

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FRERES MENTOURI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

Thèse

**PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCE
PHYSIQUE**

SPECIALITE : Physique théorique

THEME

**Etude phénoménologique du secteur des interactions fortes
dans les théories au-delà du Modèle Standard**

Par : BEKLI Mohamed Réda

Soutenue le : 08/06/2015

Devant le jury :

Président : BELALOUI Nadir Prof. Université Frères Mentouri

Rapporteur : MEBARKI Nouredine Prof. Université Frères Mentouri

Examineurs :

BOUDA Ahmed Prof. Université de Béjaïa

AISSAOUI Habib M.C.A. Université Frères Mentouri

GHARBI Abdelhakim M.C.A. Université de Béjaïa

ZAIM Slimane Prof. Université de Batna

Remerciements

Tout d'abord, je suis très reconnaissant à mon directeur de thèse Monsieur MEBARKI Nouredine, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir proposé le problème et accepté de diriger ce travail. J'ai beaucoup apprécié son soutien et je tiens à signaler que ses conseils se sont toujours révélés judicieux. Ses remarques constructives m'ont été très précieuses pour la rédaction de cette thèse et je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude.

J'ai aussi un grand plaisir à remercier Monsieur BELALOUI Nadir, Professeur à la même Université, pour avoir bien voulu juger ce travail en me faisant l'honneur de présider le jury.

J'adresse également mes très vifs remerciements à Monsieur BOUDA Ahmed, Professeur à l'Université de Béjaïa, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Comme je suis aussi très reconnaissant à Monsieur AISSAOUI Habib, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir honoré le jury en qualité d'examineur.

Un grand merci à Monsieur GHARBI Abdelhakim, Maître de conférence à l'Université de Béjaïa, d'avoir honoré le jury en qualité d'examineur.

Ma dette de reconnaissance va aussi à Monsieur ZAIM Slimane, Professeur à l'Université de Batna, d'avoir honoré le jury en qualité d'examineur.

Je tiens également à remercier ma mère, ma famille, mes amis et mes collègues de leur soutien, de leur sourire, de leur joie de vivre

Enfin, cette thèse n'aurait pas pu aboutir sans l'appui moral de ma femme Ilhem. Qu'elle trouve ici mes sincères remerciements.

Je dédie ce travail à mon défunt père Salah, qui m'a toujours incité à étudier la physique, et sans qui je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui.

Table des matières

Introduction	3
Chapitre 1 : La physique au-delà du modèle standard	5
1. Introduction	6
2. Les faiblesses du SM	6
3. Regard sur la physique au-delà du SM	8
4. QCD non-commutative	10
5. Le modèle standard non-commutatif	14
Chapitre 2 : Applications en QCD du modèle du gluon mou et/ou colinéaire	16
1. Introduction	17
2. Formalisme théorique	18
3. Applications	22
3.1 Sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$	22
3.2 Sous-processus $q\gamma \rightarrow \gamma q$	27
3.3 Sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$	32
3.4 Sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$	33
3.5 Sous-processus $qg \rightarrow \gamma q$	36
4. Résultats numériques et Conclusion	40
Chapitre 3 : Production de photons directs dans le cadre du MINIMAL-NCSM	46
1. Introduction	47
2. Production de photons directs	48
3. Comportement de la section efficace au niveau partonique	52
4. Section efficace inclusive	57

Chapitre 4 : Violation de l'invariance d'échelle dans le NCSM	62
1. Introduction	63
2. Amplitude de diffusion et violation de l'invariance d'échelle	63
3. Equation d'évolution	65
4. Résolution de NC-DGLAP dans l'espace des moments	68
Conclusion	70
Annexe A : Règles de Feynman	72
Annexe B : Calculs numériques	74
Bibliographie	92

INTRODUCTION

Depuis la formulation du modèle standard de la physique des particules, les physiciens cherchent une théorie alternative, et cela pour remédier à certaines lacunes et insuffisances de ce modèle, dont la plus importante est l'unification de la gravitation avec les trois autres interactions fondamentales (Forte, Faible, électromagnétique); mais à l'heure actuelle, aucune de ces formulations n'a reçu une preuve expérimentale irréfutable, et par conséquent, la satisfaction de la communauté scientifique. Cela dit, ces différentes formulations ont pour avantage principal de guider les expérimentateurs dans leurs recherches.

Dans le cadre de notre thèse, et vue la multitude des théories alternatives, nous avons préféré focaliser nos recherches sur une théorie bien précise, le modèle standard non-commutatif (NCSM), basé sur la non-commutativité des variables de l'espace et du temps. En physique des particules, ce dernier introduit de nouvelles contribution et des vertex totalement nouveaux qui n'ont pas de contreparties dans le cas ordinaire (commutatif), ce qui permet de tester ces prédictions, notamment dans les grands collisionneurs, tel que le LHC (Large Hadron Collider) du CERN et le Tevatron du Fermilab.

Dans la première partie du premier chapitre on a relevé les lacunes du modèle standard, suivi d'un bref survol des théories alternatives. Nous avons également présenté le formalisme théorique du modèle standard non-commutatif basé sur le produit Moyal-Weyl et les Seiberg-Witten Maps, et cela principalement dans le secteur de l'interaction forte.

Habituellement, dans certains processus qui se produisent à très hautes énergies, les corrections d'ordres supérieures (HOC) en physique des particules, et des théories au-delà du modèle standard, sont très complexes et très difficiles à exprimer analytiquement, ce qui rend le recours au numérique inévitable. C'est là que l'approche des gluons mous et/ou colinéaires peut nous venir en aide dans la détermination et l'estimation des HOC, notamment pour les processus incluant les fonctions de structures et/ou de fragmentations.

Ainsi, dans le second chapitre, nous nous sommes intéressé à certaines applications de la nouvelle version de l'approche basée sur les gluons mous et/ou colinéaires. Nous commencerons par présenter le formalisme théorique, ensuite on passe aux calculs de certains sous-processus, à savoir: $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $qg \rightarrow q\gamma$.

Vers la fin de ce chapitre, et pour tester cette nouvelle approche, des gluons mous et/ou colinéaires, une comparaison avec les données expérimentales de CMS et Atlas (pour le LHC), et de CDF (pour le Tevatron), a été faite, et cela dans le cas de la production de photons directs.

L'exploration de la QCD non-commutative via les collisions hadroniques se fait par l'intermédiaire de divers processus. Dans le troisième chapitre, on s'est intéressé à la production de photons directs produits suite à la collision inélastique proton-antiproton. Au niveau partonique, on a pu déduire la section efficace différentielle de différents sous processus entre gluons et quarks, en tenant compte de la rotation du globe terrestre. Ainsi, on a remarqué la prédominance des effets non-commutatifs à très haute énergie et suivant certaines directions spatiales. Nous avons par la suite déduit la section efficace inclusive, ce qui nous a permis notamment de confronter nos résultats aux données du Tevatron.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on s'est intéressé à l'un des aspects les moins explorés du modèle standard non-commutatif (NCSM) ; Il s'agit du secteur hadronique. Dans ce cadre, la contribution des effets non-commutatifs dans les fonctions de structures doit être connue.

Notre point de départ pour résoudre ce problème, est le processus de la diffusion profondément inélastique de leptons sur un nucléon (celui-ci est considérée comme le meilleur moyen pour sonder l'intérieur des nucléons), ce qui nous a permis de déduire l'équivalent de l'équation d'évolution des fonctions de structures DGLAP, mais dans un espace non-commutatif.

Enfin, une attention particulière est également accordée dans ce chapitre à la violation de l'invariance d'échelle qui se manifeste à l'ordre dominant de la théorie des perturbations dans le cadre du NCSM.

CHAPITRE 1

La physique au-delà du modèle standard

1. Introduction

Le modèle standard, développé au cours du vingtième siècle, est actuellement la théorie la plus complète décrivant l'interaction entre particules. De nombreuses expériences ont permis l'approbation des prédictions de ce modèle avec une précision extrême.

Malgré ce grand succès, les physiciens sont loin d'être satisfaits, et continuent à chercher une théorie alternative, et cela pour remédier à certaines lacunes et insuffisances de ce modèle, dont la plus importante est l'unification de la gravitation avec les trois autres interactions fondamentales (Forte, Faible, électromagnétique).

A l'heure actuelle, aucune de ces nouvelles formulations n'a reçues une preuve expérimentale irréfutable, et moins encore, la satisfaction de la communauté scientifique. Cela dit, ces différentes formulations ont pour avantage principal de guider les expérimentateurs dans leurs quêtes de la théorie ultime.

L'une des voies les plus prometteuses est le modèle standard non-commutatif (NCSM). En effet, depuis une vingtaine d'années, la physique non-commutative a commencée à suscité l'intérêt d'un grand nombre de physiciens. Cela revient, principalement, aux progrès récents dans le domaine de la théorie des cordes où on voit surgir naturellement la géométrie non-commutative dans le contexte des D-branes.

Le NCSM est fondé sur la non-commutativité des variables de l'espace et du temps, et prévoit ainsi des phénomènes nouveaux qui n'ont pas de contreparties dans le cas ordinaire (commutatif), par l'intermédiaire des nouveaux vertex qui surgissent dans la théorie.

2. Les faiblesses du SM

Le Modèle Standard, formulé initialement par Glashow, Weinberg et Salam, décrit les interactions fortes, faibles et électromagnétiques dans le cadre de la théorie quantique des champs [1, 2, 3]. Il constitue une théorie de jauge renormalisable dont le groupe de symétrie est $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Dans ce modèle, on distingue deux familles de particules élémentaires, les leptons (non soumis à l'interaction forte) et les quarks. Ces même particules, appelées aussi fermions (de spin demi-entier), sont réparties suivant trois générations. Celles-ci ne diffèrent l'une de l'autre que par la masse des particules. Par ailleurs, on associe à chacune des trois forces fondamentales des bosons de jauge : huit gluons pour l'interaction Forte, les trois bosons Z^0 ,

W^- et W^+ pour l'interaction Faible, et le photon pour l'interaction électromagnétique. L'interaction entre les particules élémentaires se produit via l'échange de ces bosons de jauge.

Le Modèle Standard a permis la description d'un très grand nombre de phénomènes, notamment en physique des particules, et a reçu de nombreuses confirmations expérimentales avec la découverte des courants neutres en 1973, puis celle des bosons W et Z en 1983, et celle du quark top en 1994. Enfin, la dernière en date et l'une des plus emblématiques, est la découverte du Boson de Higgs en 2012 par le LHC, qui surgit dans la théorie par le mécanisme de brisure spontanée de symétrie.

Cependant, on est certain actuellement qu'il ne s'agit pas de la théorie fondamentale de la nature que les physiciens cherchent, mais d'une théorie incomplète de basses énergies. En effet, le modèle standard comporte de nombreuses lacunes, dont les plus importantes sont:

- Il ne prédit pas plusieurs paramètres, 19 en tout: Les 3 constantes de couplages des interactions électromagnétique, faible et forte, la masse des 6 quarks et des 3 leptons, les 3 angles de mélange, la masse du boson de Higgs M_H et sa valeur moyenne dans le vide v , et enfin l'angle θ de la chromodynamique quantique.
- Il n'explique pas la réplique en trois générations des douze fermions, des 6 quarks et des 6 leptons, qui ne diffèrent l'une de l'autre que par la masse des particules. En effet, de la première à la troisième famille, les propriétés des particules sont identiques, sauf pour leurs masses qui augmentent de plus en plus.
- Il ne résout pas le problème de la quantification de la charge. Pourquoi, par exemple, la charge du proton est exactement l'opposé de celle de l'électron.
- Il n'explique pas le processus cosmologique lors duquel une asymétrie entre matière ordinaire et antimatière s'est produite, et qu'on appelle Baryogenèse, de sorte qu'il subsiste dans l'univers actuel un léger excès de matière ordinaire par rapport à l'autre.
- Il n'intègre pas la quatrième interaction fondamentale, la gravitation.

Enfin, à tout cela, on peut également inclure les problèmes de la cosmologie observationnelle concernant la nature de la matière noire, mise en évidence dans l'écart observé entre la masse dynamique et la masse lumineuse des galaxies et des amas de galaxies, ainsi que l'origine de la mystérieuse énergie sombre, une forme d'énergie nécessaire pour expliquer notamment l'expansion accélérée de l'univers mise en évidence par deux équipes internationales en 1998.

3. Regard sur la physique au-delà du SM

Plusieurs modèles alternatifs ou extensions du SM ont été proposés pour s'affranchir d'une grande partie des problèmes déjà cités, dont les plus importantes sont [4,5,6]:

- Modèles composites: Dans le modèle standard, la matière est constituée de particules élémentaires, considérées comme les éléments fondamentaux de notre univers. Cela dit, certains physiciens n'excluent pas l'idée d'une sous-structure, constituée de nouvelles particules appelés préons.
- Technicouleur : Au cours des années 1970 Stephen Weinberg et Leonard Susskind ont proposé, indépendamment, l'existence d'une nouvelle interaction entre les particules composites. Cette théorie, fortement inspirée de la QCD, comme son nom l'indique, prédit l'existence de nouvelles particules, les technifermions. La brisure de la symétrie chirale de la technicouleur, tout comme pour le pion dans le cas de la QCD, implique l'existence de bosons de Goldstone, les technipions. En d'autres termes, dans cette théorie, au lieu d'introduire une nouvelle particule élémentaire, comme dans le mécanisme de Higgs, on introduit une nouvelle interaction asymptotiquement libre, similaire dans ce sens à l'interaction forte, appelée Technicouleur.
- Grande unification (TGU : théories grandement unifiées): la structure en groupe du SM nous laisse supposer que cette symétrie doit être unifiée à une certaine échelle d'énergie. Autrement dit, la symétrie du groupe unifié, qui contient $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ comme sous-groupe, doit être brisée à une échelle d'énergies suffisamment élevées pour garantir l'absence de phénomènes nouveaux aux énergies déjà explorées. Les plus importants sont: $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 de rangs 4, 5 et 6 respectivement. L'argument en faveur de cette unification est la dépendance en énergie du couplage efficace. Ceci dit, si les quarks et les leptons appartiennent à une même représentation irréductible de ce groupe, il y aurait forcément des vecteurs de jauge, appelés leptoquarks, qui induiront des transitions des uns aux autres. De telles transitions violent la conservation des nombres leptonique et baryonique et prédisent la désintégration du proton.
- L'une des extensions naturelles du modèle standard est le modèle symétrique gauche-droite, qui permet de restaurer la symétrie de parité (CP violation), du moins à haute énergie, et

génère des masses pour les neutrinos (oscillations des neutrinos). Ce modèle est basé sur l'invariance locale sous le groupe $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$.

- Géométrie non-commutative : La NCG a été conçue pour deux raisons: la première, répondre à des besoins dans le domaine des mathématiques, dont la généralisation des outils de la géométrie ordinaire (structures différentiables, métriques, actions de groupes, fibrations, connexions. . .). La seconde, la reformulation dans le cadre de la NCG des deux principales théories de la physique moderne : la relativité générale et la théorie quantique des champs. En d'autres termes, l'objectif principal de la NCG est de fusionner en un seul modèle l'aspect opératoire de la mécanique quantique et l'aspect géométrique de la Relativité Générale.
- Modèles à dimensions supplémentaires, dont l'un les plus célèbres est la théorie de Kaluza-Klein. Dans ces modèles on ajoute aux quatre dimensions étendues apparentes, l'espace et le temps, des dimensions généralement enroulées.
- Supersymétrie (SUSY): Elle postule l'existence d'une symétrie entre les fermions et les bosons vecteurs. Ainsi, à chaque particule fermionique, on lui associe un super-partenaire de spin entier, et à chaque boson on lui associe un super-partenaire de spin demi-entier. Cela dit, le fait qu'on n'a jamais détecté un super-partenaire dans les grands collisionneurs, tel que le Tevatron et le LHC, soulève des doutes sur la véracité de cette théorie.
- La théorie des cordes est l'un des domaines de recherche les plus actifs de la physique théorique. Dans cette théorie, les particules ne sont plus considérées comme ponctuelles, mais sous forme de cordelettes vibrantes qui baignent dans un univers à plusieurs dimensions. Même si elle prétend réconcilier les quatre forces fondamentales et fournir une description de la gravité quantique, la théorie des cordes reste incomplète.
- La gravité quantique s'efforce à réconcilier les deux théories basées sur un formalisme mathématique radicalement différent, la mécanique quantique et la théorie de la gravitation (relativité générale). L'une des voies les plus prometteuses est la gravitation quantique à boucles.

Pour l'instant, même si aucune de ces théories n'a reçu une confirmation expérimentale, elles permettent néanmoins de guider l'expérimentateur dans sa quête des nouveaux indices qui marquent la nouvelle physique. Par ailleurs, l'extrême exactitude du SM à notre échelle oblige les physiciens à orienter leurs recherches, d'une part, aux limites de l'infiniment grand et l'étude des phénomènes les plus violents de l'univers, avec la construction de différents instruments d'observation, et d'autre part, vers l'infiniment petit, avec la construction de

nouveaux accélérateurs pour réaliser des collisions à des énergies toujours plus grandes. L'un d'eux est le LHC (Large Hadron Collider) [7,8,9]. L'accélérateur de particule du CERN installé sur la frontière franco-suisse. Son objectif est de faire entrer en collision frontale deux faisceaux de particules subatomiques de la famille des hadrons, les protons, avec une énergie au centre de masse qui pourra atteindre $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ et une luminosité $L = 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ sans précédent. Des collisions entre ions de plomb (Pb-Pb) sont également programmées. Cette gigantesque machine avec son énergie colossale pourrait nous éclairer d'avantage sur la physique au-delà du modèle standard.

4. QCD non-commutative

C'est dans l'une de ces lettres à Peirel, en 1930, qu'a été proposée pour la première fois la non-commutativité des coordonnées par Heisenberg. Plus tard, d'autres physiciens se sont intéressés à cette nouvelle approche. Cependant, c'est depuis une vingtaine d'années uniquement, que la physique non-commutative a commencée à susciter vraiment l'intérêt d'un grand nombre de physiciens. Cela revient, principalement, aux progrès récents dans le domaine de la théorie des cordes où on voit surgir naturellement la géométrie non-commutative dans le contexte des D-branes.

Le modèle standard non-commutatif est basé sur la non-commutativité des variables de l'espace et du temps :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i \theta_{\mu\nu} = i \frac{C_{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} \quad (1.1)$$

Ici, $\theta_{\mu\nu}$ est une matrice antisymétrique. Cette matrice a l'unité d'une surface, et, par analogie avec la constante \hbar en mécanique quantique, elle fixe la valeur du plus petit élément de surface mesurable. Quant au paramètre Λ_{NC} , qui a la dimension d'une énergie (dans le système d'unités naturelles), il fut introduit pour absorber l'ordre de grandeur d'apparition des phénomènes non-commutatifs. Ce paramètre a motivé beaucoup de physiciens pour fixer ça borne inférieure [10]. On espère que cette échelle est de l'ordre de quelques TeV uniquement, afin de pouvoir observer les effets non-commutatif.

Dans le choix de la matrice θ , nous nous somme intéressé uniquement au cas où elle est indépendante de \hat{x} . D'ailleurs, les relations de commutations canoniques de la mécanique quantique sont de ce type.

Prenant la matrice C sous sa forme la plus générale :

$$C_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ -C_{01} & 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{02} & -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{03} & -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Reconstruire tout le modèle standard en tenant compte de la non-commutativité des variables de l'espace-temps n'est pas aisé. Pour contourner ce problème, on travaille dans une formulation équivalente de la théorie des champs quantique qui dépend des variables d'espace-temps commutatives, mais en remplaçant la multiplication ordinaire par le produit de Moyal –Weyl :

$$(f * g)(x) = e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} f(x) g(y) \Big|_{y \rightarrow x} \quad (1.3)$$

Au premier ordre, on exprime ce produit sous la forme :

$$(f * g)(x) = f(x) g(y) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(y) + O(\theta^2) \quad (1.4)$$

Ce produit permet d'associer à chaque élément de l'algèbre A_x des polynômes formels des coordonnées non-commutatives (les champs non-commutatifs dans notre cas), une fonction des variables classiques.

Pour construire la théorie de jauge non-commutative (consulter les articles plus détaillé et complet [11,12,13,16,17,18]), on commence par définir la transformation de jauge locale non-commutative et infinitésimale du champ de matière (Dans ce qui suit, les grandeurs avec le signe $\hat{}$ désignent les opérateurs non-commutatifs):

$$\delta_{\hat{\Lambda}} \Psi(x) = i \hat{\Lambda}(x) * \Psi(x) \quad (1.5)$$

Le paramètre de jauge $\Lambda(x)$ est considéré comme une fonction matricielle du groupe SU(N).

On définit par la suite la dérivée covariante non-commutative \hat{D}_μ , par analogie avec le modèle standard, comme suit :

$$\hat{D}_\mu \hat{\Psi} = \partial_\mu \hat{\Psi} - i \hat{V}_\mu * \hat{\Psi} \quad (1.6)$$

Celle-ci doit se transformer, par définition, d'une manière covariante, comme suit :

$$\delta_{\hat{\Lambda}}(\hat{D}_{\mu}\hat{\Psi}) = \Lambda(x) * \hat{D}_{\mu}\hat{\Psi} \quad (1.7)$$

Cela permet de définir la loi de transformation des potentiels de jauge non-commutatifs :

$$\delta_{\hat{\Lambda}}V_{\mu} = \partial_{\mu}\Lambda(x) + i \left[\Lambda, V_{\mu} \right]_* \quad (1.8)$$

Où $V_{\mu} = V_{\mu a} T^a$ représente le champ de jauge conventionnel du groupe SU(N).

On remarque que le commutateur de deux transformations de jauge locales, n'est pas un simple commutateur des générateurs de l'algèbre de Lie :

$$\begin{aligned} \left[\delta_{\Lambda}, \delta_{\Sigma} \right]_* \hat{\Psi}(x) &= (\delta_{\Lambda} \delta_{\Sigma} - \delta_{\Sigma} \delta_{\Lambda}) \hat{\Psi}(x) = \left[\hat{\Lambda}(x), \hat{\Sigma}(x) \right]_* \hat{\Psi}(x) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{\Lambda}^a(x), \hat{\Sigma}^b(x) \right\}_* [T_a, T_b] \hat{\Psi}(x) + \frac{1}{2} \left[\hat{\Lambda}^a(x), \hat{\Sigma}^b(x) \right]_* \{T_a, T_b\} \hat{\Psi}(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

En effet, dans le cas ordinaire, le dernier terme s'annule, mais ici ce n'est pas le cas. On déduit ainsi que, le terme $\left[\delta_{\Lambda}, \delta_{\Sigma} \right]_*$ n'est pas un élément de l'algèbre de Lie, mais un élément de l'algèbre enveloppante [11,12]. On doit aussi définir le paramètre de jauge non-commutatif comme un élément de l'algèbre enveloppante, comme suit:

$$\Lambda(x) = \Lambda_a(x) T^a + \Lambda_{ab}^1(x) :T^b T^b : + \dots + \Lambda_{a_1 \dots a_n}^{n-1}(x) :T^{a_1} \dots T^{a_n} : + \dots \quad (1.10)$$

Où le symbole $::$ dénote un certain ordre approprié des générateurs de l'algèbre de Lie. Dans le cas, par exemple, d'une base complètement symétrique de l'algèbre enveloppante, on écrit [13] :

$$:T^{a_1} \dots T^{a_n} : = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} T^{a_{\pi(1)}} \dots T^{a_{\pi(n)}} \quad (1.11)$$

A priori, on est face à un problème, car on doit introduire un nombre infini de degrés de liberté. Cependant, tous ces paramètres ne sont pas indépendants.

Ainsi, pour résoudre ce problème, on définit une transformation de jauge où tous ces paramètres sont exprimés en fonction du paramètre de jauge ordinaire $\Lambda(x)$, du potentiel de jauge $V_{\mu}(x)$ et de leurs dérivés. Une transformation de ce type est notée $\hat{\Lambda}(\Lambda, V)$. Comme dans le cas commutatif, on exige par la suite la condition suivante :

$$\delta_{\hat{\Lambda}} \delta_{\hat{\Sigma}} - \delta_{\hat{\Sigma}} \delta_{\hat{\Lambda}} = \delta_{\hat{\Lambda} \times \hat{\Sigma}} = [\Lambda, \Sigma] \quad (1.12)$$

Autrement dit, en tenant compte de la dépendance en V_μ de $\hat{\Sigma}$ lors de la transformation de jauge, on peut écrire :

$$\left[\hat{\Lambda}, \hat{\Sigma} \right]_* + i \delta_{\hat{\Lambda}} \hat{\Sigma} - i \delta_{\hat{\Sigma}} \hat{\Lambda} = [\Lambda, \Sigma] \quad (1.13)$$

Ici, l'opérateur $\delta_{\hat{\Lambda}}$ agit uniquement sur la composante V_μ de $\hat{\Sigma}$.

Notons que dans le cas des théories de jauges ordinaires (commutatives) :

$$\delta_{\Lambda \times \Sigma} \Psi(x) = [\Lambda, \Sigma] = \Lambda_a \Sigma_b f^{abc} T^c \quad (1.14)$$

Où f^{abc} et T^c représentent respectivement les constantes de structures et les générateurs du groupe SU(N).

Il reste à exprimer le paramètre $\hat{\Lambda}(x)$ et les champs Ψ et V_μ en fonction des paramètres de jauge et des champs ordinaires. Cela est possible en les développant suivant les puissances de θ , et en imposant les conditions (1.13) (consistency condition) et les transformations de jauge (1.5) et (1.8). On aboutit ainsi aux Seiberg-Witten Maps [14]:

$$\begin{cases} \Lambda[\Lambda, V] = \Lambda(x) + \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \{V_\nu, \partial_\mu \Lambda\} + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \Psi[\Psi, V] = \Psi(x) - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} V_\alpha \partial_\beta \Psi + \frac{i}{8} \theta^{\alpha\beta} [V_\alpha, V_\beta] \Psi + \mathcal{O}(\theta^2) \\ \hat{V}_\mu[V] = V_\mu(x) + \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} \{ \partial_\alpha V_\mu + F_{\alpha\mu}, V_\beta \} + \mathcal{O}(\theta^2) \end{cases} \quad (1.15)$$

Ici, $V_\mu(x)$ représente le potentiel de jauge correspondant à la structure de groupe du modèle standard ordinaire:

$$V_\mu(x) = g' A_\mu(x) Y + g \sum_{a=1}^3 B_\mu^a(x) T_L^a + g_s \sum_{b=1}^8 G_\mu^b(x) T_s^b \quad (1.16)$$

Notons que l'analogie non-commutatif du tenseur $F_{\alpha\mu}$ est donné par l'équation suivante :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{V}_\nu - \partial_\nu \hat{V}_\mu - i [\hat{V}_\mu, \hat{V}_\nu]_* \quad (1.17)$$

Le développement de Seiberg-Witten en puissances de θ permet de résoudre le problème de l'infinité de degrés de liberté de l'équation (1.10).

Par analogie avec le cas de la QCD commutative pure, le lagrangien de la QCD non-commutative s'écrit comme suit :

$$L = \hat{\Psi} * (i \not{D} - m) \hat{\Psi} - \frac{1}{2g_s^2} Tr(\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}) \quad (1.18)$$

Où \hat{D}_μ représente l'analogue non-commutatif de la dérivée covariante :

$$\hat{D}_\mu \hat{\Psi} = \partial_\mu \hat{\Psi} - i \hat{G}_\mu * \hat{\Psi} \quad (1.19)$$

Non sans peine, en développant ce lagrangien en fonction des champs ordinaires, on trouve :

$$L = \bar{\Psi}(i \not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \bar{\Psi} F_{\mu\nu} (i \not{D} - m)\Psi - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\Psi} \gamma^\rho F_{\rho\mu} i D_\nu \Psi - \frac{1}{2g_s^2} Tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4g_s^2} \theta^{\mu\nu} Tr(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) - \frac{1}{g_s^2} \theta^{\mu\nu} Tr(F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}) \quad (1.20)$$

En plus des termes correctifs supplémentaires, on remarque l'apparition de nouveaux termes d'interactions, qui n'ont point d'égal dans le cadre du modèle standard commutatif. On déduit facilement des vertex de 5 et de 6 bosons de jauge et deux autres qui relient deux quarks avec deux ou trois bosons. Les règles de Feynman sont directement déduites du lagrangien précédent à l'ordre $O(g^2 \theta^1)$ [15].

5. Le modèle standard non-commutatif

La construction de la chromodynamique non-commutative qu'on vient de présenter, reste très incomplète du fait qu'on considère uniquement le groupe SU(3). La description complète des interactions entre quarks n'est envisageable que dans le cadre du modèle standard commutatif construit sur le groupe SU(3)×SU(2)×U(1). Celui-ci est proposé par Calmet et ses collaborateurs en 2002 [16], et étendu peu après au cas non-nominal, faisant ainsi apparaitre de nouvelles interaction entre boson de jauge [17, 18].

L'action totale du NCSM est la somme des quatre termes :

$$S_{NCSM} = S_{\text{fermions}} + S_{\text{jauge}} + S_{\text{Higgs}} + S_{\text{Yukawa}} \quad (1.21)$$

Qu'on peut écrire sous la forme compacte :

$$S_{NCSM} = \int d^4x \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_L^{(i)} * i \hat{D} \Psi_L^{(i)} + \int d^4x \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_R^{(i)} * i \hat{D} \Psi_R^{(i)} - \int d^4x \frac{1}{2g^2} tr_1 \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} - \int d^4x \frac{1}{2g^2} tr_2 \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} - \int d^4x \frac{1}{2g_s^2} tr_3 \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \int d^4x \left(\rho_0 (\hat{D}_\mu \hat{\Phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{D}^\mu \hat{\Phi}) - \mu^2 \rho_0 (\hat{\Phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\Phi}) - \lambda \rho_0 (\hat{\Phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\Phi}) * \rho_0 (\hat{\Phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\Phi}) \right) + \int d^4x \left(- \sum_{i,j=1}^3 W^{ij} \left(\left(\tilde{L}_L^{(i)} * \rho_L(\hat{\Phi}) \right) * \tilde{e}_R^{(j)} + \tilde{e}_R^{(i)} * \left(\rho_L(\hat{\Phi})^\dagger * \tilde{L}_L^{(j)} \right) \right) - \sum_{i,j=1}^3 G_u^{ij} \left(\left(\tilde{Q}_L^{(i)} * \rho_Q(\hat{\Phi}) \right) * \tilde{u}_R^{(j)} + \tilde{u}_R^{(i)} * \left(\rho_Q(\hat{\Phi})^\dagger * \tilde{Q}_L^{(j)} \right) \right) - \sum_{i,j=1}^3 G_d^{ij} \left(\left(\tilde{Q}_L^{(i)} * \rho_Q(\hat{\Phi}) \right) * \tilde{d}_R^{(j)} + \tilde{d}_R^{(i)} * \left(\rho_Q(\hat{\Phi})^\dagger * \tilde{Q}_L^{(j)} \right) \right) \right) \quad (1.22)$$

W^{ij} , G_u^{ij} et G_d^{ij} représentent les matrices de couplage de Yukawa. Tous les autres paramètres sont définis dans [16].

La trace, qui apparaît dans les termes cinétiques des bosons de jauge, n'est pas déterminée de manière univoque par l'invariance de jauge de l'action, elle dépend du choix de la représentation. Cela dit, dans ce qui suit, comme on s'intéresse au NCSM construit avec un minimum de modification, la trace est calculée sur les groupes U(1), SU(2) et SU(3).

Plus tard, ce modèle est étendu dans [19] au-delà du premier ordre dans le développement de Seiberg-Witten, faisant ainsi apparaître de nombreuses ambiguïtés. Ces dernières disparaissent dans certains processus. C'est le cas du dernier processus étudié dans le cadre de cette thèse (voir chapitre 4).

CHAPITRE 2

Applications en QCD du modèle du gluon mou et/ou colinéaire

1. Introduction

Dans certains processus qui se produisent à très hautes énergies, en physique des particules et dans le cadre des théories au-delà du modèle standard, les corrections d'ordres supérieurs (HOC) sont nécessaires. C'est le cas notamment en QCD perturbative, où elles peuvent être importantes et même négatives dans certains domaines de l'espace de phase, ce qui réduit la section efficace et la rend difficile à mesurer. Elles peuvent également être importantes dans certains domaines spécifiques de l'espace de phase et par conséquent, affecter l'allure des sections efficaces finales.

En outre, dans la recherche du boson de Higgs au LHC, la connaissance du HOC de divers processus physiques augmente la précision dans la détermination des sections efficaces. De plus, dans plusieurs cas, les corrections sous-dominante (NLOC) sont trop importantes, et on espère augmenter la stabilité de la section efficace prédite avec un choix de schémas (l'échelle de factorisation et de renormalisation). De ce fait, une meilleure connaissance du HOC permet une meilleure prédiction et discernations des signes de la nouvelle physique.

Habituellement, les HOC sont très complexes et très difficiles à exprimer analytiquement, ce qui rend le recours au numérique inévitable. C'est pour pallier cette difficulté que l'approche approximative basée sur les gluons mous et/ou colinéaires a été proposée et développée dans les Réf. [20,21,22,23,24] car elle permet la détermination et l'estimation des HOC, notamment pour les processus incluant les fonctions de structures et/ou de fragmentations. Cette méthode est basée sur le fait qu'avec un certain choix de variables cinématiques propres, il existe une partie dominante dans les NLOC.

Récemment, la technique conduisant à identifier les diagrammes unitaire dominants de Bremsstrahlung, et à déterminer leurs contributions, a été revue et généralisée dans [25]. Cette approche permet avec plus de précision la détermination des termes dominants de Bremsstrahlung, d'identifier exactement les quelques diagrammes unitaires de grandes contributions (parmi des centaines), et d'utiliser des intégrales simples et connus pour calculer les amplitudes de transitions.

Cette approche est très utile car elle réduit énormément de fastidieux calculs, et aide à estimer la contribution et de connaître le signe du HOC.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à certaines applications de la nouvelle version de cette approche (développée dans la Réf. [25]). Nous commencerons par présenter le formalisme théorique, ensuite on passe aux calculs de certains sous-processus, à savoir :

$$\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}, \gamma q \rightarrow \gamma q, q\bar{q} \rightarrow \gamma g, q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma, qg \rightarrow q\gamma.$$

2. Formalisme théorique

Considérant le processus physique suivant : $H_1 + H_2 \rightarrow H_3 + H_4$ où H_1, H_2, H_3 et H_4 représentent des hadrons. La section efficace qui lui correspond est donnée par [26,27,28]

$$\begin{aligned} \sigma = \sum_{abcd} \iiint dx_a dx_b dx_c dx_d F_{a/H_1}(x_a, M) F_{b/H_2}(x_b, M) & \left\{ \frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} f_0 \delta \left(1 + \frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_s^2(\mu)}{\pi} f \theta \left(1 + \frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}} \right) \right\} \mathbf{D}_{H_3/c}(x_c, M') \mathbf{D}_{H_4/d}(x_d, M') \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où $F_{a/H_1}, F_{b/H_2}$ ($\mathbf{D}_{H_3/c}, \mathbf{D}_{H_4/d}$ resp.) représentent les fonctions de structure (de fragmentation resp.) et f_0 (f resp.) est le terme de Born (de HOC resp.). Les échelles $\mu \sim M$ et M' représentent les points de renormalisation et de factorisation des fonctions de structure et de fragmentation, respectivement. Les variables cinématique de Mandelstam $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ sont ceux du sous-processus partonique $a+b \rightarrow c+d$. Ici θ représente la fonction de Heaviside et x_a, x_b, x_c, x_d symbolisent les fractions de l'impulsion du hadron portées par les partons a, b, c, et d. La partie HOC dominante est identifiée dans les Réf. [20,21,22,23,24] et l'expression générale a été établie.

Pour simplifier les notations, il est préférable de travailler avec les variables sans dimension v et w , définies comme suit :

$$v = 1 + \frac{\hat{t}}{\hat{s}} \quad ; \quad w = \frac{-\hat{u}}{\hat{s} + \hat{t}} \quad (2.2)$$

Ainsi, f prend la forme :

$$f = f_{\text{sing}}(x_c, x_d, v, w) + \tilde{f}(x_c, x_d, v, w) \quad (2.3)$$

Où,

$$f_{\text{sing}} = \left(C_1 + \hat{C}_1 \ln \frac{\hat{s}}{\mu^2} + \tilde{C}_1 \ln \frac{\hat{s}}{M^2} + \tilde{\tilde{C}}_1 \ln \frac{\hat{s}}{M'^2} \right) \delta(1-w) \\ + \left(C_2 + \tilde{C}_2 \ln \frac{\hat{s}}{M^2} + \tilde{\tilde{C}}_2 \ln \frac{\hat{s}}{M'^2} \right) \frac{1}{(1-w)_+} + C_3 \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ \quad (2.4)$$

Les distributions $\frac{1}{(1-w)_+}$ et $\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+$ sont définis de telle sorte que:

$$\int_0^1 dw \frac{h(w)}{(1-w)_+} = \int_0^1 \frac{h(w) - h(1)}{(1-w)} \\ \int_0^1 dw \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ h(w) = \int_0^1 dw (h(w) - h(1)) \quad (2.5)$$

$h(w)$ représente une fonction régulière quelconque de w .

Il est intéressant de mentionner que les différents termes C_1, C_2, \dots sont invariants de jauge et qu'on obtient leurs contributions des corrections radiatives virtuelles et de Bremsstrahlung, où le gluon émis est de type mou et/ou colinéaire [20,21,22,23,24]. Chacun de ces termes est liée à une singularité infrarouge ou ultraviolette.

Par ailleurs, la correction \tilde{f} ne domine pas et son expression est très compliquée. Elle provient des corrections virtuelles et de Bremsstrahlung avec un gluon émis dur (ni mou, ni colinéaire) provenant des particules de l'état initial et/ou final [29,30,31].

Les termes C_1, \hat{C}_1, \dots qui contribuent dans f_{sing} peuvent être facilement déterminés à partir de simples considérations. En effet, le terme en C_1 proportionnel à $\ln\left(\frac{\hat{s}}{\mu^2}\right)$ provient de la renormalisation. Il s'agit du premier terme d'ordre $O(\alpha_s)$ dans l'expansion de la constante de couplage mobile forte α_s autour de l'échelle de renormalisation μ .

$$\alpha_s(\hat{s}) \approx \alpha_s(\mu) \left[1 - \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \frac{11N_c - 2N_f}{6} \ln\left(\frac{\hat{s}}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.6)$$

Ainsi, par identification directe, on prend :

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6} \quad (2.7)$$

Les coefficients \tilde{C}_1 et $\tilde{\tilde{C}}_2$ associées à $\ln\left(\frac{\hat{s}}{M^2}\right)$, proviennent de la factorisation des fonctions de

structure à l'échelle M . Ils peuvent être obtenus du sous-processus $ab \rightarrow cd$ [20,21,22,23,24]:

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{\Omega}{2} \left[\sum_i P_{ia} \otimes \hat{\sigma}^B(ib \rightarrow cd) + \sum_j P_{jb} \otimes \hat{\sigma}^B(aj \rightarrow cd) \right] \quad (2.8)$$

Où Ω , $\hat{\sigma}^B$, P_{ij} et \otimes représentent le facteur de couleur, le terme de Born, la fonction de Splitting d'Altarelli-Parisi, et le produit de convolution, respectivement.

De même, les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 associées à $\ln\left(\frac{\hat{s}}{M^2}\right)$, sont reliés au théorème de factorisation des fonctions de fragmentation au point M' , et peuvent se mettre sous la forme [20,21,22,23,24]:

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{\Omega}{2} \left[\sum_i \hat{\sigma}^B(ab \rightarrow id) \otimes P_{ci} + \sum_j \hat{\sigma}^B(ab \rightarrow cj) \otimes P_{dj} \right] \quad (2.9)$$

Les distributions $\frac{1}{(1-w)_+}$ et $\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+$ qui apparaissent dans l'équation (2.4), et qui proviennent des diagrammes de Bremsstrahlung, ont pour origine un facteur du genre $(1-w)^{1-\alpha\varepsilon}$ qui apparait dans la procédure de régularisation dimensionnelle ($d = 4 - 2\varepsilon$):

$$(1-w)^{-1-\alpha\varepsilon} = -\frac{1}{\alpha\varepsilon} \delta(1-w) + \frac{1}{(1-w)_+} - \alpha\varepsilon \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ + O(\varepsilon^2) \quad (2.10)$$

La contribution virtuelle est proportionnelle uniquement à $\delta(1-w)$. Par conséquent, les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_1 qui sont proportionnelles à $\delta(1-w)$ proviennent des contributions virtuelles et de Bremsstrahlung, tandis que \tilde{C}_2 et \tilde{C}_2 proviennent uniquement des corrections de Bremsstrahlung. Dans ce qui suit, on pose f_{sing} comme une somme des contributions de Bremsstrahlung $f_{\text{sing}}^{\text{Brems}}$ et virtuelle $f_{\text{sing}}^{\text{virtual}}$:

$$f_{\text{sing}} = f_{\text{sing}}^{\text{virtual}} + f_{\text{sing}}^{\text{Brems}} \quad (2.11)$$

D'une part, le terme $f_{\text{sing}}^{\text{Brems}}$ prend la forme [20,21,22,23,24]:

$$f_{\text{sing}}^{\text{Brems}} = D^\varepsilon \left[\frac{A}{\varepsilon} + B + \varepsilon C \right] (1-w)^{-1-\alpha\varepsilon} \quad (2.12)$$

Où D^ε est un facteur de l'espace de phase à 3-corps (Three-body phase space factor).

En utilisant l'équation (2.10), l'équation (2.12) peut être réécrite sous la forme :

$$f_{\text{sing}}^{\text{Brems}} = -\frac{A}{\varepsilon^2} \delta(1-w) - \frac{1}{\alpha\varepsilon} (A \ln D + B) \delta(1-w) - \frac{1}{\alpha} [A \ln^2 D + B \ln D + C] \delta(1-w) \\ + \frac{A}{\varepsilon} \frac{1}{(1-w)_+} + [A \ln D + B] \frac{1}{(1-w)_+} - \alpha A \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ + O(\varepsilon) \quad (2.13)$$

D'autre part, la contribution virtuelle $f_{\text{sing}}^{\text{virt}}$ s'exprime comme suit [20,21,22,23,24]:

$$f_{\text{sing}}^{\text{virt}} = F^\varepsilon \left[\frac{A'}{\varepsilon^2} + \frac{B'}{\varepsilon} + C' \right] \delta(1-w) \quad (2.14)$$

Où F^ε est un facteur de l'espace de phase à 2-corps (Two-body phase space factor) [4,5].

De simples considérations, nous permettent de déterminer facilement les facteurs A et B de l'équation (2.13). En fait, les singularités infrarouges (termes $\sim \frac{1}{\varepsilon^2}$) sont éliminées en utilisant le théorème de Bloch-Nordsieck [32]. Par conséquent, on obtient:

$$A = \alpha A' \quad (2.15)$$

En outre, les singularités ultraviolettes sont éliminées par les identités de Slavnov-Taylor.

Après soustraction de la contribution provenant de la singularité de masse et en raison de la factorisation des fonctions de structure dans la partie proportionnelle aux fonctions de Splitting d'Altarelli-Parisi P_{ij} , on obtient [20,21,22,23,24]:

$$B = -\alpha \left(\tilde{C}_1 - B' - A' (\ln F - \ln D) \right) \quad (2.16)$$

Par ailleurs, le coefficient C de $f_{\text{sing}}^{\text{Brems}}$ est proportionnel à la distribution de Dirac $\delta(1-w)$ et il est obtenu en calculant les termes de Bremsstrahlung dans le cadre de la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire [25].

Notons que les coefficients C_1, C_2 et C_3 sont associés à $\delta(1-w)$ (commun aux corrections virtuelles et de Bremsstrahlung), à $\frac{1}{(1-w)_+}$ et à $\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+$, respectivement. On obtient :

$$C_1 = A' \ln^2 F + B' \ln F + C' - [A \ln^2 D + B \ln D + C] \quad (2.17)$$

Et de l'équation (2.13), on obtient:

$$C_2 = A \ln D + B \quad (2.18)$$

Et

$$C_3 = -\alpha A \quad (2.19)$$

3. Applications

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux contributions des sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ et $qg \rightarrow q\gamma$, en se plaçant dans la jauge de Feynman et dans le cadre de la régularisation dimensionnelle où $d = 4 - 2\varepsilon$.

3.1 Sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$

Notons que pour le processus physique $\gamma\gamma \rightarrow H_3 + H_4$ associé au sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, nous avons deux fonctions de fragmentation et aucune fonction de structure. En suivant les prescriptions ci-dessus, on obtient:

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0 \quad (2.20)$$

En outre, le facteur de l'espace de phase à 2-corps F et le terme de Born $\frac{d\sigma}{dv}(s, v)|_{Born}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}}$ s'expriment comme suit :

$$F = \frac{4\pi\mu^2}{sv(1-v)} \quad (2.21)$$

Et

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v)|_{Born}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}} = \frac{2N_c}{\hat{s}} \pi\alpha^2 e_q^4 (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \quad (2.22)$$

Notons que le terme de Born n'est pas proportionnel à α_s . Par conséquent, le coefficient \hat{C}_1 proportionnel à $\ln \frac{\hat{s}^2}{\mu^2}$ disparaît:

$$\hat{C}_1 = 0 \quad (2.23)$$

En ce qui concerne les termes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 reliés à la factorisation de la fonction de fragmentation, ils sont déterminés à partir de l'équation (2.9). En outre, le terme de Born qui apparait dans l'équation (2.9) impose la relation de conservation de l'énergie-impulsion:

$$\hat{s}' + \hat{t}' + \hat{u}' = 0 \quad (2.24)$$

Où \hat{s}' , \hat{t}' et \hat{u}' sont les variables de Mandelstam du sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow iq$, ou $\gamma\gamma \rightarrow qj$.

De la cinématique du processus physique, on déduit que dans le premier terme de l'équation (2.9) on a:

$$\frac{1}{z} = \frac{vw-1}{v-1} \quad (2.25)$$

Où z est le moment fractionnaire du parton i .

Cependant, pour le second terme, nous obtenons:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w} \quad (2.26)$$

ici, z est le moment fractionnaire du parton j . A partir des équations (2.9),(2.24),(2.25) et (2.26), et en utilisant le fait que dans le premier terme de l'équation (2.9) on a:

$$v' = vw \quad (2.27)$$

Et que dans le second terme on a:

$$v' = v \quad (2.28)$$

($v' = 1 + \frac{\hat{t}'}{s}$ est une variable sans dimension liée à \hat{s}' , \hat{t}' et \hat{u}')

On obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} &= \frac{N_c}{\Gamma(1-\varepsilon)} \pi \alpha^2 e_q^4 \left\{ P_{qq} \left(\frac{v-1}{vw-1} \right) \cdot \frac{1}{\hat{s}(1-v)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}vw(1-vw)} \right)^\varepsilon \right. \\ &\quad \left. (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{vw}{1-vw} + \frac{1-vw}{vw} \right) - 2\varepsilon \right] + \frac{2}{\hat{s}vw} P_{qq}(w) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{4\pi\mu^2}{sv(1-v)} \right)^\varepsilon (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \right\} \quad (2.29) \end{aligned}$$

Où la fonction de Splitting P_{qq} est donnée par :

$$P_{qq}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \quad (2.30)$$

Avec,

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \quad (2.31)$$

Pour le groupe $SU(N_c)$ (N_c est le facteur de couleur, qui est égal à 3 pour $SU(3)$).

En utilisant le fait que :

$$\delta[v(1-w)] = \frac{1}{v} \delta(1-w) \quad (2.32)$$

Et

$$\frac{1}{(v-vw)_+} = \frac{1}{v} \frac{1}{(1-w)_+} + \frac{1}{v} \ln v \delta(1-w) \quad (2.33)$$

Les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 s'écrivent sous la forme:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\alpha^2 e_q^4 C_F N_c}{\hat{s}} \frac{1}{2v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (2.34)$$

Et

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\alpha^2 e_q^4 C_F N_c}{\hat{s}} \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (2.35)$$

Par ailleurs, la section efficace virtuelle $\frac{d\sigma}{dv}(\hat{s}, v) \Big|_{virt}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}}$ a été calculée dans les Ref. [28] et [29], et elle est donnée par:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dv}(\widehat{s}, \nu) \Big|_{\text{virt}}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}} &= \frac{\alpha^2 \alpha_s(\mu)}{\widehat{s}} \frac{e_q^4 C_F N_c}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ \left(\frac{4\pi\mu^2}{\widehat{s}\nu(1-\nu)} \right)^\varepsilon \left[\left(-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1-\nu}{\nu} \right) + \frac{4}{\varepsilon} \right] \right. \\
&+ \left[\frac{2\pi^2}{3} - 1 + \ln^2 \nu + \ln^2(1-\nu) + 3\ln(1-\nu) \right] \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1-\nu}{\nu} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \pi^2 \\
&+ 6 + \frac{1}{\nu(1-\nu)} (\ln^2(1-\nu) - \ln^2 \nu) + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 + \nu + \frac{2}{\nu} \right) \ln \nu \\
&\left. + \left(\frac{\nu}{1-\nu} + 1 - \nu - \frac{2}{\nu} + 4 \right) \ln(1-\nu) \right\}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

De cette expression, nous pouvons déduire directement les coefficients A' et B' (li es aux divergences $\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $\frac{1}{\varepsilon}$, respectivement) :

$$A' = -\frac{\pi\alpha^2}{\widehat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1-\nu}{\nu} \right) \tag{2.37}$$

Et

$$B' = \frac{\pi\alpha^2}{\widehat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{1-\nu}{\nu} + 4 \right) \tag{2.38}$$

Par conséquent,

$$A = A' \tag{2.39}$$

Et

$$B = -\left(\widetilde{C}_1 - B' - A'(\ln F - \ln D) \right) \tag{2.40}$$

Dans notre cas $\widetilde{C}_1 = 0$ et $\alpha = 1$.

En utilisant le fait que F^ε et D^ε sont des facteurs de l'espace de phase à 2-corps et 3-corps, respectivement, on déduit que :

$$B = B' + A' \ln \nu \tag{2.41}$$

Finalement C_2 et C_3 prennent la forme :

$$C_2 = -A' \tag{2.42}$$

Et

$$C_3 = A' \ln D + B' + A' \ln \nu \tag{2.43}$$

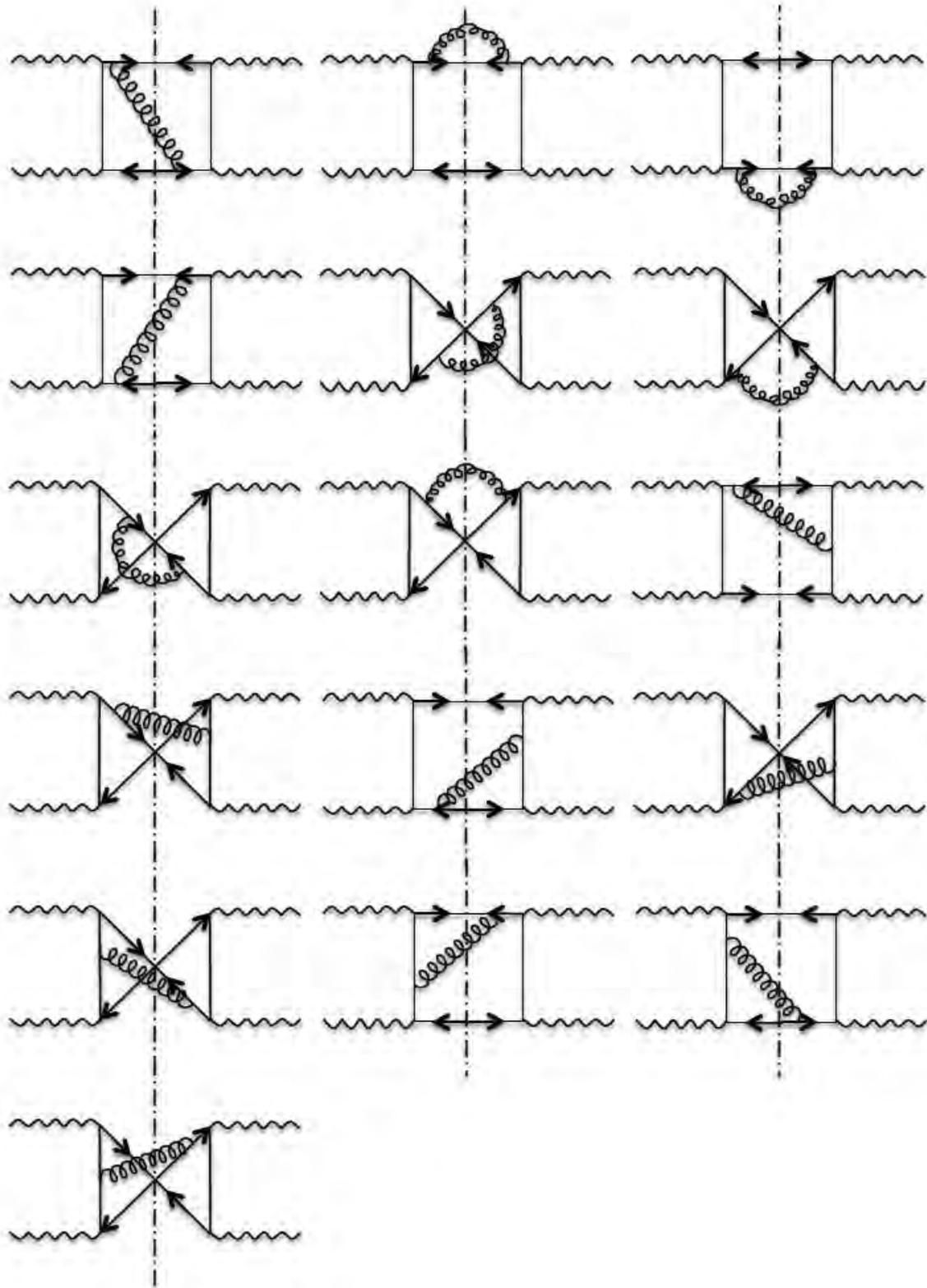


Fig. 1 Diagrammes unitaires de Bremsstrahlung Dominants pour le processus physique

$$\gamma \rightarrow H_3 + H_4$$

Pour le coefficient C_1 , les diagrammes unitaires de Bremsstrahlung dominants sont identifiés (dans le cadre de l'approche développée dans la Réf. [25]) et sont présentés dans la Figure 1. De la Réf. [25] et en suivant les prescriptions précédentes, on obtient après simplifications:

$$C = \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \frac{4(v^2 + v - 1)}{v(v-1)^2} \quad (2.44)$$

Par conséquent, le coefficient C_1 prend la forme :

$$C_1 = C_2 \ln v + C' - C \quad (2.45)$$

Où C' , est le coefficient obtenu à partir des corrections virtuelles:

$$C' = \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\left(\frac{2\pi^2}{3} - 3 + \ln^2 v + \ln^2(1-v) \right) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) + \left(2 + 3 \frac{1-v}{v} \right) \ln v + 2 \right) \\ + \left(2 + \frac{3v}{1-v} \right) \ln(1-v) + \left(2 + \frac{v}{1-v} \right) \ln^2 v + \left(2 + \frac{1-v}{v} \right) \ln^2(1-v). \quad (2.46)$$

3.2 Sous-processus $q\gamma \rightarrow \gamma q$

Le processus physique inélastique $H_1\gamma \rightarrow X\gamma$ associé à ce sous-processus comprend une fonction de structure. Le terme de Born est donné par :

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt}(\hat{s}, v) \Big|_{Born}^{q\gamma \rightarrow \gamma q} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^4}{\hat{s}} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v^2 - 2v + 2}{1-v} \right) + 2\varepsilon \right] \quad (2.47)$$

Il est clair que :

$$\hat{C}_1 = 0 \quad (2.48)$$

Pour déterminer les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 , reprenons l'équation (2.8). Cependant, pour le processus physique présent, nous avons besoin d'une seule fonction de structure. Ainsi, l'équation (2.8) se réduit à:

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_i P_{iq} \otimes \hat{\sigma}^B(i\gamma \rightarrow q\gamma) \right] \quad (2.49)$$

On déduit que,

$$z = w \quad (2.50)$$

Où z est le moment fractionnaire du parton i .

A partir des équations (2.49) et (2.50), et en utilisant le fait que pour le sous-processus $i\gamma \rightarrow q\gamma$ on a:

$$v' = 1 + \frac{\hat{t}'}{\hat{s}'} = 1 + \frac{z\hat{t}}{z\hat{s}} = v \quad (2.51)$$

On obtient,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} &= \frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{\hat{s}\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon (1-\varepsilon) \frac{1}{v} \\ &\left[(1-\varepsilon) \left(\frac{1}{v-1} + v-1 \right) - 2\varepsilon \right] \left[\frac{1+w^2}{(1-w)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-w) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ainsi,

$$\tilde{C}_1 = \frac{3\pi\alpha^2}{2\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.53)$$

Et

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.54)$$

Le même raisonnement est appliqué aux coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 .

En fait, nous avons seulement une seule fonction de fragmentation et, par conséquent, l'équation (2.9) se réduit à :

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_i \hat{\sigma}^B(q\gamma \rightarrow i\gamma) \otimes P_{qi} \right] \quad (2.55)$$

De la cinématique de ce processus, on déduit que:

$$z = \frac{x_i}{x_c} = \frac{\hat{t}}{\hat{t}'} = \frac{\hat{u}}{\hat{u}'} = -\frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}} = 1 - v(1-w) \quad (2.56)$$

En remplaçant ce résultat dans l'expression de la fonction de Splitting et en utilisant l'équation (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = 2\Lambda \frac{(1-\varepsilon)}{\hat{s}v} \left\{ (1-\varepsilon) \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) - 2\varepsilon \right\} \\ \times C_F \left\{ \frac{1}{(1-w)_+} + \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \delta(1-w) \right\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Avec,

$$\Lambda = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{sv(1-v)} \right)^\varepsilon \quad (2.58)$$

Par conséquent,

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.59)$$

Et

$$\tilde{C}_2 = \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.60)$$

Par ailleurs, la section efficace virtuelle $\frac{d\sigma}{dv} \Big|_{virt}^{qq \rightarrow \gamma q}$ peut être déduite du sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$ en inter-changeant $\hat{u} \leftrightarrow \hat{s}$ ou de manière équivalente en faisant la substitution:

$$v \rightarrow \frac{1}{v} \quad (2.61)$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dv} \Big|_{virt}^{qq \rightarrow \gamma q} = \frac{\alpha^2 \alpha_s(\mu)}{\hat{s}} e_q^4 C_F \left\{ \left[\frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \left(\frac{-2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) (2\ln(1-v) - 3) \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{v} \left(2\frac{\pi^2}{3} - 7 \right) - 2\pi^2(1-v) - v \left(\frac{\pi^2}{3} + 7 \right) + 4\ln(1-v) + \left(\frac{1+2(1-v)}{v} \right) \ln v \right] \right. \\ \left. + \frac{v^2 + (1-v^2) \ln v}{v} (\ln v - 2\ln(1-v)) \right\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

De ce résultat, on déduit les expressions de A' et de B' , qui donnent :

$$A = A' = \frac{-4\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{\hat{s}} \left(\frac{1}{v-1} + v-1 \right) \quad (2.63)$$

Et

$$B = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{2\hat{s}} \left[\left(-8\ln v + 4 - \frac{1}{v} \right) \left(\frac{1}{1-v} + 1 - v \right) + 8 \right] \quad (2.64)$$

Les coefficients C_2 et C_3 sont obtenus en remplaçant A et B par leurs expressions dans les équations suivantes:

$$C_3 = -A \quad (2.65)$$

Et

$$C_2 = A \ln D + B \quad (2.66)$$

Pour obtenir le coefficient C_1 , on peut utiliser la forme simplifiée de l'équation (2.17):

$$C_1 = C_2 \ln v + C' - C - \tilde{C}_1 (\ln v + \ln(1-v)) \quad (2.67)$$

Ainsi, nous devons calculer le coefficient C , proportionnel à $\delta(1-w)$ dans la contribution de Bremsstrahlung. Tous les diagrammes de Feynman unitaires de Bremsstrahlung sont donnés dans la Figure 2. Après de simples calculs, on obtient :

$$C = 4C_F / N_c \quad (2.68)$$

Pour le coefficient C' , il est déterminé à partir des corrections virtuelles:

$$C' = \frac{\Delta}{3} \Re e \left\{ \left(\frac{2\pi^2}{3} - 3 + \ln^2 v + \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right) \right) \left(\frac{1}{v-1} + v - 1 \right) + 2 - (2 + 3(v-1)) \ln v \right. \\ \left. + \left(2 + \frac{3}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v-1}{v} \right) + \left(2 + \frac{1}{v-1} \right) \ln^2 v + (1+v) \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right) \right\} \quad (2.69)$$

Avec,

$$\Delta = \frac{\alpha^2 \alpha_s(\mu)}{\hat{s}} e_q^4 C_F \quad (2.70)$$

Ici, \Re désigne la partie réelle. Enfin, en remplaçant les coefficients ci-dessus par leurs expressions dans l'équation (2.67), on obtient C_1 .

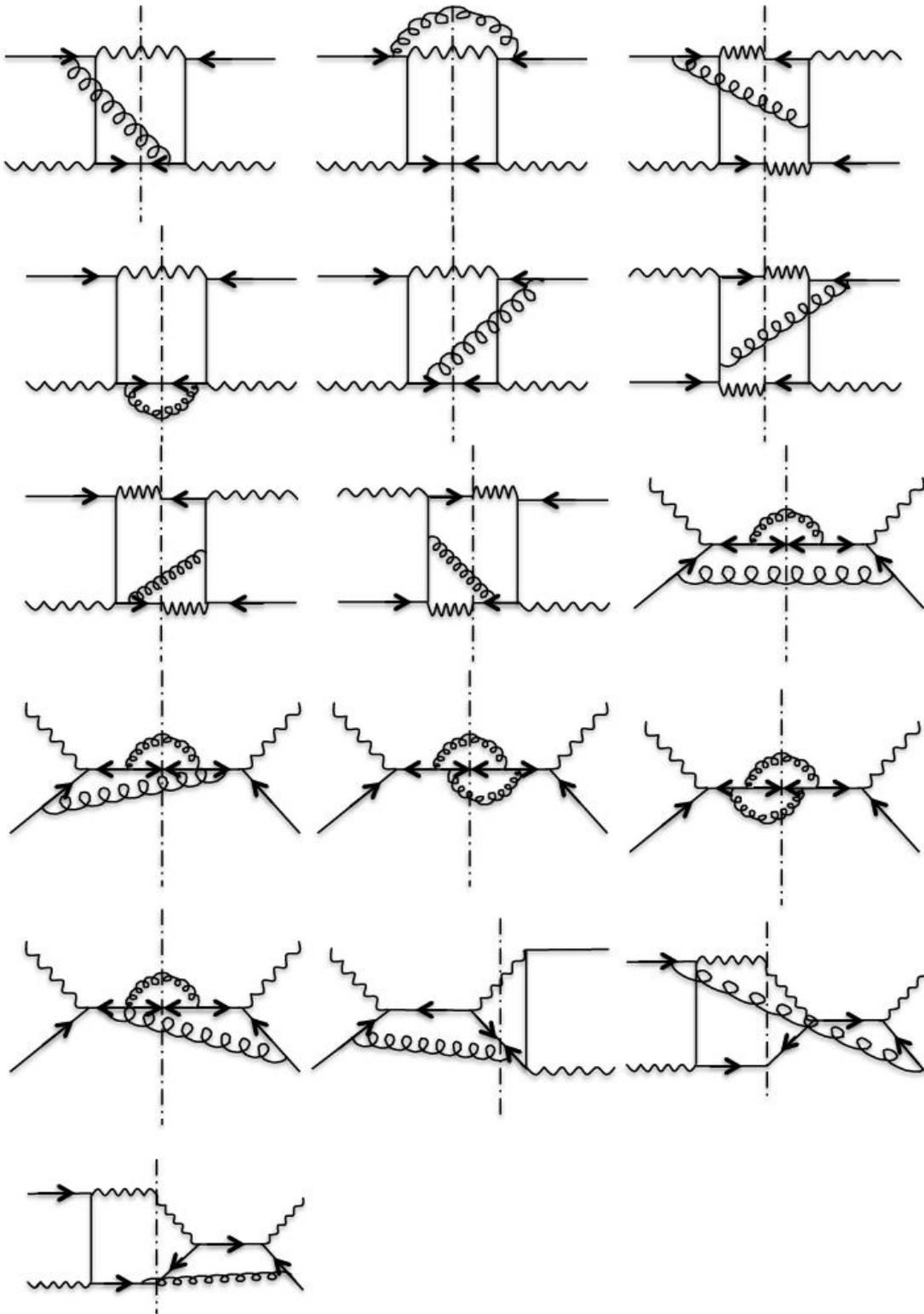


Fig. 2 Diagrammes unitaires de Bremsstrahlung Dominants pour le processus physique $H_1\gamma \rightarrow X\gamma$

3.3 Sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$

Considérant le processus physique avec deux fonctions de structure $H_1 H_2 \rightarrow \gamma\gamma$ où le terme de Born du sous-processus $\frac{d\sigma}{dv} \Big|_{Born}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}$, qui n'est pas proportionnel à α_s , s'exprime comme suit :

$$\frac{d\sigma}{dv} \Big|_{Born}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^4}{N_c \hat{s}} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \quad (2.71)$$

On déduit que :

$$\hat{C}_1 = 0 \quad (2.72)$$

L'absence de fonctions de fragmentation conduit à :

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0 \quad (2.73)$$

Afin déterminer les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 , rappelons l'équation (2.8) :

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_i P_{iq} \otimes \hat{\sigma}^B(iq \rightarrow \gamma\gamma) + \sum_j P_{qj} \otimes \hat{\sigma}^B(qj \rightarrow \gamma\gamma) \right] \quad (2.74)$$

Du premier terme de l'équation (2.74), on obtient à partir de la cinématique du processus :

$$z = \frac{x_i}{x_a} = \frac{-u}{s+t} = w \quad (2.75)$$

Et pour le second :

$$z = \frac{x_j}{x_b} = -\frac{t}{s+u} = \frac{1-v}{1-vw} \quad (2.76)$$

Par ailleurs, à partir des équations (2.74), (2.75) et (2.76), on obtient :

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{C_F}{\hat{s}vN_c} \Lambda (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \quad (2.77)$$

$$\left[\frac{4}{(1-w)_+} + \left(3 + 2 \ln \frac{v}{1-v} \right) \delta(1-w) \right]$$

Où,

$$\Lambda = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4}{\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \quad (2.78)$$

Par conséquent:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2C_F}{N_c} \Lambda \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (2.79)$$

Et

$$\tilde{C}_2 = \frac{4C_F}{N_c} \Lambda \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (2.80)$$

Rappelons que la contribution virtuelle, qui est essentiel pour la détermination de C_2 et C_3 , est la même que celle du sous-processus $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, excepté le facteur de couleur. Par conséquent, les coefficients A , A' et B' ont les mêmes expressions que dans les équations (2.37) - (2.39).

Cependant, l'expression de B change, puisque \tilde{C}_1 dans notre cas ne disparaît pas.

Nous avons alors:

$$A = -\frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{\hat{s}N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (2.81)$$

Et

$$B = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{2\hat{s}N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left[4 - 2\ln v - \frac{1}{2v} \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \right] \quad (2.82)$$

En utilisant les expressions de A et de B , on déduit les coefficients C_2 et C_3 .

Par ailleurs, pour calculer le coefficient restant C_1 , nous remarquons que nous n'avons pas de diagrammes unitaires de Bremsstrahlung ayant des contributions dominantes. Ainsi,

$$C = 0 \quad (2.83)$$

Et C_1 prend la forme :

$$C_1 = C_2 \ln v + C' - \tilde{C}_1 (\ln v + \ln(1-v)) \quad (2.84)$$

3.4 Sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$

Dans ce cas, pour le processus inélastique $H_1 H_2 \rightarrow \gamma X$, nous n'avons pas de fonction de fragmentation, mais deux fonctions de structure, d'où:

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0 \quad (2.85)$$

Le terme de Born $\frac{d\sigma}{dv}(s, v)|_{Born}^{q\bar{q} \rightarrow g\gamma}$ pour ce sous-processus est donné par:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v)|_{Born}^{q\bar{q} \rightarrow g\gamma} = \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}N_c} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \quad (2.86)$$

Contrairement aux applications précédentes, ici, le terme de Born est proportionnel à α_s . Ainsi,

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6} \quad (2.87)$$

Pour déterminer les coefficients \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 pour ce sous-processus, remarquons que l'état initial est le même que celui du sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$. Donc, l'argument de la fonction de Splitting z , est remplacé dans le premier terme de l'équation (2.75) par:

$$z = \frac{-\hat{u}}{\hat{s} + \hat{t}} = w \quad (2.88)$$

Et dans le second terme par:

$$z = \frac{1-v}{1-vw} \quad (2.89)$$

Le résultat est également la même que dans les équations (2.79) et (2.80), même pour le facteur de couleur:

$$\tilde{C}_1 = \frac{\pi C_F^2 \alpha \alpha_s}{\hat{s}vN_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (2.90)$$

Et

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\pi C_F^2 \alpha \alpha_s}{\hat{s}vN_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (2.91)$$

La contribution virtuelle $\frac{d\hat{\sigma}^{virt}}{dv}(s, v)|_{q\bar{q} \rightarrow g\gamma}$ de ce sous-processus est donnée par:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}^{\text{virt}}}{dv}(s, v)|_{q\bar{q} \rightarrow g\gamma} &= \frac{\alpha e_q^2 \alpha_s^2 (\mu^2)}{\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \left\{ \left\{ -(2C_F + N_c) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \frac{1}{\varepsilon^2} \right. \right. \\
&+ \left[(2C_F + N_c) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \right] \Xi \frac{1}{\varepsilon} \\
&+ \Xi \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) \left. \right\} \\
&- (2C_F - N_c) \left[\left(\frac{1}{v(1-v)} + \frac{1-v}{v} \right) \left(-\frac{1}{2} \ln^2(2-v) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{1}{2-v} \right) \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1+v^2}{v(1-v)} \left(-\frac{1}{2} \ln^2(1+v) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{1}{1+v} \right) \right) \right] \\
&+ N_c \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left[\frac{1}{2} \ln^2(2-v) + \frac{1}{2} \ln^2(1+v) + L_{i_2} \left(\frac{1}{2-v} \right) + L_{i_2} \left(\frac{1}{1+v} \right) \right] \\
&+ \frac{C_F}{N_c} \left\{ \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{4C_F - N_c}{6} \pi^2 - 8C_F - \frac{N_c}{2} \ln^2 v(1-v) \right) \right. \\
&+ \left. C_F \left(\frac{1}{v(1-v)} - 2 \right) + \left(C_F \frac{2+v}{1-v} - N_c \right) \ln(1-v) + \left(C_F \frac{3-v}{v} - N_c \right) \ln v \right\} \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Où,

$$\Xi = 3C_F + \frac{11}{N_C} + N_C \ln \frac{1}{v(1-v)} - \frac{2}{3} T_R \quad (2.93)$$

$$T_R = \frac{1}{2} N_f \quad (2.94)$$

Le Dilogarithme L_{i_2} est défini par :

$$L_{i_2} = -\int_0^x \frac{dz}{z} \ln(1-z) \quad (2.95)$$

Enfin, A et B s'expriment comme suit:

$$A = -(2C_F + N_C) \frac{2\pi C_F \alpha \alpha_s}{\hat{s}vN_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (2.96)$$

Et

$$B = \frac{2\pi C_F \alpha \alpha_s}{\hat{s}vN_c} \left[(2C_F + N_C) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) - \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \Xi \right] \quad (2.97)$$

Nous obtenons finalement C_2 et C_3 .

En ce qui concerne la contribution de Bremsstrahlung, nous constatons qu'il n'y a pas de diagrammes de Bremsstrahlung unitaires dominants, et par conséquent :

$$C = 0 \quad (2.98)$$

De l'expression du coefficient C' provenant de la contribution virtuelle, on peut déterminer C_1 .

3.5 Sous-processus $qg \rightarrow \gamma q$

Le processus physique élastique $H_1 H_2 \rightarrow \gamma H_4$ contient deux fonctions de structure et une de fragmentation. Le terme de Born et les corrections virtuelles (jusqu'aux calculs de la moyenne sur l'hélicité, sur le spin et les facteurs de couleur) peuvent être obtenus du sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ en faisant le changement $\hat{s} \leftrightarrow \hat{u}$ ou de façon équivalente à l'aide de la substitution:

$$v \leftrightarrow \frac{1}{v}$$

Aussi, puisque le terme de Born est de l'ordre α_s ,

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v) \Big|_{Born}^{qg \rightarrow \gamma q} \equiv \frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v) = \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2}{\hat{s}} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{2-2v+v^2}{1-v} \right) + 2\varepsilon \right] \quad (2.99)$$

On déduit que :

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6} \quad (2.100)$$

L'expression donnant \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 pour ce sous-processus est:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} &= \frac{1}{2} \left[\sum_q P_{qq} \otimes \hat{\sigma}^B(qg \rightarrow \gamma q) + \sum_j P_{gg} \otimes \hat{\sigma}^B(qj \rightarrow \gamma q) \right] \\ &= T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Et pour $\tilde{\tilde{C}}_1$ et $\tilde{\tilde{C}}_2$ est :

$$\tilde{\tilde{C}}_1 \delta(1-w) + \tilde{\tilde{C}}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_q \hat{\sigma}^B(qg \rightarrow id) \otimes P_{qq} \right] = T_3 \quad (2.102)$$

L'argument de la fonction de Splitting z , est remplacé dans le premier terme de l'équation (2.101) par $z = 1 - v + vw$.

Ici,

$$T_1 = -\frac{1}{2\hat{s}vw} P_{qq}(w) \frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\widehat{ws}, v) \quad (2.103)$$

$$T_2 = -\frac{1}{2\hat{s}(1-vw)} P_{qq}\left(\frac{1-v}{1-vw}\right) \frac{d\hat{\sigma}}{dv}\left(\frac{1-v}{1-vw}\hat{s}, vw\right) \quad (2.104)$$

Et

$$T_3 = -\frac{1-v+vw}{\hat{s}} P_{qq}\left(\frac{1}{1-v+vw}\right) \frac{d\hat{\sigma}}{dv}\left(\hat{s}, \frac{vw}{1-v+vw}\right) \quad (2.105)$$

La contribution virtuelle,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}^{virt}}{dv}(\hat{s}, v)|_{qg \rightarrow \gamma q} &= \frac{\alpha e_q^2 \alpha_s^2(\mu^2)}{2\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)}\right)^\varepsilon \left\{ \left\{ -(2C_F + N_c) \left(\frac{1}{1-v} + 1-v\right) \right. \right. \\ &\times \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{8} + 2 + \ln^2 v \right] + \frac{1}{\varepsilon} \left[(2C_F + N_c) \left(\frac{1}{1-v} - 1-v\right) \right. \\ &\left. \left. - \left(\frac{1}{1-v} + 1-v\right) \Theta \right] + \Theta \left(\frac{1}{1-v} - v - 1\right) \right\} + 2 \left\{ \left(\frac{1}{1-v} + 1-v\right) \right. \\ &\times \left(\frac{4C_F - N_c}{6} \pi^2 - 8C_F - \frac{N_c}{2} \ln^2 v(1-v) \right) + C_F \left(\frac{v^2}{1-v} + 2\right) \\ &\left. - \left(C_F \frac{2v+1}{1-v} - N_c \right) \ln\left(\frac{1-v}{v}\right) - (C_F(3v-1) - N_c) \ln v \right. \\ &+ (2C_F - N_c) \left[\left(\frac{v^2}{(1-v)} + 1-v\right) \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{2v-1}{v}\right) + L_{i_2}(1) \right. \right. \\ &\left. \left. - L_{i_2}\left(\frac{v}{2v-1}\right) \right) - \frac{(1+v)^2}{(1-v)} \left(-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{1+v}{v}\right) + L_{i_2}(1) - L_{i_2}\left(\frac{v}{1+v}\right) \right) \right] \\ &\left. - N_c \left(\frac{1}{1-v} + 1-v\right) \left[\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{2v-1}{v}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{1+v}{v}\right) + L_{i_2}\left(\frac{v}{2v-1}\right) \right. \right. \\ &\left. \left. + L_{i_2}\left(\frac{v}{1+v}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.106)$$

Où

$$\Theta = 3C_F + \frac{11}{N_c} - N_c \ln(1-v) - \frac{2}{3} T_R \quad (2.107)$$

Après simplifications, on obtient :

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\pi\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.108)$$

$$\tilde{C}_2 \propto \frac{2\pi\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \left(\frac{3}{2} - \ln(1-v) \right) \quad (2.109)$$

$$\tilde{\tilde{C}}_1 = \frac{\pi\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.110)$$

Et

$$\tilde{\tilde{C}}_2 = \frac{2\pi\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (2.111)$$

Pour obtenir les coefficients C_2 et C_3 , nous devons d'abord déterminer les coefficients A et B par la substitution, v par $\frac{1}{v}$ dans les équations (2.96) -(2.97) du sous-processus $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ après multiplication par le facteur $\frac{3}{8}$.

Pour obtenir le coefficient C des termes de Bremsstrahlung dominants et à partir des diagrammes de Bremsstrahlung unitaires de la Figure 3, on peut montrer que le carré de l'amplitude de transition $|M|_{Brems}^2$ s'exprime comme suit:

$$|M|_{Brems}^2 \simeq \frac{1}{a_4} \beta_4 + \frac{1}{a_1 a_4} \beta_{14} + \frac{1}{a_2 a_4} \beta_{24} \quad (2.112)$$

Où a_1, a_2 et a_4 sont définies dans la Réf. [25].

Après intégration dans l'espace de phase à trois corps [33,34,35], on obtient :

$$\int_{3body\ phase\ space} \overline{|M|_{Brems}^2} = \beta_4 J_4 + \beta_{14} J_{14} \quad (2.113)$$

Avec,

$$\beta_4 = 16(\kappa + \eta) \quad (2.114)$$

Et

$$\beta_{14} = 8sv\kappa(v-1 + \frac{1}{v-1}) \quad (2.115)$$

Ici,

$$\eta = \eta^* = e^2 g^4 \sum_a \text{tr}(T^a T^a) \sum_b \text{tr}(T^b T^b) \quad (2.116)$$

Et

$$\kappa = \kappa^* = e^2 g^4 \sum_{ab} \text{tr}(T^a T^b T^a T^b) \quad (2.117)$$

T^a sont les générateurs $SU(3)$ dans la représentation fondamentale.

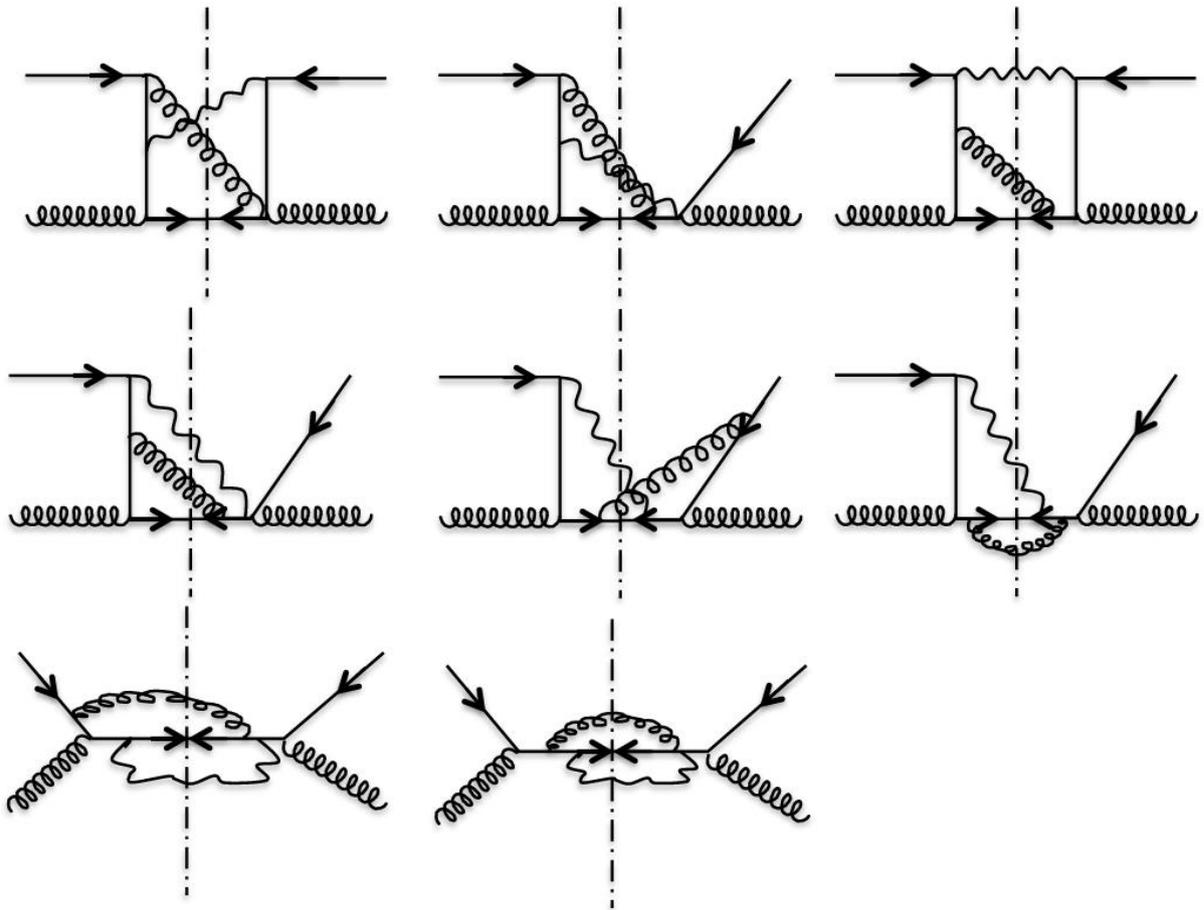


Fig. 3 Diagrammes unitaires de Bremsstrahlung Dominants pour le processus physique $H_1 H_2 \rightarrow \gamma H_4$

Notons que les termes contenant $\frac{1}{a_2 a_4}$ (i.e. β_{24}) sont proportionnels au facteur purement

imaginaire ξ , donné par :

$$\xi = e^2 g^4 \sum_{ab} \text{tr}(T^a T^b T^c) f^{abc} = -\xi^* \quad (2.118)$$

Ainsi, β_{24} disparaît.

Après de fastidieux calculs, mais simples, on obtient :

$$C \approx -35.55 \quad (2.119)$$

Par une procédure similaire on peut déterminer le coefficient C' , et finalement, déduire le coefficient C_1 .

4. Résultats numériques et Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé au modèle du gluon mou et/ou colinéaire initié dans les Réf. [20,21,22,23,24], et revu dans la Réf. [25], et afin de montrer l'efficacité et la simplicité dans de l'évaluation des divers termes dominants de la HOC QCD (provenant du Bremsstrahlung), Nous avons appliqué cette approximation à de nombreux sous-processus, à savoir: $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ and $qg \rightarrow q\gamma$.

Cette méthode consiste à identifier exactement les diagrammes unitaires importants, parmi des centaines, et d'utiliser finalement de simples intégrales pour déterminer les amplitudes. Cette technique est très utile car elle réduit d'énormes calculs et donne des expressions analytiques. Elle aide également à avoir une idée de la grandeur du HOC, son signe, et à tester la convergence de la série perturbative. L'extension possible de cette méthode au NNLO, à la production des quarks lourds et du boson de Higgs, aux processus supersymétriques, et autres, sont en cours d'études.

Récemment, Atlas [36] et CMS [37] (CDF [38], respectivement) ont publiés leurs résultats concernant la mesure de la section efficace inclusive de photons prompts isolés pour des collisions pp ($p\bar{p}$, respectivement) au LHC (Tevatron, respectivement) [36, 37, 38]. Les mesures couvrent une certaine gamme de pseudo-rapidité η_γ et d'énergie transverse E_T^γ , et cela pour différentes luminosités intégrées (2.5 fb^{-1} pour CDF, 4.6 fb^{-1} pour Atlas, 36 pb^{-1} pour CMS).

En outre, afin de réduire la contamination due à la désintégration de mésons neutres, le

Trigger à basse E_T^γ nécessite l'isolement des clusters de photons ($E_T^{iso} < 2.0$ GeV pour CDF, $E_T^{iso} < 4.7$ GeV pour Atlas, $E_T^{iso} < 5.0$ GeV pour CMS) et de l'énergie supplémentaire à l'intérieur d'un cône de rayon $R = \sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\eta)^2} = 0.4$ (ϕ est l'angle azimutal) et le cluster devrait être inférieure à 10% de l'énergie du cluster. Les incertitudes statistiques, systématiques, d'échelle, sur les PDF et sur α_s sont également pris en compte.

Comme test de notre nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire, nous avons fait une comparaison avec les données expérimentales de CMS, Atlas et CDF, et cela pour la production de photons directs isolées inclusive.

La courbe de la Figure 4 représente le rapport $R = \frac{d\sigma/dE_T^\gamma(soft)}{d\sigma/dE_T^\gamma(Atlas)}$ en fonction de l'énergie transversale des photons E_T^γ sur la gamme d'énergie $100 \text{ GeV} \leq E_T^\gamma \leq 1 \text{ TeV}$ et une pseudo-rapidité $|\eta_\gamma| < 1.37$. $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(soft)$ symbolise la section efficace différentielle théorique en utilisant la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire et $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(Atlas)$ est celle de la collaboration Atlas. Dans nos calculs nous avons utilisé les MRST 2007 (PDF), et les deux échelles de renormalisation et de factorisation, μ_R et μ_F respectivement, sont prises égales à E_T^γ . Afin de tester les effets de leurs variations sur la stabilité de notre section efficace différentielle, nous les avons variés indépendamment de $\frac{E_T^\gamma}{2}$ et de $2E_T^\gamma$, et on a remarqué que le résultat est presque stable (juste un léger changement qui ne dépasse pas les 5%). Un changement de section efficace différentielle de $1.81 \times 10^{-1} \text{ pb/GeV}$ à $1.63 \times 10^{-1} \text{ pb/GeV}$, pour $E_T^\gamma \approx 197 \text{ GeV}$.

Rappelons que dans la collision pp , la contribution du sous-processus $qg \rightarrow \gamma q$ domine, à cause des PDF du gluon à l'intérieur du proton. Nous avons remarqué que le rapport R diminue de ~ 1.11 à ~ 1 dans la gamme d'énergie $112.2 \text{ GeV} \leq E_T^\gamma \leq 856.1 \text{ GeV}$. De plus, il y a un petit écart (de $\sim 11\%$) par rapport aux données expérimentales pour des basses valeurs de E_T^γ ($\leq 112 \text{ GeV}$), mais un très bon accord pour des valeurs plus grandes ($\geq 856 \text{ GeV}$). La raison est que pour des fonctions de moment transverse $x_T = \frac{2E_T^\gamma}{\sqrt{s}}$ assez basses, la section efficace différentielle devient très sensible à la distribution de gluons et d'autres effets peuvent surgir.

Dans l'ensemble, nos résultats sont en bon accord avec les données d'Atlas, dans le cadre des incertitudes expérimentales mentionnées ci-dessus.

La Figure 5 est la même que la figure 4, mais pour une gamme d'énergie $100 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 600 \text{ GeV}$ et $1.52 < |\eta_\gamma| < 2.37$. Le rapport R diminue de 1.13 à 1.01, pour E_T^γ allant de 112.5 GeV à 550 GeV. Par exemple, pour $E_T^\gamma = 162.5 \text{ GeV}$ la différence entre la théorie (avec notre approche) et les données expérimentales est de l'ordre de 6%. La Figure 6 est la même que la Figure 4, mais pour CMS, avec une gamme d'énergie $25 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 400 \text{ GeV}$ et $2.1 < |\eta_\gamma| < 2.5$. Le rapport R diminue de ~ 1.11 à ~ 1.008 , pour E_T^γ allant de 95.5 GeV à 367.03 GeV. Par exemple, pour $E_T^\gamma = 169.33 \text{ GeV}$ la différence entre $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{soft})$ et $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{CMS})$ est d'environ 2.8%. La Figure 7 est la même que la Figure 4, mais pour CDF (Tevatron), avec une gamme d'énergie $50 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 400 \text{ GeV}$ et $|\eta_\gamma| < 1.0$. Le rapport R diminue de 1.11 à 1.0058 pour E_T^γ allant de 53.8 GeV à 346.67 GeV. Par exemple, pour $E_T^\gamma = 82.38 \text{ GeV}$ la différence entre $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{soft})$ et $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{CDF})$ est d'environ 4.25%. Notons qu'au Tevatron, le sous processus ayant une contribution dominante est $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$. Les Figures 8 et 9 représentent la section efficace théorique dans le cadre de notre nouvelle approche approximative et les données d'Atlas ($112.2 \text{ GeV} \leq E_T^\gamma \leq 856.1 \text{ GeV}$ et $|\eta_\gamma| < 1.37$) et de CDF ($53.8 \text{ GeV} \leq E_T^\gamma \leq 346.67 \text{ GeV}$ et $|\eta_\gamma| < 1.0$).

Il est important de mentionner également que dans tous les cas, nos résultats sont au-dessus des données expérimentales.

En conclusion, cette nouvelle approche donne de bons résultats par rapport aux données expérimentales du LHC et du Tevatron dans le cas de la production de photons directs isolées. D'autres applications sont en cours d'études.

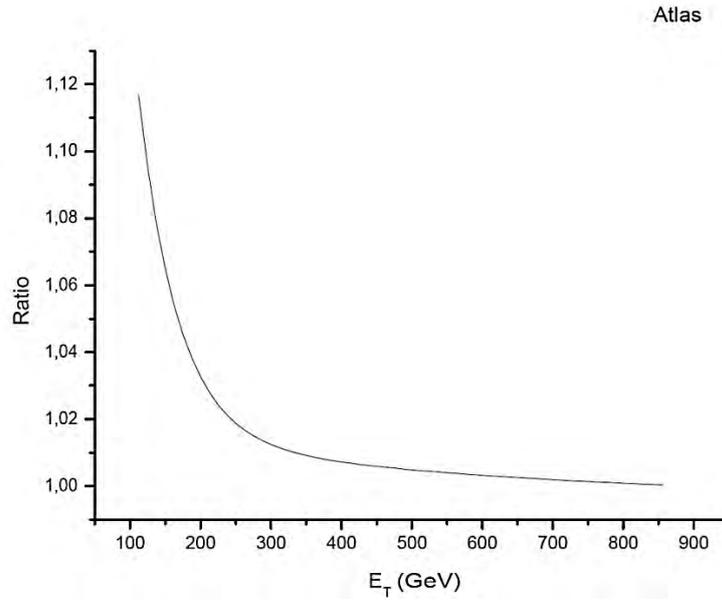


Fig. 4 Le rapport entre la section efficace différentielle théorique en utilisant la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (*soft*), et celle de la collaboration Atlas, en fonction de E_T^γ et pour $|\eta_\gamma| < 1.37$.

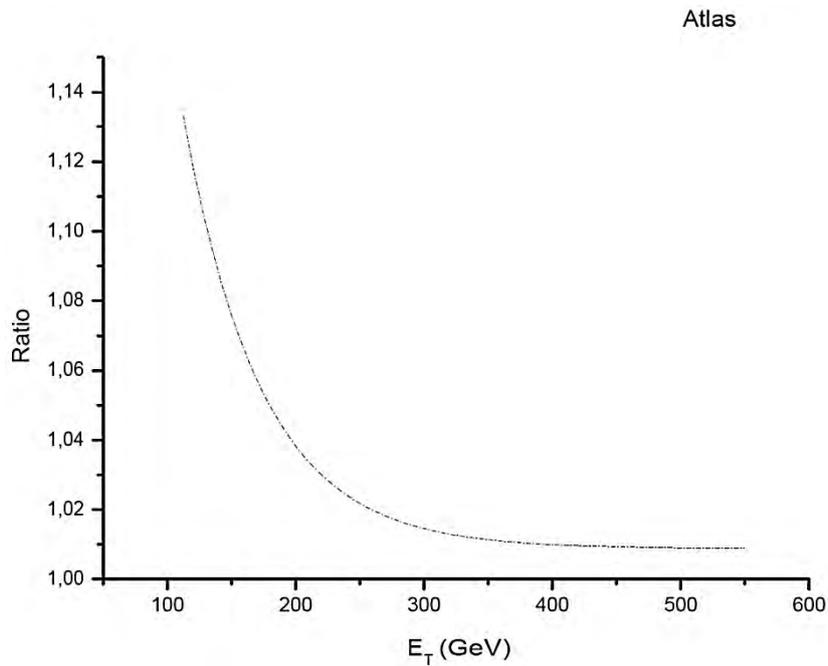


Fig. 5 Le rapport entre la section efficace différentielle théorique en utilisant la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (*soft*), et celle de la collaboration Atlas, en fonction de E_T^γ , mais pour $1.52 < |\eta_\gamma| < 2.37$.

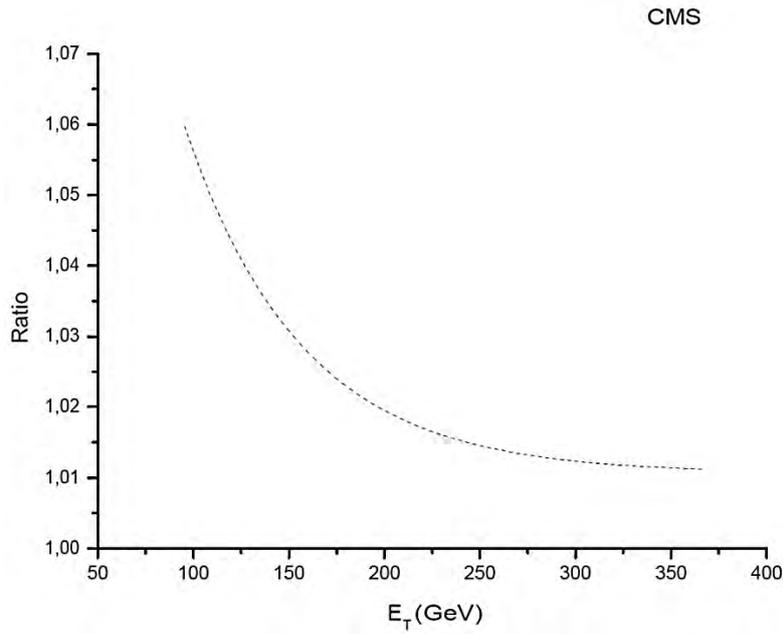


Fig. 6 Le rapport entre la section efficace différentielle théorique en utilisant la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (*soft*), et celle de la collaboration CMS, en

fonction de E_T^γ et pour $2.1 < |\eta_\gamma| < 2.5$.

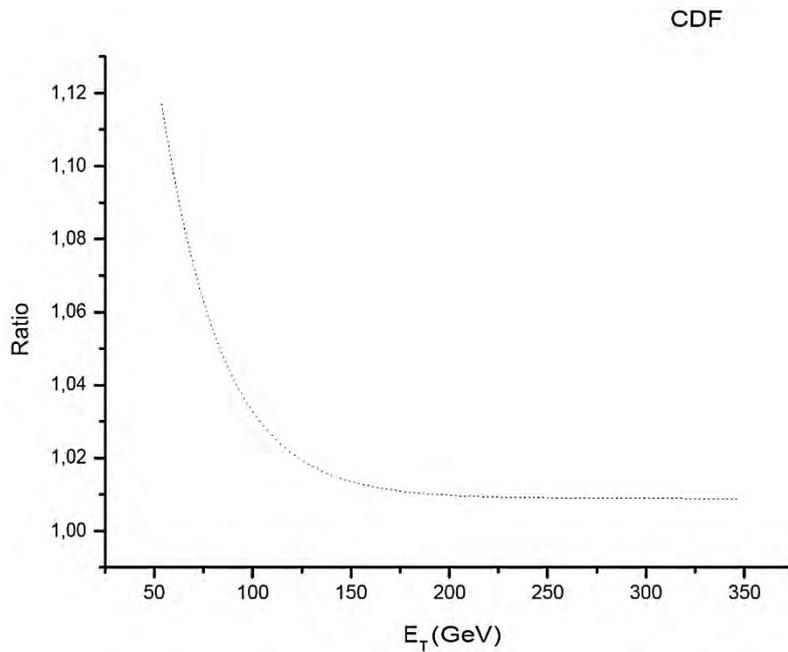


Fig. 7 Le rapport entre la section efficace différentielle théorique en utilisant la nouvelle approche du gluon mou et/ou colinéaire $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (*soft*), et celle de la collaboration CDF, en

fonction de E_T^γ et pour $|\eta_\gamma| < 1.0$.

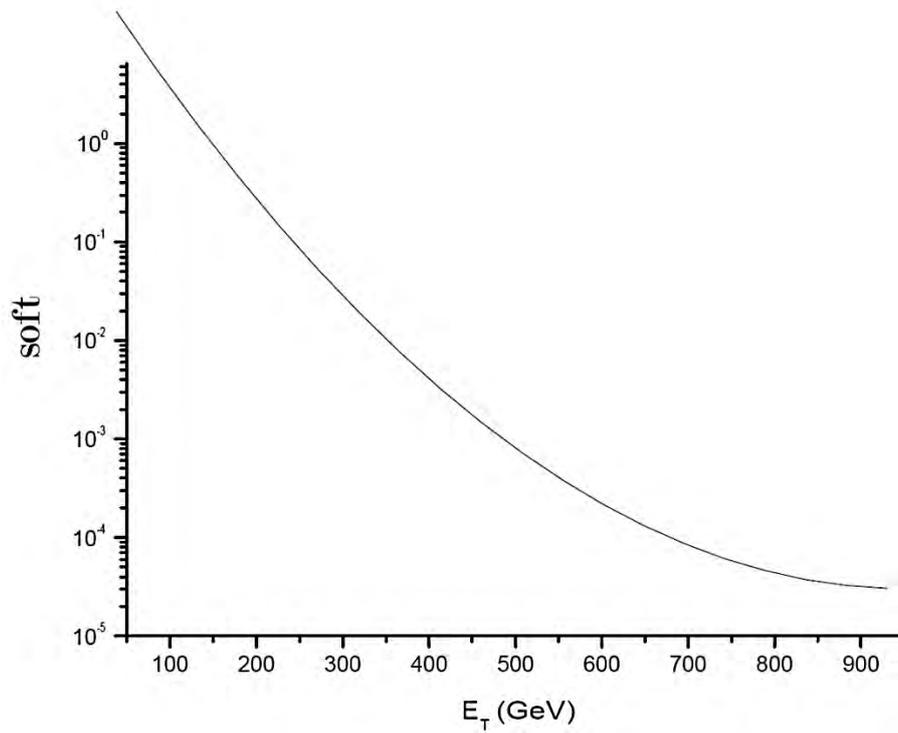


Fig. 8 Variation de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ dans le cadre de notre nouvelle approche approximative en fonction de E_T^γ , pour $\sqrt{s} < 7$ TeV et $|\eta_\gamma| < 1.37$.

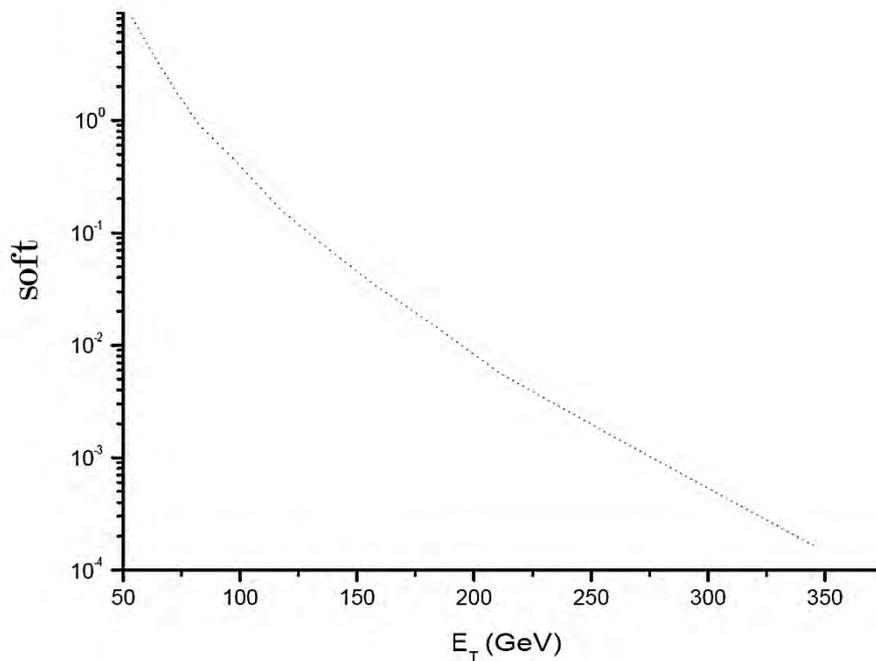


Fig. 9 Variation de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ dans le cadre de notre nouvelle approche approximative en fonction de E_T^γ , mais pour $\sqrt{s} < 1.96$ TeV et $|\eta_\gamma| < 1.0$.

CHAPITRE 3

Production de photons directs dans le cadre du MINIMAL-NCSM

1. Introduction

Dans notre travail, on s'intéresse à la géométrie non-commutative basée sur la non-commutativité des variables de l'espace et du temps [13, 14, 15, 16, 17,18] :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i \theta_{\mu\nu} = i \frac{C_{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} \quad (3.1)$$

Ecrivant C sous sa forme la plus générale :

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Dans ce chapitre, nous avons choisi la paramétrisation suivante :

$$B = \frac{1}{\Lambda_B^2} \begin{pmatrix} \cos \beta_b \sin \gamma_b \\ \sin \beta_b \sin \gamma_b \\ \cos \gamma_b \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{\Lambda_E^2} \begin{pmatrix} \cos \beta_e \sin \gamma_e \\ \sin \beta_e \sin \gamma_e \\ \cos \gamma_e \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Pour tenir compte de la rotation de la terre [39], on choisit comme référentiel initial un repère cartésien céleste (indépendant de la rotation de la terre) où le l'axe X_3 est dirigé suivant l'axe de rotation de la terre, et les deux autres axes suivant une direction perpendiculaire. Les deux angles γ et β représentent les coordonnées sphériques de B et de E, la colatitude et l'angle azimutal, respectivement (voir Figure 1(a)).

Pour exprimer B et E dans le référentiel local de latitude δ , où l'axe x_3 , qui représente l'axe de collision, est incliné de α par rapport à la direction du Nord, et l'axe x_2 perpendiculaire à la surface (voir Figure 1(b)), on applique une série de rotations des axes de coordonnées comme suit [40, 41]:

$$\{B', E'\} \equiv R \cdot \{B, E\} \quad (3.4)$$

Avec,

$$R = R_2(\alpha) R_3(-\pi/2) R_2(-\delta) R_3(a) \text{ et } a = \omega t + a_0 \quad (3.5)$$

Où "a" représente l'ascension droite du lieu et ω la vitesse angulaire de la Terre.

$$\{B', E'\} \equiv \frac{1}{\Lambda_{B,E}^2} \begin{pmatrix} -\cos\gamma \cos\delta \sin\alpha + \sin\gamma (\cos(\beta-a) \sin\alpha \sin\delta - \cos\alpha \sin(\beta-a)) \\ \cos\gamma \sin\delta + \cos\delta \cos(\beta-a) \sin\gamma \\ \cos\alpha (\cos\gamma \cos\delta - \cos(\beta-a) \sin\gamma \sin\delta) - \sin\alpha \sin\gamma \sin(\beta-a) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

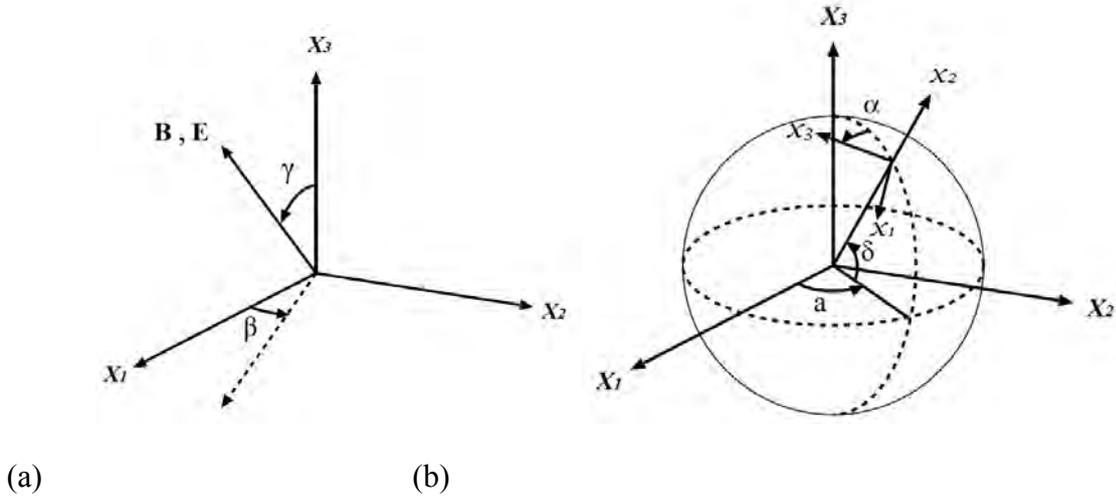


Fig. 1 A gauche, B et E dans le système de coordonnées céleste, à droite, le système de coordonnées local.

2. Production de photons directs

Les règles de Feynman utilisées dans la suite de ce chapitre, sont celles déduites par Melić et al en 2005 au premier ordre du paramètre de non-commutativité θ [17,18]. Concernant le processus physique étudié, on s'intéresse à la production de photons directs suite à la collision de deux hadrons [42,43]. Il s'agit en fait d'un photon émis directement du processus dur parton-parton. Les sous-processus qui interviennent, au niveau partonique, sont: les réactions d'annihilation et la réaction de diffusion de type Compton. Ces processus ont déjà été étudiés, mais pas dans le cadre hadronique [44,45].

Au début de nos recherches, lorsqu'on a commencé à s'intéresser à ce type de processus, on se contentait de la composante θ_{13} dans nos calculs et on ne tenait pas en compte l'effet de la rotation de la terre [46] plus tard, on a complété notre étude, en prenant en compte les effets susdits.

Par convention, on considère que les collisions se produisent suivant l'axe x_3 ; quant à l'angle transversal φ , il est compté à partir de l'axe x_1 .

Le premier sous-processus considéré ici est la réaction d'annihilation $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$ représentée par les diagrammes suivants :

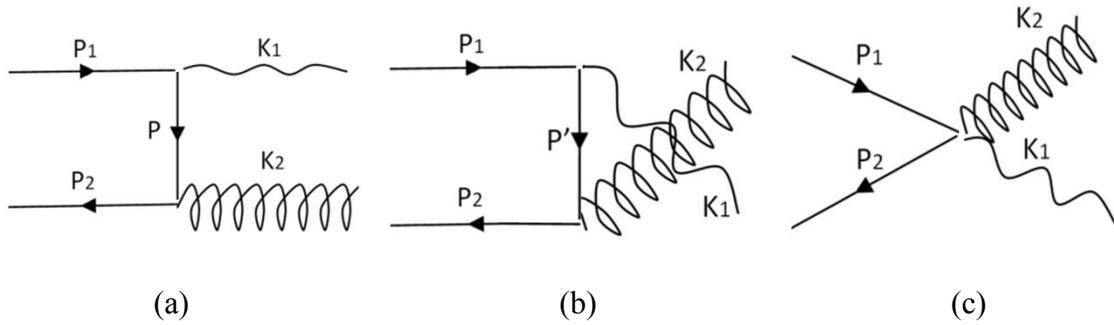


Fig. 2 Diagrammes de Feynman pour l'interaction quark-antiquark avec émission d'un photon et d'un gluon

$$M_A^a = -ieqg_s \bar{v}^{(s)}(2)(c_2^+)^m \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2}(-K_2)^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} P'^\rho - \theta_{\mu\nu} M_q) \right] \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \quad (3.8)$$

$$\frac{\not{P}' + M_q}{P'^2 - M_q^2} \left[\gamma_\alpha - \frac{i}{2}(-K_1)^\beta (\theta_{\alpha\beta\lambda} P_1^\lambda - \theta_{\alpha\beta} M_q) \right] u^{(s)}(1)(c_1^+)_j (\varepsilon_{2\mu}^* a_2^{a\mu}) \varepsilon_{1\alpha}^*$$

$$M_A^b = -ieqg_s \bar{v}^{(s)}(2)(c_2^+)^m \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2}(-K_1)^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} P'^\rho - \theta_{\mu\nu} M_q) \right] \frac{\not{P}' + M_q}{P'^2 - M_q^2} \quad (3.9)$$

$$\left[\gamma_\alpha - \frac{i}{2}(-K_2)^\beta (\theta_{\alpha\beta\lambda} P_1^\lambda - \theta_{\alpha\beta} M_q) \right] \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} u^{(s)}(1)(c_1^+)_j (\varepsilon_{2\mu}^* a_2^{a\mu}) \varepsilon_{1\mu}^*$$

$$M_A^c = -\frac{1}{2}eqg_s \bar{v}^{(s)}(2)(c_2^+)^m \theta_{\mu\nu\rho} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} [-(K_1 - K_2)^\rho] u^{(s)}(1) \quad (3.10)$$

$$(c_1^+)_j (\varepsilon_{2\nu}^* a_2^{a\nu}) \varepsilon_{1\mu}^*$$

Le second sous-processus considéré est la réaction de diffusion de type Compton $qg \rightarrow q\gamma$ ou $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}\gamma$ représentée par les diagrammes suivants :

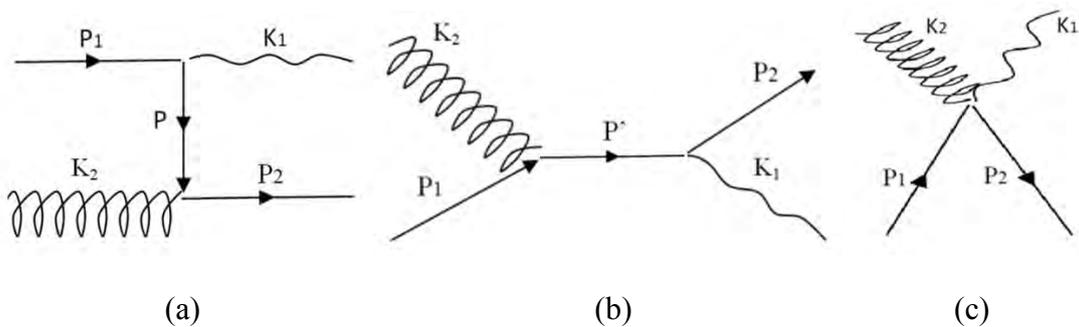


Fig. 3 Diagrammes de Feynman pour l'interaction quark-gluon avec émission d'un seul photon

$$M_C^a = -ieqg_s \bar{u}^{(s)}(2) (c_2^+)_i^m \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} K_2^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} P^\rho - \theta_{\mu\nu} M_q) \right] \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} \quad (3.11)$$

$$\frac{\not{P} + M_q}{P^2 - M_q^2} \left[\gamma_\alpha - \frac{i}{2} (-K_1)^\beta (\theta_{\alpha\beta\lambda} P_1^\lambda - \theta_{\alpha\beta} M_q) \right] u^{(s')}(1) (c_1^+)_j^n (\varepsilon_{2\mu} a_2^{al}) \varepsilon_{1\alpha}^*$$

$$M_C^b = -ieqg_s \bar{u}^{(s)}(2) (c_2^+)_i^m \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} (-K_1)^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} P'^\rho - \theta_{\mu\nu} M_q) \right] \frac{\not{P}' + M_q}{P'^2 - M_q^2} \quad (3.12)$$

$$\left[\gamma_\alpha - \frac{i}{2} K_2^\beta (\theta_{\alpha\beta\lambda} P_1^\lambda - \theta_{\alpha\beta} M_q) \right] \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} u^{(s')}(1) (c_1^+)_j^n (\varepsilon_{2\alpha} a_2^{al}) \varepsilon_{1\alpha}^*$$

$$M_C^c = -\frac{1}{2} eqg_s \bar{u}^{(s)}(2) (c_2^+)_i^m \theta_{\alpha\mu\rho} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} [(-K_1 - K_2)^\rho] u^{(s')}(1) \quad (3.13)$$

$$(c_1^+)_j^n (\varepsilon_{2\mu} a_2^{al}) \varepsilon_{1\alpha}^*$$

Les vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{a} , de trois et huit composants, servent à décrire l'état de couleurs des quarks et des gluons, respectivement [47]. Les indices A et C désignent les processus d'annihilation et de type Compton, respectivement. λ symbolise les huit matrices de Gell-Mann. Quant à $\theta_{\mu\nu\rho}$, il est défini comme suit :

$$\theta_{\mu\nu\rho} = \theta_{\mu\nu} \gamma_\rho + \theta_{\nu\rho} \gamma_\mu + \theta_{\rho\mu} \gamma_\nu \quad (3.14)$$

L'amplitude totale est la somme des sous amplitudes :

$$M_A = M_A^a + M_A^b + M_A^c \quad (3.15)$$

$$M_C = M_C^a + M_C^b + M_C^c$$

La section efficace est obtenue en moyennant sur les couleurs et les polarisations des quarks et des bosons de l'état initial, en sommant sur les couleurs et les polarisations des quarks et des bosons de l'état final.

$$S_A = \frac{1}{3^2} \sum_{m,n=1}^3 \sum_{l=1}^8 \frac{1}{2^2} \sum_{s,s'=1,\varepsilon_1,\varepsilon_2} \sum |M_A|^2 \quad (3.16)$$

$$S_C = \frac{1}{3} \sum_{m,n=1}^3 \frac{1}{8} \sum_{l=1}^8 \frac{1}{2^2} \sum_{s,s'=1,\varepsilon_1,\varepsilon_2} \sum |M_C|^2$$

Les facteurs de couleurs peuvent être calculés séparément :

$$f_A = \frac{1}{3^2} \sum_{m,n=1}^3 \sum_{l=1}^8 \left| (c_2^+)_i^m \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} (c_1^+)_j^n a_2^{al} \right|^2 = \frac{4}{9} \quad (3.17)$$

$$f_C = \frac{1}{3} \sum_{m,n=1}^3 \frac{1}{8} \sum_{l=1}^8 \left| (c_2^+)_i^m \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ij} (c_1^+)_j^n a_2^{al} \right|^2 = \frac{3}{18}$$

On calcul par la suite la section efficace différentielle de chaque processus :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{St}{(8\pi)^2} \frac{S}{s} \frac{|\vec{P}_f|}{|\vec{P}_i|} \quad (3.18)$$

Où, St représente le facteur statistique (dans notre cas, il est égal à 1), $|\vec{P}_i|$ et $|\vec{P}_f|$ représentent la valeur de l'impulsion incidente et de l'impulsion finale, respectivement.

Par la suite, on remplace les composantes de B par ses valeurs dans le référentiel local (expression de B' (3.7)), et on moyenne sur φ et sur le temps t (donc sur "a"), puisque les collisions se font à l'échelle de plusieurs mois.

Pour simplifier l'expression de la matrice de diffusion S, qui nécessite un temps de calculs très long, il a fallu négliger la masse des quarks (ce qui est possible à très haute énergie) et les termes d'ordre supérieur à θ^2 . Le reste des calculs, tel que la sommation sur le spin des quarks et les polarisations des photons et des gluons (calculs de traces), sont accomplis à l'aide du logiciel FeynCalc 4.2.0 (voir Annexe B). Ci-dessous la partie purement non-commutative de la section efficace différentielle.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{E=0}^C &= \frac{Q^2 s \alpha_e \alpha_s}{24576 \Lambda_b^4} (\cos 2\gamma_b (45 \cos \theta + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 3\theta + 12) (6 \cos^2 \alpha \cos 2\delta - 1) \\ &+ \cos 2\alpha (3 \cos 2\gamma_b + 1) (45 \cos \theta + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 3\theta + 12) + 2 \cos^2 \alpha \cos 2\delta (45 \cos \theta + 4 \cos 2\theta + 3 \cos 3\theta + 12) \\ &- 15 \cos \theta + 20 \cos 2\theta - \cos 3\theta + 316) + o\left(\frac{1}{\Lambda_b^8}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{B=0}^C &= \frac{Q^2 s \alpha_e \alpha_s}{98304 \Lambda_e^4} \left(\frac{2 \cos^2 \theta / 2}{\cos \theta + 1} (\cos 2\gamma_e (103 \cos \theta + 2 \cos 2\theta + 9 \cos 3\theta + 14) (6 \cos^2 \alpha \cos 2\delta - 1) \right. \\ &+ 2 \cos^2 \alpha \cos 2\delta (103 \cos \theta + 2 \cos 2\theta + 9 \cos 3\theta + 14) - 205 \cos \theta + 42 \cos 2\theta - 3 \cos 3\theta + 806) \\ &\left. + \cos 2\alpha (3 \cos 2\gamma_e + 1) (103 \cos \theta + 2 \cos 2\theta + 9 \cos 3\theta + 14) \right) + o\left(\frac{1}{\Lambda_e^8}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{E=0}^A = \frac{Q^2 s \alpha_e \alpha_s (\cos 2\theta + 11)}{24576 \Lambda_b^4} (22 + 2 \cos 2\gamma_b - 4 \cos^2 \alpha (3 \cos 2\gamma_b + 1) \cos 2\delta - 3 \cos 2(\alpha - \gamma_b) - 3 \cos 2(\alpha + \gamma_b) - 2 \cos 2\alpha) + o\left(\frac{1}{\Lambda_b^8}\right) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{B=0}^A &= \frac{Q^2 s \alpha_e \alpha_s}{12288 \Lambda_e^4} (\cos 2\gamma_e (\cos 2\theta - 5) (6 \cos^2 \alpha \cos 2\delta - 1) \\ &+ \cos 2\alpha (3 \cos 2\gamma_e + 1) (\cos 2\theta - 5) + 2 \cos^2 \alpha \cos 2\delta (\cos 2\theta - 5) + 21 \cos 2\theta + 151) + o\left(\frac{1}{\Lambda_e^8}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

3. Comportement de la section efficace au niveau partonique

Soit la section efficace différentielle relative définie comme suit :

$$\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}} \quad (3.23)$$

Les courbes des Figures 4 et 5 représentent la variation de $\Delta\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ dans les deux cas $E=0$ et $B=0$, avec un choix du paramètre de non-commutativité.

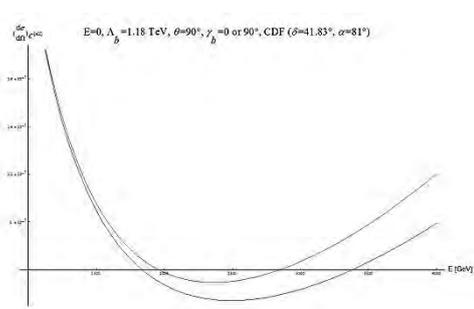
Dans les graphes de la Figures 4, les courbes sont tracées en fonction de l'énergie au centre de masse. Concernant la position et l'orientation des collisions, on a choisi celles du détecteur CDF (Collider Detector at Fermilab) du Tevatron, le grand collisionneur proton-antiproton du Fermilab.

On remarque que les courbes de la Figure 4 augmentent à partir d'un certain seuil d'énergie. Cela peut être interprété comme une manifestation de la violation de l'unitarité et de la causalité de la théorie, qui se base sur le développement en puissance du paramètre de non-commutativité θ .

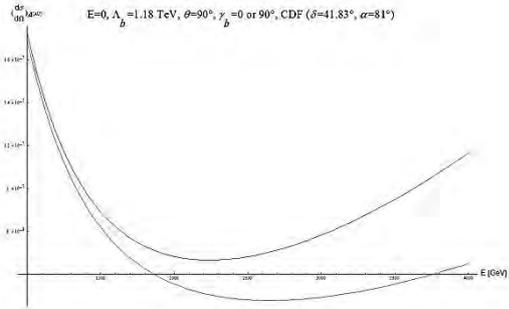
Par ailleurs, on constate que pour l'interaction de type coulomb, la direction qui domine est $\gamma=90^\circ$, alors que pour l'interaction de type annihilation la direction qui domine est $\gamma=0$ (voir aussi les graphes de la Figures 5).

Les graphes de la Figures 5 montrent également une variation très importante de la section efficace différentielle relative, pour une énergie au centre de masse de 1.96 TeV (celle du Tevatron), en fonction de la colatitude γ et de l'angle de diffusion θ . On remarque également le comportement inverse entre la section efficace d'annihilation et celle de type Compton au voisinage de $\theta=0^\circ$. Par ailleurs, elle s'annule, dans tous les cas, pour $\theta=180^\circ$ (absence d'effets non-commutatifs).

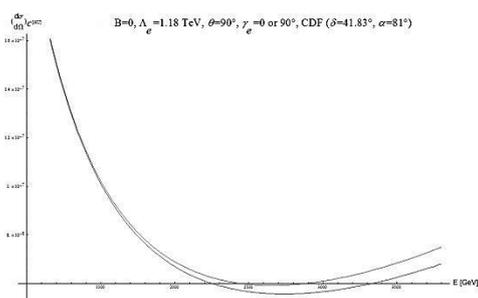
Concernant les graphes des Figures 6 et 7, ils représentent la variation de la section efficace différentielle relative pour une énergie au centre de masse de 1 TeV en fonction de l'inclinaison α et de la latitude du lieu δ , pour deux valeurs extrêmes de la colatitude γ : 0° et 90° . Dans ce cas également, on remarque le comportement inverse entre la section efficace d'annihilation et celle de type Compton.



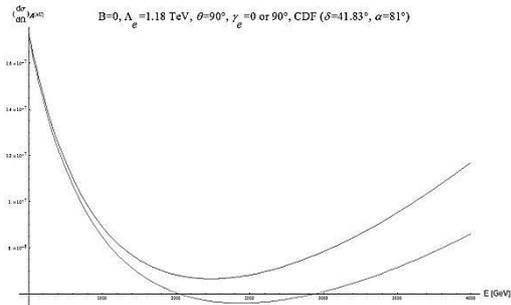
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4 Variation de la section efficace différentielle relative (en unités arbitraires), en fonction de l'énergie, avec comme paramètres fixés:
 $\Lambda=1.18$ TeV, $\theta=90^\circ$, $\gamma=0$ ou 90° , CDF ($\delta=41.83^\circ$, $\alpha=81^\circ$). Pour l'interaction de type coulomb, les courbes supérieures sont pour $\gamma=90^\circ$, et les courbes inférieures sont pour $\gamma=0^\circ$. Inversement, pour l'interaction de type annihilation, les courbes supérieures sont pour $\gamma=0^\circ$, et les courbes inférieures sont pour $\gamma=90^\circ$.

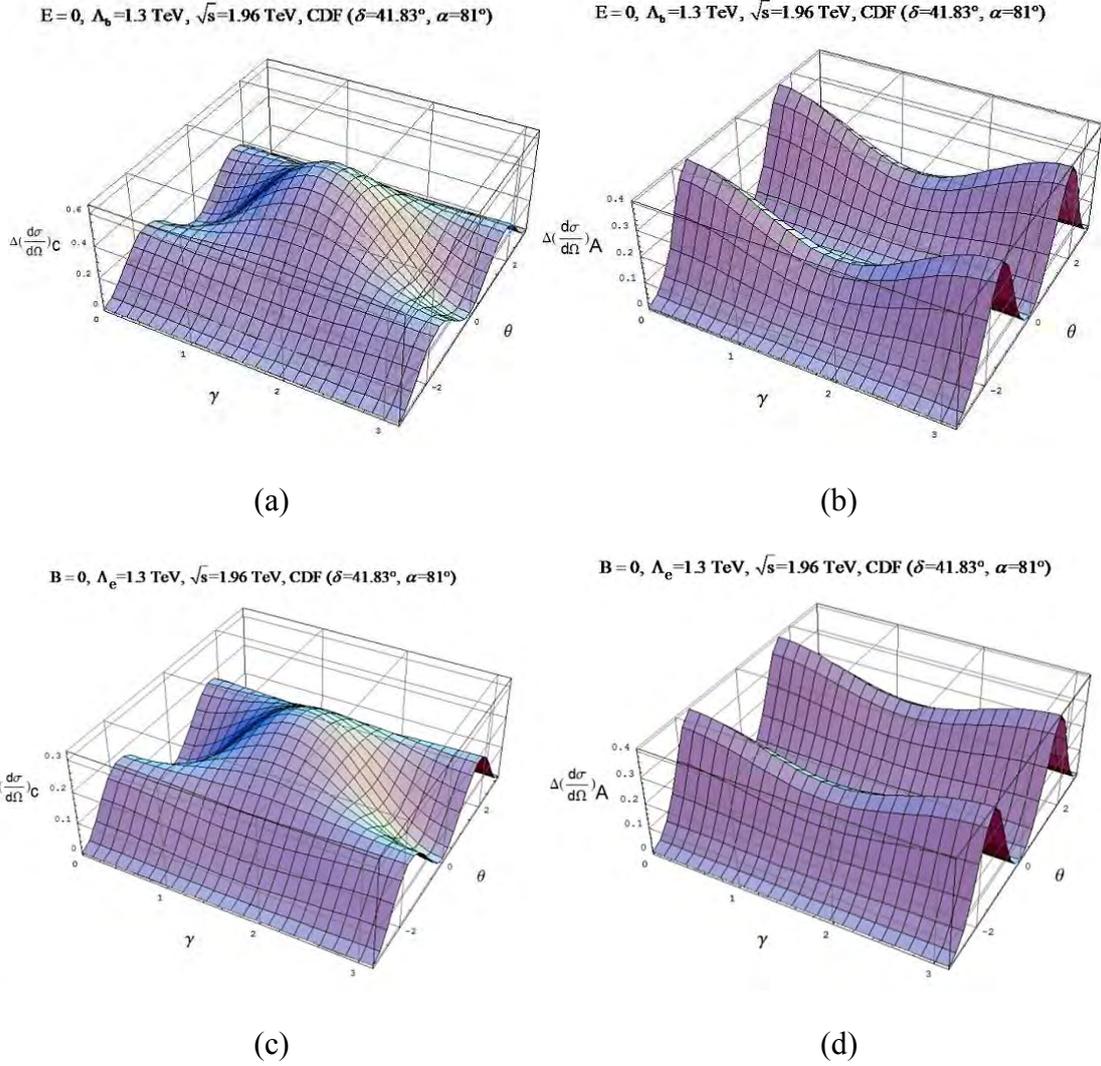


Fig. 5 Variation de la section efficace différentielle relative en fonction de la colatitude γ et de l'angle de diffusion θ , avec comme paramètres fixés:

$$\Lambda=1.18 \text{ TeV}, \sqrt{s}=1.96 \text{ TeV}, \text{CDF} (\delta=41.83^\circ, \alpha=81^\circ)$$

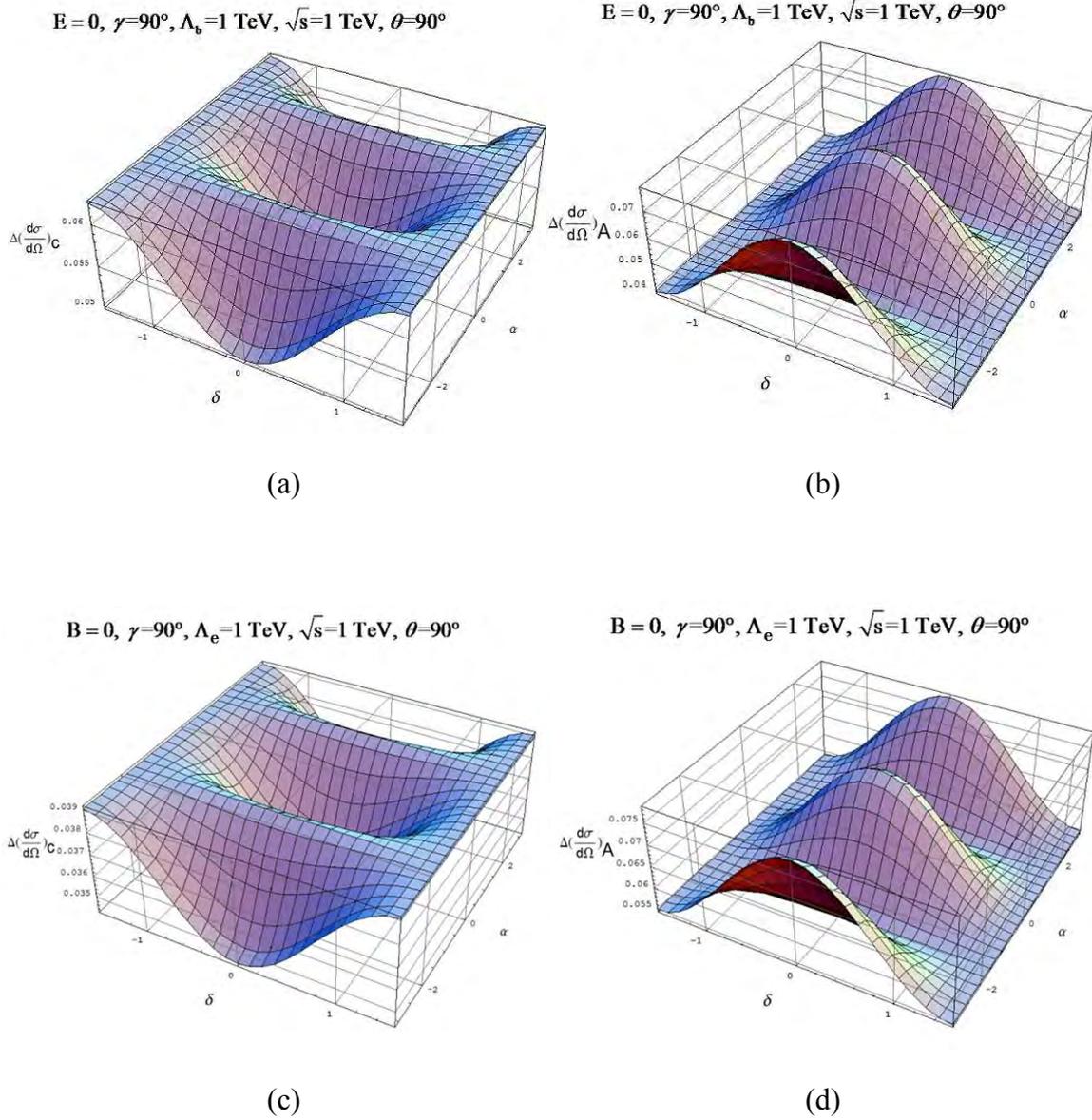


Fig. 6 Variation de la section efficace différentielle relative en fonction de l'inclinaison α et la latitude du lieu δ , avec comme paramètre fixés: $\gamma=90^\circ$, $\Lambda_b=1 \text{ TeV}$, $\sqrt{s}=1 \text{ TeV}$, $\theta=90^\circ$

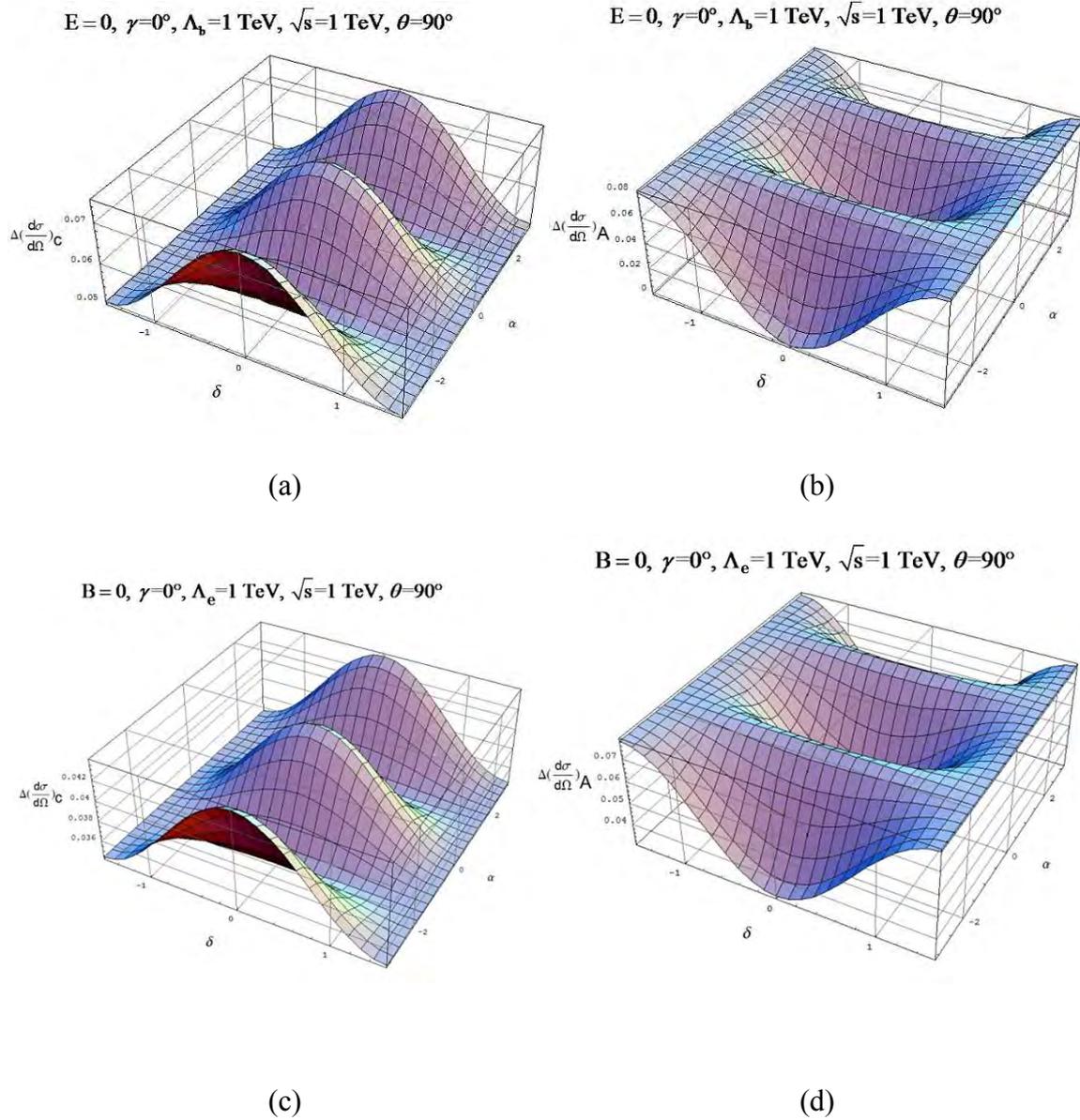


Fig. 7 Variation de la section efficace différentielle relative en fonction de l'inclinaison α et la latitude du lieu δ , avec comme paramètre fixés: $\gamma=0^\circ, \Lambda_b=1 \text{ TeV}, \sqrt{s}=1 \text{ TeV}, \theta=90^\circ$

4. Section efficace inclusive

La section efficace inclusive de la production de photons directs, suite à la collision proton-antiproton, est obtenue par intégration des distributions partoniques, de l'intérieur du proton (Parton Distribution Function, PDF), avec la section efficace du processus élémentaire:

$$E_\gamma \frac{d^3\sigma}{dp_\gamma^3} = \frac{1}{\pi} \sum \int \frac{dx_a}{x_a} F_{a/A}(x_a, \mu_F^2) \int \frac{dx_b}{x_b} F_{b/B}(x_b, \mu_F^2) \hat{\sigma} \frac{d\hat{\sigma}(\hat{s}, \mu_R^2)}{d\hat{t}} \delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) \quad (3.24)$$

Les fonctions $F_{a/A}(x_a, \mu_F^2)$ et $F_{b/B}(x_b, \mu_F^2)$, représentent les distributions partoniques du parton "a" dans le hadron A et du parton "b" dans le hadron B, respectivement. En d'autres termes, $F_{a/A}(x_a, \mu_F^2)$ reflète la probabilité de trouver dans le hadron A un parton de type "a" (quarks ou gluons) portant la fraction x_a de l'impulsion du hadron, et de même pour $F_{b/B}(x_b, \mu_F^2)$.

Les PDF utilisés dans nos calculs sont les MSTW2008 [48]. Concernant le choix du paramètre de renormalisation et de factorisation, les deux sont pris égales à l'impulsion transverse : $\mu_F = \mu_R = P_T$

Les Figures 8 et 9 représentent la variation de la section efficace inclusive en fonction de l'impulsion transverse pour une non-commutativité de type espace-espace et espace-temps, respectivement, et cela pour deux valeurs extrêmes de la colatitude γ , 0° et 90° , et pour un paramètre de non-commutativité variant entre 1.18 et 4 TeV. Le choix de la valeur minimum de Λ n'est pas arbitraire. Au-dessous de cette valeur les sections efficaces au niveau partonique divergent (voir Figure 4).

Dans nos calculs, nous avons fixé l'énergie au centre de masse à la valeur la plus élevée atteinte par le Tevatron, c'est à dire 1.96 TeV. Les coordonnées et l'orientation du lieu correspondent à celle du détecteur CDF.

Après une simple comparaison, d'une part entre nos résultat (Figure 8 et 9), et d'autre part avec l'écart entre les données expérimentales de CDF et les prédictions à l'ordre NLO de la de la QCD perturbative ordinaires (Figure 10), on constate que la limite inférieure du paramètre de non-commutativité Λ doit être de l'ordre de 1 TeV.

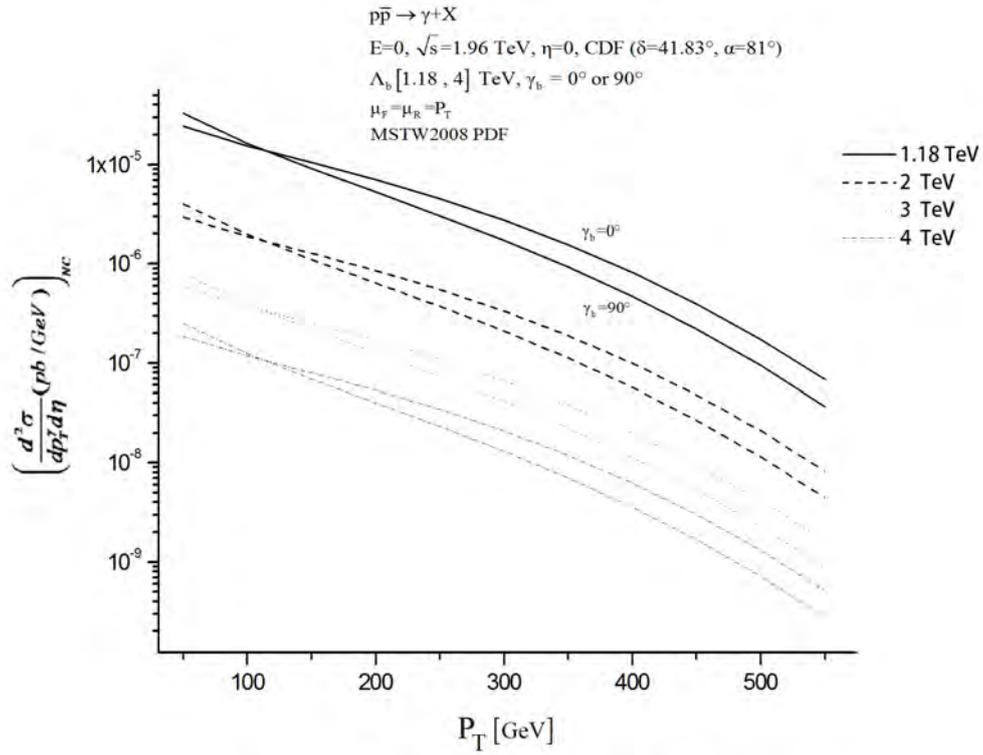


Fig. 8 Variation de la section efficace inclusive en fonction de l'impulsion transverse pour une non-commutativité de type espace-espace : $E=0$

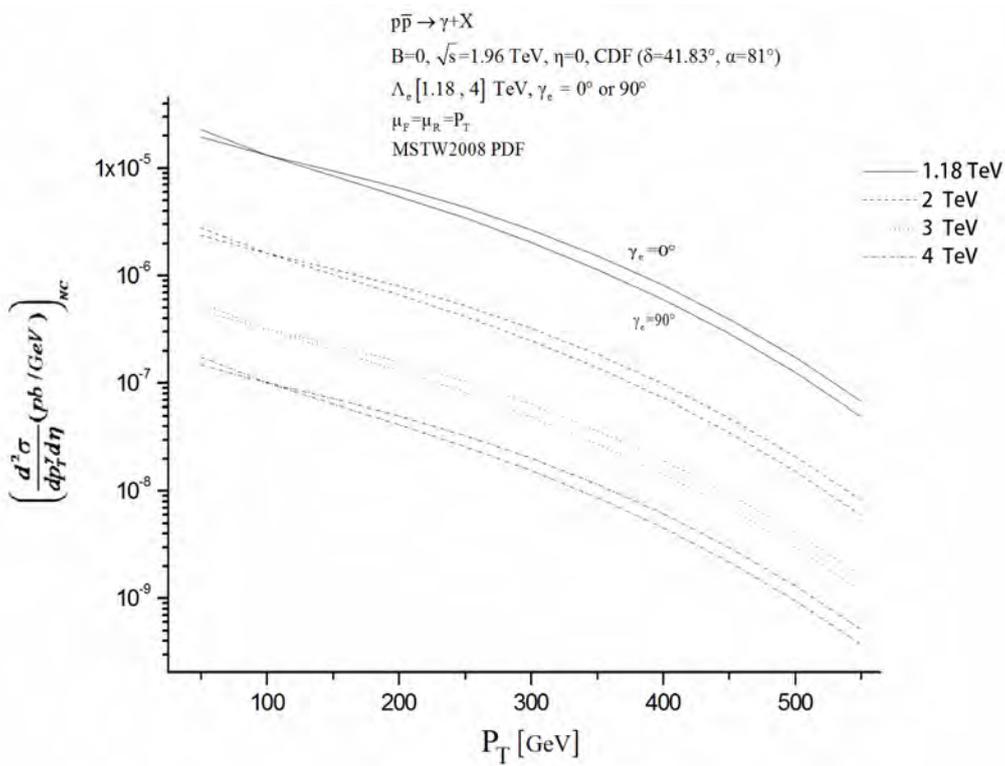


Fig. 9 Variation de la section efficace inclusive en fonction de l'impulsion transverse pour une non-commutativité de type espace-temps : $B=0$

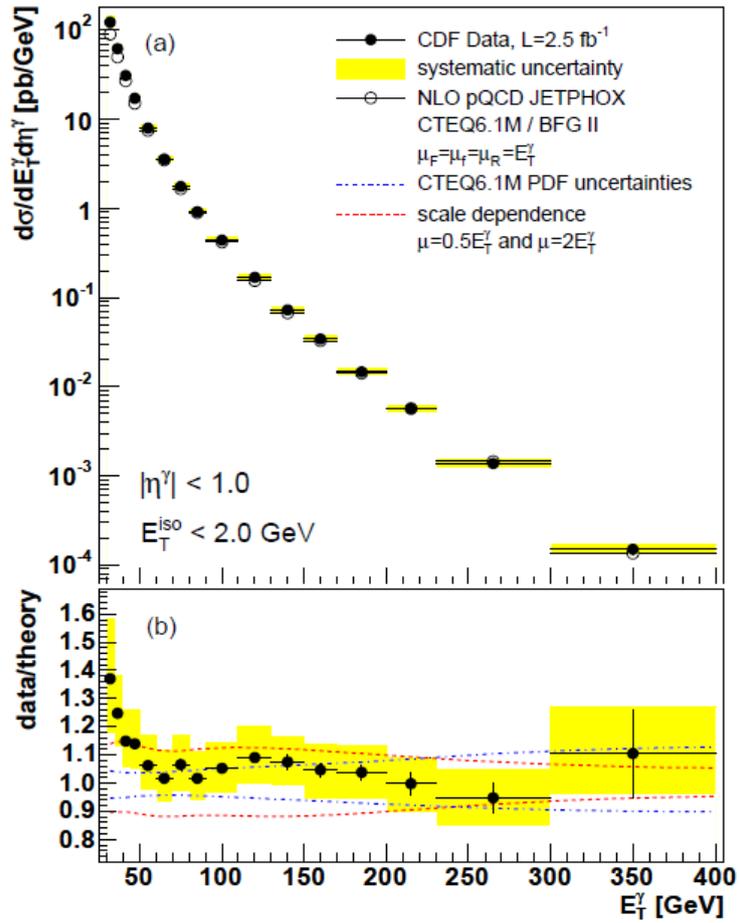


Fig. 10 Donnés obtenues par CDF concernant la production de photons directs pour une énergie au centre de masse de 1.96 TeV. Figure 3 de [49].

Pour finir, une remarque annexe s'impose. Le LHC est un accélérateur de particules qui fait entrer en collision des protons circulants en sens inverses. Dans ce cas, la contribution du sous-processus de type annihilation dans les fonctions de structures est beaucoup moins importante par rapport au Tevatron du fait que le paramètre Λ doit être supérieur à 4 TeV (pour éviter la violation de l'unitarité). En effet, on constate à partir des Figures 11 et 12, que les effets de non-commutativités sont beaucoup plus importants dans le cas des collisions proton-antiproton pour un paramètre de non-commutativité de 1.2 TeV. Le choix du Tevatron dans notre étude ne fut donc pas arbitraire mais bien justifié.

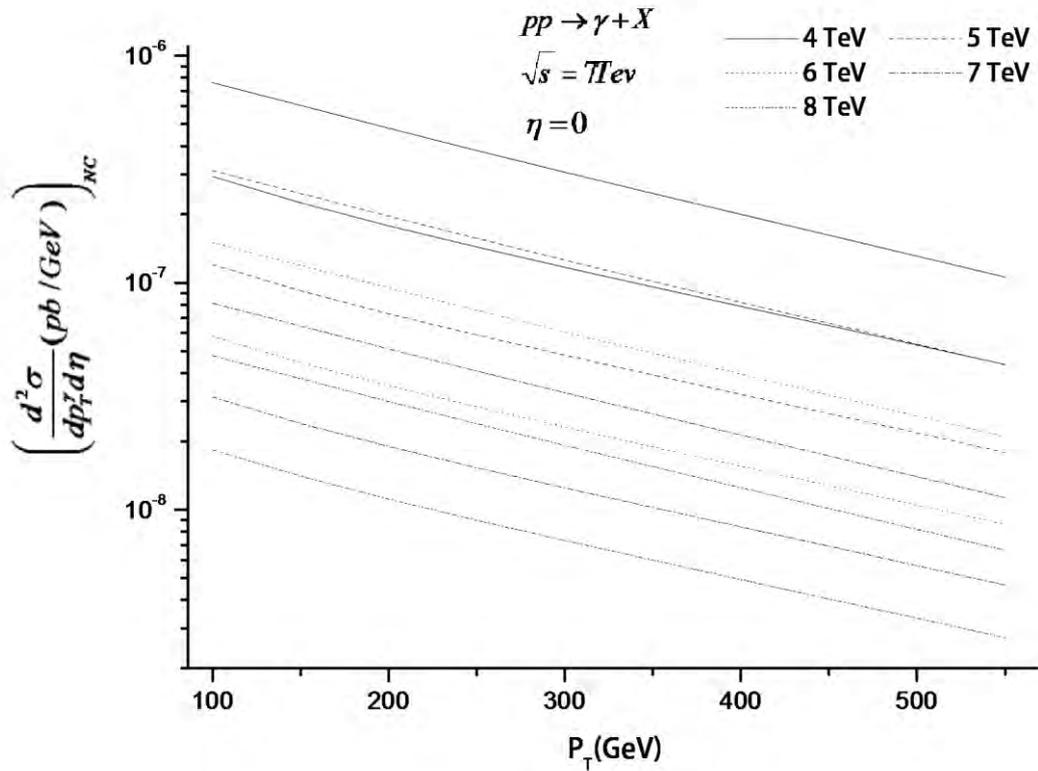


Fig. 11 Variation de la partie purement non-commutative de la section efficace inclusive à l'ordre de Born dans le cas de la réaction proton-proton, sans prendre en compte l'effet de la rotation de la Terre et en prenant en compte unique la composante θ_{13} . Les courbes sont tracées pour différentes valeurs du paramètre de non-commutativité (Λ), entre 4 et 7 TeV, et pour une énergie au centre de masse de 7 TeV (celle du LHC) et une pseudo-rapidité nulle ($\eta=0$). Pour chaque valeur de Λ on a tracé deux courbes qui correspondent aux deux valeurs de l'angle azimutal : $\varphi=0^\circ$, pour la courbe supérieure, et $\varphi=90^\circ$, pour la courbe inférieure.

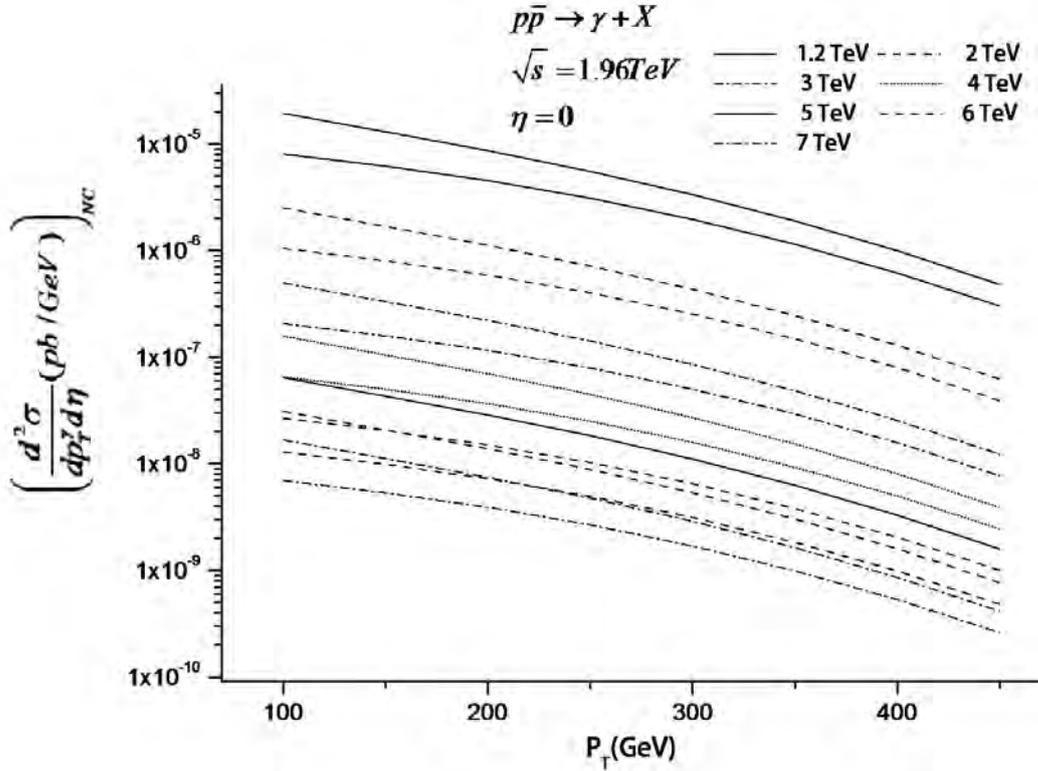


Fig. 12 Variation de la partie purement non-commutative de la section efficace inclusive à l'ordre de Born dans le cas de la réaction proton- antiproton, sans prendre en compte l'effet de la rotation de la Terre et en prenant en compte unique la composante θ_{13} . Les courbes sont tracées pour différentes valeurs du paramètre de non-commutativité (Λ), entre 1.2 et 7 TeV, et pour une énergie au centre de masse de 1.96 TeV (celle du Tevatron) et une pseudo-rapidité nulle ($\eta=0$). Pour chaque valeur de Λ on a tracé deux courbes qui correspondent aux deux valeurs de l'angle azimutal : $\varphi=0^\circ$, pour la courbe supérieure, et $\varphi=90^\circ$, pour la courbe inférieure.

CHAPITRE 4

Violation de l'invariance d'échelle dans le NCSM

1. Introduction

L'étude du secteur hadronique dans le formalisme du modèle standard non-commutatif (NCSM) est l'une des voies les moins explorées. Dans ce cadre, la contribution des effets non-commutatifs dans les fonctions de structures doit être connue [50].

Dans ce qui suit, on s'intéresse au calcul de la diffusion profondément inélastique d'un lepton. Ce processus, considéré comme le meilleur moyen pour sonder l'intérieur des nucléons [51], nous permettra de déduire l'équivalent de l'équation d'évolution des fonctions de structures DGLAP, mais dans un espace non-commutatif. Une attention particulière est également accordée à la violation de l'invariance d'échelle qui se manifeste à l'ordre dominant de la théorie des perturbations dans le cadre du NCSM.

2. Amplitude de diffusion et violation de l'invariance d'échelle

Pour des impulsions de transferts assez basses (bien inférieure à la masse du Z^0), la diffusion profondément inélastique se produit via l'échange d'un photon virtuel [52]. Ainsi, le photon virtuel émis par un électron interagit avec un parton interne du nucléon (le quarks dans notre cas).

A l'ordre le plus bas (ordre dominant), le diagramme qui contribue à la diffusion électron-quarks, est le suivant :

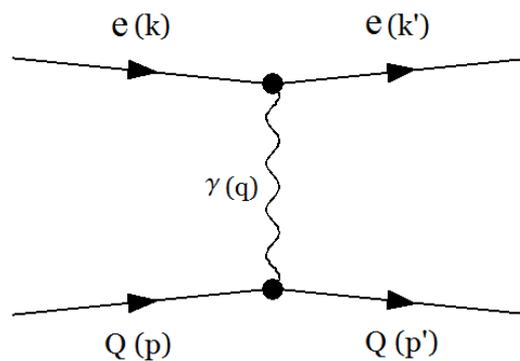


Fig. 1 Diagramme de Feynman de la diffusion profondément inélastique : un lepton chargé interagit avec un quark du nucléon via l'échange d'un photon virtuel. Ce diagramme est l'un des plus importants utilisés dans la détermination des fonctions de structures des quarks.

En négligeant la masse du lepton, l'amplitude de diffusion à l'ordre θ s'écrit comme suit [19] (voir Annexe A):

$$M = -\frac{i}{q^2} e_q e \left(1 - \frac{i}{2} k' \theta k - \frac{1}{8} (k' \theta k)^2 \right) \left(1 - \frac{i}{2} p' \theta p - \frac{1}{8} (p' \theta p)^2 \right) \quad (4.1)$$

$$\left[\bar{u}^{\lambda'}(k') \gamma^\mu u^\lambda(k) \right] \left[\bar{u}_Q^{\sigma'}(p') \gamma_\mu u_Q^\sigma(p) \right]$$

On remarque que les termes dus aux Seiberg-Witten Maps disparaissent après avoir appliqué l'équation de Dirac.

Par la suite, on calcul la moyenne sur le spin et la somme du carré de l'amplitude, comme suit:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{pol.} |M|^2 = \frac{e_q^2 e^2}{q^4} H L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

Où,

$$H = 1 + \frac{1}{64} \left((k' \theta k)^4 + (p' \theta p)^4 \right) \quad (4.3)$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{4m^2} Tr \left[\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \right] \quad (4.4)$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4M^2} Tr \left[\left(\not{p}' + M \right) \gamma_\mu \left(\not{p}' + M \right) \gamma_\nu \right] \quad (4.5)$$

$W_{\mu\nu}$ et $L^{\mu\nu}$ représentent le tenseur hadronique et leptonique, respectivement.

Notez que tous les termes de plus bas ordres en θ^1 , θ^2 , et θ^3 , disparaissent quand on inclue dès le départ dans les vertex d'interaction fermion-boson les termes d'ordre supérieurs, c'est-à-dire en θ^2 . Ce fait est reporté dans certains articles [53].

Dans le référentiel du laboratoire, on définit les paramètres cinématiques comme suit :

$$\begin{aligned} p &= (M, \vec{0}) \\ k &= (E, 0, 0, E) \\ k' &= (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Où θ est l'angle de diffusion du lepton.

En ne considérant que la non-commutativité espace-espace, c'est-à-dire en prenant $\theta_{0i}=0$, et cela pour satisfaire l'unitarité de la théorie [54], on trouve :

$$\begin{aligned} k' \theta k &= \theta_{13} E' E \sin \theta \\ p' \theta p &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

D'où,

$$H = 1 + \frac{1}{64} (\theta_{13} E' E \sin \theta)^4 \quad (4.8)$$

En appliquant l'identité suivante :

$$Q^2 = -q^2 = 4E' E \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.9)$$

On déduit l'expression de H :

$$H = 1 + \left(\frac{\theta_{13}}{\sqrt{32}} Q^2 \cot \frac{\theta}{2} \right)^4 \quad (4.10)$$

Réécrivant le tenseur hadronique sous sa forme la plus générale respectant la parité et l'invariance de jauge $q^\mu W_{\mu\nu} = 0$ avec les fonctions de structure inélastiques W_1 et W_2 :

$$W_{\mu\nu} = \tilde{W}_1 \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{M^2} \tilde{W}_2 \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu \right) \quad (4.11)$$

Finalement, les fonctions de structures qu'on mesure expérimentalement sont :

$$M W_1(\theta_{13} q^2, x) = M H(\theta_{13} q^2) \tilde{W}_1(x) \quad (4.12)$$

$$\nu W_2(\theta_{13} q^2, x) = \nu H(\theta_{13} q^2) \tilde{W}_2(x) \quad (4.13)$$

Où, \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 symbolisent les coefficients de structure ordinaires, ν est donné par $\nu = E - E'$ et x

représente la variable de Bjorken définie par $x = -\frac{q^2}{2M\nu}$.

On déduit alors que la violation de l'invariance d'échelle dans les fonctions de structures peut donc être due en partie à la non-commutativité de type espace-espace.

3. Equation d'évolution

Dans ce qui suit, notre objectif est de déduire l'expression de l'équation d'évolution DGLAP [55] dans le cadre du NCSM.

Si on prend en compte l'émission d'un photon réel et d'un gluon virtuel à l'ordre dominant de la QCD commutative, c'est-à-dire à l'ordre α_s , on obtient l'expression de la fonction de structure suivante :

$$F_2(Q^2, \theta_{13}, x) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 q(Q^2, \theta_{13}, x) \quad (4.14)$$

Où,

$$q(Q^2, \theta_{13}, x) = H(\theta_{13}, Q^2, \theta) q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\kappa^2} \quad (4.15)$$

P_{qq} représente la fonction de Splitting.

Pour réabsorber les singularités colinéaires que traduit la coupure infrarouge κ on définit la densité de parton à une certaine échelle de factorisation μ .

En remplaçant μ par Q dans l'équation (4.15), on trouve après un simple réajustement:

$$q_b(x) = \frac{1}{H(\theta_{13}, \mu^2, \theta)} \left[q(\mu^2, \theta_{13}, x) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa^2} \right] \quad (4.16)$$

On exprime dans le premier terme de l'équation (4.15) $q_b(x)$ en fonction de $q(\mu^2, \theta_{13}, x)$ (grâce à l'équation (4.16)):

$$\begin{aligned} q(Q^2, \theta_{13}, x) &= \frac{H(\theta_{13}, Q^2, \theta)}{H(\theta_{13}, \mu^2, \theta)} \left[q(\mu^2, \theta_{13}, x) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa^2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\kappa^2} \\ &= \left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} + o(\theta^8) \right] \left[q(\mu^2, \theta_{13}, x) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa^2} \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\kappa^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cela est obtenu en utilisant le développement en puissance de $\frac{1}{H}(\theta_{13})$.

En négligeant les termes d'ordre supérieur ($\alpha_s \theta_{13}^4$), on aboutit à :

$$q(Q^2, \theta_{13}, x) = q(\mu^2, \theta_{13}, x) \left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q_b(z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \quad (4.18)$$

De même, il reste à exprimer dans le second terme de l'équation (4.18) $q_b(z)$ en fonction de $q(\mu^2, \theta_{13}, z)$ (grâce à l'équation (4.16)) :

$$\begin{aligned}
q(Q^2, \theta_{13}, x) &= q(\mu^2, \theta_{13}, x) \left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} \right] \\
&+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\frac{1}{H(\theta_{13}, \mu^2, \theta)} \left[q(\mu^2, \theta_{13}, z) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_b(y) P_{qq} \left(\frac{z}{y} \right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa^2} \right] \right] P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \\
&= q(\mu^2, \theta_{13}, x) \left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} \right] \\
&+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\left(1 - \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 \mu^8 \cot^4 \frac{\theta}{2} + o(\theta_{13}^8) \right) \right] \left[q(\mu^2, \theta_{13}, z) - \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_b(y) P_{qq} \left(\frac{z}{y} \right) \ln \frac{\mu^2}{\kappa^2} \right] P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs, on obtient :

$$\begin{aligned}
q(Q^2, \theta_{13}, x) &= q(\mu^2, \theta_{13}, x) \left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} \right] \\
&+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q(\mu^2, \theta_{13}, z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + o(\alpha_s^2, \alpha_s \theta_{13}^4, \theta_{13}^8)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

La densité de partons $q(\mu^2, \theta_{13}, x)$ ne doit pas dépendre de l'échelle de factorisation μ^2 . Cela se traduit par :

$$\frac{d}{d\mu^2} q(Q^2, \theta_{13}, x) = 0 \tag{4.21}$$

On aboutit après dérivations de (4.20) à l'équation intégral-différentielle suivante :

$$\left[1 + \frac{1}{1024} \theta_{13}^4 (Q^8 - \mu^8) \cot^4 \frac{\theta}{2} \right] \frac{d}{d\mu^2} q(\mu^2, \theta_{13}, x) - \mu^8 \frac{1}{256} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} q(\mu^2, \theta_{13}, x) = \frac{1}{\mu^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q(\mu^2, \theta_{13}, z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \tag{4.22}$$

Pour un choix d'échelle :

$$\mu^2 = Q^2 \tag{4.23}$$

On trouve :

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} q(\mu^2, \theta_{13}, x) - \mu^8 \frac{1}{256} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} q(\mu^2, \theta_{13}, x) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} q(\mu^2, \theta_{13}, z) P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) \tag{4.24}$$

Cette dernière équation représente l'équation d'évolution, à l'ordre (α_s^1, θ^2) , des densités de partons dans un espace non-commutatif (NC-DGLAP), l'équivalente de l'équation DGLAP dans le cadre de la QCD commutative.

Il est aisé de déduire l'ensemble complet des équations DGLAP, du fait que les équations restantes ne contribuent pas, car elles sont de l'ordre $(\alpha_s \theta_{13}^4)$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\frac{d}{d \ln \mu^2} - \mu^8 \frac{1}{256} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} \right) q(\mu^2, \theta_{13}, x) \\ \frac{d}{d \ln \mu^2} g(\mu^2, x) \end{array} \right) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\begin{array}{cc} P_{qq} \left(\frac{x}{z} \right) & P_{qg} \left(\frac{x}{z} \right) \\ P_{gq} \left(\frac{x}{z} \right) & P_{gg} \left(\frac{x}{z} \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} q(\mu^2, \theta_{13}, z) \\ g(\mu^2, z) \end{array} \right) \tag{4.25}$$

4. Résolution de NC-DGLAP dans l'espace des moments

Il est possible d'avoir une bonne idée de l'évolution des distributions de partons dans l'espace des moments :

$$q_N(\mu^2, \theta_{13}, x) = \int_0^1 x^{N-1} q(\mu^2, \theta_{13}, x) dx \quad (4.26)$$

En intégrant l'équation (4.24) (NC-DGLAP) et en inversant l'ordre de l'intégrale double, on trouve après de simples calculs:

$$\frac{d}{dt} q_N(t, \theta_{13}) = \left(\frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \gamma_N + \frac{\Lambda^8}{256} e^{4t} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} \right) q_N(t, \theta_{13}) \quad (4.27)$$

Où,

$$\gamma_N = \int_0^1 y^{N-1} P_{qq}(y) dy \quad \text{et} \quad t = \ln(\mu^2 / \Lambda^2) \quad (4.28)$$

En substituant $\alpha_s(t)$ par sa forme explicite qui dépend de l'échelle de renormalisation, on obtient:

$$\frac{d}{dt} q_N(t, \theta_{13}) = \left(\frac{1}{2\pi b t} \gamma_N + \frac{\Lambda^8}{256} e^{4t} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} \right) q_N(t, \theta_{13}) \quad (4.29)$$

Cette équation peut être résolue analytiquement. On obtient facilement après intégration:

$$\frac{q_N(t, \theta_{13})}{q_N(t_0, \theta_{13})} = e^{K(e^{4t} - e^{4t_0})} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{\gamma_N}{2\pi b}} \quad (4.30)$$

Où le paramètre K est défini comme suit :

$$K = \frac{\Lambda^8}{1024} \theta_{13}^4 \cot^4 \frac{\theta}{2} \quad (4.31)$$

De l'équation (4.26), on déduit que l'évolution de q_N en fonction de μ à large N, correspond à l'évolution de q en fonction de μ à large x (car le poids du domaine à grand x devient important). Par ailleurs, comme $\gamma_N < 0$ pour $N \geq 2$, le terme $\frac{t_0}{t}$ de l'équation (4.30) décroît quand μ croît. Cependant cette décroissance est compensée à grand μ par le terme exponentiel de la même équation (4.30), ce qui montre que la contribution du terme purement non-commutatif est considérable à large μ .

Les courbes de la Figure 2 représentent l'évolution des fonctions de structures en fonction de μ à large x , et pour différentes valeurs du paramètre de non-commutativité. Une déviation du comportement logarithmique peut être considérée comme un indice de la non-commutativité de l'espace. L'analyse numérique et la comparaison avec les données expérimentales (celles de HERA [56], par exemple), permet de déterminer une limite inférieure sur le paramètre de non-commutativité Λ .

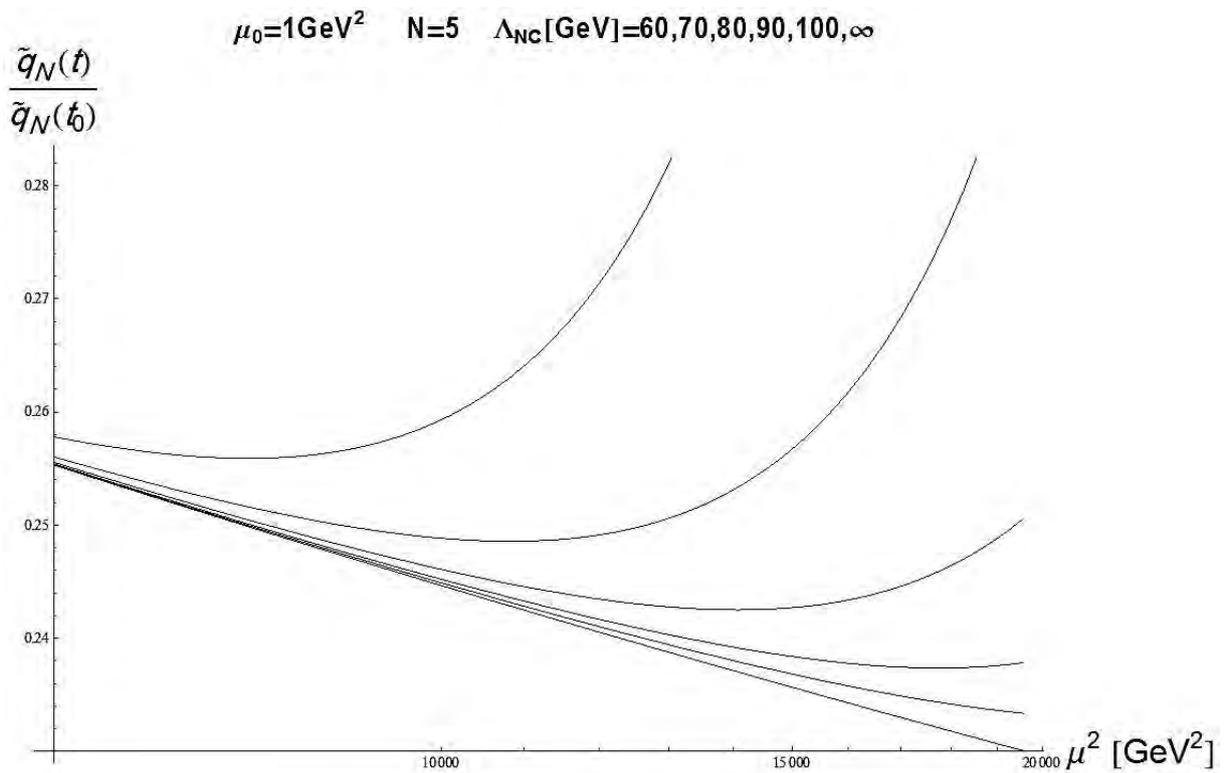


Fig. 2 Evolution de la fonction de structure à large x et pour différente valeur du paramètre de non-commutativité.

CONCLUSION

Dans le cadre de cette thèse, on s'est intéressé à quelques applications de la nouvelle version de l'approche des gluons mous et/ou colinéaires, qui est très efficace dans les calculs de HOC (Higher Order Corrections). Les sous-processus étudiés sont: $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $qg \rightarrow q\gamma$.

Dans le cas de la production de photons directs isolés, cette nouvelle approche donne de bons résultats par rapport aux données expérimentales du LHC et du Tevatron. D'autres applications sont en cours d'études.

Par la suite, nous nous sommes intéressés au processus de production de photons directs suite à la collision proton-antiproton mais dans le cadre du modèle standard non-commutatif Minimal (Minimal- NCSM).

Au niveau partonique nous avons calculé la section efficace différentielle du sous-processus d'annihilation quark-antiquark et du sous-processus de type Compton gluon -quark. L'analyse des résultats révèle des différences fondamentales entre ces deux derniers et parfois même un comportement inverse. Du fait que l'orientation de l'axe de collision des deux sous-processus contribue significativement, il a fallu tenir compte de la rotation de la terre.

Dans notre étude, la violation de l'unitarité et de la causalité de la théorie s'est manifestée par l'augmentation à partir d'un certain seuil d'énergie de la section efficace, et au-dessous d'une certaine valeur du paramètre de non-commutativité. Cette terrible contrainte est l'un des handicaps majeur du NCSM tel qu'il est construit actuellement.

En tenant compte de cette contrainte, nous avons pu calculer la section efficace inclusive purement non-commutative pour une énergie de 1.96 TeV (celle atteinte par le Tevatron), et en moyennant sur tous les angles, excepter la colatitude γ . Ainsi, nous avons remarqué que les effets non-commutatifs se manifestent notamment pour des photons à larges impulsions transverses.

Par ailleurs, une simple comparaison, d'une part entre nos résultats, et d'autre part avec l'écart entre les résultats expérimentales de CDF et les prédictions à l'ordre NLO de la de la QCD perturbative ordinaires, on a constaté que la limite inférieure du paramètre de non-commutativité Λ est de l'ordre de 1 TeV.

L'étude du photon direct nous a motivé plus tard à concevoir un formalisme théorique nouveau pour inclure les effets de la non-commutativité de l'espace dans les fonctions de structures. Le point de départ est la diffusion profondément inélastique qui se produit via l'échange d'un photon virtuel (valable uniquement pour des impulsions de transferts assez basses). Cela nous a permis de déduire l'équivalent de l'équation d'évolution des fonctions de structures DGLAP, mais dans un espace non-commutatif NC-DGLAP.

Par ailleurs, nous avons constaté que la violation de l'invariance d'échelle dans les fonctions de structures peut être due en partie à la non-commutativité espace-espace, car celle-ci se manifeste à l'ordre dominant de la théorie des perturbations dans le cadre du NCSM.

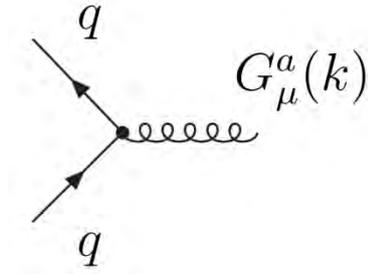
La résolution de l'équation d'évolution NC-DGLAP dans l'espace des moments nous a permis de suivre l'évolution des fonctions de structures pour des grands x , et pour différentes valeurs du paramètre de non-commutativité Λ . Ainsi, une simple déviation du comportement logarithmique des fonctions de structures ordinaires, peut être considérée comme un indice de la non-commutativité de l'espace.

Comme perspective, une analyse numérique et une comparaison avec les données expérimentales (celles de HERA, par exemple), que nous comptons réaliser, va-nous permettre de déterminer une nouvelle limite inférieure sur le paramètre de non-commutativité Λ . Il est également intéressant d'étaler nos calculs aux ordres plus élevés de la théorie des perturbations et d'inclure la non-commutativité de type espace-temps.

Annexe A : Règles de Feynman

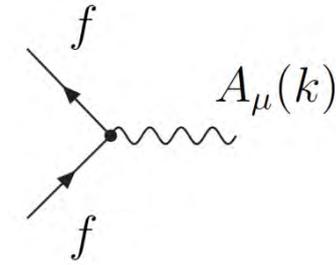
A l'ordre θ^1

Dans ce qui suit, nous présentons les règles Feynman utilisés dans le troisième chapitre dans le calcul de la section efficace inclusive du photon direct. Elles sont déduites dans le cadre du NCSM par Melić et al [17,18] :



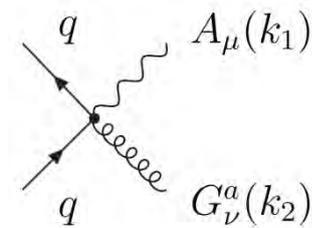
$$ig_s \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} p_{in}^\rho - \theta_{\mu\nu} m_q) \right] T_S^a =$$

$$ig_s \gamma_\mu T_S^a + \frac{1}{2} g_s \left[(p_{out} \theta p_{in}) \gamma_\mu - (p_{out} \theta)_\mu (\not{p}_{in} - m_q) - (\not{p}_{out} - m_q) (\theta p_{in})_\mu \right] T_S^a$$



$$ieQ_f \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} p_{in}^\rho - \theta_{\mu\nu} m_f) \right] =$$

$$ieQ_f \gamma_\mu + \frac{1}{2} eQ_f \left[(p_{out} \theta p_{in}) \gamma_\mu - (p_{out} \theta)_\mu (\not{p}_{in} - m_f) - (\not{p}_{out} - m_f) (\theta p_{in})_\mu \right]$$



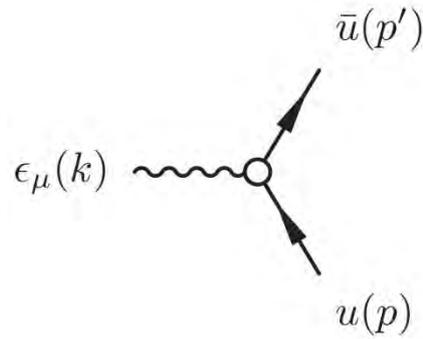
$$-\frac{1}{2} g_s eQ_q \theta_{\mu\nu\rho} (k_1^\rho - k_2^\rho) T_S^a$$

Concernant $\theta_{\mu\nu\rho}$, il est défini comme suit :

$$\theta_{\mu\nu\rho} = \theta_{\mu\nu}\gamma_\rho + \theta_{\nu\rho}\gamma_\mu + \theta_{\rho\mu}\gamma_\nu$$

A l'ordre θ^1

Ci-dessous le Vertex à l'ordre θ utilisé dans le quatrième chapitre dans le calcul de la diffusion profondément inélastique. Il est déduit par A. Alboteanu et ses collaborateurs [19].



$$V_\mu^{(1)}(p', k, p) = \frac{i}{2} [k\theta_\mu \not{p} (1 - 4c_\psi^{(1)}) + 2k\theta_\mu \not{k} (c_A^{(1)} - c_\psi^{(1)}) - p\theta_\mu \not{k} - (k\theta p)\gamma_\mu]$$

$$V_\mu^{(2)}(p', k, p) = \frac{1}{8} (k\theta p) [k\theta_\mu \not{p} (1 - 16c_\psi^{(2)}) + 4k\theta_\mu \not{k} (c_A^{(1)} - 2c_\psi^{(2)}) - p\theta_\mu \not{k} - (k\theta p)\gamma_\mu]$$

Annexe B : Calculs numériques

Programme :

Au cours de nos recherches, nous avons rédigé de nombreux programmes sous Mathematica, afin de réaliser certains calculs concernant l'émission de photons directs dans le cadre du NCSM, dont :

- Calculs de la section efficace des sous processus $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$ et $qg \rightarrow q\gamma$ avec FeynCalc 4.2.0.
- Calculs de la section efficace inclusive en utilisant les PDF : MSTW2008.

Les conventions de FeynCalc 4.2.0

FeynCalc est un progiciel (package) de Mathematica destiné aux calculs algébriques de la physique des hautes énergies dans le cadre du modèle standard ordinaire.

La règle de sommation des polarisations des photons de FeynCalc est la suivante :

$$\sum_{pol.} \varepsilon_{\mu}^*(K) \varepsilon_{\nu}(K) = -g_{\mu\nu}$$

Bien évidemment, cette égalité n'est valable que lorsqu'on l'associe à un élément de matrice M invariant de jauge [3].

La métrique utilisée est celle de Bjorken et Drell (+---).

La normalisation des vecteurs de polarisation des bosons, et des spineurs u et v des fermions, est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu}^*(K) \varepsilon_{\mu}(K) &= -1 \\ \sum_s \bar{u}(P) u(P) &= Tr[\gamma.P + m] = 4m \\ \sum_s \bar{v}(P) v(P) &= Tr[\gamma.P - m] = -4m \end{aligned}$$

En fait, nous avons rencontré de nombreuses difficultés de calculs avec FeynCalc. En effet, ce dernier n'est pas conçu pour réaliser des opérations dans le cadre du NCSM où intervient sans cesse la matrice de non-commutativité $\theta_{\mu\nu}$. De ce fait, nous étions dans l'obligation de redéfinir certains produits de contractions dans le programme.

Dans ce qui suit, l'un des programmes qu'on a utilisé dans le calcul de la section efficace différentielle du sous processus $qg \rightarrow q\gamma$.

Programme $Q g \rightarrow Q \gamma$

<< HighEnergyPhysics`FeynCalc`

FeynCalc 4.2.0

For help, type ?FeynCalc,
use the built-in help system
or visit www.feyncalc.org

```
Mq = 0;
c12 = 0; c23 = 0; c13 = 0;
Gstrong = Sqrt[4 Pi as]; EL = Sqrt[4 Pi ae];
SetMandelstam[s, t, u, P1, K2, -P2, -K1, Mq, Mq, 0, 0];
```

Amplitudes de transitions

Premier processus :

```
MM11 =
-i SpinorUBar[P2, Mq].
  (DiracMatrix[μ] -
    BB  $\frac{1}{2}$  i
    (-Mq (C01 (-KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 2]) +
      C02 (-KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 3]) +
      C12 (-KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 2] +
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 3]) +
      C03 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 4]) -
      C13 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 2] -
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 4]) +
      C23 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 3] +
      KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 4])) +
    DiracSlash[P1 - K1]
    (C01 (-KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 2]) +
```

```

C02 (-KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 3]) +
C12 (-KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 2] +
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 3]) +
C03 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 1] +
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[K2, 4]) -
C13 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 2] -
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[K2, 4]) +
C23 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 3] +
      KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 4])) +
DiracSlash[K2]
(C01 (KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1 - K1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1 - K1, 2]) +
C02 (KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1 - K1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1 - K1, 3]) +
C12 (KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1 - K1, 2] -
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1 - K1, 3]) +
C03 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1 - K1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1 - K1, 4]) -
C13 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1 - K1, 2] +
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1 - K1, 4]) +
C23 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1 - K1, 3] -
      KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1 - K1, 4])) +
DiracMatrix[μ]
(C01 (-FourVector[P1 - K1, 1] FourVector[K2, 2] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1 - K1, 2]) +
C02 (-FourVector[P1 - K1, 1] FourVector[K2, 3] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1 - K1, 3]) +
C12 (-FourVector[P1 - K1, 2] FourVector[K2, 3] +
      FourVector[K2, 2] FourVector[P1 - K1, 3]) +
C03 (-FourVector[P1 - K1, 1] FourVector[K2, 4] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1 - K1, 4]) -
C13 (FourVector[P1 - K1, 2] FourVector[K2, 4] -
      FourVector[K2, 2] FourVector[P1 - K1, 4]) +
C23 (-FourVector[P1 - K1, 3] FourVector[K2, 4] +
      FourVector[K2, 3] FourVector[P1 - K1, 4]))).
((Mq + DiracSlash[P1 - K1]) PropagatorDenominator[-K1 + P1, Mq]) .
(DiracMatrix[α] -

```

$$BB \frac{1}{2} \mathbf{i}$$

```

(-Mq (C01 (-KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 2]) +
  C02 (-KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 3]) +
  C12 (-KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 2] +
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 3]) +
  C03 (-KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 4]) -
  C13 (KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 2] -
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 4]) +
  C23 (-KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 3] +
  KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 4])) +
DiracSlash[P1]
(C01 (-KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 2]) +
  C02 (-KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 3]) +
  C12 (-KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 2] +
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 3]) +
  C03 (-KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 1] +
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[-K1, 4]) -
  C13 (KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 2] -
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[-K1, 4]) +
  C23 (-KroneckerDelta[4, a] FourVector[-K1, 3] +
  KroneckerDelta[3, a] FourVector[-K1, 4])) +
DiracSlash[-K1]
(C01 (KroneckerDelta[2, a] FourVector[P1, 1] -
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[P1, 2]) +
  C02 (KroneckerDelta[3, a] FourVector[P1, 1] -
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[P1, 3]) +
  C12 (KroneckerDelta[3, a] FourVector[P1, 2] -
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[P1, 3]) +
  C03 (KroneckerDelta[4, a] FourVector[P1, 1] -
  KroneckerDelta[1, a] FourVector[P1, 4]) -
  C13 (-KroneckerDelta[4, a] FourVector[P1, 2] +
  KroneckerDelta[2, a] FourVector[P1, 4]) +
  C23 (KroneckerDelta[4, a] FourVector[P1, 3] -
  KroneckerDelta[3, a] FourVector[P1, 4])) +
DiracMatrix[a]

```

```

(C01 (-FourVector[P1, 1] FourVector[-K1, 2] +
      FourVector[-K1, 1] FourVector[P1, 2]) +
C02 (-FourVector[P1, 1] FourVector[-K1, 3] +
      FourVector[-K1, 1] FourVector[P1, 3]) +
C12 (-FourVector[P1, 2] FourVector[-K1, 3] +
      FourVector[-K1, 2] FourVector[P1, 3]) +
C03 (-FourVector[P1, 1] FourVector[-K1, 4] +
      FourVector[-K1, 1] FourVector[P1, 4]) -
C13 (FourVector[P1, 2] FourVector[-K1, 4] -
      FourVector[-K1, 2] FourVector[P1, 4]) +
C23 (-FourVector[P1, 3] FourVector[-K1, 4] +
      FourVector[-K1, 3] FourVector[P1, 4]))).

SpinorU[P1, Mq] /. {PropagatorDenominator[-K1 + P1, 0] → u^-1} /.
{FourVector[K1, 1] → Sqrt[s] / 2, FourVector[P2, 1] → Sqrt[s] / 2,
 FourVector[K1, 2] → -FourVector[P2, 2],
 FourVector[K1, 3] → -FourVector[P2, 3],
 FourVector[K1, 4] → -FourVector[P2, 4],
 FourVector[K2, 1] → Sqrt[s] / 2, FourVector[P1, 1] → Sqrt[s] / 2,
 FourVector[K2, 2] → -FourVector[P1, 2],
 FourVector[K2, 3] → -FourVector[P1, 3],
 FourVector[K2, 4] → -FourVector[P1, 4]} /.
{FourVector[P1, 2] → 0, FourVector[P1, 3] → 0,
 FourVector[P1, 4] → Sqrt[s] / 2,
 FourVector[P2, 2] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Cos[φ],
 FourVector[P2, 3] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Sin[φ],
 FourVector[P2, 4] → (Sqrt[s] / 2) Cos[θ], FourVector[(P1 - K1), 1] → 0,
 FourVector[(P1 - K1), 2] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Cos[φ],
 FourVector[(P1 - K1), 3] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Sin[φ],
 FourVector[(P1 - K1), 4] → (Sqrt[s] / 2) (1 + Cos[θ])} // DiracSimplify //
Expand;
MM11 =
MM11 PolarizationVector[K2, μ] *
ComplexConjugate[PolarizationVector[-K1, α]] // Expand;

Deuxième processus :

MM12 =
-i SpinorUBar[P2, Mq].
(DiracMatrix[α] -

```

$$BB \frac{1}{2} \mathbf{i}$$

$$\begin{aligned}
& (-Mq (C01 (-KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 2]) + \\
& \quad C02 (-KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 3]) + \\
& \quad C12 (-KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 2] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 3]) + \\
& \quad C03 (-KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 4]) - \\
& \quad C13 (KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 2] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 4]) + \\
& \quad C23 (-KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 3] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 4])) + \\
& DiracSlash[P1 + K2] \\
& (C01 (-KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 2]) + \\
& \quad C02 (-KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 3]) + \\
& \quad C12 (-KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 2] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 3]) + \\
& \quad C03 (-KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[-K1, 4]) - \\
& \quad C13 (KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 2] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[-K1, 4]) + \\
& \quad C23 (-KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[-K1, 3] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[-K1, 4])) + \\
& DiracSlash[-K1] \\
& (C01 (KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[P1 + K2, 1] - \\
& \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[P1 + K2, 2]) + \\
& \quad C02 (KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[P1 + K2, 1] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[P1 + K2, 3]) + \\
& \quad C12 (KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[P1 + K2, 2] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[P1 + K2, 3]) + \\
& \quad C03 (KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[P1 + K2, 1] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \alpha] FourVector[P1 + K2, 4]) - \\
& \quad C13 (-KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[P1 + K2, 2] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \alpha] FourVector[P1 + K2, 4]) + \\
& \quad C23 (KroneckerDelta[4, \alpha] FourVector[P1 + K2, 3] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[3, \alpha] FourVector[P1 + K2, 4])) + \\
& DiracMatrix[\alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& (C01 (-FourVector[P1 + K2, 1] FourVector[-K1, 2] + \\
& \quad FourVector[-K1, 1] FourVector[P1 + K2, 2]) + \\
& C02 (-FourVector[P1 + K2, 1] FourVector[-K1, 3] + \\
& \quad FourVector[-K1, 1] FourVector[P1 + K2, 3]) + \\
& C12 (-FourVector[P1 + K2, 2] FourVector[-K1, 3] + \\
& \quad FourVector[-K1, 2] FourVector[P1 + K2, 3]) + \\
& C03 (-FourVector[P1 + K2, 1] FourVector[-K1, 4] + \\
& \quad FourVector[-K1, 1] FourVector[P1 + K2, 4]) - \\
& C13 (FourVector[P1 + K2, 2] FourVector[-K1, 4] - \\
& \quad FourVector[-K1, 2] FourVector[P1 + K2, 4]) + \\
& C23 (-FourVector[P1 + K2, 3] FourVector[-K1, 4] + \\
& \quad FourVector[-K1, 3] FourVector[P1 + K2, 4])) \right) . \\
& ((Mq + DiracSlash[P1 + K2]) PropagatorDenominator[K2 + P1, Mq]) . \\
& \left(DiracMatrix[\mu] - \right. \\
& \quad \frac{1}{2} i \\
& \quad (-Mq (C01 (-KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 2]) + \\
& \quad C02 (-KroneckerDelta[3, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 3]) + \\
& \quad C12 (-KroneckerDelta[3, \mu] FourVector[K2, 2] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 3]) + \\
& \quad C03 (-KroneckerDelta[4, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 4]) - \\
& \quad C13 (KroneckerDelta[4, \mu] FourVector[K2, 2] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 4]) + \\
& \quad C23 (-KroneckerDelta[4, \mu] FourVector[K2, 3] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[3, \mu] FourVector[K2, 4])) + \\
& \quad DiracSlash[P1] \\
& \quad (C01 (-KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 2]) + \\
& \quad C02 (-KroneckerDelta[3, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 3]) + \\
& \quad C12 (-KroneckerDelta[3, \mu] FourVector[K2, 2] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 3]) + \\
& \quad C03 (-KroneckerDelta[4, \mu] FourVector[K2, 1] + \\
& \quad \quad KroneckerDelta[1, \mu] FourVector[K2, 4]) - \\
& \quad C13 (KroneckerDelta[4, \mu] FourVector[K2, 2] - \\
& \quad \quad KroneckerDelta[2, \mu] FourVector[K2, 4]) +
\end{aligned}
\end{aligned}$$

```

C23 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[K2, 3] +
      KroneckerDelta[3, μ] FourVector[K2, 4])) +
DiracSlash[K2]
(C01 (KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1, 2]) +
C02 (KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1, 3]) +
C12 (KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1, 2] -
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1, 3]) +
C03 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1, 1] -
      KroneckerDelta[1, μ] FourVector[P1, 4]) -
C13 (-KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1, 2] +
      KroneckerDelta[2, μ] FourVector[P1, 4]) +
C23 (KroneckerDelta[4, μ] FourVector[P1, 3] -
      KroneckerDelta[3, μ] FourVector[P1, 4])) +
DiracMatrix[μ]
(C01 (-FourVector[P1, 1] FourVector[K2, 2] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1, 2]) +
C02 (-FourVector[P1, 1] FourVector[K2, 3] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1, 3]) +
C12 (-FourVector[P1, 2] FourVector[K2, 3] +
      FourVector[K2, 2] FourVector[P1, 3]) +
C03 (-FourVector[P1, 1] FourVector[K2, 4] +
      FourVector[K2, 1] FourVector[P1, 4]) -
C13 (FourVector[P1, 2] FourVector[K2, 4] -
      FourVector[K2, 2] FourVector[P1, 4]) +
C23 (-FourVector[P1, 3] FourVector[K2, 4] +
      FourVector[K2, 3] FourVector[P1, 4]))).
SpinorU[P1, Mq] /. {PropagatorDenominator[K2 + P1, 0] → s^-1} /.
{FourVector[K1, 1] → Sqrt[s] / 2, FourVector[P2, 1] → Sqrt[s] / 2,
FourVector[K1, 2] → -FourVector[P2, 2],
FourVector[K1, 3] → -FourVector[P2, 3],
FourVector[K1, 4] → -FourVector[P2, 4],
FourVector[K2, 1] → Sqrt[s] / 2, FourVector[P1, 1] → Sqrt[s] / 2,
FourVector[K2, 2] → -FourVector[P1, 2],
FourVector[K2, 3] → -FourVector[P1, 3],
FourVector[K2, 4] → -FourVector[P1, 4]} /.
{FourVector[P1, 2] → 0, FourVector[P1, 3] → 0,
FourVector[P1, 4] → Sqrt[s] / 2,
FourVector[P2, 2] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Cos[φ],

FourVector[P2, 3] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Sin[φ],
FourVector[P2, 4] → (Sqrt[s] / 2) Cos[θ],
FourVector[(P1 + K2), 1] → (Sqrt[s]), FourVector[(P1 + K2), 2] → 0,
FourVector[(P1 + K2), 3] → 0, FourVector[(P1 + K2), 4] → 0} //
DiracSimplify // Expand;
MM12 =
MM12 PolarizationVector[K2, μ] *
ComplexConjugate[PolarizationVector[-K1, α]] // Expand;

```

Troisième processus :

```

MM13 =
  1
  -  $\frac{1}{2}$  BB (SpinorUBar[P2, Mq].DiracSlash[-K2 - K1].SpinorU[P1, Mq]
    (C01 (KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] -
      KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ]) +
    C02 (KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] -
      KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ]) +
    C12 (KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] -
      KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ]) +
    C03 (KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] -
      KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ]) -
    C13 (-KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] +
      KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ]) +
    C23 (KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ] KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] -
      KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ])) +
  SpinorUBar[P2, Mq].DiracMatrix[ $\alpha$ ].SpinorU[P1, Mq]
  (C01 (-KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] +
    KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 2]) +
  C02 (-KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] +
    KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 3]) +
  C12 (-KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 2] +
    KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 3]) +
  C03 (-KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] +
    KroneckerDelta[1,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 4]) -
  C13 (KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 2] -
    KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 4]) +
  C23 (-KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 3] +
    KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] FourVector[-K2 - K1, 4])) +
  SpinorUBar[P2, Mq].DiracMatrix[ $\mu$ ].SpinorU[P1, Mq]
  (C01 (KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] -
    KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 2]) +
  C02 (KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] -
    KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 3]) +
  C12 (KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 2] -
    KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 3]) +
  C03 (KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 1] -
    KroneckerDelta[1,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 4]) -
  C13 (-KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 2] +
    KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 4]) +
  C23 (KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 3] -
    KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ] FourVector[-K2 - K1, 4])) /.
  {FourVector[-K2 - K1, 1]  $\rightarrow$  -Sqrt[s],
  FourVector[-K2 - K1, 2]  $\rightarrow$  (Sqrt[s] / 2) Sin[ $\theta$ ] Cos[ $\varphi$ ],
  FourVector[-K2 - K1, 3]  $\rightarrow$  (Sqrt[s] / 2) Sin[ $\theta$ ] Sin[ $\varphi$ ],
  FourVector[-K2 - K1, 4]  $\rightarrow$  (Sqrt[s] / 2) (1 + Cos[ $\theta$ ])} // DiracSimplify //
  Expand;
MM13 =
  MM13 PolarizationVector[K2,  $\mu$ ] *
  ComplexConjugate[PolarizationVector[-K1,  $\alpha$ ]] // Expand;

```

Calcul de l' amplitude total au carré

```
M1 = MM11 + MM12 + MM13; M2 = ComplexConjugate[M1] /. {μ → a1, α → b1};  
MM2d = M1 M2 // Expand;
```

Moyenne sur les couleurs et les polarisations

```
MM2 = MM2d /. {BB4 → 0}; M3 = DoPolarizationSums[MM2] // Contract;  
M4 = FermionSpinSum[M3, ExtraFactor → 1 / 4];  
M5 = M4 /. DiracTrace → Tr // Contract;
```

Redéfinition de certaines opérations

```
MMMM =  
M5 //. {KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[1]],  
KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[2]],  
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[b1]],  
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[b1]],  
KroneckerDelta[1, μ] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[μ]] →  
Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[1]],  
KroneckerDelta[2, μ] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[μ]] →  
Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[2]],  
KroneckerDelta[1, α] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[μ]] →  
Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]],  
KroneckerDelta[2, α] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[μ]] →  
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]],  
KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[1]],  
KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[α], LorentzIndex[2]],  
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[α]] →  
Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[α]],  
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[α]] →  
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[α]],  
KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[μ], LorentzIndex[b1]] →  
Pair[LorentzIndex[μ], LorentzIndex[1]],
```

```

KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[μ], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[μ], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]],
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]],
KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, μ] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, μ] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, μ] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, μ] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, α] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, α] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, α] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[1]],
KroneckerDelta[2, α] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[a1], Momentum[P1]] →
  Sqrt[s] / 2,
KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[b1], Momentum[P1]] →

```



```

KroneckerDelta[2,  $\alpha$ ] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], Momentum[K1]]  $\rightarrow$ 
- (Sqrt[s] / 2) Sin[ $\theta$ ] Cos[ $\varphi$ ],
KroneckerDelta[2,  $\mu$ ] Pair[LorentzIndex[ $\mu$ ], Momentum[K1]]  $\rightarrow$ 
- (Sqrt[s] / 2) Sin[ $\theta$ ] Cos[ $\varphi$ ],
Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[2]]  $\rightarrow$  0,
Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[1]]  $\rightarrow$  1,
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[2]]  $\rightarrow$  -1,
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[b1]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[b1]],
KroneckerDelta[3,  $\mu$ ] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4,  $\mu$ ] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3,  $\alpha$ ] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[ $\mu$ ]],
KroneckerDelta[4,  $\alpha$ ] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[ $\mu$ ]],
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\alpha$ ], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[ $\alpha$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[ $\alpha$ ]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[ $\alpha$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[ $\alpha$ ]],
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[ $\mu$ ], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\mu$ ], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[ $\mu$ ], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[ $\mu$ ], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[ $\mu$ ]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[a1], LorentzIndex[ $\mu$ ]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[ $\mu$ ]],
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[b1]]  $\rightarrow$ 
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[3]],

```

```

KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[b1]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[a1]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, μ] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, μ] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, μ] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, μ] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[μ]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, α] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, α] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, α] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[4, α] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[α]] →
  Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[a1], Momentum[P1]] → 0,
KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[b1], Momentum[P1]] → 0,
KroneckerDelta[3, α] Pair[LorentzIndex[α], Momentum[P1]] → 0,
KroneckerDelta[3, μ] Pair[LorentzIndex[μ], Momentum[P1]] → 0,
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[a1], Momentum[P1]] →
  Sqrt[s] / 2,
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[b1], Momentum[P1]] →
  Sqrt[s] / 2, KroneckerDelta[4, α] Pair[LorentzIndex[α], Momentum[P1]] →
  Sqrt[s] / 2, KroneckerDelta[4, μ] Pair[LorentzIndex[μ], Momentum[P1]] →
  Sqrt[s] / 2,
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[a1], Momentum[K2]] → 0,

```

$\text{KroneckerDelta}[3, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow 0,$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow 0,$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow 0,$
 $\text{KroneckerDelta}[4, a1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[a1], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow$
 $-\text{Sqrt}[s] / 2,$
 $\text{KroneckerDelta}[4, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow$
 $-\text{Sqrt}[s] / 2,$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow -\text{Sqrt}[s] / 2,$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[K2]] \rightarrow -\text{Sqrt}[s] / 2,$
 $\text{KroneckerDelta}[3, a1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[a1], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, a1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[a1], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[P2]] \rightarrow$
 $(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, a1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[a1], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $(-\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $(-\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $(-\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[3, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $(-\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Sin}[\theta] \text{Sin}[\varphi],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, a1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[a1], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $-(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, b1] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[b1], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $-(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \alpha] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\alpha], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $-(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta],$
 $\text{KroneckerDelta}[4, \mu] \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[\mu], \text{Momentum}[K1]] \rightarrow$
 $-(\text{Sqrt}[s] / 2) \text{Cos}[\theta], \text{Pair}[\text{LorentzIndex}[3], \text{LorentzIndex}[4]] \rightarrow 0,$

Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[3]] → -1,
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[4]] → -1,
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[1]] → 0,
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[2]] → 0,
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[3]] → 0,
 Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[3]] → 0,
 KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[b1]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[4]],
 KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[b1]] →
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[a1]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[4]],
 KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[a1]] →
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[4, μ] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[4]],
 KroneckerDelta[1, μ] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[μ]] →
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[4, α] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[α]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[4]],
 KroneckerDelta[1, α] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[α]] →
 Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[b1]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[3]],
 KroneckerDelta[1, b1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[b1]] →
 Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[a1]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[3]],
 KroneckerDelta[1, a1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[a1]] →
 Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[3, μ] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[μ]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[3]],
 KroneckerDelta[1, μ] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[μ]] →
 Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[3, α] Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[α]] →
 Pair[LorentzIndex[1], LorentzIndex[3]],
 KroneckerDelta[1, α] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[α]] →
 Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[1]],
 KroneckerDelta[3, b1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[b1]] →
 Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[3]],
 KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[b1]] →

```

Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[3, a1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[a1]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[a1]] →
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[3, μ] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[2, μ] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[μ]] →
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[3, α] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[α]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[3]],
KroneckerDelta[2, α] Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[α]] →
Pair[LorentzIndex[3], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[4, b1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[b1]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[2, b1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[b1]] →
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[4, a1] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[a1]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[2, a1] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[a1]] →
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[4, μ] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[μ]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[2, μ] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[μ]] →
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[2]],
KroneckerDelta[4, α] Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[α]] →
Pair[LorentzIndex[2], LorentzIndex[4]],
KroneckerDelta[2, α] Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[α]] →
Pair[LorentzIndex[4], LorentzIndex[2]],
Pair[LorentzIndex[1], Momentum[P2]] → Sqrt[s] / 2,
Pair[LorentzIndex[2], Momentum[P2]] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Cos[φ],
Pair[LorentzIndex[3], Momentum[P2]] → (Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Sin[φ],
Pair[LorentzIndex[4], Momentum[P2]] → (Sqrt[s] / 2) Cos[θ],
Pair[LorentzIndex[1], Momentum[K1]] → Sqrt[s] / 2,
Pair[LorentzIndex[2], Momentum[K1]] → -(Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Cos[φ],
Pair[LorentzIndex[3], Momentum[K1]] → -(Sqrt[s] / 2) Sin[θ] Sin[φ],
Pair[LorentzIndex[4], Momentum[K1]] → -(Sqrt[s] / 2) Cos[θ];

```

calcul de la section efficace différentielle

```

M22d = (1 / (8 π * (Sqrt[s]))) ^ 2 * S * (Pcmf / Pcmi) * MMMM /.
{BB → 1, Pcmi → (1 / (2 * (Sqrt[s]))) Sqrt[((Sqrt[s]) ^ 2) - (M11 + M12) ^ 2] *
Sqrt[((Sqrt[s]) ^ 2) - (M11 - M12) ^ 2],
Pcmf → (1 / (2 * (Sqrt[s]))) Sqrt[((Sqrt[s]) ^ 2) - (Mf1 + Mf2) ^ 2] *
Sqrt[((Sqrt[s]) ^ 2) - (Mf1 - Mf2) ^ 2], M11 → Mq, M12 → 0, Mf1 → Mq,
Mf2 → 0, s → 1}; M24d = TrickMandelstam[M22d, {s, t, u, 2 Mq ^ 2}];
M25d = (3 / 18) (EL * Qq * Gstrong) ^ 2 * M24d;
M25ds = FullSimplify[M25d, Trig → False];

```

Paramétrisation de la matrice C

```

M26d =
M25ds //.
{C03 →
  (1 / Ae ^ 2) (Cos[α] (Cos[γe] Cos[δ] - Cos[ξ] Sin[γe] Sin[δ]) -
    Sin[α] Sin[γe] Sin[ξ]),
C02 → (1 / Ae ^ 2) (Cos[δ] Cos[ξ] Sin[γe] + Cos[γe] Sin[δ]),
C01 →
  (1 / Ae ^ 2)
  (-Cos[γe] Cos[δ] Sin[α] +
    Sin[γe] (Cos[ξ] Sin[α] Sin[δ] - Cos[α] Sin[ξ])),
θ → ArcCos[(2 t / s) + 1]};

```

Moyenne sur les deux angles ξ et φ

```

M27d = Integrate[M26d / (2 Pi), {ξ, 0, 2 Pi}];
M28d = Integrate[M27d / (2 Pi), {φ, 0, 2 Pi}] // FullSimplify;

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Weinberg, The quantum theory of fields, Volume I: Foundations, Ed. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [2] S. Weinberg, The quantum theory of fields, Volume II: Modern applications, Ed. Cambridge University Press, New York, 1996.
- [3] J.P. Derendinger, Théorie quantique des champs, Ed. Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne, 2001.
- [4] F. Cuypers, Au-delà du modèle standard, hep-ph/9706255, (1997).
- [5] J.S. Rigden, Blocks of matter, A supplement to the Macmillan Encyclopedia of Physics, Ed. Macmillan Reference USA, New York (2003). ISBN 0-02-865703-9.
- [6] L. Marleau, Introduction à la physique des particules, Université Laval, Québec (2006).
- [7] Lyndon Evans, The Large Hadron Collider, New Journal of Physics 9, 335 (2007).
- [8] T.S. Virdee, The LHC project: The accelerator and the experiments, Nucl. Instr. and Meth. A 623, pp. 1-10 (2010).
- [9] K. Jakobs, Physics at the LHC and sLHC, Nucl. Instr. and Meth. A 636, S1-S7 (2010).
- [10] E.g., R. Horvat, A. Ilakovac, D. Kekez, J. Trampetić, et J. You, Forbidden and invisible Z boson decays in a covariant θ -exact noncommutative standard model, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 41, 055007(2014); W. Wang, J.H. Huang, et Z.M. Sheng, Bound on noncommutative standard model with hybrid gauge transformation via lepton flavor conserving Z decay, Phys. Rev. D 88, 025031 (2013); S.Y. Ayazi, S. Esmaili, M. MohammadiNajafabadi, Single top quark production in t-channel at the LHC in Noncommutative Space-Time, Phys. Lett. B 712, 93–96 (2012); S. Bilmiş , M. Deniz, H. B. Li, J. Li, H.Y. Liao, S. T. Lin, V. Singh, H.T. Wong, İ.O. Yıldırım, Q. Yue, et M. Zeyrek, Constraints on a noncommutative physics scale with neutrino-electron scattering, Phys. Rev. D 85, 073011 (2012); N.G. Deshpande et S.K. Garg, Anomalous triple gauge boson couplings in $e^-e^+\rightarrow\gamma\gamma$ for noncommutative standard model, Physics Letters B 708, pp. 150–156 (2012);

M.R. Bekli, N. Mebarki, et I. Chadou, Direct Photon Production in NCG QCD at the Tevatron and LHC, AIP Conf. Proc. 1444, pp. 370-374 (2012); R. Horvat, D. Kekez, P. Schupp, J. Trampetić, et J. You, Photon-neutrino interaction in θ -exact covariant noncommutative field theory, Phys. Rev. D 84, 045004 (2011); R. Horvat, D. Kekez, et J. Trampetić, Spacetime noncommutativity and ultrahigh energy cosmic ray experiments, Phys. Rev. D 83, 065013 (2011); S.K. Garg, T. Shreecharan, P.K. Das, N.G. Deshpande, et G. Rajasekaran, TeV Scale Implications of Non Commutative Space time in Laboratory Frame with Polarized Beams, J. High Energy Phys. 07 (2011) 024; P.K. Das, A. Prakash, et A. Mitra, Neutral Higgs boson pair production at the LC in the Noncommutative Standard Model, Phys. Rev. D 83, 056002 (2011); M. Haghightat, N. Okada, et A. Stern, Location and direction dependent effects in collider physics from noncommutativity, Phys. Rev. D 82, 016007 (2010); A. Prakash, A. Mitra, et P.K. Das, $e+e\rightarrow\mu+\mu^-$ scattering in the Noncommutative standard model, Phys. Rev. D 82, 055020 (2010); T. Ohl et C. Speckner, The Noncommutative Standard Model and Polarization in Charged Gauge Boson Production at the LHC, Phys. Rev. D 82, 116011 (2010); M. Haghightat, Bounds on the parameter of noncommutativity from supernova SN1987A, Phys. Rev. D 79, 025011 (2009).

[11] B. Jurčo, S. Schraml, P. Schupp, et J. Wess, Enveloping algebra valued gauge transformations for non-abelian gauge groups on non-commutative spaces, Eur. Phys. J. C 17, pp. 521-526 (2000).

[12] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, et J. Wess, Gauge theory on noncommutative spaces, Eur. Phys. J. C 16, pp. 161–167 (2000).

[13] B. Jurčo, L. Möller, S. Schraml, P. Schupp, et J. Wess, Construction of non-Abelian gauge theories on noncommutative spaces, Eur. Phys. J. C 21, pp. 383–388 (2001).

[14] N. Seiberg et E. Witten, String theory and noncommutative geometry, J. High Energy Phys. 9909, 032 (1999).

[15] C. E. Carlson, C. D. Carone et R. F. Lebed, Bounding noncommutative QCD, Phys. Lett. B 518, pp. 201–206 (2001).

[16] X. Calmet, B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess et M. Wohlgenannt, The standard model on non-commutative space-time, Eur. Phys. J. C 23, pp. 363-376 (2002).

-
- [17] B. Melić, K. Passek-Kumerički, J. Trampetić, P. Schupp, et M. Wohlgenannt, The standard model on non-commutative space-time: electroweak currents and the Higgs sector, *Eur. Phys. J. C* 42, pp. 483–497 (2005).
- [18] B. Melić, K. Passek-Kumerički, J. Trampetić, P. Schupp, et M. Wohlgenannt, The standard model on non-commutative space-time: strong interactions included, *Eur. Phys. J. C* 42, pp.499–504 (2005).
- [19] A. Alboteanu, T. Ohl, et R. Rückl, Noncommutative standard model at θ^2 , *Phys. Rev. D* 76, 105018 (2007).
- [20] A. P. Contogouris, N. Mebarki, et S. Papadopoulos, The Dominant Part of Higher Order Corrections in Perturbative QCD, *Int. J. Mod. Phys. A* 5, No. 10, pp. 1951-1973 (1990).
- [21] A. P. Contogouris, N. Mebarki, et H. Tanaka, Two General Assertions in *PQCD* and Supersymmetry, *Proceed. of the tenth Montreal-Rochester-Syracuse Toronto, Meeting on High Energy Physics*. May 9-10, 1988, Toronto University Canada, Word scientific.
- [22] A.P. Contogouris et S. Papadopoulos, The Dominant Part of Higher Order Corrections for the Subprocess $qg \rightarrow \gamma q$, *Mod. Phys. Lett. A* 5, No. 12, pp. 901-910 (1990).
- [23] N. Mebarki et O. Abbes, What is the dominant contribution in a hadronic process?, *Acta Phys. Polonica B* 23, pp. 831-849 (1992).
- [24] O. Abbes et N. Mebarki, Application of the soft gluon approach, *Acta Phys. Polonica B* 8, pp. 1333-1345 (1995).
- [25] N. Mebarki et H. Boutine, On the Dominant Bremsstrahlung Contribution In Hadronic Process, *Chin. Jour. Phys.* 46, pp. 636-648 (2008).
- [26] J.F. Owens, Q^2 Dependent Parametrizations of Parton Distribution Functions, *Phys. Rev. D* 30, 943(1984).
- [27] D.W. Duke et J.F. Owens, Q^2 Dependent Parametrizations of Parton Distribution Functions, *Phys. Rev. D* 30, pp.49-54(1984).

-
- [28] R.K. Ellis, M. A. Furman, H.E. Haber, et I. Hinchliffe, Large Corrections to High $p(T)$ Hadron-Hadron Scattering in QCD , Nucl. Phys. B173, pp. 397-421 (1980).
- [29] M. Dine et J.R. Sapirstein, Higher Order QCD Corrections in e^+e^- Annihilation, Phys. Rev. Lett. 43, pp. 668–675 (1979).
- [30] K.G. Chetyrkin, A.L. Kataev, et F.V. Tkachov, Higher-Order Corrections to $\sigma_i(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$ in Quantum Chromodynamics, Phys. Lett. B85, pp. 277-279 (1979).
- [31] A.P. Contogouris, N. Mebarki, H. Tanaka, Higher Order Corrections In Certain Supersymmetric Processes, J. Phys. G14, pp. 663-674 (1988).
- [32] F. Bloch et A. Nordsieck, Note on the Radiation Field of the electron, Phys. Rev. 52, pp. 54-59 (1937).
- [33] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontannaz, et D. Schiff, Large p_T Double Photon Production in Hadronic Collisions –Beyond Leading Logarithm QCD Calculation, Z. Phys. C29, pp 459-475 (1985).
- [34] P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontannaz, D. Schiff, Scheme Invariant Higher Order QCD Predictions for Large $p(t)$ Photo production Reactions, Nucl. Phys. B 286, pp. 553–591 (1987).
- [35] P. Aurenche, R. Baier, M. Fontannaz et D. Schiff, Prompt Photon Production at Large $p(T)$ Scheme Invariant QCD Predictions and Comparison with Experiment, Nucl. Phys. B297, pp. 661–696 (1988).
- [36] ATLAS Collaboration, G. Aad et al., Measurement of the inclusive isolated prompt photons cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector using 4.6 fb^{-1} , Phys. Rev. D 89, 052004 (2014). ATLAS Collaboration, Georges Aad et al., Dynamics of isolated-photon plus jet production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector, Nucl. Phys. B875, pp. 483-535 (2013).

-
- [37] CMS Collaboration, S. Chatrchyan et al., Measurement of the Differential Cross Section for Isolated Prompt Photon Production in pp Collisions at 7 TeV, *Phys.Rev. D* 84, 052011 (2011).
- [38] CDF Collaboration, T. Aaltonen et al., Measurement of the Inclusive Isolated Prompt Photon Cross Section in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s}=1.96$ TeV using the *CDF* Detector, *Phys. Rev. D* 80, 111106 (2009).
- [39] M. Haghghat, N. Okada, et A. Stern, Location and direction dependent effects in collider physics from noncommutativity, *Phys. Rev. D* 82, 016007 (2010).
- [40] OPAL Collaboration, G. Abbiendi et al., Test of non-commutative QED in the process $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ at LEP, *Physics Letters B* 568, pp. 181–190 (2003).
- [41] J. Kamoshita, Probing Noncommutative Space-Time in the Laboratory Frame, *Eur. Phys. J. C* 52, pp. 451-457 (2007).
- [42] J. Owens, Large Momentum Transfer Production of Direct Photons, Jets, and Particles, *Rev. Mod. Phys.* 59, pp. 465-503 (1987).
- [43] E.L. Berger, E. Braaten, et R. Field, Large-pT production of single and double photons in proton-proton and pion-proton collisions, *Nucl. Phys. B* 239, pp. 52-92 (1984).
- [44] S.K. Garg, T. Shreecharan, P.K. Das, N.G. Deshpande, et G. Rajasekaran, TeV scale implications of non commutative space time in laboratory frame with polarized beams, *J. High Energy Phys.* 07, 024 (2011).
- [45] N.G. Deshpande et S.K. Garg, Anomalous triple gauge boson couplings in $e^-e^+ \rightarrow \gamma\gamma$ for noncommutative standard model, *Physics Letters B* 708, pp. 150–156 (2012).
- [46] M.R. Bekli, N. Mebarki, et I. Chadou, Direct Photon Production in NCG QCD at the Tevatron and LHC, *AIP Conf. Proc.* 1444, pp. 370-374 (2012).
- [47] D. Griffiths, Introduction to elementary particles, Ed. John Wiley and Sons, Toronto, 1987.

[48] A.D. Martin, W. J. Stirling, R.S. Thorne, et G. Watt, Parton distributions for the LHC, *Eur. Phys. J. C* 63, pp. 189-285 (2009).

[49] CDF Collaboration, Aaltonen T. et al. , Measurement of the inclusive isolated prompt photon cross section in ppbar collisions at $s=1.96$ TeV using the CDF detector, *Phys. Rev. D* 80, 111106 (2009).

[50] N. Mebarki, Beyond the standard model: Non commutative geometry approach and LHC signatures, *AIP Conf. Proc.* 1006, pp. 130-134 (2008).

[51] E.D. Bloom et al., High-Energy Inelastic $e-p$ Scattering at 6° and 10° , *Phys. Rev. Lett.* 23, pp. 930-934 (1969); M. Breidenbach et al., Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering, *Phys. Rev. Lett.* 23, pp. 935-939 (1969).

[52] E.g., F. Halzen et A.D. Martin, *Quarks et Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Ed. John Wiley & Sons, New York, 1984; R.K. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber, *QCD and Collider Physics*, CUP, Cambridge, 1996; P. Aurenche, Introduction à la chromodynamique quantique perturbative, in “Théorie quantique des champs, Méthodes et Applications”, pp. 121-187, Ed. Hermann, Paris, 2007; G. Altarelli, “QCD: The Theory of Strong Interactions” in “Elementary Particles”, Subvolume A, Theory and Experiments, Ed. H. Schopper, Springer, 2008; E. Perez et E. Rizvi, The quark and gluon structure of the proton, *Rep. Prog. Phys.* 76, 046201 (2013).

[53] E.g., A. Prakash, A. Mitra, et P.K. Das, $e+e^- \rightarrow \mu+\mu^-$ scattering in the noncommutative standard model, *Phys. Rev. D* 82, 055020 (2010).

[54] N. Seiberg, L. Susskind et N. Toumbas, Space/Time Non-Commutativity and Causality, *J. High Energy Phys.* 0006, 044 (2000); J. Gomis et T. Mehen, Space-Time Noncommutative Field Theories And Unitarity, *Nucl. Phys. B* 591, pp. 265-276 (2000); M. Chaichian et al., Space-Time Noncommutativity, Discreteness of Time and Unitarity, *Eur. Phys. J. C* 20, pp. 767-772 (2001); D.W. Chiou et O. J. Ganor, Noncommutative dipole field theories and unitarity, *J. High Energy Phys.* 03, 050 (2004).

[55] V.N. Gribov et L. N. Lipatov, Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory, *Sov. J. Nucl. Phys.* 15, pp. 438-450 (1972); G. Altarelli et G. Parisi, Asymptotic freedom in parton language, *Nucl. Phys. B* 126, pp. 298–318 (1977); Y. L. Dokshitzer, Calculation of the

Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and $e^+ e^-$ Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics, Sov.Phys. JETP 46, pp. 641-653 (1977).

[56] H1 et ZEUS collaborations, F.D. Aaron et al., Combined measurement and QCD analysis of the inclusive $e \pm p$ scattering cross sections at HERA, J. High Energy Phys.01, 109 (2010).

Résumé

Dans cette thèse, nous avons effectué des calculs d'ordre supérieur de certains sous-processus hadronique avec l'approche du gluon mou et/ou colinéaire. Nous avons remarqué que cette nouvelle méthode permet d'avoir de meilleurs résultats par rapport aux données expérimentales du LHC et du Tevatron, dans le cas de la production de photons directs.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à l'étude des sous-processus et du processus physique de production de photons directs, mais dans le cadre du Modèle Standard Non-Commutatif Minimal (Minimal-NCSM). Nous avons calculé la section efficace inclusive. Ceci nous a permis de confronter les prédictions du Minimal-NCSM avec les données expérimentales du Tevatron. Ainsi, nous avons constaté que les effets non-commutatifs se manifestent notamment pour des photons à larges impulsions transverses.

Vers la fin de la thèse, nous avons examiné la contribution non-commutative dans les fonctions de structure et la violation de l'invariance d'échelle, qui se manifeste à l'ordre dominant de la théorie des perturbations, dans le cadre du NCSM. La résolution de l'équation d'évolution NC-DGLAP dans l'espace des moments, nous a permis de suivre l'évolution des fonctions de structures pour des grands x , et pour différentes valeurs du paramètre de non-commutativité Λ .

Mots clés : NCSM, photon direct, DGLAP, Approche du gluon mou et/ou colinéaire

Abstract

In this thesis, we performed calculations of higher order of some hadronic sub-processes with the soft and/or collinear gluon approach. We noticed that this new method allows us to have better results compared to the LHC and the Tevatron experimental data, in the case of direct photons production.

Subsequently, we investigated sub-processes and the physical process of direct photon production, but within the Minimal Non-Commutative Standard Model (Minimal-NCSM). We calculated the inclusive cross section and compared the predictions of Minimal-NCSM with Tevatron's experimental data. Then, we found that non-commutative effects occur in particular for photons with large transverse momentum.

At the end of the thesis, we examined the non-commutative contribution in structure functions and scale invariance violation, which occur at the leading order of perturbation theory in the context of NCSM. The resolution of the NC-DGLAP evolution equation in momentum space, allowed us to follow the evolution of the structure functions for large x , and for different values of the non-commutative parameter Λ .

Key words: NCSM, direct photon, DGLAP, soft and/or collinear gluon approach

المخلص

في هذه الأطروحة قمنا بإجراء حسابات ذات درجة عالية لبعض التفاعلات الهادرونية الداخلية باستخدام نظرية الغليونات اللينة و/أو الخطية. لاحظنا أن هذا النموذج الجديد يعطي نتائج جيدة مقارنة مع البيانات التجريبية للمسرعين LHC و TEVATRON في حالة توليد الفوتونات المباشرة.

بعد ذلك اهتمنا بالتفاعلات الداخلية و التفاعلات الفيزيائية في حالة توليد الفوتونات المباشرة، و لكن في إطار النموذج المعياري غير التبادلي (NCSM). لقد قمنا بحساب المقطع العرضي الشامل، الذي سمح لنا بمقارنة تنبؤات هذا النموذج مع البيانات التجريبية للمسرعين LHC و TEVATRON. لاحظنا أن علامات الفضاء الغير تبادلي تظهر خاصة في حالة الفوتونات ذات الدفع الكبير.

في نهاية الأطروحة، قمنا بدراسة تأثير الفضاء غير التبادلي في الدوال البنيوية و خرق السلم الثابت، في إطار النموذج المعياري غير التبادلي. حل معادلة التطور NC-DGLAP سمح لنا بمتابعة تطور الدوال البنيوية من اجل x كبيرة، و من أجل قيم مختلفة للعامل غير التبادلي Λ .

الكلمات المفتاحية: NCSM، الفوتون المباشر، DGLAP، نموذج الغليونات اللينة و/أو الخطية

Some applications of the revisited approximate next-to-leading higher order corrections in QCD

N. Mebarki,^{*,†} M. R. Bekli^{*,†,§} and H. Aissaoui^{*,¶}

^{*}Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique,
Constantine 1 University, Constantine, Algeria

[†]Laboratoire de Physique Théorique, Faculty of Sciences and Nature,
University of Béjaïa, Béjaïa 06000, Algeria

[‡]nmebarki@yahoo.fr

[§]reda_astro@yahoo.fr

[¶]aissaoui_h@yahoo.com

Received 19 October 2014

Revised 23 November 2014

Accepted 30 January 2015

Published 26 March 2015

Using the prescription and techniques of the soft and/or collinear gluon approach developed in Refs. 1–5 and revisited in Ref. 6, applications to some hadronic subprocesses are considered and approximate QCD higher order contributions are determined.

Keywords: QCD; soft/collinear gluon; higher order contribution.

PACS numbers: 12.38.–t, 13.60.Fz, 12.38.Bx

1. Introduction

At very high energies like that of the large hadronic collider (LHC), higher order corrections (HOC) of several physical processes in the standard model or beyond are very important. Namely in perturbative QCD they can be large and negative in some regions of phase space, making cross-sections small and difficult to measure. They can also be significant in certain specific parts of phase space and consequently affect the shape of the final cross-sections. Moreover, for the Higgs boson search at the LHC, knowledge of HOC in various physical processes will help to determine more precisely the cross-sections. Furthermore, in several cases the next-to-leading order corrections (NLOC) are found to be large and expected to increase the stability of the predicted cross-sections against changes of schemes, renormalization

[†]Permanent address.

[¶]Corresponding author.

and factorization scales. Therefore, they will lead to more precise determinations of backgrounds toward uncovering signals for new physics. In general, these HOC are very complicated and the results cannot be expressed analytically but rather numerically. As a first step, to characterize and quantify these HOC, an approximate approach based on the soft and/or collinear emitted gluons has been initiated and developed in Refs. 1–5 especially for processes involving structure and/or fragmentation functions. It was argued that, over a range of proper kinematic variables, there is a part that dominates the NLOC. Recently, the technique leading to single out the dominant Bremsstrahlung unitary diagrams and determine their contributions was revisited and generalized.⁶ In fact, this approach gives a more precise way to determine the Bremsstrahlung dominant terms, identify exactly the corresponding few (among hundreds) contributing unitary diagrams and use simple known integrals to determine the related transition amplitudes. This technique is very useful in the sense that it reduces the enormous involved calculation and helps to get an idea on the size and sign of the HOC. The goal of this paper is to do some applications using the revised version of this approximate approach (see Ref. 6). In Sec. 2, we review the basic formalism. In Sec. 3, we give some applications to the physical subprocesses $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ and $qg \rightarrow q\gamma$. Finally, in Sec. 4, we draw our conclusions.

2. Formalism

Consider a physical process of the form: $H_1 + H_2 \rightarrow H_3 + H_4$ where H_1, H_2, H_3 and H_4 are in general hadrons. The corresponding cross-section is given by^{7–9}

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{abcd} \iiint dx_a dx_b dx_c dx_d F_{a/H_1}(x_a, M) F_{b/H_2}(x_b, M) \\ &\times \left\{ \frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} f_0 \delta\left(1 + \frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}}\right) + \frac{\alpha_s^2(\mu)}{\pi} f \theta\left(1 + \frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}}\right) \right\} \\ &\times \mathcal{D}_{H_3/c}(x_c, M') \mathcal{D}_{H_4/d}(x_d, M'), \end{aligned} \tag{1}$$

where $F_{a/H_1}, F_{b/H_2}$ (respectively $\mathcal{D}_{H_3/c}, \mathcal{D}_{H_4/d}$) are structure (respectively, fragmentation) functions and f_0 (respectively, f) is the Born term (respectively, HOC). The scales $\mu \sim M$ and M' are the renormalization and factorization points of the structure and fragmentation functions, respectively. The kinematical Mandelstam variables $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ are those of the partonic subprocess $a + b \rightarrow c + d$. Here θ is the Heaviside step function and x_a, x_b, x_c, x_d stand for the momentum fraction of the partons a, b, c and d . The dominant part of HOC was identified in Refs. 1–5 and the general form was established. To simplify the notations, it is better to work with dimensionless variables v and w defined as:

$$v = 1 + \frac{\hat{t}}{\hat{s}}, \quad w = \frac{-\hat{u}}{\hat{s} + \hat{t}}. \tag{2}$$

Then, f takes the form

$$f = f_{\text{sing}}(x_c, x_d, v, w) + \tilde{f}(x_c, x_d, v, w), \quad (3)$$

where

$$f_{\text{sing}} = \left(C_1 + \hat{C}_1 \ln \frac{\hat{s}}{\mu^2} + \tilde{C}_1 \ln \frac{\hat{s}}{M^2} + \tilde{\tilde{C}}_1 \ln \frac{\hat{s}}{M'^2} \right) \delta(1-w) + \left(C_2 + \tilde{C}_2 \ln \frac{\hat{s}}{M^2} + \tilde{\tilde{C}}_2 \ln \frac{\hat{s}}{M'^2} \right) \frac{1}{(1-w)_+} + C_3 \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+. \quad (4)$$

The distributions $\frac{1}{(1-w)_+}$ and $\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+$ are defined such that:

$$\int_0^1 dw \frac{h(w)}{(1-w)_+} = \int_0^1 \frac{h(w) - h(1)}{(1-w)}, \quad (5)$$

$$\int_0^1 dw \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ h(w) = \int_0^1 dw (h(w) - h(1))$$

($h(w)$ is some regular function of w). It is worth to mention that the various terms C_1, C_2 , etc. are gauge invariant and get their contributions from virtual and Bremsstrahlung radiative corrections where the emitted gluon is soft and/or collinear.¹⁻⁵ Each one of these terms is related to an infrared or ultraviolet singularity. However, the correction \tilde{f} is not dominant and its expression is very complicated. It comes from the virtual corrections and Bremsstrahlung with a hard emitted gluon (which is neither soft or collinear) from the initial and/or final state particles.¹⁰⁻¹² Now, the terms C_1, \hat{C}_1 , etc. constituting the structure of f_{sing} can be easily determined from simple considerations. In fact, the origin of the term \hat{C}_1 proportional to $\ln\left(\frac{\hat{s}}{\mu^2}\right)$ is the renormalization. It is the first term of $O(\alpha_s)$ in the expansion of the strong running coupling α_s near the renormalization scale μ :

$$\alpha_s(\hat{s}) \approx \alpha_s(\mu) \left[1 - \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \frac{11N_c - 2N_f}{6} \ln\left(\frac{\hat{s}}{\mu^2}\right) \right]. \quad (6)$$

Now, by direct identification we get:

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6}. \quad (7)$$

The coefficients \tilde{C}_1 and $\tilde{\tilde{C}}_2$ which are proportional to $\ln\left(\frac{\hat{s}}{M^2}\right)$, have as origin the factorization of the structure functions at a scale M . They can be determined from the subprocess $ab \rightarrow cd$ as:¹⁻⁵

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{\Omega}{2} \left[\sum_i P_{ia} \otimes \hat{\sigma}^B(ib \rightarrow cd) + \sum_j P_{jb} \otimes \hat{\sigma}^B(aj \rightarrow cd) \right], \quad (8)$$

where Ω , $\hat{\sigma}^B$, P_{ij} and \otimes stand for the color factor, Born term, Altarelli–Parisi splitting functions and the convolution product, respectively. Similarly, \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 are the coefficients of $\ln\left(\frac{\hat{s}}{M'^2}\right)$. They are related to the factorization theorem for the fragmentation functions at the point M' and have the following form:¹⁻⁵

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1\delta(1-w) + \tilde{C}_2\frac{1}{(1-w)_+} \\ &= \frac{\Omega}{2} \left[\sum_i \hat{\sigma}^B(ab \rightarrow id) \otimes P_{ci} + \sum_j \hat{\sigma}^B(ab \rightarrow cj) \otimes P_{dj} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Now, the distributions $\frac{1}{(1-w)_+}$ and $\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+$ appearing in Eq. (4) and coming from the Bremsstrahlung diagrams has as origin, a factor like $(1-w)^{1-\alpha\varepsilon}$ in the dimensional regularization method ($d = 4 - 2\varepsilon$):

$$(1-w)^{-1-\alpha\varepsilon} = -\frac{1}{\alpha\varepsilon}\delta(1-w) + \frac{1}{(1-w)_+} - \alpha\varepsilon\left(\frac{\ln(1-w)}{1-w}\right)_+ + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

The virtual contribution is only proportional to $\delta(1-w)$. Therefore, the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_1 which are proportional to $\delta(1-w)$ come from the virtual and Bremsstrahlung contributions, while \tilde{C}_2 and \tilde{C}_2 have as origin only the Bremsstrahlung corrections. In what follows, we write f_{sing} as the sum of the Bremsstrahlung $f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}}$ and virtual $f_{\text{sing}}^{\text{virtual}}$ contributions:

$$f_{\text{sing}} = f_{\text{sing}}^{\text{virtual}} + f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}}. \quad (11)$$

The terms $f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}}$ have the form:¹⁻⁵

$$f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}} = D^\varepsilon \left[\frac{A}{\varepsilon} + B + \varepsilon C \right] (1-w)^{-1-\alpha\varepsilon}, \quad (12)$$

where D^ε is a three-body phase space factor. Using Eqs. (10) and (12) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}} &= -\frac{A}{\varepsilon^2}\delta(1-w) - \frac{1}{\alpha\varepsilon}(A \ln D + B)\delta(1-w) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}[A \ln^2 D + B \ln D + C]\delta(1-w) \\ &\quad + \frac{A}{\varepsilon} \frac{1}{(1-w)_+} + [A \ln D + B] \frac{1}{(1-w)_+} \\ &\quad - \alpha A \left(\frac{\ln(1-w)}{1-w} \right)_+ + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Furthermore, the virtual contribution $f_{\text{sing}}^{\text{virt}}$ has as expression:¹⁻⁵

$$f_{\text{sing}}^{\text{virt}} = F^\varepsilon \left[\frac{A'}{\varepsilon^2} + \frac{B'}{\varepsilon} + C' \right] \delta(1-w), \quad (14)$$

where F^ε is a two particles phase space factor.^{4,5} Based on some simple considerations, one can determine easily the factors A and B of Eq. (13). In fact, the infrared singularities (terms $\sim \frac{1}{\varepsilon^2}$) are eliminated by using the Bloch–Nordsieck theorem.¹³ As a result, one gets:

$$A = \alpha A'. \quad (15)$$

Furthermore, the ultraviolet singularities are eliminated as a consequence of the Slavnov–Taylor identities. After subtraction of the contribution coming from the mass singularity and because of the structure functions factorization in the part proportional to the Altarelli–Parisi splitting functions P_{ij} one obtains:^{1–5}

$$B = -\alpha(\tilde{C}_1 - B' - A'(\ln F - \ln D)). \quad (16)$$

Now, the coefficient C of $f_{\text{sing}}^{\text{Bremss}}$ is proportional to the Dirac $\delta(1-w)$ distribution and is obtained by calculating the Bremsstrahlung terms within the revisited soft and/or collinear gluon of approach.⁶ Noticing that the coefficients C_1 , C_2 and C_3 are proportional to $\delta(1-w)$ (common to the virtual and Bremsstrahlung corrections), $\frac{1}{(1-w)_+}$ and $(\frac{\ln(1-w)}{1-w})_+$ respectively we obtain:

$$C_1 = A' \ln^2 F + B' \ln F + C' - [A \ln^2 D + B \ln D + C] \quad (17)$$

and from Eq. (13):

$$C_2 = A \ln D + B \quad (18)$$

and

$$C_3 = -\alpha A. \quad (19)$$

3. Applications

We work in the Feynman gauge within the dimensional regularization where $d = 4-2\varepsilon$ and consider the contribution of the subprocesses $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ and $qg \rightarrow q\gamma$ to elastic and inelastic physical processes.

3.1. Subprocess $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$

Notice that for the physical process $\gamma\gamma \rightarrow H_3 + H_4$ related to the subprocess $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, we have two fragmentation functions and no structure functions. Following the above prescription, one gets:

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0. \quad (20)$$

Moreover, the two-body phase space factor F and the Born term $\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(s, v)|_{\text{Born}}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}}$ have as expressions:

$$F = \frac{4\pi\mu^2}{sv(1-v)} \quad (21)$$

and

$$\left. \frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v) \right|_{\text{Born}}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}} = \frac{2N_c}{\hat{s}} \pi \alpha^2 e_q^4 (1 - \varepsilon) \left[(1 - \varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right], \quad (22)$$

respectively. Notice that the Born term is not proportional to α_s . Consequently, the coefficient \hat{C}_1 proportional to $\ln \frac{\hat{s}^2}{\mu^2}$ vanishes:

$$\hat{C}_1 = 0. \quad (23)$$

Regarding the terms \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 related to the factorization of the fragmentation function they are determined from Eq. (9). Furthermore, the Born term present in the expression of Eq. (9) impose an energy–momentum conservation relation:

$$\hat{s}' + \hat{t}' + \hat{u}' = 0, \quad (24)$$

where \hat{s}' , \hat{t}' and \hat{u}' are the Mandelstam variables of the subprocess $\gamma\gamma \rightarrow iq$, or $\gamma\gamma \rightarrow qj$. From the kinematics of the physical process, we deduce that in the first term of Eq. (9) one has:

$$\frac{1}{z} = \frac{vw - 1}{v - 1}, \quad (25)$$

where z is the momentum fraction of the parton i . However, for the second term we obtain:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w}. \quad (26)$$

Here, z is the momentum fraction of the parton j . From Eqs. (9), (24), (25) and (26), and using the fact that in the first term of Eq. (9) we have:

$$v' = wv \quad (27)$$

and in the second term:

$$v' = v \quad (28)$$

($v' = 1 + \frac{\hat{t}'}{\hat{s}'}$ is the corresponding dimensionless variable related to \hat{s}' , \hat{t}' and \hat{u}') we obtain:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} \\ &= \frac{N_c}{\Gamma(1-\varepsilon)} \pi \alpha^2 e_q^4 \left\{ P_{qq} \left(\frac{v-1}{vw-1} \right) \cdot \frac{1}{\hat{s}(1-v)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}vw(1-vw)} \right)^\varepsilon \right. \\ & \quad \times (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{vw}{1-vw} + \frac{1-vw}{vw} \right) - 2\varepsilon \right] \\ & \quad \left. + \frac{2}{\hat{s}vw} P_{qq}(w) \left(\frac{4\pi\mu^2}{sv(1-v)} \right)^\varepsilon (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

where the splitting function P_{qq} is given by:

$$P_{qq}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \quad (30)$$

with

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \quad (31)$$

in $SU(N_c)$ (N_c is a color factor equals to 3 in $SU(3)$). Using the fact that:

$$\delta[v(1-w)] = \frac{1}{v} \delta(1-w) \quad (32)$$

and

$$\frac{1}{(v-vw)_+} = \frac{1}{v} \frac{1}{(1-w)_+} + \frac{1}{v} \ln v \delta(1-w) \quad (33)$$

the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 get the forms:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\alpha^2 e_q^4 C_F N_c}{\hat{s}} \frac{1}{2v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (34)$$

and

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\alpha^2 e_q^4 C_F N_c}{\hat{s}} \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right). \quad (35)$$

Now, the virtual cross-section $\frac{d\sigma}{dv}(\hat{s}, v)|_{\text{virt}}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}}$ was calculated in Refs. 9 and 10 and is given by:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dv}(\hat{s}, v) \Big|_{\text{virt}}^{\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}} &= \frac{\alpha^2 \alpha_s(\mu)}{\hat{s}} \frac{e_q^4 C_F N_c}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \left[\left(-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) + \frac{4}{\varepsilon} \right] \right. \\ &+ \left[\frac{2\pi^2}{3} - 1 + \ln^2 v + \ln^2(1-v) + 3 \ln(1-v) \right] \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \\ &+ \frac{v}{1-v} \pi^2 + 6 + \frac{1}{v(1-v)} (\ln^2(1-v) - \ln^2 v) \\ &\left. + \left(\frac{v}{1-v} - 1 + v + \frac{2}{v} \right) \ln v + \left(\frac{v}{1-v} + 1 - v - \frac{2}{v} + 4 \right) \ln(1-v) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

From this expression, we can deduce directly the coefficients A' and B' (related to the divergences $\frac{1}{\varepsilon^2}$ and $\frac{1}{\varepsilon}$ respectively) to get at the end:

$$A' = -\frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (37)$$

and

$$B' = \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 4 \right) \quad (38)$$

consequently:

$$A = A' \quad (39)$$

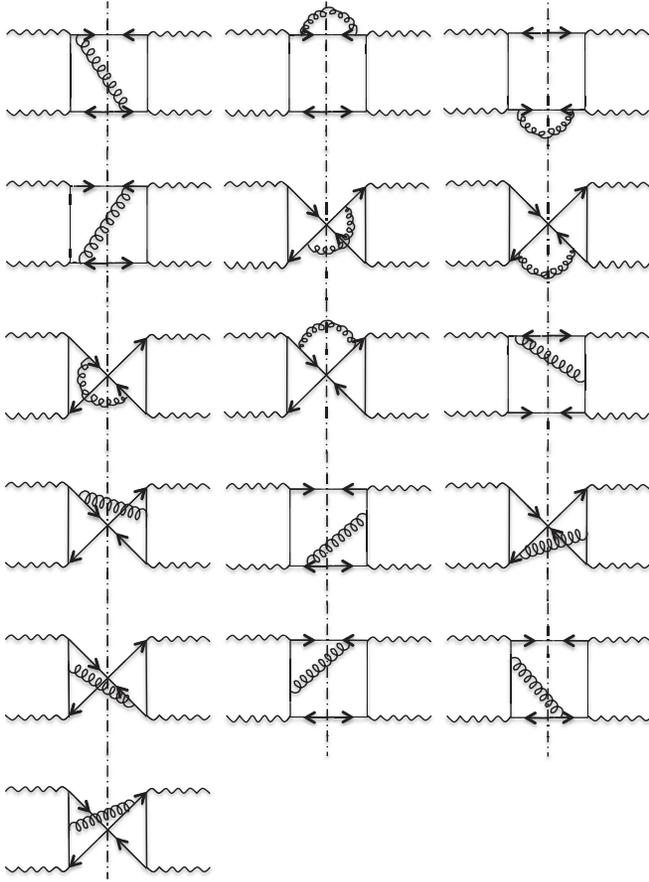


Fig. 1. Dominant Bremsstrahlung unitary diagrams for the physical process $\gamma\gamma \rightarrow H_3 + H_4$.

and

$$B = -(\tilde{C}_1 - B' - A'(\ln F - \ln D)) \quad (40)$$

(in our case $\tilde{C}_1 = 0$ and $\alpha = 1$). Using the fact that F^ε and D^ε are the two- and three-body phase spaces F^ε and D^ε respectively, we deduce that:

$$B = B' + A' \ln v \quad (41)$$

and finally C_2 and C_3 take the following expressions:

$$C_2 = -A' \quad (42)$$

and

$$C_3 = A' \ln D + B' + A' \ln v. \quad (43)$$

For the coefficient C_1 , the dominant Bremsstrahlung unitary diagrams are identified (within the revised approach of Ref. 6) and are given in Fig. 1. Following Ref. 6

and the above prescription, and after direct simplifications one can have:

$$C = \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \frac{4(v^2 + v - 1)}{v(v-1)^2}. \quad (44)$$

Therefore, the coefficient C_1 takes the form:

$$C_1 = C_2 \ln v + C' - C, \quad (45)$$

where C' , is the corresponding coefficient determined from the virtual corrections

$$\begin{aligned} C' = & \frac{\pi\alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F N_c \left(\left(\frac{2\pi^2}{3} - 3 + \ln^2 v + \ln^2(1-v) \right) \right. \\ & \times \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) + \left(2 + 3\frac{1-v}{v} \right) \ln v + 2 \\ & + \left(2 + \frac{3v}{1-v} \right) \ln(1-v) + \left(2 + \frac{v}{1-v} \right) \ln^2 v \\ & \left. + \left(2 + \frac{1-v}{v} \right) \ln^2(1-v) \right). \end{aligned} \quad (46)$$

3.2. Subprocess $q\gamma \rightarrow \gamma q$

The physical inelastic process $H_1\gamma \rightarrow X\gamma$ related to this subprocess contains a structure function. The Born term is given by:

$$\left. \frac{d\hat{\sigma}}{dt}(\hat{s}, v) \right|_{\text{Born}}^{q\gamma \rightarrow \gamma q} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^4}{\hat{s}} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v^2 - 2v + 2}{1-v} \right) + 2\varepsilon \right]. \quad (47)$$

It is easy to see that:

$$\hat{C}_1 = 0. \quad (48)$$

To determine the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 , we recall Eq. (8). However, for the present physical process, we need just one structure function. Thus, Eq. (8), reduces to:

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_i P_{iq} \otimes \hat{\sigma}^B(i\gamma \rightarrow q\gamma) \right] \quad (49)$$

we deduce that:

$$z = w \quad (50)$$

(z stands for the momentum fraction of the parton i). From Eqs. (49) and (50), and using the fact that for the subprocess $i\gamma \rightarrow q\gamma$ we have:

$$v' = 1 + \frac{\hat{t}'}{\hat{s}'} = 1 + \frac{z\hat{t}}{z\hat{s}} = v \quad (51)$$

we obtain:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} \\ &= \frac{\pi \alpha^2 e_q^4 C_F}{\hat{s} \Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi \mu^2}{\hat{s} v(1-v)} \right)^\varepsilon (1-\varepsilon) \frac{1}{v} \\ & \times \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{1}{v-1} + v-1 \right) - 2\varepsilon \right] \left(\frac{1+w^2}{(1-w)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-w) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Thus,

$$\tilde{C}_1 = \frac{3\pi \alpha^2}{2\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (53)$$

and

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\pi \alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right). \quad (54)$$

The same argument is applied to the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 . In fact, we have only one fragmentation function and therefore, Eq. (9) is reduced to:

$$\tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_i \hat{\sigma}^B(q\gamma \rightarrow i\gamma) \otimes P_{qi} \right]. \quad (55)$$

From the kinematics of this process, we deduce that:

$$z = \frac{x_i}{x_c} = \frac{\hat{t}}{\hat{t}'} = \frac{\hat{u}}{\hat{u}'} = -\frac{\hat{t} + \hat{u}}{\hat{s}} = 1 - v(1-w). \quad (56)$$

By replacing this result in the expression of the splitting function and using the expression of Eq. (9), we get:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = 2\Lambda \frac{(1-\varepsilon)}{\hat{s}v} \left\{ (1-\varepsilon) \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) - 2\varepsilon \right\} \\ & \times C_F \left\{ \frac{1}{(1-w)_+} + \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \delta(1-w) \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

with

$$\Lambda = \frac{\pi \alpha^2 e_q^4}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi \mu^2}{sv(1-v)} \right)^\varepsilon. \quad (58)$$

Consequently:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\pi \alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right) \quad (59)$$

and

$$\tilde{C}_2 = \frac{\pi \alpha^2}{\hat{s}} e_q^4 C_F \frac{1}{v} \left(v-1 + \frac{1}{v-1} \right). \quad (60)$$

Now, the virtual cross-section $\frac{d\sigma}{dv}\Big|_{\text{virt}}^{q\gamma\rightarrow\gamma q}$ can be deduced from that of the subprocess $\gamma\gamma\rightarrow q\bar{q}$ by interchanging $\hat{u}\leftrightarrow\hat{s}$ or equivalently by making the substitution:

$$v\rightarrow\frac{1}{v} \tag{61}$$

to get at the end:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dv}\Big|_{\text{virt}}^{\gamma q\rightarrow\gamma q} &= \frac{\alpha^2\alpha_s(\mu)}{\hat{s}}e_q^4C_F\left\{\left[\frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)}\right)^\varepsilon\right.\right. \\ &\quad \times\left.\left(\frac{-2}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)(2\ln(1-v)-3)\right] \\ &\quad +\frac{1}{v}\left(2\frac{\pi^2}{3}-7\right)-2\pi^2(1-v)-v\left(\frac{\pi^2}{3}+7\right)+4\ln(1-v) \\ &\quad \left.+\left(\frac{1+2(1-v)}{v}\right)\ln v+\frac{v^2+(1-v^2)\ln v}{v}(\ln v-2\ln(1-v))\right\}. \end{aligned} \tag{62}$$

From this result, one deduces the expressions of A' and B' , which lead to:

$$A=A'=\frac{-4\pi\alpha^2e_q^4C_F}{\hat{s}}\left(\frac{1}{v-1}+v-1\right) \tag{63}$$

and

$$B=\frac{\pi\alpha^2e_q^4C_F}{2\hat{s}}\left[\left(-8\ln v+4-\frac{1}{v}\right)\left(\frac{1}{1-v}+1-v\right)+8\right]. \tag{64}$$

The coefficients C_2 and C_3 are determined by replacing A and B by their expressions in the following expressions:

$$C_3=-A \tag{65}$$

and

$$C_2=A\ln D+B. \tag{66}$$

To get the coefficient C_1 , one can use the simplified form of Eq. (17) to obtain:

$$C_1=C_2\ln v+C'-C-\tilde{C}_1(\ln v+\ln(1-v)). \tag{67}$$

Thus, we have to calculate the coefficient C , proportional to $\delta(1-w)$ in the Bremsstrahlung contribution. All the related Bremsstrahlung Feynman unitary diagrams are displayed in Fig. 2. After, simple calculations we obtain:

$$C=\frac{4C_F}{N_c}. \tag{68}$$

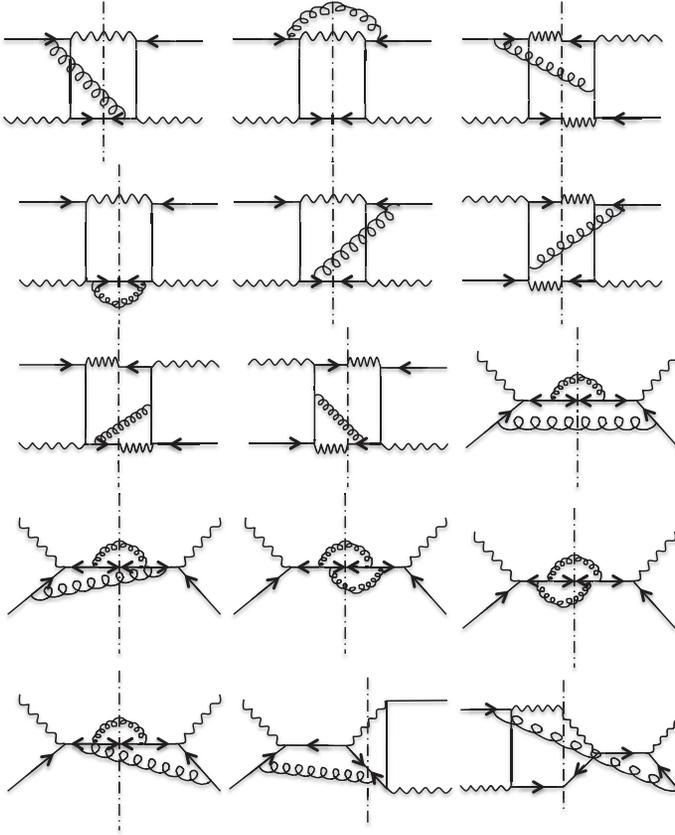


Fig. 2. Dominant Bremsstrahlung unitary diagrams for the physical process $H_1\gamma \rightarrow X\gamma$.

For the C' coefficient, it is determined from the virtual corrections to get:

$$\begin{aligned}
 C' = & \frac{\Delta}{3} \Re e \left\{ \left(\frac{2\pi^2}{3} - 3 + \ln^2 v + \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right) \right) \left(\frac{1}{v-1} + v - 1 \right) \right. \\
 & + 2 - (2 + 3(v-1)) \ln v + \left(2 + \frac{3}{v-1} \right) \ln \left(\frac{v-1}{v} \right) \\
 & \left. + \left(2 + \frac{1}{v-1} \right) \ln^2 v + (1+v) \ln^2 \left(\frac{v-1}{v} \right) \right\} \quad (69)
 \end{aligned}$$

with:

$$\Delta = \frac{\alpha^2 \alpha_s(\mu)}{\hat{s}} e_q^4 C_F. \quad (70)$$

Here, $\Re e$ stands for real part. Finally by replacing the above coefficients by their expressions we obtain C_1 in Eq. (67).

3.3. Subprocess $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$

The physical process with two structure functions $H_1 H_2 \rightarrow \gamma\gamma$ where the subprocess Born term $\frac{d\sigma}{dv}\Big|_{\text{Born}}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}$ is not proportional to α_s and has the following expression:

$$\frac{d\sigma}{dv}\Big|_{\text{Born}}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^4}{N_c \hat{s}} (1 - \varepsilon) \left[(1 - \varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right]. \quad (71)$$

We deduce then:

$$\hat{C}_1 = 0. \quad (72)$$

The absence of fragmentation functions leads to:

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0. \quad (73)$$

To determine the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 we recall Eq. (8):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} \\ = \frac{1}{2} \left[\sum_i P_{iq} \otimes \hat{\sigma}^B(iq \rightarrow \gamma\gamma) + \sum_j P_{qj} \otimes \hat{\sigma}^B(qj \rightarrow \gamma\gamma) \right], \end{aligned} \quad (74)$$

where from the first term of Eq. (74), one gets from the kinematics of the process:

$$z = \frac{x_i}{x_a} = \frac{-u}{s+t} = w \quad (75)$$

and for the second:

$$z = \frac{x_j}{x_b} = -\frac{t}{s+u} = \frac{1-v}{1-vw}. \quad (76)$$

Now, from Eqs. (74)–(76), we obtain:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} \\ = \frac{C_F}{\hat{s}vN_c} \Lambda(1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right] \\ \times \left[\frac{4}{(1-w)_+} + \left(3 + 2 \ln \frac{v}{1-v} \right) \delta(1-w) \right], \end{aligned} \quad (77)$$

where

$$\Lambda = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4}{\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \quad (78)$$

and consequently:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2C_F}{N_c} \Lambda \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (79)$$

and

$$\tilde{C}_2 = \frac{4C_F}{N_c} \Lambda \frac{1}{v} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right). \quad (80)$$

We remind that the virtual contribution which is essential to the determination of the C_2 and C_3 , is the same as that of the subprocess $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$ except for a color factor difference. Consequently the coefficients A , A' and B' have the same expressions as in Eqs. (37)–(39). However, the expression of B change since \tilde{C}_1 in our case does not vanish. We have then:

$$A = -\frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{\hat{s}N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (81)$$

and

$$B = \frac{\pi\alpha^2 e_q^4 C_F}{2\hat{s}N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left[4 - 2\ln v - \frac{1}{2v} \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \right]. \quad (82)$$

Using the expressions of A and B , one deduces the coefficients C_2 and C_3 . Now, to calculate the remaining coefficient C_1 , we notice that we do not have from the Bremsstrahlung unitary diagrams of the type giving dominant contributions. Thus,

$$C = 0 \quad (83)$$

and C_1 takes the form:

$$C_1 = C_2 \ln v + C' - \tilde{C}_1 (\ln v + \ln(1-v)). \quad (84)$$

3.4. Subprocess $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$

In this case, for the inelastic process $H_1 H_2 \rightarrow \gamma X$, we have no fragmentation but two structure functions and therefore:

$$\tilde{\tilde{C}}_1 = \tilde{\tilde{C}}_2 = 0. \quad (85)$$

The Born term $\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(s, v)|_{\text{Born}}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma g}$ for this subprocess is given by:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v)|_{\text{Born}}^{q\bar{q} \rightarrow \gamma g} = \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}N_c} (1-\varepsilon) \left[(1-\varepsilon) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) - 2\varepsilon \right]. \quad (86)$$

Contrary to the previous applications, here, the Born term is proportional to α_s . Thus,

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6}. \quad (87)$$

To determine the coefficients \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 for this subprocess, one has to notice that the initial state is the same as that of the subprocess $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$. So the argument of the splitting function z , is replaced in the first term of Eq. (74) by:

$$z = \frac{-\hat{u}}{\hat{s} + \hat{t}} = w \quad (88)$$

and in the second term by:

$$z = \frac{1-v}{1-vw}. \quad (89)$$

The result is also the same as in Eqs. (79) and (80) up to a color factor:

$$\tilde{C}_1 = \frac{\pi C_F^2 \alpha_s}{\hat{s} v N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{3}{2} + \ln \frac{v}{1-v} \right) \quad (90)$$

and

$$\tilde{C}_2 = \frac{2\pi C_F^2 \alpha_s}{\hat{s} v N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right). \quad (91)$$

The virtual contribution $\frac{d\hat{\sigma}^{\text{virt}}}{dv}(s, v)|^{q\bar{q} \rightarrow g\gamma}$ of this subprocess is given by:

$$\begin{aligned} & \frac{d\hat{\sigma}^{\text{virt}}}{dv}(s, v) \Big|^{q\bar{q} \rightarrow g\gamma} \\ &= \frac{\alpha e_q^2 \alpha_s^2 (\mu^2)}{\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \left\{ \left\{ -(2C_F + N_c) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \frac{1}{\varepsilon^2} \right. \right. \\ & \quad + \left[(2C_F + N_c) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) \frac{1}{\varepsilon} \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \right] \Xi \frac{1}{\varepsilon} + \Xi \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) \right\} \\ & \quad - (2C_F - N_c) \left[\left(\frac{1}{v(1-v)} + \frac{1-v}{v} \right) \left(-\frac{1}{2} \ln^2(2-v) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{1}{2-v} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1+v^2}{v(1-v)} \left(-\frac{1}{2} \ln^2(1+v) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{1}{1+v} \right) \right) \right] \\ & \quad + N_c \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left[\frac{1}{2} \ln^2(2-v) + \frac{1}{2} \ln^2(1+v) + L_{i_2} \left(\frac{1}{2-v} \right) + L_{i_2} \left(\frac{1}{1+v} \right) \right] \\ & \quad + \frac{C_F}{N_c} \left\{ \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \left(\frac{4C_F - N_c}{6} \pi^2 - 8C_F - \frac{N_c}{2} \ln^2 v(1-v) \right) \right. \\ & \quad \left. + C_F \left(\frac{1}{v(1-v)} - 2 \right) + \left(C_F \frac{2+v}{1-v} - N_c \right) \ln(1-v) + \left(C_F \frac{3-v}{v} - N_c \right) \ln v \right\}, \quad (92) \end{aligned}$$

where

$$\Xi = 3C_F + \frac{11}{N_C} + N_C \ln \frac{1}{v(1-v)} - \frac{2}{3} T_R, \quad (93)$$

$$T_R = \frac{1}{2} N_f \quad (94)$$

and the dilogarithm L_{i_2} is defined as:

$$L_{i_2} = - \int_0^x \frac{dz}{z} \ln(1-z). \quad (95)$$

Now, A and B take the final following forms:

$$A = -(2C_F + N_C) \frac{2\pi C_F \alpha \alpha_s}{\hat{s} v N_c} \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \quad (96)$$

and

$$B = \frac{2\pi C_F \alpha \alpha_s}{\hat{s} v N_c} \left[(2C_F + N_C) \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} + 2 \right) - \left(\frac{v}{1-v} + \frac{1-v}{v} \right) \Xi \right]. \quad (97)$$

Finally, we get C_2 and C_3 . Regarding the Bremsstrahlung contribution, we notice that there are no unitary Bremsstrahlung diagrams of the dominating type and therefore:

$$C = 0. \quad (98)$$

From the expression of the coefficient C' coming from the virtual contribution, one can determine C_1 .

3.5. Subprocess $qg \rightarrow \gamma q$

Notice that the related physical elastic process $H_1 H_2 \rightarrow \gamma H_4$ contains two structure and one fragmentation functions. The Born term and virtual corrections (up to an average, a helicity, a color and spin factors) can be obtained from that of the subprocess $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ by making the change $\hat{s} \leftrightarrow \hat{u}$ or equivalently by using the substitution $v \leftrightarrow \frac{1}{v}$. Again, since the Born term is of order α_s ,

$$\left. \frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v) \right|_{Born}^{qg \rightarrow \gamma q} \equiv \frac{d\hat{\sigma}}{dv}(\hat{s}, v) = \frac{2\pi \alpha \alpha_s e_q^2}{\hat{s}} (1 - \varepsilon) \left[(1 - \varepsilon) \left(\frac{2 - 2v + v^2}{1 - v} \right) + 2\varepsilon \right] \quad (99)$$

one deduce that:

$$\hat{C}_1 = \frac{11N_c - 2N_f}{6}. \quad (100)$$

The expression giving \tilde{C}_1 and \tilde{C}_2 for this subprocess is:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \delta(1-w) + \tilde{C}_2 \frac{1}{(1-w)_+} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_q P_{qq} \otimes \hat{\sigma}^B(qg \rightarrow \gamma q) + \sum_j P_{gg} \otimes \hat{\sigma}^B(qj \rightarrow \gamma q) \right] = T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (101)$$

and that of $\tilde{\tilde{C}}_1$ and $\tilde{\tilde{C}}_2$ is:

$$\tilde{\tilde{C}}_1 \delta(1-w) + \tilde{\tilde{C}}_2 \frac{1}{(1-w)_+} = \frac{1}{2} \left[\sum_q \hat{\sigma}^B(qg \rightarrow id) \otimes P_{qq} \right] = T_3 \quad (102)$$

the argument of the splitting function z , is replaced in the first term of Eq. (101) by $z = 1 - v + vw$. Here

$$T_1 = -\frac{1}{2\hat{s}vw}P_{qq}(w)\frac{d\hat{\sigma}}{dv}(w\hat{s}, v), \quad (103)$$

$$T_2 = -\frac{1}{2\hat{s}(1-vw)}P_{qq}\left(\frac{1-v}{1-vw}\right)\frac{d\hat{\sigma}}{dv}\left(\frac{1-v}{1-vw}\hat{s}, vw\right) \quad (104)$$

and

$$T_3 = -\frac{1-v+vw}{\hat{s}}P_{qq}\left(\frac{1}{1-v+vw}\right)\frac{d\hat{\sigma}}{dv}\left(\hat{s}, \frac{vw}{1-v+vw}\right). \quad (105)$$

The virtual contribution

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\hat{\sigma}^{\text{virt}}}{dv}(\hat{s}, v) \right|^{qq \rightarrow \gamma q} \\ &= \frac{\alpha e_q^2 \alpha_s^2(\mu^2)}{2\hat{s}} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\hat{s}v(1-v)} \right)^\varepsilon \\ & \times \left\{ \left\{ -(2C_F + N_c) \left(\frac{1}{1-v} + 1-v \right) \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{8} + 2 + \ln^2 v \right] \right. \right. \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \left[(2C_F + N_c) \left(\frac{1}{1-v} - 1-v \right) - \left(\frac{1}{1-v} + 1-v \right) \Theta \right] + \Theta \left(\frac{1}{1-v} - v - 1 \right) \left. \right\} \\ & + 2 \left\{ \left(\frac{1}{1-v} + 1-v \right) \left(\frac{4C_F - N_c}{6} \pi^2 - 8C_F - \frac{N_c}{2} \ln^2 v(1-v) \right) \right. \\ & + C_F \left(\frac{v^2}{1-v} + 2 \right) - \left(C_F \frac{2v+1}{1-v} - N_c \right) \ln \left(\frac{1-v}{v} \right) - (C_F(3v-1) - N_c) \ln v \\ & + (2C_F - N_c) \left[\left(\frac{v^2}{(1-v)} + 1-v \right) \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{2v-1}{v} \right) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{v}{2v-1} \right) \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1+v)^2}{(1-v)} \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+v}{v} \right) + L_{i_2}(1) - L_{i_2} \left(\frac{v}{1+v} \right) \right) \right] \right. \\ & \left. - N_c \left(\frac{1}{1-v} + 1-v \right) \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{2v-1}{v} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+v}{v} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + L_{i_2} \left(\frac{v}{2v-1} \right) + L_{i_2} \left(\frac{v}{1+v} \right) \right] \right\}, \quad (106) \end{aligned}$$

where

$$\Theta = 3C_F + \frac{11}{N_C} - N_C \ln(1-v) - \frac{2}{3}T_R. \quad (107)$$

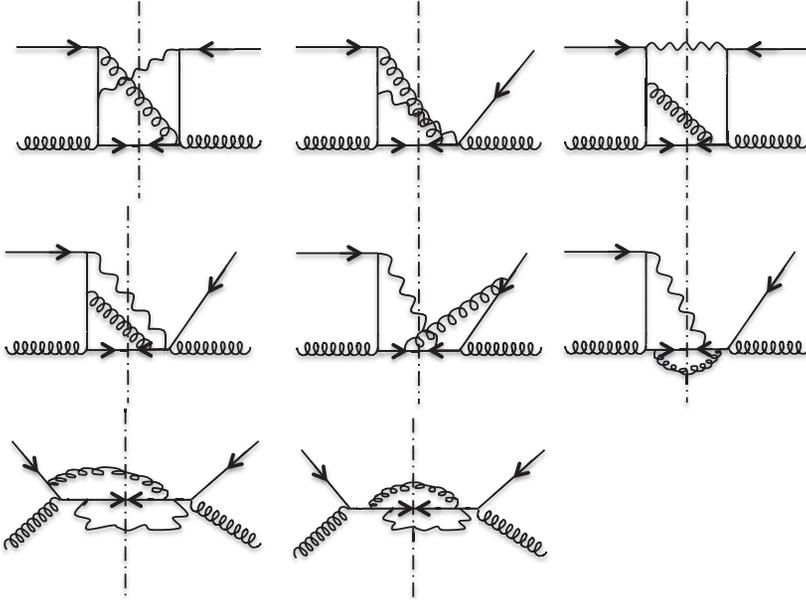


Fig. 3. Dominant Bremsstrahlung unitary diagrams for the physical process $H_1H_2 \rightarrow \gamma H_4$.

Straightforward simplifications lead to:

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(v - 1 + \frac{1}{v-1} \right), \tag{108}$$

$$\tilde{C}_2 \propto \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(v - 1 + \frac{1}{v-1} \right) \left(\frac{3}{2} - \ln(1-v) \right), \tag{109}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \left(\ln v + \frac{3}{2} \right) \left(v - 1 + \frac{1}{v-1} \right) \tag{110}$$

and

$$\tilde{\tilde{C}}_2 = \frac{2\pi\alpha\alpha_s e_q^2 C_F}{\hat{s}} \frac{1}{v} \left(v - 1 + \frac{1}{v-1} \right). \tag{111}$$

To get the coefficients C_2 and C_3 , we have to determine first the coefficients A and B by replacing v by $\frac{1}{v}$ in the expressions in Eqs. (96)–(97) of the subprocess $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ after multiplying by the factor $\frac{3}{2}$. Now, to get the coefficient C of the dominant Bremsstrahlung terms and from the unitary Bremsstrahlung diagrams of Fig. 3, one can show that the square of the transition amplitude $|M|_{\text{Brems}}^2$ has the form:

$$|M|_{\text{Brems}}^2 \simeq \frac{1}{a_4} \beta_4 + \frac{1}{a_1 a_4} \beta_{14} + \frac{1}{a_2 a_4} \beta_{24}, \tag{112}$$

where a_1 , a_2 and a_4 are defined in Ref. 6. After the three-body phase space integration,^{14–16} we obtain

$$\int_{\text{three-body phase space}} \overline{|M|^2}_{\text{Bremss}} = \beta_4 J_4 + \beta_{14} J_{14} \quad (113)$$

with

$$\beta_4 = 16(\kappa + \eta) \quad (114)$$

and

$$\beta_{14} = 8sv\kappa \left(v - 1 + \frac{1}{v-1} \right). \quad (115)$$

Here

$$\eta = \eta^* = e^2 g^4 \sum_a \text{tr}(T^a T^a) \sum_b \text{tr}(T^b T^b) \quad (116)$$

and

$$\kappa = \kappa^* = e^2 g^4 \sum_{ab} \text{tr}(T^a T^b T^a T^b) \quad (117)$$

(T^a are the $SU(3)$ generators in the fundamental representation). Notice that the terms containing $\frac{1}{a_2 a_4}$ (i.e. β_{24}) are proportional to the pure imaginary factor ξ , given by:

$$\xi = e^2 g^4 \sum_{ab} \text{tr}(T^a T^b T^c) f^{abc} = -\xi^*. \quad (118)$$

Thus, β_{24} vanishes. Tedious but straightforward calculations give:

$$C \approx -35.55. \quad (119)$$

Similar procedure can be applied to determine the coefficient C' , and finally, we deduce the coefficient C_1 .

4. Numerical Results and Conclusions

Throughout this paper and using the soft and/or collinear gluon approximation initiated in Refs. 1–5, and revisited in Ref. 6, and in order to show the efficiency and the rapidity in the evaluation of the various dominant terms of the QCD HOC (coming from the Bremsstrahlung), we have applied the prescription and techniques of this approximation to many subprocesses namely: $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$, $\gamma q \rightarrow \gamma q$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma q$ and $qg \rightarrow q\gamma$. The prescription consists to identify exactly the corresponding unitary diagrams among hundreds of terms and finally use few simple integral results to determine the related amplitudes. This technique is very useful in the sense that it reduces the enormous calculation, gives analytical expressions, helps to get an idea of the size of the HOC, their sign and test the convergence of the perturbative series expansion. Possible extensions of this method to NNLO, heavy quarks and Higgs production, supersymmetric processes, etc. are under investigation.

Recently measurement of the inclusive isolated prompt photon cross-section in pp (respectively $p\bar{p}$) collisions at LHC (respectively Tevatron) using ATLAS and CMS (respectively CDF) detectors was presented.¹⁷⁻²⁰ The measurement covers certain range of pseudorapidity η_γ and transverse energy E_T^γ as well as the integrated luminosity (2.5 fb^{-1} for CDF, 4.6 fb^{-1} for ATLAS, 36 pb^{-1} for CMS). Moreover, in order to reduce contamination from neutral meson decays, the low E_T^γ trigger requires photon clusters to be isolated ($E_T^{\text{iso}} < 2.0 \text{ GeV}$ for CDF, $E_T^{\text{iso}} < 4.7 \text{ GeV}$ for ATLAS, $E_T^{\text{iso}} < 5.0 \text{ GeV}$ for CMS) and extra energy inside a cone of radius $R = \sqrt{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\eta)^2} = 0.4$ (ϕ is the azimuthal angle) and the cluster was required to be less than 10% of the energy of the cluster. The statistical, systematic, scale, pdf's and α_s uncertainties are also taken into account.

As a test of our revisited approximate soft-gluon approach, we have made a comparison with the ATLAS, CMS and CDF experimental data for the inclusive isolated direct photon production. Figure 4 displays the ratio $R = \frac{d\sigma/dE_T^\gamma(\text{soft})}{d\sigma/E_T^\gamma(\text{ATLAS})}$ where $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{soft})$ stands for the theoretical differential cross-section using the revised approximate soft-gluon approach and $\frac{d\sigma}{E_T^\gamma}(\text{ATLAS})$ that of the ATLAS collaboration as a function of the photon transverse energy E_T^γ over the range of energy $100 \text{ GeV} \lesssim E_T^\gamma \lesssim 1 \text{ TeV}$ and pseudorapidity $|\eta_\gamma| < 1.37$. We have used the MRST 2007 PDF's and the renormalization and factorization scales μ_R and μ_F are all set to E_T^γ . To test their variation effects on the stability of our differential cross-section, we have varied them independently from $\frac{E_T^\gamma}{2}$ and $2E_T^\gamma$ and noticed that the result is almost stable (a small change less than 5%). The differential cross-section changes from $1.81 \times 10^{-1} \text{ pb/GeV}$ to $1.63 \times 10^{-1} \text{ pb/GeV}$, if $E_T^\gamma \approx 197 \text{ GeV}$. We remind that in the pp collision, the $qg \rightarrow \gamma q$ subprocess contribution dominates because of the gluon PDF inside the proton. We have noticed that the ratio R decreases from ~ 1.11 to ~ 1 in the energy range $112.2 \text{ GeV} \lesssim E_T^\gamma \lesssim 856.1 \text{ GeV}$. Moreover, there is a small deviation (by $\sim 11\%$) from the experimental data at lower values of E_T^γ ($\lesssim 112 \text{ GeV}$) but a very good agreement at larger values ($\gtrsim 856 \text{ GeV}$). The reason is that at small transverse momentum function $x_T = \frac{2E_T^\gamma}{\sqrt{s}}$ the differential cross-section is very sensitive to the gluon distribution and other effects can take place. In the overall, our results are in a good agreement with those of ATLAS data within the experimental uncertainties mentioned above.

Figure 5 is the same as in Fig. 4 but with the range of energy $100 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 600 \text{ GeV}$ and $1.52 < |\eta_\gamma| < 2.37$. The ratio R decreases from 1.13 to 1.01 when E_T^γ varies from 112.5 GeV to 550 GeV. For example at $E_T^\gamma = 162.5 \text{ GeV}$ the difference between the theoretical (within our approach) and experimental data are about 6%. Figure 6 is the same as in Fig. 4 but with CMS experiment where the range of energy $25 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 400 \text{ GeV}$ and $2.1 < |\eta_\gamma| < 2.5$. The ratio R decreases from ~ 1.11 to ~ 1.008 , when E_T^γ varies from 95.5 GeV to 367.03 GeV. For example at $E_T^\gamma = 169.33 \text{ GeV}$ the difference between $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{soft})$ and $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}(\text{CMS})$ is about 2.8%. Figure 7 is the same as in Fig. 4 but with CDF experiment (Tevatron) where the range of energy $50 \text{ GeV} < E_T^\gamma < 400 \text{ GeV}$ and $|\eta_\gamma| < 1.0$.

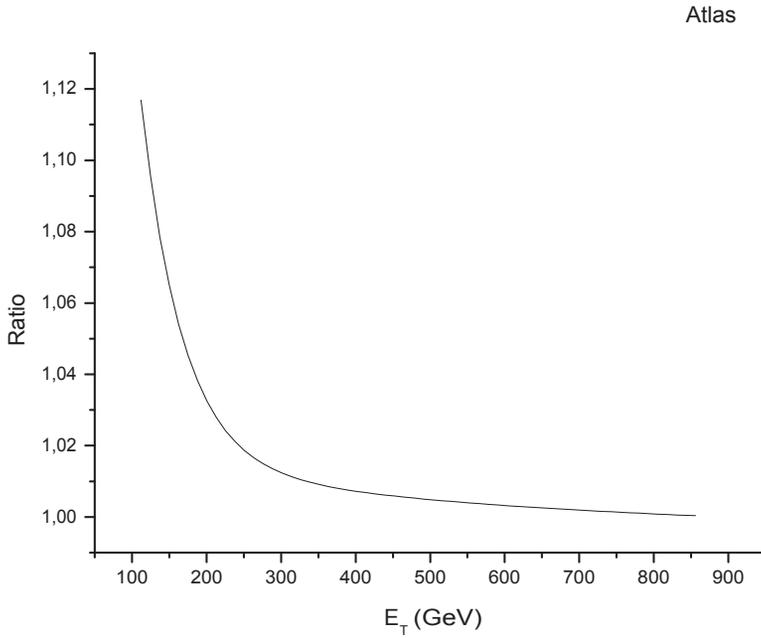


Fig. 4. Ratio of the differential cross-section $\frac{d\sigma}{dE_T}$ of the theoretical soft gluon approach over E_T^γ that of the LHC ATLAS experiment data with $|\eta_\gamma| < 1.37$.

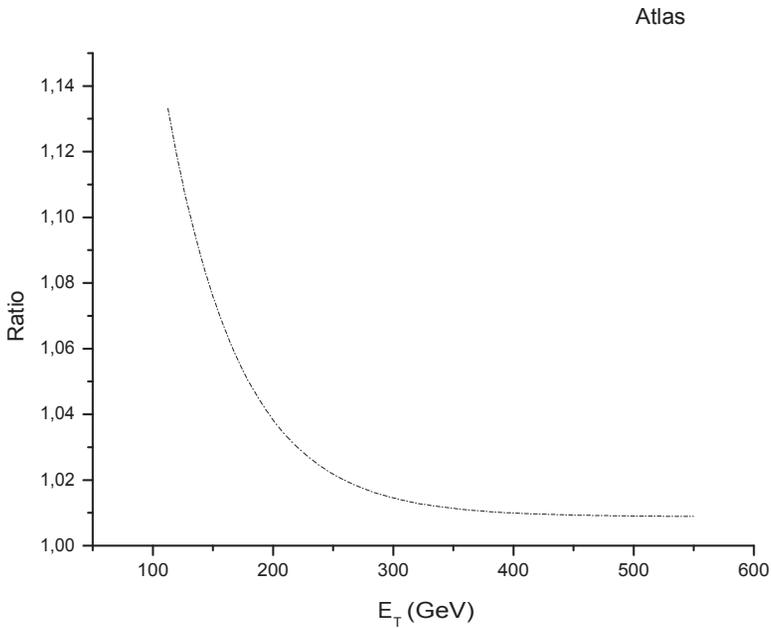


Fig. 5. Same as Fig. 4. but with $1.52 < |\eta_\gamma| < 2.37$.

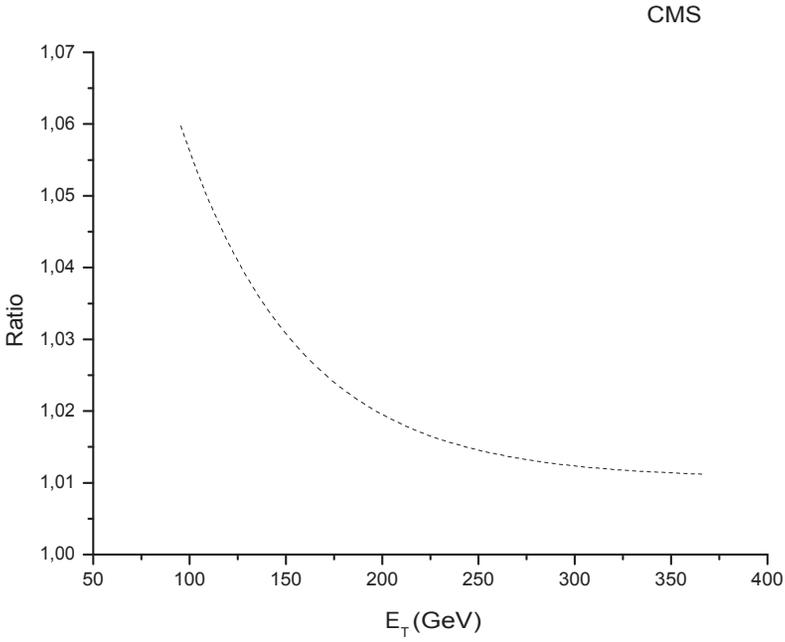


Fig. 6. Same as Fig. 4 but for LHC CMS experimental data with $2.1 < |\eta_\gamma| < 2.5$.

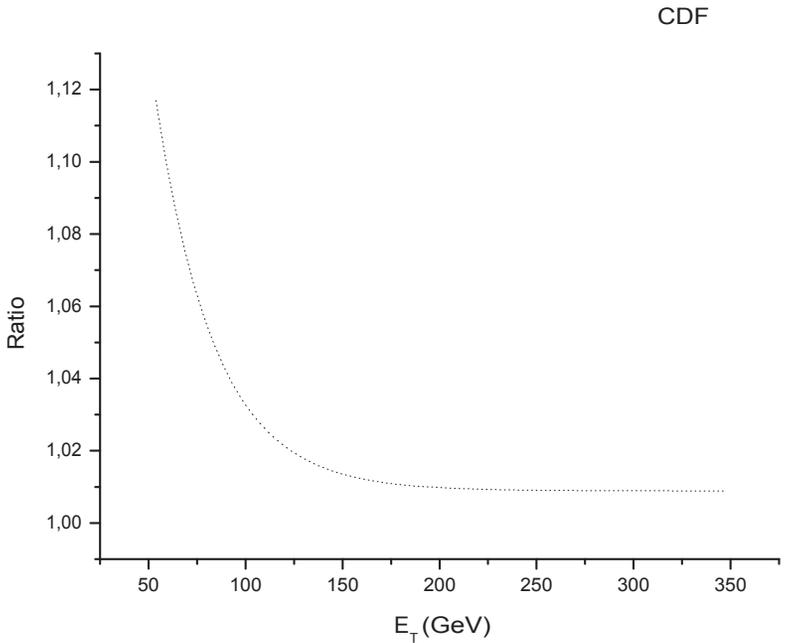


Fig. 7. Same as Fig. 4 but for Tevatron CDF experimental data with $|\eta_\gamma| < 1.0$.

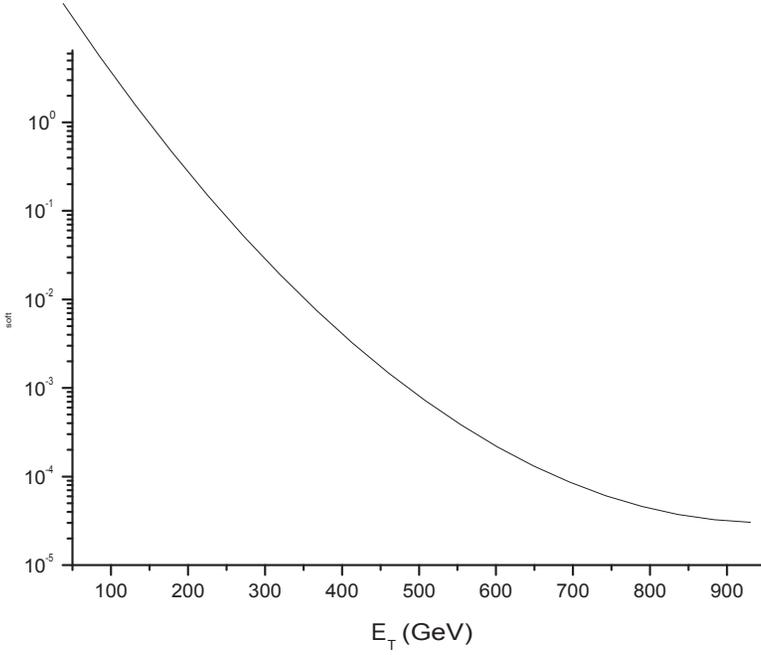


Fig. 8. The differential cross-section $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ of the theoretical soft-gluon approach over E_T^γ (denoted by (σ_{soft}) with $\sqrt{s} = 7$ TeV and $|\eta_\gamma| < 1.37$ as a function of E_T^γ .

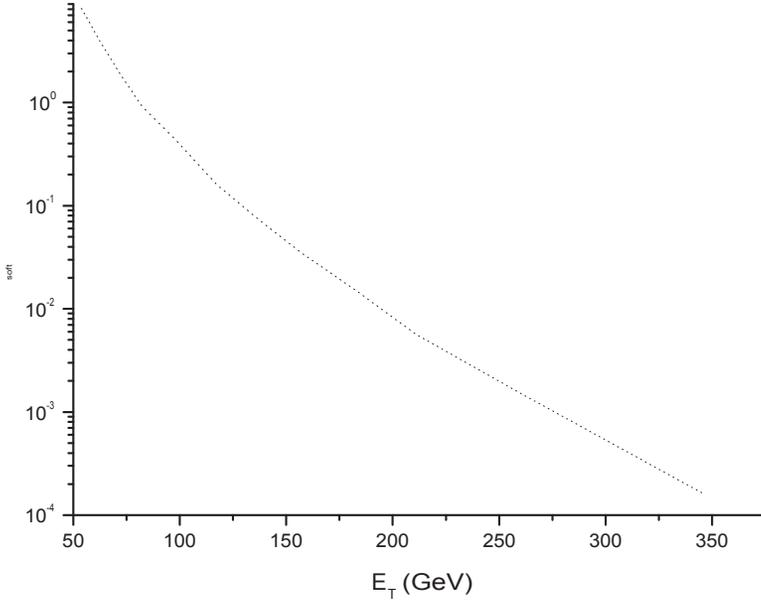


Fig. 9. Same as Fig. 8 but with $\sqrt{s} = 1.96$ TeV and $|\eta_\gamma| < 1.0$.

The ratio R decreases from 1.11 to 1.0058 when E_T^γ varies from 53.8 GeV to 346.67 GeV. For example at $E_T^\gamma = 82.38$ GeV the difference between $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (soft) and $\frac{d\sigma}{dE_T^\gamma}$ (CDF) is about 4.25%. Notice that at the Tevatron the subprocess $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$ contribution dominates. Figures 8 and 9 represent the theoretical cross-section within our approximate revisited approach and the ATLAS data (112.2 GeV $\lesssim E_T^\gamma \lesssim$ 856.1 GeV and $|\eta_\gamma| < 1.37$) and CDF data (53.8 GeV $\lesssim E_T^\gamma \lesssim$ 346.67 GeV and $|\eta_\gamma| < 1.0$).

It is also worth to mention that in all cases, our results are above the experimental data. We conclude that our revisited approximate approach give a fairly good results for the LHC and Tevatron experimental data concerning the isolated prompt photon production. Further physical application are under study.

Acknowledgments

We are very grateful to the Algerian Ministry of Higher Education and Research and DGRSDT for the financial support. This work is supported by CNEPRU under research contract number D00920110030.

References

1. A. P. Contogouris, N. Mebarki and S. Papadopoulos, *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 1951 (1990).
2. A. P. Contogouris, N. Mebarki and H. Tanaka, Two general assertions in PQCD and supersymmetry, in *Proc. 10th Montreal-Rochester-Syracus Toronto, Meeting on High Energy Physics*, Toronto University Canada, 9–10 May 1988 (World Scientific, 1988).
3. A. P. Contogouris and S. Papadopoulos, *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 901 (1990).
4. N. Mebarki and O. Abbes, *Acta Phys. Pol. B* **23**, 831 (1992).
5. O. Abbes and N. Mebarki, *Acta Phys. Pol. B* **8**, 1333 (1995).
6. N. Mebarki and H. Boutine, *Chin. J. Phys. A* **46**, 636 (2008).
7. J. F. Owens, *Phys. Rev. D* **30**, 943 (1984).
8. D. W. Duke and J. F. Owens, *Phys. Rev. D* **30**, 49 (1984).
9. R. K. Ellis, M. A. Furman, H. E. Haber and I. Hinchliffe, *Nucl. Phys. B* **173**, 397 (1980).
10. M. Dine and J. R. Sapirstein, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 668 (1979).
11. K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B* **85**, 227 (1979).
12. A. P. Contogouris, N. Mebarki and H. Tanaka, *J. Phys. G* **14**, 663 (1988).
13. F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52**, 54 (1937).
14. P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontannaz and D. Schiff, *Z. Phys. C* **29**, 423 (1985).
15. P. Aurenche, R. Baier, A. Douiri, M. Fontannaz and D. Schiff, *Nucl. Phys. B* **286**, 553 (1987).
16. P. Aurenche, R. Baier, M. Fontannaz and D. Schiff, *Nucl. Phys. B* **297**, 661 (1988).
17. ATLAS Collab. (G. Aad *et al.*), *Phys. Rev. D* **89**, 052004 (2014).
18. ATLAS Collab. (G. Aad *et al.*), *Nucl. Phys. B* **875**, 483 (2013).
19. CMS Collab. (S. Chatrchyan *et al.*), *Phys. Rev. D* **84**, 052011 (2011).
20. CDF Collab. (T. Aaltonen *et al.*), *Phys. Rev. D* **80**, 111106 (2009).

Direct photon production in NCG QCD at the tevatron and LHC

M. R. Bekli, N. Mebarki, and I. Chadou

Citation: *AIP Conf. Proc.* **1444**, 370 (2012); doi: 10.1063/1.4715456

View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4715456>

View Table of Contents: <http://proceedings.aip.org/dbt/dbt.jsp?KEY=APCPCS&Volume=1444&Issue=1>

Published by the [American Institute of Physics](#).

Related Articles

Consistent anomalies in translation-invariant noncommutative gauge theories

J. Math. Phys. **53**, 042303 (2012)

Noncommutative deformation of spinor zero mode and Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin construction

J. Math. Phys. **53**, 022303 (2012)

Toward an axiomatic formulation of noncommutative quantum field theory

J. Math. Phys. **52**, 032303 (2011)

Free-fall in a uniform gravitational field in noncommutative quantum mechanics

J. Math. Phys. **51**, 102106 (2010)

On the existence of certain axisymmetric interior metrics

J. Math. Phys. **51**, 082504 (2010)

Additional information on AIP Conf. Proc.

Journal Homepage: <http://proceedings.aip.org/>

Journal Information: http://proceedings.aip.org/about/about_the_proceedings

Top downloads: http://proceedings.aip.org/dbt/most_downloaded.jsp?KEY=APCPCS

Information for Authors: http://proceedings.aip.org/authors/information_for_authors

ADVERTISEMENT



AIP Advances

Submit Now

Explore AIP's new
open-access journal

- Article-level metrics now available
- Join the conversation! Rate & comment on articles

Direct Photon Production in NCG QCD at the Tevatron and LHC

M.R.BEKLI, N.MEBARKI and I.CHADOU

*Laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique, Mentouri University,
Constantine, Algeria.*

Abstract. The minimal NCSM contribution of a direct photon production at the Tevatron and LHC is obtained and the phenomenological implications are discussed. Some behaviors are discussed. It is shown that the effect of the space-time noncommutativity becomes important at very high energies leading to a violation of unitarity.

Keywords: QCD, Minimal NCSM, Tevatron, LHC.

PACS: 12.38.-t, 13.85.-t, 12.60.-i

INTRODUCTION

During the last two decades, noncommutative geometry has played an important role in physics and many interesting models in particles physics have been proposed [1]-[9]. The idea that coordinates may not commute can be traced back to Heisenberg and Snyder. Lately, noncommutative (NC) coordinates appeared in string theory. It was argued that the D-brane world-volume becomes noncommutative in the presence of a nonzero background B-field. A lot of work has been done during the last decades using noncommutative geometry. A noncommutative (NC) structure of the space-time can be defined by:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i \theta_{\mu\nu} = i \frac{C_{\mu\nu}}{\Lambda_{NC}^2} \quad (1)$$

where $\theta_{\mu\nu}$ is a real antisymmetric tensor and the noncommutativity (NCG) parameter Λ_{NC} characterizes the threshold where noncommutative effects become relevant. The approach to the noncommutative field theory based on the Moyal product and Seiberg-Witten maps allows the generalization of the standard model to the case of noncommutative space-time. Now, in order that field theories with space-time noncommutativity do not have a unitary problem of the S-matrix, we should only consider space-space noncommutativity [10]. In what follows, we use the mathematical formalism of refs.[11],[12],[13] and the Minimal noncommutative standard model (NCSM) Feynmann rules of ref.[13] where the strong interactions are also included.

NUMERICAL ANALYSIS

The emitted photon may be produced directly in a hard process and/or from the fragmentation process. The latter process involves the parton-to-photon fragmentation functions which are not very well known. In any case, the fragmentation process contributes substantially only at low P_T region.

The main perturbative contribution to the prompt photon production at the Tevatron $p\bar{p} \rightarrow \gamma + X$ (resp. LHC $pp \rightarrow \gamma + X$) proceeds at the lowest order via the quark annihilation (resp. Compton scattering) subprocess. The remaining contribution is the Compton scattering (resp. quark annihilation) subprocess. The gluon-gluon contribution within NCSM is highly suppressed via a box diagram. The corresponding dominant Feynman diagrams are shown in Figures (1-a) and 1-b). Notice the occurrence of an extra diagram, in the annihilation subprocess which has no equivalent in the commutative QCD.

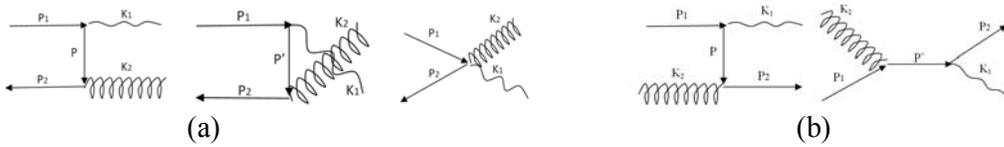


FIGURE 1. Feynman diagrams contributing to $pp \rightarrow \gamma+X$. (a) Annihilation subprocess, (b) Compton scattering subprocess.

We have computed the Born noncommutative differential cross section denoted by $(d\sigma/d\Omega)_A$ and $(d\sigma/d\Omega)_C$ for the annihilation and Compton subprocesses respectively at the LHC in arbitrary units (UA) as a function of the center-of-mass (c.m) energy \sqrt{s} , and azimuthal angle φ . We have fixed the value of the NCG parameter $\Lambda_{NC} \approx 5TeV$, the pseudo-rapidity $y = 0$ or equivalently the center of mass polar angle $\theta_{cm} = \pi/2$. We have considered the only non vanishing component C_{13} normalized to 1. Of course our qualitative results and behaviour of the cross section do depend on the choice of the polar angle θ_{cm} and other non vanishing components C_{ij} . Now, using FeynCalc, adjusted with Mathematica, the numerical results for $(d\sigma/d\Omega)_A$ and $(d\sigma/d\Omega)_C$ are displayed in Figure 2.

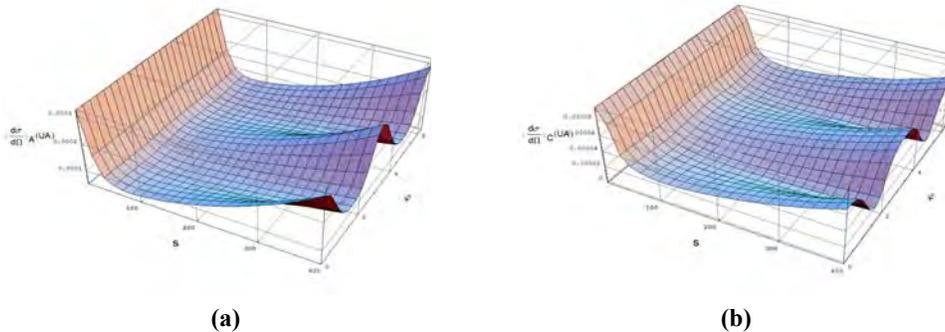


FIGURE 2. Dependence of the differential NCSM cross section on the azimuthal angle φ and c.m energy \sqrt{s} for $\Lambda_{NC} \approx 5TeV$, $\theta_{cm} = \pi/2$ and $C_{13} = 1$.

As it is clear from the figures that the prominent signal of the space-time non commutativity at the LHC is the appearance of an azimuthally-dependent cross section, which is not present within the standard QCD. Moreover, and a part of the kinematical regions, the pick of the cross section depends strongly on the choice of the non commutativity parameters C_{ij} . Moreover, as it is shown in Figure 2, the cross sections decrease than increase as a function of the collision energy, showing a bad behavior affecting the unitarity of the S-matrix and non applicability of the perturbation theory. To solve this problem, we have to search for a lower bound of the non commutativity Λ_{NC} depending on the collision energy \sqrt{s} . In fact, this limit is a subprocess dependent. The values found are $\Lambda_C^2 > 0,235 \text{ s}$ and $\Lambda_A^2 > 0,335 \text{ s}$ for the Compton and annihilation subprocesses respectively.

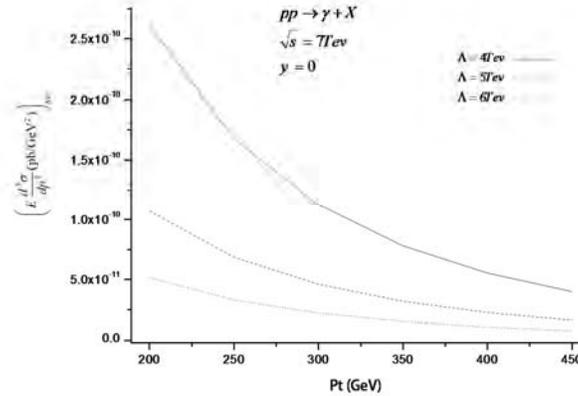


FIGURE 3. Born term noncommutative part of the cross section for $pp \rightarrow \gamma + X$.

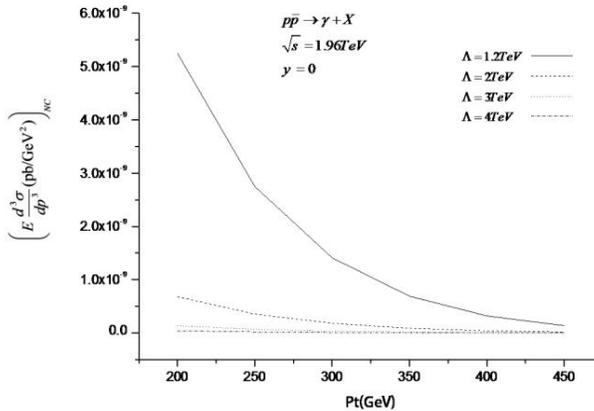


FIGURE 4. Born term noncommutative part of the cross section for $p\bar{p} \rightarrow \gamma + X$.

It is worth to mention that, we have assumed the applicability of the QCD factorization theorem in the context of NCG. and take for simplicity the

renormalization and factorization scales μ and Q such that $\mu = Q = P_T$ (P_T is the photon transverse momentum). In what follows, we use the LO parton distribution functions (PDFs) MSTW2008 [15]. Figure 3 represents the noncommutative part of the Born contribution to the differential cross section $Ed^3\sigma/d^3p$ of the process $pp \rightarrow \gamma + X$ as a function of the transverse momentum P_T at the energy $\sqrt{s} = 7TeV$ and pseudo rapidity $y = 0$ for three different physical values of the NCG scale Λ_{NC} (solid line $\Lambda_{NC} = 4TeV$, dashed line $\Lambda_{NC} = 5TeV$ and dotted line $\Lambda_{NC} = 6TeV$). Figure 4 displays the noncommutative part of the Born contribution to the differential cross section $Ed^3\sigma/d^3p$ of the process $p\bar{p} \rightarrow \gamma + X$ at the Tevatron energy $\sqrt{s} = 1.96TeV$ as a function of the transverse momentum P_T and pseudo rapidity $y = 0$ for four different physical values of the NCG scale Λ_{NC} (1.2, 2, 3 and 4 TeV). The behavior of the cross sections for a fixed \sqrt{s} is quite expected since the NCG cross section is $\propto 1/\Lambda_{NC}^4$ (More details and comparison with higher order corrections is under investigation).

CONCLUSION

Qualitative results concerning the cross section of the direct photon production in the context of NCSM model for both $pp \rightarrow \gamma + X$ and $p\bar{p} \rightarrow \gamma + X$ are discussed. It is shown that in order to avoid the bad behavior of the cross sections a lower limit which is a subprocess dependent has to be imposed on the NCG parameter. The main behavior of the NCG contribution to the cross section is its azimuthal dependence which can be a good signal to the new physics.

ACKNOWLEDGEMENT

We are very grateful to the Algerian Ministry of education and research, DGRSDT and ANDRU for the financial support.

REFERENCES

1. T. Schücker and J.M. Zylinski, *J. Geom. Phys.* **16**, 207-236 (1995).
2. D. Kastler and T.Schucker, *J.Geom.Phys.* **24**, 1-19 (1997).
3. A. Chamseddine and A.Connes, *Phys.Rev.Lett.* **77**, 4868-4871 (1996).
4. A. Chamseddine and A.Connes, *Fortschritte der Physik* **58**, 553-600 (2010).
5. S. Zaim , A. Boudine , N. Mebarki and M. Moumni, *Rom.J.Phys.***53**, 445-462 (2008).
6. N. Mebarki, M. Harrat and M Boussahel, *Int. J. Mod.Phys.A***22**, 6279-6305 (2007).
7. N. Mebarki and M. Harrat, *Electron.J.Theor.Phys.***5**, 41-64 (2008).
8. M.Boussahel and N.Mebarki, *Int. J. Mod. Phys. A***26**, 873-909 (2011).
9. N. Mebarki, F. Khelili and O. Benabbes, *Electron.J.Theor.Phys.***6**, 5–28 (2009).
10. J. Gomis and T. Mehen, *Nucl. Phys. B* **591**, 265–276 (2000).
11. X. Calmet, B. Jurčo, P.Schupp, J. Wess and M. Wohlgenant, *Euro. Phys. J. C* **23**, 363-376 (2002)
12. B. Jurčo, L. Möller, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *Eur. Phys. J. C* **21**, 383–388 (2001)

13. B. Melić, K.P. Kumerički, J. Trampetić, P. Schupp and M. Wohlgenannt, *Eur. Phys. J. C* **42**, 499-504 (2005).
14. N. Mebarki, "Beyond the Standard Model: Non Commutative Geometry Approach and LHC Signatures" in UAE-CERN Workshop High Energy Physics and Applications 2007, edited by J. Ellis and al AIP Conference Proceedings 1006, American Institute of Physics, 2008 pp.130-134.
15. A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, *Eur. Phys. J. C* **63**, 189-285 (2009).