantification

3.2.1 Introduction

L'une des tâches principales de la mécanique quantique est de fournir une description consistante de ce qu'on appelle la dualité onde - particule exprimée par des relations qui relient l'aspect ondulatoire et corpusculaire de la matière, $h\nu = E_1 - E_2$, qui est une conséquence directe de l'équation du mouvement d'Heisenberg :

$$i\hbar \frac{dA}{dt} = [A, H] \quad (3.1)$$

où A est une observable dépendante du temps t . Le passage de la théorie classique vers la théorie quantique (la quantification) a été réalisé en deux étapes commençant par la première étape qu'on l'appelle la première quantification qui consiste à redéfinir les variables canoniques - les variables de coordonnées q_i et leurs conjugués canoniques p_j ($i, j = \overline{1, 3}$) - à degré de liberté finis qui sont définis initialement en mécanique classique comme des opérateurs satisfaisants

les relations de commutations canoniques suivantes :

$$[q_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \quad (3.2a)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (3.2b)$$

de telle façon les équations du mouvement d'Heisenberg (Eqs. 3.1) pour les variables q_i, p_j avec les relations de commutations précédentes (Eqs. 3.2), on va obtenir des équations consistantes avec celles d'Euler-Lagrange classiques. Donc la consistence entre les équations d'Heisenberg et les équations d'Euler-Lagrange impose quelques restrictions sur les relations de commutations entre les variables q_i, p_j . La deuxième étape consiste à faire la même chose que la première quantification c'est à dire on va définir les relations de commutations mais cette fois-ci entre les opérateurs du champs. C'est ce qu'on appelle la deuxième quantification ou bien la quantification des champs. La quantification des champs veut dire que les quantités des champs sont exprimées comme des opérateurs qui vérifient certaines relations selon le type des particules résultantes de ces champs. Les relations de commutations bilinéaires vérifiées par les opérateurs du champ bosonique qui vérifie la statistique de Bose-Einstein et les relations d'anti-commutations bilinéaires vérifiées par les opérateurs du champ fermionique qui vérifie la statistique de Fermi-Dirac. En 1953 H. S. Green [19] proposa du point de vue de la théorie quantique des champs une méthode de généralisation de la quantification connue aujourd'hui sous le nom - la paraquantification - qui a engendré un type généralisé de statistique qu'on l'appelle la parastatistique qui contient les parabosons et les parafermions.

3.2.2 Formalisme Mathématique

Pour avoir une idée claire sur la paraquantification, nous considérons un Hamiltonien H d'un oscillateur harmonique qui est donné par :

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (3.3)$$

L'équation d'Heisenberg (Eq. 3.1) pour les deux opérateurs q et p nous donne le système d'équations suivant :

$$i \hbar \frac{dq}{dt} = [q, H] = i p \quad (3.4a)$$

$$i \hbar \frac{dp}{dt} = [p, H] = -i q \quad (3.4b)$$

D'après ce système, la question qui se pose est : quel genre de relations de commutations que doivent satisfaire les opérateurs q et p pour que le système d'équations (Eqs. 3.4) soit consistant avec les équations d'Euler-Lagrange classiques?. En fait, c'est la question posée par Wigner [24]. Selon lui la relation de commutation canonique $[q, p] = i$ ($\hbar = 1$) est une solution, mais n'est plus l'unique. En effet, au lieu de travailler avec les opérateurs q et p il est plus commode d'utiliser les opérateurs non-hermitiens définis par :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + i p) \quad (3.5a)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - i p) \quad (3.5b)$$

Selon ces deux expressions des opérateurs, l'Hamiltonien et le système d'équations (Eqs. 3.4) prennent la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2} (a^+ a + a a^+) \equiv N \quad (3.6a)$$

$$[a, N] = a \quad (3.6b)$$

$$[a^+, N] = -a^+ \quad (3.6c)$$

Il est clair d'après l'expression de N que ses valeurs propres sont positives, ce qui indique qu'on peut écrire le spectre de N sous la forme :

$$N_n = N_0 + n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{avec } N_0 \geq 0 \quad (3.7)$$

L'équation (Eq. 3.7) avec la relation (Eq. 3.6a) nous donnent la relation :

$$N_0 + n = \frac{1}{2} (|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n-1,n}|^2) \quad (3.8)$$

On peut résoudre l'équation (Eq. 3.8) par récurrence commençant par la valeur $n = 0$ pour obtenir la relation :

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^+ = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.9)$$

De cette relation il est clair que le commutateur $[a, a^+]$ en général est un opérateur donné par :

$$\langle n|[a, a^+]|n' \rangle = \delta_{nn'} \times \begin{cases} 2N_0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2(1 - N_0) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (3.10)$$

tel que $[a, a^+] = 1$ est un cas spécial, on l'obtient à partir de l'équation (Eq. 3.10) en mettant $N_0 = \frac{1}{2}$. Notons que pour $N_0 = 1$, il est clair que les opérateurs vérifient une relation trilinéaire au lieu de relation bilinéaire habituelle qui prend la forme :

$$a a a^+ - a^+ a a = 2a \quad (3.11)$$

De la même façon, l'Hamiltonien d'un oscillateur fermionique est donné par :

$$H = \frac{1}{2} (b^+ b - b b^+) \equiv N \quad (3.12)$$

sachant que pour $N_0 = 1$ les opérateurs vérifient des relations trilinéaires :

$$bb^+ + b^+bb = 2b, \quad bb^+b = 2b, \quad b^3 = 0 \quad (3.13)$$

sachant que les relations d'anti-commutations bilinéaires

$$\{b, b^+\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0 \quad (3.14)$$

sont des cas particuliers en mettant $N_0 = \frac{1}{2}$. Maintenant pour généraliser supposons qu'on a un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques, dans le cadre paraquantique, les opérateurs vérifient les relations de base de la paraquantification ou bien directement les relations de paracommutations qui sont données par :

$$[a_k, [a_l^+, a_m]_{\mp}] = 2\delta_{kl} a_m \quad (3.15a)$$

$$[a_k, [a_l^+, a_m^+]_{\mp}] = 2\delta_{kl} a_m^+ \mp 2\delta_{km} a_l^+ \quad (3.15b)$$

$$[a_k, [a_l, a_m]_{\mp}] = 0 \quad (3.15c)$$

Sachant que le signe en haut est associé aux parafermions et le signe en bas associé aux parabosons. Dans le cas de la quantification canonique, l'opérateur de l'impulsion p prend la forme $p = \frac{-i d}{dq}$, mais celui-là n'est plus valable dans le cas de la paraquantification, telle que l'expression de cet opérateur paraquantique est donnée par la relation suivante :

$$p = -i \frac{d}{dq} + i \frac{c}{q} R \quad (3.16)$$

avec :

$$c = \frac{Q-1}{2} \quad (3.17)$$

où R est un opérateur unitaire vérifie la relation :

$$R\psi(q) = \psi(-q) \quad (3.18)$$

tel que

$$R = R^{-1} = R^\dagger \quad (3.19)$$

La théorie de la paraquantification n'impose aucune restriction sur la constante c sauf qu'elle est réelle qui affecte la structure de la théorie de la paraquantification. il est très clair d'après la relation (Eq. 3.16) que $c = 0$ correspond à la quantification canonique $[q, p] = i$.

3.3 Les Etats Intelligents Généralisés

Il est connu qu'à partir de deux opérateurs qui ne commutent pas - le commutateur entre eux est différent de zéro - on peut définir une relation d'incertitude pour ses observables et l'ensemble des états qui minimisent ces relations ou bien plus précisément ils satisfont l'égalité dans l'inégalité d'incertitude sont appelés les états intelligents [29–31]. Les états intelligents généralisés sont des états minimums, veut dire ils minimisent la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger [32–35] qui prend la forme générale suivante pour deux opérateurs hermitiens \hat{A} et \hat{B} :

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\langle \hat{G} \rangle^2 + \langle \hat{F} \rangle^2 \right) \quad (3.20)$$

Sachant que la relation (Eq. 3.20) est une généralisation de la fameuse relation d'incertitude d'Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

($\hbar = 1$) pour les opérateurs \hat{X} et \hat{P} où $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. Les états qui minimisent la relation (Eq. 3.21) sont appelés les états intelligents. L'opérateur \hat{F} est donné

par :

$$\hat{F} = \{\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle\} \quad (3.22)$$

Noton que $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$. Les deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} satisfont la relation de commutation suivante :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{G} \quad (3.23)$$

L'état intelligent qui minimise la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger vérifie l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\left(\hat{A} + i\lambda\hat{B} \right) |\psi\rangle = \alpha\sqrt{2}|\psi\rangle \quad (3.24)$$

(où λ et α sont des paramètres complexes). Comme une conséquence, on obtient les relations suivantes :

$$(\Delta A)^2 = |\lambda|\Delta \quad (3.25a)$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{\Delta}{|\lambda|} \quad (3.25b)$$

tel que :

$$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \hat{G} \rangle^2 + \langle \hat{F} \rangle^2} \quad (3.26)$$

et :

$$\langle \hat{G} \rangle = 2\Re(\lambda)(\Delta B)^2 \quad (3.27a)$$

$$\langle \hat{F} \rangle = 2\Im(\lambda)(\Delta B)^2 \quad (3.27b)$$

tels que \Re et \Im désignent la partie réelle et la partie imaginaire respectivement. D'après les deux relations (Eqs. 3.25) il est clair que si $|\lambda| = 1$ on trouve :

$$(\Delta A)^2 = (\Delta B)^2 \quad (3.28)$$

On appelle l'état qui vérifie l'équation (Eq. 3.24) avec la condition $|\lambda| = 1$ un état cohérent généralisé, et si $|\lambda| \neq 1$ l'état est appelé état pressé (squeezed) généralisé. Dans ce chapitre on va baser notre étude sur les états cohérents, donc il est nécessaire de faire un petit rappel sur l'aspect général de ces états.

3.4 Les Etats Cohérents

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique ont été considérés comme l'un des outils les plus utiles de la théorie quantique introduits pour la première fois par Schrödinger en 1926. D'autres développements des états cohérents ont permis de mettre en place certaines définitions spécifiques qui sont applicables aux différents systèmes physiques. Les états cohérents sont largement utilisés dans différents champs de la théorie quantique comme l'optique quantique, la physique des états solides ainsi que l'astrophysique et la cosmologie [36–39]. Les états cohérents ont été examinés dans le cadre de l'algèbre non linéaire ce qui donne les états cohérents non linéaires [40, 41]. Une construction des états cohérents pour un système quantique arbitraire a été proposée par Gaseau et Klauder. Il existe trois définitions des états cohérents :

● **Définition 1 :** Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont les états propres de l'opérateur d'annihilation a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.29)$$

avec $[a, a^\dagger] = 1$. $\alpha = |\alpha| \exp(i\Phi)$ est un paramètre complexe, $\bar{\alpha}$ son conjugué. L'état cohérent normalisé résultant est donné par la relation suivante :

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.30)$$

$|n\rangle$ est un élément de l'espace de Fock et $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

● **Définition 2 :** A l'aide d'un opérateur unitaire qui est donné par :

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) \quad (3.31)$$

les états cohérents paramétrés par α sont donnés par l'action de l'opérateur $D(\alpha)$ sur le vide $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a) |0\rangle \quad (3.32)$$

$D(\alpha)$ est appelé l'opérateur de déplacement.

● **Définition 3** : La troisième définition se base sur la relation d'incertitude d'Heisenberg (Eq. 3.21) tels que, ils minimisent cette relation qui devient :

$$2\Delta x \Delta p = 1 \quad (3.33)$$

L'ensemble des états cohérents satisfont les propriétés suivantes :

(i). l'ensemble des états cohérents $\{|\alpha\rangle\}$ forme une base complète dans l'espace d'Hilbert :

$$\frac{1}{\pi} \int d\Re(\alpha) d\Im(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| = I \quad (3.34)$$

(ii). l'ensemble des états cohérents $\{|\alpha\rangle\}$ est temporellement stable :

$$\exp(-iHt) |\alpha\rangle = |\alpha \exp(-i\omega t)\rangle \quad (3.35)$$

Profitant des similitudes entre les opérateurs de création et d'annihilation d'un oscillateur harmonique et les opérateurs J_+ et J_- du moment angulaire, les états cohérents ont été obtenus d'une manière analogue (angular momentum coherent state) [32]. L'extension d'états cohérents aux systèmes autres que l'oscillateur harmonique a attiré beaucoup d'intérêt au cours des dernières années [42–47].

3.5 Les Etats Intelligents Paraquantiques

On va construire les états intelligents paraquantiques qui vérifient l'équation Eq. (3.24) tels qu'on va remplacer les opérateurs \hat{A} et \hat{B} par les opérateurs \hat{X}_p et

\hat{P}_p paraquantiques (l'indice p veut dire paraquantique) ce qui donne l'équation suivante :

$$\left(\hat{X}_p + i\lambda \hat{P}_p \right) |\psi\rangle = \alpha\sqrt{2}|\psi\rangle \quad (3.36)$$

donc on obtient :

$$x|\psi\rangle + i\lambda \left(\frac{-i\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + i\frac{c}{x}R \right) |\psi\rangle = \alpha\sqrt{2}|\psi\rangle \quad (3.37)$$

ce qui nous donne juste après quelques étapes de calcul, une équation différentielle du premier ordre de la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{x}R - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi(x) = 0 \quad (3.38)$$

Selon l'opérateur unitaire R et l'équation Eq. (3.18) et puisque la fonction $\psi(x)$ peut être pair ou impair, donc l'effet de l'opérateur R sur la fonction $\psi(x)$ dépend de la nature de cette fonction comme suit :

$$R\psi^+(x) = \psi^+(-x) = \psi^+(x) \quad (3.39a)$$

$$R\psi^-(x) = \psi^-(-x) = -\psi^-(x) \quad (3.39b)$$

tels que les signes ” + ” et ” - ” impliquent une fonction pair et impair respectivement. Après cela, l'équation (Eq. 3.38) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\psi^\pm(x)}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{x}R - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi^\pm(x) = 0 \quad (3.40)$$

Il est clair qu'on a deux cas différents et deux états intelligents paraquantiques différents selon l'effet de R sur la fonction d'onde $\psi(x)$. La paraquantification a permis la généralisation d'une autre classe des états intelligents qui se divise en deux parties, des états intelligents paraquantiques pairs et des états intelligents paraquantiques impairs.

3.5.1 Les Etats Intelligents Paraquantiques Pairs

L'état intelligent paraquantique pair vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\psi^+(x)}{dx} + \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{x}R - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi^+(x) = 0 \quad (3.41)$$

puisque la fonction $\psi^+(x)$ est paire et on prend en considération l'effet de R (Eq. 3.39a), l'équation (Eq. 3.41) devient :

$$\frac{d\psi^+(x)}{dx} + \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{x} - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi^+(x) = 0 \quad (3.42)$$

l'état intelligent paraquantique pair qui vérifie cette équation différentielle a la forme suivante :

$$\psi^+(x) = A_1 x^c \exp \left(\frac{-x^2}{2\lambda} + \frac{\alpha\sqrt{2}x}{\lambda} \right) \quad (3.43)$$

(A_1 est une constante d'intégration). En utilisant la relation $x = e^{\ln(x)}$, l'équation (Eq. 3.43) devient :

$$\psi^+(x) = A_1 \exp \left(\frac{-x^2}{2\lambda} + \frac{\alpha\sqrt{2}x}{\lambda} + c \ln(x) \right) \quad (3.44)$$

3.5.2 Les Etats Intelligents Paraquantiques Impairs

De la même façon, l'équation différentielle vérifiée par les états intelligents paraquantiques impairs s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d\psi^-(x)}{dx} + \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{c}{x}R - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi^-(x) = 0 \quad (3.45)$$

l'effet de l'opérateur R sur la fonction $\psi^-(x)$ donne l'équation suivante :

$$\frac{d\psi^-(x)}{dx} + \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{c}{x} - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\lambda} \right) \psi^-(x) = 0 \quad (3.46)$$

Donc, l'état intelligent paraquantique impair est donné par :

$$\psi^-(x) = A_2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\lambda} + \frac{\alpha\sqrt{2x}}{\lambda} - c \ln(x)\right) \quad (3.47)$$

(A_2 est une constante d'intégration). Une fois on a obtenu les états intelligents paraquantiques, il suffit juste de remplacer le paramètre λ par 1 pour obtenir les états cohérents paraquantiques qui prennent la forme suivante quand $\psi(x)$ est paire :

$$\psi^+(x) = A_1 \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2x} + c \ln(x)\right) \quad (3.48)$$

et quand $\psi(x)$ est impaire, l'expression des états cohérents paraquantiques est la suivante :

$$\psi^-(x) = A_2 \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2x} - c \ln(x)\right) \quad (3.49)$$

Puisque le but de ce travail est de calculer l'intrication des états cohérents paraquantiques entre deux systèmes, c'est à dire intrication bipartite on choisit la concurrence C qui prend des valeurs réelles de $C = 0$ pour un état non intriqué (état séparable) à $C = 1$ pour un état qui a une intrication maximale. L'expression de la concurrence est donnée par :

$$C = \frac{2|\mu\nu|\sqrt{(1 - |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2)(1 - |\langle\beta|\delta\rangle|^2)}}{|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu\nu^*\langle\gamma|\alpha\rangle\langle\delta|\beta\rangle + \mu^*\nu\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\beta|\delta\rangle} \quad (3.50)$$

(Pour plus de détails sur la concurrence voir (Sec. 2.3.1) dans le chapitre précédent). Donc le premier pas vers le calcul de cette intrication paraquantique est le calcul du produit scalaire (overlap) entre deux états cohérents paraquantiques par exemple $|\alpha\rangle$ et $|\gamma\rangle$ qui est noté $\langle\alpha|\gamma\rangle$ dans la relation (Eq. 3.50). Ce produit scalaire est calculé en commençant par :

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\gamma\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi_\alpha|x\rangle\langle x|\psi_\gamma\rangle dx \quad (3.51)$$

tel que :

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \psi_\alpha \rangle^* \langle x | \psi_\gamma \rangle dx \quad (3.52)$$

Notons ici que le produit $\langle \alpha | \gamma \rangle$ dans l'équation (Eq. 3.50) et le même que $\langle \psi_\alpha | \psi_\gamma \rangle$ c'est juste une notation. $|\psi_\alpha\rangle$ veut dire un état cohérent qui dépend du paramètre de cohérence α , qu'on peut l'écrire tout simplement $|\alpha\rangle$. Ce produit a deux expressions différentes selon la fonction d'onde $\psi_\alpha(x)$ qui peut être paire ou impaire. Donc on va commencer tout d'abord de calculer l'intrication dans le cas où la fonction $\psi_\alpha(x)$ est paire notée $\psi_\alpha^+(x)$.

3.6 Intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs

Comme on a déjà mentionné, le produit $\langle \psi_\alpha^+ | \psi_\gamma^+ \rangle$ on peut l'écrire directement $\langle \alpha | \gamma \rangle$. En remplaçant les expressions des états cohérents paraquantiques pairs dans la relation (Eq. 3.52) on trouve :

$$\langle \psi_\alpha^+ | \psi_\gamma^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\bar{\alpha}\sqrt{2} + c \ln(x)\right) \times \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\gamma\sqrt{2} + c \ln(x)\right) dx \quad (3.53)$$

tel que :

$$\langle \psi_\alpha^+ | \psi_\gamma^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} x^{+2c} \exp\left(-x^2 + x(\gamma + \bar{\alpha})\sqrt{2}\right) dx \quad (3.54)$$

(la constante d'intégration A_1 pour les deux états $|\psi_\alpha^+\rangle$ et $|\psi_\gamma^+\rangle$ devient $A_{\bar{\alpha}}$ et A_γ respectivement). Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\langle \psi_\alpha^+ | \psi_\gamma^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_\gamma \exp\left(\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{+2c} \times \exp\left(-\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right)^2\right) dx \quad (3.55)$$

La technique utilisée pour calculer cet intégrale et simplifier cette expression consiste à faire un changement de variable en posant :

$$t = x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha}) \quad (3.56)$$

Après l'utilisation du binôme de Newton défini par :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (3.57)$$

où :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.58)$$

l'expression du produit scalaire de deux états cohérents paraquantiques pairs a la forme finale suivante :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle &= A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left(\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2 \right) \sum_{k=0}^{Q-1} \frac{(Q-1)!}{(Q-k-1)!} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha}) \right)^{Q-k-1} (1 + (-1)^k) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1} \left(\frac{k}{2}\right)!} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Cette dernière expression s'est simplifiée en utilisant les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$ (Pour plus de détails sur les étapes du calcul de ce produit scalaire voir l'annexe A). Une fois on a eu la relation de ce produit, on l'utilise dans l'expression (Eq. 3.50) pour calculer la concurrence des états cohérents paraquantiques pairs et donc, pour mesurer l'intrication bipartite. Rappelons pour qu'un état soit intriqué d'une manière maximale, il faut que la concurrence $C = 1$. Cette contrainte a donné naissance aux conditions nécessaires et suffisantes pour l'intrication bipartite maximale [48]. rappelons que notre état bipartite s'écrit :

$$|\Phi\rangle = \mu|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + \nu|\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle \quad (3.60)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que notre état $|\psi\rangle$ soit intriqué d'une façon maximale ($C = 1$) sont [48] :

$$(i) \quad \mu = \nu \exp(i\theta) \quad \text{et} \quad \langle \alpha | \gamma \rangle = -\langle \beta | \delta \rangle^* \exp(i\theta) \quad (\theta \text{ est un paramètre réel})$$

pour le cas non orthogonal

$$(ii) \quad |\mu| = |\nu| \quad \text{pour le cas orthogonal} \quad \langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \beta | \delta \rangle = 0$$

Notre étude se base uniquement sur le premier cas où le produit scalaire des états cohérents n'est pas nul. Donc on va prendre seulement les conditions du premier cas. Ces conditions sont vérifiées même dans le cadre paraquantique, veut dire que si on prend notre état $|\Phi\rangle$ avec le produit scalaire de deux états cohérents qu'on a développé et en prenant en considération les conditions ci-dessus pour qu'un état soit intriqué d'une façon maximale, on va trouver exactement $C = 1$. Les états suivants sont des états possèdent une intrication maximale ($C = 1$) dans la théorie quantique :

$$|\alpha\rangle \otimes |-\alpha\rangle - |i\alpha\rangle \otimes |i\alpha\rangle \quad (3.61a)$$

$$|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle - |i\alpha\rangle \otimes |-i\alpha\rangle \quad (3.61b)$$

A partir de ces états on construit leurs analogues dans le régime paraquantique qu'on les note :

$$|\alpha\rangle_p \otimes |-\alpha\rangle_p - |i\alpha\rangle_p \otimes |i\alpha\rangle_p \quad (3.62a)$$

$$|\alpha\rangle_p \otimes |\alpha\rangle_p - |i\alpha\rangle_p \otimes |-i\alpha\rangle_p \quad (3.62b)$$

(l'indice p indique état paraquantique). Le calcul de la concurrence de ces états nous donne $C = 1$ donc ces états sont intriqués d'une façon maximale. On peut dire que si un état est intriqué d'une manière maximale dans le cas de la quantification canonique, cet état restera intriqué d'une manière maximale quand on généralise cette quantification. Cela montre que la paraquantification n'a pas d'influence sur les états qui sont déjà intriqués d'une façon maximale. Les états cohérents qui ont une intrication maximale sont des états robustes

contre la généralisation de la quantification canonique.

3.6.1 Etude Numérique de L'intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs

Dans cette partie nous allons aborder l'étude numérique et les différentes caractéristiques de l'intrication des états cohérents paraquantiques par rapport au paramètre de la cohérence α en plus du paramètre de la paraquantification c . Pour cela, nous nous intéressons à un état donné par l'expression suivante :

$$|\Phi\rangle = |\alpha\rangle_p \otimes |-\alpha\rangle_p + e^{i\theta} |-\alpha\rangle_p \otimes | - 3\alpha\rangle_p \quad (3.63)$$

La concurrence de cet état est :

$$C = \frac{1 - |{}_p\langle -\alpha | - 3\alpha\rangle_p|}{1 + \cos(\theta) |{}_p\langle -\alpha | - 3\alpha\rangle_p|} \quad (3.64)$$

L'état (Eq. 3.63) est intriqué d'une façon maximale si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (1) Si $\theta = \pi$, donc l'expression de la concurrence devient

$$C = \frac{1 - |{}_p\langle -\alpha | - 3\alpha\rangle_p|}{1 - |{}_p\langle -\alpha | - 3\alpha\rangle_p|} = 1 \quad (3.65)$$

on dit donc que l'état (Eq. 3.63) est intriqué d'une manière maximale.

- (2) Si le produit ${}_p\langle -\alpha | - 3\alpha\rangle_p = 0$, cela nous donne $C = 1$ dans le cas où les états sont orthogonaux.

Le calcul de la concurrence C en fonction du paramètre de la cohérence α et du paramètre de la paraquantification c de l'état (Eq. 3.63) nous permet de tracer des courbes à travers lesquelles on peut voir la variation de la concurrence C . La première figure (Fig. 3.1) représente la concurrence C en fonction de α et c où $\alpha \in [0.3, 1.5]$ et $c \in [0, 2]$. D'après cette courbe on voit que si un état est intriqué d'une façon maximale dans l'algèbre non déformée ($c = 0$) pour

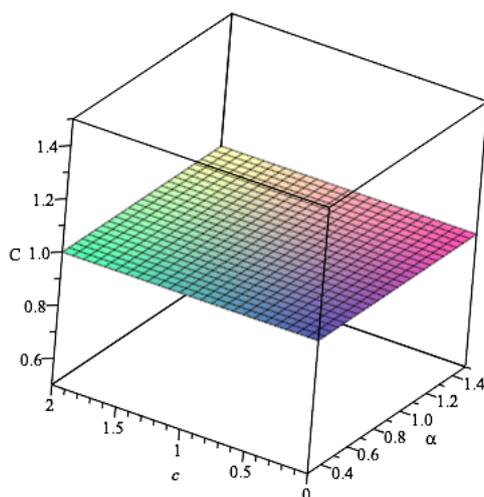


FIGURE 3.1 – La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = \pi$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.3, 1.5]$ et $c \in [0, 2]$

$\alpha \gg 1$, cet état reste intriqué d'une manière maximale pour n'importe quelle valeur de c . Donc les états intriqués d'une manière maximale sont des états robustes par rapport au déformation de l'algèbre (par rapport à la généralisation de la quantification canonique). Ce résultat est déjà confirmé analytiquement où notre calcul de C dans le régime paraquantique nous donne exactement $C = 1$ indépendamment des valeurs du paramètre de la paraquantification c . (voir Fig. 3.1).

La figure (Fig. 3.2) montre la variation de C en fonction de α et de c . D'après cette figure on voit que la concurrence C augmente et varie avec α et bien sûr pour des différents valeurs du paramètre c jusqu'à la valeur $C = 1$ qui désigne que l'intrication est maximale. La concurrence C varie et atteint la valeur maximale $C = 1$ pour une valeur bien précise de α ($\alpha \sim 1.4$). Après cette valeur, la concurrence C ne change plus quelque soit la valeur de α (la concurrence est saturée). Dans l'intervalle de $\alpha \in [0.3, 1.4]$, la concurrence est très sensible aux variations du paramètre c où on voit une relation inverse entre la concurrence et le paramètre c pour $\alpha \in [0.3, 1.4]$. La concurrence diminue avec la croissance de c pour une valeur fixe de α . Pour $c = 0$ et $\alpha = 1.2$ la concurrence $C = 1$, par contre pour $c = 2$ pour la même valeur de α , la concurrence

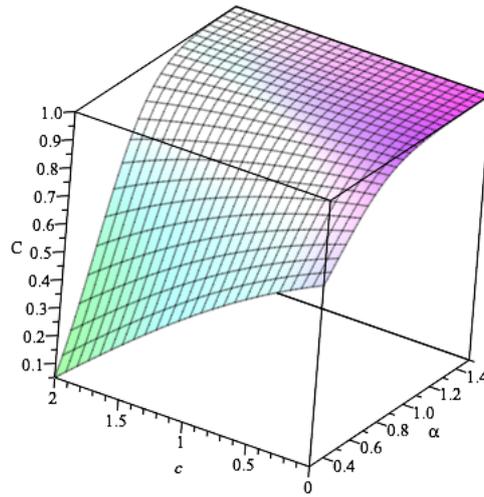


FIGURE 3.2 – La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = 0$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.3, 1.5]$ et $c \in [0, 2]$

$C = 0.94$. Mais après la valeur de $\alpha \sim 1.4$ la paraquantification n'a plus d'effet considérable sur l'intrication maximale des états cohérents paraquantiques et la concurrence est fixée à 1 ($C = 1$). Dans l'intervalle de $\alpha \in [0.3, 1.3]$, la paraquantification diminue le taux d'intrication bipartite des états cohérents paraquantiques.

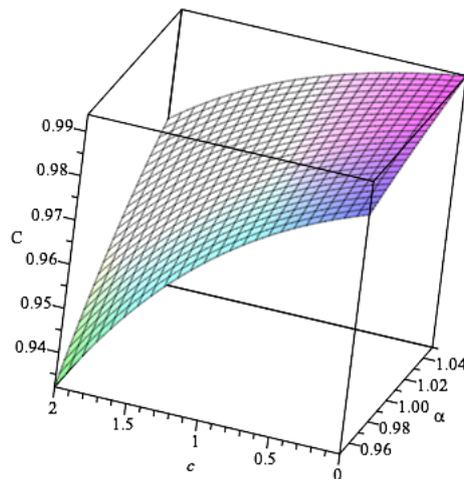


FIGURE 3.3 – La concurrence C de l'état (Eq. 3.63) pour $\theta = 0$ en fonction de α et c avec $\alpha \in [0.95, 1.05]$ et $c \in [0, 2]$

La figure (Fig. 3.3) montre le changement de la concurrence C en fonction de α et de c pour une phase $\theta = 0$ et dans un intervalle de α très petit, telle que la concurrence C varie entre 0.93 et 0.99. On constate nettement les petites variations de la concurrence C en fonction de α et $c \in [0, 2]$. On constate aussi une relation inverse entre la concurrence et le paramètre de la paraquantification c . Quand c augmente, la concurrence se réduit pour une valeur fixe de α . Pour $\alpha = 1$ quand $c = 1$ la concurrence $C \sim 0.96$, par contre pour la même valeur de α , $c = 2$ correspond à une valeur de $C \sim 0.93$. On dit donc que la paraquantification diminue le taux de l'intrication paraquantique. Donc pour qu'on obtient une intrication maximale pour $\theta = 0$ il faut que le paramètre de la paraquantification soit très petit. La déformation de l'algèbre provoque une diminution de l'intrication paraquantique. On dit donc que le comportement de la paraquantification peut s'interpréter comme une décohérence qui provoque la diminution de l'information et par conséquent la diminution de l'intrication des états cohérents paraquantiques.

3.7 Intrication des Etats Cohérents Paraquantiques Impairs

Nous rappelons l'expression des états cohérents paraquantiques impairs (Eq. 3.49) :

$$\psi_{\alpha}^{-}(x) = C_2 \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2}x - c\ln(x)\right) \quad (3.66)$$

qui est équivalente à :

$$\psi_{\alpha}^{-}(x) = A_{\alpha}x^{-c} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2}x\right) \quad (3.67)$$

(on remplace C_2 la constante d'intégration par A_{α} puisque on a un état cohérent qui dépend du paramètre de cohérence α). Le produit scalaire de deux états cohérents paraquantiques impairs $\langle\psi_{\alpha}^{-}|\psi_{\gamma}^{-}\rangle$ qu'on le note directement $\langle\alpha|\gamma\rangle$ est

donné par :

$$\langle \alpha | \gamma \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2c} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\bar{\alpha}\sqrt{2}\right) \times \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\gamma\sqrt{2}\right) dx \quad (3.68)$$

Le résultat final du calcul de ce produit des états cohérents est :

$$\langle \alpha | \gamma \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q+k-2)!}{(Q-2)!} (-1)^k \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right]^{-Q+1-k} \left[1 + (-1)^k\right] \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1} \left(\frac{k}{2}\right)!} \quad (3.69)$$

(Pour le détail de ce calcul et les différentes étapes voir l'annexe B). A partir de cette expression on peut directement calculer la concurrence C , et on peut déterminer si les conditions de l'intrication maximale dans le cas où les états sont non orthogonaux sont vérifiées ou non. Le calcul de la concurrence dans ce cas nous donne $C = 1$ donc on dit que les conditions sont vérifiées et notre état paraquantique impair bipartite est intriqué d'une façon maximale. Ce résultat renforce nos précédentes conclusions que pour un état qui est déjà intriqué d'une manière maximale, la paraquantification n'a pas d'effet sur la concurrence qui reste égale à 1 et par conséquent sur l'intrication paraquantique.

Chapitre 4

Intrication des Modes

Fermioniques-Antifermioniques

dans L'espace-temps de Bianchi

I Non Commutatif

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, en utilisant l'entropie de Von Neumann notée $S_{Q.E}$ on va étudier et analyser l'effet de la structure et de la déformation de l'espace-temps caractérisée par le paramètre θ ainsi que la fréquence des modes k_{\perp} sur l'intrication quantique créée entre deux modes fermions - antifermions dans l'espace-temps de Bianchi I non commutatif. La géométrie non commutative de l'espace-temps joue un rôle très important dans des domaines variés, par exemple en physique des particules et en cosmologie [49–51]. L'intrication quantique a été largement étudiée dans un contexte non relativiste notons que la plupart des investigations sur ce phénomène quantique qui n'a aucun équivalent classique, considèrent que notre espace est plat [12–16, 52, 53]. Cependant, l'étude de l'intrication où la géométrie de l'espace-temps est prise en considération lors de la

déscription des états des systèmes est très recommandée car notre monde est relativiste. Le champ de l'information quantique relativiste ainsi que l'intrication relativiste a un intérêt croissant et beaucoup de travaux de recherches ont été publiés dans ce domaine [54–59]. L'intrication dans un régime où les effets relativistes sont non négligeables présente des nouvelles caractéristiques qu'on peut pas les atteindre avec l'intrication non relativiste. Réfs. [54, 55] montrent que l'intrication quantique des particules fermioniques et bosoniques dans un model bien précis de Freedman-Robertson-Walker (F. R. W) a une dépendance spéciale par rapport à la masse m et les fréquences des modes k . En fait, comme il a été souligné en [54], l'intrication a été affectée par non seulement la structure de l'espace-temps en cours d'étude mais aussi par le choix de la théorie quantique des champs employés. C'est à dire la réponse de l'intrication des fermions au dynamique de l'expansion de l'espace-temps est différente de celle des bosons. Les études et les travaux de recherches sur l'intrication relativiste peuvent nous aider à l'utiliser comme un outil afin de savoir et déterminer les propriétés de l'espace-temps [55]. Dans notre travail de recherche comme on va voir dans ce chapitre, quelques quantités thermodynamiques ont été bien déterminées en utilisant l'intrication générée entre les modes fermioniques et antifermioniques qui est très sensible à l'anisotropie et à la déformation de l'espace-temps. Ce qui est important est du savoir le taux d'information concernant l'anisotropie, la déformation et les propriétés thermodynamiques qu'on peut attiré de l'intrication créée par l'expansion de l'espace-temps de Bianchi I. La contribution de la non commutativité à travers le paramètre θ dans ce travail est : la limite supérieure de l'intrication des fermions exprimée par l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ ($S_{Q.E} = 1$) dans l'intervalle physique de k_{\perp} n'est plus $\log_2 N$ (sachant que N représente la dimension de l'espace d'Hilbert qui égale à 2 dans notre cas) correspond à une valeur négative de k_{\perp} , mais elle dépend fortement des valeurs du paramètre θ . La valeur maximale de $S_{Q.E} = 1$ correspond à $k_{\perp} = 0$. Ce chapitre est structuré comme suit : dans la section 4.2 on va rappeler quelques notions

de base de la géométrie non commutative puis on va présenter l'équation de Dirac non commutative. Dans la section 4.3 on va analyser le mécanisme de création des paires fermions-antifermions en utilisant l'approche quasi classique et exprimer la densité de création des paires en fonction des coefficients de Bogoliubov. Dans la section 4.4 on va obtenir l'expression de l'entropie de Von Neumann en fonction des coefficients de Bogoliubov et en fonction de la densité de création \hat{n} . La section 4.5 présente une étude complète sur l'intrication entre fermions-antifermions en plus d'une analyse détaillée des différents effets de la structure et de la déformation de l'espace-temps de Bianchi I non commutatif sur ce phénomène.

4.2 La Géométrie Non Commutative

4.2.1 Motivation

La géométrie non commutative est devenue un sujet de recherche très actif aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques. En mathématiques on trouve souvent le mot -non commutative- telles qu'il y a plusieurs structures qui ne commutent pas, comme par exemple les groupes non abéliens qui sont connus souvent par les groupes non commutatifs. En physique et plus précisément en mécanique quantique, l'algèbre non commutative est l'un des meilleurs exemples. Pour deux opérateurs hermitiens on peut définir une relation d'incertitude entre leurs observables. La position x et l'impulsion p_x selon la même direction ne commutent pas ce qui implique la fameuse relation d'incertitude d'Heisenberg. La géométrie non commutative est une généralisation de ces exemples où on considère la possibilité d'avoir deux dimensions spatiales, comme x et y par exemple, ne commutent pas ($x \cdot y \neq y \cdot x$). Cela implique une relation d'incertitude entre ces deux directions à l'échelle quantique. L'idée que les coordonnées spatiales peuvent être ne pas commutées est très ancienne où le premier travail publié dans cette direction peut être s'adressé à Sny-

der [60]. L'une des motivations d'introduire l'espace-temps non commutatif vient des divergences de la théorie quantique des champs (Les effets ultra-violet). Malgré qu'il existe des programmes de renormalisation, mais l'idée de la non commutativité reste valide ce qui provoque les chercheurs à reformuler la théorie quantique des champs dans un espace commutatif pour obtenir la théorie quantique non commutative des champs. Seiberg et Witten ont supposé qu'on peut avoir un passage ou bien un mapping de la théorie non commutative des champs vers la théorie commutative des champs. Ce mapping est connu par le mapping de Seiberg-Witten (Seiberg-Witten map) [61]. La non commutativité de l'espace-temps est intrinsèquement reliée avec la gravitation. Plusieurs investigations ont été dirigées vers la reformulation de la théorie de la gravitation dans un espace-temps non commutatif [62–68].

4.2.2 Formalisme Mathématique

Dans le formalisme mathématique on va juste rappeler d'une façon générale les notions de base de la géométrie non commutative. D'une façon analogue à la quantification de l'espace de phase classique, l'espace-temps non commutatif est défini en remplaçant les coordonnées de cet espace x^μ par des opérateurs hermitiens \hat{x}^μ satisfont la relation de commutation suivante :

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i \theta^{\mu\nu} \quad (4.1)$$

avec $\theta^{\mu\nu}$ sont des éléments réels d'une matrice antisymétrique $d \times d$ de dimensions (*longueur*)² qui contrôlent la non commutativité de l'espace-temps de dimension d . Cette relation de commutation implique une relation d'incertitude entre deux directions spatiales à l'échelle quantique comme une conséquence directe de la géométrie non commutative ce qui nous permet d'écrire :

$$(\Delta x^\mu) (\Delta x^\nu) \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}| \quad (4.2)$$

Cette relation d'incertitude nous oblige d'abandonner la notion des objets localisés par des points mais plutôt par des surfaces. Il est clair qu'à partir de la relation (Eq. 4.1) la non commutativité mène à la violation de la symétrie du Lorentz. On représente les fonctions non commutatives comme des fonctions des coordonnées commutatives et la multiplication ordinaire par le produit étoile de Moyal (Moyal $*$ –product) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x}) &\longmapsto f(x) \\ \hat{f}(\hat{x}) \cdot \hat{g}(\hat{x}) &\longmapsto f(x) * g(x)\end{aligned}\tag{4.3}$$

sachant que le produit $*$ de Moyal est défini par [64] :

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x)\tag{4.4}$$

qui prend la forme suivante au delà de $O(\theta^2)$:

$$\begin{aligned}f(x) * g(x) &= f(x) g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) \\ &\quad - \left(\frac{1}{4}\right) \theta^{\mu k} \theta^{\nu \lambda} \partial_\mu \partial_\nu f(x) \partial_k \partial_\lambda g(x) + \dots\end{aligned}\tag{4.5}$$

Les expressions mathématiques du mapping de Seiberg-Witten des \hat{e}^μ , $\hat{\omega}_\mu$ ainsi que le paramètre de jauge $\hat{\Lambda}$ que nous allons présenter dans cette partie de notre thèse, sont celles de la référence [62] qui est basée sur l'approche de A.H. Chamseddine [63]. Il est très important de noter qu'il n'y a pas un principe physique ou bien un formalisme mathématique qui peut mettre des contraintes sur l'ordre de magnitude du paramètre de la non commutativité θ . L'échelle de l'énergie reliée peut être à l'ordre de TeV [69–76] ou bien à l'échelle de Planck comme le cas de la gravitation quantique [77–80].

4.2.3 L'équation de Dirac Non Commutative

On peut montrer que l'équation de Dirac pour une particule spinorielle $\hat{\psi}$ sans masse dans un espace-temps non commutatif est donnée par : (voir l'annexe C) :

$$\left[\gamma^f \left(i \partial_f + \hat{A}_f \right) + \gamma^f \gamma^5 \hat{B}_f \right] * \hat{\psi} = 0 \quad (4.6)$$

où

$$\hat{A}^f = \Im \left(\hat{e}_f^\mu \sum_{a=1}^4 \hat{\omega}_\mu^{aa} \right) + \Re \left[\hat{e}_d^\mu (\hat{\omega}_\mu^{fd} - \hat{\omega}_\mu^{df}) \right] \quad (4.7)$$

$$\hat{B}^f = \Im \left[(\hat{e}^{\mu d} \hat{\omega}_\mu^{ab}) + \frac{1}{4} \theta^{\rho\sigma} \theta^{\alpha\beta} (\partial_\rho \partial_\alpha \hat{e}^{\mu d}) (\partial_\sigma \partial_\beta \hat{\omega}_\mu^{ab}) \right] \varepsilon_{fdab} \quad (4.8)$$

(sachant que \Im et \Re dénotent la partie imaginaire et la partie réelle respectivement). Ici \hat{e}_a^μ et $\hat{\omega}_\mu^{fd}$ sont les vierbeins et les connexions de spin respectivement [62]. Leurs expressions sont données en fonction de leurs quantités commutatives correspondantes (voir l'annexe D). θ est le paramètre de la non commutativité. Les matrices de Dirac non commutatives γ^μ et les dérivés partielles ∂_μ dans un espace-temps courbé sont liées à celle de l'espace plat de Minkowski à travers les relations suivantes :

$$\gamma^\mu = \hat{e}_f^\mu \gamma^f \quad (4.9)$$

et

$$\partial_\mu = \hat{e}_\mu^f \partial_f \quad (4.10)$$

(l'indice Grec et l'indice Latin sont utilisés pour l'espace courbé et l'espace plat respectivement). Les vierbeins vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$\frac{1}{2} (\hat{e}_\mu^a * \hat{e}_b^{+\mu} + \hat{e}_b^\mu * \hat{e}_\mu^{+a}) = \delta_b^a \quad (4.11)$$

Puisque $\theta_{\mu\nu}$ représente une matrice antisymétrique, donc pour simplifier les calculs, on la choisit de la forme suivante :

$$\theta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.3 La Création des Paires des Modes Fermioniques-Antifermioniques

Au cours de ces dernières années, un effort considérable a été fourni pour comprendre les processus quantiques en présence des champs extérieurs. La théorie quantique des champs en présence des champs extérieurs en général est une théorie associée à l'instabilité du vide. Cette instabilité mène aux caractéristiques très intéressantes comme la création des paires particules-antiparticules. Le processus de création des paires a été largement étudié dans différents contextes, supposons que la géométrie est commutative [81–87], en plus de la création des paires où la géométrie est supposée non commutative [49, 50]. La majorité des travaux publiés dans le champ de création des paires consiste à supposer des espace-temps isotropes et homogènes ainsi que l'existence d'un champ électrique extérieur, comme les modèles de De Sitter et Robertson-Walker. L'introduction d'un champ électrique extérieur peut améliorer la création des paires particules-antiparticules. Différentes méthodes ont été utilisées afin de déterminer la densité de création. Notre approche se base sur les coefficients de Bogoliubov pour déterminer la densité de création des paires que nous allons l'utiliser après pour calculer l'entropie de Von Neumann. La méthode que nous allons présenter ici consiste à utiliser le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Dirac (puisque notre travail de recherche consiste à déterminer l'intrication entre les paires fermioniques-

antifermioniques créées) et l'utilisation de la notion des champs "in" et les champs "out". Puisque la métrique présente une singularité à $t = 0$, donc il est impossible d'utiliser l'approche adiabatique [88] pour définir les états des particules. Pour faire cela, on doit suivre l'approche quasi classique utilisée par Villalba (voir réf. [85]) pour identifier les fréquences des modes positives et négatives et voir le comportement asymptotique des solutions à $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$. Après, on résout l'équation de Dirac non commutative et on compare les solutions obtenues avec la limite quasi classique. L'espace-temps de Bianchi I est caractérisé par une métrique de la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 (dx^2 + dy^2) + dz^2 \quad (4.13)$$

avec la convention que la signature de l'espace-temps est $(-, +, +, +)$. Puisque nous avons dit que notre travail se base sur des particules spinorielles sans masse, donc il est préférable d'utiliser la représentation chirale des matrices de Dirac γ^f qui ont la forme :

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma_{i2 \times 2} \\ -\sigma_{i2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \gamma_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

où ($i = \overline{1, 3}$). σ_i sont les matrices de Pauli 2×2 . En utilisant le paquet du calcul tensoriel du logiciel Maple 16, les composantes non nulles des vierbeins et des connexions de spin au delà du deuxième ordre en θ sont :

$$\begin{aligned} \hat{e}_0^{\bar{0}} &= \hat{e}_3^{\bar{3}} = 1 \\ \hat{e}_1^{\bar{1}} &= \hat{e}_2^{\bar{2}} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{25\theta^2}{128} \right) \\ \hat{\omega}_2^{13} &= -\hat{\omega}_3^{12} = \frac{1}{2} \hat{\omega}_2^{31} = -\frac{1}{2} \hat{\omega}_3^{21} = -i \frac{\theta}{4} \\ \hat{\omega}_2^{12} &= \hat{\omega}_3^{13} = 1 + \frac{5\theta^2}{128} \\ \hat{\omega}_2^{21} &= \hat{\omega}_3^{31} = -1 + \frac{7\theta^2}{64} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pour éviter toute ambiguïté, le symbole "tilde" présente l'indice de l'espace courbé. Le calcul des composantes des champs \hat{A}^f et \hat{B}^f nous permet de réécrire l'équation (Eq. 4.6) sous la forme :

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^0 \hat{A}_0 + \gamma^3 \gamma^5 \hat{B}_3] \hat{\psi} = 0 \quad (4.16)$$

sachant que, \hat{A}_0 et \hat{B}_3 sont uniquement les composantes non nulles. Puisque l'indice $\mu = \overline{0,3}$, l'équation (Eq. 4.6) peut s'écrire :

$$[i(\gamma^{\bar{0}} \partial_t + \gamma^{\bar{1}} \partial_x + \gamma^{\bar{2}} \partial_y + \gamma^{\bar{3}} \partial_z) + \gamma^0 \hat{A}_0 + \gamma^3 \gamma^5 \hat{B}_3] \hat{\psi} = 0 \quad (4.17)$$

On peut facilement trouver les expressions des matrices de Dirac γ^μ à travers la relation (Eq. 4.9). En remplaçant les expressions des composantes \hat{A}_0 et \hat{B}_3 des champs \hat{A}^f et \hat{B}^f avec les expressions des matrices γ^μ en fonction des matrices γ^f , l'équation (Eq. 4.17) devient :

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{t} \left(1 - \frac{25\theta^2}{128} \right) \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{t} \left(1 - \frac{25\theta^2}{128} \right) \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2}{t} \left(2 - \frac{59\theta^2}{128} \right) \gamma^0 + \gamma^3 \gamma^5 \frac{\theta}{2t} \right] \hat{\psi} = 0 \quad (4.18)$$

En remplaçant par les matrices de Dirac ordinaires on trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} + \frac{i}{t} \left(1 - \frac{25\theta^2}{128} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\sigma_1)_{2 \times 2} \\ -(\sigma_1)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \frac{i}{t} \times \\ & \left(1 - \frac{25\theta^2}{128} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\sigma_2)_{2 \times 2} \\ -(\sigma_2)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} + i \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\sigma_3)_{2 \times 2} \\ -(\sigma_3)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \\ & - \frac{2}{t} \left(2 - \frac{59\theta^2}{128} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \hat{\psi} + \frac{\theta}{2t} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -(\sigma_3)_{2 \times 2} \\ -(\sigma_3)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \hat{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Afin de trouver les solutions de l'équation de Dirac (Eq. 4.19) dans l'espace-temps de Bianchi I non commutatif, on suppose que le spineur $\hat{\psi}$ possède les 04-composantes suivantes :

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

telles que :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= f_1(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \chi_2 &= f_2(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \chi_3 &= f_3(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ \chi_4 &= f_4(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

On remplace ces dernières expressions dans l'équation (Eq. 4.19) et par un calcul simple et directe qui consiste à appliquer les dérivés partielles sur les composantes de $\hat{\psi}$, on va obtenir un système de 04-équations différentielles du deuxième ordre. La composante $f_j(t)$ ($j = \overline{1,4}$) de $\hat{\psi}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 f_j(t)}{\partial t^2} + \frac{A_j}{t} \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} + \left(\frac{C_j}{t^2} + \frac{D_j}{t} - k_z^2 \right) f_j(t) = 0 \quad (4.22)$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} A_j &= 1 - 2i\Omega_2^j \\ C_j &= \Omega_1^{j^2} k_\perp^2 + \Omega_3^{j^2} - \Omega_2^{j^2} \\ D_j &= -i k_z^j - 2k_z^j \Omega_3^j \end{aligned} \quad (4.23)$$

tels que

$$\begin{aligned}
k_{\perp}^2 &= k_x^2 + k_y^2 \\
k_z^j &= (-1)^{j+1} k_z \\
\Omega_1^j &= \Omega_1 \\
\Omega_2^j &= \Omega_2 \\
\Omega_3^j &= \Omega_3 (\delta^{j1} - \delta^{j2} - \delta^{j3} + \delta^{j4})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

et

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= -1 + \frac{25\theta^2}{128} \\
\Omega_2 &= -2 \left(2 - \frac{59\theta^2}{128} \right) \\
\Omega_3 &= \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Maintenant, on suppose que notre fonction $f_j(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_j(t) = t^{\alpha_j} e^{\beta_j t} h_j(t) \tag{4.26}$$

Avec cette nouvelle forme de $f_j(t)$, l'équation différentielle (Eq. 4.22) devient :

$$\begin{aligned}
t^{\alpha_j} \frac{\partial^2 h_j(t)}{\partial t^2} + \left(2t^{\alpha_j} \beta_j + 2\alpha_j t^{\alpha_j-1} + \frac{A t^{\alpha_j}}{t} \right) \frac{\partial h(t)}{\partial t} + \left(t^{\alpha_j} \beta_j^2 + 2\alpha_j t^{\alpha_j-1} + \right. \\
\left. \frac{A t^{\alpha_j}}{t} \beta_j + \alpha_j (\alpha_j - 1) t^{\alpha_j-2} + \frac{A \alpha_j}{t} t^{\alpha_j-1} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t} - k_z^2 \right) h(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.27}$$

avec :

$$\alpha_j = \frac{1 - A_j \pm \sqrt{(A_j - 1)^2 - 4C_j}}{2} \tag{4.28a}$$

$$\beta_j = -\frac{1}{2} \tag{4.28b}$$

L'équation différentielle (Eq. 4.27) avec les expressions de α_j et β_j données par le système d'équation (Eqs. 4.28) peut s'écrire comme une équation différentielle de Kummer de la forme générale suivante [89] :

$$t \frac{d^2 h_j(t)}{dt^2} + (b_j - t) \frac{d h_j(t)}{dt} - a_j h_j(t) = 0 \quad (4.29)$$

sachant que les coefficients a_j et b_j sont donnés par :

$$a_j = -\frac{A_j}{2} - \alpha_j - D_j \quad (4.30a)$$

$$b_j = -2\alpha_j - A_j \quad (4.30b)$$

avec la contrainte :

$$|k_z| = \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

Donc résoudre l'équation de Dirac (Eq. 4.22) est équivalent à résoudre l'équation différentielle (Eq. 4.29). L'équation (Eq. 4.29) a deux solutions appelées les fonctions de Kummer notées par $M(a_j, b_j, z)$ et $U(a_j, b_j, z)$ telles que :

$$M(a_j, b_j, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_j)_n}{(b_j)_n n!} z^n \quad (4.32a)$$

$$U(a_j, b_j, z) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left(\frac{M(a_j, b_j, z)}{\Gamma(1 + a_j - b_j) \Gamma(b_j)} - z^{1-b_j} \times \frac{M(1 + a_j - b_j, 2 - b_j, z)}{\Gamma(a_j) \Gamma(2 - b_j)} \right) \quad (4.32b)$$

où $(a)_n$ est défini par :

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) \quad (4.33)$$

avec la condition initiale $(a)_0 = 1$. La solution de l'équation (Eq. 4.29) qu'on l'appelle la solution complète, est la combinaison linéaire des deux solutions

$M(a_j, b_j, z)$ et $U(a_j, b_j, z)$:

$$f_j(t) = C_1^j t^{\alpha_j} e^{\frac{t}{2}} M(a_j, b_j, t) + C_2^j t^{\alpha_j} e^{\frac{t}{2}} U(a_j, b_j, t) \quad (4.34)$$

(C_1^j et C_2^j sont des constantes). Pour déterminer la densité de création des paires fermions-antifermions, notre approche se base sur le comportement asymptotique des solutions de l'équation (Eq. 4.34) à $t \rightarrow 0$ et à $t \rightarrow \infty$. Pour cela, on va utiliser les fonctions de Whittaker pour étudier le comportement asymptotique des solutions précédentes. Les fonctions de Kummer peuvent s'exprimer en fonction de celles de Whittaker par les relations suivantes :

$$M\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu, z\right) = e^{\frac{z}{2}} z^{-(\frac{1}{2} + \mu)} M_{\lambda, \mu}(z) \quad (4.35a)$$

$$U\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu, z\right) = e^{\frac{z}{2}} z^{-(\frac{1}{2} + \mu)} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (4.35b)$$

avec $M_{\lambda, \mu}(z)$ et $W_{\lambda, \mu}(z)$ sont les fonctions de Whittaker. Notons que la fonction de Whittaker $M_{\lambda, \mu}(z)$ est reliée à $W_{\lambda, \mu}(z)$ par la relation suivante :

$$M_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} e^{-i\pi\lambda} W_{-\lambda, \mu}(-z) + \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \lambda)} \times e^{-i\pi(\lambda - \mu - \frac{1}{2})} W_{\lambda, \mu}(z) \quad (4.36)$$

telle que

$$(W_{\lambda, \mu}(z))^* = W_{-\lambda, \mu}(-z) \quad (4.37)$$

et

$$(M_{\lambda, \mu}(z))^* = (-1)^{\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(z) \quad (4.38)$$

Maintenant, on va identifier le comportement asymptotique et les modes positifs et négatifs à $t \rightarrow 0$ (le champ "in") et à $t \rightarrow \infty$ (le champ "out"). Pour faire cela, on va baser uniquement sur la fonction $f_{(j=1)} \equiv f$ (les résultats peuvent être facilement étendus aux autres fonctions f_j , ($j = \overline{2, 4}$). Le comportement asymptotique de la fonction $f(t)$ à $t \rightarrow 0$ avec les modes positifs et

négatifs est donné par :

$$f_{in}^+ \sim M_{\lambda,\mu}(t) \sim e^{-\frac{t}{2}} t^{\mu+\frac{1}{2}} \quad (4.39a)$$

$$f_{in}^- \sim (M_{\lambda,\mu}(t))^* \sim (-1)^{\mu+\frac{1}{2}} M_{\lambda,-\mu}(t) \quad (4.39b)$$

et de la même façon le comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ est :

$$f_{out}^+ \sim W_{\lambda,\mu}(t) \sim e^{-\frac{t}{2}} t^\lambda \quad (4.40a)$$

$$f_{out}^- \sim (W_{\lambda,\mu}(t))^* \sim W_{-\lambda,\mu}(-t) \quad (4.40b)$$

tels que les paramètres μ et λ pour les deux cas sont donnés par :

$$\mu = \frac{1}{2}(b_1 - 1) \quad (4.41a)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \quad (4.41b)$$

On peut exprimer les modes "in" sous forme d'une combinaison linéaire des modes positifs et négatifs "out" à l'aide des transformations de Bogoliubov qui prennent la forme suivante :

$$f_{in}^\pm(k_\perp, \theta, t) = \alpha_{k_\perp, \theta}^\pm f_{out}^\pm(k_\perp, \theta, t) + \beta_{k_\perp, \theta}^\pm (f_{out}^\mp(k_\perp, \theta, t))^* \quad (4.42)$$

où $\alpha_{k_\perp, \theta}^\pm$ and $\beta_{k_\perp, \theta}^\pm$ sont les coefficients de Bogoliubov. On définit les solutions spinorielles de l'équation de Dirac dans l'espace courbé par les deux relations suivantes :

$$\mathbb{U}_{in,out}(\vec{k}, \vec{x}, t) = f_{in,out}^-(k_\perp, \theta, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} U(0, s) \quad (4.43a)$$

$$\mathbb{V}_{in,out}(\vec{k}, \vec{x}, t) = (f_{in,out}^+(k_\perp, \theta, t))^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} V(0, s) \quad (4.43b)$$

sachant que $U(0, s)$ et $V(0, s)$ sont les spineurs de l'espace plat ordinaire. ("s" désigne les états du spin). Dû aux transformations de Bogoliubov, le champ ψ dans les deux régions "in" et "out" peut prendre la forme suivante en utilisant

les opérateurs d'annihilations et de créations :

$$\psi_{in,out} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s [a_{in,out}(\vec{k}, s) \mathbb{U}_{in,out}(\vec{k}, \vec{x}, t) + b_{in,out}^+(\vec{k}, s) \times \mathbb{V}_{in,out}(\vec{k}, \vec{x}, t)] \quad (4.44)$$

($a_{in,out}$ et $b_{in,out}^+$ sont les opérateurs d'annihilations et de créations des fermions et des antifermions respectivement). Profitons de la forme des transformations de Bogoliubov, on peut montrer que le produit tensoriel de l'état du vide d'une particule et d'une antiparticule dans la région "in" peut s'écrire sous la forme suivante :

$$|0\rangle_{in} \otimes |0\rangle_{in} = \prod_{k_{\perp}} (A_0 |0\rangle_{out} \otimes |0\rangle_{out} + A_1 |1_{k_{\perp}}\rangle_{out} \otimes |1_{-k_{\perp}}\rangle_{out}) \quad (4.45)$$

notons que $|1_{-k_{\perp}}\rangle$ et $|1_{k_{\perp}}\rangle$ représentent un mode d'antiparticule et un mode de particule avec un moment $(-k_{\perp})$ et (k_{\perp}) respectivement. Afin de trouver la relation entre les coefficients A_0 et A_1 on suppose que :

$$b_{in}(k_{\perp}) |0\rangle_{in} \otimes |0\rangle_{in} = 0 \quad (4.46)$$

ce qui nous permet à écrire la relation :

$$\alpha_{k_{\perp}}^* A_1 |1_{-k_{\perp}}\rangle + \beta_{k_{\perp}}^* A_0 |1_{-k_{\perp}}\rangle = 0 \quad (4.47)$$

sachant que $\alpha_{k_{\perp}} \equiv \alpha_{k_{\perp},\theta}^{\pm}$ et $\beta_{k_{\perp}} \equiv \beta_{k_{\perp},\theta}^{\pm}$. A partir de la relation (Eq. 4.47) on peut directement écrire la relation :

$$A_1 = -\Delta_{k_{\perp}}^* A_0 \quad (4.48)$$

où

$$\Delta_{k_{\perp}} = \frac{\beta_{k_{\perp}}}{\alpha_{k_{\perp}}} \quad (4.49)$$

La normalisation de l'état (Eq. 4.45) nous donne l'état du vide normalisé défini par :

$$|0\rangle_{in} \otimes |0\rangle_{in} = \prod \left(\frac{|0\rangle_{out} \otimes |0\rangle_{out} - \Delta_{k_\perp}^* |1_{k_\perp}\rangle_{out} \otimes |1_{-k_\perp}\rangle_{out}}{\sqrt{1 + |\Delta_{k_\perp}|^2}} \right) \quad (4.50)$$

En utilisant les coefficients de Bogoliubov donnés par la relation (Eq. 4.36) et profitons de la relation (Eq. 4.42), on peut définir le rapport Δ_{k_\perp} des coefficients de Bogoliubov qui va prendre l'expression suivante :

$$|\Delta_{k_\perp}|^2 = \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right|^2 |e^{-i\pi(\lambda - \mu - \frac{1}{2})}|^2 \quad (4.51)$$

Il est important de mentionner que l'expression de $|\Delta_{k_\perp}|^2$ dépend des valeurs des paramètres μ et λ (sachant que ces paramètres peuvent être réels, complexes ou bien imaginaires purs). (Les différents cas sont donnés en détail dans l'annexe F).

4.4 Intrication des Modes Fermioniques-Anti fermioniques créés Dans L'espace-temps de Bianchi I non commutatif

Après la détermination du rapport $|\Delta_{k_\perp}|^2$ des coefficients de Bogoliubov qu'on va l'utiliser pour calculer l'intrication des paires des modes particules-antiparticules. D'après les relations précédentes, il est clair que l'état du vide dans la région "in" correspond à un état intriqué dans la région "out". Rappelons que l'état normalisé du vide (Eq. 4.50) est un état intriqué des modes fermioniques et des modes antifermioniques avec une matrice de densité réduite donnée par :

$$\rho_{k_\perp} = \frac{1}{1 + |\Delta_{k_\perp}|^2} (|0\rangle_{out out} \langle 0| + |\Delta_{k_\perp}|^2 |1_{k_\perp}\rangle_{out out} \langle 1_{k_\perp}|) \quad (4.52)$$

Puisque l'état est pur, donc l'intrication est déterminée en utilisant l'entropie de Von Neumann notée $S_{Q.E}$ défini par :

$$S(\rho_{k_\perp}) = \log_2 \left(\frac{1 + |\Delta_{k_\perp}|^2}{|\Delta_{k_\perp}|^{\frac{2|\Delta_{k_\perp}|^2}{1+|\Delta_{k_\perp}|^2}}} \right) \quad (4.53)$$

Notons qu'on peut exprimer l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ en fonction de la densité de création \hat{n}_{k_\perp} par la relation suivante :

$$S(\hat{n}_{k_\perp}) = \log_2 \left(\frac{(\hat{n}_{k_\perp})^{1-2\hat{n}_{k_\perp}}}{(1 - \hat{n}_{k_\perp})^{1-\hat{n}_{k_\perp}}} \right) \quad (4.54)$$

Selon les valeurs du paramètre de la non commutativité θ (qui peut être positif, négatif ou bien égal à zéro qui correspond au cas ordinaire commutative) on a trois cas différents, tel que $|\Delta_{k_\perp}|^2$ peut prendre des expressions différentes comme suit :

1. $\theta = 0$

$$|\Delta_{k_\perp}|^2 = \frac{x \sinh(\pi x)}{(1+y)^2 y \sinh(\pi y)} e^{-8\pi k_\perp} \quad (4.55)$$

où :

$$x = k_\perp - \frac{1}{2} \quad (4.56a)$$

$$y = 3k_\perp + \frac{1}{2} \quad (4.56b)$$

2. $\theta > 0$

$$|\Delta_{k_\perp}|^2 = \left[\frac{[x_2 \Gamma(-x_2) \sin(\pi x_2)]^2 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y_2^2}{(n+x_2)^2}\right)}{[x_1 \Gamma(-x_1) \sin(\pi x_1)]^2 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y_1^2}{(n+x_1)^2}\right)} \right] \times \exp\left(-8\pi \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (4.57)$$

3. $\theta < 0$

$$|\Delta_{k_\perp}|^2 = \left[\frac{\pi^2 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y_2^2}{(n+x_2)^2}\right)}{[x_1 \Gamma(-x_1) \sin(\pi x_1) \Gamma(x_2)]^2 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y_1^2}{(n+x_1)^2}\right)} \right] \times \exp\left(-8\pi \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (4.58)$$

avec :

$$x_1 = \frac{\theta}{2} - 1 \quad (4.59a)$$

$$x_2 = -\frac{\theta}{2} \quad (4.59b)$$

$$y_1 = 3\sqrt{\left(1 - \frac{25\theta^2}{64}\right) k_\perp^2 + \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{2}} \quad (4.59c)$$

$$y_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{25\theta^2}{64}\right) k_\perp^2 + \frac{\theta^2}{4} - \frac{1}{2}} \quad (4.59d)$$

4.5 Discussion des Résultats Numériques

Par l'analyse de nos résultats numériques concernant le comportement de l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ dans l'espace-temps de Bianchi I non commutatif en fonction des fréquences des modes k_\perp et du paramètre de la non commutativité θ , on a constaté deux régions notées par I et II correspondant aux $k_\perp \leq \frac{1}{2}$ et $k_\perp > \frac{1}{2}$ respectivement. Dans la région I l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ a une valeur maximale pour $k_\perp = 0$ qui varie dans l'intervalle

$S_{Q.E}^{max} \in [0.44, 0.97]$ pour $\theta \in [0.01, 0.09]$. Quand le paramètre θ est relativement petit ($\theta \in [0.01, 0.05]$), $S_{Q.E}$ diminue avec l'augmentation de k_\perp jusqu'à atteindre une valeur minimale $S_{Q.E}^{min} \in [9 \times 10^{-11}, 3.5 \times 10^{-10}]$ pour une valeur de $k_\perp \approx \frac{1}{2}$, après elle augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne un pic de très petite valeur $S_{Q.E}^p \in [3 \times 10^{-10}, 4 \times 10^{-10}]$ pour une valeur de $k_\perp \approx 0.55$ ($S_{Q.E}^p$ veut dire la valeur de $S_{Q.E}$ correspondant au pic). Finalement, $S_{Q.E}$ diminue encore une fois et disparaît à l'infini. Cependant pour des valeurs de θ rela-

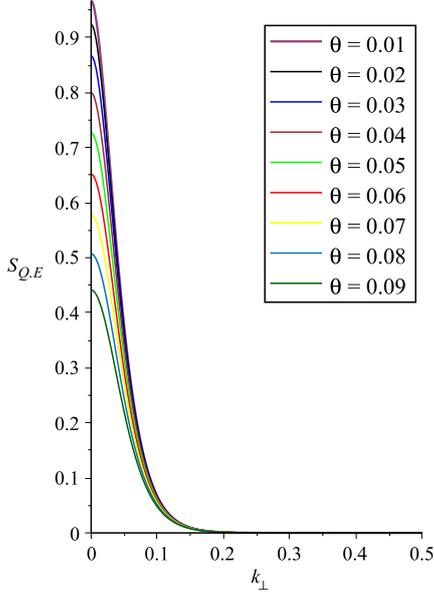


FIGURE 4.1 – La variation de $S_{Q,E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité θ dans la région I

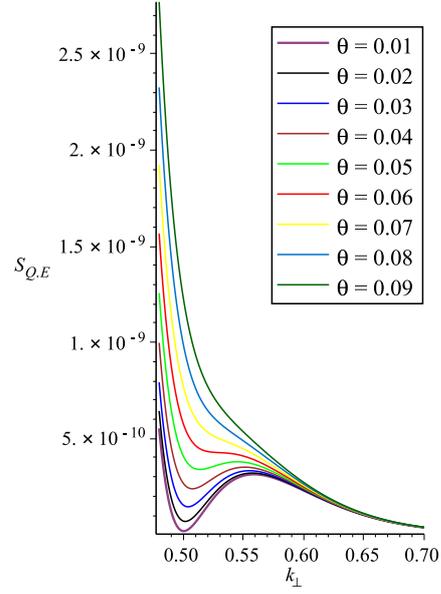


FIGURE 4.2 – La variation de $S_{Q,E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité θ dans la région II

tivement grandes $\theta \in [0.06, 0.09]$, $S_{Q,E}$ devient une fonction décroissante avec l'augmentation de k_{\perp} (voir Fig. 4.1 et Fig. 4.2). Notons que le comportement de $S_{Q,E}$ en fonction de k_{\perp} et de θ est complètement différent dans les deux régions I et II. Dans la région I, pour une valeur fixe de k_{\perp} , on constate une relation inverse entre $S_{Q,E}$ et θ , telle que dans cette région $S_{Q,E}$ est une fonction décroissante avec l'augmentation de θ . Par contre dans la région II, le comportement de $S_{Q,E}$ est différent de celui de la région I, telle que $S_{Q,E}$ est une fonction croissante de θ (voir Fig. 4.1 et Fig. 4.2). Nous avons présenté dans les figures (Fig. 4.3) et (Fig. 4.4) la variation de $S_{Q,E}$ en fonction du paramètre θ et les fréquences des modes k_{\perp} sous forme des contours et en 3D respectivement. L'explication théorique de ce comportement de $S_{Q,E}$ est que dans la région I, le rapport $\Delta_{k_{\perp}}$ est approximativement proportionnel à $e^{-4\pi\theta}$. Donc, il est clair que si θ augmente, $\Delta_{k_{\perp}}$ diminue, et d'un autre côté, puisque $\frac{\partial S}{\partial \Delta_k} = -\frac{1}{(1+\Delta_k)^2} \log_2 \Delta_k$ est positif pour $\Delta_k < 1$, donc pour cela, $S_{Q,E}$ diminue

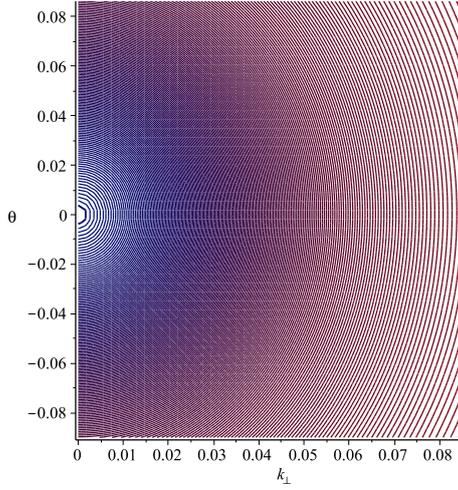


FIGURE 4.3 – La variation de $S_{Q,E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité $\theta \in [-0.09, 0.09]$ sous forme des contours

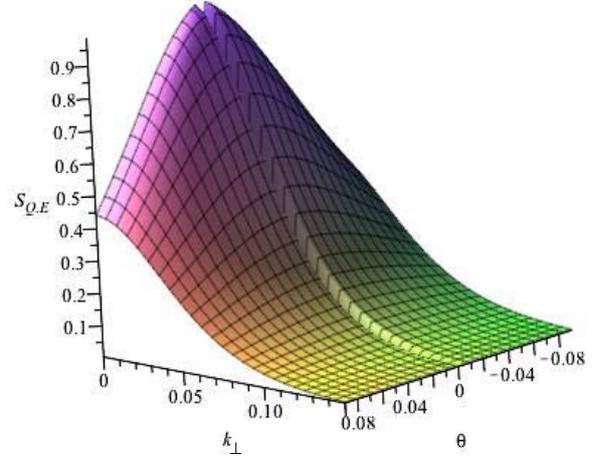


FIGURE 4.4 – La variation de $S_{Q,E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité $\theta \in [-0.09, 0.09]$ en 3D

(voir Fig.4.1). Il est important de mentionner que dans la région I la densité de création des paires a un comportement non thermique. A cause de l'anisotropie de l'espace-temps de Bianchi I (qui est très compliqué par rapport à l'espace-temps isotrope F. R. W de [54]) et de la non commutativité, si un gaz fermionique créé est observé à un temps plus grand que le temps d'expansion, alors la densité du nombre des particules dévie de la distribution quasi équilibre sans une température bien définie ni un potentiel chimique. En plus, une paire de particule-antiparticule créée dans un espace-temps anisotrope ne peut pas atteindre un état d'équilibre dans toutes les directions de cet espace sauf si leurs énergies dépassent une certaine valeur critique ($k_{\perp} \approx \frac{1}{2}$) au delà de laquelle, les effets anisotropiques deviennent négligeables. Donc on peut dire que pour $k_{\perp} \leq \frac{1}{2}$ l'énergie de la paire particule-antiparticule créée est petite par rapport à la vitesse de l'expansion de l'univers dans les deux directions x et y et la densité de création des paires est dans un état non thermique hors d'équilibre. Concernant la valeur privilégiée de k_{\perp} ($k_{\perp} = 0$) pour laquelle l'entropie de Von Neumann est maximale $S_{Q,E}$, (sa valeur de-

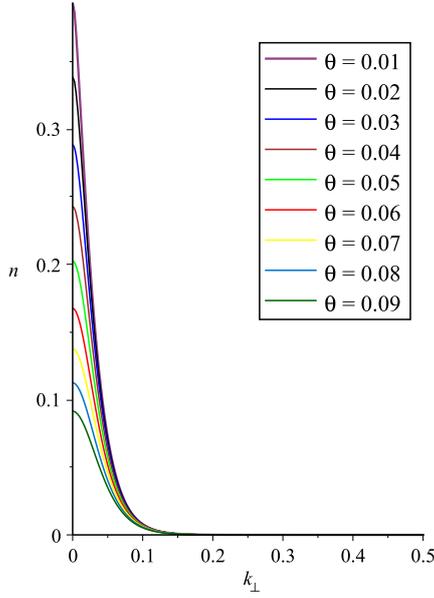


FIGURE 4.5 – La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ dans la région I

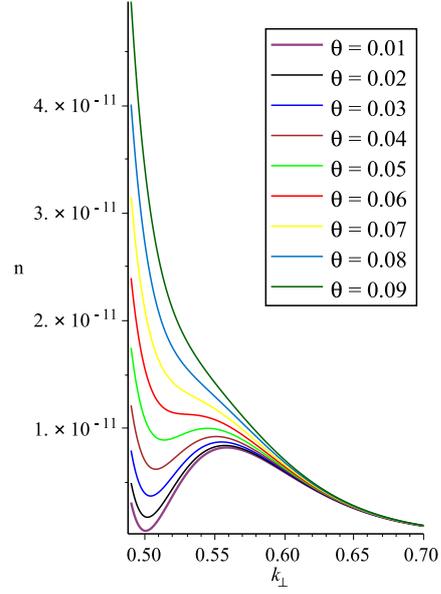


FIGURE 4.6 – La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ dans la région II

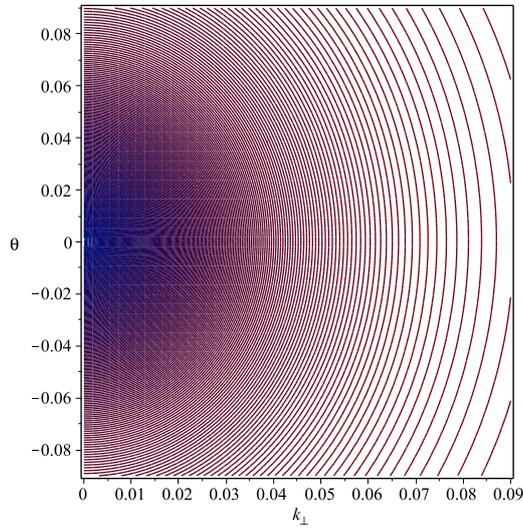


FIGURE 4.7 – La densité de création \hat{n} en fonction des fréquences des modes k_{\perp} et du paramètre de la non commutativité θ sous forme des contours

pend fortement du paramètre θ) est reliée au longueur d'onde caractéristique corrélée à la structure aussi bien que la non commutativité de l'espace-temps (déformation). En fait, contrairement à l'argument donné dans la référence

(Réf. [54]) qui stipule qu'il est très facile d'exciter les petits modes k lors de l'expansion de l'espace-temps. Concernant le comportement fermionique de l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ en fonction de k_{\perp} , en plus du type des particules sous l'étude (fermions ou bosons) il dépend aussi de la structure et la spécificité de l'espace-temps. Il est également très important de mentionner le fait que dans la région I ($k_{\perp} \leq \frac{1}{2}$), la non commutativité joue le rôle de la gravitation et ralentit l'expansion de l'espace-temps ce qui provoque la décroissance de l'intrication entre les fermions-antifermions. Contrairement à la région I, dans la région II ($k_{\perp} > \frac{1}{2}$), $S_{Q.E}$ est une fonction croissante du paramètre θ pour une valeur fixe de k_{\perp} . Théoriquement, ce comportement important de $S_{Q.E}$ peut être expliqué comme suit : concernant l'existence des valeurs minimales et des valeurs maximales de $S_{Q.E}$ pour des valeurs de θ relativement petites autour des valeurs $k_{\perp} \approx 0.5$ et $k_{\perp} \approx 0.55$, nous avons obtenu numériquement que $\left. \frac{\partial S_{Q.E}}{\partial k_{\perp}} \right)_{k_{\perp} \approx 0.5} = 0$, et $\left. \frac{\partial^2 S_{Q.E}}{\partial k_{\perp}^2} \right)_{k_{\perp} \approx 0.5} > 0$ (pour le minimum) et $\left. \frac{\partial S_{Q.E}}{\partial k_{\perp}} \right)_{k_{\perp} \approx 0.55} = 0$, et $\left. \frac{\partial^2 S_{Q.E}}{\partial k_{\perp}^2} \right)_{k_{\perp} \approx 0.55} < 0$ (pour le maximum). Pour des valeurs de θ relativement grandes, nous avons trouvé numériquement qu'il n'y a pas de minimum ou de maximum et $S_{Q.E}$ est une fonction décroissante de toutes les valeurs de $k_{\perp} \in [0, +\infty[$ (voir Fig 4.2). Pour montrer le comportement thermique de la densité de création \hat{n} et par conséquent $S_{Q.E}$ il est important de mentionner si $\Delta_{k_{\perp}} \ll 1$ qui est équivalent à $k_{\perp} \gg 1$, on peut montrer que \hat{n} se comporte comme $e^{-8\pi k_{\perp}}$ pour $\theta = 0$ (un comportement thermique) menant à $S_{Q.E} \approx -\Delta_{k_{\perp}} \log_2 \Delta_{k_{\perp}}$. Pour $\theta \neq 0$, on a $\hat{n} \propto \theta^2 e^{-8\pi k}$. Il est très clair que pour des valeurs fixes de fréquences des modes k_{\perp} , $\Delta_{k_{\perp}}$ et $S_{Q.E}$ sont des fonctions croissantes de θ ($\Delta_{k_{\perp}} < 1$). Ceci explique nettement le comportement de $S_{Q.E}$ montré dans la figure (Fig. 4.2). On remarque donc que dans la région II, la non commutativité ne joue plus le rôle de la gravitation mais plutôt le rôle d'une force répulsive (quintessence, énergie noire, etc...). Afin de montrer le comportement du paramètre de la non commutativité de l'espace-temps et son effet sur l'intrication des modes fermioniques-antifermioniques, nous avons remarqué que dans la région I, $\Delta_{k_{\perp}}$ est très sensible au facteur

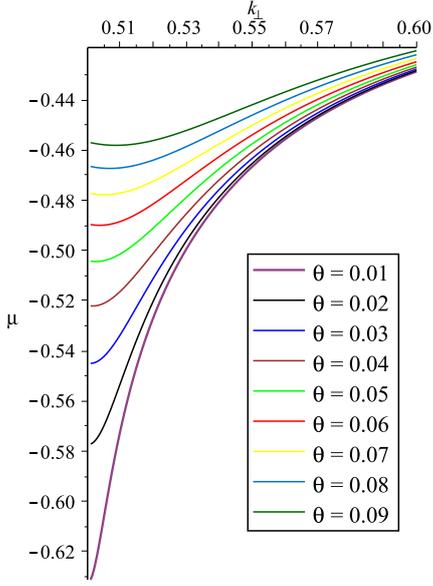


FIGURE 4.8 – Le potentiel chimique μ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} pour différentes valeurs du paramètre θ

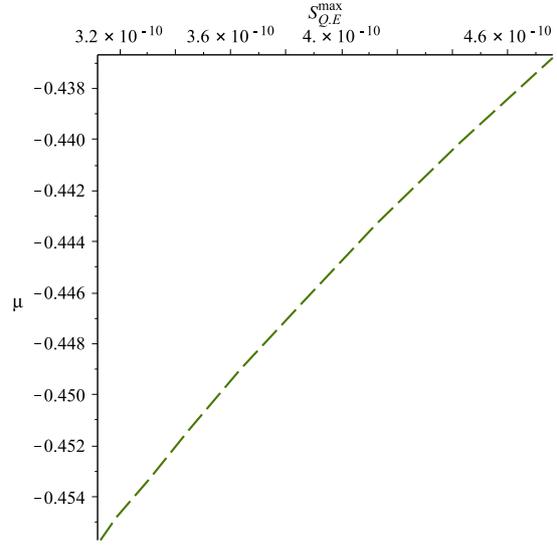


FIGURE 4.9 – Le potentiel chimique μ en fonction de $S_{Q,E}^{max}$

$J = \exp\left(-\pi\sqrt{64k_{\perp}^2 - 25k_{\perp}^2\theta^2 + 16\theta^2}\right)$ (voir Eq.(4.57) et Eq. (4.58)). Dans ce cas, on a $-25k_{\perp}^2\theta^2 + 16\theta^2 > 0$ et donc J , $\Delta_{k_{\perp}}$ et $S_{Q,E}$ deviennent des fonctions décroissantes de θ . Cependant, dans la région II, $\Delta_{k_{\perp}}$ est affecté par le facteur $I = \theta^2 \exp\left(-\pi\sqrt{64k_{\perp}^2 - 25k_{\perp}^2\theta^2 + 16\theta^2}\right)$. Dans ce cas, I , $\Delta_{k_{\perp}}$ et $S_{Q,E}$ sont des fonctions croissantes de θ (voir Fig.4.2). Nous concluons que la non commutativité induit deux termes avec des signes opposés, le premier est donné par le terme $+16\theta^2$ (avec un signe positif) joue le rôle de la gravitation et le deuxième est donné par $-25k_{\perp}^2\theta^2$ (avec un signe négatif). Donc si le premier terme est grand (cas de la région I où $k_{\perp} \leq \frac{1}{2}$), le terme de correction non commutative $-25k_{\perp}^2\theta^2 + 16\theta^2$ va ralentir l'expansion ce qui provoque la diminution de l'intrication avec l'augmentation de θ (la diminution de $S_{Q,E}$). Par contre pour des valeurs de k_{\perp} relativement grandes, le terme $-25k_{\perp}^2\theta^2 + 16\theta^2$ change le signe par rapport au premier cas et on va obtenir exactement l'effet opposé, tel que le paramètre de la non commutativité va augmenter le taux d'expansion menant à une augmentation de l'intrication (augmentation

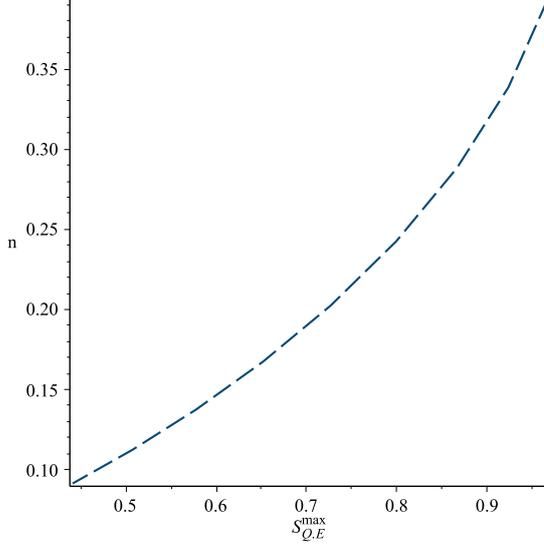


FIGURE 4.10 – La densité de création des paires \hat{n} en fonction de $S_{Q.E}^{max}$

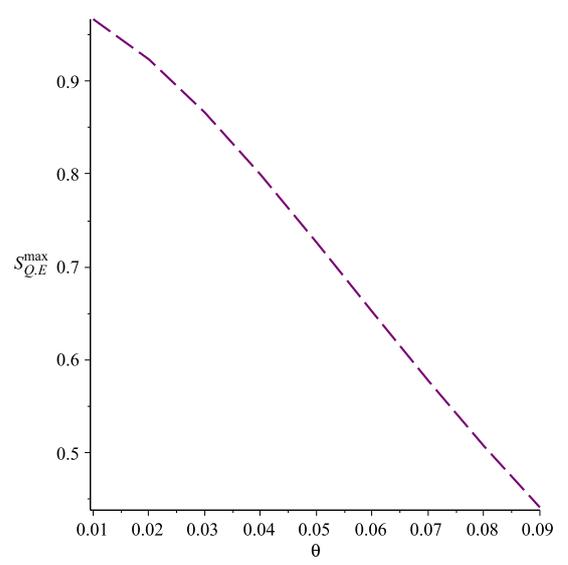


FIGURE 4.11 – $S_{Q.E}^{max}$ en fonction du paramètre θ

de $S_{Q.E}$). Il est important de mentionner que, puisque $S_{Q.E}$ est une fonction croissante de la densité de création des paires \hat{n} (voir Eq. 4.54) telle que :

$$\frac{\partial S_{Q.E}}{\partial \hat{n}} = -2 \log_2 \hat{n} - \log_2 (1 - \hat{n}) + \frac{1 - \hat{n}}{\hat{n}} \quad (4.60)$$

est une fonction toujours positive (puisque $\hat{n} \leq 1$). Des comportements similaires ont été obtenus pour \hat{n} . Les résultats sont résumés dans Fig. (4.4), Fig. (4.5), Fig. (4.6) et Fig. (4.7). La figure (Fig. 4.8) représente le potentiel chimique en fonction de k_{\perp} pour des différentes valeurs du paramètre de la non commutativité θ (dans la région II où il y a un quasi équilibre). D'après cette figure, on constate que le potentiel chimique μ est négatif et $|\mu|$ est une fonction croissante de θ . La raison est : en équilibre thermique où $\mu \propto -\frac{\Delta S_{Q.E}}{\Delta \hat{n}}$ et puisque dans la région II, $\Delta S_{Q.E}$ est une fonction croissante en $\Delta \hat{n}$, donc le rapport $\frac{\Delta S_{Q.E}}{\Delta \hat{n}}$ est positif et par conséquent μ est négatif. De plus, puisque l'augmentation ou bien la diminution du potentiel chimique est reliée directement à celle de la densité de création des paires \hat{n} , donc on peut facilement expliquer la dépendance de μ du paramètre θ pour une valeur fixe de k_{\perp} .

La figure (Fig. 4.9) montre le potentiel chimique en fonction des valeurs du deuxième pic (la région II) de $S_{Q.E}$ notées $S_{Q.E}^{max}$ pour des différentes valeurs de θ . Dans la figure (Fig. 4.10) on représente la densité de création des paires \hat{n} en fonction des valeurs du premier pic de $S_{Q.E}$ ($k_{\perp} \approx 0$) notées $S_{Q.E}^{max}$. La (Fig. 4.11) représente les valeurs de $S_{Q.E}$ du premier pic en fonction du paramètre θ où on voit une relation inverse. Finalement en utilisant la contrainte $64 k_{\perp}^2 - 25 k_{\perp}^2 \theta^2 + 16 \theta^2 \geq 0$ on peut facilement obtenir une limite supérieure de θ qui est $|\theta| \leq \frac{8}{5}$ qui justifie les petites valeurs numériques du paramètre de la non commutativité θ utilisées dans ce travail.

Notre travail de recherche présenté dans ce chapitre consiste à étudier l'intrication entre des paires fermions-antifermions sans masse dans l'espace-temps de Bianchi I non commutatif caractérisé par les composantes non commutatives des vierbeins et des connexions de spin présentées par les expressions (Eqs. 4.15). Dû à la complexité de la structure anisotrope de l'espace-temps de Bianchi I, le comportement de $S_{Q.E}$ en fonction des fréquences des modes k_{\perp} est trop compliqué et différent par rapport à celui trouvé dans la référence [54]. Les auteurs de réf [54] spéculaient que pour le cas sans masse, $S_{Q.E} = 0$ c'est à dire l'intrication est nulle, et leurs résultats dépendent de $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Par contre, nos résultats montrent que même avec des fermions sans masse l'intrication est non nulle, $S_{Q.E} \neq 0$ et ils dépendent uniquement de $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ (à cause de l'anisotropie de Bianchi I et le choix du paramètre θ). La contribution originale de notre travail se résume dans les points suivants :

- i. Le comportement de $S_{Q.E}$ ne dépend pas uniquement de type des particules étudiées (bosons ou fermions) mais aussi de la structure et de la déformation de l'espace-temps ;
- ii. A cause de la déformation de l'espace-temps, l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$ est différente de zéro pour les particules fermioniques sans masse ;
- iii. A cause de l'anisotropie de l'espace-temps de Bianchi I et le choix du paramètre θ , nos résultats dépendent de k_{\perp} ;

- iv. Une nouvelle limite supérieure de $S_{Q.E}$ qui dépend fortement du paramètre de la non commutativité θ qui n'est plus $\log_2 N$ comme dans la réf [54] ;
- v. Nous avons obtenu une limite supérieure du paramètre θ qui justifie les petites valeurs de θ considérées dans notre travail ;
- vi. La non commutativité de l'espace-temps induit deux termes avec des signes opposés : le premier joue le rôle de la gravitation et l'autre terme joue le rôle d'une force répulsive. Donc l'information acquise de l'intrication dépend du paramètre de la non commutativité θ .
- vii. Si on pourrait connaître la position et les valeurs optimales de $S_{Q.E}$ on peut obtenir des informations sur certaines quantités thermodynamiques (comme le potentiel chimique μ) de l'espace-temps de Bianchi I non commutatif.

Chapitre 5

Conclusion

A travers cette thèse nous avons présenté une étude qualitative et quantitative d'un phénomène quantique qui est l'intrication quantique dans différents contextes. On a commencé par une introduction générale sur le thème et l'objectif des travaux présentés dans cette thèse. Après, dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les notions générales de l'information quantique de sa petite unité de base qui se résume dans petit objet à deux dimensions qu'on l'appelle le qubit, à un phénomène très important et largement utilisé dans presque tout les aspects de ce champ qui est l'intrication quantique. Puisque l'objectif de cette thèse est d'étudier l'intrication quantique, donc on a utilisé des grandeurs physiques afin de quantifier cette intrication. Chapitre 2 contient les propriétés des deux grandeurs qu'on a utilisées, la concurrence C et l'entropie de Von Neumann notée $S_{Q.E}$. Pour un état intriqué pur et bipartite, les meilleurs moyens pour quantifier l'intrication sont les grandeurs qu'on a utilisées dans cette thèse. Nous avons considéré une généralisation de la quantification canonique appelée la paraquantification, caractérisée par un paramètre réel Q . D'après les résultats que nous avons obtenus, la paraquantification a montré deux caractéristiques importantes. La première se base sur le fait que la paraquantification n'a aucun effet sur un état qui est déjà intriqué d'une façon maximale, c'est à dire, un état qui vérifie $C = 1$ reste

robuste contre la généralisation de la quantification canonique. La deuxième caractéristique est très intéressante telle que la paraquantification a un effet directe et considérable sur un état bipartite qui n'est pas intriqué d'une façon maximale. L'analyse des figures de la concurrence C en fonction du paramètre de la paraquantification $c = \frac{Q-1}{2}$ et du paramètre de la cohérence α nous a montré que la concurrence d'un état qui n'a pas une intrication maximale a une relation inverse avec le paramètre c . Quand c augmente, la concurrence C diminue. Donc la concurrence est une fonction décroissante de c . Dans ce cas, le rôle de la paraquantification consiste à diminuer le taux d'intrication bipartite. Dans le chapitre 4 nous avons étudié l'intrication quantique dans un autre contexte où la géométrie de l'espace-temps a été prise en considération. Nous avons étudié l'intrication créée entre des paires des modes fermioniques-antifermioniques dans un espace-temps homogène, anisotrope et non commutatif. Les coefficients de Bogoliubov que nous avons utilisés pour calculer la densité de création des paires dans l'espace-temps de Bianchi I nous a permis de déterminer l'expression de l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$. L'utilité de l'intrication des paires particule-antiparticule créée dans un espace courbé qui a deux régions asymptotiquement plates c'est qu'elle nous permet de déduire des informations concernant notre espace-temps. A travers nos résultats, nous concluons que le comportement de la non commutativité est très intéressant et elle peut jouer plusieurs rôles et affecter l'intrication des modes de deux manières complètement différentes. Nous avons présenté quelques figures qui ont montré la variation de $S_{Q.E}$ en fonction du paramètre θ et des fréquences des modes k_{\perp} où on a distingué deux régions selon les valeurs de k_{\perp} . Dans la région notée I, nous avons vu que la non commutativité joue le rôle de la gravitation telle que $S_{Q.E}$ diminue avec l'augmentation de θ . Par contre dans la région II comme on a déjà vu, la non commutativité joue un autre rôle pour certaines valeurs de θ de telle façon $S_{Q.E}$ devient une fonction croissante avec l'augmentation de θ . La non commutativité dans cette région a joué le rôle d'une force répulsive.

Annexe A

Calcul du Produit Scalaire des Etats Cohérents Paraquantiques Pairs

Tout d'abord, l'expression d'un état cohérent paraquantique pair est donnée par la relation suivante :

$$\psi_{\alpha}^{+}(x) = A_{\alpha} x^c \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2}x\right) \quad (\text{A.1})$$

Pour calculer le produit scalaire de deux états cohérents paraquantiques pairs on a :

$$\langle \psi_{\alpha} | \psi_{\gamma} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{\alpha} | x \rangle \langle x | \psi_{\gamma} \rangle dx \quad (\text{A.2})$$

tel que :

$$\langle \psi_{\alpha} | \psi_{\gamma} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \psi_{\alpha} \rangle^{*} \langle x | \psi_{\gamma} \rangle dx \quad (\text{A.3})$$

ce qui donne :

$$\langle \psi_{\alpha} | \psi_{\gamma} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\alpha}^{-}(x) \psi_{\gamma}(x) dx \quad (\text{A.4})$$

donc :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{+2c} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\bar{\alpha}\sqrt{2}\right) \times \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\gamma\sqrt{2}\right) dx \quad (\text{A.5})$$

tel que :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{+2c} \exp\left(-x^2 + x(\gamma + \bar{\alpha})\sqrt{2}\right) dx \quad (\text{A.6})$$

sachant que :

$$\exp\left(-x^2 + x(\gamma + \bar{\alpha})\sqrt{2}\right) = \exp\left[-\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right)^2\right] \times \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right] \quad (\text{A.7})$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (Eq. B.3) on obtient :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{+2c} \exp\left[-\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right)^2\right] \times \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right] dx \quad (\text{A.8})$$

Pour calculer l'intégrale et par conséquent simplifier l'expression du produit scalaire, on suppose le changement de variable suivant :

$$t = x - \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha}) \quad (\text{A.9a})$$

$$dt = dx \quad (\text{A.9b})$$

En remplaçant et on trouve comme résultat :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right]^{+2c} \times \exp(-t^2) dt \quad (\text{A.10})$$

Par l'introduction du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (\text{A.11})$$

où :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{A.12})$$

Donc l'équation (Eq. A.10) devient :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] \sum_{k=0}^{2c} \frac{2c!}{k!(2c-k)!} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right]^{+2c-k} \times \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \exp(-t^2) dt \quad (\text{A.13})$$

Le calcul de l'intégrale nous permet d'écrire la relation précédente sous la forme suivante :

$$\langle \psi_{\alpha}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] \sum_{k=0}^{2c} \frac{2c!}{k!(2c-k)!} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right]^{+2c-k} \times \left[1 + (-1)^k \right] \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2} \right) \quad (\text{A.14})$$

Pour simplifier cette relation plus que ça, on utilise les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$ exprimée par la relation suivante :

$$\Gamma(z) \Gamma \left(z + \frac{1}{2} \right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (\text{A.15})$$

on sait que :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.16})$$

donc :

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z} \Gamma \left(z + \frac{1}{2} \right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (\text{A.17})$$

ce qui donne :

$$\Gamma(z+1)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z}}\Gamma(2z+1) \quad (\text{A.18})$$

On pose $z = \frac{k}{2}$ on trouve :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}k!}{2^k \left(\frac{k}{2}\right)!} \quad (\text{A.19})$$

Puisque le paramètre de la paraquantification $c = \frac{Q-1}{2}$ donc :

$$(2c)! = (Q-1)! \quad (\text{A.20a})$$

$$(2c-1)! = (Q-k-1)! \quad (\text{A.20b})$$

En remplaçant dans la relation (Eq. A.14) on obtient l'expression du produit scalaire de deux états cohérents paraquantiques pairs :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\bar{\alpha}}^+ | \psi_{\gamma}^+ \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma + \bar{\alpha})^2\right] & \sum_{k=0}^{Q-1} \frac{(Q-1)!}{(Q-k-1)!} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma + \bar{\alpha})\right]^{Q-k-1} \times \\ & \left[1 + (-1)^k\right] \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1} \left(\frac{k}{2}\right)!} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Annexe B

Calcul du Produit Scalaire des Etats Cohérents Paraquantiques Impairs

L'expression d'un état cohérent paraquantique impair est donnée par la relation suivante :

$$\psi_{\alpha}^{-}(x) = A_{\alpha} x^{-c} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + \alpha\sqrt{2}x\right) \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas où les états cohérents paraquantiques sont impairs, le produit scalaire est donné par :

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2c} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\bar{\alpha}\sqrt{2}\right) \times \exp\left(\frac{-x^2}{2} + x\gamma\sqrt{2}\right) dx \quad (\text{B.2})$$

tel que :

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2c} \exp\left(-x^2 + x(\gamma + \bar{\alpha})\sqrt{2}\right) dx \quad (\text{B.3})$$

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2c} \exp \left[- \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right)^2 \right] \times \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] dx \quad (\text{B.4})$$

En utilisant le même changement de variable utilisé dans l'annexe A, on obtient l'équation suivante :

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left[t + \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right]^{-2c} \exp(-t^2) dt \quad (\text{B.5})$$

On utilise le binôme négatif :

$$(x + y)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k} y^k x^{-n-k} \quad (\text{B.6})$$

tel que :

$$\binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k} (-1)^k \quad (\text{B.7})$$

L'équation (Eq. B.5) devient :

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2c+k-1}{k} \times (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right]^{-2c-k} \int_{-\infty}^{+\infty} (t)^k \exp(-t^2) dt \quad (\text{B.8})$$

Nous calculons l'intégrale et on prend en considération les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$, ainsi que l'expression du paramètre de la paraquantification c (voir l'annexe A pour les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$ et comment calculer l'intégrale) on obtient la formule du produit scalaire des états cohérents

paraquantiques impairs sous la forme suivante :

$$\langle \psi_{\alpha}^{-} | \psi_{\gamma}^{-} \rangle = A_{\bar{\alpha}} A_{\gamma} \exp \left[\frac{1}{2} (\gamma + \bar{\alpha})^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q+k-2)!}{(Q-2)!} (-1)^k \times \\ \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma + \bar{\alpha}) \right]^{-Q+1-k} \left[1 + (-1)^k \right] \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1} \left(\frac{k}{2}\right)!} \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

L'équation de Dirac Non Commutative

L'équation de Dirac pour des fermions sans masses dans un espace-temps non commutatif à 4 dimensions est donnée par :

$$\gamma^f \left[\hat{e}_f^\mu \partial_\mu - \frac{i}{8} (\hat{e}_f^\mu * \hat{\omega}_\mu^{ab} + \hat{\omega}_\mu^{ab} * \hat{e}_f^\mu) \Sigma_{ab} \right] * \hat{\psi} = 0 \quad (\text{C.1})$$

tel que $\hat{\psi}$ est le quadri spineur (04 composantes) de Dirac non commutatif.

Et :

$$\Sigma_{ab} = \Sigma_{[ab]} + \Sigma_{(ab)} \quad (\text{C.2})$$

avec :

$$\Sigma_{[ab]} = \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b] \quad (\text{C.3a})$$

$$\Sigma_{(ab)} = \frac{1}{2} \{\gamma_a, \gamma_b\} = \eta_{ab} \mathbb{I}_{4 \times 4} \quad (\text{C.3b})$$

en utilisant le fait que :

$$\frac{1}{2} [\gamma_d \Sigma_{[ab]} + \Sigma_{[ab]} \gamma_d] = \varepsilon_{fdab} \gamma^f \gamma^5 \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{i}{2} [\gamma_d \Sigma_{(ab)} - \Sigma_{(ab)} \gamma_d] = g_{db} \gamma_a - g_{da} \gamma_b \quad (\text{C.4b})$$

où ε_{fdab} est le tenseur antisymétrique du rang 4. On peut facilement montrer que l'équation de Dirac non commutative prend la forme suivante :

$$\left[\gamma^f \left(i\partial_f + \hat{A}_f \right) + \gamma^f \gamma^5 \hat{B}_f \right] * \hat{\psi} = 0 \quad (\text{C.5})$$

où :

$$\hat{A}^f = \Im \left(\hat{e}_f^\mu \sum_{a=1}^4 \hat{\omega}_\mu^{aa} \right) + \Re \left[\hat{e}_d^\mu \left(\hat{\omega}_\mu^{fd} - \hat{\omega}_\mu^{df} \right) \right] \quad (\text{C.6a})$$

$$\hat{B}^f = \Im \left[\left(\hat{e}^{\mu d} \hat{\omega}_\mu^{ab} \right) \frac{1}{4} \theta^{\rho\sigma} \theta^{\alpha\beta} \left(\partial_\rho \partial_\alpha \hat{e}^{\mu d} \right) \left(\partial_\sigma \partial_\beta \hat{\omega}_\mu^{ab} \right) \right] \varepsilon_{fdab} \quad (\text{C.6b})$$

au delà de $O(\theta^2)$. La notation $[\cdot]$ est représentée pour la partie antisymétrique. Il est important de mentionner que les $\hat{\omega}_\mu$, \hat{e}^μ et le paramètre de jauge \hat{A} Seiberg-Witten sont nécessaires pour l'invariance de la gravitation de jauge non commutative sous les transformations de jauge-* des équations (Eqs. E.15-E.17). La symétrisation utilisée dans le terme du champ de matière de l'action donnée par la relation (Eq. E.1) est due à l'ambiguïté de l'ordre du produit-*. Afin de garder l'invariance de jauge de l'action totale, nous avons introduit des termes de torsion non commutative (voir le 2^{ème} et le 3^{ème} termes de l'action donnée par l'équation (Eq. E.1))

Annexe D

Le Formalisme Mathématique Non commutatif

Les vierbeins non commutatifs au delà de $O(\theta^2)$ sont définis par :

$$\hat{e}_\mu^a = e_\mu^a - i\theta^{\nu\rho} e_{\mu\nu\rho}^a + \theta^{\nu\rho}\theta^{\lambda\tau} e_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^a + O(\theta^3) \quad (\text{D.1})$$

sachant que :

$$e_{\mu\nu\rho}^a = \frac{1}{4} [\omega_\nu^{ac} \partial_\rho e_\mu^d + (\partial_\rho \omega_\mu^{ac} + R_{\rho\mu}^{ac}) e_\nu^d] \eta_{cd} \quad (\text{D.2})$$

et :

$$\begin{aligned} e_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^a = & \frac{1}{32} [2\{R_{\tau\nu}, R_{\mu\rho}\}^{ab} e_\lambda^c - \omega_\lambda^{ab} (D_\rho R_{\tau\mu}^{cd} + \partial_\rho R_{\tau\mu}^{cd}) e_\nu^m \eta_{dm} \\ & - \{\omega_\nu, (D_\rho R_{\tau\mu} + \partial_\rho R_{\tau\mu})\}^{ab} e_\lambda^c - \partial_\tau \{\omega_\nu, (\partial_\rho \omega_\mu + R_{\rho\mu})\}^{ab} e_\lambda^c \\ & - \omega_\lambda^{ab} \partial_\tau (\omega_\nu^{cd} \partial_\rho e_\mu^m + (\partial_\rho \omega_\mu^{cd} + R_{\rho\mu}^{cd}) e_\nu^m) \eta_{dm} + 2\partial_\nu \omega_\lambda^{ab} \partial_\rho \partial_\tau e_\mu^c \\ & - 2\partial_\rho (\partial_\tau \omega_\mu^{ab} + R_{\tau\mu}^{ab}) \partial_\nu e_\lambda^c - \{\omega_\nu, (\partial_\rho \omega_\lambda + R_{\rho\lambda})\}^{ab} \partial_\tau e_\mu^c \\ & - (\partial_\tau \omega_\mu^{ab} + R_{\tau\mu}^{ab}) (\omega_\nu^{cd} \partial_\rho e_\lambda^m + (\partial_\rho \omega_\lambda^{cd} + R_{\rho\lambda}^{cd}) e_\nu^m \eta_{dm})] \eta_{bc} \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

On mentionne ici que $R_{\mu\nu}^{ab}$ est le champ de force associé avec les connections de spin commutatives. L'expression de $R_{\mu\nu}^{ab}$ est donnée par :

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + (\omega_\mu^{ac} \omega_\nu^{db} - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^{db}) \eta_{cd} \quad (D.4)$$

(η_{ab} est la métrique de Minkowski).

Les connections de spin non commutatives $\hat{\omega}_\mu^{AB}$ au delà de $O(\theta^2)$ définies par :

$$\hat{\omega}_\mu^{AB} = \omega_\mu^{AB} - \iota \theta^{\nu\rho} \omega_{\mu\nu\rho}^{AB} + \theta^{\nu\rho} \theta^{\lambda\tau} \omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{AB} + \dots \quad (D.5)$$

telles que :

$$\omega_{\mu\nu\rho}^{AB} = \frac{1}{4} \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\mu + R_{\rho\mu} \}^{AB} \quad (D.6)$$

et :

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu\rho\lambda\tau}^{AB} = & \frac{1}{32} (-\{ \omega_\lambda, \partial_\tau \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\mu + R_{\rho\mu} \} \} + 2\{ \omega_\lambda, \{ R_{\tau\nu}, R_{\mu\rho} \} \} \\ & - \{ \omega_\lambda, \{ \omega_\nu, D_\rho R_{\tau\mu} + \partial_\rho R_{\tau\mu} \} \} - \{ \{ \omega_\nu, \partial_\rho \omega_\lambda + R_{\rho\lambda} \}, (\partial_\tau \omega_\mu + R_{\tau\mu}) \} \\ & + 2[\partial_\nu \omega_\lambda, \partial_\rho (\partial_\tau \omega_\mu + R_{\tau\mu})])^{AB} \end{aligned} \quad (D.7)$$

On note :

$$\{ \alpha, \beta \}^{AB} = \alpha^{AC} \beta_C^B + \beta^{AC} \alpha_C^B \quad (D.8)$$

$$[\alpha, \beta]^{AB} = \alpha^{AC} \beta_C^B - \beta^{AC} \alpha_C^B \quad (D.9)$$

et :

$$D_\mu R_{\rho\sigma}^{AB} = \partial_\mu R_{\rho\sigma}^{AB} + (\omega_\mu^{AC} + R_{\rho\sigma}^{DB} + \omega_\mu^{BC} R_{\rho\sigma}^{DA}) \eta_{CD} \quad (D.10)$$

Annexe E

Construction de L'équation de Dirac Non Commutative à Partir du Principe de Moindre Action

Pour construire l'équation de Dirac non commutative donnée par (Eq. 4.6) à partir du principe de moindre action, on considère l'action non commutative donnée par l'expression suivante :

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} * \left\{ \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\hat{\psi}} * \gamma^\mu * \tilde{D}_\mu \right) * \hat{\psi} + c.c \right] + \frac{i}{4} \bar{\hat{\psi}} * \hat{K}_{\mu\nu\rho} * \hat{X}^{\mu\nu\rho} * \hat{\psi} - \hat{T}^{\mu\nu\rho} * \hat{K}_{\mu\nu\rho} + \mathcal{L}_g \right\} \quad (\text{E.1})$$

sachant que $\hat{K}_{\mu\nu\rho}$ et $\hat{T}^{\mu\nu\rho}$ sont : le tenseur de la cotorsion non commutative et le tenseur de la torsion modifiée non commutative respectivement. Notons que \hat{g} est le déterminant de la métrique non commutative.

Nous avons :

$$\frac{i}{4} \hat{K}_{\mu\nu\rho} \hat{X}^{\mu\nu\rho} = \hat{K} \quad (\text{E.2})$$

tel que :

$$\hat{K} = \sqrt{-\hat{g}} * \left\{ \frac{i}{2} \gamma^a \hat{Y}_a + \frac{i}{2} \hat{e}_b^\mu * \hat{Y}_a * \hat{e}_\mu^b \gamma^a \right\} - \frac{i}{2} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} * \hat{e}_a^\mu \right) \gamma^a \quad (\text{E.3})$$

et

$$\hat{Y}_f = \frac{i}{8} \{ \hat{e}_f^\mu, \hat{\omega}_\mu^{ab} \}_* \Sigma_{ab} \quad (\text{E.4})$$

sachant que :

$$\{a, b\}_* = a * b + b * a \quad (\text{E.5})$$

La dérivé covariante non commutative \tilde{D}_μ est définie par la relation suivante :

$$\hat{e}_a^\mu * \tilde{D}_\mu * \hat{\psi} = \left(\hat{e}_a^\mu * \partial_\mu + \hat{Y}_a \right) * \hat{\psi} \quad (\text{E.6})$$

On peut montrer facilement que le principe variationnel par rapport à $\hat{\psi}$, donne notre équation de Dirac qu'on a utilisée (Eq. 4.6). A partir de l'équation (Eq. E.3) on peut obtenir l'expression suivante dans le cas commutatif :

$$\hat{K} \rightarrow K = \frac{i}{4} \omega_{abc} \{ \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} - \gamma^a \gamma^{[b} \gamma^{c]} \} + \frac{i}{2} \gamma_b^b \gamma^a \quad (\text{E.7})$$

où

$$\gamma_b^b \gamma^a = C_{ab}^b - C_{ba}^b = 2C_{ab}^b \quad (\text{E.8})$$

avec

$$C_{ab}^b = \frac{1}{2} e^\mu_a (e^\nu_b \partial_\mu e_\nu^b) - \frac{1}{2} e^\mu_a e^\nu_b \partial_\nu e_\mu^b \quad (\text{E.9})$$

Notons que [.] est représenté pour l'antisymétrisation par rapport aux indices.

On peut montrer dans ce cas que :

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} e^\mu_a) = \sqrt{-g} \gamma_b^b \gamma^a \quad (\text{E.10})$$

de telle sorte que les tenseurs de la cotorsion et de la torsion modifiée sont donnés par les deux relations suivantes :

$$K_{\alpha\beta\mu} = -Q_{\alpha\beta\mu} - Q_{\mu\alpha\beta} + Q_{\beta\mu\alpha} \quad (\text{E.11})$$

et

$$T_{\mu\nu}{}^\alpha = Q_{\mu\nu}{}^\alpha + \delta_\mu{}^\alpha Q_\nu - \delta_\nu{}^\alpha Q_\mu \quad (\text{E.12})$$

$Q_{\alpha\beta\mu}$ représente le tenseur de la torsion, sachant que :

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\nu}{}^\nu \quad (\text{E.13})$$

Le tenseur de la torsion modifiée non commutative $\hat{T}_{\mu\nu}{}^\alpha$ possède la même forme que le cas commutatif :

$$\hat{T}_{\mu\nu}{}^\alpha = \hat{Q}_{\mu\nu}{}^\alpha + \delta_\mu{}^\alpha \hat{Q}_\nu - \delta_\nu{}^\alpha \hat{Q}_\mu \quad (\text{E.14})$$

Concernant l'invariance de la densité Lagrangienne non commutative par rapport aux transformations de Lorentz local non commutatives (voir Eqs. E.15-E.17), on peut choisir $\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{K}_{\mu\nu\rho}$ et, ou $\hat{T}^{\mu\nu\rho} = \hat{g}_{\rho\alpha} * \hat{T}_{\mu\nu}{}^\alpha$ telles que :

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{\psi} = \hat{\Lambda} * \hat{\psi} \quad (\text{E.15})$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{e}^\mu = \hat{\Lambda} * \hat{e}^\mu - \hat{e}^\mu * \hat{\Lambda} = [\hat{\Lambda}, \hat{e}^\mu]_* \quad (\text{E.16})$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{\omega}_\mu = -\partial_\mu \hat{\Lambda} + [\hat{\Lambda}, \hat{\omega}]_* \quad (\text{E.17})$$

et

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \left[\hat{\bar{\psi}} \hat{K} \hat{\psi} \right] + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \left(\hat{T}^{\mu\nu\rho} \hat{K}_{\mu\nu\rho} \right) + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{\mathcal{L}}_0 = 0 \quad (\text{E.18})$$

où $[A, B]_* = A * B - B * A$. Notons que :

$$\hat{e}^\mu = \gamma^\mu = \hat{e}^\mu_a \gamma^a \quad (\text{E.19})$$

$$\hat{\omega}_\mu = \hat{\omega}^{ab}_\mu \Sigma_{ab} \quad (\text{E.20})$$

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^{ab} \Sigma_{ab} \quad (\text{E.21})$$

Annexe F

Calcul de $|\Gamma(x + iy)|^2$

Pour calculer $|\Gamma(x + iy)|^2$, on a les différents cas suivants :

1. Si $x = 0$

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)} \quad (\text{F.1})$$

2. Si $y = 0$

- (a) $x > 0$

$$|\Gamma(x)|^2 = [(x-1)!]^2 \quad (\text{F.2})$$

- (b) $x < 0$

$$|\Gamma(x)|^2 = \frac{\pi^2}{[-x\Gamma(-x)\sin(\pi x)]^2} \quad (\text{F.3})$$

3. $x \neq 0, y \neq 0$

$$|\Gamma(x + iy)|^2 = \prod_{n=0}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{y^2}{(n+x)^2} \right) \right]^{-1} \quad (\text{F.4})$$

4. Si $\frac{y^2}{x^2} < 1$ ($x \neq 0$), dans ce cas $|\Gamma(x + iy)|$ peut être écrit sous la forme :

$$|\Gamma(x + iy)| \approx |\Gamma(x)| \left[1 - \frac{y^2}{2} \Phi(1, 2, x) \right] \quad (\text{F.5})$$

où $\Phi(1, 2, x)$ est la fonction Herwitz zeta qui est définie par :

$$\Phi(1, 2, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad (\text{F.6})$$

Bibliographie

- [1] G. Jaeger. Quantum Information : An Overview. *Springer Science + Business Media, LLC*. 7, 2007.
- [2] M. A. Nielsen et I. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. *Cambridge University Press*, 2010.
- [3] L. Diósi. A Short Course in Quantum Information Theory : An Approach From Theoretical Physics. Lectures Notes in Physics. *Springer*, 2011.
- [4] D. C. Marinescu et G. M. Marinescu. Classical and Quantum Information. *Elsevier*, 2011.
- [5] G. Benenti, G. Casati et G. Strini. Principles of Quantum Computation and Information. volume I et 2. *World Scientific*, 2004.
- [6] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen. Can Quantum - Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete. *Phys. Rev.* 47, 1935.
- [7] C. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres et W. K. Wootters. Teleporting an Unknown Quantum State Via Dual Classical and Einstein - Podolsky - Rosen Channels. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1993.
- [8] P. W. Shor. Algorithms for Quantum Computation : Discrete Logarithms and Factoring. *Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. (Santa Fe, New Mexico, 1994), p. 124.
- [9] X. S. Ma et - al. Quantum Teleportation Over 143 Kilometers Using Active Feed-Forward. *Nature*. 489, 2012.

- [10] C. Nölleke, A. Neuzner, A. Reiserer, C. Hahn, G. Rempe et S. Ritter. Efficient Teleportation Between Remote Single-Atom Quantum Memories. *Phys. Rev. Lett.* 16, 2013.
- [11] P. Villoresi, T. Jennewein, F. Tamburini, M. Aspelmeyer, C. Bonato, R. Ursin, C. Pernechele, V. Luceri, G Bianco, A. Zeilinger et C. Barbieri. Experimental Verification of the Feasibility of a Quantum Channel Between Space and Earth. *New Journal of Phys.* 10, 2008.
- [12] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki et K. Horodecki. Quantum Entanglement. *Rev. Mod. Phys.* 81, 2009.
- [13] H. C. Lin. Local Approach to Quantum Entanglement. *University College, London*, 2008.
- [14] M. B. Plenio et S. Virmani. An Introduction to Entanglement Measures. *Quant. Comput. Inform.* 7, 2007.
- [15] X. Gao, A. Sergio, K. Chen, S. Fei et X. Li-Jost. Entanglement of Formation and Concurrence for Mixed States. *Front. Comput. Sci. China.* 2, 2008.
- [16] S. Hill et W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Phys. Rev. Lett.* 78, 1997.
- [17] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.* 80, 1998.
- [18] X. Wang. Bipartite Entangled Non-Orthogonal States. *Phys. A : Math. Gen.* 35, 2002.
- [19] H. S. Green. A Generalized Method of Field Quantization. *Phys. Rev.* 90, 1953.
- [20] Y. Ohnuki et S. Kamefuchi. Some General Properties of Para-Fermi Field Theory. *Phys. Rev.* 170, 1968.
- [21] Y. Ohnuki et S. Kamefuchi. Quantum Field Theory and Parastatistics. *University of Tokyo Press*, 1982.

- [22] M. M. Karev et K. V. Kademova. A Note on a New Quantization Spin-Half Particles With an Infinite Maximum Occupation Number. *Phys. Lett. B.* 34, 1971.
- [23] M. Omote, Y. Ohnuki et S. Kamefuchi. Fermi-Bose Similarity. *Prog. Theor. Phys.* 56, 1976.
- [24] E. P. Wigner. Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?. *Phys. Rev.* 77, 1950.
- [25] K. V. Kademova et M. M. Kraev. On a New Parastatistics in Field Theory. *Nucl. Phys. B.* 26, 1971.
- [26] O. W. Greenberg. Generalizations of Quantum Statistics. *Compendium of Quantum Physics*, 2009.
- [27] N. Mebarki, F. Benrachi, H. Aissaoui et A. Boudine. The Relationship Between the Paraquantization and Deformation. *Turk. J. Phys.* 21, 1997.
- [28] M. F. Ghiti, N. Mebarki et M. T. Rouabah. Paraquantum Squeezed and Coherent States : New Type of Entanglement. *Proc. 8th Int. Conf. On Progress in Theoretical Physics*, eds. N. Mebarki, J. Mimouni, N. Belaloui and K. Ait Moussa. (Meleville, New York, 2012), p. 238.
- [29] C. Aragone, E. Chalbaud et S. Salamo. Intelligent Spin States. *J. Math. Phys.* 17, 1976.
- [30] G. M. Abd Al-Kader et A. S. F. Obada. On SU (1, 1) Intelligent Coherent States. *Phys. Scr.* 78, 2007.
- [31] A. K. Pati. Uncertainty Relation of Anandan-Aharonov and Intelligent States. *Phys. Lett. A.* 262, 1999.
- [32] M. Jafarpour, A. Niroubakhsh et M. Ashrafpour. Generalized Intelligent States for Arbitrary Spin. *Adv. Studies. Theor. Phys.* 4, 2010.
- [33] A. H. El Kinani et M. Daoud. Generalized Coherent and Intelligent States for Exact Solvable Quantum Systems. *J. Math. Phys.* 43, 2002.
- [34] A. H. EL Kinani et M. Daoud. Generalized Intelligent States for an Arbitrary Quantum System. *J. Phys. A : Math. Gen.* 34, 2001.

- [35] V. C. Ruby et M. Senthilvelan. On the Generalized Intelligent States and Certain Related Nonclassical States of a Quantum Exactly Solvable Nonlinear Oscillator. *J. Phys. A : Math. Theor.* 43, 2010.
- [36] R. J. Glauber. The Quantum Theory of Optical Coherence. *Phys. Rev.* 130, 1963.
- [37] R. J. Glauber. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Phys. Rev.* 131, 1963.
- [38] J. R. Klauder. Path Integrals and Stationary-Phase Approximations. *Phys. Rev. D.* 19, 1979.
- [39] H. Ziaee pour. Quantum Coherent States in Cosmology. *J. of Phys : Conf Series.* 626, 2015.
- [40] G. Junker et P. Roy. Nonlinear Coherent States Associated with Conditionally Exactly Solvable Problems. *Phys. Lett. A.* 257, 1999.
- [41] F. Connata, G. Junker et J. Trost. Solvable Potentials. Non-Linear Algebras and Associated Coherent States. *Proc. International Conference on Particles, Fields and Gravitation.* ed. J. Rembielinski. (Woodbury, USA : AIP 1998), P. 209.
- [42] R. G. Littlejohn. The Semiclassical Evolution of Wave Packets. *Phys. Rept.* 138, 1986.
- [43] T. Fukui et N. Aizawa. Shape Invariant Potentials and An Associated Coherent State. *Phys. Lett. A.* 180, 1993.
- [44] W. M. Zhang, D. H. Feng et R. Gilmore. Coherent States : Theory and Some Applications. *Rev. Mod. Phys.* 62, 1990.
- [45] C. C. Gerry. Coherent States and a Path Integral for the Morse Oscillator. *Phys. Rev. A.* 33, 1986.
- [46] S. Kais et R. D. Levine. Coherent States for the Morse Oscillator. *Phys. Rev. A.* 41, 1990.

- [47] A. N. F. Aleixo et A. B. Balantekin. An Algebraic Construction of Generalized Coherent States for Shape-Invariant Potentials. *J. Phys. A : Math. Gen.* 37, 2004.
- [48] H. Fu, X. Wang et A. I. Solomon. Maximal Entanglement of Nonorthogonal States : Classification. *Phys. Lett. A.* 291, 2001.
- [49] N. Mebarki, L. Khodja et S. Zaim. On the Non Commutative Space-time Bianchi I Universe and Particles Pair Creation Process. *Electron. J. Theor. Phys.* 7, 2010.
- [50] N. Mebarki, S. Zaim, L. Khodja et H. Aissaoui. Gauge Gravity in Non Commutative De Sitter Space and Pair Creation. *Phys. Scri.* 78, 2008.
- [51] S. Zaim, A. Boudine, N. Mebarki et M. Moumni, Seiberg-Witten Non-commutative Minimal Supersymmetric Standard Model. *Rom. J. Phys.* 53, 2008.
- [52] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin et P. L. Knight. Quantifying Entanglement. *Phys. Rev. Lett.* 78, 1997.
- [53] N. Gisin et H. B. Pasquinucci. Bell Inequality, Bell States and Maximally Entangled States for n Qubits. *Phys. Lett. A.* 246, 1998.
- [54] I. Fuentes, R. B. Mann, E. M. Martinez et S. Moradi. Entanglement of Dirac Fields in an Expanding Spacetime. *Phys. Rev. D.* 82, 2010.
- [55] J. L. Ball, I. Fuentes-Schuller et F. P. Schuller. Entanglement in an Expanding Spacetime. *Phys. Lett. A.* 359, 2006.
- [56] D. E. Bruschi, A. Dragan, I. Fuentes et J. Louko. Particle and Anti-Particle Bosonic Entanglement in Non-Inertial Frames. *Phys. Rev. D.* 86, 2012.
- [57] P. M. Alsing et I. fuentes. Observer Dependent Entanglement. *Class. Quant. Grav.* 29, 2012.
- [58] P. M. Alsing, I. Fuentes-Schuller, R. B. Mann, T. E. Tessier. Entanglement of Dirac Fields in Non-Inertial Frames. *Phys. Rev. A.* 74, 2006.

- [59] H. G. Compeán et F. R. Padilla. Quantum Entanglement in Plebański-Demiański Spacetimes. *Class. Quant. Grav.* 30, 2013.
- [60] H. S. Snyder. Quantized Space time. *Phys. Rev.* 71, 1947.
- [61] N. Seiberg et E. Witten. String Theory and Noncommutative Geometry. *JHEP.* 9909, 1999.
- [62] M. Chaichian, A. Tureanu et G. Zet. Corrections to Schwarzschild Solution in Noncommutative Gauge Theory of Gravity. *Phys.Lett. B.* 660, 2008.
- [63] A. H. Chamseddine. Deforming Einstein's gravity. *Phys. lett. B.* 504, 2001.
- [64] N. G. Deshpande. A Review of Non Commutative Gauge Theories. *Pramana-Journal of Physics.* 60, 2003.
- [65] A. H. Chamseddine. Invariant Actions for Noncommutative Gravity. *J. Math. Phys.* 44, 2003.
- [66] P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp et J. Wess. A Gravity Theory on Noncommutative Spaces. *Class. Quant. Grav.* 22, 2005.
- [67] R. J. Szabo. Quantum Gravity, Field Theory and Signatures of Noncommutative Spacetime. *General Relativity and Gravitation.* 42, 2010.
- [68] F. Khelili. Aspects Mathématiques et Physiques de la Géométrie Non Commutative. *The University of Mentouri, Constantine,* 2007.
- [69] W. Behr, N. G. Deshpande, G. Duplancic, P. Schupp, J. Trampetic et J. Wess. The $Z \rightarrow \gamma\gamma$, gg Decays in the Noncommutative Standard Model. *Eur. Phys. J. C.* 29, 2003.
- [70] M. Buric, D. Latas, V. Radovanovic et J. Trampetic. Nonzero $Z \rightarrow \gamma\gamma$ Decays in the Renormalizable Gauge Sector of the Noncommutative Standard Model. *Phys. Rev. D.* 75, 2007.
- [71] B. Melic, K. Passek-Kumericki et J. Trampetic. Quarkonia Decays Into Two Photons Induced by the Space-time Non-Commutativity. *Phys. Rev. D.* 72, 2005.

- [72] M. Haghghat, M. Ettefaghi et M. Zeinali. Photon Neutrino Scattering in Noncommutative Space *Phys. Rev. D.* 73, 2006.
- [73] A. Alboteanu, T. Ohl et R. Ruckl. The Noncommutative Standard Model at $O(\theta^2)$. *Phys. Rev. D.* 76, 2007.
- [74] P. K. Das, N. G. Deshpande et G. Rajasekaran. Moller and Bhaba Scattering in the Noncommutative SM *Phys. Rev. D.* 77, 2008.
- [75] A. Prakash, A. Mitra et P. K. Das. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Scattering in the Noncommutative Standard Model *Phys. Rev. D.* 82, 2010.
- [76] R. Horvat, D. Kekez et J. Trampetic. Spacetime Noncommutativity and Ultra-High Energy Cosmic Ray Experiments. *Phys. Rev. D.* 83, 2011.
- [77] S. Doplicher, K. Fredenhagen et J. E. Roberts. The Quantum Structure of Space-time at the Planck Scale and Quantum Fields. *Commun. Math. Phys.* 172, 1995.
- [78] S. Majid. Meaning of Noncommutative Geometry and the Planck-Scale Quantum Group. *Springer Lect. Notes Phys.* 541, 2000.
- [79] R. Horvat et J. Trampetic. A Bound on the Scale of Spacetime Noncommutativity From the Reheating Phase After Inflation. *Phys. Lett. B.* 710, 2012.
- [80] W. Kim et D. Lee. Bound of Noncommutativity Parameter Based on Black Hole Entropy. *Mod. Phys. Lett. A.* 25, 2010.
- [81] Ya.B. Zeldovich et A. A. Starobinsky. Particle Production and Vacuum Polarization in an Anisotropic Gravitational Field. *Sov. Phys. JETP.* 34, 1972.
- [82] D. M. Chitre et J. B. Hartle. Path Integral Quantization and Cosmological Particle Production : An Example. *Phys. Rev. D.* 16, 1977.
- [83] A. A. Grib, S. G. Mamaev et V. M. Mostepanenko, Quantum Vacuum Effects in Strong Fields. *Friedmann Laboratory Pub*, 1994.
- [84] I. L. Bukhbinder. Creation of Scalar Particles in Cosmological Models. *Fizika.* 23, 1980.

- [85] V. M. Villalba et W. Greiner. Creation of Dirac Particles in the Presence of a Constant Electric Field in an Anisotropic Bianchi I Universe. *Mod. Phys. Lett. A.* 17, 2002.
- [86] V. M. Villalba. Particle Production by a Spatially Homogenous Time-Dependent Electric Field. *Revista Mexicana De Fisica S.* 52, 2006.
- [87] V. M. Villalba et W. Greiner. Creation of Scalar and Dirac Particles in the Presence of a Time Varying Electric Field in an Anisotropic Bianchi Type I Universe. *Phys. Rev. D.* 65, 2001.
- [88] N. D. Birrel et P. C. W. Davies. Quantum Fields in Curved Space. *Cambridge*, 1982.
- [89] M. Abramowitz et I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, *Dover Publications, INC.*, *New York*, 1964.

Theoretical Study and Applications in Quantum Computing, Entanglement and Decoherence

Abstract

In this thesis we have studied a quantum phenomenon called quantum entanglement in different contexts. The mathematical formalism of paraquantum theory has been used to derive the even and odd paraquantum coherent states. We have used the concurrence to measure the bipartite entanglement of paraquantum coherent state. The behavior of the concurrence in function of the paraquantization parameter c and the coherence parameter α has been studied and analyzed. It is shown that the paraquantisation has an inverse relation with the bipartite quantum entanglement. In the second context we have studied the quantum entanglement in noncommutative Bianchi I space-time. In the first step, we have studied the pair creation mechanism. First of all, we have derived the noncommutative Dirac equation and differentiate between positive and negative modes. Then, we have calculated the fermions-antifermions pair creation density using the Bogoliubov coefficients. To measure the modes entanglement we have used the Von Neumann entropy $S_{Q,E}$. The behavior of $S_{Q,E}$ in function of noncommutativity θ parameter and k_{\perp} -modes frequencies has been presented. It is shown that the noncommutativity plays an important role and it has a direct effect on quantum entanglement, such that in a region it plays the role of gravity and in another region it behaves like a repulsive force. The results and discussions of variations of $S_{Q,E}$ with respect to the behaviors of noncommutativity have been presented.

Key Words :

Quantum Information, Quantum Entanglement, Paraquantum Theory, Concurrence, Noncommutative Geometry, Von Neumann entropy.

دراسة نظرية وتطبيقات في الحساب الكوانتي، تشابك و التلاشي

ملخص

لقد قمنا في هذه الأطروحة بدراسة ظاهرة كوانتية تسمى التشابك الكوانتي في عدة مجالات. باستخدام الشكل الرياضي لنظرية التكميم المعمم لقد حصلنا على الحالات المترابطة ذات التكميم المعمم الزوجية و الفردية. لتكميم التشابك الثنائي الكوانتي لهذه الحالات المترابطة قمنا باستعمال «المنافسة» التي نرمر لها بالرمز « C » ولقد قمنا كذلك بدراسة و تحليل سلوك هذا المقدار الفيزيائي بدلالة عامل التكميم المعمم « C » وعامل الترابط « α ». ولقد بينا أن هناك علاقة عكسية بين التكميم المعمم والتشابك الكوانتي، هذا في المجال الأول أما فيما يخص المجال الثاني، فلقد قمنا بدراسة التشابك الكوانتي في الفضاء الزمكاني ل Bianchi I في الهندسة الاتبديلية. في أول خطوة، قمنا بدراسة تقنية خلق الثنائيات، حيث قمنا بإنشاء معادلة Dirac الاتبديلية والتميز بين الأنماط الموجبة و السالبة. ثانيا قمنا بحساب كثافة خلق هذه الثنائيات فيرميون-ضد فيرميون باستعمال معاملات Bogoliubov. لحساب التشابك الكوانتي للأنماط، قمنا باستعمال مقدار فيزيائي آخر يسمى الأنتروبي الخاصة ب Von Neumann ونرمر لها ب « $S_{q.E}$ ». لقد بينا في هذه الأطروحة سلوك « $S_{q.E}$ » بدلالة عامل الهندسة الاتبديلية θ وتواتر الأنماط k_{\perp} . من خلال دراستنا تبين أن الهندسة الاتبديلية تلعب دور جد هام و مباشر في ما يخص التشابك الكوانتي، حيث تبين أنه في منطقة معينة يمكن أن تلعب دور الجاذبية و في منطقة أخرى يمكن أن تلعب دور قوة دافعة. في هذه الأطروحة النتائج و المناقشات الخاصة بتغير $S_{q.E}$ بالنسبة للهندسة الاتبديلية معطاة بالتفصيل.

الكلمات المفتاحية :

المعلوماتية الكوانتية، التشابك الكوانتي، نظرية التكميم المعمم، المنافسة، الهندسة الاتبديلية، الأنتروبي.

Etude Théorique et Applications en Calcul Quantique, Entanglement et Décohérence

Résumé

Dans cette thèse nous avons étudié un phénomène quantique qui est l'intrication quantique dans différents contextes. Le formalisme mathématique de la théorie de la paraquantification a été utilisé pour construire les états cohérents paraquantiques pairs et impairs. Nous avons utilisé la concurrence pour quantifier l'intrication bipartite d'un état cohérent paraquantique. Le comportement de la concurrence en fonction du paramètre de la paraquantification c et du paramètre de la cohérence α a été étudié et analysé. Il est montré que la paraquantification a une relation inverse avec l'intrication quantique bipartite. Dans le deuxième contexte nous avons étudié l'intrication quantique dans l'espace-temps de Bianchi I non commutatif. Comme un premier pas, nous avons étudié le mécanisme de création des paires. Tout d'abord on a construit l'équation de Dirac non commutative et distingué les modes positifs des modes négatifs. Ensuite nous avons calculé la densité de création des paires fermions-antifermions en utilisant les coefficients de Bogoliubov. Pour quantifier l'intrication des modes, nous avons utilisé l'entropie de Von Neumann $S_{Q.E}$. Le comportement de $S_{Q.E}$ en fonction du paramètre de la non commutativité θ et des fréquences des modes k_{\perp} a été présenté. Il est montré que la non commutativité joue un rôle très important et elle a un effet direct sur l'intrication, telle que dans une région elle joue le rôle de la gravitation et dans une autre elle se comporte comme une force répulsive. Les résultats et les discussions de la variation de $S_{Q.E}$ par rapport à ce comportement de la non commutativité ont été présentés.

Mots Clés :

Information quantique, Intrication quantique, Théorie Paraquantique, Concurrence, Géométrie Non Commutative, Entropie de Von Neumann.