

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE CONSTANTINE 1  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

**THESE**

**Présentée pour obtenir le diplôme de  
DOCTORAT EN SCIENCE EN PHYSIQUE  
Option : ENERGETIQUE**

**Thème :**

**Effet Des Propriétés Thermophysiques Variables Sur La  
Convection Mixte Dans l'Espace Annulaire Entre Deux  
Cylindres Elliptique Horizontaux**

**Par :**

**ZERARI KHALIL**

**Soutenu le : 13 /04 /2014**

**Devant le jury :**

<b>Président</b>	<b>: L.BAHI</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Constantine 1</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>: M.AFRID</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Constantine 1</b>
<b>Examineurs</b>	<b>: Z.NEMOUCHI</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Constantine 1</b>
	<b>A.BOUABDALLAH</b>	<b>Professeur</b>	<b>USTHB Alger</b>
	<b>H.OUALLI</b>	<b>Professeur</b>	<b>EMPTBEB Alger</b>
	<b>A.RAHMANI</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Univ.LBM O.El Bouaghi</b>

# *Remerciements*

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur **AFRID MOUHAMED** Professeur à l'Université **Constantine 1** pour m'avoir encadré le long de cette recherche, pour diriger mes travaux de Thèse, n'a cessé de me prodiguer ses conseils et de me faire confiance. Sous sa direction, j'ai pu bénéficier de ses connaissances et de son expérience et apprécier ses qualités humaines ( He is really my **second Father**, I' m **proud** for you, thanks **so much** my supervisor) .

Je remercie Monsieur le Professeur **Dominic Groulx**, Directeur du Laboratoire d'Ingénierie Thermique Multiphasique Appliquée (**LAMTE**) à L'Université de **Dalhousie (Canada)** qui, en m'accueillant dans son laboratoire, durant mon stage.

Je remercie aussi Monsieur **Bahi Lakhdar**, Professeur à l'Université **Constantine 1**, qui a bien voulu présider mon jury de thèse.

Monsieur **Nemouchi Zoubir**, Professeur à l'Université **Constantine1**, Monsieur **Ahcen Bouabdallah**, Professeur à l'Université **USTHB Alger**, Monsieur **Hamid Oualli** Professeur à **EMPTBEB Alger** et Monsieur **Ahmed RAHMANI** Maitre de Conférence à l'Université **d'Oum El Bouaghi** qui ont bien voulu accepter de lire cette thèse et d'apporter des critiques pertinentes.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# *Table Des Matières*

**Nomenclature**

**Table Des Figures**

**Liste Des Tableaux**

<b>Introduction Générale</b>	01
<b>Chapitre 1 Etude Bibliographique</b>	04
1.1. La convection naturelle dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques en deux dimensions.....	05
1.2. La convection dans un simple conduit elliptique.....	06
1.3. La convection dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques.....	07
1.4. La convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres circulaires .....	08
<b>Chapitre 2 Modèle Mathématique</b>	12
2.1. Introduction.....	13
2.2. Description du problème.....	13
2.2.1. Rappel mathématique sur les coordonnées elliptiques .....	14
2.2.2. Le modèle mathématique.....	15
2.2.2.1. L'équation de continuité .....	15
2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	15
2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	15
2.2.2.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ .....	16
2.2.2.5. L'équation d'énergie.....	16
2.2.2.6 Conditions initiales et aux limites .....	16
2.2.3. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique .....	17
2.2.3.1. L'équation de continuité .....	17
2.2.3.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	17
2.2.3.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	17
2.2.3.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ .....	17
2.2.3.5. L'équation d'énergie .....	18
2.2.3.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles.....	18
2.3. Modélisation des propriétés physiques variables.....	19

2.4. Les Bilans massique et thermique .....	21
2.4.1. Bilan massique global.....	21
2.4.2. Bilan thermique global.....	22
2.5. Le nombre de Nusselt.....	23
2.5.1. Le nombre de Nusselt local.....	23
2.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne .....	24
<b>Chapitre 3 L'étude Numérique</b> .....	<b>25</b>
3.1. Introduction .....	26
3.2. La méthode de résolution.....	26
3.3. Le maillage.....	27
3.4. Détails de discrétisation.....	29
3.4.1. Discrétisation de l'équation de continuité.....	33
3.4.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	33
3.4.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\epsilon$ .....	39
3.4.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	51
3.4.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $z$ ... ..	62
3.5. La discrétisation des conditions aux limites.....	70
3.5.1. Les conditions aux limites thermiques.....	70
3.5.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant $\epsilon$ .....	72
3.5.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	73
3.5.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant $z$ .....	74
3.6. L'équation de discrétisation de la pression .....	75
3.7. La solution des systèmes d'équations linéaires.....	79
3.8. Convergence.....	86
<b>Chapitre 4 Résultats Et Discussion</b> .....	<b>88</b>
4.1. Introduction.....	89
<b>Première Partie</b> .....	<b>90</b>
4.2. La convection forcée et mixte avec des propriétés physiques constantes.....	90

4.2.1. L'écoulement de la convection forcée hydrodynamique et thermiquement Développé.....	90
4.2.2. L'écoulement de la convection forcée en développement hydrodynamique et thermique.....	95
4.2.2.1. Le champ hydrodynamique et l'écoulement secondaire .....	95
4.2.2.2. Le champ thermique.....	98
4.2.3. La convection mixte en développement hydrodynamique et thermique avec des propriétés physique constantes.....	101
4.2.3.1. Cas de $Gr=5000$ .....	101
4.2.3.1.1. L'écoulement secondaire.....	102
4.2.3.1.2. L'écoulement axial.....	105
4.2.3.1.3. Le champ thermique.....	107
4.2.3.2. Cas de $Gr=10000$ .....	110
4.2.3.2.1. L'écoulement secondaire.....	110
4.2.3.2.2. L'écoulement axial.....	112
4.2.2.2.3. Le champ thermique.....	114
4.2.3.3. Cas de $Gr=15000$ .....	117
4.2.3.3.1. L'écoulement secondaire.....	117
4.2.3.3.2. L'écoulement axial.....	121
4.2.2.3.3. Le champ thermique.....	123
4.2.2.4. L'évolution des nombres de Nusselt.....	125
<b>Deuxième Partie</b>	127

4.3. La convection forcée en développements hydrodynamique et thermique avec des propriétés variables.....	128
4.3.1. Niveau de chauffage.....	128
4.3.2. Écoulement axial.....	129
4.3.3. Le champ thermique.....	134
4.3.4. Les variations du nombre de Nusselt.....	138
4.3.5. Le champ de la viscosité.....	140
4.3.6. Les variations de la conductivité.....	144

<b>Troisième Partie</b>	149
4.4. La convection mixte hydrodynamique et thermiquement en développement avec des propriétés variables .....	150
4.4.1. Introduction.....	150
4.4.2. Cas De $Gr=5000$ .....	150
4.4.2.1. L'écoulement secondaire.....	150
4.4.2.2. L'écoulement axial.....	152
4.4.2.3. Champ thermique.....	155
4.4.2.4. Les variations de la viscosité.....	157
4.4.2.5. Les variations de la conductivité.....	158
4.4.3. Cas De $Gr=10000$ .....	161
4.4.3.1. L'écoulement secondaire.....	161
4.4.3.2. L'écoulement axial.....	163
4.4.3.3. Champ thermique.....	166
4.4.3.4. Les variations de la viscosité.....	168
4.4.3.5. Les variations de la conductivité .....	170
4.4.4. Cas De $Gr=15000$ .....	172
4.4.4.1. L'écoulement secondaire.....	172
4.4.4.2. Écoulement axial.....	175
4.4.4.3. Champ thermique.....	178
4.4.4.4. Les variations de la viscosité.....	181
4.4.4.5. Les variations de la conductivité.....	183
4.4.5. Les nombres du Nusselt axiaux et moyennes.....	185
4.5. La chute de pression axiale.....	186
4.5.1. La chute de pression des cas des propriétés constantes.....	187
4.5.2. La chute de pression pour les cas de la convection forcée et mixte avec des propriétés variables.....	187
<b>Chapitre 5 Conclusion Générale</b>	189
<b>Bibliographie</b>	193

# Nomenclature

## Les variables dimensionnelles

$a$	Demi distance focal (m)
$c_p$	Chaleur massique à pression constante (J/kg.K)
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$h_1$	Coefficient métrique radial (m)
$h_2$	Coefficient métrique azimutal (m)
$h_3$	Coefficient métrique axial
$h(\eta, z)$	Coefficient local de la convection ( $W/m^2.K$ )
$k$	Conductivité thermique de fluide ( $W/m.K$ )
$L$	Longueur du conduit (m)
$P$	Pression (Pa)
$P_1$ ou bien $P_i$	Périmètre du cylindre intérieur (m)
$q_w$	Densité de flux de chaleur à la surface du cylindre intérieure ( $W/m^2$ )
$S$	Surface de la section droite du conduit (section d'écoulement) ( $m^2$ )
$t$	Temps (s)
$T$	Température (K)
$V_e$	Vitesse radiale (m/s)
$V_\eta$	Vitesse azimutale (m/s)
$V_z$	Vitesse axiale (m/s)
$z$	Coordonnée axiale (m)

## Symboles Grecs

$\beta$	Coefficient d'expansion thermique ( $1/K$ )
$\Delta t$	Pas de temps (s)
$\Delta$	Intervalle fini
$\mu$	Viscosité dynamique (kg/m.s)
$\rho$	Masse volumique ( $kg/m^3$ )

$\varepsilon$	Coordonnée elliptique radiale
$\eta$	Coordonnée elliptique azimutale
$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
$\Psi$	Fonction de ligne de courant

### Indices

i	Surface du cylindre intérieure
m	Valeur moyenne
max	Valeur maximale
min	Valeur minimale
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini
n,s,e, w,f,b	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
N,S,E, W,F,B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
u	Maillage décalé suivant la direction radiale
v	Maillage décalé suivant la direction angulaire
w	Maillage décalé suivant la direction axiale
0	Entré du conduit

### Exposants

*	Variable adimensionnelle
$t$	Désigne l'instant $t$
$t + \Delta t$	Désigne l'instant $t + \Delta t$
$t - \Delta t$	Désigne l'instant $t - \Delta t$

### Les nombres adimensionnels

Gr	Nombre de Grashof = $(g \beta q_w a^4) / (\nu_0^2 k_0)$
$\text{Nu}(\eta, z)$	Nombre de Nusselt local
$\text{Nu}(z)$	Nombre de Nusselt axial
Pr	Nombre de Prandtl = $(c_p \mu_0 / k_0)$
Re	Nombre de Reynolds = $(\rho_0 V_0 a / \mu_0)$

## *Table Des Figures*

2.1.	Géométrie et conditions aux limites du problème.....	13
2.2.	Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire.....	14
2.3.	La viscosité de l'eau. Valeurs tabulées et valeurs de l'eq. (2.27).....	20
2.4.	La conductivité thermique de l'eau. Valeurs tabulées et valeurs de l'eq.(2.28).....	21
3.1.	Le volume fini typique.....	27
3.2.	Le maillage numérique utilisé (a) et sa projection en coupe (b). La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.....	29
3.3.	Maillage suivant les coordonnées $(\eta, z)$ .....	30
3.4.	Maillage suivant les coordonnées $(\eta, \varepsilon)$ .....	31
3.5.	Maillage suivant les coordonnées $(\varepsilon, z)$ .....	32
3.6.	La projection de maillage décalé suivant $\varepsilon$ sur la surface $(\varepsilon, z)$ .....	40
3.7.	La projection de maillage décalé suivant $\varepsilon$ sur la surface $(\varepsilon, \eta)$ .....	41
3.8.	Le maillage décalé suivant $\eta$ sur la surface $(\eta, z)$ .....	52
3.9.	Le maillage décalé suivant $\eta$ sur la surface $(\eta, \varepsilon)$ .....	53
3.10.	Le maillage décalé suivant $z$ sur la surface $(\varepsilon, z)$ .....	63
3.11.	Le maillage décalé suivant $z$ sur la surface $(\eta, z)$ .....	64
3.12.	Maillage axial à la sortie du conduit.....	71
4.1.	Le champ numérique de la vitesse axiale (à gauche) et le champ analytique de la vitesse axiale (à droite) d'un écoulement développé.....	92
4.2.	Le champ numérique de la température (à gauche) et le champ analytique de la température (à droite) de l'écoulement totalement développé, à la sortie d'un conduit de longueur égale à 800.....	95
4.3.	Le champ de la vitesse axiale. a) à $z^* = 5.75$ . b) à $z^* = 100$ .....	97
4.4.	Amortissement de l'écoulement secondaire dans la zone de développement. à a) $z= 8.75$ b) $z=14.25$ . (La longueur des vecteurs est amplifiée 15 fois pour une représentation graphique claire).....	97
4.5.	Distribution polaire de la température.....	99

4.6.	La croissance axiale linéaire de la température moyenne.....	100
4.7.	Lignes de courant de l'écoulement secondaire. Gr=5000.	
	a) $z^* = 30.25$ . b) $z^* = 100$ .....	104
4.8.	La vitesse de l'écoulement secondaire. Gr=5000.	
	a) $z^* = 25.25$ . b) $z^* = 50.25$ . c) $z^* = 75.25$ . d) $z^* = 100$ .....	105
4.9.	Le champ de la vitesse axiale. Gr=5000.	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	107
4.10.	Les variations polaires de la température. Gr=5000.	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	109
4.11.	Lignes de courant de l'écoulement secondaire. Gr= $10^4$ .	
	a) $z^* = 30.25$ . b) $z^* = 100$ .....	111
4.12.	La vitesse de l'écoulement secondaire. Gr= $10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ . b) $z^* = 50.25$ . c) $z^* = 75.25$ . d) $z^* = 100$ .....	112
4.13.	Le champ de la vitesse axiale. Gr= $10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	114
4.14.	Les variations polaires de la température. Gr= $10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	116
4.15.	Lignes de courant de l'écoulement secondaire. Gr= $10^4$ .	
	a) $z^* = 21.75$ . b) $z^* = 41.75$ . c) $z^* = 66.75$ . d) $z^* = 100$ .....	119
4.16.	La vitesse de l'écoulement secondaire. Gr= $1.5 \times 10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ . b) $z^* = 50.25$ . c) $z^* = 75.25$ . d) $z^* = 100$ .....	120
4.17.	Le champ de la vitesse axiale. Gr= $1.5 \times 10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	123
4.18.	Les variations polaires de la température. Gr= $1.5 \times 10^4$ .	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ , c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	125
4.19.	Les nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ en fonction du nombre Grashof.....	126
4.20.	Le champ de la vitesse axiale à $z^* = 25.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	130
4.21.	Le champ de la vitesse axiale à $z^* = 50.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	131

4.22.	Le champ de la vitesse axiale à $z^* = 75.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	132
4.23.	Le champ de la vitesse axiale à $z^* = 100$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	133
4.24.	Le champ thermique à $z^* = 25.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	135
4.25.	Le champ thermique à $z^* = 50.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	136
4.26.	Le champ thermique à $z^* = 75.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	137
4.27.	Le champ thermique à $z^* = 100$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	138
4.28.	Les nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ en fonction flux de chaleur pariétal.....	139
4.29.	Le champ de viscosité à $z^* = 25.25$	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	141
4.30.	Le champ de viscosité à $z^* = 50.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	142
4.31.	Le champ de viscosité à $z^* = 75.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	143
4.32.	Le champ de viscosité à $z^* = 100$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	144
4.33.	Le champ de la conductivité thermique à $z^* = 25.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	145
4.34.	Le champ de la conductivité thermique à $z^* = 50.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	146

4.35.	Le champ de la conductivité thermique à $z^* = 75.25$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	147
4.36.	Le champ de la conductivité thermique à $z^* = 100$ .	
	a) $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b) $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c) $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .....	148
4.37.	Les cellules de l'écoulement secondaire a) $z^* = 50.25$ , b) $z^* = 100$ .....	151
4.38.	L'écoulement secondaire présenté par des vecteurs.	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	152
4.39.	Le champ de la vitesse axiale à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	154
4.40.	Les variations de la température à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	156
4.41.	Les variations de la viscosité à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	158
4.42.	Les variations de la conductivité à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	160
4.43.	L'écoulement secondaire présenté par des cellules a) $z^* = 35.25$ , b) $z^* = 100$ .....	162
4.44.	L'écoulement secondaire présenté par des vecteurs	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	163
4.45.	Le champ de la vitesse axiale à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	165
4.46.	Les variations de la température à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	168
4.47.	Les variations de la viscosité à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	170
4.48.	Les variations de la conductivité à	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	171
4.49.	L'écoulement secondaire présenté par des cellules	
	a) $z^* = 24.25$ , b) $z^* = 66.75$ , c) $z^* = 100$ .....	173
4.50.	L'écoulement secondaire présenté des vecteurs	
	a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	175

4.51. Le champ de la vitesse axiale à	
a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	178
4.52. Les variations de la température à	
a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	180
4.53. Les variations de la viscosité	
a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	182
4.54. Les variations de la conductivité	
a) $z^* = 25.25$ , b) $z^* = 50.25$ c) $z^* = 75.25$ et d) $z^* = 100$ .....	184
4.55. Les variations axiales des nombreux Nusselt.....	186

## *Liste Des Tableaux*

2.1	Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.....	16
2.2	Les propriétés thermophysiques et paramètre de contrôle.....	18
2.3	La viscosité et la conductivité de l'eau en fonction de la température [20].....	19
3.1	Les valeurs de $q_6$ et de la valeur absolue de la différence relative entre $q_1$ et $q_6$ .....	86
4.1	Définition des constantes présentées dans l'équation (4.3).....	91
4.2	Définition des constantes présentées dans l'équation (4.4).....	92
4.3	La température maximale et sa position polaire.....	108
4.4	Les positions axiales des cellules de l'écoulement secondaire.....	172
4.5	Les valeurs et les positions des vitesses axiales maximales.....	176
4.6	Les valeurs et position de la température.....	179
4.7	Les valeurs et positions de la viscosité minimale.....	181
4.8	Les valeurs et position de la conductivité thermique maximale.....	183
4.9	Les nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit et les nombres de Nusselt moyens.....	185

# Introduction Générale

## Introduction Générale

La Convection dans les conduits est très commune, dans les applications domestiques et industrielles; Les échangeurs de chaleur étant un très bon exemple. Une grande variété des échangeurs de chaleur est présentée dans le manuel édité par **Guyer et Brownell [1]**. La plupart des échangeurs de chaleur utilisent des systèmes de tuyauterie avec des sections circulaires. Toutefois, les cylindres avec des sections elliptiques sont utilisés dans les échangeurs de chaleur compacts où la limitation de l'espace est une contrainte de conception. Il est connu, qu'un conduit elliptique a un périmètre plus grand qu'un tube circulaire pour la même superficie de section transversale d'écoulement et, par conséquent, le tube elliptique a une surface d'échange de chaleur plus grande que le conduit circulaire pour la même longueur.

L'objectif de ce travail scientifique est de déterminer l'effet des propriétés thermophysiques variables, dépendantes de la température, sur la convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques confocaux et horizontaux. Le cylindre extérieur est adiabatique alors que le cylindre intérieur est chauffé par un flux de chaleur pariétal constant. Ce dernier prend les valeurs **4172 W/m<sup>2</sup>**, **8344 W/m<sup>2</sup>** et **12516 W/m<sup>2</sup>** qui sont choisies pour obtenir, avec le débit de l'écoulement considéré (**1.74x10<sup>-3</sup> Kg/s**), des variations de la température moyenne égales à **6°C**, **12°C** et **18°C**, respectivement. Ces trois valeurs de la température moyenne permettent une augmentation progressive de l'influence des propriétés variables.

La thèse est divisée en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, on présente une revue des travaux antérieurs sur les transferts thermiques des convections forcée, naturelle et mixte.

Dans le deuxième chapitre nous présentons en détail les équations (dimensionnelles et adimensionnelles) qui modélisent la conservation de la masse, les trois quantités de mouvements et l'énergie, ainsi que leurs conditions initiales et aux limites. Les variations de la viscosité et la conductivité thermique en fonction de la température sont déterminées par des lissages polynomiaux des données disponibles dans la bibliographie. La quantification du transfert thermique est modélisée par les nombres de Nusselt, locaux axiaux et moyens.

Dans le troisième chapitre, on présente les détails de la méthode numérique des volumes finis utilisée pour discrétiser le domaine géométrique et les équations du modèle mathématique. La discrétisation spatiotemporelle d'ordre deux sera présentée ainsi que les étapes de l'algorithme SIMPLER utilisé pour la solution séquentielle des équations de discrétisation des variables dépendantes.

## **Introduction Générale**

---

Dans le quatrième chapitre on présente les résultats. La première partie des résultats traite l'écoulement de la convection forcé et mixte avec des propriétés constantes. La deuxième partie traite, l'écoulement de la convection forcé avec propriétés variables et avec les trois flux de chaleurs cités. La troisième partie, la plus importante, est celle des écoulements de la convection mixte avec de propriétés variables. Dans chaque partie, on présente les champs hydrodynamique et thermique et la quantification de transfert thermique.

Le cinquième chapitre est une conclusion générale qui résume les plus importants des résultats.

**Chapitre I**

**Etude Bibliographique**

Notre recherche bibliographie synthétisée est divisée en plusieurs parties, une première partie concerne la convection naturelle dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques en deux dimensions. Une deuxième partie sur le transfert de chaleur par convection dans un simple conduit elliptique. Une troisième partie sur la convection dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques. Une dernière partie est consacrée aux études de la convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres avec des sections transversales circulaires.

### **1.1.La convection naturelle dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques en deux dimensions**

Le transfert de chaleur par convection naturelle entre deux cylindres elliptiques est numériquement étudiée par **Zhu et. al. [2]**. La méthode de quadrature différentielle (DQ) a été utilisée. Cette méthode a été validée par comparaison de ses résultats numériques avec les données des publications disponibles et un très bon accord a été atteint. Une étude systématique est effectuée pour l'analyse des flux et des champs thermiques à différentes excentricités et positions angulaires. Il a été constaté que la position de l'axe majeur de l'ellipse intérieure prend effet sur les lignes de courant, mais avec un petit effet sur le nombre de Nusselt moyen.

**Mota et. al. [3]** ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle dans les espaces annulaires elliptiques excentriques horizontaux contenant des milieux poreux saturés. Le problème est résolu en coordonnées orthogonales généralisées, à l'aide d'ordre élevé des différences de Finies compactes sur une grille très fine. Le code de calcul est soigneusement validé par rapport aux résultats rapportés dans la littérature pour les cylindres confocaux et excentriques, obtenus à l'aide de différentes techniques numériques. L'étirage judicieux de l'une des parois annulaires dans la direction horizontale permet de réduire les pertes de

chaleur par rapport à un espace annulaire cylindrique concentrique avec la même quantité de matériau isolant. Les économies de transfert de chaleur peuvent être encore améliorées si la forme annulaire elliptique est excentrique. Des études antérieures montrent que, sous certaines conditions, des cylindres excentriques peuvent conduire à une isolation plus efficace que ceux concentriques. Les résultats présentés permettent de fournir une approche alternative pour optimiser le taux de transfert de chaleur par un choix approprié de la forme annulaire. Les économies d'énergie sont de l'ordre de 10%.

Une étude numérique (avec la méthode des éléments finis) du modèle de Boussinesq de la convection naturelle dans un espace annulaire délimité par des cylindres isothermes circulaire et elliptiques a été réalisée par **Chmaissem et.al [4]**. Si l'enceinte empêche la circulation du fluide, il est possible d'observer des écoulements multicellulaires, même si le nombre de Rayleigh est petit. Dans ce cas, l'augmentation de ce nombre entraîne une fusion des cellules. Si le nombre de Rayleigh est suffisamment grand, il existe un intervalle de valeurs du nombre de Rayleigh pour lesquelles les coefficients de relaxation n'influencent pas seulement la vitesse de convergence du calcul, mais aussi la solution de l'équation de transfert. Pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh juste avant la divergence des calculs, la fonction de courant prend deux valeurs en fonction de la valeur des coefficients de détente, dans le cas où le nombre d'itérations augmente, ce phénomène est plus manifeste lorsque les conditions aux limites contiennent des éléments de symétrie en considération de la direction verticale.

### **1.2.La convection dans un simple conduit elliptique**

Le transfert de chaleur par convection dans les conduits avec section elliptique a été considéré par des nombreux chercheurs. Une analyse théorique du transfert de chaleur par convection forcée laminaire dans la région d'entrée d'un canal elliptique isotherme, avec des rapports d'aspect elliptique  $1/2$  et  $1/4$ , a été faite par **Gilbert et al [5]**. Les solutions asymptotiques

sont présentées et les variations des nombres de Nusselt angulaires locaux se trouvent diminués pour les grandes valeurs de l'inverse du nombre de Graetz.

**Abdel-Wahed et.al [6]** ont étudié expérimentalement l'écoulement laminaire en développement et entièrement développé et le transfert de chaleur dans un cylindre avec une section transversale elliptique ayant un rapport de forme égal à 0,5. Le cylindre est soit isotherme ou présente une distribution de température axiale linéaire. Le flux et le transfert de chaleur mesurés ont révélé la nécessité d'une solution analytique dans la section d'entrée qui est plus précis que l'approximation existante.

**Sakalis et.al [7]** ont étudié numériquement l'écoulement incompressible laminaire, hydrodynamique entièrement développé et thermiquement en développement dans les canaux avec des sections transversales elliptiques, pour les rapports d'aspect des axes elliptiques de section 0,99, 0,8, 0,5 et 0,25. La paroi du conduit est soumise à une température constante et une température variable sur la paroi. Pour le conduit isotherme, il est rapporté que lorsque le rapport d'aspect diminue de 0,99 à environ 0,5, le nombre de Nusselt augmente, mais quand elle diminue de 0,5 à 0,25, le nombre de Nusselt diminue.

**Velusamy et.al [8]** ont étudié numériquement un écoulement laminaire totalement développée, de la convection mixte dans des conduits verticaux elliptiques avec un taux de chaleur axial uniforme et une température de paroi circumférentielle uniforme. Le rapport d'aspect des axes varie entre 0,1 à 0,99. Il est rapporté que le rapport des nombres de Nusselt des convections mixte et forcée est plus élevé pour de faibles rapports d'aspect pour les nombres de Rayleigh jusqu'à 3800, mais il est plus élevé pour les rapports d'aspect plus élevés.

### **1.3.La convection dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques**

Les études sur le transfert de chaleur par convection forcée et mixte dans les espaces annulaires entre deux cylindres elliptiques sont rares. **Topakoglu et Arnas [9]** ont étudié

analytiquement un écoulement laminaire hydrodynamique et thermiquement développé de la convection forcé entre deux tubes elliptiques confocaux, avec gradient de température de paroi uniforme longitudinal dans différentes conditions de chauffage. Toutefois, les températures des parois des tuyaux sont présumés uniformes suivant la direction angulaire. Les solutions analytiques de l'écoulement et des champs thermiques et le nombre moyen de Nusselt sont présentés pour diverses valeurs de l'ellipticité.

La convection forcée (avec propriétés constantes) hydrodynamique et thermiquement développée entre deux cylindres elliptiques confocal avec une génération de chaleur constante a étudié par **Arnas et Ebadian [10]**. L'étude analytique est très spécifique: l'ellipticité=0.5,  $Pr=0.005$ ,  $Re=1500$  et un gradient axial constant de la température= $538^{\circ}C/m$  et une génération de chaleur= $966\ 230\ Watts/m^3$ . Les auteurs ont déterminé la variation du nombre de Nusselt en fonction de l'ellipticité de pipe.

#### **1.4.La convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres circulaires**

Cependant, il y a de nombreuses études sur le transfert de chaleur par convection forcée et mixte et dans l'espace annulaire entre les cylindres avec des sections circulaires. La convection mixte laminaire dans espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux a été étudiée par **Nieckele et Patankar [11]**. Le cylindre intérieur est chauffé et le cylindre extérieur est adiabatique. Une étude numérique est présentée pour la région totalement développée de l'écoulement. Ils ont constaté que le nombre de Nusselt augmente considérablement avec le nombre de Rayleigh, mais l'augmentation correspondante du coefficient de frottement a été jugée plutôt faible.

**Habib et Negm [12]** ont étudié numériquement la convection mixte laminaire dans la région totalement développée dans un espace annulaire entre deux cylindriques concentriques horizontaux avec un chauffage circonférentiel non uniforme. Deux conditions de chauffage

ont été explorées, celle dans laquelle la moitié supérieure du cylindre intérieur est chauffée uniformément tandis que la moitié inférieure est maintenue isolée, et l'autre dans laquelle les moitiés chauffée et adiabatique étaient inversées. Le cylindre extérieur est adiabatique pour les deux cas. Le rapport de rayons est égal à 2 et le fluide est de l'air. Il a été constaté que le système avec la moitié inférieure chauffée induit un écoulement secondaire vigoureux, qui donne un nombre de Nusselt moyen beaucoup plus élevé que celui de la convection forcée pure.

**Narzul Islam et.al [13]** ont étudié numériquement la convection mixte dans la région d'entrée dans un espace annulaire entre des cylindres concentriques horizontaux. Le cylindre intérieur est chauffé par un flux de chaleur et le cylindre extérieur est adiabatique. Ils ont constaté que le nombre de Nusselt augmente lorsque le rapport des rayons augmente. Ils ont également constaté que l'augmentation du nombre de Prandtl diminue le nombre de Nusselt à partir de l'entrée jusqu'à une certaine longueur axiale. En aval de cette longueur, le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

**Mojtabi et Catagirone [14]** ont étudié numériquement un écoulement laminaire de la convection mixte, entre deux cylindres coaxiaux horizontaux, hydrodynamiquement et thermiquement développée. Il a été constaté que l'échange de chaleur pour les deux cylindres ne dépend que du nombre de Rayleigh, du nombre de Prandtl et du rapport des rayons.

**Terhmina et Mojtabi [15]** ont étudié numériquement l'écoulement de la convection forcée dans la région d'entrée d'un espace annulaire limité par deux cylindres coaxiaux horizontaux isothermes pour des régimes de la vitesse et de température non établis. Le fluide pénètre dans l'espace annulaire avec une vitesse uniforme et à une température uniforme. Les résultats obtenus avec des nombres de Peclet et les rapports des rayons permettent la corrélation du transfert de chaleur.

L'effet de viscosité variable sur la convection laminaire dans une conduite annulaire horizontale a été étudié numériquement par **Nouar [16]**. A l'entrée de l'annulaire du conduit, l'écoulement est totalement développée, et la température est uniforme. Il a trouvé que, lorsque la viscosité diminue avec la température il y a une accélération de l'écoulement axial dans la partie supérieure du conduit et une décélération à la partie inférieure. Il a constaté aussi que la viscosité variable augmente le transfert thermique global des convections forcée et mixte.

La convection combinée laminaire dans un espace annulaire horizontal, avec un flux de chaleur constant à la paroi intérieure et une paroi extérieure adiabatique a été étudié numériquement par **Kaviany [17]**. Le rapport d'aspect des rayons est de 1,25. Les résultats montrent que lorsque le potentiel de flottabilité (nombre de Rayleigh) augmente, la structure de l'écoulement secondaire passe d'une cellule (de chaque côté) à deux cellules. Plus le nombre de Rayleigh augmente, la température de la partie supérieure du cylindre intérieur augmente premièrement de manière significative au-dessus de sa valeur pour une convection forcée pur, puis diminue de façon significative lorsque le nombre de cellules de l'écoulement secondaire double. La température moyenne du cylindre intérieur diminue de façon monotone lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

**Zanchini [18]** a étudié analytiquement la convection mixte avec viscosité variable dans l'espace annulaire vertical avec une température uniforme de la paroi. Les résultats montrent que les effets combinés des forces de flottabilité et de la viscosité variable du fluide sur la chute de pression et sur la distribution de vitesse peuvent être importantes. En outre, ils ont constaté que la viscosité variable augmente la vitesse du fluide à proximité de la paroi chauffée et le réduit près de la paroi refroidie.

Le transfert de chaleur des convections forcée et naturelle d'un écoulement laminaire thermiquement en développement et thermiquement totalement développé dans l'espace

annulaire entre deux cylindres concentriques à été étudié expérimentalement par **Mohammed et.al [19]**. Il a constaté que le nombre de Nusselt axial augmente avec le nombre de Reynolds. L'effet de l'écoulement secondaire dû à la flottabilité a été jugé important et donne des nombres de Nusselt axiaux élevés.

Au meilleur de nos connaissances, d'après la bibliographie publiée, l'écoulement en trois dimensions de la convection mixte avec des propriétés physiques variables hydrodynamiquement et thermiquement en développement entre deux cylindres elliptiques confocaux et horizontaux n'a pas été étudié. Son étude dans cette thèse est une contribution à la simulation numérique réaliste des développements hydrodynamique et thermique de la convection mixte avec des propriétés variables (fonctions de la température), dans les conduits annulaires elliptiques. Cette étude présente une description et une interprétation physique de la synergie des effets de l'écoulement secondaire induit par la poussée thermique et des propriétés variables sur les développements (hydrodynamique et thermique) axiaux de l'écoulement et du champ thermique. Une synergie complexe qui révèle qu'elle n'est pas une simple superposition des deux effets puisque chacun des ces effets influence l'autre et cette influence dépend du niveau de chauffage considéré. Une synergie qui entraîne un inversement de l'asymétrie de l'écoulement axial observée dans la convection mixte avec des propriétés constantes. Cet inversement tend à modérer le niveau de la température maximale de la partie supérieure de la paroi du cylindre chauffé.

**Chapitre II**

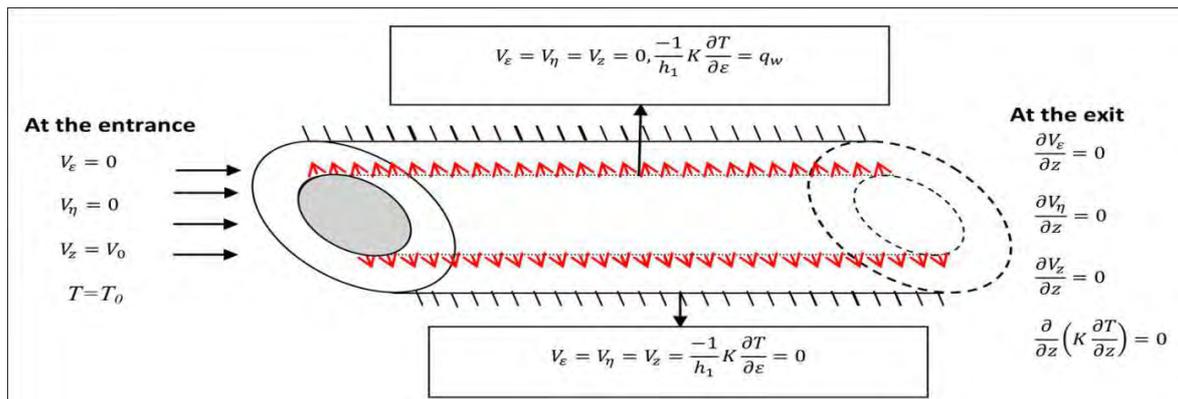
**Modèle Mathématique**

**2.1. Introduction :**

Ce chapitre expose la description et la modélisation mathématique du problème physique. Le modèle mathématique est l'ensemble des équations différentielles aux dérivées partielles, de la conservation de masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie; avec les équations des conditions initiales et aux limites. Le modèle mathématique est complété par les fonctions précisant les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Naturellement, les équations modélisantes sont écrites dans les coordonnées elliptiques. La forme non dimensionnelle des équations modélisantes est obtenue par la normalisation des variables dépendantes et indépendantes avec des échelles caractéristiques appropriées. Le transfert thermique est quantifié par des nombres de Nusselt locaux et moyens.

**2.2. Description du problème:**

On considère un écoulement de convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Les rayons elliptiques des cylindres intérieur et extérieur sont égaux à 0.5 et 1.0, respectivement. La demi-distance focale des ellipses de la section droite du conduit est égale à 0.0045m. La longueur du conduit est 100 fois la demi-distance focale. A l'entrée du conduit, le fluide (eau) a une vitesse axiale constante égale à  $2.231 \times 10^{-2}$  m/s et une température uniforme égale à 20°C. Un schéma, qui n'est pas à l'échelle, du problème est présenté dans la **Figure 2.1**.

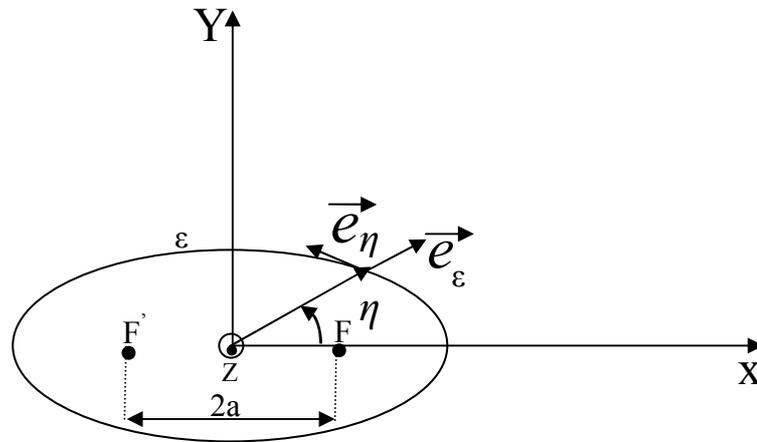


**Figure.2.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.**

### 2.2.1. Rappel mathématique sur les coordonnées elliptiques :

La **Figure .2.2.** représente les coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire. Suivant la direction normale à ce plan (la direction axiale), les coordonnées elliptique et cartésienne sont confondues. Les formules de transformation des coordonnées elliptiques aux coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} X &= a \cosh(\varepsilon) \cos(\eta) \\ Y &= a \sinh(\varepsilon) \sin(\eta) \\ Z &= z \end{aligned} \quad (2.1)$$



**Figure. 2.2. Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire.**

F et F' Sont les foyers de l'ellipse et a est la demi-distance focale. L'angle  $\eta$  augmente suivant la direction antihoraire.

On définit aussi le déterminant du jacobien par :

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) & a \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) & 0 \\ a \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) & a \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)) \quad (2.2)$$

Les coefficients métriques  $h_1, h_2, h_3$  sont définis par :

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon}\right)^2 = a\sqrt{\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)} \\ h_2 &= \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)^2 = a\sqrt{\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$h_3 = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 = 1$$

Le déterminant du Jacobien s'écrit en fonction des coefficients métriques comme suit :

$$|J| = h_1 h_2 h_3 = a^2 (\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)) \quad (2.4)$$

Le volume différentiel en coordonnées elliptiques est proportionnel au déterminant du Jacobien :

$$dV = |J| d\varepsilon d\eta dz = h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \quad (2.5)$$

La surface différentielle, sur le plan polaire, est :

$$dS = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Le modèle mathématique :

Les équations dimensionnelles qui modélisent le problème sont écrites dans les coordonnées elliptiques qui sont naturellement adaptées à la géométrie du problème. L'écoulement est supposé visqueux, laminaire et quasi-incompressible, avec l'utilisation de l'approximation de Boussinesq et une variation linéaire de la masse volumique avec la température, dans le terme de la force de gravité.

#### 2.2.2.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.7)$$

#### 2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_0 V_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho_0 h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + \rho_0 V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \rho_0 V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\ & = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_h}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \rho_0 \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) g \end{aligned} \quad (2.8)$$

#### 2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

$$\frac{\partial(\rho_0 V_\eta)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho_0 h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + \rho_0 V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - \rho_0 V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_h}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\
&\quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \rho_0 \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) g \quad (2.9)
\end{aligned}$$

#### 2.2.2.4. L'équation de quantité mouvement suivant z :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho_0 V_z)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho_0 h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\
&= -\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

#### 2.2.2.5. L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned}
&C_p \frac{\partial(\rho_0 T)}{\partial t} + C_p \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho_0 h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (2.11)
\end{aligned}$$

#### 2.2.2.6. Conditions initiales et aux limites :

Les conditions initiales et aux limites sont :

$$t=0, V_\varepsilon = V_\eta = V_z = T = 0 \quad (\text{condition initiale}) \quad (2.12)$$

$$t>0, \varepsilon = 0.5, V_\varepsilon = V_\eta = V_z = 0, q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.13)$$

$$t>0, \varepsilon = 1, V_\varepsilon = V_\eta = V_z = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieure}) \quad (2.14)$$

$$t>0, z = 0, V_\varepsilon = V_\eta = 0, V_z = V_0, T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.15)$$

$$t>0, z = L, \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.16)$$

Les variables adimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités adimensionnelles qui sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

**Tableau 2.1** Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.

$h_1^* = \frac{h_1}{a}$	$h_2^* = \frac{h_2}{a}$
$z^* = \frac{z}{a}$	$t^* = \frac{V_0 t}{a}$

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon^* &= \frac{V_\varepsilon}{V_0} & V_\eta^* &= \frac{V_\eta}{V_0} \\
V_z^* &= \frac{V_z}{V_0} & T^* &= \frac{T - T_0}{\frac{q_w a}{k_0}} \\
P^* &= \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \\
k^* &= \frac{k}{k_0} & L^* &= \frac{L}{a}
\end{aligned}$$

### 2.2.3. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique :

#### 2.2.3.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (2.17)$$

#### 2.2.3.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\varepsilon^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\varepsilon^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\varepsilon^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_2^* \frac{V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu^* \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

#### 2.2.3.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\eta^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right] \\
&= -\frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - 2\mu^* \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

#### 2.2.3.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_z^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_z^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] \\
&= -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right] \quad (2.20)
\end{aligned}$$

### 2.2.3.5. L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* T^*)}{\partial z^*} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Re Pr } h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* h_1^* h_2^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

### 2.2.3.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles:

Les conditions initiales et aux limites sont:

$$t^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = T^* = 0 \quad (\text{condition initiale}) \quad (2.22)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 0.5, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = 0, -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.23)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 1, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieure}) \quad (2.24)$$

$$t^* > 0, z^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0, V_z^* = 1, T^* = 0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.25)$$

$$t^* > 0, z^* = L^* = 100, \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.26)$$

Certaines constantes, les valeurs de référence et les paramètres de contrôle (dynamiques et thermiques) sont précisées dans le **Tableau 2.2**. Notre choix des dimensions de la géométrie et des paramètres dynamiques et thermiques permet l'étude de l'influence de la flottabilité et la réduction progressive de la viscosité.

**Tableau 2.2 Les propriétés thermophysiques et paramètre de contrôle.**

$a$	0.0045 m
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$\beta$	$1.8 \times 10^{-4}$ /K
$\mu_0$	$1.006 \times 10^{-3}$ kg/m.s
$\nu_0$	$1.006 \times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
$k_0$	0.597 W/m.K
$V_0$	$2.231 \times 10^{-2}$ m/s
$T_0$	293 K
$\rho_0$	1000.52 kg/m <sup>3</sup>
$C_p$	4182 J/kg.K
$q_w$	4172, 8344, 12516 W/m <sup>2</sup>
$\text{Gr} = \frac{g\beta q_w a^4}{\nu_0^2 k_0}$	$5 \times 10^3, 10^4, 1.5 \times 10^4$

$Re = \frac{\rho_0 V_0 a}{\mu_0}$	100
$Pr = \frac{C_p \mu_0}{k_0}$	7

### 2.3. Modélisation des propriétés physiques variables:

Pour modéliser les variations des propriétés physiques en fonction de la température, nous avons utilisé les valeurs tabulées de ces propriétés, présentées dans la référence [20]. Les données de cette référence [20] sont reprises dans le **Tableau 2.3**.

**Tableau 2.3 La viscosité et la conductivité de l'eau en fonction de la température [20]**

T (°C)	Viscosité $\mu$ ( kg/m .s)	Conductivité thermique (W/m.K)
0	0,00179	0,5628
5	0,00152	0,57277
10	0,00131	0,58223
15	0,00114	0,5912
20	0,001	0,59968
25	8,908E-4	0,60769
30	7,978E-4	0,61523
35	7,196E-4	0,62231
40	6,531E-4	0,62896
45	5,962E-4	0,63517
50	5,471E-4	0,64095
55	5,043E-4	0,64633
60	4,668E-4	0,6513
65	4,338E-4	0,65588
70	4,044E-4	0,66008
75	3,783E-4	0,66391
80	3,55E-4	0,66738
85	3,339E-4	0,6705
90	3,15E-4	0,67328
95	2,978E-4	0,67573
100	2,822E-4	0,67786
120	2,321E-4	0,68341

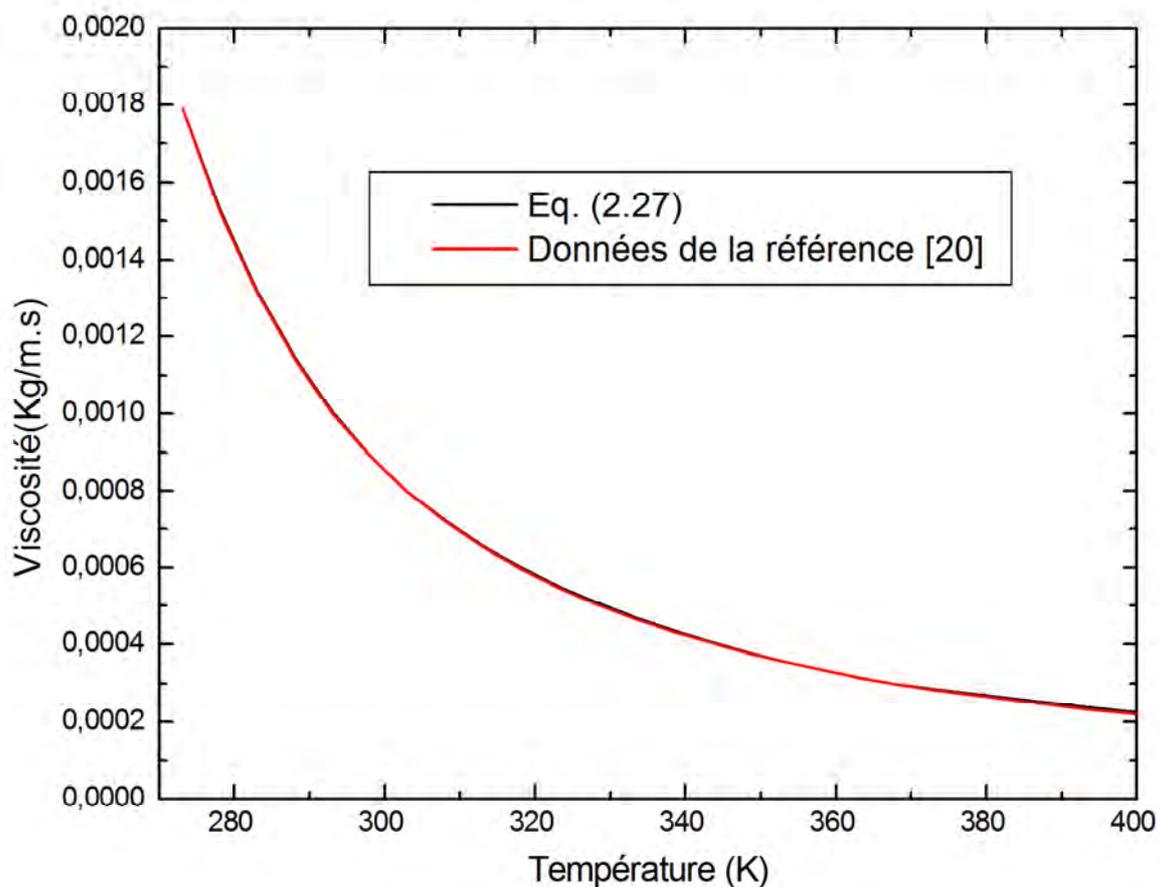
140	1,961E-4	0,68469
160	1,695E-4	0,68237

À partir de ces données, on a déterminé des fittings polynomiaux, assez précis, pour modéliser les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Ces fittings sont précisés les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(T) = & 1.79 \times 10^{-3} - 5.861 \times 10^{-5}(T - 273.15) + 1.260 \times 10^{-6} \\ & \times (T - 273.15)^2 - 1.736 \times 10^{-8}(T - 273.15)^3 + 1.420 \times 10^{-10} \\ & \times (T - 273.15)^4 - 6.177 \times 10^{-13}(T - 273.15)^5 + 1.092 \times 10^{-15} \\ & \times (T - 273.15)^6 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$k(T) = -1.050 + 0.0108T - 2.172 \times 10^{-5}T^2 + 1.389 \times 10^{-8}T^3 \quad (2.28)$$

On note que dans ces fonctions, l'unité de température est (K) alors que les unités de la viscosité et la conductivité sont (kg/m.s), (W/m.K) respectivement. Aussi, il est utile de préciser que le domaine de température de notre étude est couvert par le domaine de température des valeurs tabulées. Les **Figures 2.2.** et **2.3.** illustrent la précision des fonctions  $\mu(T)$  (2.27),  $k(T)$  (2.28) à représenter les données tabulées dans le **Tableau 2.3.**



**Figure. 2.3.** La viscosité de l'eau. Valeurs tabulées et valeurs de l'eq. (2.27).

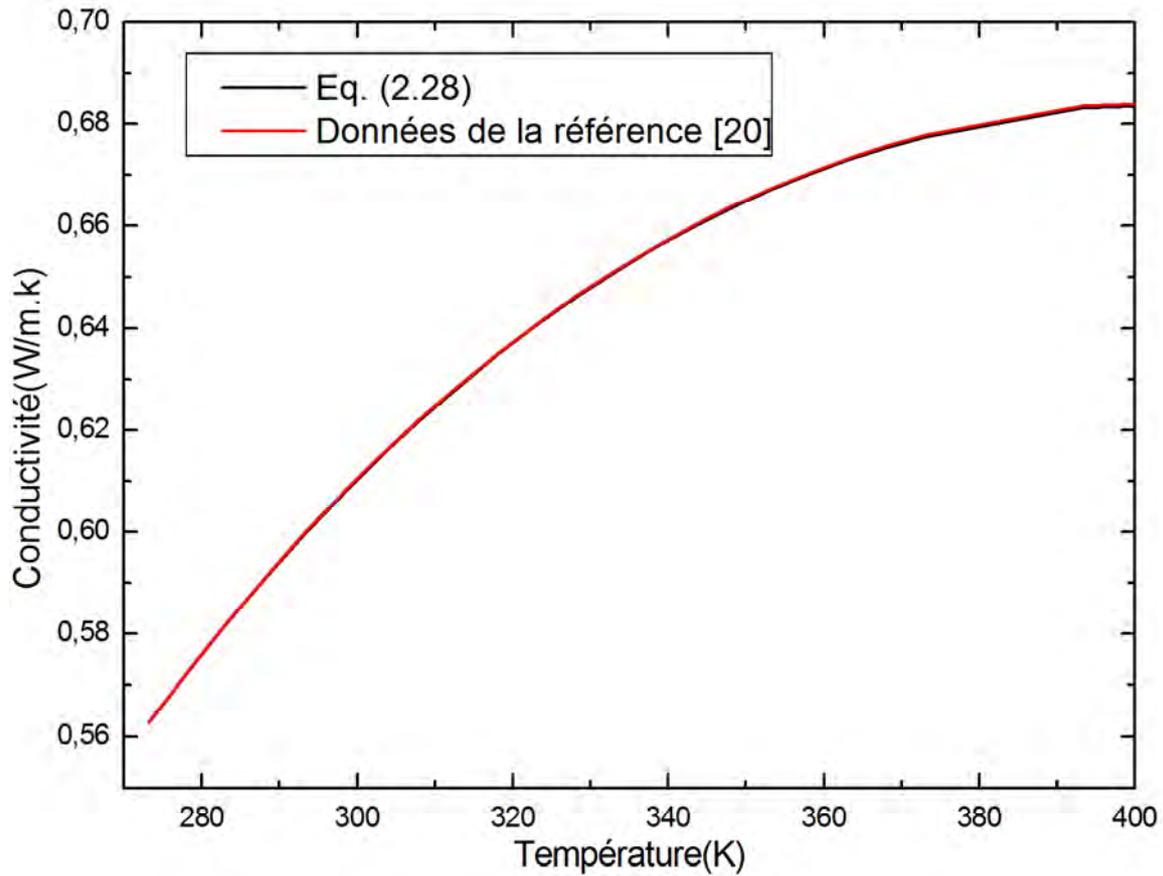


Figure.2.4. La conductivité thermique de l'eau. Valeurs tabulées et valeurs de l'eq.(2.28).

Les valeurs non dimensionnelles de la viscosité et la conductivité thermique sont obtenues par la normalisation des fonctions des eqs. (2.27) et (2.28) avec les valeurs de référence cités dans le **Tableau 2.2**.

#### 2.4. Les Bilans massique et thermique :

L'écoulement et le transfert thermique doivent satisfaire les bilans massique et thermique présentés ci-dessous.

##### 2.4.1. Bilan massique global:

L'intégration de l'équation de continuité sur le domaine d'écoulement montre l'égalité des débits massiques (et volumiques) de l'entrée et la sortie du conduit :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad (2.29)$$

En faite, il est facile de démontrer que le débit à chaque position axiale est égal à celui de l'entrée et donc le débit est axialement invariant le long du conduit.

### 2.4.2. Bilan thermique global:

Le bilan thermique global est obtenu par l'intégration de l'équation d'énergie sur le domaine d'écoulement. En régime stationnaire, obtenu dans tous les cas de cette étude, le bilan thermique global démontre l'égalité de la puissance thermique donnée au fluide à travers la paroi du cylindre intérieur chauffé et la puissance thermique cédée par le fluide au milieu extérieur à travers les limites du domaine de l'écoulement. Le bilan global peut être décrit par l'équation :

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \quad (2.31)$$

$q_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{RePr} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} d\eta dz^*$  exprime la puissance thermique donnée (par conduction) au fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur.

$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{RePr} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=1} d\eta dz^*$  exprime la puissance thermique échangée (par conduction) au niveau de la paroi du cylindre elliptique extérieur. Cette puissance est nulle sachant que le cylindre extérieur est adiabatique.

$q_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{1}{RePr} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  exprime la puissance thermique échangée par conduction à l'entrée du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considérés.

$q_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{RePr} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=100} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  exprime la puissance thermique échangée par conduction à la sortie du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considérés.

$q_5 = - \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_{ze}^* T_e^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  exprime la puissance thermique échangée par convection à l'entrée du conduit. Cette puissance est nulle sachant que  $T_e^* = 0$ .

$q_6 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_{z_s}^* T_s^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  exprime la puissance thermique échangée par convection à la sortie du conduit. Évidemment, cette puissance est très importante.

A une section donnée du conduit (à un certain  $z^*$ ) la température moyenne est définie comme suit :

$$T_m^*(z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*) T^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (2.32)$$

La température moyenne adimensionnelle est égale à zéro à l'entrée du conduit, et augmente linéairement dans la direction axiale. Cette augmentation linéaire est facilement démontrée par un bilan thermique global, appliqué à un tronçon du conduit de longueur  $z^*$ , et la considération de l'éq. (2.32). Ainsi, à la sortie du conduit, le bilan thermique global nous donne :

$$T_m^*(100) = \frac{100}{\text{Re Pr } S^*} \frac{P_1^*}{S^*} + \frac{1}{\text{Re Pr } S^*} \int_0^{2\pi} \int_{0.5}^1 \left[ k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{100} - k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_0 \right] h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \approx \frac{100}{\text{Re Pr } S^*} \frac{P_1^*}{S^*} \quad (2.33)$$

$P_1^*$  : Est le périmètre adimensionnel de cylindre intérieur:

$$P_1^* = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta = 5.356 \quad (2.34)$$

$S^*$ : Est la surface adimensionnelle de la section droite du conduit (section d'écoulement):

$$S^* = \int_{0.5}^1 \int_0^{2\pi} [\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)] d\eta d\varepsilon = 3.851 \quad (2.35)$$

L'approximation dans l'équation (2.33) est justifiée par le fait que le terme négligé représente la différence de la diffusion thermique axiale, entre l'entrée et la sortie de l'espace annulaire, qui est très faible par rapport au terme qui représente le chauffage de cylindre intérieur.

## 2.5. Le nombre de Nusselt:

Le transfert thermique peut être quantifié par un nombre de Nusselt.

### 2.5.1. Le nombre de Nusselt local :

Pour définir le nombre de Nusselt local, il faut définir le coefficient local de transfert de chaleur par convection  $h(\varepsilon, \eta)$ , à la paroi du cylindre intérieur. A cette paroi, on a l'égalité du flux de chaleur imposé par conduction et le flux de chaleur convecté par le fluide :

$$q_w = h(\eta, z)(T(0.5, \eta, z) - T_m(z)) = -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \quad (2.36)$$

De cette équation, il vient:

$$h(\eta, z) = \frac{\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5}}{(T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.37)$$

Si on définit le nombre de Nusselt local à la paroi du cylindre intérieur:

$$Nu(\eta, z) = \frac{ah(\eta, z)}{k_0} \quad (2.38)$$

Et avec l'équation (2.37) dans l'équation (2.38) on obtient :

$$Nu(\eta, z) = \frac{a \left[ \frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \right]}{k_0 (T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.39)$$

Ou sous forme adimensionnelle:

$$Nu(\eta, z^*) = \frac{1}{[T^*(0.5, \eta, z^*) - T_m^*(z^*)]} \frac{-1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} = \frac{1}{[T^*(0.5, \eta, z^*) - T_m^*(z^*)]} \quad (2.40)$$

### 2.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne :

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur et on divise le résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{P_1^*} \int_0^{2\pi} Nu(\eta, z^*) \sqrt{\sinh^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.41)$$

Si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit (un nombre réel positif):

$$\overline{Nu} = \frac{1}{100} \int_0^{100} Nu(z^*) dz^* \quad (2.42)$$

**Chapitre III**

L'étude Numérique

### 3.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on a montré l'étude numérique dans ce problème. La méthode numérique utilisée et le maillage. Aussi on a parlé du détail de la discrétisation de toutes les équations et les conditions aux limites. On a terminé ce chapitre par les critères de convergence et montre le bilan énergétique et thermique.

### 3.2. La méthode de résolution :

L'écoulement tridimensionnel entre deux cylindres elliptiques est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles, l'équation de conservation de la masse, l'équation de l'énergie et les trois équations de conservation de la quantité de mouvement, exprimées dans un système de coordonnées elliptiques. Ces équations sont non linéaires et ne peuvent pas se résoudre analytiquement. On les résout donc numériquement. Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution : les différences finies, les éléments finis, les volumes finis et les méthodes spectrales. Parmi ces méthodes on a choisi celle des volumes finis qui est souvent s'utilisée pour la solution des problèmes de mécanique des fluides et de transfert de chaleur. Parmi les avantages qu'elle présente on peut citer :

\*les équations aux différences ont une propriété conservatrice. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume fini typique et vérifié pour l'ensemble du domaine numérique.

\* sa pratique et sa maniabilité lors de la résolution de problèmes convectifs-diffusifs.

Dans cette méthode toutes les variables scalaires telles la température, la pression, la viscosité et la conductivité sont stockées dans les centres des volumes tandis que les vecteurs tels les composantes des vitesses sont stockés sur les faces des volumes de contrôle.

### 3.3. Le maillage :

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini de volumes. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces. La **Figure.3.1.** illustre un volume de contrôle typique. Le point P situé au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction.

\*pour la direction radiale, les points aux nœuds sont notés N, S et les faces sont repérées par n et s.

\*pour la direction azimutale, les points aux nœuds sont notés E, W et les faces sont repérées par e et w.

\* finalement suivant la direction axiale, les nœuds sont notés F, B et les faces sont notées f, b.

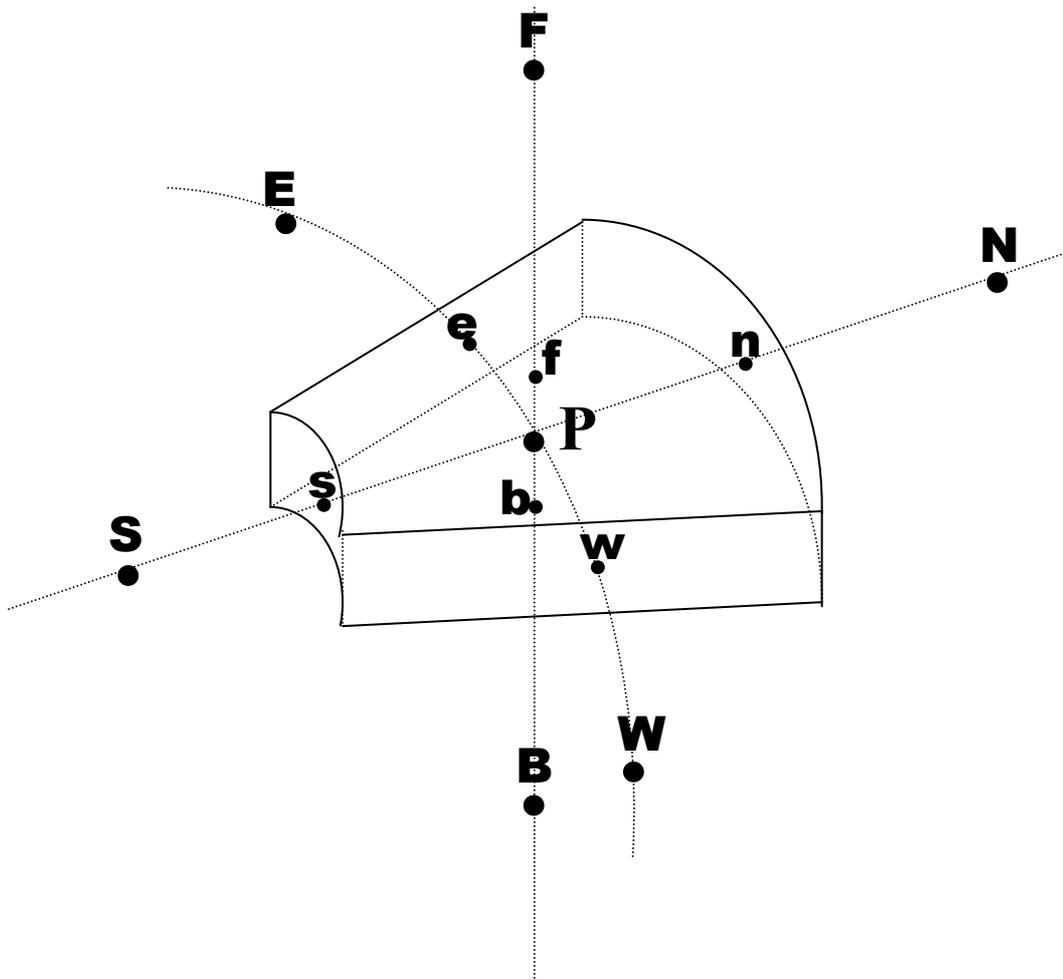
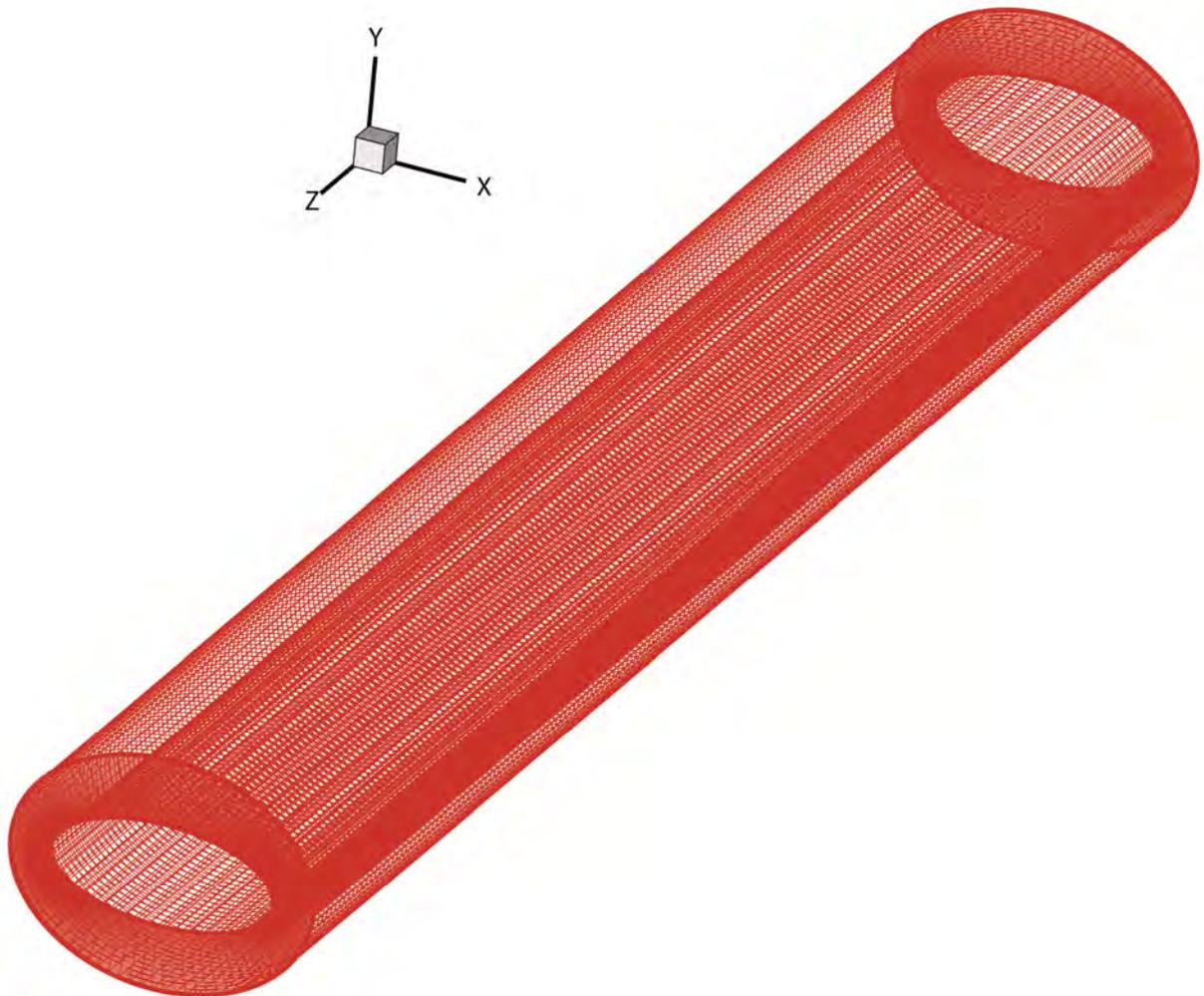


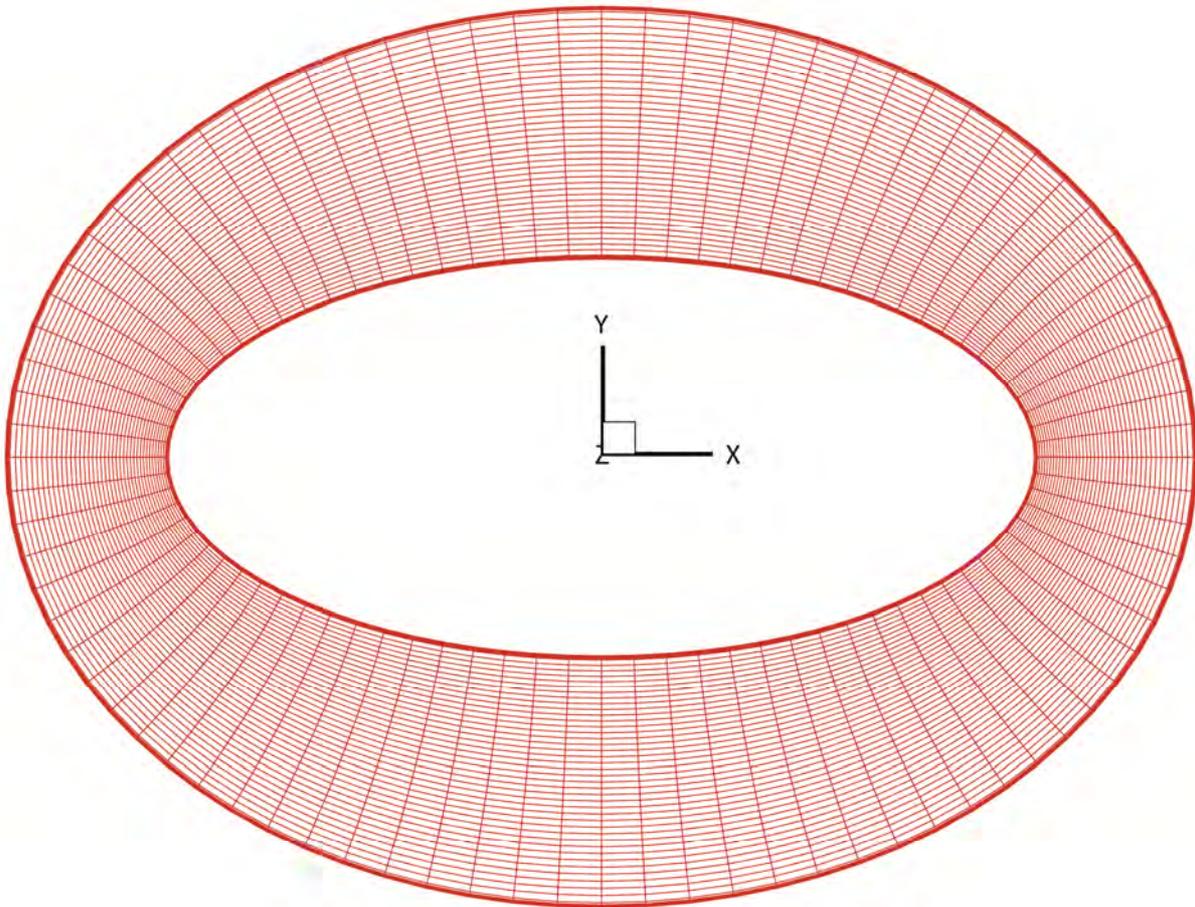
Figure.3.1. Le volume fini typique

Le maillage que nous avons choisi pour faire notre étude est schématiquement représenté sur la **Figure. 3.2**. Il est composé de 42 points suivant la direction radiale, 202 points suivant la direction axiale et 85 points suivant la direction azimutale. Tout maillage plus dense que celui qu'on a utilisé ( $42 \times 202 \times 84$ ) dépasse les capacités de stockage des meilleurs ordinateurs qui nous sont disponibles et des temps de calcul qui dépassent les durées pratiques. Toutefois, nous pensons que notre maillage peut être amélioré par un affinage, surtout suivant les directions azimutale et axiale, pour mieux discerner des variations qualitatives et quantitatives importantes de certains phénomènes complexes (surtout l'écoulement secondaire).

a)



b)



**Figure. 3.2. Le maillage numérique utilisé (a) et sa projection en coupe (b). La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.**

#### **3.4. Détails de discrétisation :**

Les discrétisations de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie sont faites dans un maillage non décalé dont les représentations surfaciques sont illustrées dans les **Figures .3.3- 3.5**. Pour la clarté de la présentation, les étoiles des variables non dimensionnelles sont omises.

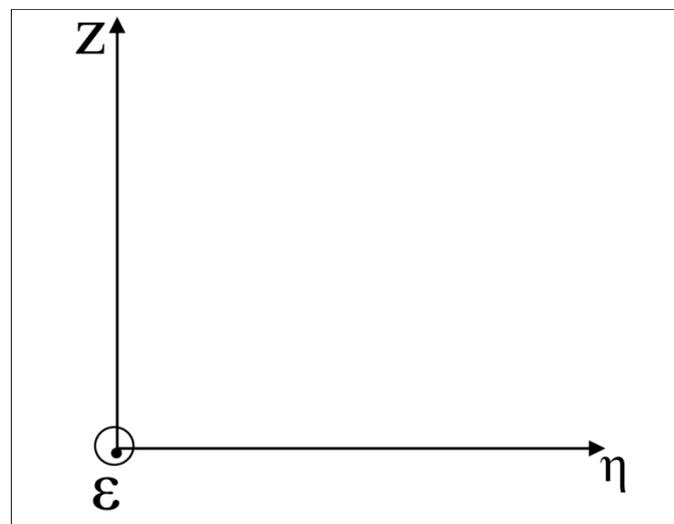
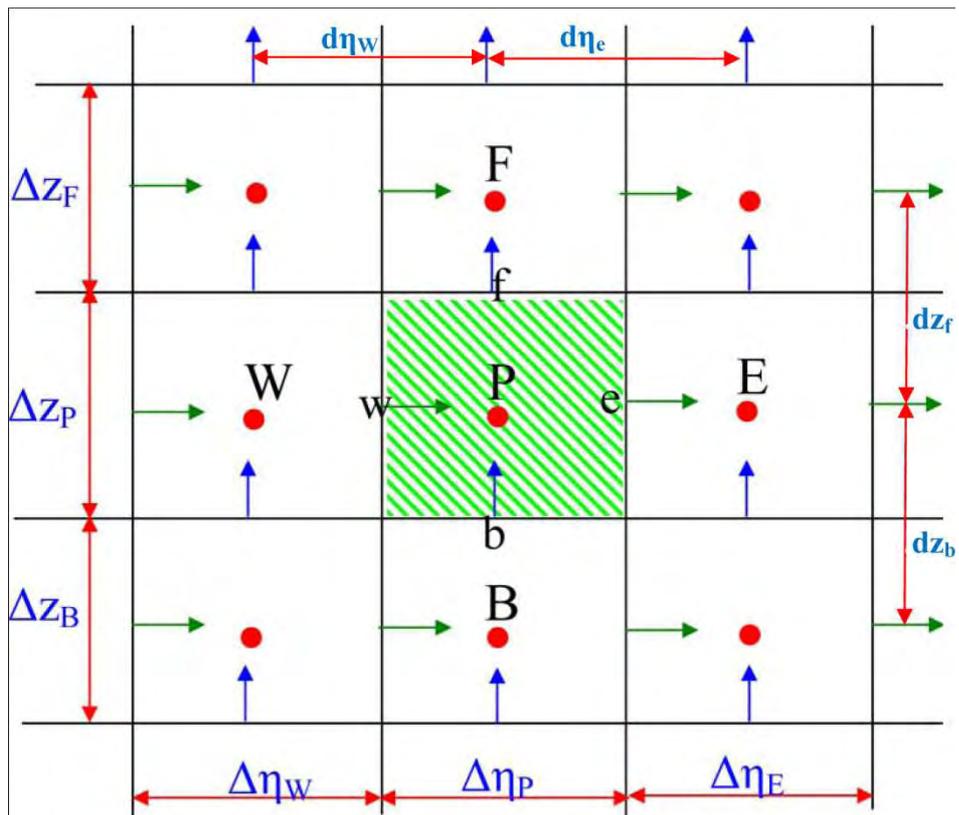


Figure .3.3. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta, z$ )

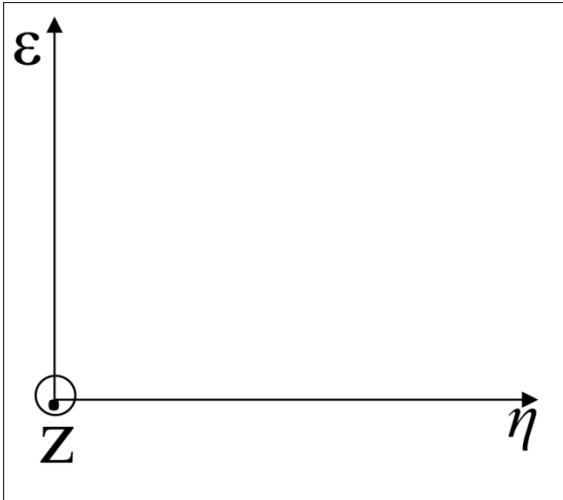
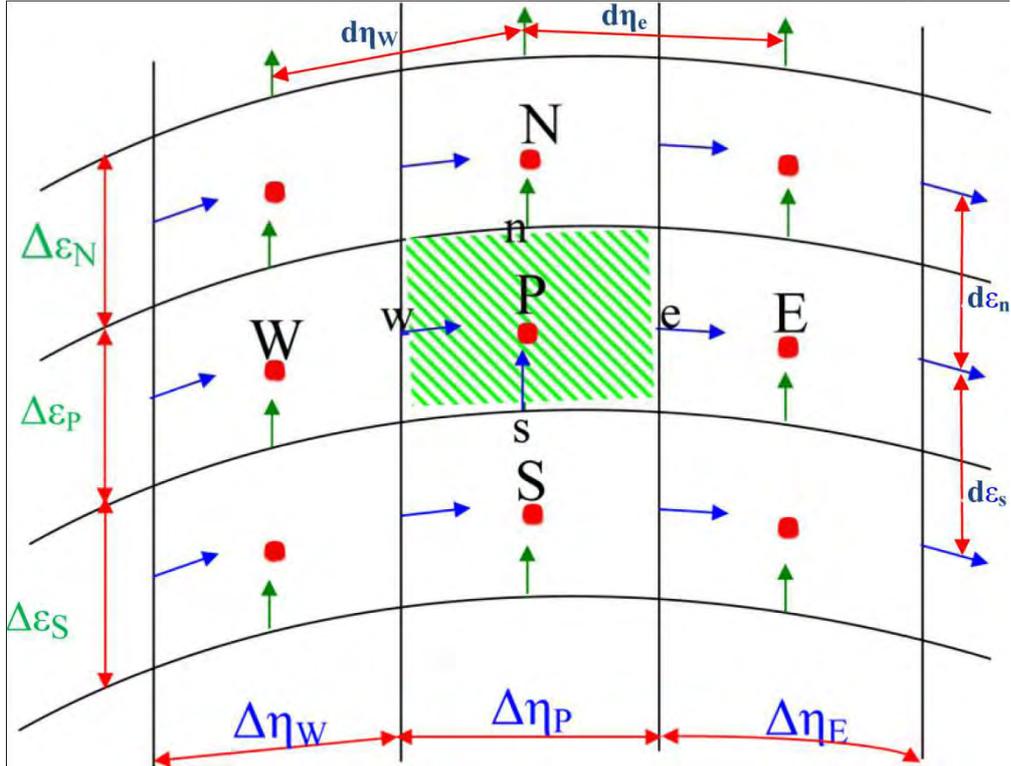


Figure .3.4. Maillage suivant les coordonnées  $(\eta, \epsilon)$

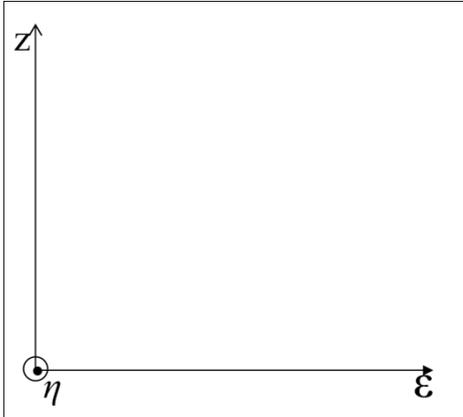
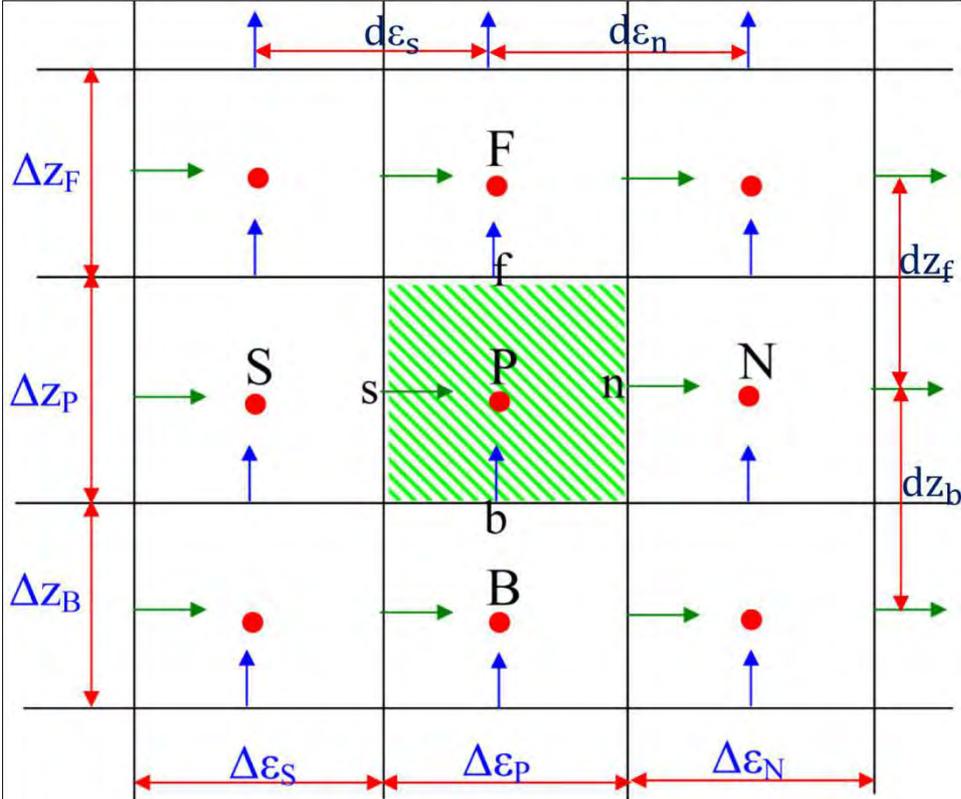


Figure .3.5. Maillage suivant les coordonnées  $(\epsilon, z)$

### 3.4.1. Discrétisation de l'équation de continuité :

Soit l'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini. Tous les termes dépendants du temps sont évalués au temps  $(t + \Delta t)$ .

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon]_s^n \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon|_s^{t+\Delta t}] \Delta \eta_p \Delta z_p$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta]_w^e \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta|_w^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z]_b^f \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ &= [h_1 h_2 V_z|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z|_b^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation est:

$$\begin{aligned} &[h_2 V_\varepsilon|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon|_s^{t+\Delta t}] \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta|_w^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ &[h_1 h_2 V_z|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z|_b^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.4.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie :

Soit l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] = \frac{1}{RePr h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.4)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de l'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini.

La discrétisation temporelle du terme transitoire est faite par le schéma **d'Euler-Backward** ayant une précision du second ordre :

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** (ayant une précision du second ordre) et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées (ayant une précision du second ordre) :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon T]_s^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon T|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon T|_s^{t+\Delta t}] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^t \left( \frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta T]_w^e |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta T|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta T|_w^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{1e} V_\eta |_e^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z T]_b^f |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= [h_1 h_2 V_z T|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z T|_b^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &\quad - \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs est semi implicite parce que la discrétisation de la conductivité thermique (dépendante de la température) est faite avec le schéma **d'Adam-Bashforth**

alors que la discrétisation temporelle de la température est implicite. La discrétisation spatiale des terme diffusif suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[ k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_n^{t+\Delta t} - k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_s^{t+\Delta t} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k_n^{t+\Delta t} \left( \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - k_s^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[ k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e^{t+\Delta t} - k \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k_e^{t+\Delta t} \left( \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right. \\
&\quad \left. - k_w^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[ k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad \left. - k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[ k_f^{t+\Delta t} \left( \frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \right. \\
&\quad \left. - k_b^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

On réarrange l'équation de l'énergie sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S \quad (3.5)$$

Les conductivités sont discrétisées avec le schéma **d'Adam-Bashforth** :

$$k_n^{t+\Delta t} = 2k_n^t - k_n^{t-\Delta t}$$

$$k_s^{t+\Delta t} = 2k_s^t - k_s^{t-\Delta t}$$

$$k_e^{t+\Delta t} = 2k_e^t - k_e^{t-\Delta t}$$

$$k_w^{t+\Delta t} = 2k_w^t - k_w^{t-\Delta t}$$

$$k_f^{t+\Delta t} = 2k_f^t - k_f^{t-\Delta t}$$

$$k_b^{t+\Delta t} = 2k_b^t - k_b^{t-\Delta t}$$

On note, que quelque soit le temps, on n'a pas les valeurs de la conductivité ( $k_n, k_s, k_e, k_w, k_f, k_b$ ) aux six faces du volume fini typique. Ce qu'on a sont les valeurs de la conductivités aux centres du volume fini et des six volumes finis qui lui sont adjacents : ( $k_p, k_N, k_S, k_E, k_W, k_F, k_B$ ). La détermination des conductivités des faces est basé sur la continuité du flux de chaleur entre volumes adjacents, à travers les faces qui les séparent. Une telle continuité permet la détermination des conductivités des faces en fonction des conductivités des volumes qu'elles séparent. Ainsi, on peut démontrer qu'à chaque temps :

$$k_e = \frac{2 d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_P + \Delta\eta_E}{k_P + k_E}}$$

$$k_w = \frac{2 d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P + \Delta\eta_W}{k_P + k_W}}$$

$$k_n = \frac{2 d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_N}{k_P + k_N}}$$

$$k_s = \frac{2 d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_S}{k_P + k_S}}$$

$$k_f = \frac{2 dz_f}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_F}{k_P + k_F}}$$

$$k_b = \frac{2 dz_b}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_B}{k_P + k_B}}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$A_N = \frac{1}{RePr} \frac{k_n^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta\eta_p \Delta z_p, \quad A_S = \frac{1}{RePr} \frac{k_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta\eta_p \Delta z_p$$

$$A_E = \frac{1}{RePr} \frac{k_e^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p, \quad A_W = \frac{1}{RePr} \frac{k_w^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p$$

$$A_F = \frac{1}{RePr} h_{1f} h_{2f} \frac{k_f^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p, \quad A_B = \frac{1}{RePr} h_{1b} h_{2b} \frac{k_b^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p$$

$$A_p = \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p - 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |n^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |s^t \left( \frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{2n} V_\varepsilon |n^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |s^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1e} V_\eta |e^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |w^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{1e} V_\eta |e^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |w^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |f^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |b^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& + \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |f^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |b^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

On remarque que les coefficients  $A_p, A_N, A_S, A_E, A_W, A_F, A_B$  sont toujours positifs et que  $A_p$  est supérieur à la somme des autres coefficients. Cette supériorité est avantageuse puisqu'il est connu qu'elle donne une dominance diagonale à la matrice des coefficient qui assure une bonne stabilité numérique des solutions des systèmes d'équations linéaires. Cependant, la source  $S$ , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, peut être positive, négative ou nulle. Cela peut poser un problème si cette dernière (la source) est négative car elle peut induire une température  $T_p^{t+\Delta t}$  négative. Alors que  $T_p^{t+\Delta t}$  doit être positive ou nulle (seulement à l'entrée). Et donc il faut trouver une reformulation de l'équation de discrétisation pour que les valeurs de  $T_p^{t+\Delta t}$  ne soient que positives ou nulles.

Une telle formulation est présentée dans ce qui suit :

Notons que la source  $S$ , qui peut être positive, négative ou nulle, peut être écrite comme la différence de deux termes positifs ou nuls :  $S = |S| - \max(-2S, 0)$  tel que :

$\max(-2S, 0)$  est le maximum des valeurs  $-2S$  et  $0$ .

Notons que  $|S|$  est toujours positive qui sera donc maintenue comme une source alors que

$-\max(-2S, 0)$  est écrit sous la forme :  $-\max(-2s, 0) = -\left[ \frac{\max(-2s, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right] T_p^{t+\Delta t}$

Ce terme est négatif. On le réécrit selon un coefficient de  $T_p^{t+\Delta t}$  puis on le ramène à gauche de l'équation de discrétisation qui devient :

$$\left( A_p + \frac{\max(-2s, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right) T_p^{t+\Delta t}$$

$$= A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |s| \quad (3.6)$$

Que l'on peut écrire comme suit :

$$A_p^* T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |s| \quad (3.7)$$

$$\text{Avec : } A_p^* = A_p + \frac{\max(-2s, 0)}{T_p^{t+\Delta t}}$$

Notons qu'à droite de la nouvelle équation de discrétisation, la source est toujours positive ou nulle. Cependant à gauche de cette équation on a un problème :

Le coefficient  $A_p^*$  contient une inconnue qui est la variable calculée  $T_p^{t+\Delta t}$ , cette dernière peut être remplacée par l'approximation,  $T_p^{t+\Delta t} = 2T_p^t - T_p^{t-\Delta t}$  seulement la différence  $2T_p^t - T_p^{t-\Delta t}$  peut être négative pendant le calcul et donc peut causer un problème! Pour éviter ce problème On envisage une solution itérative de l'équation de discrétisation non linéaire (3.8).

L'itération de la solution de cette équation, on considérera sa forme linéarisée comme suit :

$$\left( A_p + \frac{\max(-2s, 0)}{T_p^t} \right) T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |s| \quad (3.8)$$

C'est comme si  $T_p^t$  représente une initialisation pour  $T_p^{t+\Delta t}$ .

Durant les autres itérations, on considère la solution de l'équation :

$$\left( A_p + \frac{\max(-2s, 0)}{(T_p^{t+\Delta t})^*} \right) T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |s| \quad (3.9)$$

Ou,  $(T_p^{t+\Delta t})^*$  est la valeur de  $T_p^{t+\Delta t}$  obtenue de l'itération précédente. On espère qu'avec plusieurs itérations, on obtient la valeur de  $T_p^{t+\Delta t}$  qui satisfait l'équation non linéaire.

Cependant la procédure décrite n'est pas sans problème: si, durant le calcul,  $T_p^t$  (ou  $(T_p^{t+\Delta t})^*$ ) est égale à 0 ou très proche de 0, on peut avoir une division par 0 ou par un très petit nombres dans le coefficient de  $T_p^{t+\Delta t}$  ! Mais on peut éviter ce problème par une initialisation non nulle (dans les conditions initiales) du champ de  $T$  dans tout le domaine de calcul. Aussi, si dans certaines zones,  $T_p^{t+\Delta t}$  est très proche de 0, ses voisines le sont aussi et sa source est certainement très proche de 0 et ne pose pas de problème.

### 3.4.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant  $\varepsilon$ . Les **Figures 3.6. et 3.7.** représentent les projections du maillage sur les surfaces  $(\varepsilon, \eta)$  et  $(\varepsilon, z)$ . La projection sur la surface  $(\eta, z)$  est similaire à celle du maillage non décalé.

Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\
& = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \\
& \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé.

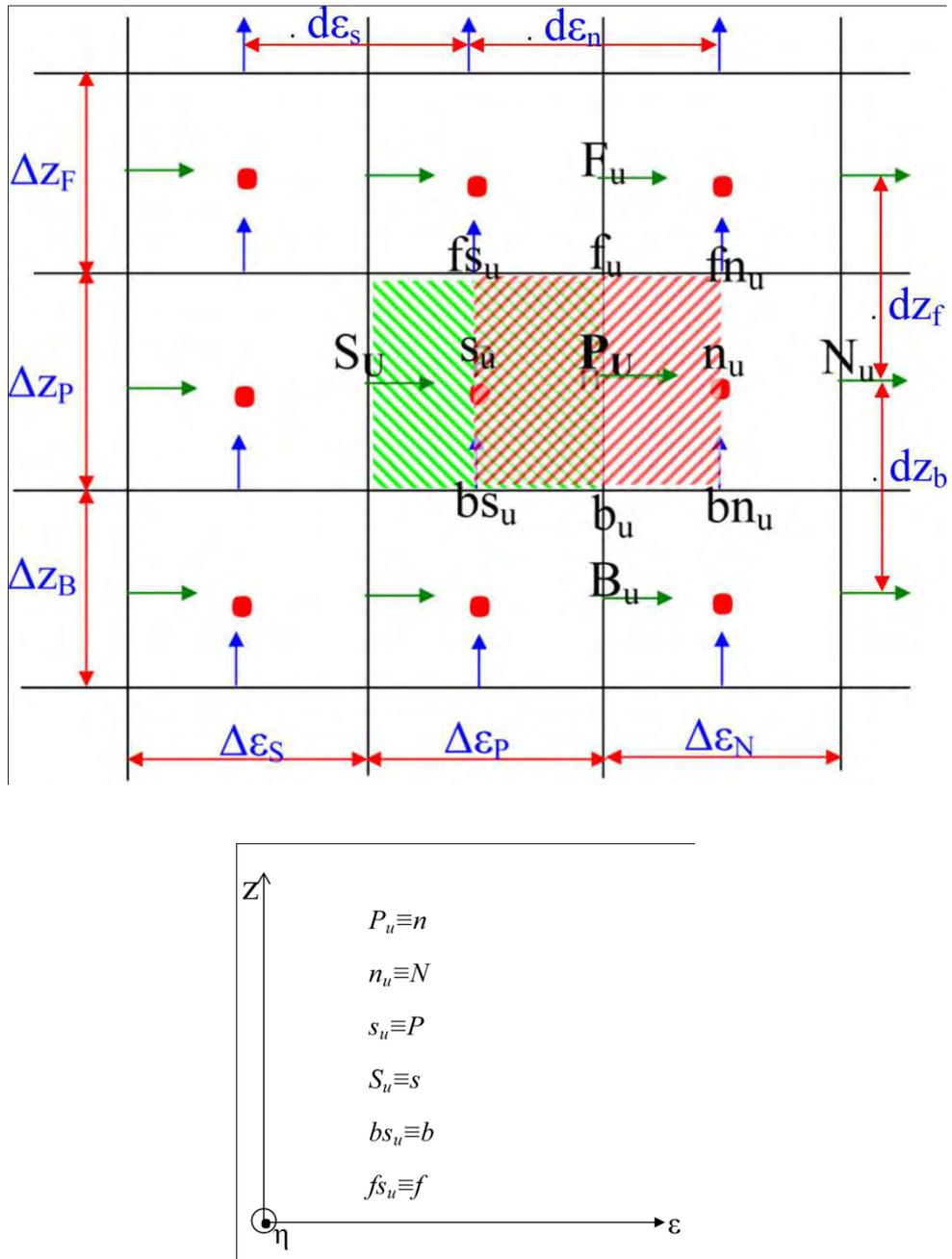


Figure .3.6. La projection de maillage décalé suivant  $\epsilon$  sur la surface  $(\epsilon, z)$

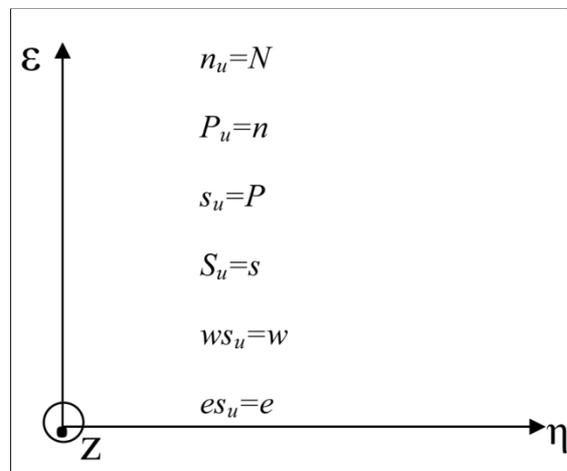
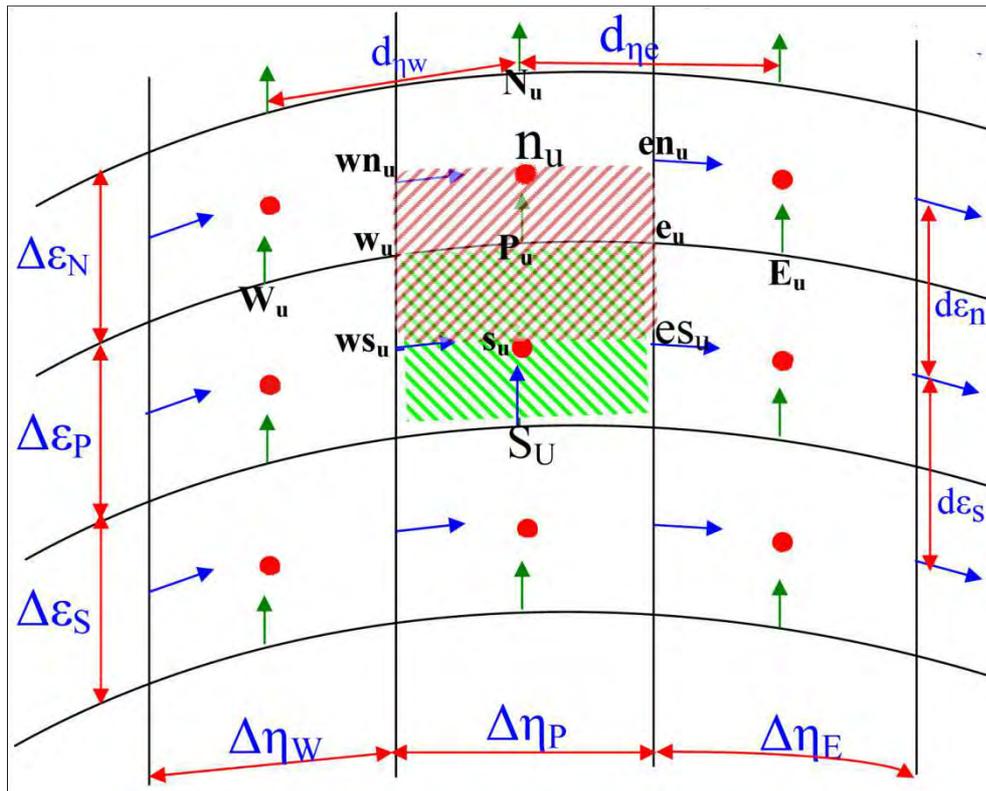


Figure.3.7 .La projection de maillage décalé suivant  $\epsilon$  sur la surface  $(\epsilon, \eta)$

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma **d'Euler-Backward**. La vitesse est localisée au centre du volume fini décalé.

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\varepsilon p_u}^{t+\Delta t} - 4V_{\varepsilon p_u}^t + V_{\varepsilon p_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_u} h_{2p_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini.

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{n_u}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{s_u}^{t+\Delta t} \Big] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{2n_u} \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ &- h_{2s_u} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ \begin{aligned} &h_{2n_u} \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{2s_u} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{e_u}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{w_u}^{t+\Delta t} \Big] d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ &- h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &\quad - \left[ \begin{aligned} &h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&= [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{f_u}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{w_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^t + V_{zf s_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon F_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^t + V_{zb s_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon B_u}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&\quad - \left[ \begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} + V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} + V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= 2V_{\varepsilon P_u}^t \left[ \frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&\quad - V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[ \frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= -2 \left[ \frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&\quad + \left[ \frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [-P]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= [P_{s_u}^{t+\Delta t} - P_{n_u}^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{2}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{2}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{n_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_N} \\ -\mu_{S_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_P} \end{array} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p$$

$$\mu_{n_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_u}^t - \mu_{n_u}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{S_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{S_u}^t - \mu_{S_u}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right]_{W_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p$$

$$= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \\ -\mu_{W_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p$$

$$\mu_{e_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_u}^t - \mu_{e_u}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{W_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{W_u}^t - \mu_{W_u}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p$$

$$= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{f_u}^{t+\Delta t} h_{1f_u} h_{2f_u} \frac{V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ -\mu_{b_u}^{t+\Delta t} h_{1b_u} h_{2b_u} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p$$

$$\mu_{f_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_u}^t - \mu_{f_u}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_u}^t - \mu_{b_u}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu_{P_u}^{t+\Delta t}}{h_{1P_u} h_{2P_u}} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\mu_{P_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \frac{2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_u}^t (V_{\eta n_u}^t + V_{\eta w n_u}^t)}{h_{1n_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^t (V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w s_u}^t)}{h_{1s_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ \frac{2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_u}^{t-\Delta t} (V_{\eta n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t})}{h_{1n_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^{t-\Delta t} (V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t})}{h_{1s_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{Re} \left[ \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \frac{-1}{Re} \left[ \frac{\mu_{e_u}^t (V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t)}{h_{1e_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^t (V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t)}{h_{1w_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &\quad - \left[ \frac{-1}{Re} \left[ \frac{\mu_{e_u}^{t-\Delta t} (V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t})}{h_{1e_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^{t-\Delta t} (V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t})}{h_{1w_u}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{V_\eta}{h_2} \right]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{2n_u}} \left( \frac{V_{\eta n_u}^t + V_{\eta w n_u}^t}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{2s_u}} \left( \frac{V_{\eta s_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&\quad - \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{2n_u}} \left( \frac{V_{\eta n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{2s_u}} \left( \frac{V_{\eta s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&\quad - \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&= \frac{2}{Re} \left[ \mu_{f_u}^t h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^t - V_{zf s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \mu_{b_u}^t h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^t - V_{zb s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&\quad - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{f_u}^{t-\Delta t} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} - V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \mu_{b_u}^{t-\Delta t} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} - V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-2\mu}{Re h_1 h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} [V_\eta]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[ \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^t \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \end{array} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&\quad - \left[ \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \Big|_{w_u}^{e_u} \right]^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_u}^t h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^t - V_{\eta es_u}^t}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) \\ - \mu_{w_u}^t h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^t - V_{\eta ws_u}^t}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&\quad - \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_u}^{t-\Delta t} h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) \\ - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{GrT}{Re^2} \frac{\cosh(\varepsilon) \sin(\eta) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz}{\sqrt{h_1 h_2}} &= \frac{Gr}{Re^2} T_{P_u}^{t+\Delta t} \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= 2 \frac{Gr}{Re^2} \left( \frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$-\frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard:

$$A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S_u + [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta Z_p \quad (3.11)$$

ou

$$A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S \quad (3.12)$$

Avec :

$$A_{N_u} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\mu_{N_u}^{t+\Delta t}}{\Delta\varepsilon_N} \Delta\eta_p \Delta Z_p, \quad A_{S_u} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\mu_{S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta\varepsilon_P} \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$A_{E_u} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_{E_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} d\varepsilon_n \Delta Z_p, \quad A_{W_u} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_{W_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$A_{F_u} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_{F_u}^{t+\Delta t}}{dz_f} d\varepsilon_n \Delta\eta_p, \quad A_{B_u} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_{B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} d\varepsilon_n \Delta\eta_p$$

$$A_{P_u} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu_{P_u}^{t+\Delta t}}{h_{1P_u} h_{2P_u}} \left. \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right|_{P_u} \left. \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$+ A_{N_u} + A_{S_u} + A_{E_u} + A_{W_u} + A_{F_u} + A_{B_u}$$

$$S = S_u + [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$S_u = \frac{4V_{\varepsilon P_u}^t - V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$-2 \left[ h_{2n_u} \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{2s_u} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$+ \left[ h_{2n_u} \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_u} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p$$

$$-2 \left[ h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$+ \left[ h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$-2 \left[ h_{1f_u} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^t + V_{zf s_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon F_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1b_u} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^t + V_{zb s_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon B_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p$$

$$+ \left[ \begin{array}{l} h_{1f_u} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} + V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{1b_u} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} + V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p$$

$$\begin{aligned}
& -2V_{\varepsilon P_u}^t \left[ \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[ \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[ \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& - \left[ \frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[ \frac{2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_u}^t}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta en_u}^t + V_{\eta wn_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^t}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta es_u}^t + V_{\eta ws_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& - \left[ \frac{2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[ \frac{-1}{Re} \left[ \frac{\mu_{e_u}^t}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^t}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \left[ \frac{-1}{Re} \left[ \frac{\mu_{e_u}^{t-\Delta t}}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^{t-\Delta t}}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& + \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{2n_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon en_u}^t + V_{\varepsilon wn_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon es_u}^t + V_{\varepsilon ws_u}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& - \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{2n_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon en_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon wn_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon es_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[ \frac{1}{h_{1e_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left( \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{f_u}^t h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^t - V_{zf s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^t h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^t - V_{zb s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{f_u}^{t-\Delta t} h_{2f_u} \left( \frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} - V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^{t-\Delta t} h_{2b_u} \left( \frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} - V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& + 2 \left[ \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^t \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[ \left( \frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) - \left( \frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[ \left( \frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{e_u}^t h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta e n_u}^t V_{\eta e s_u}^t}{h_{2e n_u} h_{2e s_u}} \right) - \mu_{w_u}^t h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta w n_u}^t V_{\eta w s_u}^t}{h_{2w n_u} h_{2w s_u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{e_u}^{t-\Delta t} h_{1e_u} \left( \frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t}}{h_{2e n_u} h_{2e s_u}} \right) - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} h_{1w_u} \left( \frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{h_{2w n_u} h_{2w s_u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& + 2 \frac{Gr}{Re^2} \left( \frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Nous avons mentionné que la discrétisation temporelle de la viscosité est explicite selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décalé, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Ces approximations sont mieux présentées avec une notation indicielle des viscosités qui sont stockées dans les centres des volumes finis typiques (non décalés). Dans ce qui suit, la notation  $(i, j, k)$  fait référence à un point centré dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Au centre et aux faces du volume fini décalé (suivant  $\varepsilon$ ), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{P_u}^t = \frac{2d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i,j,k)}}$$

$$\mu_{P_u}^{t-\Delta t} = \frac{2d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}}$$

$$\mu_{n_u}^t = \mu^t(i+1, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{n_u}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i+1, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{s_u}^t = \mu^t(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{s_u}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{e_u}^t = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^t(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^t(i+1,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{e_u}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{w_u}^t = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu^t(i,j,k-1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu^t(i+1,j,k-1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{w_u}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k-1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k-1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{f_u}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^t(i,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^t(i+1,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{f_u}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^{t-\Delta t}(i,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{b_u}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu^t(i,j-1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu^t(i+1,j-1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i+1,j,k)}}$$

$$\mu_{b_u}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu^{t-\Delta t}(i,j-1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j-1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)}}$$

### 3.4.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant  $\eta$ . Les **Figures 3.8. et 3.9.** représentent les projections du maillage sur les surfaces  $(\varepsilon, \eta)$  et  $(\eta, z)$ . La projection sur la surface  $(\varepsilon, z)$  est similaire à celle du maillage non décalé.

Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\ &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\ & \quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé.

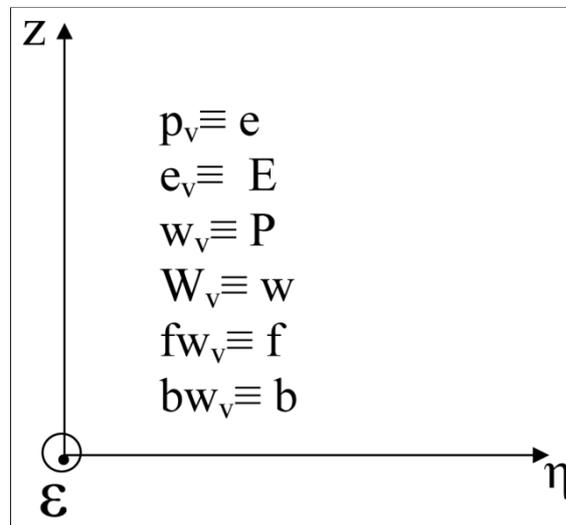
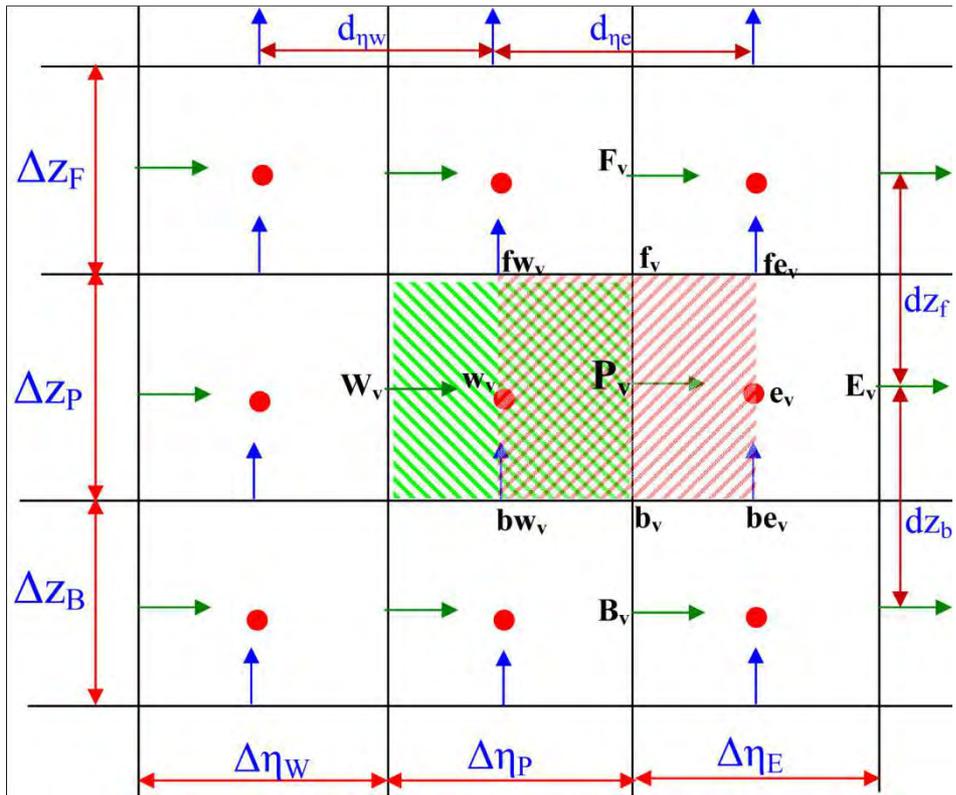


Figure.3.8. Le maillage décalé suivant  $\eta$  sur la surface  $(\eta, z)$

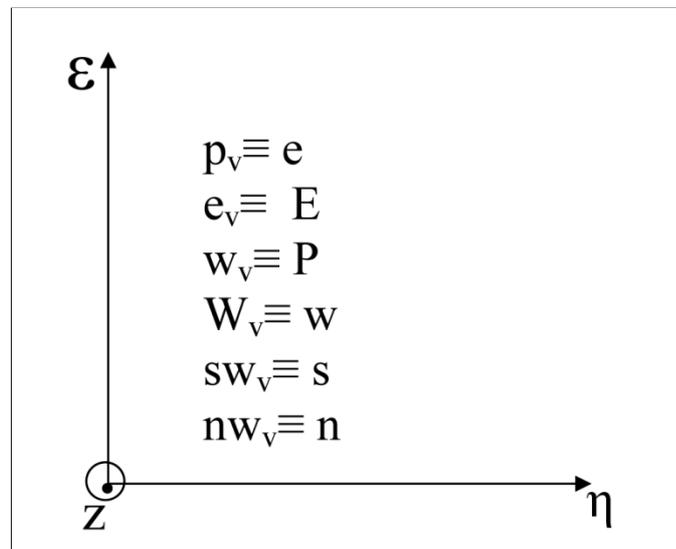
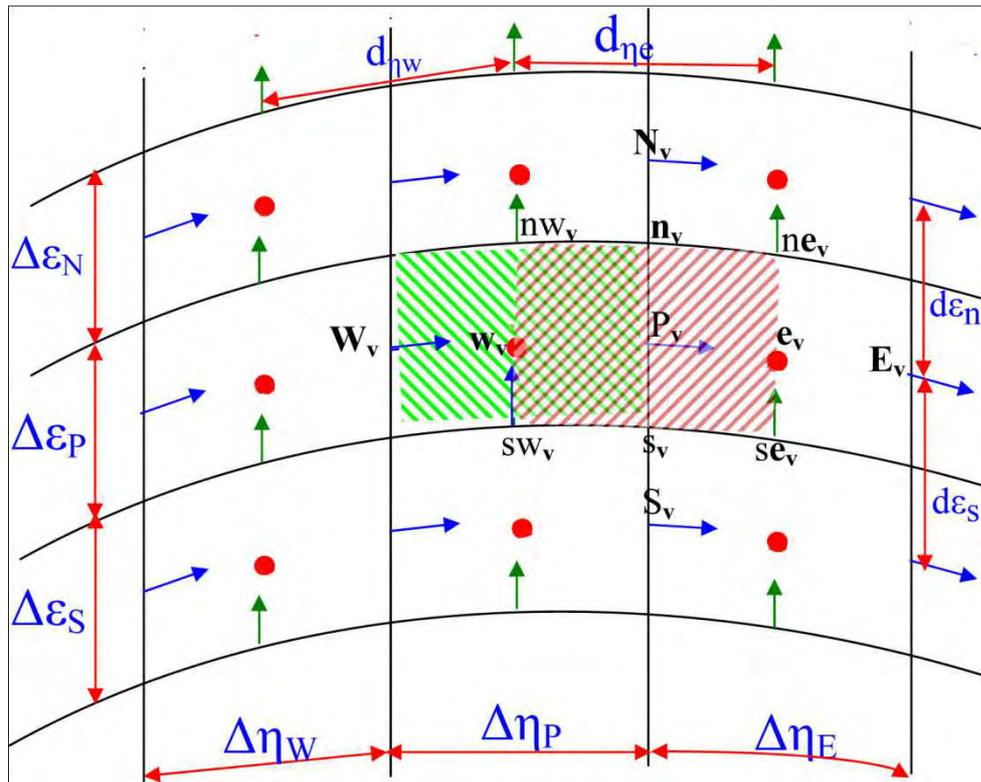


Figure.3.9. Le maillage décalé suivant  $\eta$  sur la surface  $(\eta, \epsilon)$

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma **d'Euler-Backward**. La vitesse est localisée au centre du volume fini décalé suivant  $\eta$ .

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_\eta^{t+\Delta t} - 4V_\eta^t + V_\eta^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_v} h_{2p_v} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini.

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{n_v}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{S_v}^{t+\Delta t} \Big] d\eta_e \Delta Z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{2n_v} \left( \frac{V_\varepsilon^{t n_e v} + V_\varepsilon^{t n w_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t N_v} + V_\eta^{t P_v}}{2} \right) \\ &- h_{2S_v} \left( \frac{V_\varepsilon^{t s_e v} + V_\varepsilon^{t s w_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t P_v} + V_\eta^{t S_v}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\ &\quad - \left[ \begin{aligned} &h_{2n_v} \left( \frac{V_\varepsilon^{t-\Delta t n_e v} + V_\varepsilon^{t-\Delta t n w_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t N_v} + V_\eta^{t-\Delta t P_v}}{2} \right) \\ &- h_{2S_v} \left( \frac{V_\varepsilon^{t-\Delta t s_e v} + V_\varepsilon^{t-\Delta t s w_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t P_v} + V_\eta^{t-\Delta t S_v}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\eta_e \Delta Z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{W_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{e_v}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\eta]_{W_v}^{t+\Delta t} \Big] \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1e_v} \left( \frac{V_\eta^{t E_v} + V_\eta^{t P_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t E_v} + V_\eta^{t P_v}}{2} \right) \\ &- h_{1W_v} \left( \frac{V_\eta^{t P_v} + V_\eta^{t W_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t P_v} + V_\eta^{t W_v}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\ &\quad - \left[ \begin{aligned} &h_{1e_v} \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t E_v} + V_\eta^{t-\Delta t P_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t E_v} + V_\eta^{t-\Delta t P_v}}{2} \right) \\ &- h_{1W_v} \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t P_v} + V_\eta^{t-\Delta t W_v}}{2} \right) \left( \frac{V_\eta^{t-\Delta t P_v} + V_\eta^{t-\Delta t W_v}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_v}^{f_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \\ &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{f_v}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_v}^{t+\Delta t} \Big] \Delta\varepsilon_p d\eta_e \end{aligned}$$

$$= 2 \left[ \begin{array}{l} h_{1f_v} h_{2f_v} \left( \frac{V_{zf_{e_v}}^t + V_{zf_{w_v}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{F_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) \\ - h_{1b_v} h_{2b_v} \left( \frac{V_{zb_{e_v}}^t + V_{zb_{w_v}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{B_v}}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e$$

$$- \left[ \begin{array}{l} h_{1f_v} h_{2f_v} \left( \frac{V_{zf_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{zf_{w_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{F_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{1b_v} h_{2b_v} \left( \frac{V_{zb_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{zb_{w_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{B_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$= 2 \left[ \left( \frac{V_{\eta_{e_v}}^t + V_{\eta_{n_{w_v}}}^t + V_{\eta_{s_{e_v}}}^t + V_{\eta_{s_{w_v}}}^t}{4} \right) V_{\eta_{P_v}}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$- \left[ \left( \frac{V_{\eta_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{n_{w_v}}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{s_{e_v}}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{s_{w_v}}}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = -V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$= -2 \left[ \left( \frac{V_{\eta_{e_v}}^t + V_{\eta_{n_{w_v}}}^t + V_{\eta_{s_{e_v}}}^t + V_{\eta_{s_{w_v}}}^t}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$+ \left[ \left( \frac{V_{\eta_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{n_{w_v}}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{s_{e_v}}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{s_{w_v}}}^{t-\Delta t}}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = -[P]_{w_v}^{e_v} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P$$

$$= -[P_{e_v}^{t+\Delta t} - P_{w_v}^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P$$

$$= [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P$$

La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\ &= \frac{1}{Re} \left[ \mu_{n_v}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta N_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} - \mu_{S_v}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta S_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \right] d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned}$$

$$\mu_{n_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_v}^t - \mu_{n_v}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{S_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{S_v}^t - \mu_{S_v}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right]_{w_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \mu_{e_v}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta E_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} - \mu_{w_v}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta W_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_P} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \end{aligned}$$

$$\mu_{e_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_v}^t - \mu_{e_v}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{w_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_v}^t - \mu_{w_v}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{b_v}^{f_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ &= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_v}^{t+\Delta t} h_{1f_v} h_{2f_v} \frac{V_{\eta F_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_v}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ - \mu_{b_v}^{t+\Delta t} h_{1b_v} h_{2b_v} \frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \end{aligned}$$

$$\mu_{f_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_v}^t - \mu_{f_v}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_v}^t - \mu_{b_v}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu_{P_v}^{t+\Delta t}}{h_{1P_v} h_{2P_v}} V_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned}$$

$$\mu_{P_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_v}^t - \mu_{P_v}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right]_{b_v}^{f_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_v}^t h_{1f_v} \frac{V_{zf_{e_v}}^t - V_{zf_{w_v}}^t}{d\eta_e} \\ - \mu_{b_v}^t h_{1b_v} \frac{V_{zbe_v}^t - V_{zbe_{w_v}}^t}{d\eta_w} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{f_v}^{t-\Delta t} h_{1f_v} \frac{V_{zfe_v}^{t-\Delta t} - V_{zfw_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \\ -\mu_{b_v}^{t-\Delta t} h_{1b_v} \frac{V_{zbe_v}^{t-\Delta t} - V_{zbw_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{n_v}^t h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_v}^t}{h_{1ne_v}} - \frac{V_{\varepsilon nw_v}^t}{h_{1nw_v}}}{d\eta_e} \\ -\mu_{s_v}^t h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_v}^t}{h_{1se_v}} - \frac{V_{\varepsilon sw_v}^t}{h_{1sw_v}}}{d\eta_s} \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$-\frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{n_v}^{t-\Delta t} h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_v}} - \frac{V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t}}{h_{1nw_v}}}{d\eta_e} \\ -\mu_{s_v}^{t-\Delta t} h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t}}{h_{1se_v}} - \frac{V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{h_{1sw_v}}}{d\eta_s} \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{-1}{Re} \left[ \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P$$

$$= \frac{-2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \frac{\mu_{n_v}^t}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left( \frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \\ -\frac{\mu_{s_v}^t}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left( \frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$+ \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \frac{\mu_{n_v}^{t-\Delta t}}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left( \frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -\frac{\mu_{s_v}^{t-\Delta t}}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left( \frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{V_\eta}{h_2} \right]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P$$

$$= \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_v}} \left( \frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \\ -\frac{1}{h_{2s_v}} \left( \frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$-\frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_v}} \left( \frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -\frac{1}{h_{2s_v}} \left( \frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{W_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1e_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon e v}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1w_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&\quad - \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1e_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon e v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1w_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-2}{Re h_1 h_2} \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-2}{Re} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} [V_\varepsilon]_{S_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\
&= 2 \frac{-2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
&\quad - \frac{-2}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{W_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{e_v}^t \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon e v}^t}{2} \right) \\ - 2\mu_{w_v}^t \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&\quad - \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon e v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - 2\mu_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{GrT}{Re^2} \frac{\sinh(\varepsilon) \cos(\eta)}{\sqrt{h_1 h_2}} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_v} h_{2P_v}} \sinh(\varepsilon_{P_v}) \cos(\eta_{P_v}) T_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
&= \frac{2Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_v} h_{2P_v}} \sinh(\varepsilon_{P_v}) \cos(\eta_{P_v}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned}$$

$$-\frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_v} h_{2P_v}} \sinh(\varepsilon_{P_v}) \cos(\eta_{P_v}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard:

$$A_{P_v} V_{\eta_{P_v}}^{t+\Delta t} = A_{N_v} V_{\eta_{N_v}}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{\eta_{S_v}}^{t+\Delta t} + A_{E_v} V_{\eta_{E_v}}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{\eta_{W_v}}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{\eta_{F_v}}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{\eta_{B_v}}^{t+\Delta t} + S_v \\ + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \quad (3.14)$$

Ou

$$A_{P_v} V_{\eta_{P_v}}^{t+\Delta t} = A_{N_v} V_{\eta_{N_v}}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{\eta_{S_v}}^{t+\Delta t} + A_{E_v} V_{\eta_{E_v}}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{\eta_{W_v}}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{\eta_{F_v}}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{\eta_{B_v}}^{t+\Delta t} + S \quad (3.15)$$

Avec :

$$A_{N_v} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{N_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} d\eta_e \Delta Z_P, \quad A_{S_v} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{S_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} d\eta_e \Delta Z_P \\ A_{E_v} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{E_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P, \quad A_{W_v} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{W_v}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_P} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ A_{F_v} = \frac{1}{Re} h_{1f_v} h_{2f_v} \frac{\mu_{f_v}^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta \varepsilon_P d\eta_e, \quad A_{B_v} = \frac{1}{Re} h_{1b_v} h_{2b_v} \frac{\mu_{b_v}^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta \varepsilon_P d\eta_e$$

$$A_{P_v} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P + \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_v}^{t+\Delta t}}{h_{1P_v} h_{2P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$+ A_{N_v} + A_{S_v} + A_{E_v} + A_{W_v} + A_{F_v} + A_{B_v}$$

$$S = S_v + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P$$

$$S_v = \frac{4V_{\eta_{P_v}}^t - V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ - 2 \left[ h_{2n_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{N_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) - h_{2s_v} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{S_v}}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\ + \left[ h_{2n_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{N_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_v} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{S_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\ - 2 \left[ h_{1e_v} \left( \frac{V_{\eta_{E_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{E_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) - h_{1w_v} \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{W_v}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{W_v}}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ + \left[ h_{1e_v} \left( \frac{V_{\eta_{E_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{E_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_v} \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{W_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{W_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ - 2 \left[ h_{1f_v} h_{2f_v} \left( \frac{V_{z f e_v}^t + V_{z f w_v}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{F_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) - h_{1b_v} h_{2b_v} \left( \frac{V_{z b e_v}^t + V_{z b w_v}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{B_v}}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ + \left[ h_{1f_v} h_{2f_v} \left( \frac{V_{z f e_v}^{t-\Delta t} + V_{z f w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{F_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b_v} h_{2b_v} \left( \frac{V_{z b e_v}^{t-\Delta t} + V_{z b w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t} + V_{\eta_{B_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ - 2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{4} \right) V_{\eta_{P_v}}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
& + 2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
& - \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{f_v}^t h_{1f_v} \frac{V_{zfe_v}^t - V_{zfw_v}^t}{d\eta_e} - \mu_{b_v}^t h_{1b_v} \frac{V_{zbe_v}^t - V_{zbw_v}^t}{d\eta_w} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{f_v}^{t-\Delta t} h_{1f_v} \frac{V_{zfe_v}^{t-\Delta t} - V_{zfw_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} - \mu_{b_v}^{t-\Delta t} h_{1b_v} \frac{V_{zbe_v}^{t-\Delta t} - V_{zbw_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{n_v}^t h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_v}^t}{h_{1ne_v}} \frac{V_{\varepsilon nw_v}^t}{h_{1nw_v}}}{d\eta_e} - \mu_{s_v}^t h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_v}^t}{h_{1se_v}} \frac{V_{\varepsilon sw_v}^t}{h_{1sw_v}}}{d\eta_s} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{n_v}^{t-\Delta t} h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_v}} \frac{V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t}}{h_{1nw_v}}}{d\eta_e} - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t}}{h_{1se_v}} \frac{V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{h_{1sw_v}}}{d\eta_s} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{-2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_v}^t}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left( \frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - \frac{\mu_{s_v}^t}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left( \frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_v}^{t-\Delta t}}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left( \frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{\mu_{s_v}^{t-\Delta t}}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left( \frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{1}{h_{2n_v}} \left( \frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_v}} \left( \frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& - \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{1}{h_{2n_v}} \left( \frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_v}} \left( \frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{1}{h_{1e_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
& - \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[ \frac{1}{h_{1e_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_v}} \left( \frac{V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
& + 2 \frac{-2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon nw_v}^t}{2} \right) - \left( \frac{V_{\varepsilon se_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& - \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
& + \frac{2}{Re} \left[ 2\mu_{e_v}^t \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left( \frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t}{2} \right) - 2\mu_{w_v}^t \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left( \frac{V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{Re} \left[ 2\mu_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - 2\mu_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left( \frac{V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
& + \frac{2Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_v} h_{2P_v}} \sinh(\varepsilon_{P_v}) \cos(\eta_{P_v}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_v} h_{2P_v}} \sinh(\varepsilon_{P_v}) \cos(\eta_{P_v}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle de la viscosité est explicite selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décalé, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Ces approximations sont mieux présentées avec une notation indicielle des viscosités qui sont stockées dans les centres des volumes finis typiques (non décalés). Dans ce qui suit, la notation  $(i, j, k)$  fait référence à un point centré dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Au centre et aux faces du volume fini décalé (suivant  $\eta$ ), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{P_v}^t = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^t(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i,j,k)}}$$

$$\mu_{P_v}^{t-\Delta t} = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}}$$

$$\mu_{e_v}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{e_v}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{w_v}^t = \mu^t(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{w_v}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{n_v}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^t(i+1,j,k)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^t(i+1,j,k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i,j,k+1)}}$$

$$\mu_{n_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t}(i+1,j,k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)}}$$

$$\mu_{s_v}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i,j,k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^t(i-1,j,k)}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^t(i-1,j,k+1)}}$$

$$\mu_{s_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^{t-\Delta t}(i-1,j,k)}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^{t-\Delta t}(i-1,j,k+1)}}$$

$$\mu_{f_v}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^t(i,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k)}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^t(i,j+1,k+1)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k+1)}}$$

$$\mu_{f_v}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^{t-\Delta t}(i,j+1,k)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu^{t-\Delta t}(i,j+1,k+1)} + \frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)}}$$

$$\mu_{b_v}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k)} + \frac{\Delta z_B}{\mu^t(i,j-1,k)}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{\mu^t(i,j,k+1)} + \frac{\Delta z_B}{\mu^t(i,j-1,k+1)}}$$

$$\mu_{b_v}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k)} + \frac{\Delta z_B}{\mu^{t-\Delta t}(i,j-1,k)}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P}{\mu^{t-\Delta t}(i,j,k+1)} + \frac{\Delta z_B}{\mu^{t-\Delta t}(i,j-1,k+1)}}$$

### 3.4.5. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant z. Les **Figures 3.10. et 3.11.** représentent les projections du maillage sur les surfaces  $(\varepsilon, z)$ ,  $(\eta, z)$ . La projection sur la surface  $(\varepsilon, \eta)$  est similaire à celle du maillage non décalé.

Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant z:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

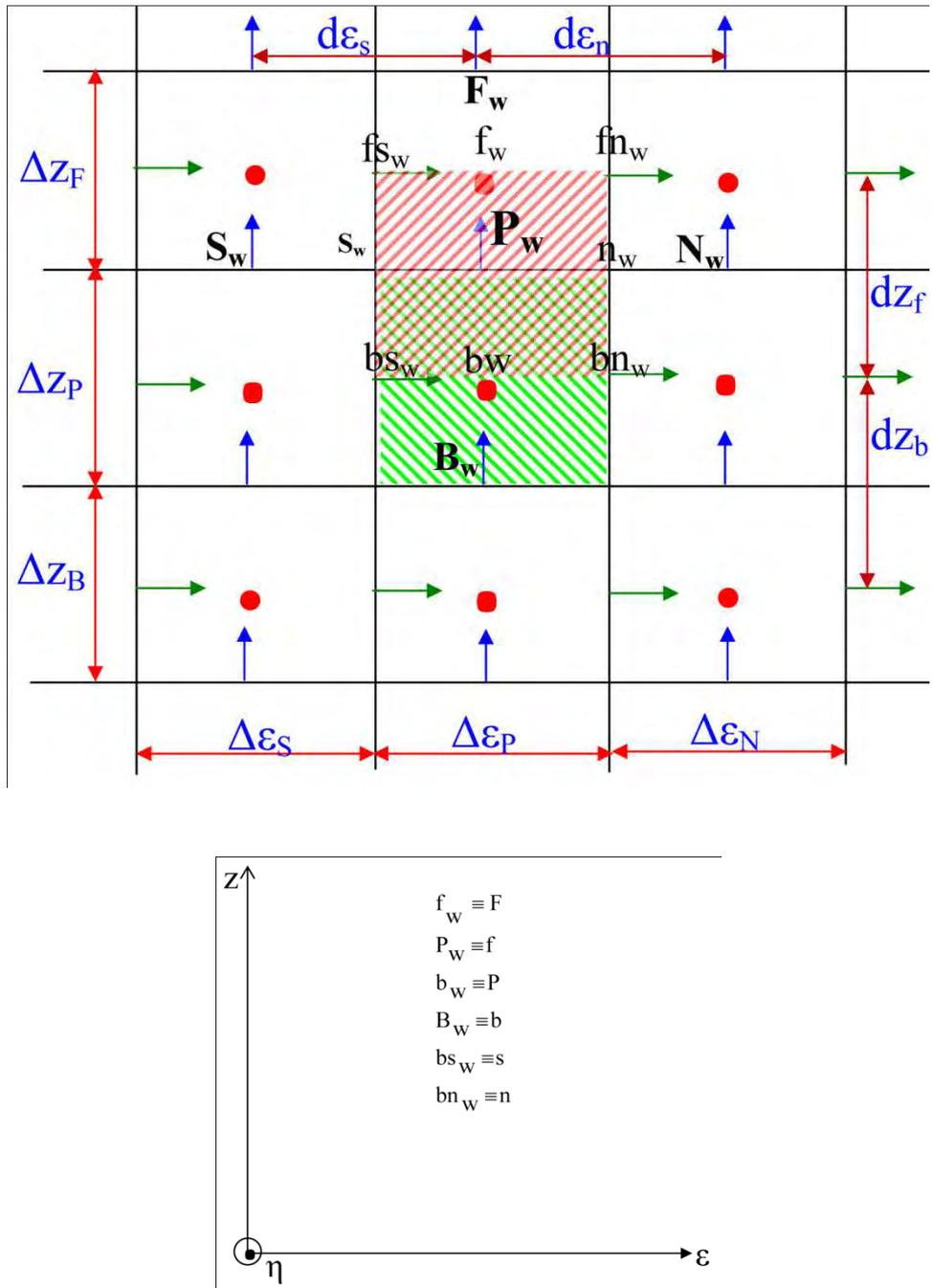


Figure.3.10. Le maillage décalé suivant z sur la surface ( $\epsilon, z$ ).

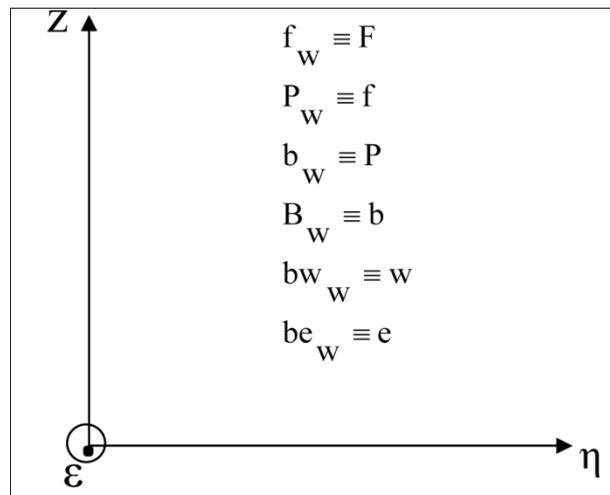
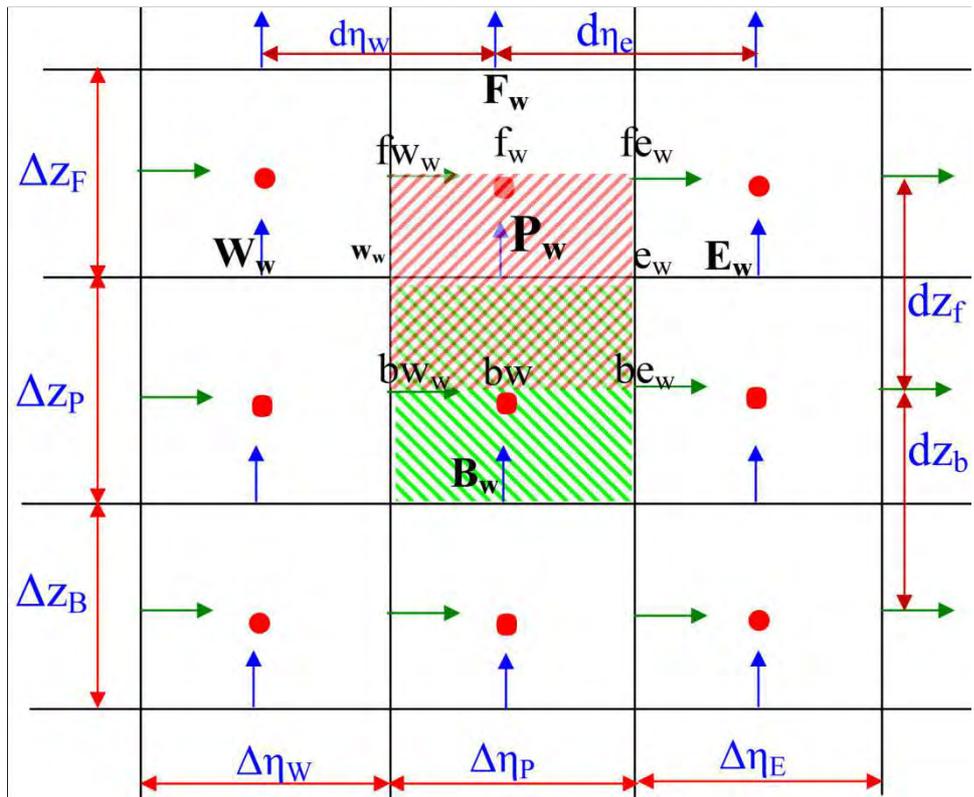


Figure.3.11. Le maillage décalé suivant z sur la surface  $(\eta, z)$ .

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé.

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma **d'Euler-Backward**. La vitesse est localisée au centre du volume fini décalé suivant  $z$ .

$$\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{\partial V_z}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{zp_w}^{t+\Delta t} - 4V_{zp_w}^t + V_{zp_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P dz_f$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions.

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_z]_{s_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_P dz_f \\ &= 2 \left[ \begin{array}{l} h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^t + V_{\varepsilon b n_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{z n_w}^t + V_{z p_w}^t}{2} \right) - \\ h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^t + V_{\varepsilon b s_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{z p_w}^t + V_{z s_w}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_P dz_f \\ &\quad - \left[ \begin{array}{l} h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{z n_w}^{t-\Delta t} + V_{z p_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{z p_w}^{t-\Delta t} + V_{z s_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_P dz_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_z]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P dz_f \\ &= 2 \left[ \begin{array}{l} h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^t + V_{\eta b e_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{z e_w}^t + V_{z p_w}^t}{2} \right) \\ - h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^t + V_{\eta b w_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{z p_w}^t + V_{z w_w}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\varepsilon_P dz_f \\ &\quad - \left[ \begin{array}{l} h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{z e_w}^{t-\Delta t} + V_{z p_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{z p_w}^{t-\Delta t} + V_{z w_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\varepsilon_P dz_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_z]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&= 2 \left[ \begin{array}{l} h_{1f_w} h_{2f_w} \left( \frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \\ -h_{1b_w} h_{2b_w} \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&\quad - \left[ \begin{array}{l} h_{1f_w} h_{2f_w} \left( \frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -h_{1b_w} h_{2b_w} \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} -\frac{\partial P}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [-P]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&= -[P_{f_w}^{t+\Delta t} - P_{b_w}^{t+\Delta t}] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des trois premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions.

$$\begin{aligned}
\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right]_{s_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_P dz_f \\
&= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{n_w}^{t+\Delta t} \left( \frac{V_{zN_w}^{t+\Delta t} - V_{zP_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \\ -\mu_{s_w}^{t+\Delta t} \left( \frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zS_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_P dz_f
\end{aligned}$$

$$\mu_{n_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_w}^t - \mu_{n_w}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{s_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_w}^t - \mu_{s_w}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P dz_f$$

$$= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_w}^{t+\Delta t} \left( \frac{V_{zE_w}^{t+\Delta t} - V_{zP_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ -\mu_{w_w}^{t+\Delta t} \left( \frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zW_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P dz_f$$

$$\mu_{e_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_w}^t - \mu_{e_w}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{w_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_w}^t - \mu_{w_w}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{f_w}^{t+\Delta t} h_{1f_w} h_{2f_w} \left( \frac{V_{zF_w}^{t+\Delta t} - V_{zP_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_E} \right) \\ -\mu_{b_w}^{t+\Delta t} h_{1b_w} h_{2b_w} \left( \frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_P} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \end{aligned}$$

$$\mu_{f_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_w}^t - \mu_{f_w}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_w}^t - \mu_{b_w}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right]_{S_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_P dz_f \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{n_w}^t h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^t - V_{\varepsilon b n_w}^t}{dz_f} \right) \\ -\mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^t - V_{\varepsilon b s_w}^t}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \eta_P dz_f \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{n_w}^{t-\Delta t} h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \\ -\mu_{s_w}^{t-\Delta t} h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \eta_P dz_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P dz_f \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_w}^t h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^t - V_{\eta b e_w}^t}{dz_f} \right) \\ -\mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^t - V_{\eta b w_w}^t}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P dz_f \\ &\quad - \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} \mu_{e_w}^{t-\Delta t} h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \\ -\mu_{w_w}^{t-\Delta t} h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P dz_f \end{aligned}$$

On réarrange ces différents termes pour obtenir l'équation finale discrétisée suivant la direction axiale :

$$A_{P_w} V_{zP_w}^{t+\Delta t} = A_{N_w} V_{zN_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{E_w} V_{zE_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} V_{zF_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} V_{zB_w}^{t+\Delta t} + S_w + [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1f_w} h_{2f_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \quad (3.17)$$

Ou

$$A_{P_w} V_{zP_w}^{t+\Delta t} = A_{N_w} V_{zN_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{E_w} V_{zE_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} V_{zF_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} V_{zB_w}^{t+\Delta t} + S \quad (3.18)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{N_w} &= \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta \eta_p dz_f, & A_{S_w} &= \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta \eta_p dz_f \\ A_{E_w} &= \frac{1}{Re} \frac{\mu_{e_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta \varepsilon_p dz_f, & A_{S_w} &= \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_s} \Delta \varepsilon_p dz_f \\ A_{F_w} &= \frac{1}{Re} h_{1f_w} h_{2f_w} \frac{\mu_{f_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_F} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p, & A_{B_w} &= \frac{1}{Re} h_{1b_w} h_{2b_w} \frac{\mu_{b_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_P} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \end{aligned}$$

$$A_{P_w} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f + A_{N_w} + A_{S_w} + A_{E_w} + A_{W_w} + A_{F_w} + A_{B_w}$$

$$S = S_w + [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1f_w} h_{2f_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p$$

$$\begin{aligned} S_w &= \frac{4V_{zP_w}^t - V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\ &\quad - 2 \left[ h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^t + V_{\varepsilon b n_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zN_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^t + V_{\varepsilon b s_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zS_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\ &\quad + \left[ h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zN_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zS_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\ &\quad - 2 \left[ h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^t + V_{\eta b e_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zE_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^t + V_{\eta b w_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zW_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\ &\quad + \left[ h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zE_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zW_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\ &\quad - 2 \left[ h_{1f_w} h_{2f_w} \left( \frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{1b_w} h_{2b_w} \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ &\quad + \left[ h_{1f_w} h_{2f_w} \left( \frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b_w} h_{2b_w} \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ &\quad + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{n_w}^t h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^t - V_{\varepsilon b n_w}^t}{dz_f} \right) - \mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^t - V_{\varepsilon b s_w}^t}{dz_f} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{Re} \left[ \mu_{n_w}^{t-\Delta t} h_{2n_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) - \mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left( \frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \right] \Delta \eta_P dz_f \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{e_w}^t h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^t - V_{\eta b e_w}^t}{dz_f} \right) - \mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^t - V_{\eta b w_w}^t}{dz_f} \right) \right] \Delta \varepsilon_P dz_f \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{e_w}^{t-\Delta t} h_{1e_w} \left( \frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) - \mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left( \frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \right] \Delta \varepsilon_P dz_f
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, la notation indicielle  $(i, j, k)$  fait référence à un point centré dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Aux faces du volume fini décalé (suivant  $z$ ), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{f_w}^t = \mu^t(i, j + 1, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{f_w}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j + 1, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{b_w}^t = \mu^t(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{b_w}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{n_v}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^t(i+1, j, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i, j, k)}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^t(i+1, j+1, k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i, j+1, k)}}$$

$$\mu_{n_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t}(i+1, j, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k)}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t}(i+1, j+1, k+1)} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k)}}$$

$$\mu_{s_v}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i, j, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^t(i-1, j, k)}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^t(i, j+1, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^t(i-1, j+1, k)}}$$

$$\mu_{s_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^{t-\Delta t}(i-1, j, k)}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k)} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{\mu^{t-\Delta t}(i-1, j+1, k)}}$$

$$\mu_{e_w}^t = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^t(i, j, k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i, j, k)}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^t(i, j+1, k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i, j+1, k)}}$$

$$\mu_{e_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k)}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k+1)} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k)}}$$

$$\mu_{w_w}^t = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i, j, k)} + \frac{\Delta\eta_W}{\mu^t(i, j, k-1)}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P}{\mu^t(i, j+1, k)} + \frac{\Delta\eta_W}{\mu^t(i, j+1, k-1)}}$$

$$\mu_{w_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k)} + \frac{\Delta\eta_W}{\mu^{t-\Delta t}(i, j, k-1)}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k)} + \frac{\Delta\eta_W}{\mu^{t-\Delta t}(i, j+1, k-1)}}$$

### 3.5. La discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont discrétisées et les équations de discrétisation sont écrites sous la forme standard.

#### 3.5.1. Les conditions aux limites thermiques :

##### Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition thermique à cette limite (à  $\varepsilon = 0.5$ ) est :

$$-\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (3.19)$$

Elle discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1\varepsilon=0.5}} k_{\varepsilon=0.5}^{t+\Delta t} \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_1} = 1 \quad (3.20)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_N^{t+\Delta t} + \frac{h_{1\varepsilon=0.5} d\varepsilon_1}{k_{\varepsilon=0.5}^{t+\Delta t}} \quad (3.21)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 1, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = \frac{h_{1\varepsilon=0.5} d\varepsilon_1}{k_{\varepsilon=0.5}^{t+\Delta t}}$$

##### Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition thermique à cette limite (à  $\varepsilon = 1$ ) est :

$$-\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (3.22)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1\varepsilon=1}} k_{\varepsilon=1}^{t+\Delta t} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_{1L-1}} = 0 \quad (3.23)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_S^{t+\Delta t} \quad (3.24)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 1, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

##### A l'entrée du conduit:

La condition thermique à cette limite (à  $z = 0$ ) est :

$$T = 0 \quad (3.25)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$T_P^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.26)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

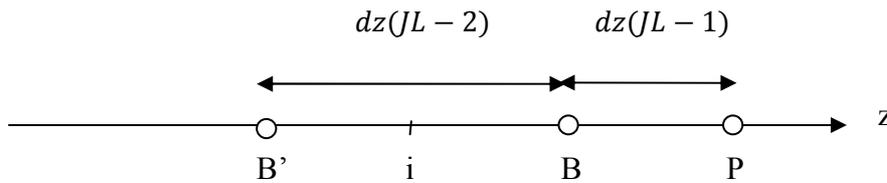
$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

### A la sortie du conduit :

La condition thermique à cette limite (à  $z = 100$ ) est :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \text{ cette condition impose un flux diffusif constant à la sortie du conduit.}$$

Pour illustrer la discrétisation, un schéma du maillage axial, à la sortie du conduit, est représenté sur la **Figure 3.12**. Le point P est à la limite axiale, le point B est l'avant dernier point qui est précédé du point B'.



**Figure.3.12. Maillage axial à la sortie du conduit**

La constance du flux diffusif est approchée par la discrétisation :

$$k_{z_B}^{t+\Delta t} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = k_{z_i}^{t+\Delta t} \frac{T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-2}} \quad (3.27)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{k_{z_i}^{t+\Delta t}}{k_{z_B}^{t+\Delta t}} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}) \quad (3.28)$$

Avec la forme explicite du dernier terme à droite :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{[2 k_{z_i}^t - k_{z_i}^{t-\Delta t}]}{[2 k_{z_B}^t - k_{z_B}^{t-\Delta t}]} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}]) \quad (3.29)$$

La dernière équation est mise sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, A_F = 0, A_B = 1$$

$$S = \frac{[2 k_{z_i}^t - k_{z_i}^{t-\Delta t}]}{[2 k_{z_B}^t - k_{z_B}^{t-\Delta t}]} \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}])$$

**3.5.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant  $\varepsilon$  :****Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 0.5$ ) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.30)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.31)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

**Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique extérieur :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 1$ ) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.32)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.33)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

**A l'entrée du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 0$ ) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.34)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.35)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

**A la sortie du conduit :**

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 100$ ) est :

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \quad (3.37)$$

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.38)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = S = 0, A_{B_u} = 1$$

### 3.5.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

#### Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 0.5$ ) est :

$$V_{\eta} = 0 \quad (3.39)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.40)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

#### Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 1$ ) est :

$$V_{\eta} = 0 \quad (3.41)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.42)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

#### A l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 0$ ) est :

$$V_{\eta} = 0 \quad (3.43)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.44)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

#### A la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 100$ ) est :

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial z} = 0 \quad (3.45)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \quad (3.46)$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.47)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = S = 0, A_{B_v} = 1$$

### 3.5.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

#### Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 0.5$ ) est :

$$V_z = 0 \quad (3.48)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.49)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

#### Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $\varepsilon = 1$ ) est :

$$V_z = 0 \quad (3.50)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.51)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

#### A l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 0$ ) est :

$$V_z = 1 \quad (3.52)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = 1 \quad (3.53)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = 0, S = 1$$

### A la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à  $z = 100$ ) est :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.54)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_{JL-1}} = 0 \quad (3.55)$$

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.56)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = S = 0, A_{B_w} = 1$$

### 3.6. L'équation de discrétisation de la pression :

Pour résoudre les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse il faut préciser la pression qui est présente dans les sources de ces équations. La détermination de la pression dans les points centrés des volumes finis nécessite une équation de discrétisation de la pression. Cette équation est obtenue par une manipulation combinant les équations de discrétisation de continuité et des quantités de mouvement. Utilisant les équations de discrétisation des vitesses, on définit les pseudos vitesses :

$$\hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_u}} \left[ A_{N_u} (2V_{\varepsilon N_u}^t - V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t}) + A_{S_u} (2V_{\varepsilon S_u}^t - V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}) + A_{E_u} (2V_{\varepsilon E_u}^t - V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_u} (2V_{\varepsilon W_u}^t - V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}) + A_{F_u} (2V_{\varepsilon F_u}^t - V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t}) + A_{B_u} (2V_{\varepsilon B_u}^t - V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}) + S_u \right]$$

$$\hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_v}} \left[ A_{N_v} (2V_{\eta N_v}^t - V_{\eta N_v}^{t-\Delta t}) + A_{S_v} (2V_{\eta S_v}^t - V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}) + A_{E_v} (2V_{\eta E_v}^t - V_{\eta E_v}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_v} (2V_{\eta W_v}^t - V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}) + A_{F_v} (2V_{\eta F_v}^t - V_{\eta F_v}^{t-\Delta t}) + A_{B_v} (2V_{\eta B_v}^t - V_{\eta B_v}^{t-\Delta t}) + S_v \right]$$

$$\hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_w}} \left[ A_{N_{P_w}} (2V_{z N_{P_w}}^t - V_{z N_{P_w}}^{t-\Delta t}) + A_{S_w} (2V_{z S_w}^t - V_{z S_w}^{t-\Delta t}) + A_{E_w} (2V_{z E_w}^t - V_{z E_w}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_w} (2V_{z W_w}^t - V_{z W_w}^{t-\Delta t}) + A_{F_w} (2V_{z F_w}^t - V_{z F_w}^{t-\Delta t}) + A_{B_w} (2V_{z B_w}^t - V_{z B_w}^{t-\Delta t}) + S_w \right]$$

On remarque que les pseudos vitesses sont des vitesses calculées sans les différences de pression dans les sources. Ces pseudos vitesses sont calculées, au temps  $t + \Delta t$ , dans les volumes finis avec les vitesses à des temps précédents ( $t, t - \Delta t$ ), avec le schéma d'Adam-Bashforth, parce que les vitesses au temps ( $t + \Delta t$ ) sont inconnues. Les relations entre les vitesses et les pseudos vitesses sont :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) h_{2P_u} \Delta \eta_P \Delta z_P}{A_{P_u}} = \hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_{P_u}$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t})h_{1P_v}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P}{A_{P_v}} = \hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_{P_v}$$

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t})h_{1P_w}h_{2P_w}\Delta\varepsilon_P\Delta\eta_P}{A_{P_w}} = \hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_{P_w}$$

Compte tenu de la correspondance des positions du maillage typique et des maillages décalés, ces équations sont réécrites :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_n$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_e$$

$$V_{z f}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{z f}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_f$$

Aussi, il est déduit que :

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} + (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_s$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} + (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_w$$

$$V_{z b}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{z b}^{t+\Delta t} + (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_b$$

L'utilisation des six équations précédentes dans l'équation de discrétisation de continuité (3.5) nous donne une équation de discrétisation de pression sous la forme standard:

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S \quad (3.57)$$

$$A_N = h_{2n}\Delta\eta_P\Delta Z_P d_n$$

$$A_S = h_{2s}\Delta\eta_P\Delta Z_P d_s$$

$$A_E = h_{1e}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P d_e$$

$$A_W = h_{1w}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P d_w$$

$$A_E = h_{1e}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P d_e$$

$$A_F = h_{1f}h_{2f}\Delta\varepsilon_P\Delta\eta_P d_f$$

$$A_B = h_{1b}h_{2b}\Delta\varepsilon_P\Delta\eta_P d_b$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$S = (h_{2s}\hat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} - h_{2n}\hat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t})\Delta\eta_P\Delta Z_P + (h_{1w}\hat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} - h_{1e}\hat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t})\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P$$

$$+ (h_{1b}h_{2b}\hat{V}_{z b}^{t+\Delta t} - h_{1f}h_{2f}\hat{V}_{z f}^{t+\Delta t})\Delta\varepsilon_P\Delta\eta_P$$

Donc si on a les pseudos vitesses, on peut calculer la source  $S$  et donc la pression. Sachant que les pseudos vitesses sont calculées avec des approximations de la vitesse, appelées estimations de la vitesse, la pression calculée ne peut être considérée qu'une estimation de pression qui nécessite une correction. Si cette estimation de pression est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement, on obtient un champ de vitesse qui est une nouvelle estimation qui nécessite une correction. Il est clair que pour l'obtention d'un champ de pression correcte, il faut un champ de vitesse correcte et vice-versa. Évidemment, les corrections de vitesse et de pression sont liées. A un point donné, la correction de la vitesse est liée aux corrections des vitesses des points adjacents et des corrections de pression. Mais il y'a une méthode qui lie la correction de la vitesse à un point aux seules corrections de la pression. Cette méthode est au cœur de l'algorithme **SIMPLER** utilisé dans nos calcul est qui sera présenté plus tard. Avec cette méthode, on détermine une équation de correction de la pression; et une fois la correction de la pression obtenue, elle est directement utilisée pour corriger le champ de vitesse.

Les relations entre les estimations et les corrections de vitesse et de pression sont définies par :

$$V^{t+\Delta t} = V^{*t+\Delta t} + V'^{t+\Delta t}$$

$$P^{t+\Delta t} = P^{*t+\Delta t} + P'^{t+\Delta t}$$

$V^{t+\Delta t}$  : Est la vitesse correcte,  $V^{*t+\Delta t}$  est l'estimation de la vitesse à corriger et  $V'^{t+\Delta t}$  est la correction de la vitesse.  $P^{t+\Delta t}$  : Est la pression correcte,  $P^{*t+\Delta t}$  est l'estimation de la pression à corriger et  $P'^{t+\Delta t}$  est la correction de la pression.

On introduit les corrections de vitesse (fonctions seulement des corrections de pression) comme suit :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t} + (P_P'^{t+\Delta t} - P_N'^{t+\Delta t}) d_n$$

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} + (P_S'^{t+\Delta t} - P_P'^{t+\Delta t}) d_s$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = V_{\eta e}^{*t+\Delta t} + (P_P'^{t+\Delta t} - P_E'^{t+\Delta t}) d_e$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = V_{\eta w}^{*t+\Delta t} + (P_W'^{t+\Delta t} - P_P'^{t+\Delta t}) d_w$$

$$V_{zf}^{t+\Delta t} = V_{zf}^{*t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_f$$

$$V_{zb}^{t+\Delta t} = V_{zb}^{*t+\Delta t} + (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_b$$

Si ces les six dernières équations sont utilisées dans l'équation de discrétisation de continuité (3.5),

on obtient une équation de discrétisation de la correction de pression :

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S' \quad (3.58)$$

$$A_N = h_{2n} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_n$$

$$A_S = h_{2s} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_s$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e$$

$$A_W = h_{1w} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_w$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e$$

$$A_F = h_{1f} h_{2f} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_f$$

$$A_B = h_{1b} h_{2b} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_b$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$S' = (h_{2s} V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} - h_{2n} V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t}) \Delta \eta_P \Delta Z_P + (h_{1w} V_{\eta w}^{*t+\Delta t} - h_{1e} V_{\eta e}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ + (h_{1b} h_{2b} V_{zb}^{*t+\Delta t} - h_{1f} h_{2f} V_{zf}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P$$

La solution séquentielle des systèmes d'équations linéaires des variables dépendantes (composantes des vitesses, pression et température) et les mises à jour des propriétés physiques (viscosité et conductivité thermique) suivent l'algorithme **SIMPLER** dont les étapes sont citées ci-après:

1. Initialisation (ou mise à jour) des vitesses, de la température et propriétés physiques :  
 $V_\varepsilon^t, V_\varepsilon^{t-\Delta t}, V_\eta^t, V_\eta^{t-\Delta t}, V_z^t, V_z^{t-\Delta t}, T^t, T^{t-\Delta t}, K^t, K^{t-\Delta t}, \mu^t, \mu^{t-\Delta t}$
2. Calcul des coefficients des équations de discrétisation des vitesses.
3. Calcul des pseudos vitesses.
4. Les pseudos vitesses sont utilisées dans la source de l'équation de discrétisation de pression. Cette dernière est résolue (dans tous les points) pour obtenir un champ de pression considéré comme une estimation.

5. Le champ de la pression estimée est utilisé dans les sources des équations de discrétisation des vitesses. Ces dernières sont résolues donnant un champ de vitesse considéré comme une estimation de la vitesse à corriger.
6. Les estimations des vitesses sont utilisées dans la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression. Cette dernière est résolue pour obtenir un champ de la correction de la pression.
7. La correction de la pression est utilisée pour corriger le champ de vitesse.
8. Le champ de vitesse corrigé est utilisé dans l'équation de discrétisation d'énergie. Cette dernière est résolue pour obtenir le champ de température.
9. Le champ thermique est utilisé pour le calcul des propriétés physiques variables : viscosité et conductivité thermique.
10. On vérifie l'atteinte du régime permanent (stationnaire) caractérisé par l'invariance temporelle de toutes les variables calculées et la satisfaction des bilans massique et thermique globaux. Si le régime permanent est atteint, on arrête les calculs. Sinon, on augmente le temps d'un pas (de temps) et on retourne à l'étape 1.

### 3.7. La solution des systèmes d'équations linéaires:

L'équation de discrétisation d'une variable représente un système d'équations linéaires. La matrice des coefficients de ce système est heptagonale. Compte tenu du nombre des équations linéaires qui est égal au nombre des points du maillage, il est évident que les méthodes classiques de la solution des systèmes d'équations linéaires ne peuvent être utilisées. La capacité de stockage des coefficients de la matrice dépasse largement celle des ordinateurs disponibles et bien sûr, l'accumulation des erreurs d'arrondi des calculs inonde les calculs. La seule alternative est l'utilisation de lune des méthodes itératives classiques. Nous avons fait le choix de la méthode de balayage dite : **Sweeping Method**. Cette méthode consiste à transformer la solution du système d'équations heptagonal en trois systèmes tri diagonaux (équivalents), représentant les variations suivant les trois directions des coordonnées. Ainsi, une itération du calcul est composée d'un balayage suivant la direction  $\varepsilon$ , un balayage suivant la direction  $\eta$  et un balayage suivant  $z$ . Les balayages suivant les directions radiale et axiale impliquent l'utilisation de l'algorithme classique **TDMA** qui est directe et stable. Le balayage suivant la direction angulaire utilise l'algorithme cyclique **TDMAC** qui tient compte

de la périodicité suivant cette direction. Dans ce qui suit, on présente l'exemple de l'application de ma méthode du balayage à l'équation d'énergie.

Soit le système des équations linéaires représenté par l'équation de discrétisation d'énergie (3.59) :

$$A_P T_P = A_N T_N + A_S T_S + A_E T_E + A_W T_W + A_F T_F + A_B T_B + S \quad (3.59)$$

Ce système est réécrit sous forme indicielle:

$$\begin{aligned} A_P(i, j, k)T(i, j, k) &= A_N(i, j, k)T(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k)T(i - 1, j, k) \\ &\quad + A_E(i, j, k)T(i, j, kkk) + A_W(i, j, k)T(i, j, kk) \\ &\quad + A_F(i, j, k)T(i, j + 1, k) + A_B(i, j, k)T(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \end{aligned} \quad (3.60)$$

i : Est l'indice variable entre 1 et IL suivant la direction radiale  $\varepsilon$ .

j : Est l'indice variable entre 1 et JL suivant la direction axiale z.

k : Est l'indice variable entre 1 et KL suivant la direction angulaire  $\eta$ .

$$kkk = \begin{cases} k + 1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k - 1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Le système (3.60) est transformé en trois systèmes:

$$A_P(i, j, k)T'(i, j, k) = A_N(i, j, k)T'(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k)T'(i - 1, j, k) + S'(i, j, k) \quad (3.61)$$

$$A_P(i, j, k)T''(i, j, k) = A_E(i, j, k)T''(i, j, kkk) + A_W(i, j, k)T''(i, j, kk) + S''(i, j, k) \quad (3.62)$$

$$A_P(i, j, k)T'''(i, j, k) = A_F(i, j, k)T'''(i, j + 1, k) + A_B(i, j, k)T'''(i, j - 1, k) + S'''(i, j, k) \quad (3.63)$$

Avec :

$$\begin{aligned} S'(i, j, k) &= A_E(i, j, k)T(i, j, kkk) + A_W(i, j, k)T(i, j, kk) + A_F(i, j, k)T(i, j + 1, k) \\ &\quad + A_B(i, j, k)T(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''(i, j, k) &= A_N(i, j, k)T'(i + 1, j, k) + A_S(i - 1, j, k)T'(i, j, k) + A_F(i, j, k)T'(i, j + 1, k) \\ &\quad + A_B(i, j, k)T'(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'''(i, j, k) &= A_N(i, j, k)T''(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k)T''(i - 1, j, k) + A_E(i, j, k)T''(i, j, kkk) \\ &\quad + A_W(i, j, k)T''(i, j, kk) + S(i, j, k) \end{aligned}$$

On remarque que les systèmes (3.61) et (3.63) sont tri diagonaux et que le système (3.62) est tri diagonal cyclique. La solution itérative du système (3.60) est accomplie par les solutions successives des systèmes (3.61), (3.62) et (3.63). La solution du système (3.61) donne les températures  $T'(i, j, k)$ , celle du système (3.62) donne les température  $T''(i, j, k)$  et celle du système (3.63) donne les températures  $T'''(i, j, k)$ . Les températures  $T'''(i, j, k)$  sont confondues avec les températures  $T(i, j, k)$  du système (3.62).

Les systèmes tri diagonaux (3.61) et (3.63) sont résolus avec l'algorithme **TDMA** classique. On présente son application au système (3.61). Ce dernier est réécrit sous la forme réduite :

$$a(i)T'(i, j, k) = b(i)T'(i + 1, j, k) + c(i)T'(i - 1, j, k) + d(i) \quad (3.64)$$

Avec les correspondances :

$$a(i) = A_P(i, j, k)$$

$$b(i) = A_N(i, j, k)$$

$$c(i) = A_S(i, j, k)$$

$$d(i) = S'(i, j, k)$$

On rappelle que tous les  $a(i)$ ,  $b(i)$ ,  $c(i)$  et  $d(i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, IL$ ), sont connus.

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$T'(i, j, k) = P(i)T'(i + 1, j, k) + Q(i) \quad (3.65)$$

Et donc:

$$T'(i - 1, j, k) = P(i - 1)T'(i, j, k) + Q(i - 1) \quad (3.66)$$

Utilisant cette équation dans l'équation (3.46), on obtient après réarrangement :

$$T'(i, j, k) = \frac{b(i)}{[a(i) - c(i)P(i-1)]} T'(i + 1, j, k) + \frac{c(i)Q(i-1) + d(i)}{[a(i) - c(i)P(i-1)]} \quad (3.67)$$

L'identité des équations (3.65) et (3.67) induit deux nouvelles relations de récurrence:

$$P(i) = \frac{b(i)}{[a(i) - c(i)P(i-1)]} \quad (3.68)$$

$$Q(i) = \frac{c(i)Q(i-1) + d(i)}{[a(i) - c(i)P(i-1)]} \quad (3.69)$$

Avec les initialisations (sachant que  $c(1) = 0$ ):

$$P(1) = \frac{b(1)}{a(1)} \quad (3.70)$$

$$Q(1) = \frac{d(1)}{a(1)} \quad (3.71)$$

Avec les initialisations et les relations (3.68) et (3.69), tous les  $P(i)$  et les  $Q(i)$  sont déterminés.

Sachant que  $b(IL) = 0$ ,

$$T'(IL, j, k) = Q(IL) \quad (3.72)$$

Enfin, les températures  $T'(i, j, k)$ ,  $i = IL - 1, IL - 2, \dots, 1$ , sont directement déterminées de la relation (3.65).

Le système tri diagonal cyclique (3.62) est résolu avec l'algorithme **TDMAC**. On présente son application au système (3.62). Ce dernier est réécrit sous la forme réduite :

$$a(k)T''(i, j, k) = b(k)T''(i, j, k+k) + c(k)T''(i, j, k-k) + d(k) \quad (3.73)$$

Avec les correspondances :

$$a(k) = A_P(i, j, k)$$

$$b(k) = A_E(i, j, k)$$

$$c(k) = A_W(i, j, k)$$

$$d(k) = S''(i, j, k)$$

On rappelle que tous les  $a(k)$ ,  $b(k)$ ,  $c(k)$  et  $d(k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, KL$ ), sont connus.

On divise l'équation (3.55) par  $a(k)$ :

$$T''(i, j, k) = \frac{b(k)}{a(k)}T''(i, j, k+k) + \frac{c(k)}{a(k)}T''(i, j, k-k) + \frac{d(k)}{a(k)} \quad (3.74)$$

On remarque, d'après cette équation, que les températures du premier et dernier point (suivant la direction angulaire) sont dépendantes comme le démontre l'utilisation de  $k = 1$  dans l'équation:

$$T''(i, j, 1) = \frac{b(1)}{a(1)}T''(i, j, 2) + \frac{c(1)}{a(1)}T''(i, j, KL) + \frac{d(1)}{a(1)} \quad (3.75)$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$T''(i, j, k) = E(k)T''(i, j, k+k) + F(k)T''(i, j, k-k) + G(k) \quad (3.76)$$

Si  $k = 1$ , on obtient :

$$T''(i, j, 1) = E(1)T''(i, j, 2) + F(1)T''(i, j, KL) + G(1) \quad (3.77)$$

Par identification avec l'équation (3.75) on a les initialisations:

$$E(1) = \frac{b(1)}{a(1)} \quad (3.78)$$

$$F(1) = \frac{c(1)}{a(1)} \quad (3.79)$$

$$G(1) = \frac{d(1)}{a(1)} \quad (3.80)$$

D'après la récurrence de l'équation (3.76) on a:

$$T''(i, j, kk) = E(kk)T''(i, j, k) + F(kk)T''(i, j, KL) + G(kk) \quad (3.81)$$

On utilise la valeur de  $T''(i, j, kk)$  de l'équation (3.81) dans l'équation (3.73) et on obtient:

$$a(k)T''(i, j, k) = b(k)T''(i, j, kkk) + c(k)[E(kk)T''(i, j, k) + F(kk)T''(i, j, KL) + G(kk)] + d(k) \quad (3.82)$$

Cette équation est réarrangée sous la forme:

$$T''(i, j, k) = \frac{b(k)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} T''(i, j, kkk) + \frac{c(k)F(kk)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} T''(i, j, KL) + \frac{c(k)G(kk) + d(kk)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} \quad (3.83)$$

De l'identité des équations (3.75) et (3.83) on déduit trois nouvelles relations de récurrence:

$$E(k) = \frac{b(k)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} \quad (3.84)$$

$$F(k) = \frac{c(k)F(kk)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} \quad (3.85)$$

$$G(k) = \frac{c(k)G(kk) + d(kk)}{[a(k) - c(k)E(kk)]} \quad (3.86)$$

Avec les initialisations des équations (3.78), (3.79) et (3.80) et les relations de récurrence (3.84), (3.85) et (3.86), on détermine tous les  $E(k)$ ,  $F(k)$  et  $G(k)$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots, kl - 1$ .

Le développement algorithmique suivant vise la détermination de la température  $T''(i, j, KL)$ , ce qui rendra la récurrence (3.76) utilisable directement pour la détermination des autres températures.

Détermination de  $T''(i, j, KL)$  :

Avec la valeur  $k = KL$  dans l'équation (3.73), on a:

$$a(KL)T''(i, j, KL) = b(KL)T''(i, j, 1) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + d(KL) \quad (3.87)$$

On introduit les coefficients  $P(k)$ ,  $Q(k)$  et  $R(k)$  qui satisfont l'équation:

$$P(k)T''(i, j, KL) = Q(k)T''(i, j, k) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(k) \quad (3.88)$$

Pour  $k = 1$ , on obtient :

$$P(1)T''(i, j, KL) = Q(1)T''(i, j, 1) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(1) \quad (3.89)$$

De la comparaison des équations (3.87) et (3.89), vient l'initialisation :

$$P(1) = a(KL) \quad (3.90)$$

$$Q(1) = b(KL) \quad (3.91)$$

$$R(1) = d(KL) \quad (3.92)$$

Avec  $k = 1$  dans l'équation (3.76), on a:

$$T''(i, j, 1) = E(1)T''(i, j, 2) + F(1)T''(i, j, KL) + G(1) \quad (3.93)$$

On remplace l'expression de  $T''(i, j, 1)$  de l'équation (3.93) dans l'équation (3.89) et il vient :

$$\begin{aligned} [P(1) - Q(1)F(1)]T''(i, j, KL) &= Q(1)E(1)T''(i, j, 2) \\ &+ c(KL)T''(i, j, KL - 1) + Q(1)G(1) + R(1) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Avec  $k = 2$  dans l'équation (3.88), on a:

$$P(2)T''(i, j, KL) = Q(2)T''(i, j, 2) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) \quad (3.95)$$

De la comparaison des équations (3.94) et (3.95), on déduit :

$$P(2) = [P(1) - Q(1)F(1)] \quad (3.96)$$

$$Q(2) = Q(1)E(1) \quad (3.97)$$

$$R(2) = Q(1)G(1) + R(1) \quad (3.98)$$

Avec  $k = 2$  dans l'équation (3.76), on a:

$$T''(i, j, 2) = E(2)T''(i, j, 3) + F(2)T''(i, j, KL) + G(2) \quad (3.99)$$

Avec  $k = 2$  dans l'équation (3.88), on a:

$$P(2)T''(i, j, KL) = Q(2)T''(i, j, 2) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) \quad (3.100)$$

On remplace l'expression de  $T''(i, j, 2)$  de l'équation (3.99) dans l'équation (3.100) et il vient :

$$[P(2) - Q(2)F(2)]T''(i, j, KL) = Q(2)E(2)T(i, j, 3) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) + Q(2)G(2) \quad (3.101)$$

Avec  $k = 3$  dans l'équation (3.88), on a:

$$P(3)T''(i, j, KL) = Q(3)T''(i, j, 3) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(3) \quad (3.102)$$

De la comparaison des équations (3.101) et (3.102), on déduit :

$$P(3) = [P(2) - Q(2)F(2)] \quad (3.103)$$

$$Q(3) = Q(2)E(2) \quad (3.104)$$

$$R(3) = R(2) + Q(2)G(2) \quad (3.105)$$

On peut continuer, avec l'incrémentation de l'indice  $k$ , les procédures qui ont conduit à l'obtention des équations (3.96), (3.97), (3.98), (3.103), (3.104) et (3.105) et la conclusion tirée des résultats est l'ensemble des relations de récurrence :

$$P(k) = [P(k - 1) - Q(k - 1)F(k - 1)] \quad (3.106)$$

$$Q(k) = Q(k - 1)E(k - 1) \quad (3.107)$$

$$R(k) = R(k - 1) + Q(k - 1)G(k - 1) \quad (3.108)$$

Pour  $k = 2, 3, 4, \dots, KL$ . Ces relations de récurrence sont initialisées par les relations des équations (3.90), (3.91) et (3.92). Une fois que tous les coefficients  $E(k), F(k), G(k), P(k), Q(k)$  et  $R(k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, KL$ ), sont calculés, on peut déterminer la température  $T''(i, j, KL)$ , et ensuite utiliser l'équation (3.76) pour déterminer les  $T''(i, j, k)$ ,  $k = KL - 1, KL - 2, \dots, 1$ .

Avec  $k = KL - 1$  dans l'équation (3.88), on a:

$$P(KL - 1)T''(i, j, KL) = [Q(KL - 1) + c(KL)]T''(i, j, KL - 1) + R(KL - 1) \quad (3.109)$$

Avec  $k = KL - 1$  dans l'équation (3.76), on a:

$$T''(i, j, KL - 1) = [E(KL - 1) + F(KL - 1)]T''(i, j, KL) + G(KL - 1) \quad (3.110)$$

On utilise l'équation (3.102) dans (3.101) et on obtient :

$$T''(i, j, KL) = \frac{[Q(KL-1)+c(KL)]G(KL-1)+R(KL-1)}{[P(KL-1)-[Q(KL-1)+c(KL)]] [E(KL-1)+F(KL-1)]} \quad (3.111)$$

### 3. 8. Convergence :

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue, avec des pas de temps  $5 \times 10^{-4} \geq \Delta t^* \geq 10^{-4}$  jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction du bilan massique global (l'égalité des débits entrant et sortant). La valeur du débit entrant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{ze}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8509 \quad (3.112)$$

Et celle du débit sortant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{zs}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8509 \quad (3.113)$$

Cependant, la satisfaction du bilan thermique global n'est obtenue qu'avec une certaine précision. Ce bilan précisé par l'équation (2.31) est discuté dans le deuxième chapitre où il a été mentionné que pour tous les cas considérés, les termes  $q_2, q_3, q_4$  et  $q_5$  sont négligeables. Ce qui a été démontré par les calculs. Donc, la satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes  $q_1$  (constant) et  $q_6$ . Dans tous les cas la valeur de  $q_1$  est 0.7652 . La valeur de  $q_6$  varie suivant les cas, comme il est précisé dans le **tableau 3.1**. Dans ce tableau, on rapporte que la valeur absolue de la différence relative entre  $q_1$  et  $q_6$  ne dépassent pas 1.8%, et donc on conclue que la satisfaction du bilan thermique global est obtenue avec une bonne précision.

**Tableau 3.1 Les valeurs de  $q_6$  et de la valeur absolue de la différence relative entre  $q_1$  et  $q_6$**

Cas des propriétés Constantes	$q_6$	$\left  \frac{q_1 - q_6}{q_1} \right $
Convection Forcée	0.7536	1.5%
Gr=5 × 10 <sup>3</sup>	0.7641	0.14%
Gr= 10 <sup>4</sup>	0.7554	1.30%
Gr=5 × 10 <sup>4</sup>	0.7585	0.87%
<b>Cas des propriétés variables</b>		

---

Convection Forcée, $q_w=4172 \text{ W/m}^2$	0.7616	0.46%
Convection Forcée, $q_w=8344 \text{ W/m}^2$	0.7789	1.8%
Convection Forcée, $q_w=12516 \text{ W/m}^2$	0.7712	0.79%
$Gr=5 \times 10^3$	0.7589	0.82%
$Gr=10^4$	0.7645	0.08%
$Gr=5 \times 10^4$	0.7775	1.62%

---

**Chapitre IV**

**Résultats Et Discussions**

**4.1. Introduction :**

Dans ce chapitre, on a présenté le détail de nos résultats avec discussions et interprétations. Pour bien présenter les résultats on a divisé ce chapitre en trois parties, la première partie contient la convection forcée et la convection mixte avec des propriétés constantes avec une validation analytique pour le cas de la convection forcée hydrodynamiquement et thermiquement développé. La deuxième partie concerne les trois cas de la convection forcée avec des propriétés thermophysiques variables, correspondant aux trois flux de chauffage considérés. Dans la troisième partie on présente les résultats des trois cas de la convection mixte avec des propriétés thermophysiques variables.

# Première Partie

## 4.2. La convection forcée et mixte avec des propriétés physiques constantes :

### 4.2.1. L'écoulement de la convection forcée hydrodynamique et thermiquement développé :

Il est important et utile de valider les résultats numériques par des résultats expérimentaux obtenus avec la même géométrie, les mêmes paramètres de contrôle dynamique et thermique. Mais d'après la bibliographie, les résultats expérimentaux sur la convection forcée et mixte (tri dimensionnelles) dans les entrefers des conduits elliptiques manquent. Pour valider les résultats numériques, nous avons tenté la reproduction d'un résultat analytique du problème, relativement simple, de la convection forcée hydrodynamiquement et thermiquement développée, avec des propriétés physiques constantes. L'écoulement et le champ thermique sont modélisés par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Reh_1^*h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$V_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Reh_1^*h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.2)$$

Avec un gradient de pression axial  $\frac{\partial P^*}{\partial z^*}$  constant et un gradient de température axiale  $\frac{\partial T^*}{\partial z^*}$  constant. Les conditions aux limites de la vitesse axiale et de la température sont les mêmes conditions des équations (2.23) et (2.24). Les parties homogènes des équations (4.1) et (4.2) sont résolues par la méthode classique de séparations des variables. Les solutions particulières des équations (4.1) et (4.2) sont superposées aux solutions des parties homogènes pour l'obtention des solutions générales. Les solutions spécifiques sont déterminées par l'utilisation des conditions aux limites.

La solution analytique de l'écoulement hydrodynamiquement développé est:

$$V_z^*(\varepsilon, \eta) = \cos(2\eta)[c_1 \sinh(2\varepsilon) + c_2 \cosh(2\varepsilon)] + c_3 \cosh(2\varepsilon) + c_4 \cos(2\eta) + c_5 \varepsilon + c_6 \quad (4.3)$$

Les constantes de l'équation (4.3) sont données dans le **Tableau 4.1**.

Tableau 4.1 Définition des constantes présentées dans l'équation (4.3)

$\varepsilon_i$	0.5
$\varepsilon_o$	1
$\alpha$	$\frac{[\cosh(2\varepsilon_o) - \cosh(2\varepsilon_i)]}{[\sinh(2\varepsilon_i) - \sinh(2\varepsilon_o)]}$
$\gamma$	$\left[ \frac{1}{\sinh(2\varepsilon_o) - \sinh(2\varepsilon_i)} \right] \left\{ -B_1 \frac{[\cosh(2\varepsilon_o) - \cosh(2\varepsilon_i)]}{2} - B_2 \frac{[\sinh(2\varepsilon_o) - \sinh(2\varepsilon_i)]}{2} + B_3 \left[ \frac{\cosh(2\varepsilon_o)\sinh(2\varepsilon_o)}{2} - \frac{\cosh(2\varepsilon_i)\sinh(2\varepsilon_i)}{2} \right] + B_5 \left[ \varepsilon_o \sinh(2\varepsilon_o) - \varepsilon_i \sinh(2\varepsilon_i) - \frac{[\cosh(2\varepsilon_o) - \cosh(2\varepsilon_i)]}{2} \right] + B_6 [\sinh(2\varepsilon_o) - \sinh(2\varepsilon_i)] \right\}$
$C_1 = B_1/\gamma$	$B_1 = \alpha B_2$
$C_2 = B_2/\gamma$	$B_2 = -\frac{1}{[\alpha \sinh(2\varepsilon_i) + \cosh(2\varepsilon_i)]}$
$C_3 = B_3/\gamma$	$B_3 = 1$
$C_4 = B_4/\gamma$	$B_4 = 1$
$C_5 = B_5/\gamma$	$B_5 = -\frac{[\cosh(2\varepsilon_o) - \cosh(2\varepsilon_i)]}{[\varepsilon_o - \varepsilon_i]}$
$C_6 = B_6/\gamma$	$B_6 = -\cosh(2\varepsilon_i) - B_5 \varepsilon_i$

Si l'écoulement de la convection forcée est résolu par la méthode numérique décrite dans le troisième chapitre, il est trouvé, qu'avec une condition de vitesse uniforme à l'entrée, l'écoulement devient hydrodynamiquement développé à l'aval de  $z^* = 21.25$ . Cet écoulement développé est bien modélisé par l'équation (4.1) et peut être comparé avec celui de la solution analytique. La comparaison est illustrée dans la **Figure 4.1**. Cette figure montre que les deux champs de la vitesse axiale (numérique et analytique) sont presque identiques. On a une symétrie par rapport aux deux axes elliptiques (horizontal et vertical). Dans la direction radiale, la vitesse axiale est nulle aux parois des deux cylindres et augmente en s'éloignant de ces parois, pour atteindre un maximum local situé entre les deux cylindres. Dans la direction angulaire, la vitesse augmente en allant de l'axe elliptique horizontal vers l'axe elliptique vertical : les maxima locaux sont à  $\eta = \frac{\pi}{2}$  et  $\eta = \frac{3\pi}{2}$ , et les minima locaux sont à  $\eta = 0$  et  $\eta = \pi$ . Ces constantes sont démontrés par le fait que la dérivée première partielle de la vitesse axiale de l'équation (4.3) par rapport à  $\eta$  est nulle aux quatre positions angulaire citées, et le fait que la dérivée seconde partielle de la vitesse axiale de l'équation (4.3) par rapport à  $\eta$  est positive à  $\eta = 0$  et  $\eta = \pi$  et elle est négative à  $\eta = \frac{\pi}{2}$  et  $\eta = \frac{3\pi}{2}$ . La

vitesse axiale adimensionnelle maximale égale 1.919 est localisée dans les parties supérieure et inférieure du conduit, à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2})$  et  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$ .

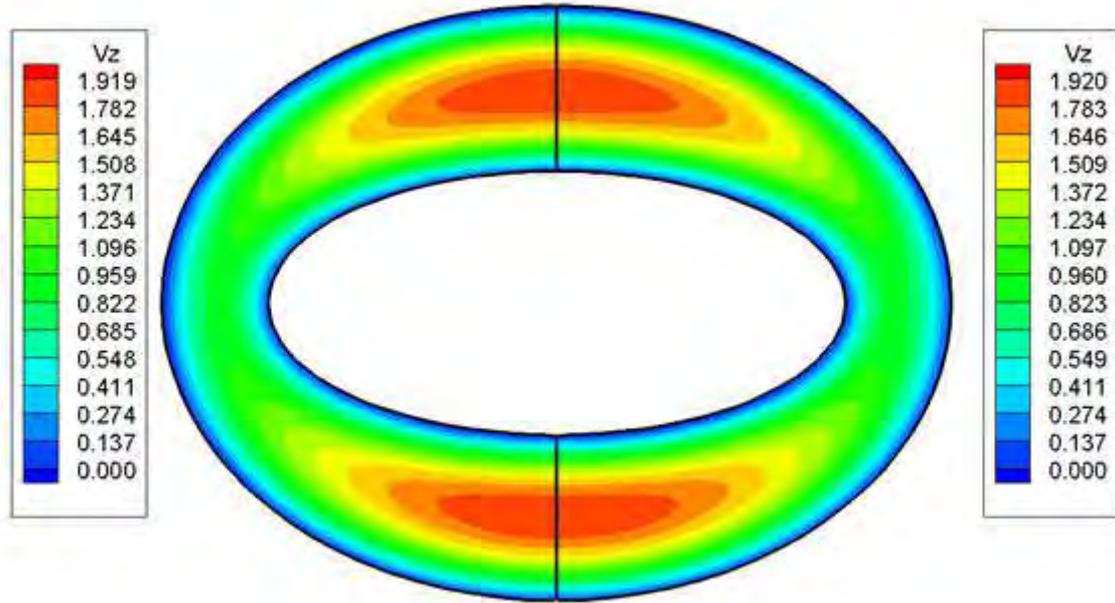


Figure. 4.1. Le champ numérique de la vitesse axiale (à gauche) et le champ analytique de la vitesse axiale (à droite) d'un écoulement développé.

La solution donnée par l'équation (4.3) est utilisée dans l'équation (4.2) et la solution analytique de l'équation de la température est :

$$T(\varepsilon, \eta, z^*) = f(z^*) + G(\varepsilon, \eta) \tag{4.4}$$

Où  $f(z^*)$  et  $G(\varepsilon, \eta)$  sont données dans le **Tableau 4.2**.

Tableau 4.2 Définition des constantes présentées dans l'équation (4.4)

$f(z^*)$	$A_{15}z^*$
$g(\varepsilon, \eta)$	$\begin{aligned} & \cos(2\eta)[E_2 \sinh(2\varepsilon) + F_2 \cosh(2\varepsilon) \\ & + A_1 \sinh(2\varepsilon) \cosh(2\varepsilon) + A_2 \cosh^2(2\varepsilon) + A_{11}\varepsilon + A_{12}] \\ & + \cos(4\eta) \left[ E_4 \sinh(4\varepsilon) + F_4 \cosh(4\varepsilon) + \frac{A_8}{2} \sinh(2\varepsilon) + \frac{A_9}{2} \cosh(2\varepsilon) + \frac{A_{10}}{2} \right] \\ & + \sum_{n=6,8,10}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \\ & + A_3 \cosh^2(2\varepsilon) + A_4 \varepsilon \cosh(2\varepsilon) + A_5 \varepsilon \sinh(2\varepsilon) \\ & + \left[ A_7 + \frac{A_8}{2} \right] \sinh(2\varepsilon) + \left[ A_6 + \frac{A_9}{2} \right] \cosh(2\varepsilon) + A_{13}\varepsilon + A_{14} + \frac{A_{10}}{2} \end{aligned}$
$\varepsilon_i$	0.5
$\varepsilon_o$	1
$A_1$	$\frac{C_1 P_i^*}{24 S^*}$

---

$A_2$	$\frac{C_2 P_i^*}{24 S^*}$
$A_3$	$\frac{C_3 P_i^*}{32 S^*}$
$A_4$	$\frac{C_5 P_i^*}{8 S^*}$
$A_5$	0
$A_6$	$\left[ \frac{C_6}{8} - \frac{C_2}{12} \right] \frac{P_i^*}{S^*}$
$A_7$	$-\left[ \frac{C_5}{8} + \frac{C_1}{12} \right] \frac{P_i^*}{S^*}$
$A_8$	$A_1$
$A_9$	$A_2$
$A_{10}$	$\frac{C_4 P_i^*}{32 S^*}$
$A_{11}$	$A_4$
$A_{12}$	$A_6$
$A_{13}$	$-[A_8 + 2A_7] \cosh(2\varepsilon_0) + [A_9 + 2A_6] \sinh(2\varepsilon_0) + 4A_3 \sinh(2\varepsilon_0) \cosh(2\varepsilon_0) + A_4 [2\varepsilon_0 \sinh(2\varepsilon_0) + \cosh(2\varepsilon_0)]$
$A_{15}$	$\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{P_i^*}{S^*}$
$E_2$	$\frac{l_2 - y_5}{\pi}$
$F_2$	$\frac{y_7}{-2E_2 \cosh(2\varepsilon_0) - y_1}$ $2 \sinh(2\varepsilon_0)$
$E_4$	$\frac{l_4 - y_6}{\pi}$
$F_4$	$\frac{y_8}{-4E_4 \cosh(4\varepsilon_0) - y_2}$ $4 \sinh(4\varepsilon_0)$
$E_n$	$\frac{l_n}{n\pi}$ with $n = 6, 8, 10, \dots$
$F_n$	$\frac{-E_n \cosh(n\varepsilon_0)}{\sinh(n\varepsilon_0)}$ with $n = 6, 8, 10, \dots$
$y_1$	$2A_1 [\sinh^2(2\varepsilon_0) + \cosh^2(2\varepsilon_0)] + 4A_2 \sinh(2\varepsilon_0) \cosh(2\varepsilon_0) + A_{11}$
$y_2$	$A_8 \cosh(2\varepsilon_0) + A_9 \sinh(2\varepsilon_0)$
$y_3$	$2A_1 [\sinh^2(2\varepsilon_i) + \cosh^2(2\varepsilon_i)] + 4A_2 \sinh(2\varepsilon_i) \cosh(2\varepsilon_i) + A_{11}$
$y_4$	$A_8 \cosh(2\varepsilon_i) + A_9 \sinh(2\varepsilon_i)$
$y_5$	$y_3 - \frac{y_1 \sinh(2\varepsilon_i)}{\sinh(2\varepsilon_0)}$
$y_6$	$y_4 - \frac{y_2 \sinh(4\varepsilon_i)}{\sinh(4\varepsilon_0)}$
$y_7$	$2 \cosh(2\varepsilon_i) - 2 \frac{\cosh(2\varepsilon_0) \sinh(2\varepsilon_i)}{\sinh(2\varepsilon_0)}$
$y_8$	$4 \cosh(4\varepsilon_i) - 4 \frac{\cosh(4\varepsilon_0) \sinh(4\varepsilon_i)}{\sinh(4\varepsilon_0)}$
$x_n$	$\cosh(n\varepsilon_i) - \frac{\cosh(n\varepsilon_0) \sinh(n\varepsilon_i)}{\sinh(n\varepsilon_0)}$
$I_n$	$-\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i) - \cos(2\eta)}{2}} \cos(n\eta) d\eta$ with $n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$
$P_i^*$	$\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i) - \cos(2\eta)}{2}} d\eta$
$S^*$	$\frac{\pi}{2} [\sinh(2\varepsilon_0) - \sinh(2\varepsilon_i)]$

---

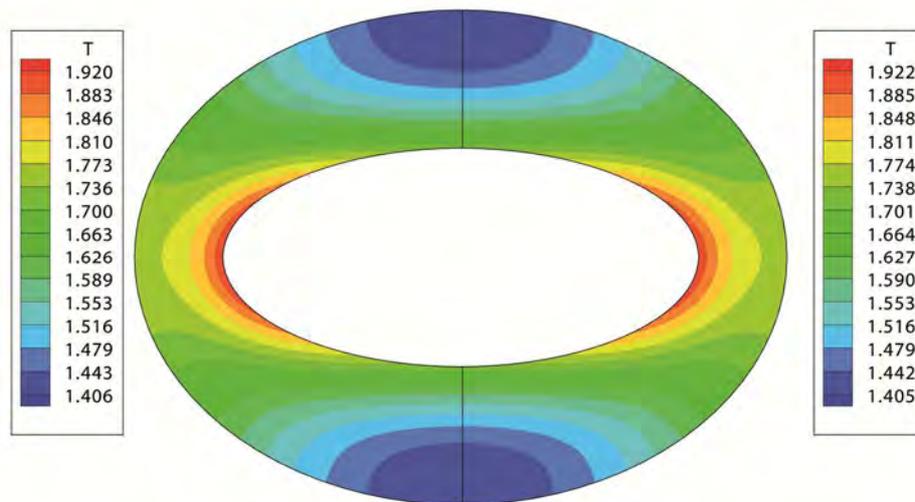
La valeur de la constante  $A_{14}$  est choisie pour assurer que l'égalité suivante est vraie:

$$0 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} g(\varepsilon, \eta) v_z^*(\varepsilon, \eta) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} v_z^*(\varepsilon, \eta) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (4.5)$$

Cela traduit une condition choisie pour donner une température moyenne dans une section transversale égale à:

$$T_m^*(z^*) = A_{15} z^* = \frac{1}{\text{Re Pr } S^*} P_1^* z^* \quad (4.6)$$

La solution analytique (4.4) est comparée à la solution numérique de l'équation (4.2) avec un écoulement développé imposé (celui donné par l'équation (4.3)). On a trouvé que le champ analytique thermique est numériquement reproductible à la sortie d'une longueur suffisante du conduit. Pour une longueur du conduit égale à 100, les champs thermiques analytique et numérique sont qualitativement similaires mais quantitativement différents : la longueur est insuffisante pour le développement thermique. La différence quantitative est diminuée dès lors que la longueur du conduit augmente. On a augmenté la longueur du conduit à 800, dont la sortie dépasse la longueur d'entrée thermique, et on a trouvé qu'à la sortie de ce conduit, les champs thermiques analytique et numérique sont qualitativement et quantitativement similaires. La solution analytique obtenue avec l'équation (4.4) et la solution numérique sont présentées dans la **Figure 4.2**. On voit que les deux champs thermiques (analytiques et numériques) sont presque identiques. Le champ thermique est symétrique par rapport aux axes elliptiques. La température adimensionnelle est diminuée à partir du cylindre intérieur chauffé jusqu'au cylindre extérieur adiabatique. Les variations angulaires de la température sont opposées aux variations de la vitesse axiale: la température diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de l'entrefer. En allant de l'axe horizontal vers l'axe vertical, le niveau de la vitesse axiale augmente ce qui améliore le refroidissement convectif et donc diminue le niveau de la température. La température maximale est située à l'intersection de la surface du cylindre intérieur et l'axe elliptique horizontal.



**Figure .4.2. Le champ numérique de la température (à gauche) et le champ analytique de la température (à droite) de l'écoulement totalement développé, à la sortie d'un conduit de longueur égale à 800.**

L'excellent accord des résultats analytiques et numériques de l'écoulement, hydrodynamiquement et thermiquement développé, de la convection forcée avec des propriétés physiques constantes peut être considéré comme une validation de la simulation numérique.

#### **4.2.2. L'écoulement de la convection forcée en développement hydrodynamique et thermique:**

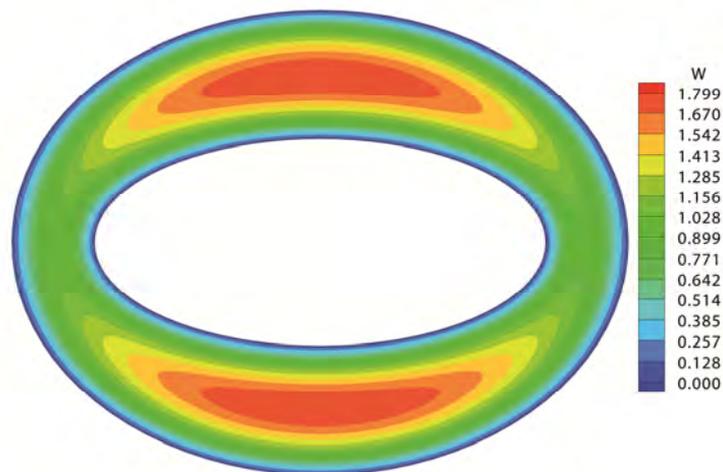
##### **4.2.2.1. Le champ hydrodynamique et l'écoulement secondaire :**

Le cas de base pour notre étude numérique est le cas d'un écoulement en développement hydrodynamique et thermique simultanés, de la convection forcée avec des propriétés physiques constantes. Ce cas est considéré comme un cas d'état de référence avec lequel les autres cas seront comparés. La solution numérique de cet écoulement est celle des équations (2.17)-(2.20) avec les conditions aux limites spécifiques (2.22)-(2.26). Les propriétés thermophysiques sont constantes (toutes égales à 1).

Dans l'intervalle ( $z^* = 0$  jusqu'à  $z^*=21.25$ ), l'écoulement, uniforme à l'entrée, se développe axialement. Dans cette zone, l'écoulement subit des variations suivant les trois directions elliptiques. Des couches limites se forment sur les faces des cylindres et leurs épaisseurs augmentent axialement. La variation axiale de l'écoulement induit un écoulement secondaire, relativement faible, dans les sections droites du conduit. L'origine physique de cet écoulement secondaire est la conservation de masse; comme l'exige l'équation de continuité de l'écoulement.

Dans l'intervalle ( $z^* = 21.25$  jusqu'à  $z^*=100$ ), une fois la longueur d'entrée hydrodynamique atteinte, l'écoulement secondaire disparaît et l'écoulement devient complètement axial et hydrodynamiquement développé (suivant la direction axiale). Donc, dans cet intervalle, l'écoulement est uni directionnel, avec un seul composant de vitesse, et bidimensionnel, la vitesse axiale dépend seulement des deux coordonnées polaires. La vitesse axiale croît radialement à partir de la paroi du cylindre interne pour atteindre un maximum local au voisinage à la moitié de l'entrefer elliptique puis elle décroît en allant vers la surface de cylindre extérieur. Dans la direction azimutale la vitesse augmente dans le sens antihoraire jusqu'à la valeur maximale situé à  $\eta = \frac{\pi}{2}$  et ensuite elle diminue jusqu'à  $\eta = \pi$ . Par symétrie par rapport à l'axe elliptique horizontal, on obtient les mêmes variations dans la moitié inférieure du conduit. La vitesse maximale, égale à 1.919, de l'écoulement est située dans deux positions à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2})$  et  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$ . Un aperçu du développement de l'écoulement axial est illustré dans la **Figure 4.3**, qui présente les variations radiales et azimutales de la vitesse axiale à deux positions axiales choisies : la première à  $z^* = 5.75$  dans la zone de développement, la seconde à  $z^* = 100$  dans la zone développée. La **Figure 4.4** illustre l'amortissement axial de l'écoulement secondaire dans la zone de développement.

a)



b)

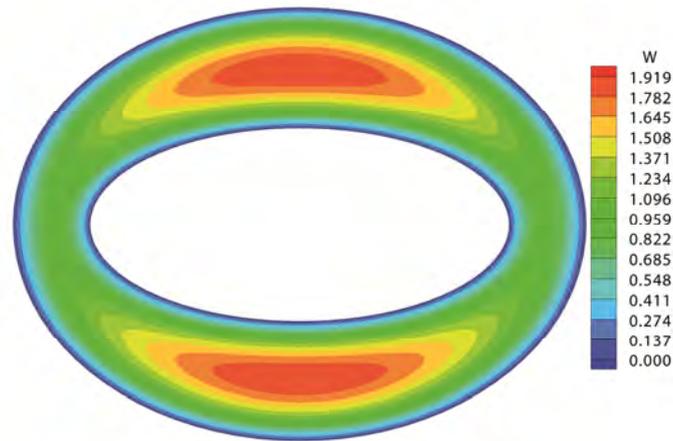
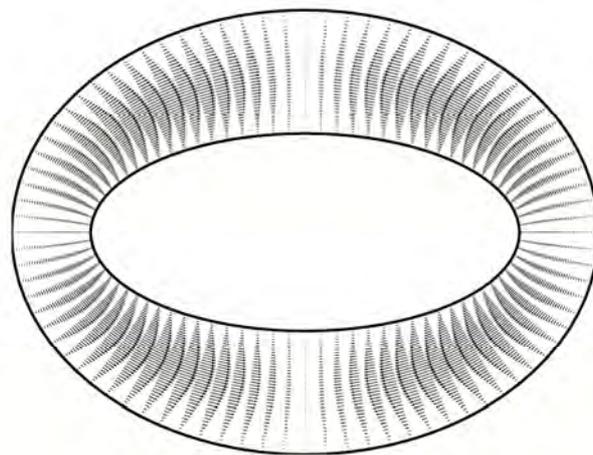


Figure. 4.3. Le champ de la vitesse axiale. a) à  $z^* = 5.75$ . b) à  $z^* = 100$

a)



b)

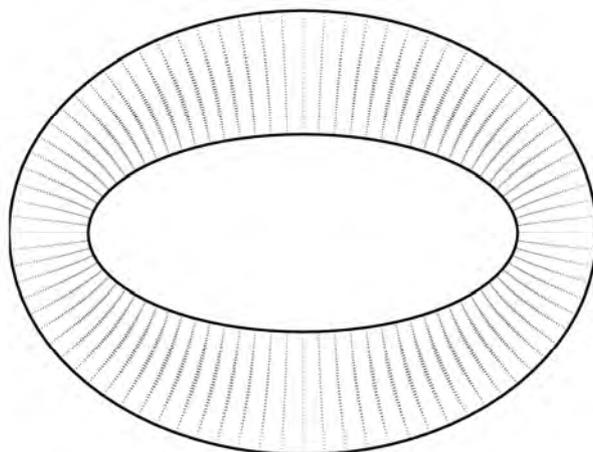


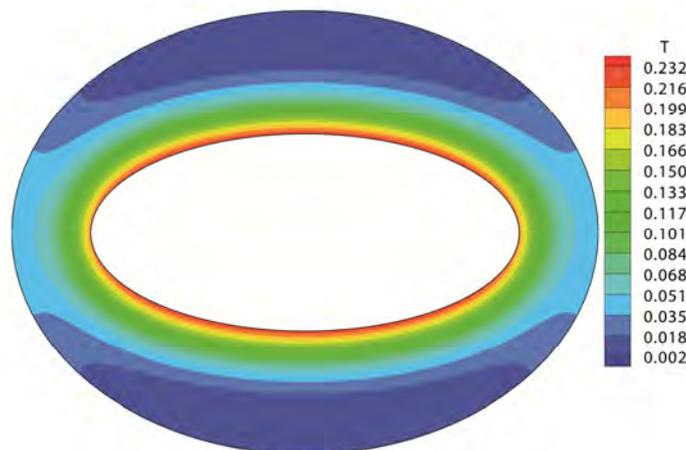
Figure.4.4. Amortissement de l'écoulement secondaire dans la zone de développement.  
à a)  $z= 8.75$  b)  $z=14.25$ . (La longueur des vecteurs est amplifiée 15 fois pour une représentation graphique claire)

4.2.2.2. Le champ thermique :

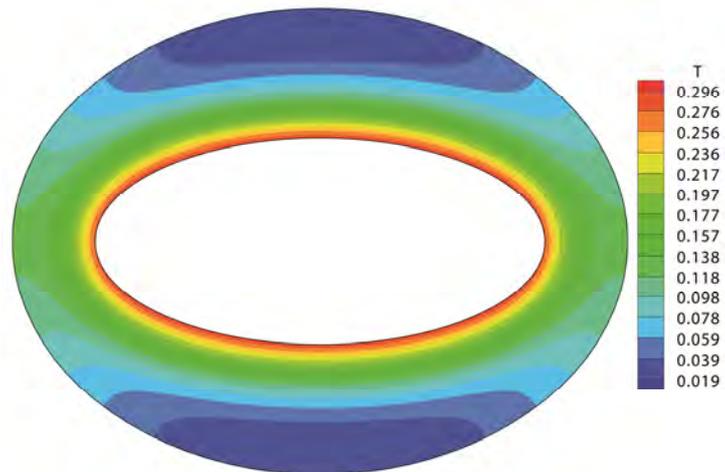
Le champ thermique est en développement axial continu entre l'entrée et la sortie du conduit. La **Figure 4.5** présente les variations polaires de la température à quatre stations axiales arbitrairement choisies ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ). Le champ thermique est symétrique par rapport aux axes elliptiques. Suivant la direction radiale, la température décroît entre le cylindre intérieur chauffé et le cylindre extérieur adiabatique. Suivant la direction angulaire, la température décroît en allant de l'axe elliptique horizontal vers l'axe elliptique vertical ; cette décroissance est compatible avec la croissance du refroidissement convectif axial suivant la même direction. A une section droite du conduit, la température maximale est située dans quatre endroits à  $(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.374)$  ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 2.767$ ) ,  $(\varepsilon = 0.5, \eta = 3.515)$  et  $(\varepsilon = 0.5, \eta = 5.909)$  et la température minimale est localisée à  $(\varepsilon = 1, \eta = \frac{\pi}{2})$  et  $(\varepsilon = 1, \eta = \frac{3\pi}{2})$ . Les valeurs des maximas et minimas de la température, aux positions axiales choisies, sont précisés sur les légendes de la **Figure 4.5**.

Axialement, le champ thermique est caractérisé par une croissance axiale monotone de l'entrée jusqu'à la sortie de conduit. Une telle croissance est physiquement acceptable et elle est due à l'addition axiale du chauffage le long du cylindre intérieur. Autrement dit, la croissance axiale monotone est due à la croissance axiale linéaire de température moyenne du conduit (définie par l'équation (2.32)) représentée sur la **Figure 4.6**. Cette croissance linéaire de la température moyenne est démontrée par le bilan thermique ; mais elle n'implique pas une variation (croissance) axiale linéaire de la température parce que l'écoulement est en développement thermique. Par exemple à la surface du cylindre intérieur, si on fixe  $\varepsilon$  et  $\eta$ , la variation axiale de la température n'est pas linéaire.

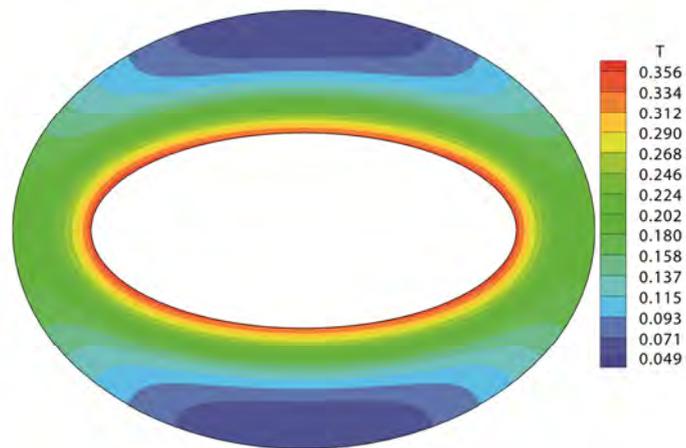
a)



b)



c)



d)

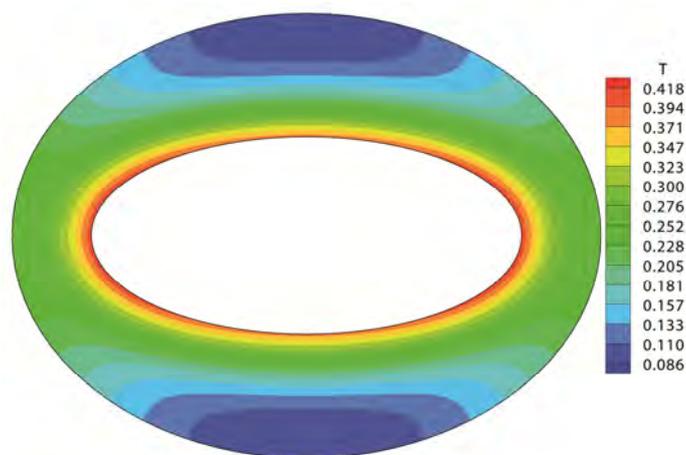


Figure.4.5.Distribution polaire de la température.  
a) $z^*=25.25$ , b) $z^*=50.25$ , c) $z^*=75.25$ , d) $z^*=100$

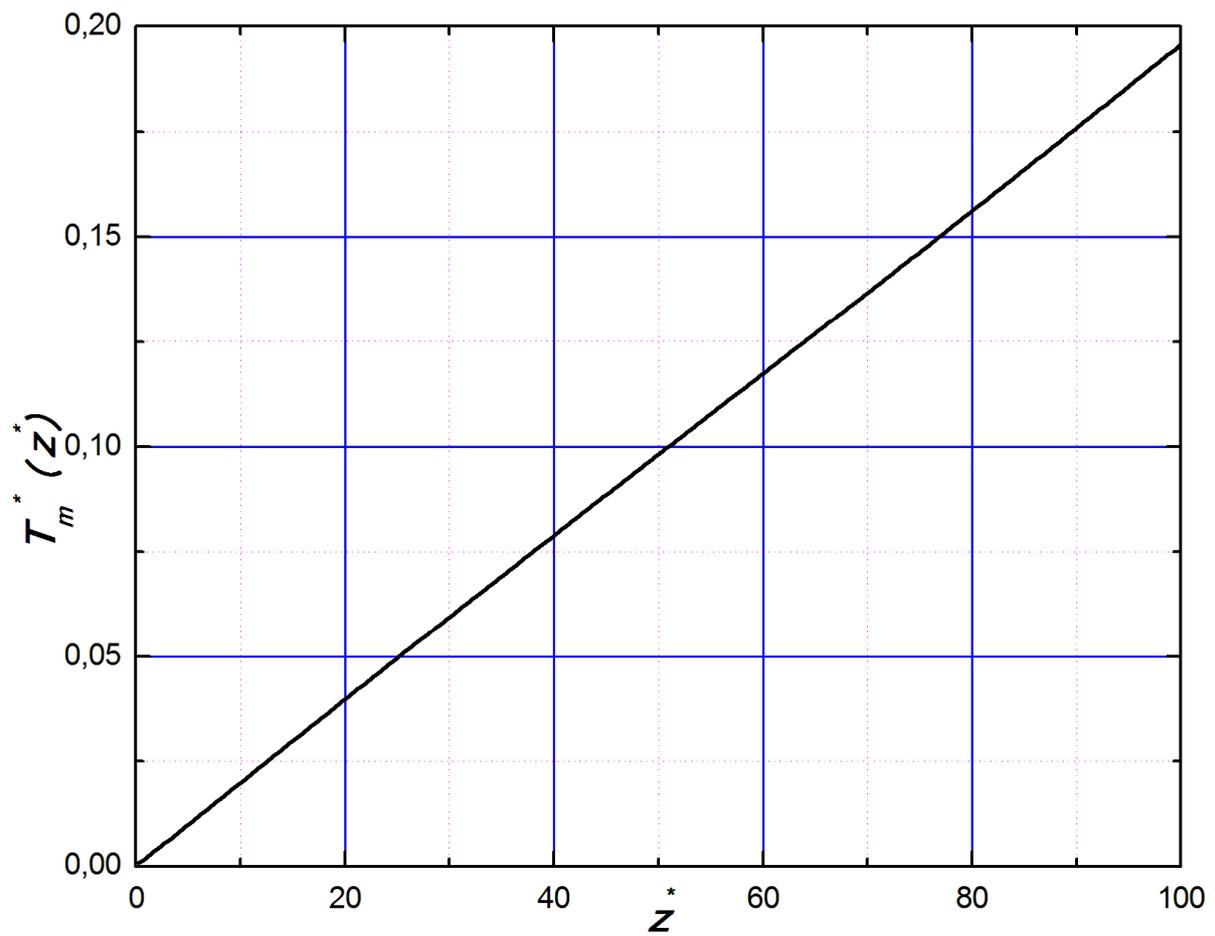


Figure.4.6. La croissance axiale linéaire de la température moyenne.

### 4.2.3. La convection mixte en développement hydrodynamique et thermique avec des propriétés physique constantes:

L'écoulement de la convection mixte est différent de celui de la convection forcée surtout lorsque le nombre de Grashof est relativement élevé, c'est-à-dire lorsque la force de flottabilité thermique est assez importante et ne peut être négligée. En langage de modélisation mathématique, l'écoulement de la convection mixte est couplé au champ thermique tel que précisé par les équations (2.17-2.21) du modèle mathématique. Compte tenu du montage du conduit, la force de flottabilité thermique a une composante radiale et une composante angulaire. Ces composantes induisent un écoulement secondaire, dans le plan d'une section droite du conduit, qui n'est pas causé par l'effet de l'entrée. Donc, l'écoulement secondaire de la convection mixte, avec le montage du conduit considéré, est induit par l'effet de l'entrée du conduit et l'effet de la flottabilité thermique. Nous avons déjà présenté l'amortissement axial de l'écoulement secondaire induit par l'effet de l'entrée. Mais l'écoulement secondaire induit par la flottabilité thermique est contrôlé par les gradients de température sur la section droite du conduit. Avec les conditions aux limites thermiques imposées, cet écoulement a tendance à s'intensifier axialement. La présence permanente d'un écoulement secondaire et d'un écoulement axial (écoulement principal) donne à l'écoulement de la convection mixte son caractère tri directionnel (avec trois composantes de vitesse) et tri dimensionnel (les composantes de la vitesse dépendent des trois coordonnées spatiales). La modélisation mathématique montre le couplage entre l'écoulement principal, l'écoulement secondaire et la température. Par la nature de son mouvement, l'écoulement secondaire fait un brassage sur le plan d'une section droite. Il est prévu qu'un tel brassage améliore le transfert thermique. Pour étudier l'effet d'un tel brassage, nous avons considéré trois cas de la convection mixte, avec les trois nombres de Grashof  $Gr=5000$ ,  $Gr=10000$  et  $Gr=15000$ , sachant que l'intensité de l'écoulement secondaire (induit par la flottabilité thermique) augmente avec le nombre de Grashof. Les résultats de ces trois cas seront comparés avec celui de la convection forcée, considéré le cas de référence, et simulé avec un nombre de Grashof égal à 0.

#### 4.2.3.1. Cas de $Gr=5000$ :

Ce cas de convection mixte, avec une convection naturelle relativement faible, représente une faible perturbation de l'écoulement de la convection forcée. Plus tard, il sera démontré que le

transfert thermique quantifié par le nombre de Nusselt n'est que faiblement augmenté par rapport à celui de la convection forcée.

#### 4.2.3.1.1. L'écoulement secondaire:

L'écoulement secondaire est représenté par les composants de la vitesse radiale et angulaire. On peut aussi présenter l'écoulement secondaire dans une section transversale donnée, par les contours de la fonction de courant qui définit comme une fonction dépendante des composantes radiale et angulaire de vitesse :

$$V_{\eta}^*(\varepsilon, \eta) = -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial \Psi(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} \quad (4.7)$$

$$V_{\varepsilon}^*(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial \Psi(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} \quad (4.8)$$

Si on connaît les composantes radiale et angulaire de la vitesse, on peut calculer  $\Psi(\varepsilon, \eta)$  par l'intégration de l'une des équations (4.7) ou bien (4.8) avec une condition initiale à la surface du cylindre intérieur choisi arbitrairement égale à zéro. Dans cette étude, on a utilisé l'équation (4.7). Les lignes de courant sont tangentes aux vitesses de l'écoulement secondaire et la différence entre les valeurs de deux lignes de courant (deux valeurs de  $\Psi(\varepsilon, \eta)$ ) représente le débit de l'écoulement secondaire passé entre ces lignes. Cette différence augmente avec l'augmentation de vitesse de l'écoulement secondaire.

A l'entrée du conduit, l'écoulement secondaire est présent et est induit par l'effet de l'entrée ; cet écoulement est expliqué par la satisfaction de l'équation de continuité. À l'entrée l'écoulement axial est uniforme. À l'aval de l'entrée, l'écoulement axial se développe, avec la formation des couches limites sur les parois des cylindres, induisant un écoulement secondaire (effet de l'entrée) comme l'impose la conservation de la masse modélisée par l'équation de continuité (2.17). Cet écoulement secondaire induit par l'effet de l'entrée, s'amortit rapidement suivant la direction axiale. Par contre, l'écoulement secondaire induit par la flottabilité thermique s'intensifie axialement. Loin de l'entrée du conduit, l'écoulement secondaire est induit par la seule force de flottabilité thermique.

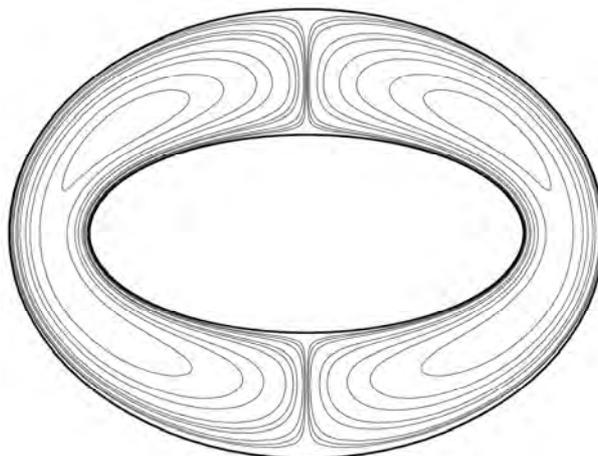
Dans le domaine axial  $7.25 \leq z^* \leq 72.25$ , l'écoulement secondaire, induit par la flottabilité thermique, se manifeste sous la forme de deux cellules principales contrarotatives, l'une dans la partie droite et l'autre dans la partie gauche de la section droite du conduit. La cellule droite tourne dans la direction horaire et l'autre cellule tourne dans le sens anti horaire. Un exemple de cet écoulement, à  $z^* = 30.2$ , est illustré dans La **Figure 4.7a**. Les particules du fluide près du cylindre elliptique intérieur sont chauffées (moins denses) et se déplacent, sous l'effet de la

flottabilité, vers le haut du conduit; alors que les particules du fluide près de cylindre elliptique extérieur sont relativement plus froides (plus denses) et donc descendent, sous l'effet de la flottabilité, vers la partie basse du conduit. Ce mouvement, se présente sous la forme de deux cellules de circulation contrarotatives.

À l'aval de  $z^* = 72.25$  et jusqu'à la sortie du conduit, et se présente sous la forme de quatre cellules sur la section droite du conduit comme illustré dans la **Figure 4.7b**. Deux cellules principales, similaires à celles de la **Figure 4.7a**, occupent une grande partie de la section droite. Deux cellules secondaires occupent une petite partie de la partie inférieure de la section droite. Concernant l'apparition des deux cellules secondaires, elle est expliquée par l'amélioration de la stratification thermique angulaire en bas de la section droite qui tend à favoriser une circulation opposée à celle du mouvement descendant de la cellule principale affaibli par la même stratification dans cette zone.

L'écoulement secondaire obtenu avec le nombre de Grashof considéré est relativement faible, sa vitesse maximale à la sortie du conduit est égale à  $1.54 \times 10^{-2}$ . L'évolution axiale et l'intensité relative locale de l'écoulement secondaire sont mieux représentées graphiquement par les vecteurs de sa vitesse (les composantes radiale et angulaire). La vitesse de l'écoulement secondaire est présentée dans la **Figure 4.8**, à des positions axiales qui permettent l'illustration des formes observées. Cette figure montre le sens des circulations et la fortification axiale de l'écoulement secondaire. Aussi, on remarque qu'avec l'augmentation de la position axiale, l'écoulement secondaire s'intensifie (relativement) en haut de la section droite et s'affaibli (relativement) en bas de cette section. On discerne la faiblesse de la circulation de la cellule secondaire.

a)



b)

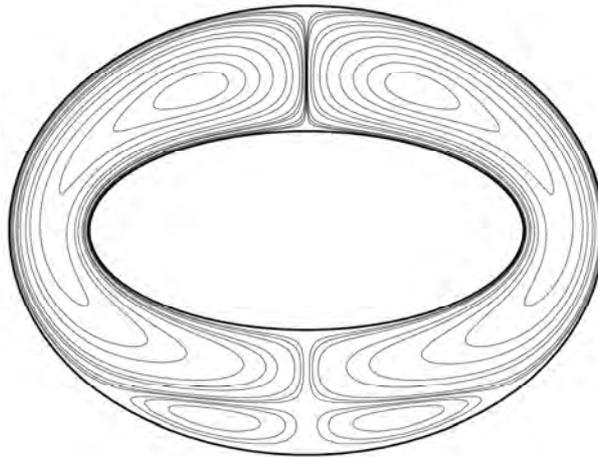
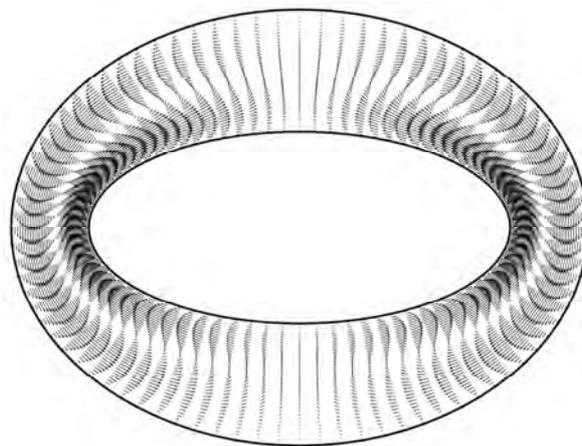


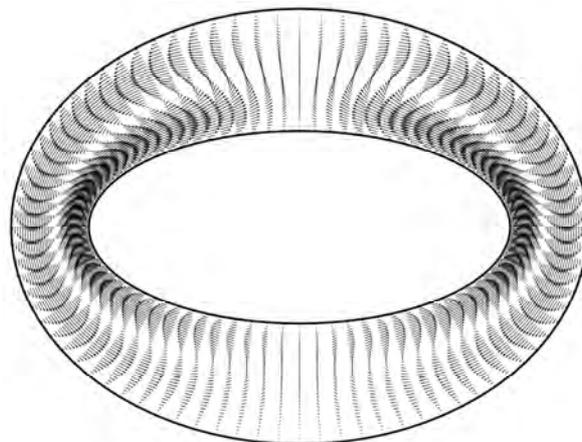
Figure.4.7. Lignes de courant de l'écoulement secondaire.  $Gr=5000$ .

a)  $z^* = 30.25$ . b)  $z^* = 100$

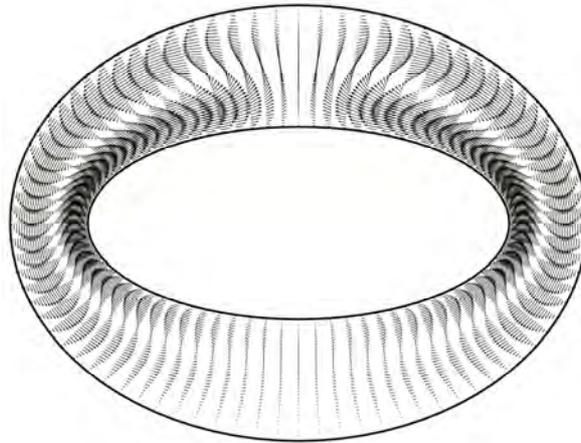
a)



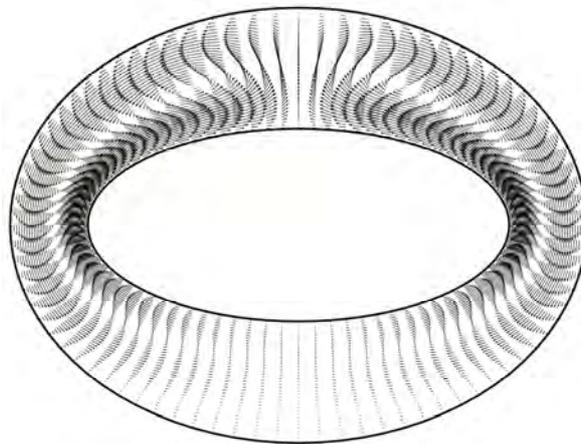
b)



c)



d)



**Figure.4.8. La vitesse de l'écoulement secondaire.  $Gr=5000$ .**

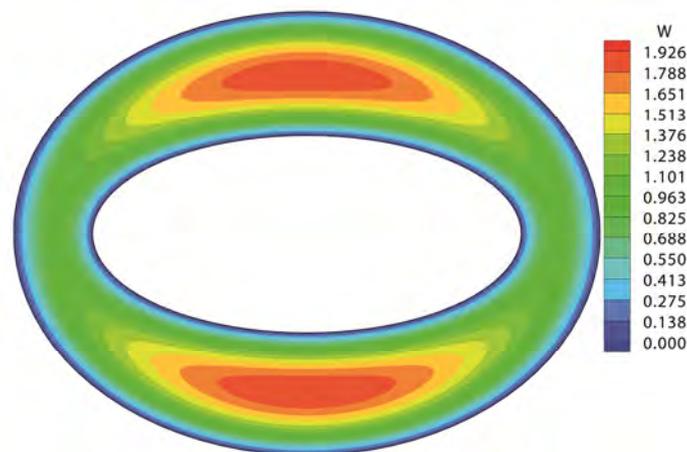
**a)  $z^* = 25.25$ . b)  $z^* = 50.25$ . c)  $z^* = 75.25$ . d)  $z^* = 100$ .**

#### 4.2.3.1.2. L'écoulement axial:

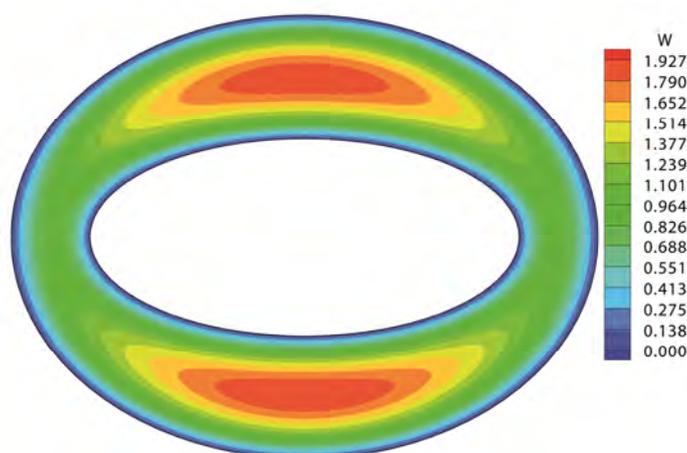
Il est trouvé que de l'entrée jusqu'à  $z^* = 7.25$ , l'écoulement axial est similaire à celui de la convection forcée, parce que l'effet de la flottabilité thermique dans cette zone est négligeable. La **Figure 4.9** présente les variations radiale et angulaire de la vitesse axiale dans quatre positions axiales ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ), arbitrairement choisies. Qualitativement, il est remarqué que ces distributions sont similaires à celle de la convection forcée développée (**Figure 4.3b**). Quantitativement, on remarque une légère différence qui se manifeste continuellement, suivant la direction axiale: le maximum de la vitesse axiale (sur une section droite) augmente légèrement suivant la direction axiale, ce qui démontre le développement axial continu de l'écoulement. Sous l'effet de l'écoulement secondaire, le maximum de la vitesse axiale sur une section droite se localise en bas de cette

dernière, sur l'axe elliptique vertical. Donc, sur une section droite, l'écoulement secondaire tend à réduire le niveau de la vitesse axiale en haut et à l'augmenter en bas de la section en conservant le débit à travers la section. Il y'a une brisure de la symétrie de l'écoulement axial par rapport à l'axe elliptique horizontal. Mais, avec le nombre de Grashof considéré, l'effet quantitatif de l'écoulement secondaire sur l'écoulement axial est une faible perturbation qui est difficile à discerner graphiquement. La vitesse maximale est située à la sortie de conduit dans la partie inférieure dans une position polaire ( $\varepsilon = 07687, \eta = \frac{3\pi}{2}$ ) et sa valeur égale 1.928.

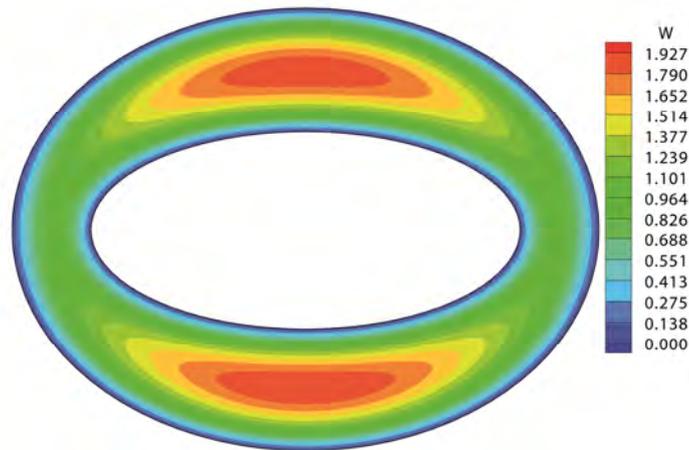
a)



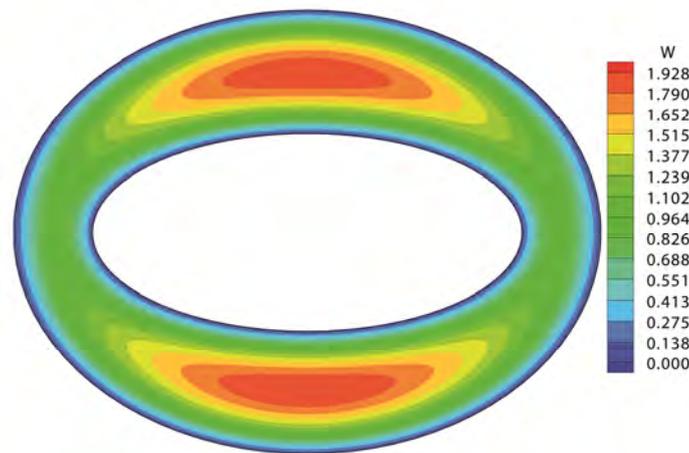
b)



c)



d)



**Figure.4.9. Le champ de la vitesse axiale. Gr=5000.**

**a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$**

#### 4.2.3.1.3. Le champ thermique :

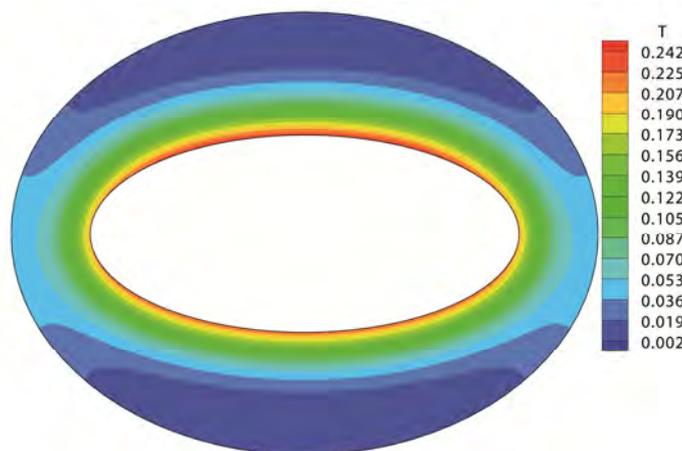
L'écoulement secondaire n'a causé qu'une faible perturbation à l'écoulement axial, mais son effet sur le champ thermique est plus visible. Par son mouvement, l'écoulement secondaire déplace le fluide relativement plus chaud vers le haut et le fluide relativement plus froid vers le bas d'une section droite. Ce déplacement cause une brisure du champ thermique par rapport à l'axe elliptique horizontal. Axialement, la température maximale d'une section droite est localisée en haut de cette dernière, à l'intersection du cylindre intérieur et l'axe elliptique vertical. Dans le cas de la convection forcée, la température maximale d'une section droite est localisée en quatre points ( voir le **Tableau 4.3**). Les variations radiale et azimutale, à quatre positions axiales ( $z^* = 25.2$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ), du champ thermique sont

illustrées dans la **Figure 4.10**. De la comparaison de cette figure avec la **Figure 4.5**, on discerne les différences qualitatives et quantitatives des champs thermiques de la convection mixte (avec le nombre de Grashof considéré) et de la convection forcée. Le niveau de la température maximale est augmenté dans le cas de la convection mixte comme il est montré dans le **Tableau 4.3**.

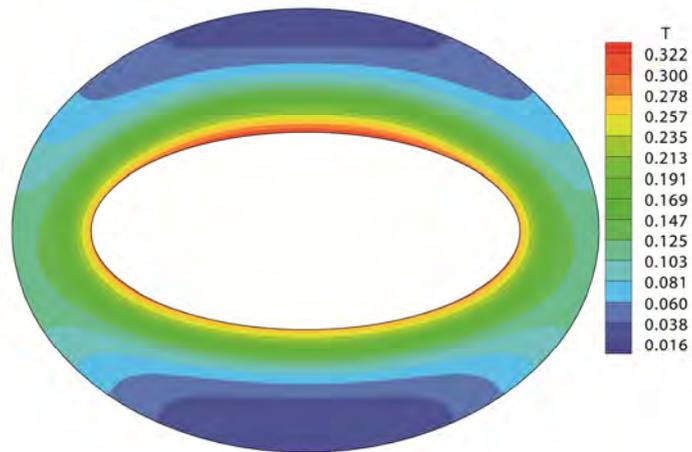
**Tableau 4.3 La température maximale et sa position polaire.**

Station axiale	Convection forcée La Température maximale et sa position polaire	Convection mixte La Température maximale et sa position polaire
$z^* = 25.25$	$T_{max}^* = 0.232$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 1.0471$ ) , ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 2.0943$ ) ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 4.1887$ ) et ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 5.2359$ )	$T_{max}^* = 0.242$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ )
$z^* = 50.25$	$T_{max}^* = 0.296$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.8975$ ) , ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 2.3187$ ) ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 3.9643$ ) et ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 5.4603$ )	$T_{max}^* = 0.322$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ )
$z^* = 75.25$	$T_{max}^* = 0.356$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.5235$ ) , ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 2.6179$ ) ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 3.6651$ ) et ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 5.7595$ )	$T_{max}^* = 0.389$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ )
$z^* = 100$	$T_{max}^* = 0.418$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.374$ ) , ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 2.767$ ) ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 3.515$ ) et ( $\varepsilon = 0.5, \eta = 5.909$ )	$T_{max}^* = 0.448$ ( $\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ )

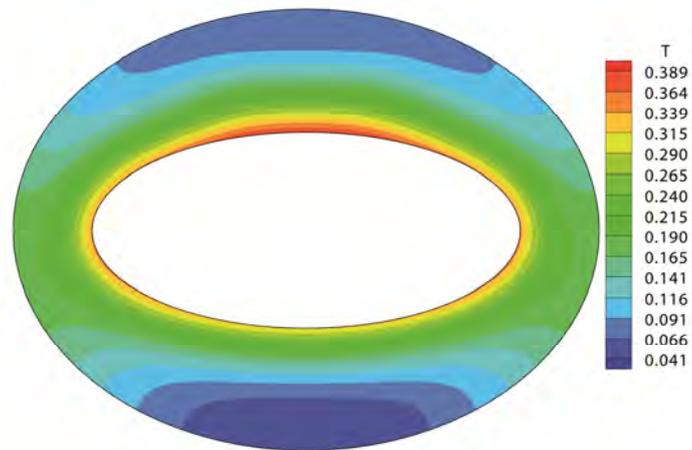
a)



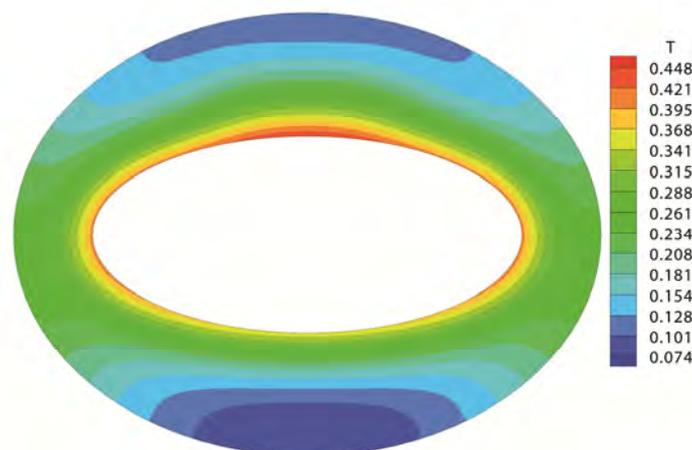
b)



c)



d)



**Figure.4.10. Les variations polaires de la température. Gr=5000.**

**a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$**

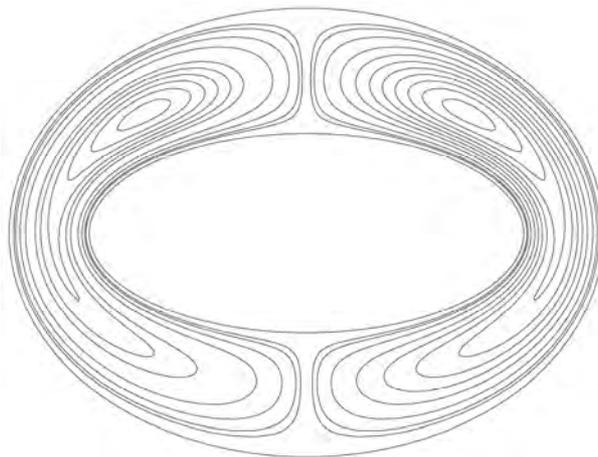
#### 4.2.3.2. Cas de $Gr=10000$ :

Ce cas de convection mixte, avec une convection naturelle relativement considérable, est plus représentatif, que le cas précédent, des effets de la flottabilité thermique sur l'écoulement axial et le champ thermique. Les résultats de ce cas sont nettement différents de celui de la convection forcée. Plus tard, il sera démontré que le transfert thermique quantifié par le nombre de Nusselt est considérablement amélioré par rapport à celui de la convection forcée.

##### 4.2.3.2.1. L'écoulement secondaire:

Qualitativement, l'écoulement secondaire est similaire à celui obtenu avec le nombre de Grashof égal à 5000. Mais le seuil axial de l'apparition des deux formes de l'écoulement axial est avancé en amont, par rapport à celui du cas précédent. L'écoulement secondaire avec deux cellules principales contrarotatives (voir les **Figures 4.11a**, **4.12a** et **4.12.b**) est présent dans le domaine axial  $6.25 \leq z^* \leq 59.25$ . L'écoulement secondaire avec deux cellules principales contrarotatives et deux cellules secondaires (voir les **Figures 4.11b**, **4.12c** et **4.12.d**) se localise dans le domaine axial  $59.25 < z^* \leq 100$ . Quantitativement, l'écoulement secondaire est plus fort que celui obtenu avec le nombre de Grashof égal à 5000 ; sa vitesse maximale à la sortie du conduit est égale à  $3.76 \times 10^{-2}$  ( $1.54 \times 10^{-2}$  pour le cas de  $Gr=5000$  propriétés constantes).

a)



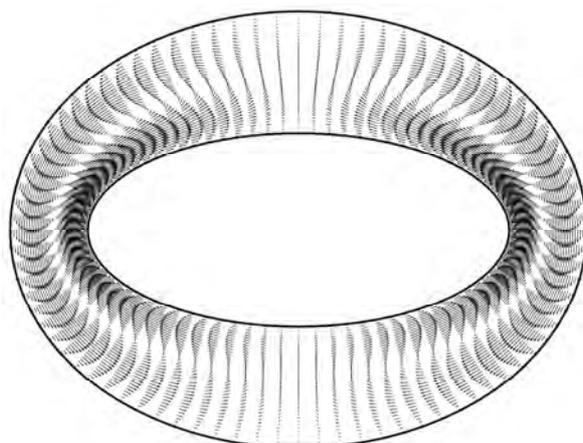
b)



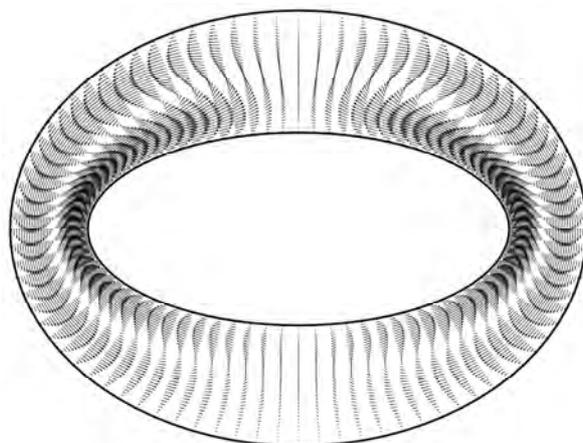
Figure.4.11. Lignes de courant de l'écoulement secondaire.  $Gr=10^4$ .

a)  $z^* = 30.25$ . b)  $z^* = 100$

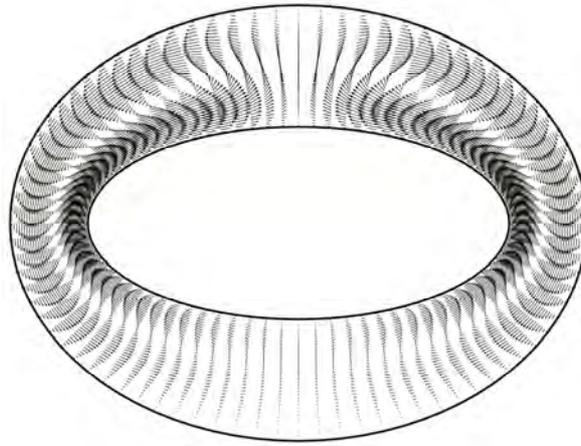
a)



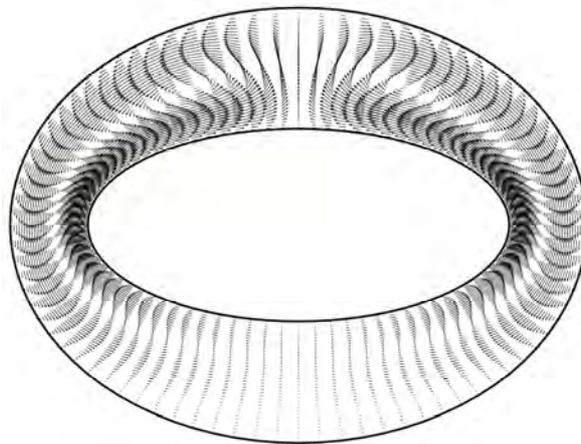
b)



c)



d)



**Figure.4.12. La vitesse de l'écoulement secondaire.  $Gr=10^4$ .**

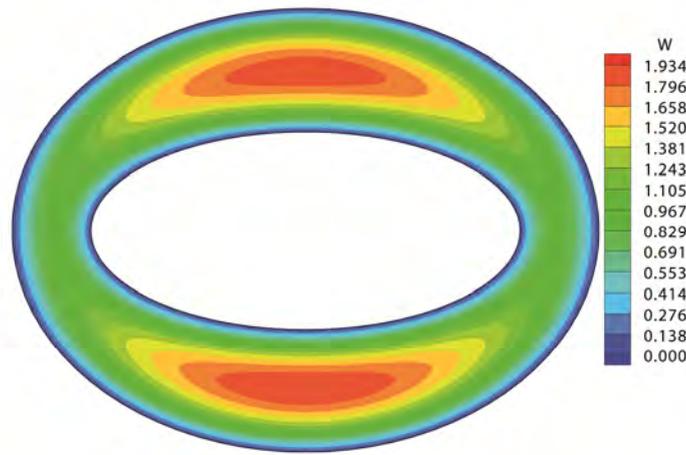
**a)  $z^* = 25.25$ . b)  $z^* = 50.25$ . c)  $z^* = 75.25$ . d)  $z^* = 100$ .**

#### 4.2.3.2.2. L'écoulement axial:

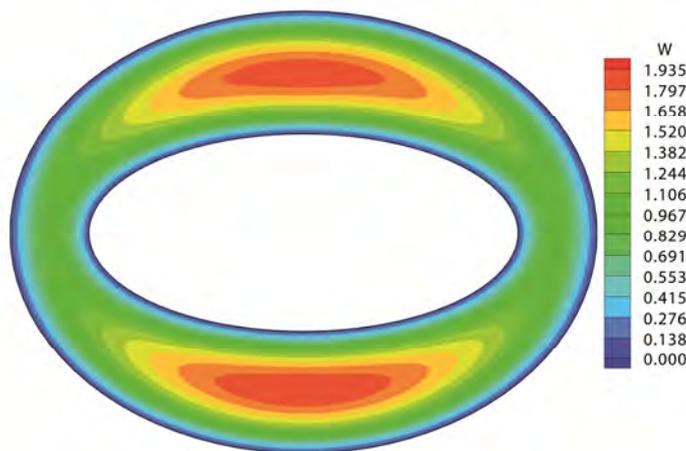
La **Figure 4.13** présente les variations radiale et angulaire de la vitesse axiale dans les quatre positions axiales : ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ). Cette figure illustre d'une manière plus claire l'effet de l'écoulement secondaire sur l'écoulement axial. L'asymétrie par rapport à l'axe elliptique horizontale est plus visible que dans le cas avec  $Gr=5000$ . Le déplacement ascendant des isotaques de la vitesse axiale, en haut de la section droite, est dû à l'action du mouvement (ascendant), relativement plus fort, de l'écoulement secondaire. Par contre, en bas de la section droite, l'écoulement secondaire est relativement plus faible, et n'affecte pas sensiblement la forme de la distribution polaire de la vitesse axiale. Sur une section droite, la redistribution polaire de la vitesse axiale, due à l'écoulement secondaire, entraîne la réduction du niveau de la vitesse axiale en haut et son augmentation en

bas de la section, en conservant le débit à travers la section. Cette redistribution est axialement continue jusqu'à la sortie du conduit. Cet effet est plus prononcé avec l'augmentation du nombre de Grashof. Par exemple, à la sortie du conduit, la vitesse axiale maximale (localisée à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$ ) est égale à 1.938 avec  $Gr=10^4$  et est égale à 1.928 avec  $Gr=5000$  ; ces deux valeurs sont comparées à celle de convection forcée, égale à 1.919 est localisée à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2})$  et  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$ .

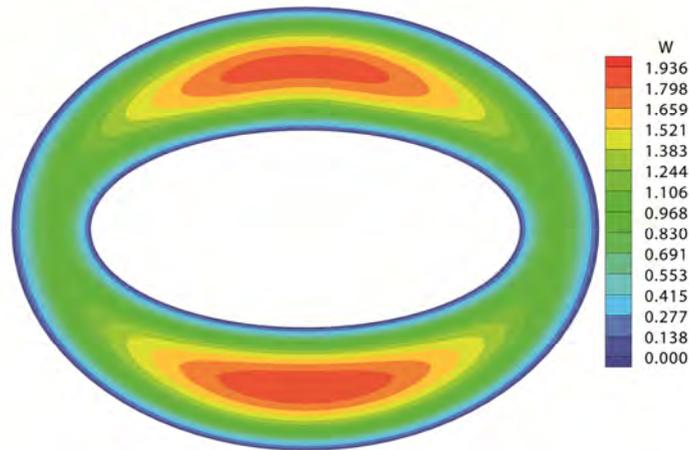
a)



b)



c)



d)

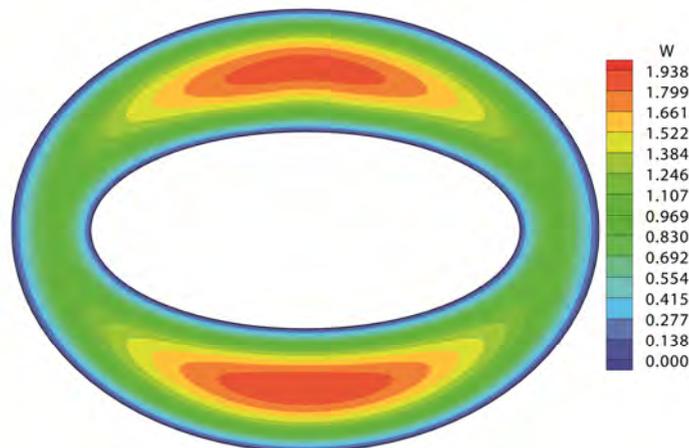


Figure.4.13. Le champ de la vitesse axiale.  $Gr=10^4$ .

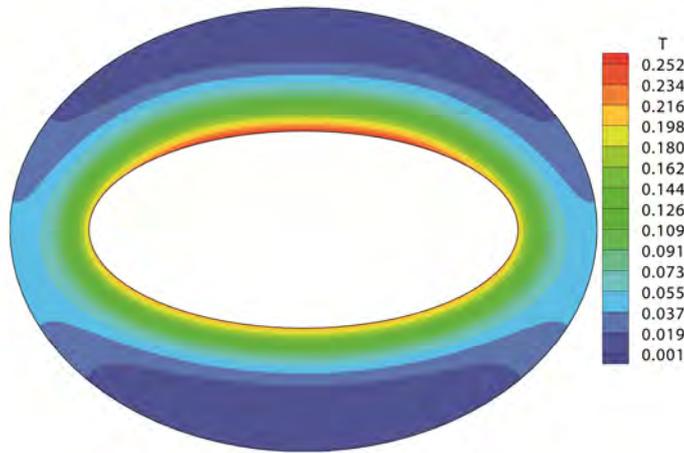
a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.2.2.2.3. Le champ thermique :

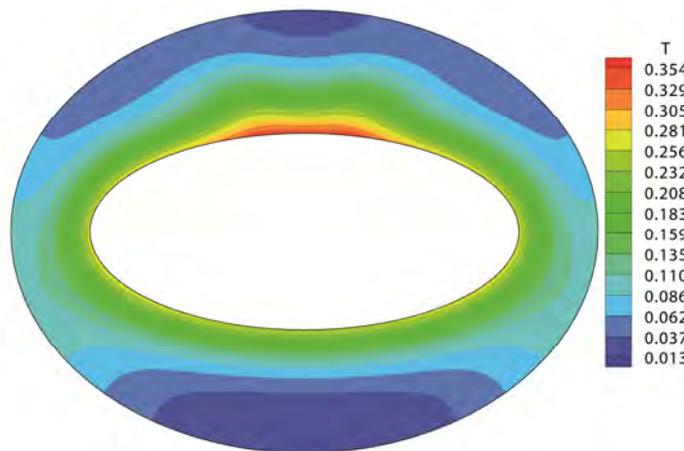
La Figure 4.14. présente les variations polaire de la température dans les quatre positions axiales : ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ). L'effet de l'écoulement secondaire sur le champ thermique est plus prononcé que dans le cas avec le nombre de Grashof  $Gr=5000$ . Le déplacement ascendant des isothermes en haut de la section droite témoigne du sens et de l'intensité de l'écoulement secondaire dans cette zone. Ce déplacement est continuellement plus prononcé suivant la direction axiale. Aussi, la distribution du champ thermique en bas de la section droite, similaire à celle de la convection forcée, est un signe de la faiblesse de l'écoulement secondaire dans cette zone, le long du

conduit. L'écoulement secondaire cause une asymétrie du champ thermique d'une section droite par rapport à l'axe elliptique horizontal. Une telle asymétrie est caractérisée par la partie supérieure de la section droite qui est relativement plus chaude que sa partie inférieure. Physiquement cette asymétrie est due à l'action de l'écoulement secondaire. Ce dernier déplace le fluide chaud vers le haut de la section droite. Aussi, l'écoulement secondaire réduit relativement le niveau de la vitesse axiale en haut de la section, et l'augmente relativement en bas de la section, ce qui tend à améliorer la convection axiale en bas de la section. Il est présenté dans la **Figure 4.14d**, que la température maximale, à la sortie du conduit ( $z^* = 100$ ), est égale à 0.459 et est localisée à la surface du cylindre intérieur (à  $(\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2})$ ).

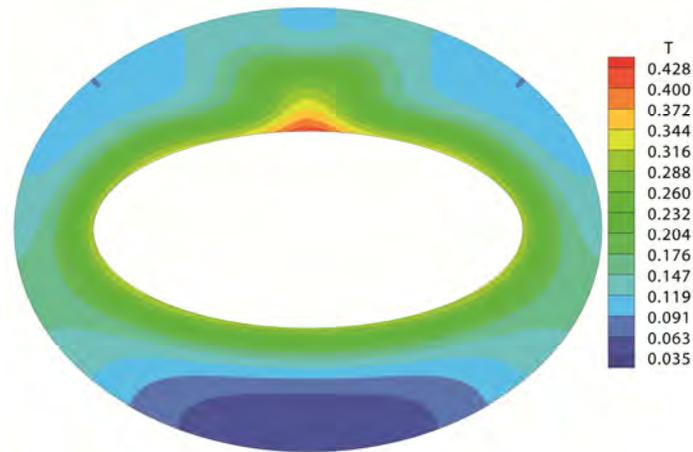
a)



b)



c)



d)

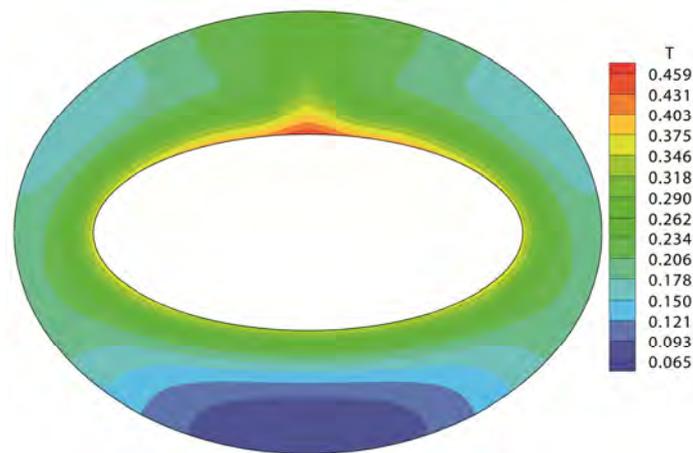


Figure.4.14. Les variations polaires de la température.  $Gr=10^4$ .

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.2.3.3. Cas de $Gr=15000$ :

Ce cas de convection mixte a une convection naturelle relativement plus forte que celle du cas de  $Gr=10^4$ . Aussi, les évolutions axiales des champs dynamique et thermique sont différentes des cas précédents. Une nouvelle forme de l'écoulement secondaire est discernée dans une partie du conduit. Plus tard, il sera démontré que le transfert thermique quantifié par le nombre de Nusselt est meilleur que celui obtenu avec  $Gr=10^4$ .

##### 4.2.3.3.1. L'écoulement secondaire:

Quatre formes de l'écoulement secondaire sont présentes sur la longueur du conduit. Dans le domaine  $4.25 \leq z^* \leq 33.75$ , l'écoulement secondaire a la forme de deux cellules principales contrarotatives illustrées dans les **Figures 4.15a et 4.16a**.

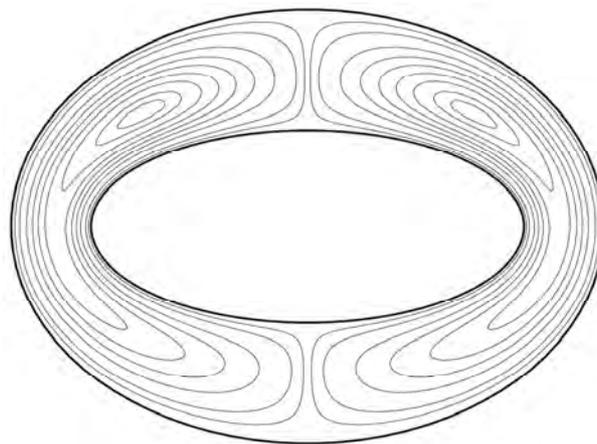
À  $z^*=33.75$ , deux petites cellules, contrarotatives aux cellules principales, apparaissent dans la partie supérieure du conduit (en haut de la section droite). Ces cellules, visibles dans les **Figures 4.15b, 4.15c, 4.16b, et 4.16c**, apparaissent lorsque l'ascendant écoulement secondaire crée deux zones de température élevées dans la partie supérieure de la section droite, près de l'axe elliptique vertical. La température dans ces zones est plus élevée que celle de l'axe elliptique vertical. Il y'a un changement relatif du signe du gradient angulaire de la température lorsque ces zones sont traversées, suivant la direction angulaire, vers l'axe elliptique vertical. Ce changement provoque un inversement de la direction de la force de flottabilité à travers ces zones. Un tel inversement se manifeste sous la forme de deux cellules principales et deux petites cellules près de l'axe elliptique vertical. Les petites cellules apparaissent à  $z^*=35.75$ , elles grandissent en taille et leur écoulement s'intensifie axialement dans le domaine  $35.75 \leq z^* \leq 62.25$ . Dans ce domaine, le mouvement descendant de ces cellules, près de l'axe elliptique vertical, diminue le niveau de température : les isothermes froides sont poussées vers le bas (vers le cylindre intérieur). Leur mouvement ascendant, aux niveaux de leurs limites angulaires, augmente le niveau de la température : les isothermes chaudes sont poussées vers le haut (vers le cylindre extérieur). Ces déplacements des isothermes tendent à augmenter le niveau du gradient angulaire de la température dans les cellules et donc à intensifier leurs écoulements suivant la direction axiale, dans le domaine  $35.75 \leq z^* \leq 62.25$ . À l'aval de  $z^* = 62.25$ , l'écoulement secondaire améliore le mélange de la température autour de l'axe elliptique vertical (en haut de la section droite) ; ce qui réduit et après élimine le changement de signe du gradient angulaire de la température dans la partie supérieure de la section transversale. Cela conduit à l'affaiblissement axial des petites cellules

jusqu'à ce qu'elles disparaissent à  $z^*=85.75$ . Quand les petites cellules disparaissent, les deux cellules principales s'étendent vers leurs espaces.

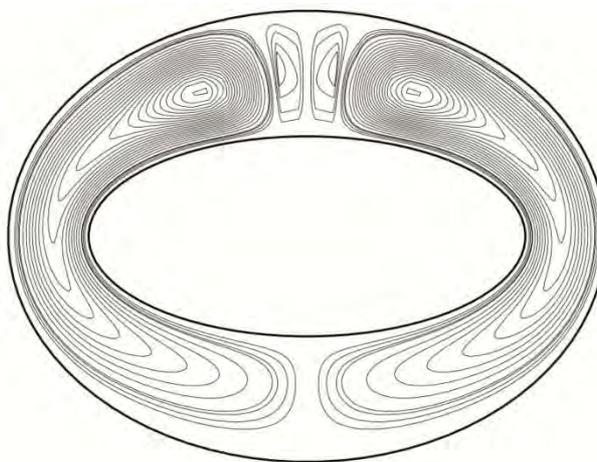
Dans le domaine axial  $z^* > 58.25$ , deux faibles cellules secondaires contrarotatives aux cellules principales, apparaissent dans la partie inférieure de l'espace annulaire de la section droite. Ces cellules sont visible dans les **Figures 4.15c, 4.15d, 4.16c, et 4.16d**. Le mouvement des cellules secondaire est plus faible que celui des cellules principales.

L'écoulement secondaire s'intensifie continuellement suivant la direction axiale. Sa vitesse maximale à la sortie du conduit est égale à  $5.77 \times 10^{-2}$  ( $1.54 \times 10^{-2}$  et  $3.76 \times 10^{-2}$  pour  $Gr=5000$  et  $Gr=10000$  respectivement).

a)



b)



c)



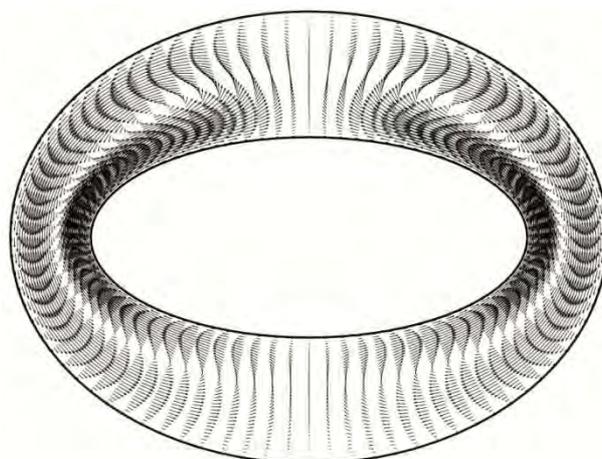
d)



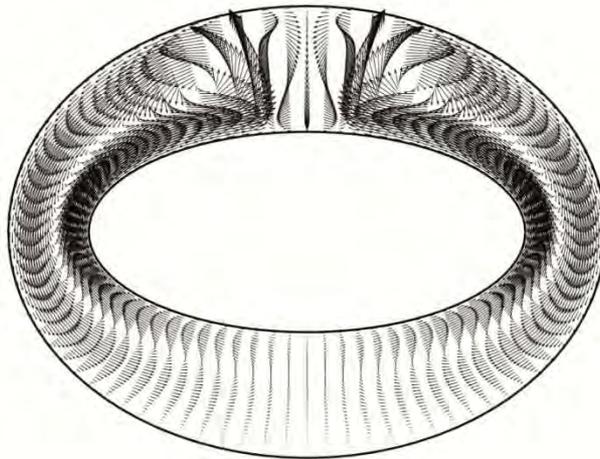
Figure.4.15. Lignes de courant de l'écoulement secondaire.  $Gr=10^4$ .

a)  $z^* = 21.75$ . b)  $z^* = 41.75$ . c)  $z^* = 66.75$ . d)  $z^* = 100$ .

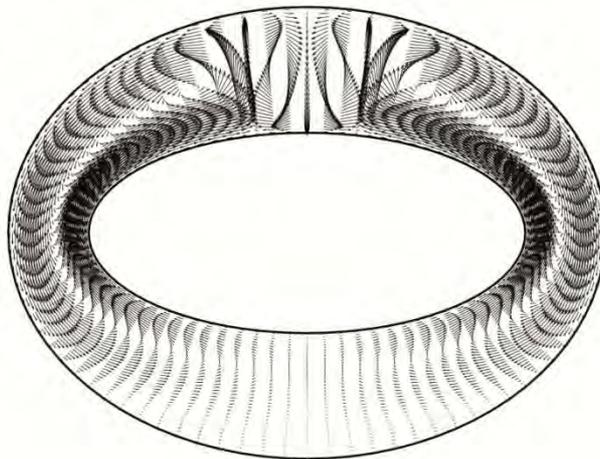
a)



b)



c)



d)

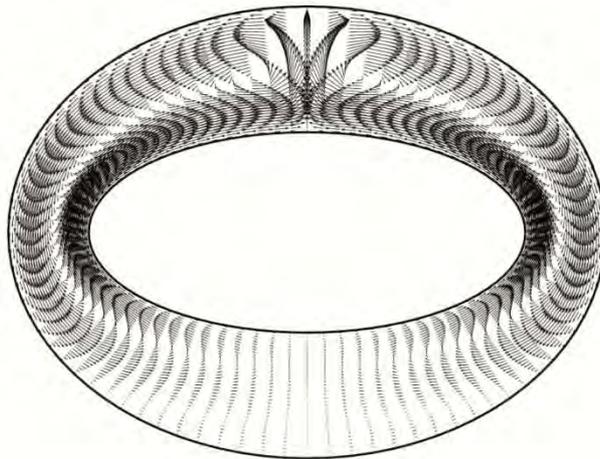


Figure.4.16. La vitesse de l'écoulement secondaire.  $Gr=1.5 \times 10^4$ .

a)  $z^* = 25$ . b)  $z^* = 50$ . c)  $z^* = 75$ . d)  $z^* = 100$ .

#### 4.2.3.3.2. L'écoulement axial:

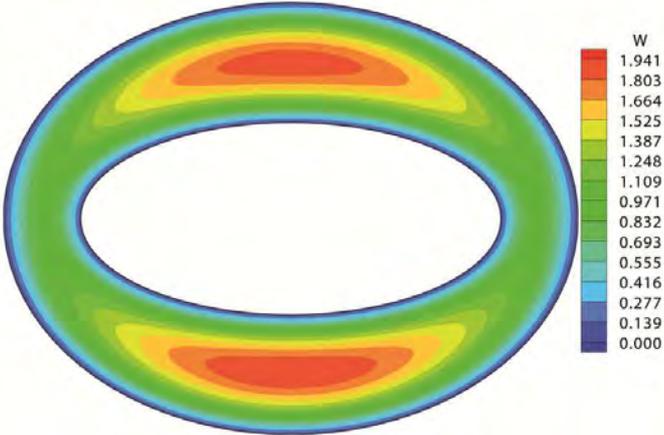
La **Figure 4.17.** présente les variations radiale et angulaire de la vitesse axiale dans les quatre positions axiales : ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ). Dans l'intervalle  $z^* \leq 31.75$ , sur une section droite, les zones à grande vitesse axiale sont au milieu de l'entrefer autour de l'axe elliptique vertical. L'écoulement secondaire augmente le niveau de la vitesse axiale en bas d'une section droite et le réduit en haut de cette dernière (voir la **Figure 4.17a**). À chaque section polaire, on a deux vitesses maximales locales, la plus grande située dans le bas de l'annulaire à ( $\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2}$ ) et l'autre vitesse maximale locale située dans la partie supérieure de l'annulaire à ( $\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2}$ ). Les deux vitesses maximales locales continuent à augmenter axialement dans la même position polaire pour atteindre les valeurs 1.893 pour la vitesse maximale dans la partie supérieure du conduit et 1.940 dans la partie inférieure de pipe.

Dans le domaine  $31.75 < z^* \leq 70.75$ , en bas de la section droite, la forme des isotaques(voir la **Figure 4.17b**) est similaire à celle des isotaques de la **Figure 4.17a**, parce que l'écoulement secondaire est toujours faible dans cette zone. Cependant, dans cette zone, le niveau de la vitesse axiale maximale continue à augmenter axialement pour atteindre la valeur 1.949 à ( $z^* = 70.75, \varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2}$ ). Dans le même domaine axial et en haut de la section droite, la forme des isotaques (voir la **Figure 4.17b**) est différente de celle des isotaques de la **Figure 4.17a**, parce que l'écoulement secondaire, avec ses cellules principales et petites cellules, est relativement fort. Le mouvement de l'écoulement secondaire déplace les isotaques de la vitesse axiale suivant sa direction. En haut de la section droite, la position de la vitesse axiale maximale est rapprochée du cylindre intérieur ; et le niveau de la vitesse axiale maximale continue à diminuer axialement pour atteindre la valeur 1.860 à ( $z^* = 61.25, \varepsilon = 0.7437$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ). Au-delà de  $z^* = 61.25$ , la position de la vitesse axiale maximale est éloignée du cylindre intérieur ; et le niveau de la vitesse axiale maximale commence à augmenter axialement

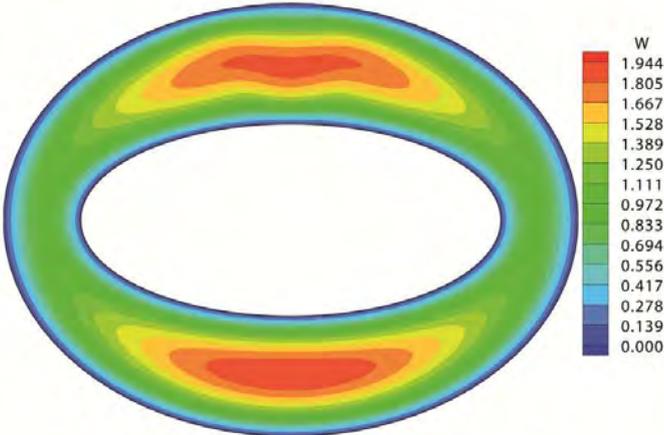
Dans le domaine  $70.75 < z^* \leq 100$ , on a enregistré une diminution légère du niveau de la vitesse axiale maximale, dans la partie inférieure de la section droite, de 1.949 à 1.947, sans changement de la position polaire de cette vitesse maximale. Dans la partie supérieure de la section droite, la position de la vitesse maximale locale s'éloigne radialement de la paroi du

cylindre intérieur (sans changement de position angulaire( $\eta = \frac{\pi}{2}$ )).La valeur de la vitesse maximale locale augmente légèrement en allant vers la sortie du conduit et atteint la valeur 1.865 à la sortie du conduit ( $z^* = 100, \varepsilon = 0.7937, \eta = \frac{\pi}{2}$ ).

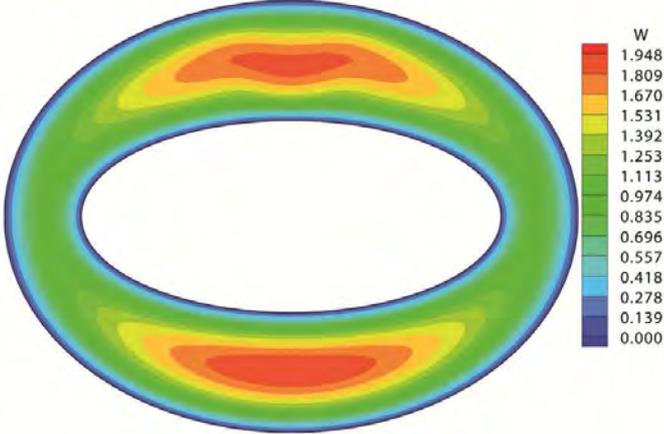
a)



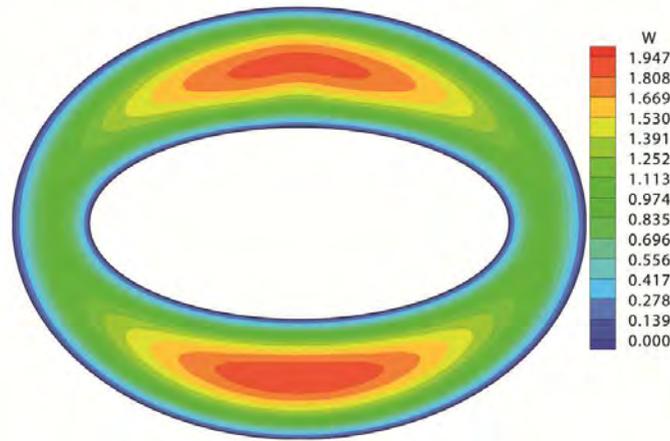
b)



c)



d)



**Figure.4.17. Le champ de la vitesse axiale.  $Gr=1.5 \times 10^4$ .**

**a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$**

#### 4.2.2.3.3. Le champ thermique :

Les variations polaires de la température sont présentées dans la **Figure 4.18** aux positions axiales: ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ). La température est uniforme à l'entrée du conduit. L'écoulement secondaire proche de la paroi chauffée (cylindre intérieur) déplace le fluide relativement chaud vers la partie supérieure du conduit et le fluide relativement froid vers la partie inférieure du conduit. Cela rend la partie supérieure de la section transversale plus chaude que la partie inférieure. La forme de distribution de la température sur la section transversale est affecté par la forme de l'écoulement secondaire lorsque l'écoulement secondaire est suffisamment fort.

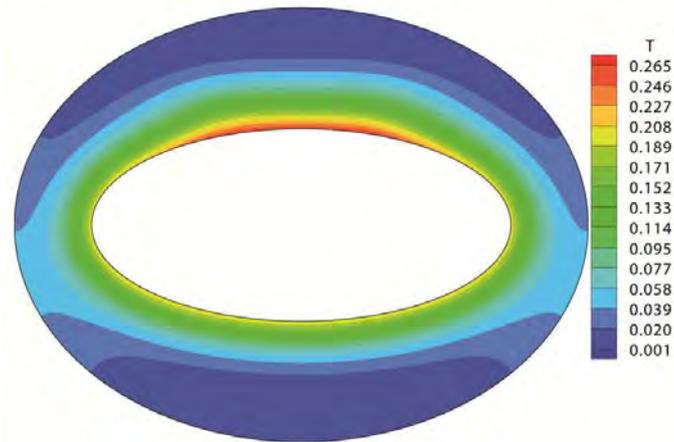
La température diminue radialement à partir du cylindre chauffé jusqu'au cylindre adiabatique. Les variations angulaires sont très importantes, surtout dans la partie supérieure du conduit. Les variations de la température dans la partie inférieure sont qualitativement identiques aux cas précédents.

Dans la partie supérieure et dans le domaine  $0 < z^* \leq 11.75$ , les variations angulaires de la température sont presque identiques à celles des cas précédents avec les nombre de Grashof  $Gr=5000$  et  $Gr=10^4$ ). Dans l'intervalle  $11.75 < z^* \leq 26.25$  la température augmente angulairement pour atteindre un maximum situé près  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . Dans le domaine ( $26.75 < z^* \leq 91.75$ ), La température augmente suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum

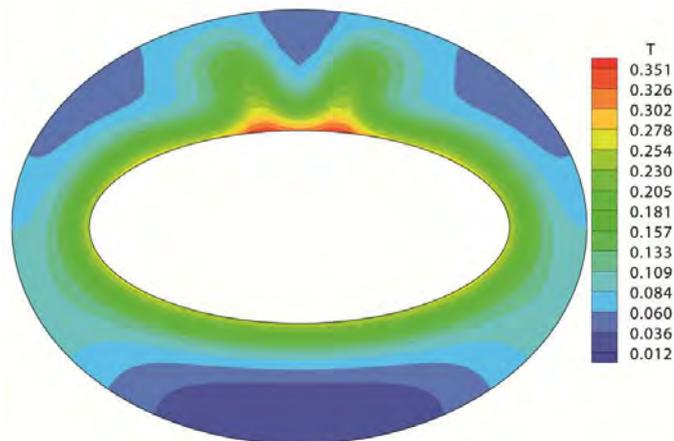
local à une position angulaire qui se rapproche du grand axe elliptique en allant vers la direction axiale.

Dans le domaine  $92.25 < z^* \leq 100$ , la température croît à partir de  $\eta = 0$  pour atteindre une valeur maximale locale à  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . La valeur maximale de la température est situé à la sortie du conduit à  $(\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2})$  et qui est égale à 0.465 (0.459, 0.448 et 0.418 pour  $Gr=10^4$ ,  $Gr=5000$  et  $Gr=0$  respectivement).

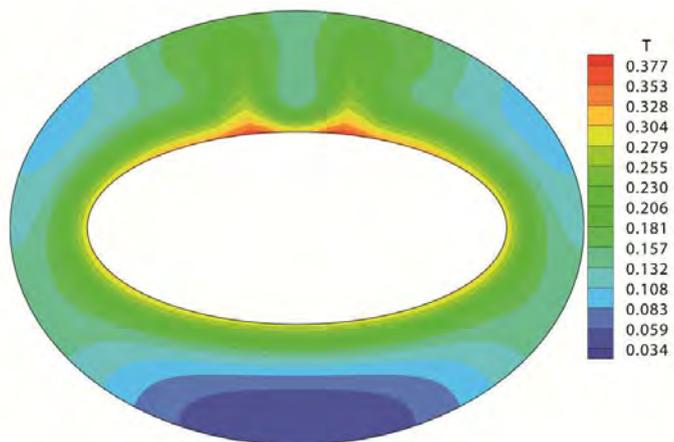
a)



b)



c)



d)

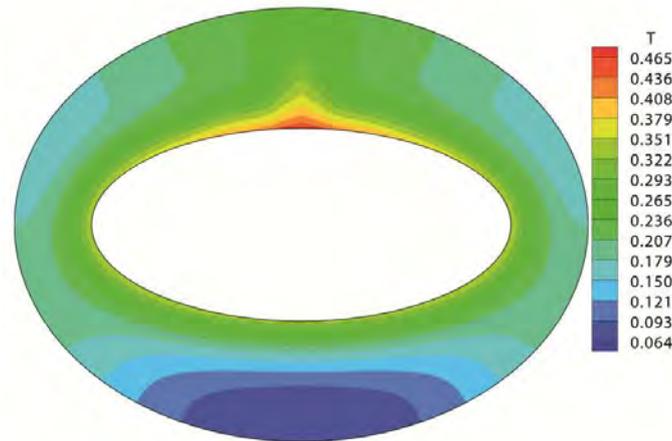


Figure.4.18. Les variations polaires de la température.  $Gr=1.5 \times 10^4$ .

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$ , c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.2.2.4. L'évolution des nombres de Nusselt :

Il est utile de quantifier et de comparer le transfert de chaleur des cas considérés ( $Gr=0$  (convection forcée) et les trois cas de la convection mixte  $Gr=5000, Gr=10000$  et  $Gr=15000$ ). Cela peut être accompli en comparant les nombres de Nusselt axiaux  $Nu(z^*)$  et les nombres de Nusselt moyens  $\overline{Nu}$ . Dans la **Figure 4.19**, on compare les nombres de Nusselt axiaux des quatre cas sus-cités. On voit qu'à partir de l'entrée du conduit jusqu'à  $z^* = 15$ , la diminution importante du nombre de Nusselt axial est la même pour tous les cas. C'est compréhensible car dans cette zone, la flottabilité qui induit l'écoulement secondaire est très faible. En aval de cette zone, l'effet de la poussée thermique est perceptible ; il améliore le transfert thermique. L'amélioration augmente avec le nombre de Grashof. Les valeurs des nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit sont: 4.749, 5.166, 6.244, et 6.608 pour les cas :  $Gr=0$ ,  $Gr=5000$ ,  $Gr=10000$  et  $Gr=15000$ , respectivement. Finalement, les valeurs des nombres de Nusselt moyens sont : 5.870, 6.080, 6.522 et 6.786 pour les cas :  $Gr=0$ ,  $Gr=5000$ ,  $Gr=10000$  et  $Gr=15000$ , respectivement. Ces résultats montrent l'amélioration du transfert de chaleur lorsque le nombre de Grashof augmente.

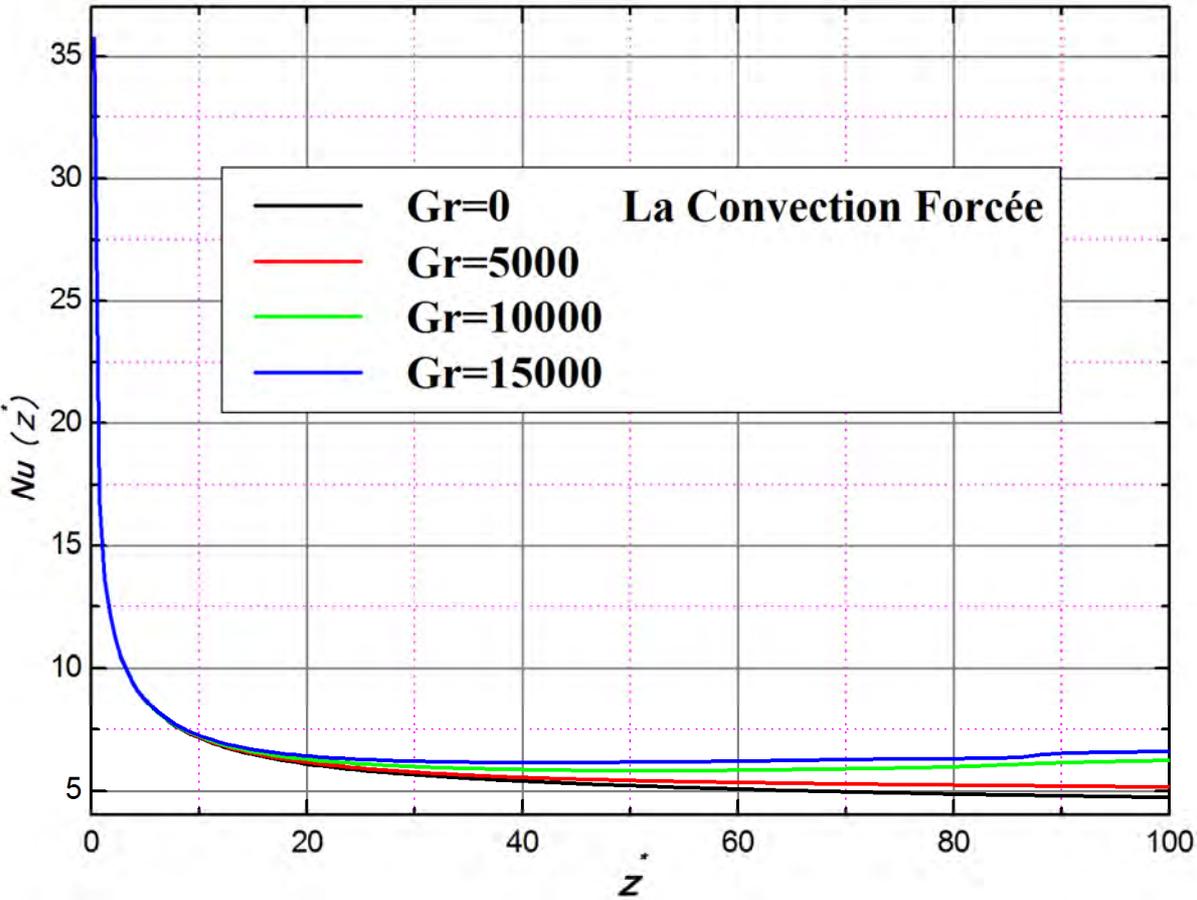


Figure.4.19. Les nombres de Nusselt axiaux  $Nu(z^*)$  en fonction du nombre Grashof .

# Deuxième Partie

**4.3. La convection forcée en développements hydrodynamique et thermique avec des propriétés variables :**

**4.3.1. Niveau de chauffage:**

Dans cette partie, on considère l'effet des propriétés variables sur la convection forcée pour trois valeurs du flux de chaleur pariétal :  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ . On rappelle que les trois valeurs du nombre de Grashof, utilisés dans les simulations numériques des cas de convection mixte, correspondent aux trois valeurs citées du flux de chaleur. Ces trois valeurs du flux de chaleur correspondent à trois valeurs de la température moyenne à la sortie du conduit. Cette température est déduite du bilan thermique global :

$$q_w P_1 L = \rho c_p V_m A (T_s - T_0) \tag{4.9}$$

Dans cette équation (4.9), toutes les variables et constantes sont considérées dimensionnelles. De l'équation précédente, on déduit la température moyenne à la sortie du conduit:

$$T_s = \frac{q_w P_1 L}{\dot{m} c_p} + T_0 \tag{4.10}$$

Avec :

$$q_w = 4172 W/m^2, 8344 W/m^2 \text{ et } 12516 W/m^2$$

$$P_1 = 0.024102 \text{ m (Périmètre dimensionnel du cylindre elliptique intérieur)}$$

$$L = 0.45 \text{ m (La longueur dimensionnelle du conduit)}$$

$$\dot{m} = \rho V_m A = \rho_0 V_0 A = 0.001741 \text{ Kg/s (Le débit massique constant)}$$

$$\rho_0 = 1000.52 \text{ kg/m}^3 \text{ (La masse dimensionnelle volumique évaluée à } T_0 \text{ )}$$

$$V_0 = 2.231 \times 10^{-2} \text{ m/s (La vitesse dimensionnelle à l'entrée du conduit)}$$

$$A = 0.00007798 \text{ m}^2 \text{ (Aire de la surface de la section droite de l'écoulement)}$$

$$c_p = 4182 \text{ J/kgK (la chaleur spécifique à pression constante)}$$

$$T_0 = 293 \text{ K (La température à l'entrée du conduit)}$$

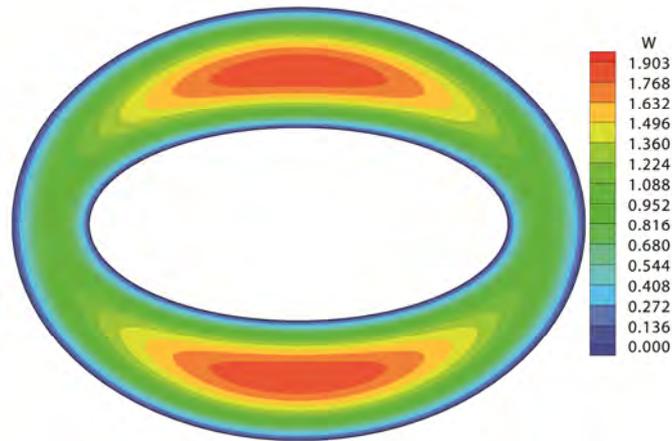
On utilise l'équation (4.10) pour obtenir la température moyenne à la sortie du conduit, qui est égale à  $299.21K$ ,  $305.43K$  et  $311.64K$  pour  $q_w = 4172W/m^2$ ,  $8344W/m^2$  et  $12516 W/m^2$ , respectivement. Les différences des températures moyennes à la sortie et à l'entrée du conduit sont :  $\Delta T = 6.21K$ ,  $12.43K$  et  $18.64K$  pour  $q_w = 4172W/m^2$ ,  $8344W/m^2$  et  $12516 W/m^2$ , respectivement. Il faut noter que pour un flux de chaleur donné, à la sortie du conduit, le niveau de la température maximale est très supérieur à celui de la température moyenne. Donc on peut constater qu'avec les trois valeurs du flux de chaleur, on peut progressivement augmenter le niveau de la variation des propriétés thermophysiques.

#### 4.3.2. Écoulement axial:

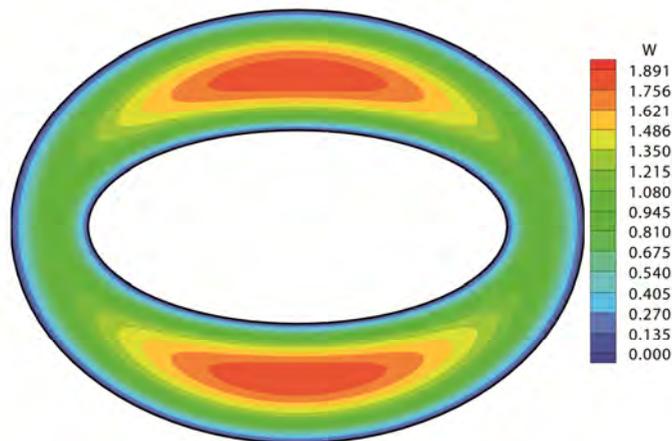
Les variations polaires de la vitesse axiale, avec les trois flux de chaleur considérés, sont présentées aux positions axiales: ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$ ,  $z^* = 100$ ), dans les **Figures 4.20, 4.21, 4.22 et 4.23**, respectivement. Dans ces figures, on remarque la symétrie des variations polaires par rapports aux axes elliptiques. Aussi, il est visible que les variations radiales et angulaires sont qualitativement similaires à celles du cas de la convection forcée avec des propriétés thermophysiques constantes. Cependant, l'écoulement axial, de la convection forcée avec des propriétés thermophysiques variable, est en développement axial continu à cause de la variation axiale continue de la viscosité. À partir de l'entrée, la vitesse maximale locale (sur une section droite) augmente axialement pour atteindre son maximum à une certaine longueur. À l'aval de cette longueur, le niveau de la vitesse axiale maximale locale diminue continuellement jusqu'à la sortie du conduit. À une section droite donnée, la vitesse maximale est localisée à deux points : ( $\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2}$ ) et ( $\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2}$ ). Pour les flux  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ , le niveau de la vitesse maximale locale augmente jusqu'à  $1.904$  (à  $z^* = 22.25$ ),  $1.893$  (à  $z^* = 19.75$ ) et  $1.883$  (à  $z^* 18.25$ ), respectivement. A l'aval des positions axiales citées, le niveau de la vitesse maximale locale diminue et atteint, à la sortie du conduit, les valeurs  $1.871, 1.834$  et  $1.809$ , pour les flux:  $4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $8344 \frac{W}{m^2}$  et  $12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement.

A une section droite donnée, le chauffage du fluide au niveau du cylindre intérieur réduit la viscosité et donc les frottements visqueux, ce qui augmente relativement le niveau de la vitesse axiale près du cylindre intérieur. Mais cette augmentation doit être compensée par une réduction du niveau de vitesse loin du cylindre intérieur, pour conserver le débit massique constant à travers la section droite. Cette conservation explique la réduction axiale monotone du niveau de la vitesse axiale, avec le chauffage axial continu.

a)



b)



c)

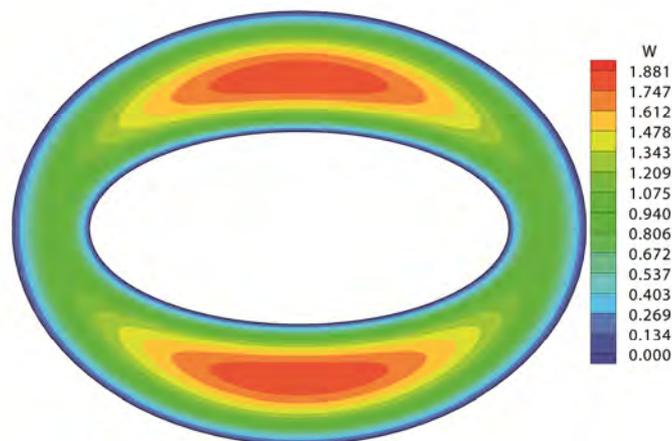
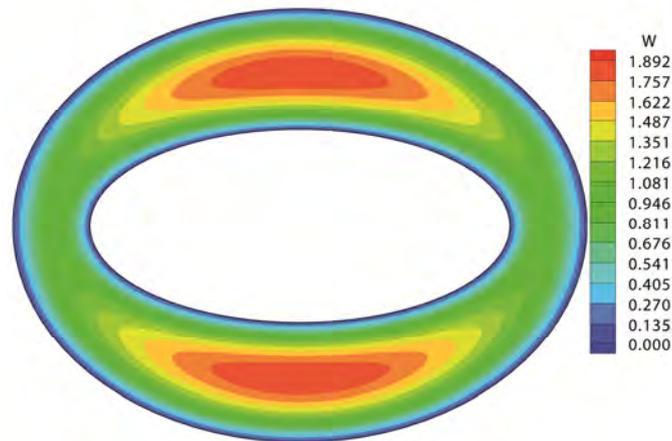


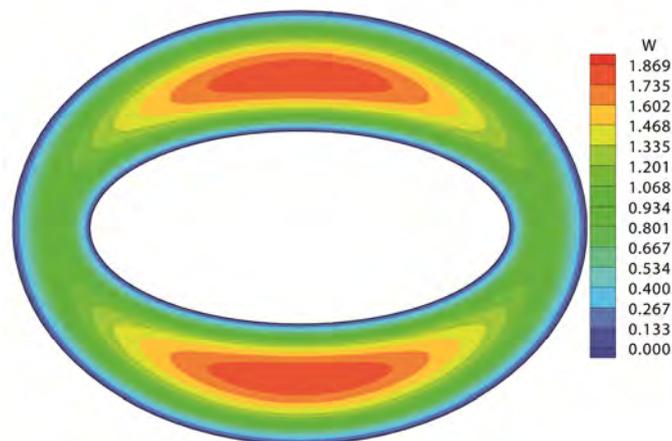
Figure.4.20. Le champ de la vitesse axiale à  $z^* = 25.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

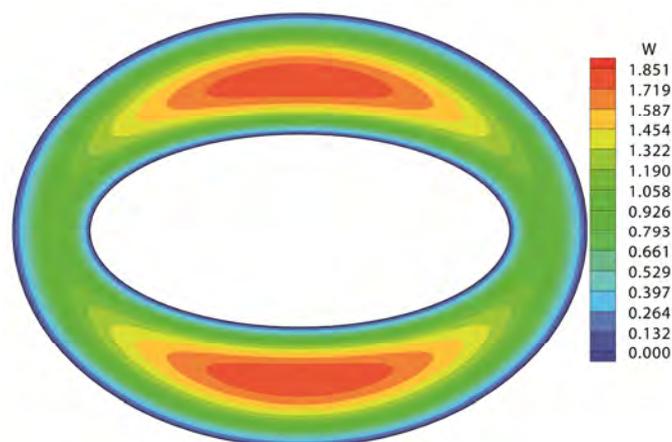
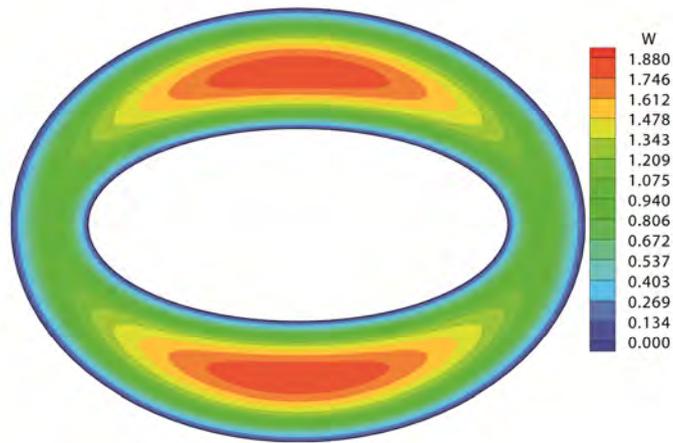


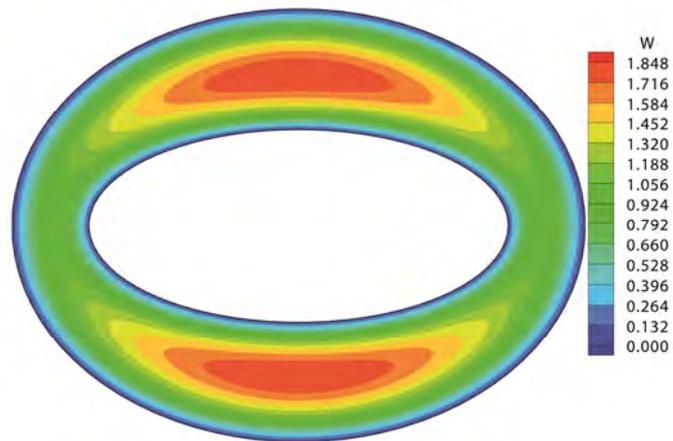
Figure.4.21. Le champ de la vitesse axiale à  $z^* = 50.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

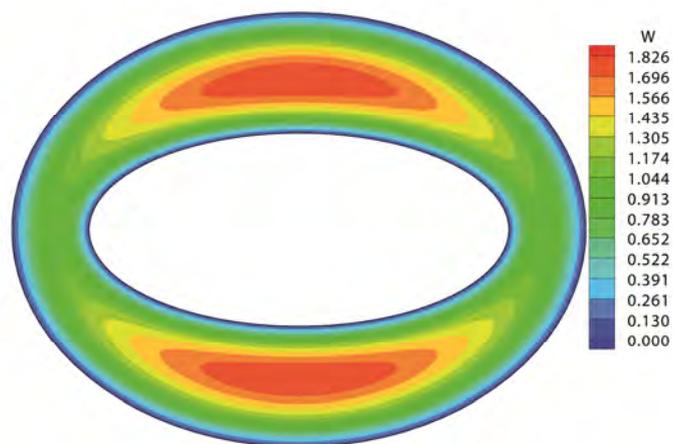
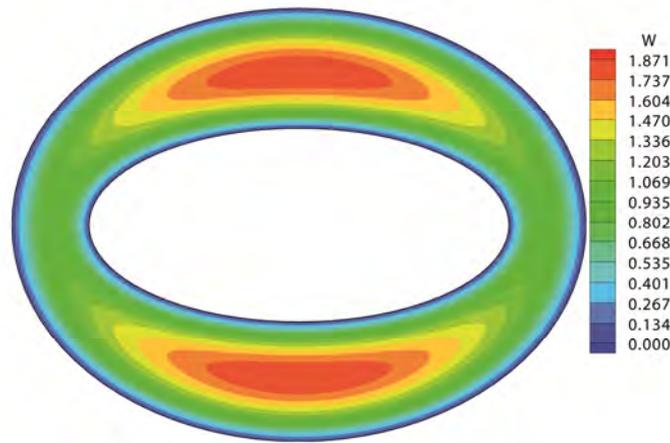


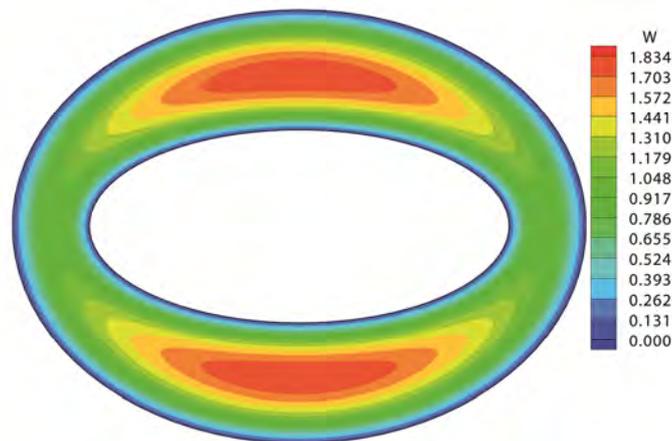
Figure.4.22. Le champ de la vitesse axiale à  $z^* = 75.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

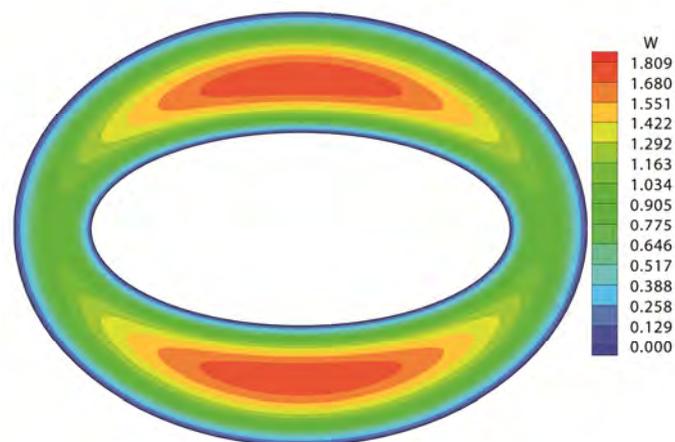


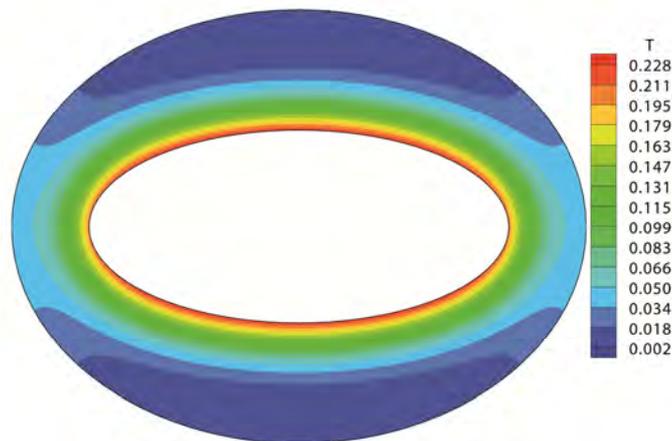
Figure.4.23. Le champ de la vitesse axiale à  $z^* = 100$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

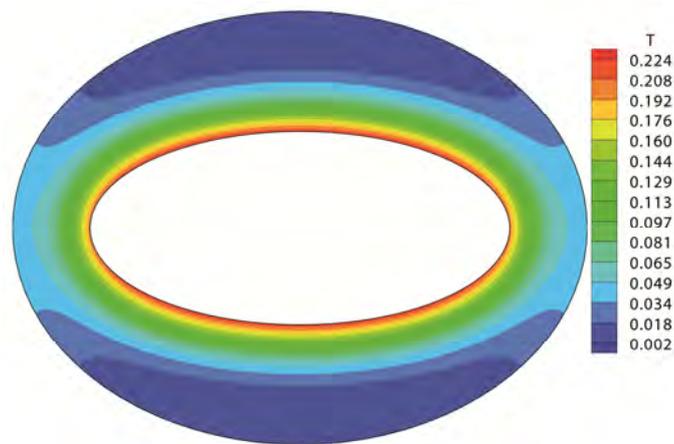
4.3.3. Le champ thermique:

Les variations polaires de la température, avec les trois flux de chaleur considérés, sont présentées aux positions axiales: ( $z^* = 25.25, z^* = 50.25, z^* = 75.25, z^* = 100$ ), dans les **Figures 4.24, 4.25, 4.26 et 4.27**, respectivement. Ces figures montrent un chauffage axial continu. Les variations radiale et angulaire sont qualitativement similaires à celles du cas de la convection forcée avec des propriétés constantes. La symétrie par rapport aux axes elliptiques est préservée tout au long du conduit. Cependant, on remarque une diminution du niveau de la température maximale avec l'augmentation du niveau de chauffage. Cette réduction est causée par l'augmentation de la vitesse axiale (à cause de la diminution de la viscosité) près de la paroi du cylindre intérieur chauffé. Cette légère augmentation de la vitesse axiale améliore le brassage axial qui augmente le transfert thermique et donc diminue le niveau de la température. La température maximale est située à la sortie du conduit à ( $\varepsilon = 0.5$  et  $\eta = (0.734, 2.767, 3.515$  et  $5.909)$ ,  $z^* = 100$ ). La température maximale est égale à  $0.412, 0.410$  et  $0.400$  pour les flux  $4172 \frac{W}{m^2}, 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement. Ces températures sont inférieures à la température maximale du cas de la convection forcée avec propriétés constantes qui est égale à  $0.418$ .

a)



b)



c)

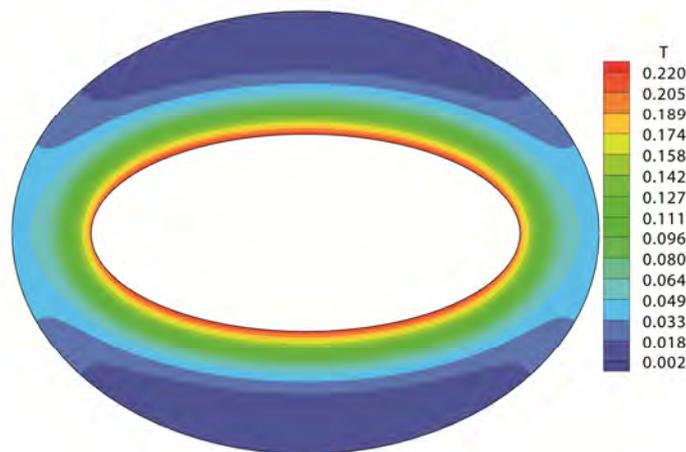
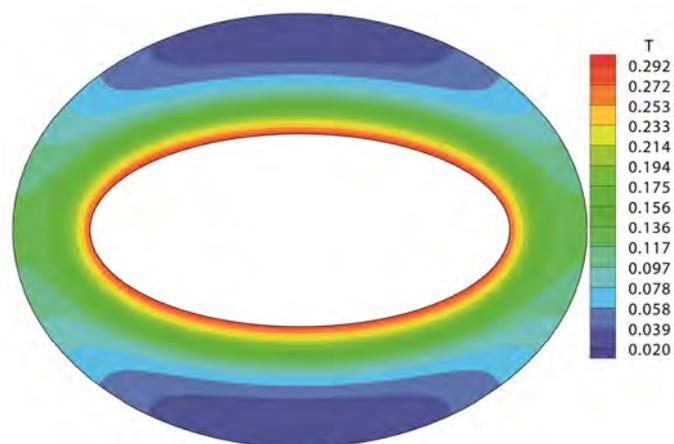


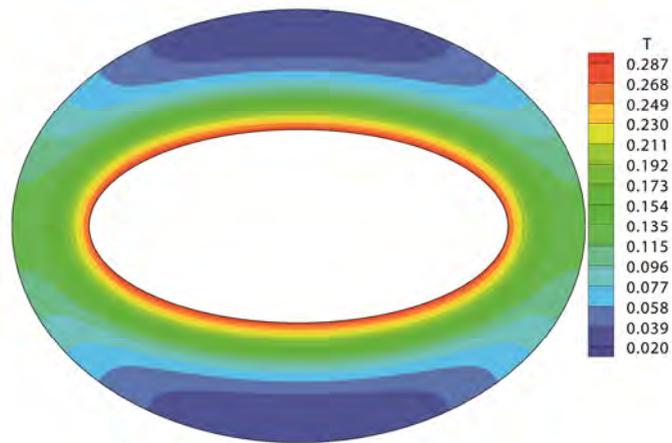
Figure.4.24. Le champ thermique à  $z^* = 25.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

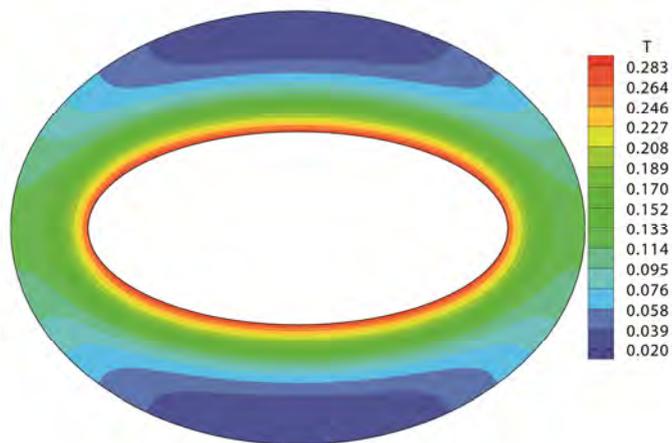
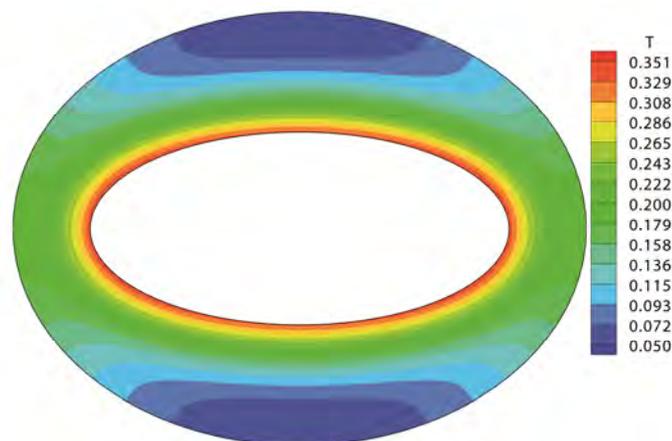


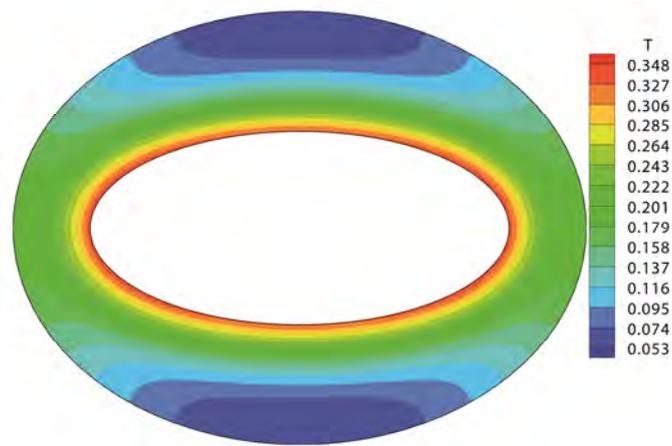
Figure.4.25. Le champ thermique à  $z^* = 50.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

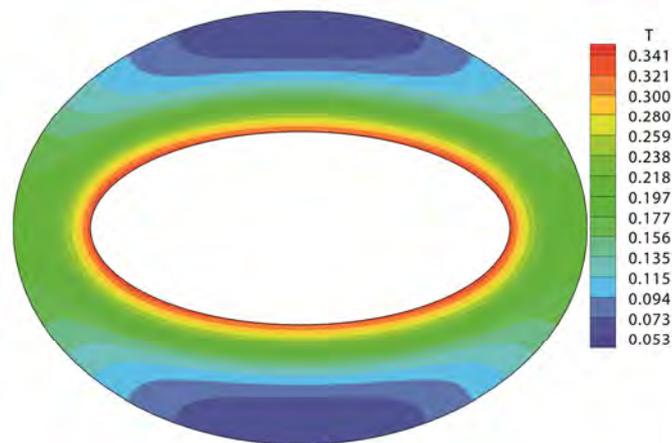
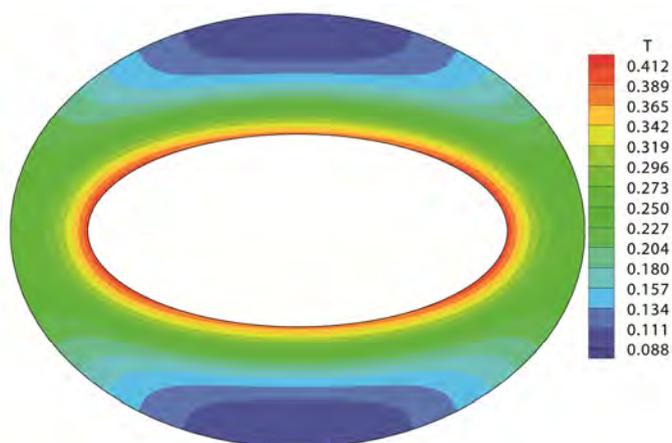


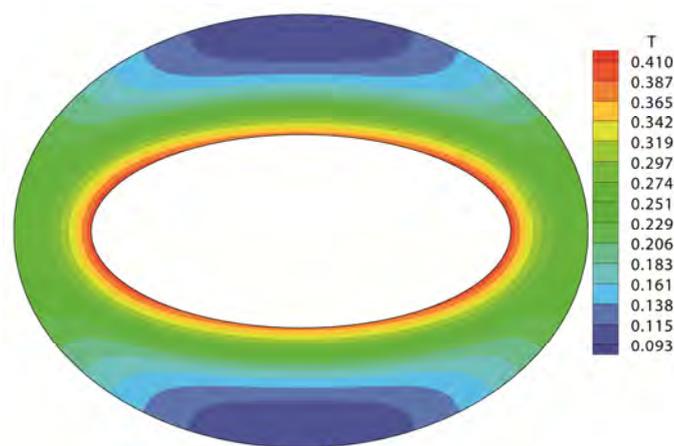
Figure.4.26. Le champ thermique à  $z^* = 75.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

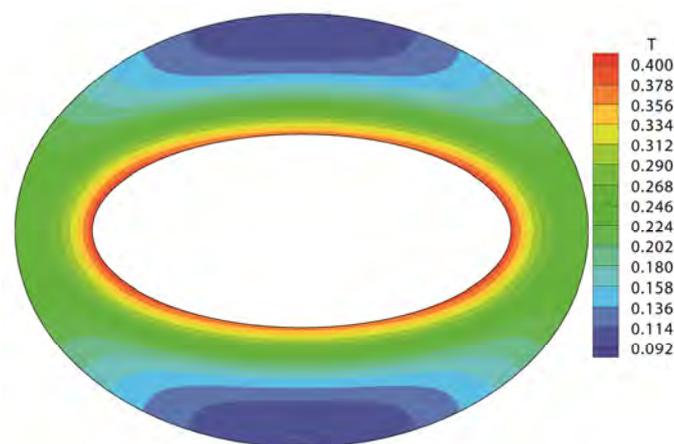


Figure.4.27. Le champ thermique à  $z^* = 100$ .

$$\text{a) } q_w = 4172 \frac{W}{m^2}. \text{ b) } q_w = 8344 \frac{W}{m^2}. \text{ c) } q_w = 12516 \frac{W}{m^2}.$$

#### 4.3.4. Les variations du nombre de Nusselt:

Les nombres de Nusselt axiaux des trois flux de chaleur sont présentés dans la **Figure 4.28**. Sur la même figure, ils sont comparés au nombre de Nusselt axial de la convection forcée avec des propriétés physiques constantes. Les nombres de Nusselt axiaux des cas de la convection forcée avec des propriétés variables sont légèrement supérieurs à celui de la convection forcée avec des propriétés constantes. Cette légère différence est due à l'amélioration du brassage axial près de la paroi du cylindre chaud. Les variations axiales sont qualitativement similaires à celle du cas de la convection forcée avec des propriétés

constantes. Ces variations montrent une décroissance axiale monotone et continue jusqu'à la sortie du conduit, ce qui démontre que la convection est encore en développement thermique. Les valeurs des nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit sont : 4.905, 5.034 et 5.177, pour les flux  $4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $8344 \frac{W}{m^2}$  et  $12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement. Celui de la convection forcée avec des propriétés constantes est égale à 4.749. Les valeurs des nombres de Nusselt moyens sont : 6.014, 6.139 et 6.269 pour les flux  $4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $8344 \frac{W}{m^2}$  et  $12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement. Celui de de la convection forcée avec des propriétés constantes est égale à 5.870. La comparaison montre une légère amélioration du transfert thermique lorsque les propriétés variables sont prises en compte.

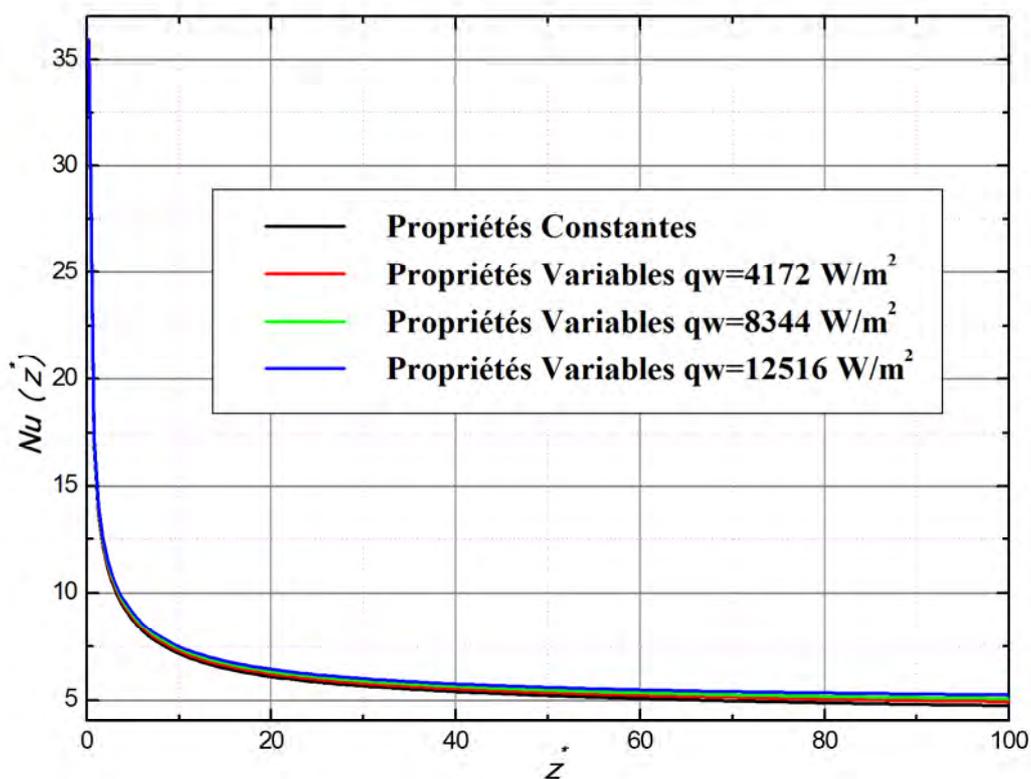
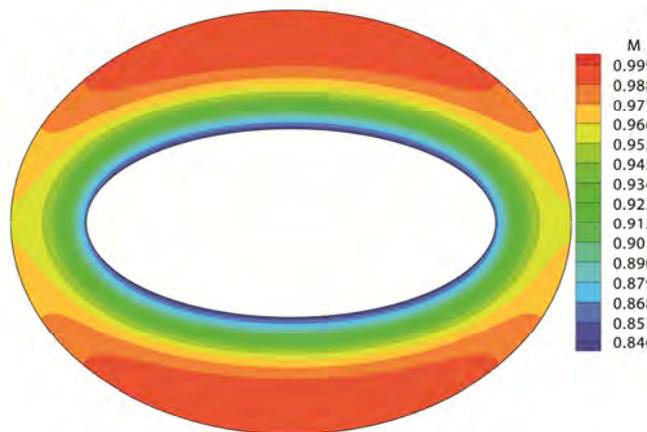


Figure.4.28. Les nombres de Nusselt axiaux  $Nu(z^*)$  en fonction flux de chaleur pariétal.

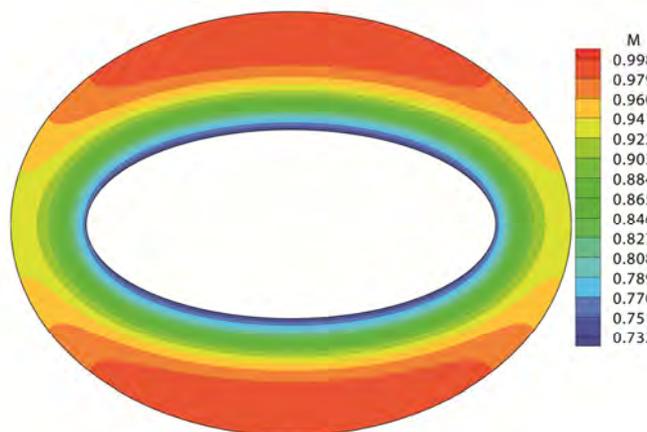
4.3.5. Le champ de la viscosité:

Les variations polaires de la viscosité, avec les trois flux de chaleur considérés, sont présentées aux positions axiales: ( $z^* = 25.25, z^* = 50.25, z^* = 75.25, z^* = 100$ ), dans les **Figures 4.29, 4.30, 4.31 et 4.32**. Le chauffage axial continu réduit la viscosité de l'entrée du conduit jusqu'à sa sortie. La viscosité est une fonction décroissante de la température et il est clair, dans les figures citées, que les zones froides ont des viscosités supérieures à celles des zones chaudes. Comme prévu, la plus large variation de la viscosité est obtenue avec le flux de chaleur le plus élevé. Autrement dit, la réduction de la viscosité augmente avec le flux de chaleur. À la sortie du conduit, la réduction de la viscosité par rapport à sa valeur de référence (à l'entrée du conduit) est égale, 25.1%, 41.0% et 51.4%, pour les flux de chaleur  $4172 \frac{W}{m^2}, 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement. Les deux dernières réductions sont considérables. Localement, une faible viscosité réduit les frottements visqueux et tend à augmenter le niveau de la vitesse.

a)



b)



c)

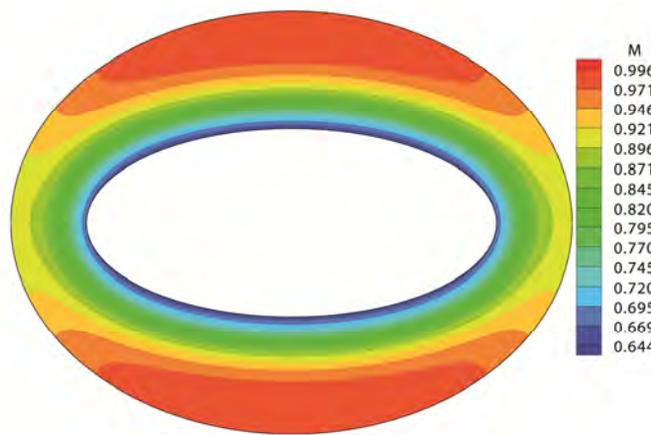
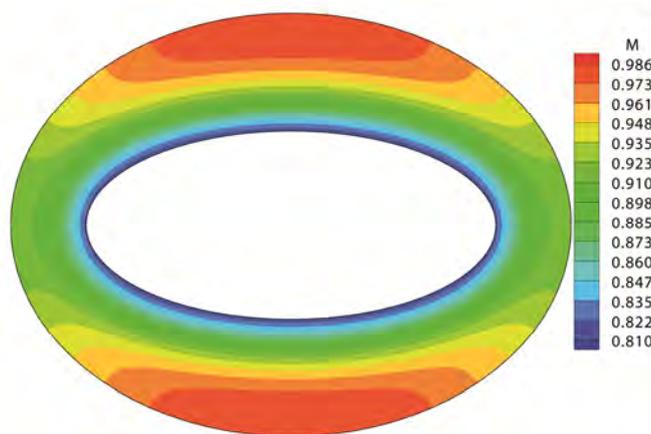


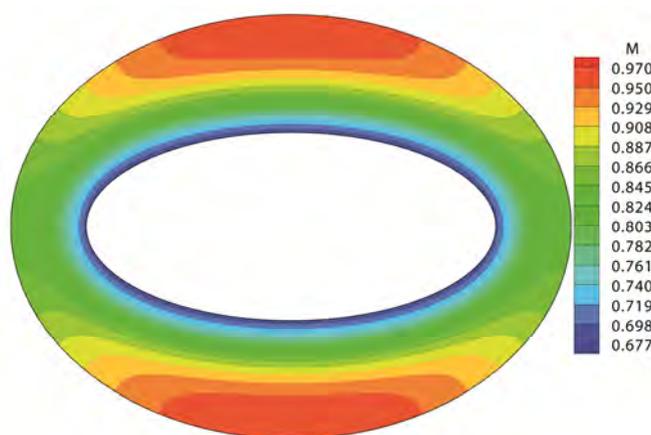
Figure.4.29. Le champ de viscosité à  $z^* = 25.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

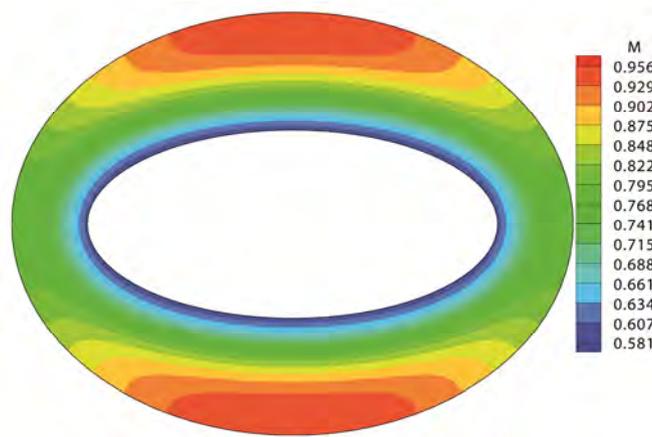
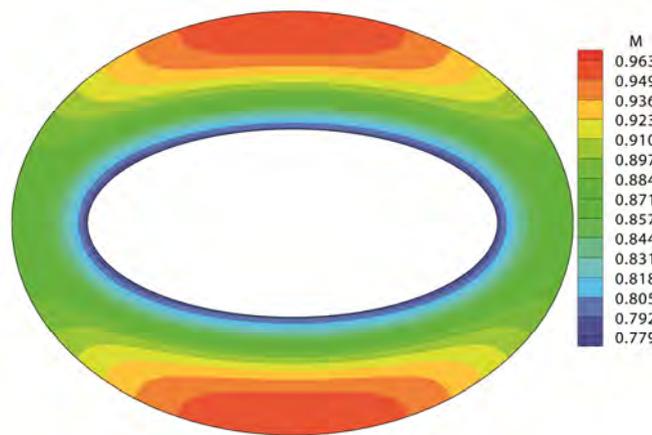


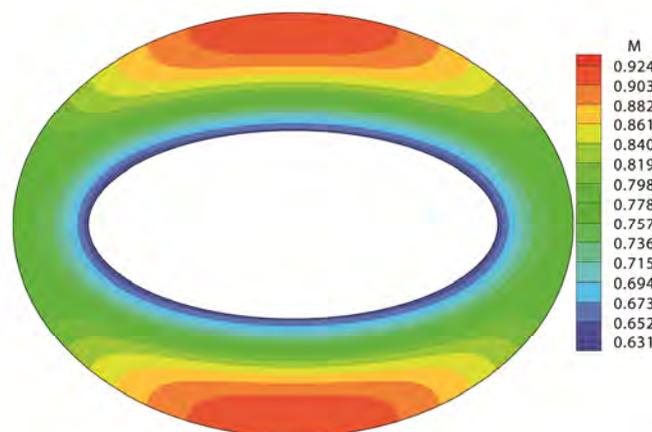
Figure.4.30. Le champ de viscosité à  $z^* = 50.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

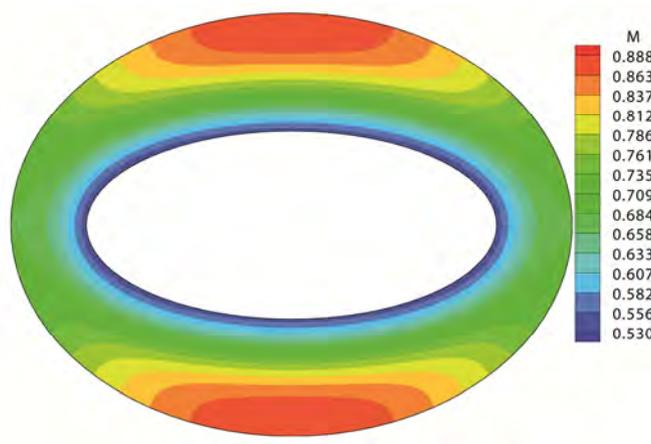
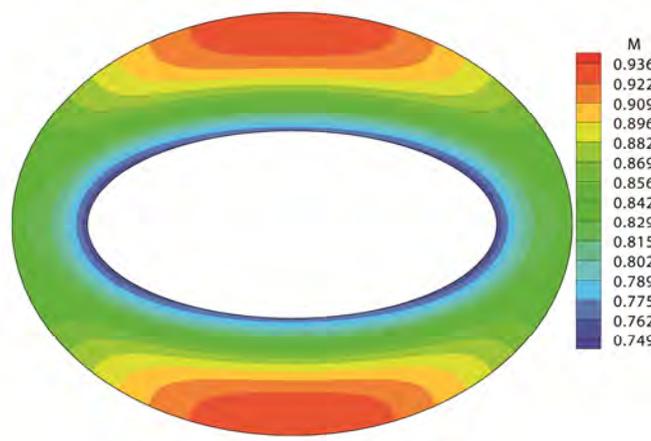


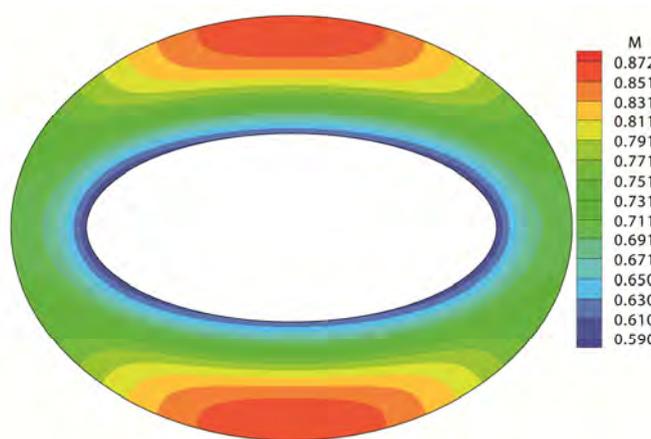
Figure.4.31. Le champ de viscosité à  $z^* = 75.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

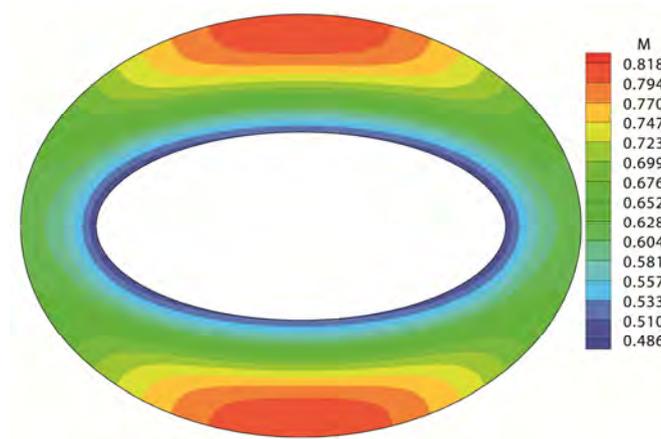


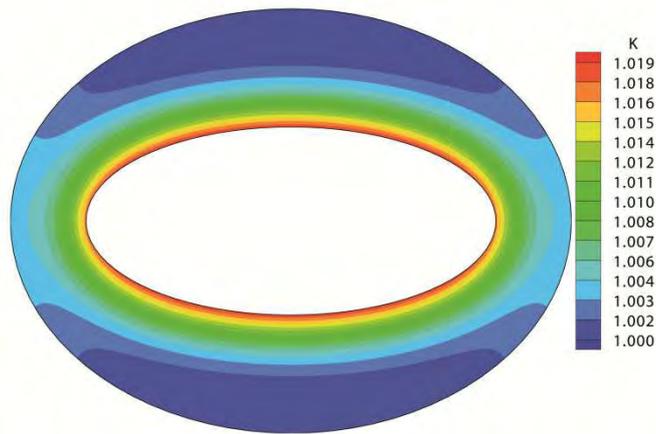
Figure.4.32. Le champ de viscosité à  $z^* = 100$ .

$$\text{a) } q_w = 4172 \frac{W}{m^2}. \text{ b) } q_w = 8344 \frac{W}{m^2}. \text{ c) } q_w = 12516 \frac{W}{m^2}.$$

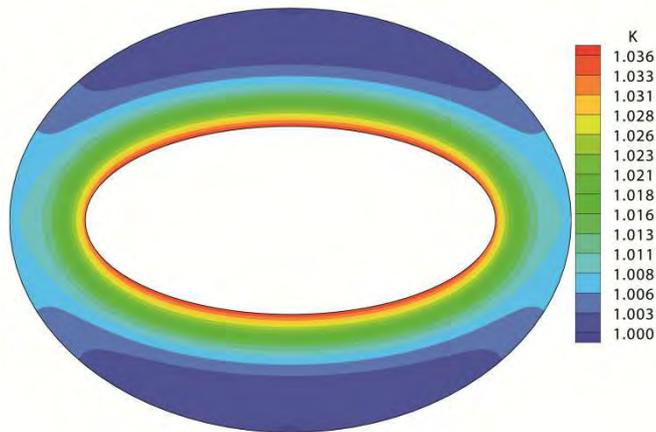
#### 4.3.6. Les variations de la conductivité:

Les variations polaires de la conductivité thermique, avec les trois flux de chaleur considérés, sont présentées aux positions axiales: ( $z^* = 25.25, z^* = 50.25, z^* = 75.25, z^* = 100$ ), dans les **Figures 4.33, 4.34, 4.35 et 4.36**. La conductivité thermique est une fonction croissante de la température. Les figures citées montrent que les variations qualitatives de la conductivité thermique sont similaires à celles de la température. Les mêmes figures montrent que les variations quantitatives de la conductivité thermique sont très modestes dans toutes les directions (radiale, azimutale et axiale) et pour les trois niveaux de chauffage ( $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}, q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ ). Pour le flux de chaleur le plus élevé, à la sortie du conduit, l'augmentation de la conductivité thermique est de 8.3% par rapport à sa valeur de référence (à l'entrée du conduit). Ce constant montre que l'effet de la conductivité variable sur l'amélioration du transfert thermique par conduction est faible, dans les plages de températures de cette étude.

a)



b)



c)

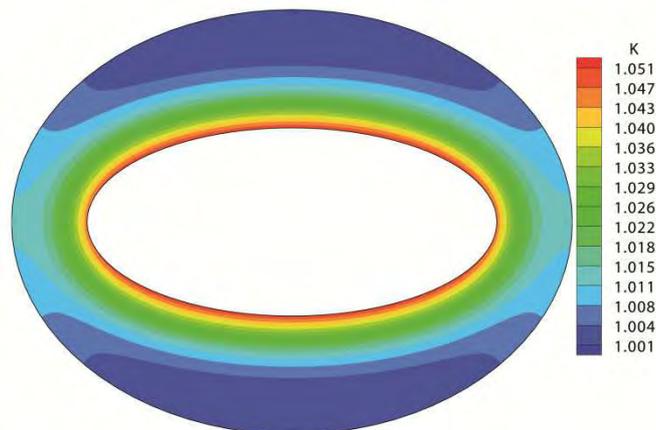
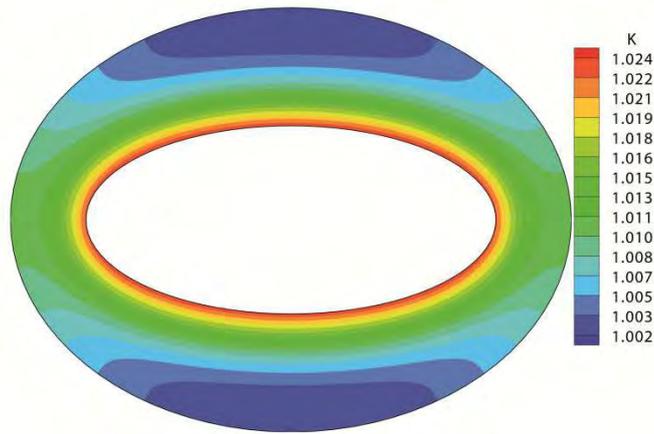


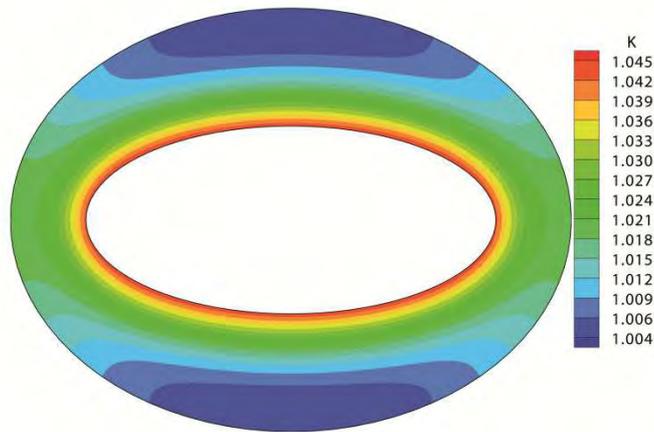
Figure. 4.33. Le champ de la conductivité thermique à  $z^* = 25.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

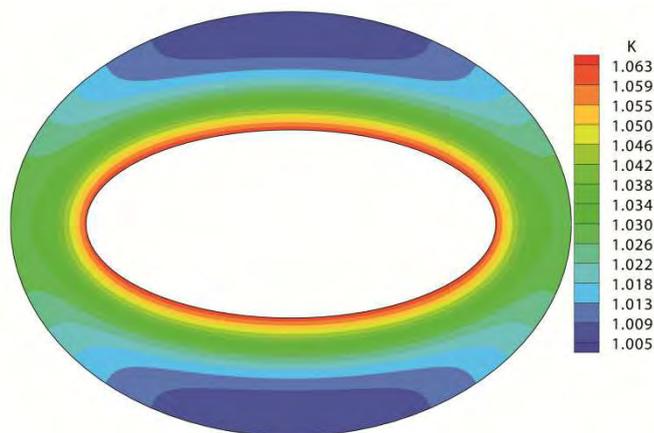
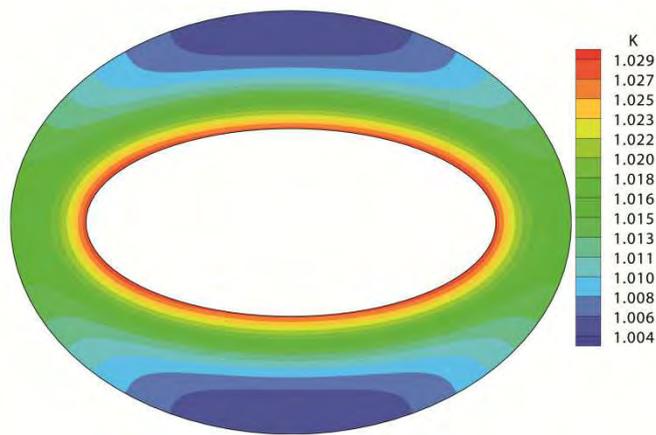


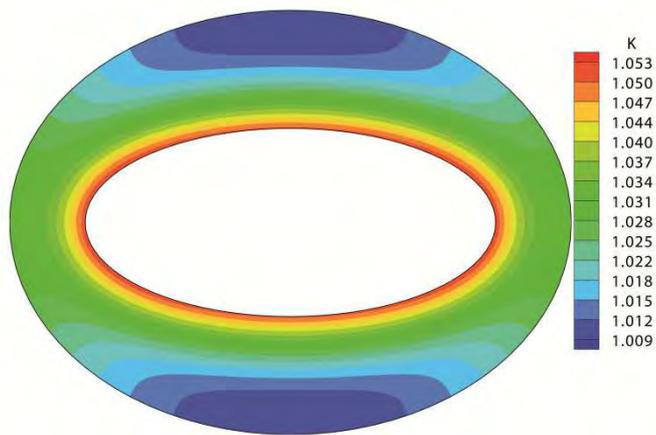
Figure.4.34. Le champ de la conductivité thermique à  $z^* = 50.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

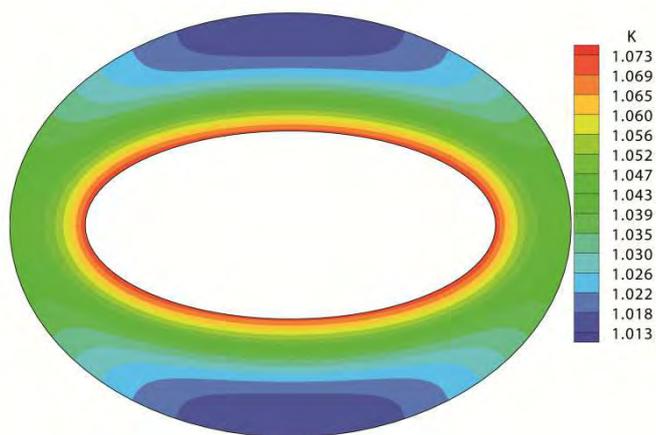
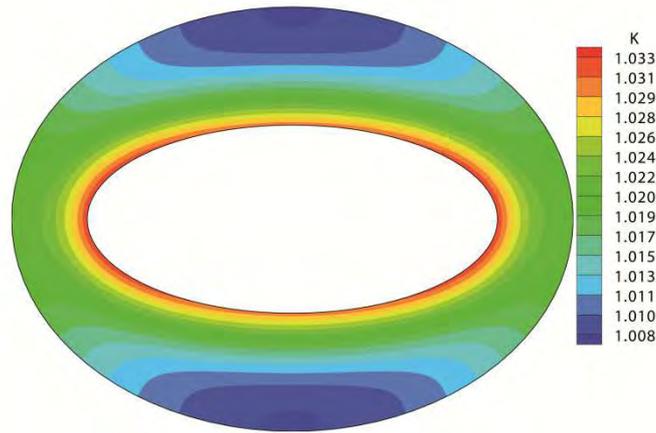


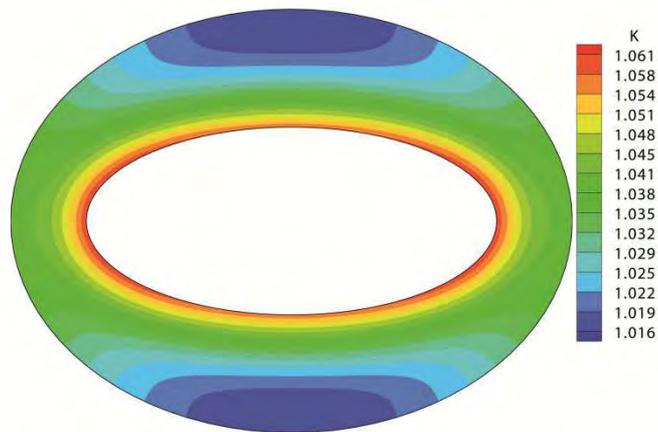
Figure. 4.35. Le champ de la conductivité thermique à  $z^* = 75.25$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

a)



b)



c)

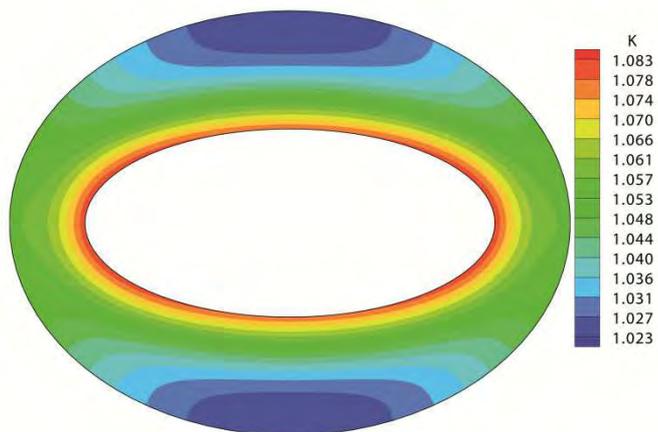


Figure.4.36. Le champ de la conductivité thermique à  $z^* = 100$ .

a)  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ . b)  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$ . c)  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ .

# Troisième Partie

**4.4. La convection mixte hydrodynamique et thermiquement en développement avec des propriétés variables :**

**4.4.1. Introduction :**

Dans cette partie, la plus importante de notre étude, nous présentons les résultats de la simulation numérique, la plus réaliste, qui tient compte de la flottabilité thermique et des propriétés thermophysiques variables.

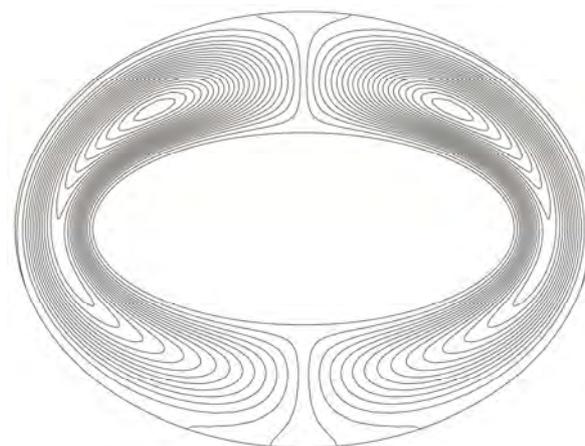
**4.4.2. Cas De Gr=5000:**

**4.4.2.1. L'écoulement secondaire :**

L'écoulement secondaire est présenté par des cellules dans la **Figure.4.37** à deux positions axiales choisies arbitrairement ( $z^*=50.25$  et  $z^*=100$ ) et par des vecteurs dans la **Figure.4.38** aux positions axiales ( $z^*=25.25$ ,  $z^*=50.25$ ,  $z^*=75.25$  et  $z^*=100$ ). Dans le domaine axial  $5.75 \leq z^* < 99.25$ , l'écoulement secondaire se manifeste sous la forme de deux cellules principales contrarotatives. Entre la limite supérieure du domaine axial cité et la sortie du conduit, apparaissent deux cellules secondaires en bas du conduit. La vitesse maximale à la sortie du conduit est égale à  $2.24 \times 10^{-2}$  ( $1.54 \times 10^{-2}$  pour le cas de Gr=5000 propriétés constantes).

Pour le nombre de Grashof considéré, un effet des propriétés variables et le retardement de l'apparition des cellules secondaires en bas du conduit. Dans le cas des propriétés physiques constantes, avec le même nombre de Grashof, le seuil axial d'apparition des cellules secondaires est  $z^*=72.25$ .

a)



b)



Figure. 4.37. Les cellules de l'écoulement secondaire.

a)  $z^* = 50.25$ , b)  $z^* = 100$

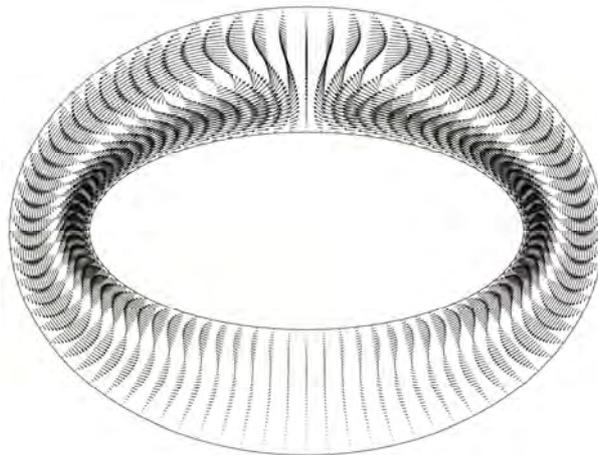
a)



b)



c)



d)

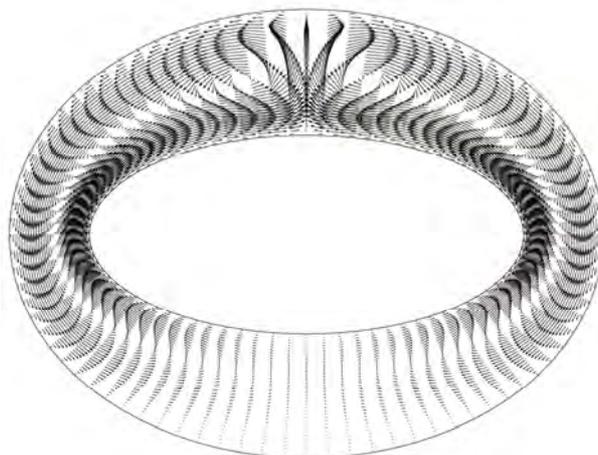


Figure. 4.38. L'écoulement secondaire présenté par des vecteurs.

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

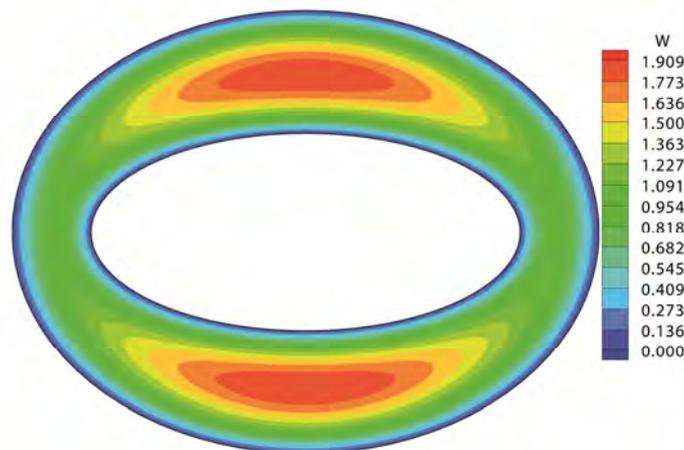
#### 4.4.2.2. L'écoulement axial:

Les variations polaires de la vitesse axiale sont illustrées à la **Figure.4.39** à quatre positions axiales, arbitrairement choisies ( $z^* = 25.25$ ,  $z^* = 50.25$ ,  $z^* = 75.25$  et  $z^* = 100$ ). Les variations montrent une symétrie par rapport à l'axe elliptique vertical. Juste après l'entrée du conduit, la distribution polaire de l'écoulement axial présente des isotaques sous forme de croissants en haut et en bas du conduit; avec les grandes vitesses concentrées dans les noyaux de ces croissants. Dans l'intervalle axial  $5.25 \leq z^* \leq 37.75$ , la vitesse maximale locale en bas du conduit est relativement supérieure à la vitesse maximale locale en haut du conduit. Par

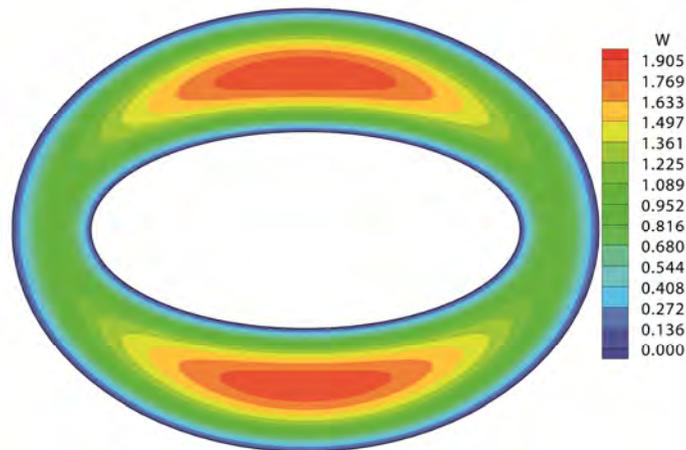
exemple, à  $z^*=20.25$ , la vitesse maximale locale est égale à 1.909 dans la partie inférieure du conduit, et elle est égale à 1.898 dans la partie supérieure du conduit. À  $z^*=38.25$ , les vitesses maximales locales sont égale et valent 1.8997. Dans l'intervalle axial  $5.25 \leq z^* \leq 37.75$ , on peut dire que l'asymétrie de la distribution polaire de la vitesse axiale, par rapport à l'axe elliptique horizontal, est due à l'effet de l'écoulement secondaire.

Dans l'intervalle axial  $38.75 \leq z^* \leq 100$ , la vitesse maximale locale dans la partie supérieure continue à augmenter axialement pour atteindre un maximum dans l'écoulement situé à la sortie de conduit à ( $\varepsilon = 0.7687$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ) et sa valeur est 1.968 (plus grande que la vitesse maximale (1.928) du cas des propriétés constantes avec  $Gr=5000$  et plus grande que la vitesse maximale (1.904) du cas correspondant de la convection forcée avec des propriétés variables). En revanche la vitesse maximale locale dans la partie inférieure diminue axialement (sans changement de position polaire) pour atteindre un minimum situé à la sortie du conduit à ( $\varepsilon = 0.7687$  et  $\eta = \frac{3\pi}{2}$ ) et qui est égale 1.843. Dans l'intervalle axial  $38.75 \leq z^* \leq 100$ , on peut dire que l'asymétrie de la distribution polaire de la vitesse axiale, par rapport à l'axe elliptique horizontal, est due à l'effet de la viscosité réduite : en haut du conduit la viscosité réduite diminue les frottements visqueux ce qui tend à augmenter localement le niveau de la vitesse. Pour conserver le débit constant à travers la section droite, le niveau de la vitesse axiale est relativement diminué en bas du conduit.

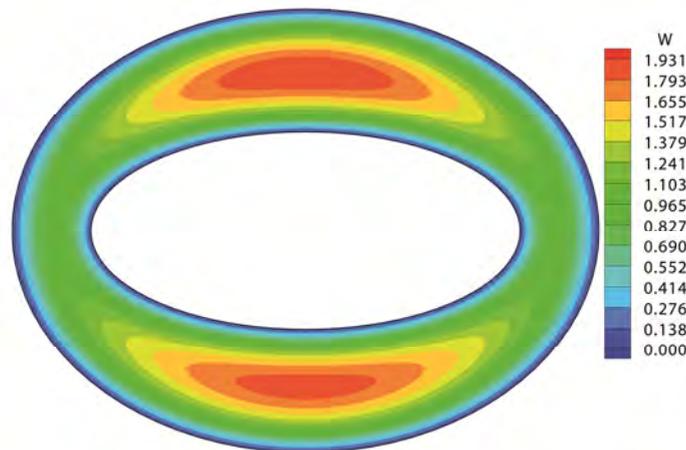
a)



b)



c)



d)

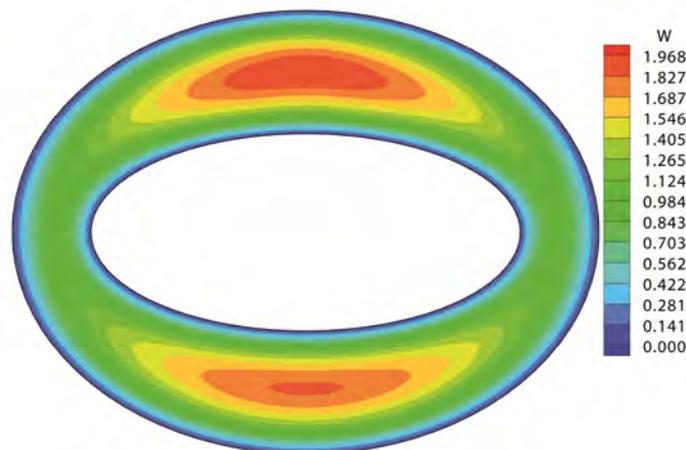


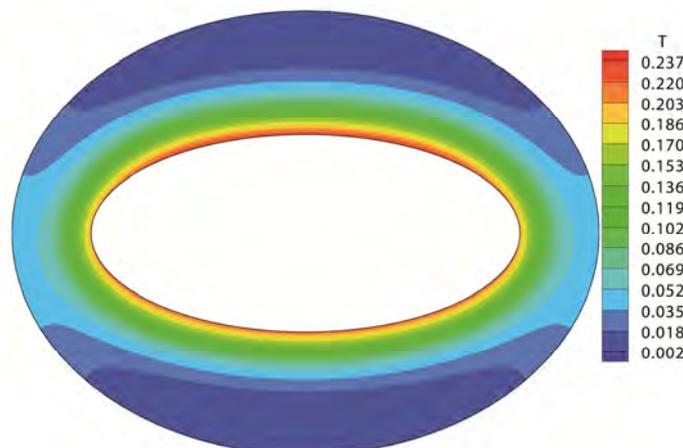
Figure. 4.39. Le champ de la vitesse axiale à  
 a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

4.4.2.3. Champ thermique:

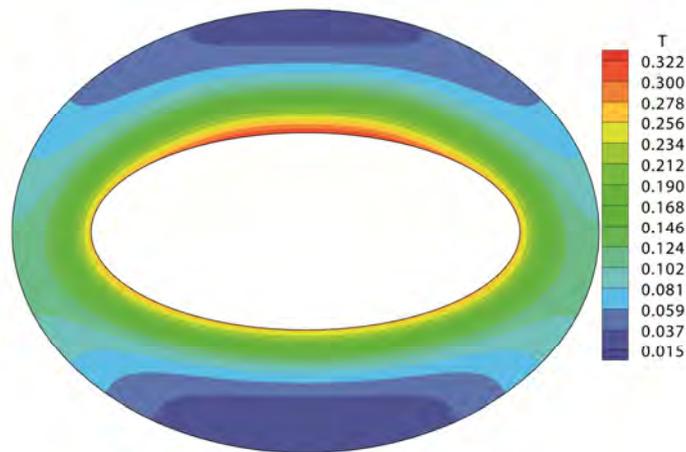
Les variations de la température sont bien illustrées dans la **Figure.4.40**. On constate qu'on a un chauffage axial qui fait augmenter la température à partir de l'entrée qui est égale (0 adimensionnelle et 293 K) jusqu'à la sortie de conduit. Radialement, la température diminue à partir de la paroi du cylindre chaud pour atteindre un minimum située à la paroi du cylindre adiabatique. Concernant les variations angulaires, elles dépendent du domaine axial. Entre  $z^*=0$  et  $z^*=65.25$ , les variations angulaires sont très importantes entre  $\eta=0$  et  $\eta=\frac{\pi}{2}$  et près de la paroi du cylindre chaud, la température augmente suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum local situé sur l'axe elliptique vertical. Au milieu de l'entrefer, les variations de la température sont presque négligeables. Près du cylindre adiabatique, la température diminue suivant la direction angulaire pour atteindre un minimum situé à  $\eta=\frac{\pi}{2}$ . Entre  $z^*=65.75$  et  $z^*=100$ , les variations angulaires entre  $\eta=0$  et  $\eta=\frac{\pi}{2}$  sont les mêmes près du cylindre chaud, mais à partir du milieu de l'entrefer jusqu'à la paroi du cylindre elliptique extérieur, la température diminue suivant la direction angulaire pour atteindre un minimum local situé près du petit axe elliptique et augmente en allant vers le grand axe elliptique. Le minimum local de la température s'éloigne axialement par rapport au petit axe elliptique pour atteindre une position située à la sortie du conduit à  $\eta = 0.784$ .

Dans la partie inférieure de l'annulaire et dans le domaine angulaire entre  $\eta = \pi$  et  $=\frac{3\pi}{2}$ , les variation de la température sont presque qualitativement identique aux cas de la convection forcée. La température maximale située à la sortie du conduit dans la partie supérieure sur la paroi du cylindre interne dans le grand entrefer et qui égale à 0.450 et c'est une augmentation importante.

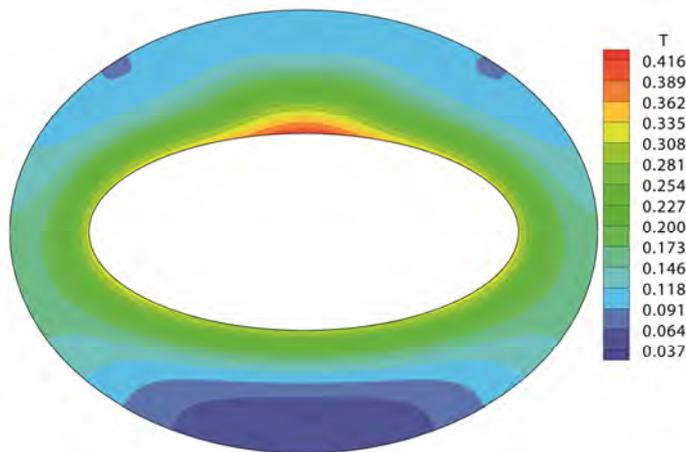
a)



b)



c)



d)

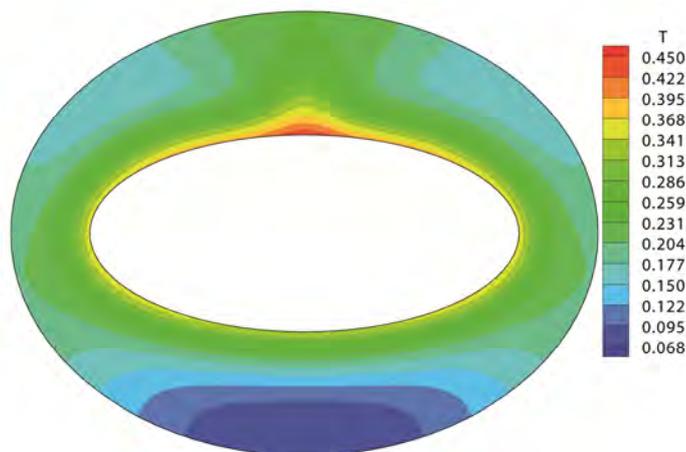


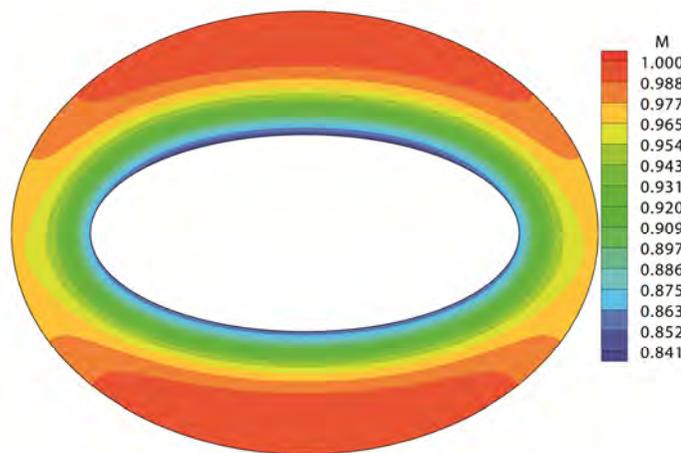
Figure. 4.40. Les variations de la température à

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

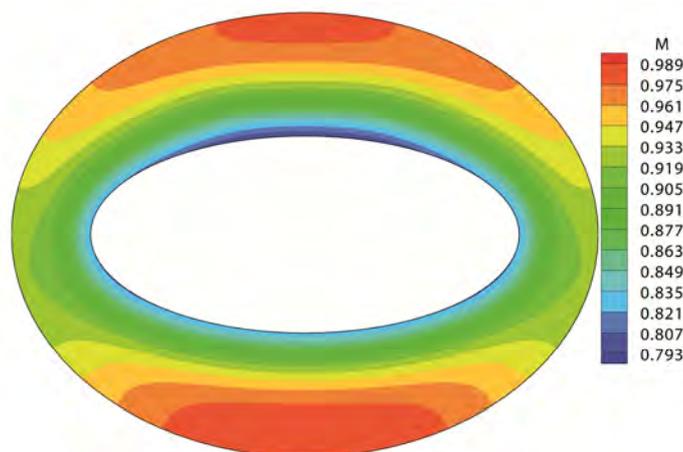
4.4.2.4. Les variations de la viscosité:

Les variations de la viscosité sont illustrées dans la **Figure.4.41**. Les trois variations, radiale, angulaire et axiales sont importantes. Axialement, la viscosité diminue axialement à partir de l'entrée jusqu'à la sortie du conduit, la réduction minimale de la viscosité est trouvée à la sortie du conduit sur la paroi du cylindre chauffé à  $\frac{3\pi}{2}$  et sa valeur est 0.731 qui est moins petite que celle du cas correspondant de la convection forcée (égale 0.749). Les variations radial, et azimuthale sont identiques qualitativement à l'inverse aux variations de la température.

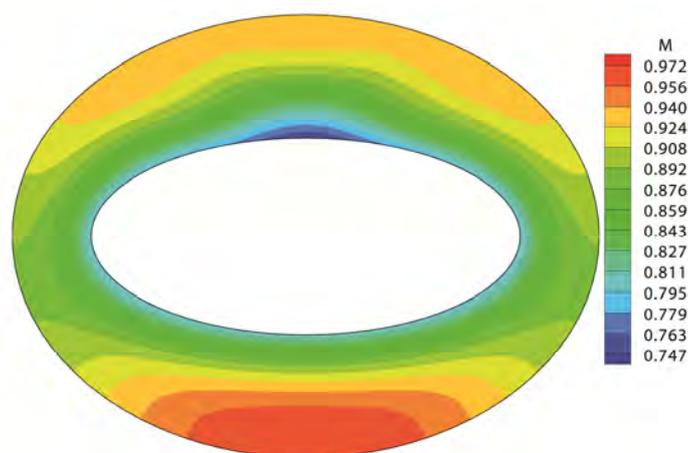
a)



b)



c)



d)

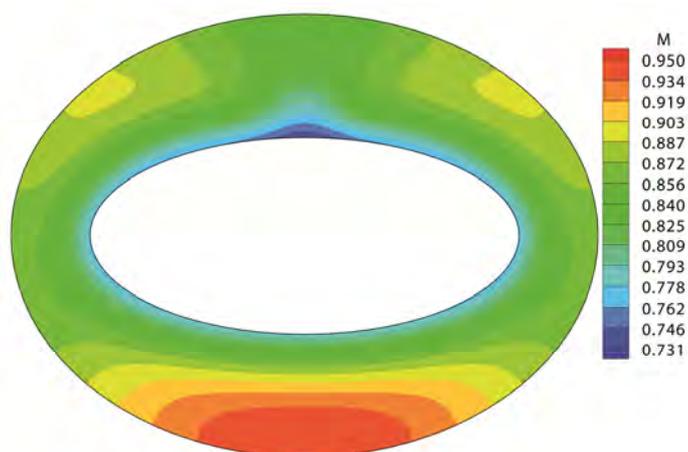


Figure. 4.41. Les variations de la viscosité à

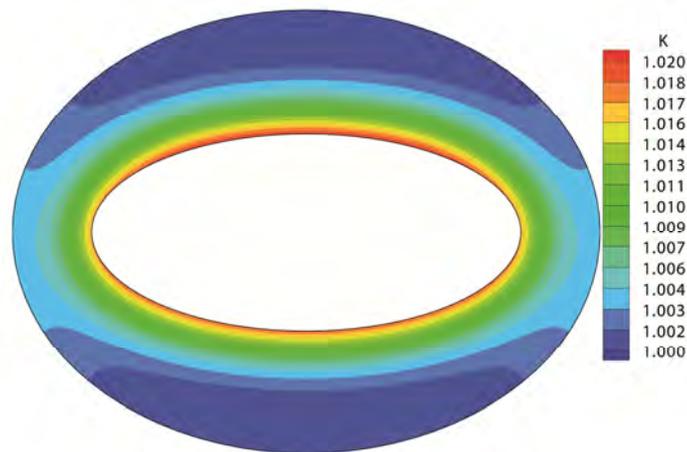
a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.4.2.5. Les variations de la conductivité :

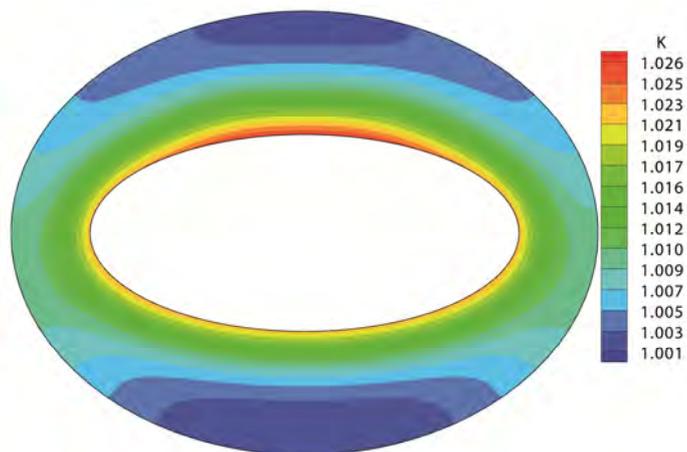
Les variations de la conductivité sont présentées dans la **Figure 4.42**. Les variations radiale, angulaire et axiale sont opposées à la distribution de la viscosité, où on trouve une grande conductivité, on trouve une faible viscosité et le contraire est correct. Parce que la conductivité de l'eau augmente avec l'augmentation de la température, en revanche, la viscosité diminue avec l'augmentation de la température. Pour le même niveau de chauffage, la diminution de la viscosité est considérable, par contre l'augmentation de la conductivité est faible. Par exemple, Entre l'entrée et la sortie du conduit, la diminution de la viscosité est 26.9%, par contre l'augmentation de la conductivité est 3.6%. La conductivité maximale est

située à la sortie du conduit à l'intersection de la paroi du cylindre chauffé et le petit axe elliptique et sa valeur est égale à 1.036. Pour le cas correspondant de la convection forcée correspondant avec des propriétés variables la conductivité thermique maximale vaut 1.029.

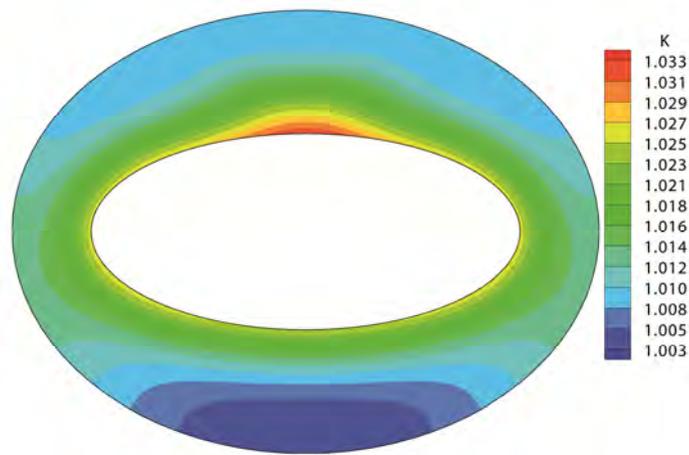
a)



b)



c)



d)

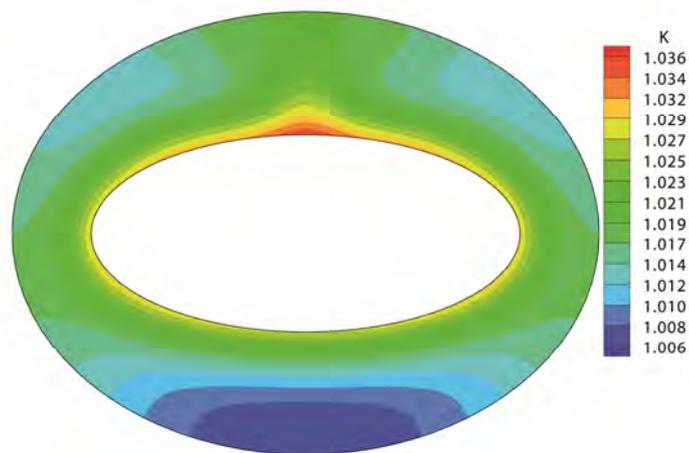


Figure. 4.42. Les variations de la conductivité à  
 a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

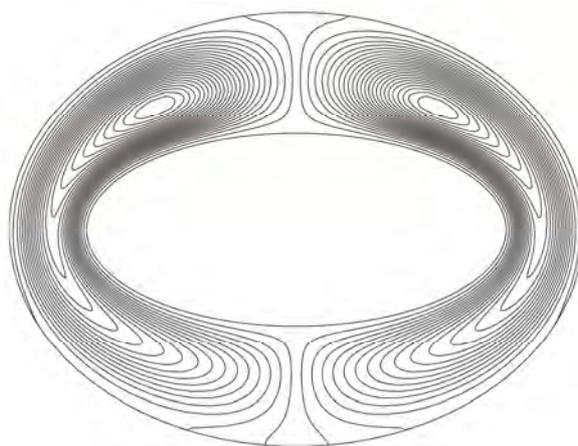
4.4.3. Cas De Gr=10000:

4.4.3.1. L'écoulement secondaire :

L'écoulement secondaire est présenté par des cellules dans la **Figure.4.43** et par des vecteurs dans la **Figure.4.44**. L'écoulement secondaire a la même structure que celles des cas Gr=5000 avec des propriétés variables et Gr=10000 avec des propriétés constantes. Juste après l'entrée, l'écoulement secondaire se manifeste sous la forme de deux rouleaux contrarotatifs qui occupe tout l'espace annulaire, comme présenté dans la **Figure.4.43a**. À partir de  $z^*=95.75$ , les deux cellules secondaire qu'on a vu dans les cas précédents commencent à apparaitre, elles sont bien présentées dans la **Figure.4.43b**. On remarque que le seuil axial d'apparition des cellules secondaires est inférieur à celui du Gr=5000 avec des propriétés variables.

La **Figure.4.44** montre que l'écoulement secondaire est plus fort près de la paroi du cylindre chaud. Entre  $z^*=52.25$  et  $z^*=85.25$ , l'écoulement secondaire est plus fort dans la partie supérieure du conduit où on a une stratification thermique instable (un fluide chaud superposé par un fluide froid). En revanche dans la partie inférieure du conduit, on a une stratification thermique stable (un fluide froid superposé par un fluide chaud), ce qui affaibli l'écoulement secondaire. Sa vitesse maximale à la sortie du conduit est égale à  $4.81 \times 10^{-2}$  ( $3.76 \times 10^{-2}$  pour le cas de Gr=10000 propriétés constantes et  $2.24 \times 10^{-2}$  pour le cas de Gr=5000 propriétés variables).

a)



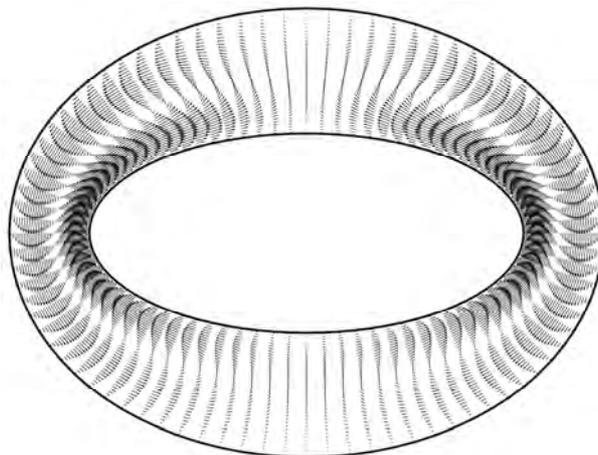
b)



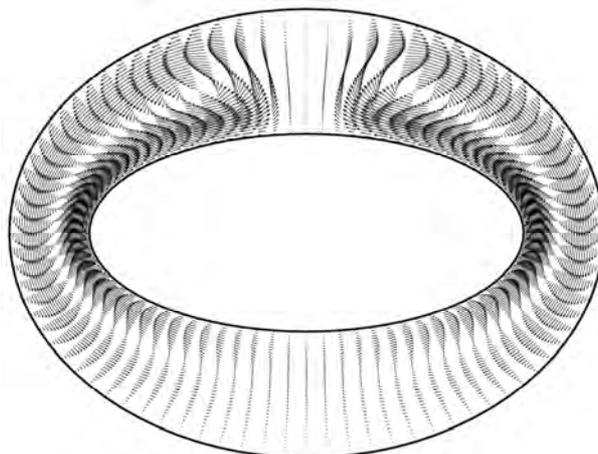
Figure. 4.43. L'écoulement secondaire présenté par des cellules

a)  $z^* = 35.25$ , b)  $z^* = 100$

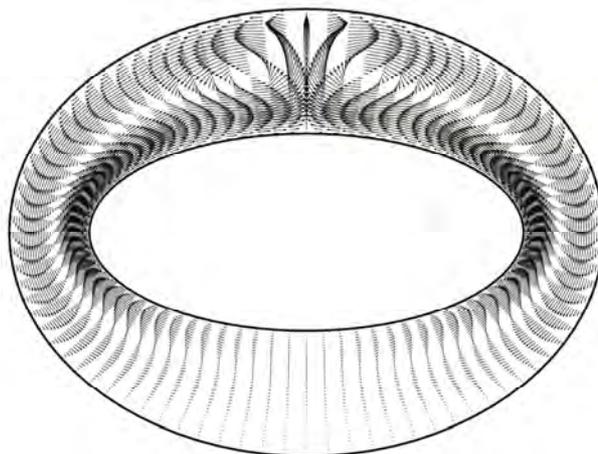
a)



b)



c)



d)

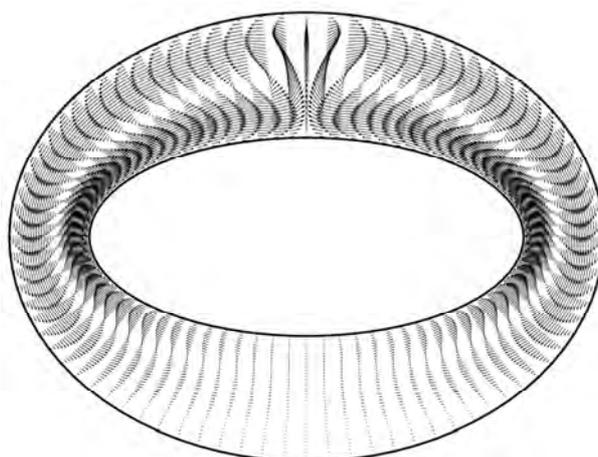


Figure. 4.44. L'écoulement secondaire présenté par des vecteurs

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

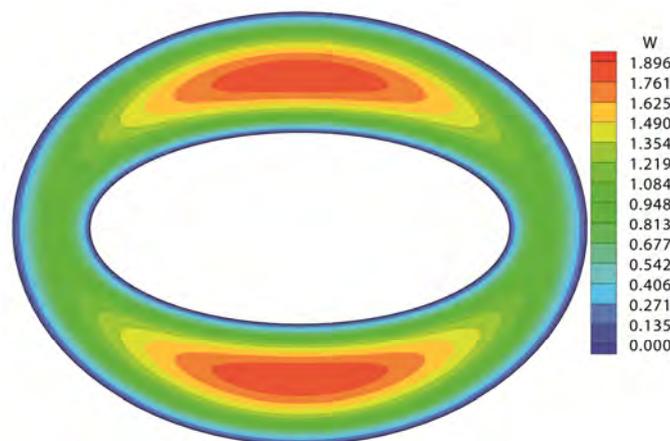
#### 4.4.3.2. L'écoulement axial:

Les variations polaires de la vitesse axiale sont présentées dans la **Figure.4.45**. En une section droite donnée, dans les parties, supérieure et inférieure, les isotaques de la vitesse axiale se présentent sous la forme de croissants. Les grandes vitesses sont concentrées dans les noyaux de ces croissants. Dans la partie inférieure du conduit, dans le domaine axial  $0 < z^* \leq 18.25$ , la vitesse maximale locale augmente et atteint la valeur 1,902 à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2}, z^* = 18.75)$ . Dans le domaine axial  $z^* > 18.78$ , le niveau de la vitesse maximale locale diminue axialement pour atteindre la valeur 1,788 à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2}, z^* = 100)$ . Dans la partie supérieure de l'annulaire, dans le domaine axial  $0 < z^* \leq 59.25$ , la vitesse maximale locale

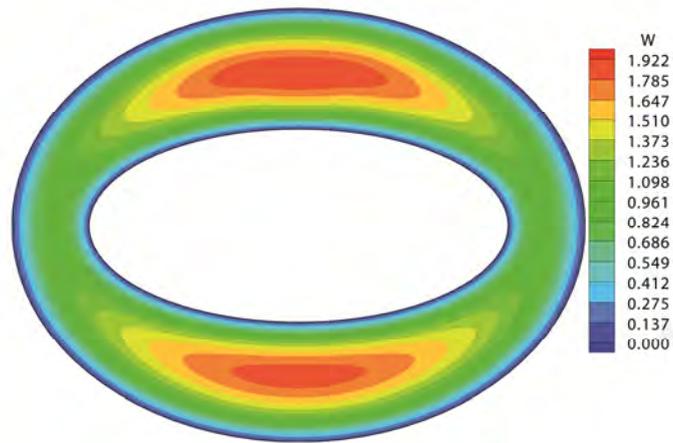
augmente axialement et atteint la valeur 1.932 à  $(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2}, z^* = 59.75)$ . Dans le domaine axial  $59.25 < z^* \leq 97.75$ , la vitesse maximale locale augmente axialement et atteint la valeur 1.989 à  $(\varepsilon = 0.7937, \eta = \frac{\pi}{2}, z^* = 97.75)$ . On remarque que la vitesse maximale locale est déplacée radialement vers le haut de la section droite par l'action de l'écoulement secondaire ascendant. Entre  $z^*=97.75$  et  $z^*=100$ , la vitesse maximale locale diminue légèrement suivant la direction axiale (sans changement de position polaire) pour atteindre une valeur égale 1.988.

On constate que dans le premier quart de la longueur du conduit, la distribution polaire de la vitesse axiale est surtout affectée par l'écoulement secondaire. Dans cette partie du conduit, le niveau de la vitesse maximale locale en bas du conduit est légèrement supérieur à celui en haut du conduit. À l'aval du premier quart de la longueur du conduit, la distribution polaire de la vitesse axiale est affectée par l'écoulement secondaire et la réduction de la viscosité. Ainsi, on remarque un pincement ascendant de la zone des grandes vitesses, en haut de la section droite, sous l'action de l'écoulement secondaire ascendant. Aussi, il est remarquable que le niveau de la vitesse axiale en haut de la section droite soit supérieur à celui en bas de la même section ; c'est l'effet de la réduction de la viscosité. La réduction de la viscosité est plus importante en haut qu'en bas de la section droite. Donc, les frottements visqueux sont plus réduits en haut qu'en bas de la section droite et c'est ce qui augmente le niveau de la vitesse axiale en haut et le réduit en bas de la section droite (pour conserver le débit).

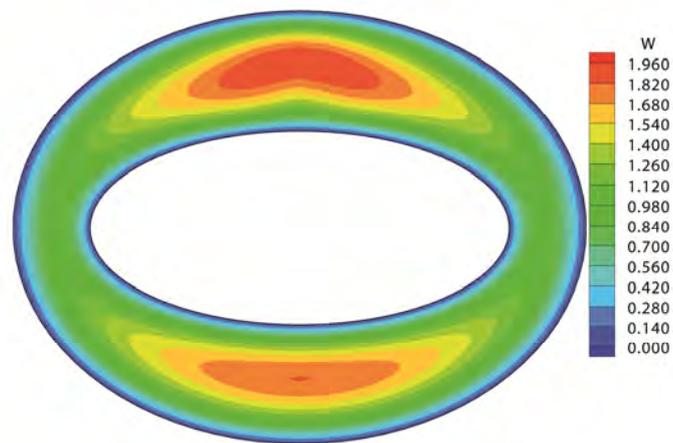
a)



b)



c)



d)

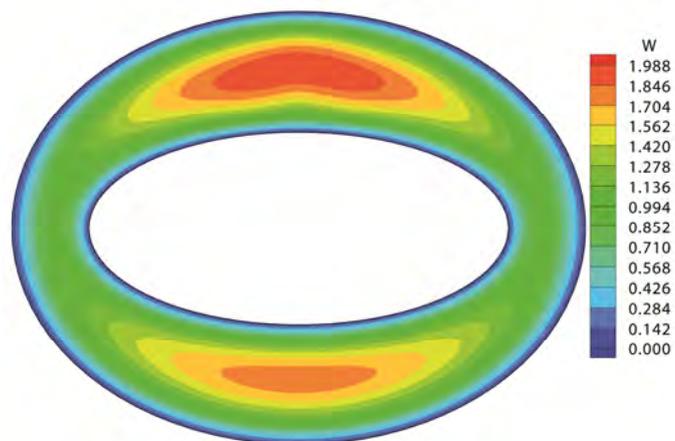


Figure. 4.45. Le champ de la vitesse axiale à  
a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

4.4.3.3. Champ thermique:

Les variations de la température sont illustrées dans la **Figure.4.46**. Les variations sont très importantes dans les trois directions. Axialement, la température augmente entre l'entrée et la sortie du conduit. Radialement, à une section droite, la température diminue radialement entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur.

Dans la partie inférieure du conduit, près de la paroi du cylindre intérieur, les variations angulaires sont faibles. Cependant, les variations angulaires de la température sont importantes entre le milieu de l'entrefer et la surface du cylindre extérieur. On voit clairement la diminution de la température du grand axe elliptique vers le petit axe elliptique.

Dans la partie supérieure du conduit, on a trois zones de variations angulaires : près de la paroi du cylindre intérieur, dans le milieu de l'entrefer et près de la paroi du cylindre adiabatique. On limite la discussion aux variations angulaires entre  $\eta = 0$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . Près de la paroi du cylindre intérieur, dans l'intervalle entre  $z^*=0$  et  $z^*=51.25$ , la température augmente suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum situé sur le petit axe elliptique. Entre  $z^*=51.75$  et  $z^*=100$ , la température augmente suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum local situé approximativement à  $\eta = 0,972$  ; après elle diminue légèrement en allant près du petit axe elliptique pour atteindre un minimum local ; ensuite elle augmente en allant vers le petit axe elliptique.

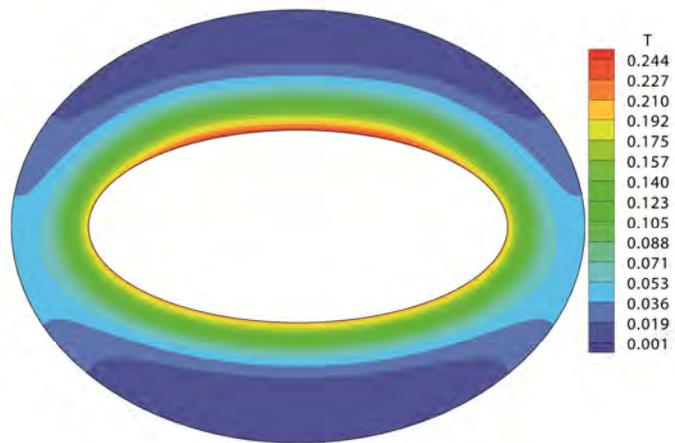
Aux milieux de l'entrefer, et dans l'intervalle axial entre  $z^*=0$  et  $z^*=35.25$ , la température diminue suivant la direction annulaire pour atteindre un minimum situé à  $\frac{\pi}{2}$ . A partir de  $z^*=35.75$  et jusqu'à  $z^*=65.25$ , la température diminue suivant la direction angulaire pour atteindre un minimum local situé au voisinage de  $\eta = 0.823$ , ensuite elle commence à croître suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum local au voisinage de  $\eta = 1.222$ , à partir de ce point la température diminue pour atteindre un minimum local sur le petit axe elliptique. Dans l'intervalle axial entre  $z^*=65.75$  et  $z^*=100$ , la température diminue suivant la direction angulaire pour atteindre un minimum local situé au voisinage  $\eta = 1.222$  ; ensuite elle commence à croître en allant vers le petit axe elliptique.

Près de la paroi du cylindre adiabatique, et dans l'intervalle axial entre  $z^*=0$  et  $z^*=50.25$ , la température décroît en allant de  $\eta = 0$  vers  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . Entre  $z^*=50.75$  et la sortie du conduit, la température diminue suivant la direction angulaire pour atteindre un minimum local à  $\eta = 0.823$ , ensuite elle augmente en allant vers le petit axe elliptique. La distribution spatiale

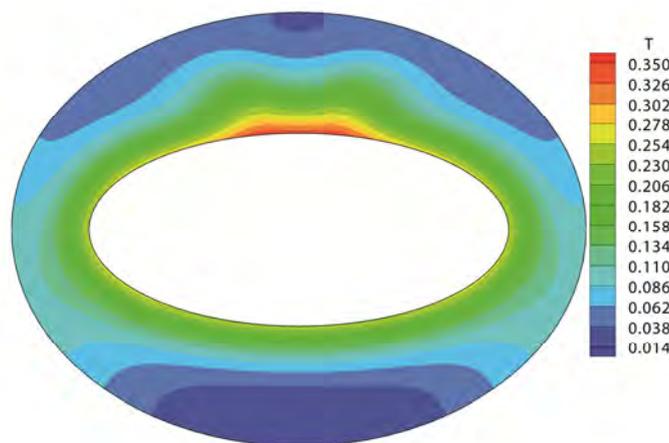
de la température est caractérisée par un meilleur brassage dans la partie supérieure du conduit, surtout vers la sortie du conduit. Ce brassage est amélioré par l'augmentation du niveau de la vitesse axiale (augmentation de la convection axiale) et l'intensification de l'écoulement secondaire (augmentation de la convection transversale), qui sont dues à la réduction considérable de la viscosité dans la partie supérieure du conduit.

La température maximale est située à  $z^*=97.25$  et à la position polaire ( $\varepsilon = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ ); et sa valeur est égale à 0.434.

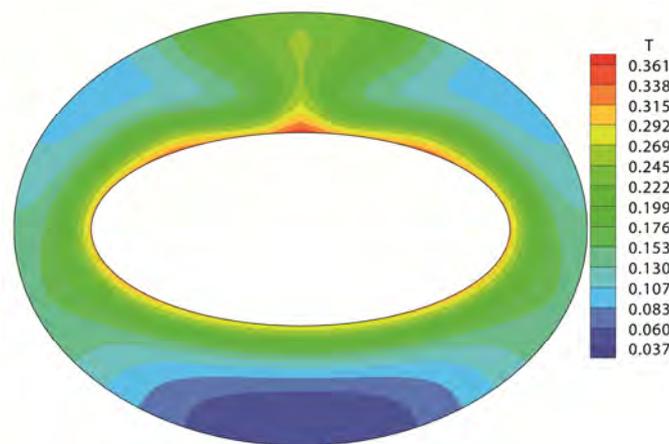
a)



b)



c)



d)

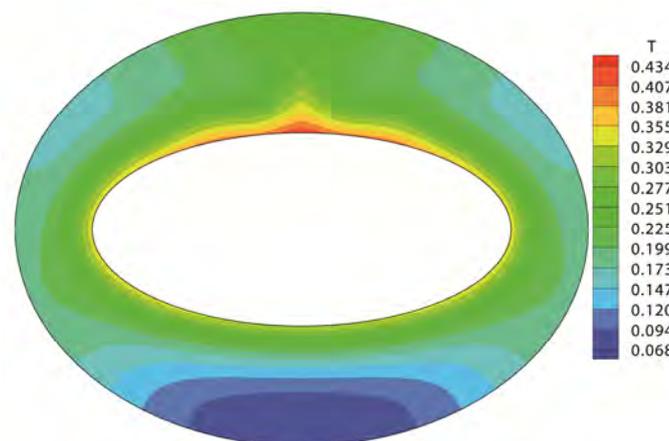


Figure. 4.46. Les variations de la température à

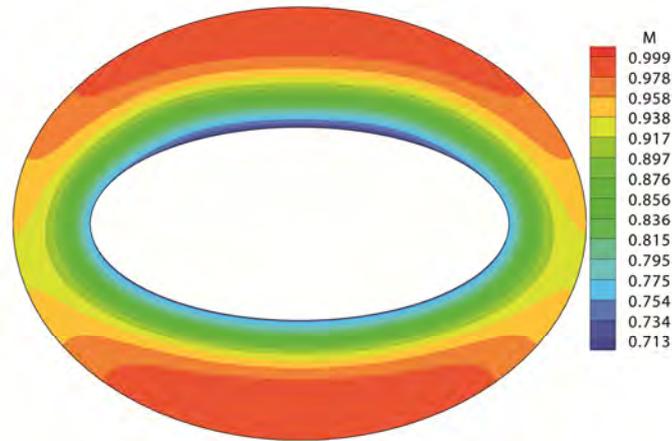
a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.4.3.4. Les variations de la viscosité:

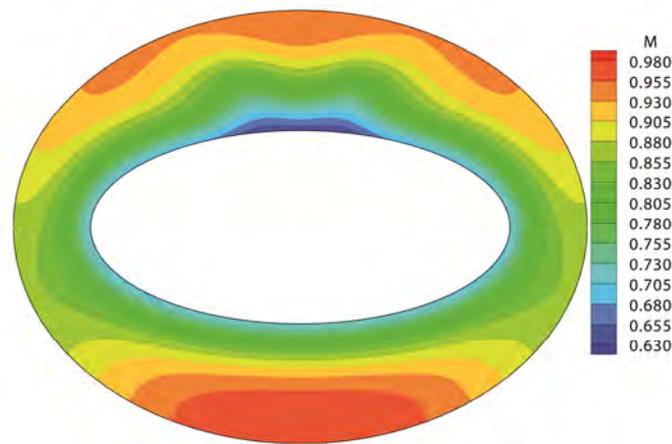
Les variations de la viscosité sont illustrées dans la **Figure.4.47**. Les variations radiale, angulaire et axiale sont importantes. La viscosité diminue axialement à partir de sa valeur adimensionnelle maximale qui est égale à 1 située à l'entrée du conduit pour atteindre un minimum situé à la sortie du conduit. Radialement, à une section droite, la viscosité augmente radialement entre le cylindre intérieur et le cylindre extérieur. Les variations angulaires sont identique qualitativement à l'inverse des variations de la température. La viscosité minimale est située à  $z^* = 97.25$ , sur l'intersection de la paroi chaude du cylindre intérieur et le petit axe

elliptique et sa valeur est égale à 0.575, soit une réduction relative de 42.5% de la valeur de la viscosité à l'entrée du conduit.

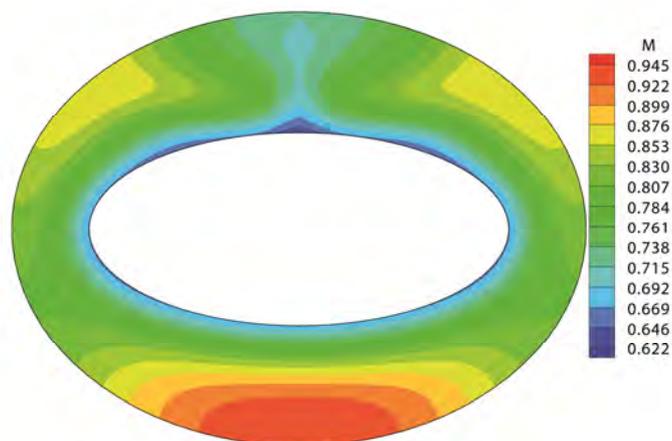
a)



b)



c)



d)

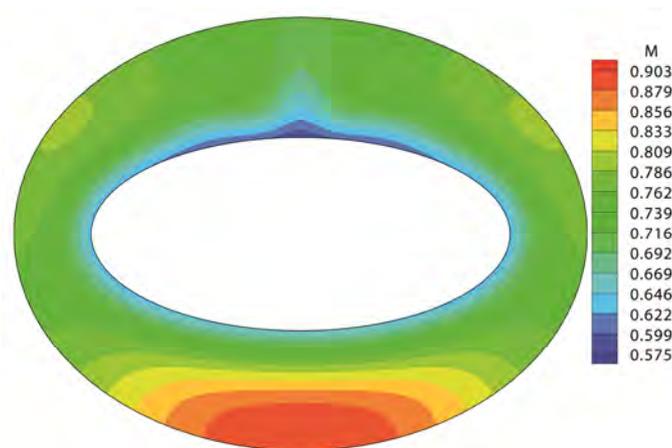


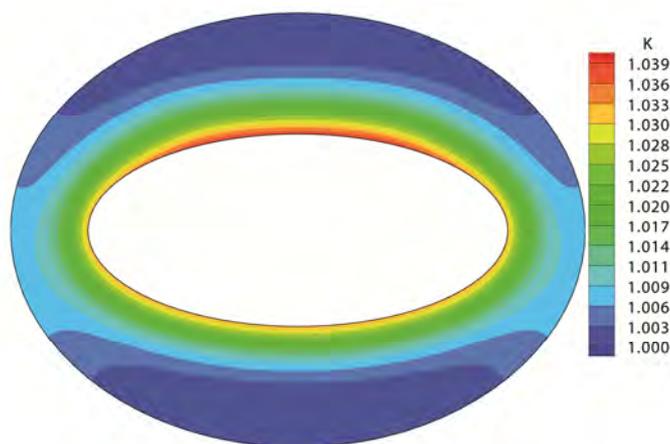
Figure. 4.47. Les variations de la viscosité à

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

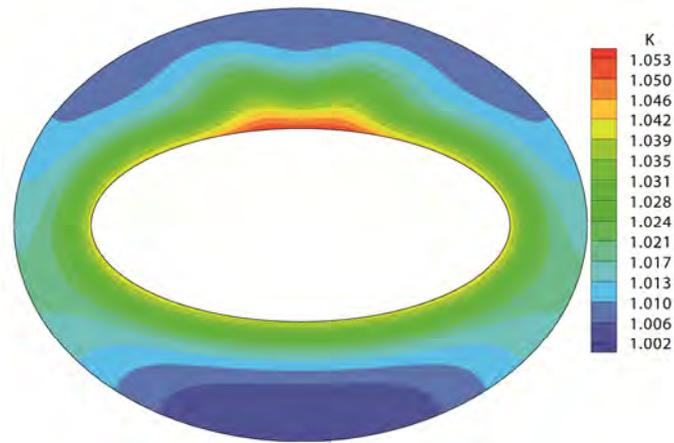
#### 4.4.3.5. Les variations de la conductivité :

Dans la **Figure.4.48**, on a présenté les variations de la conductivité dans quatre stations axiales, arbitrairement choisies : ( $z^*=25.25, z^*=50.25, z^*=75.25$  et  $z^*=100$ ). Les variations de la conductivité dans les trois directions, radiale, angulaire et axiale sont qualitativement similaires à celles de la température ; mais elles sont quantitativement faibles suivant les trois directions. La plus grande des variations de la conductivité est effectuée axialement. À partir de l'entrée où la conductivité égale à 1, la conductivité augmente axialement en allant vers la sortie du conduit. La conductivité maximale égale à 1.064, et située à  $z^*=97.25$ , à la position polaire ( $\theta = 0.5, \eta = \frac{\pi}{2}$ ). On voit que l'augmentation de la conductivité, avec le niveau de chauffage considéré, est faible et on s'attend à une faible amélioration du transfert thermique conductif.

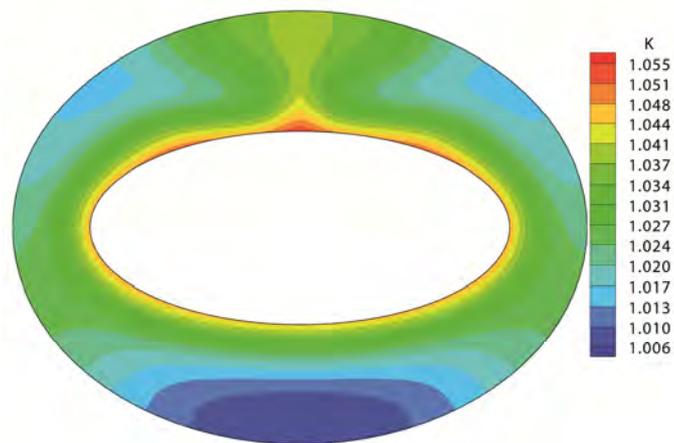
a)



b)



c)



d)

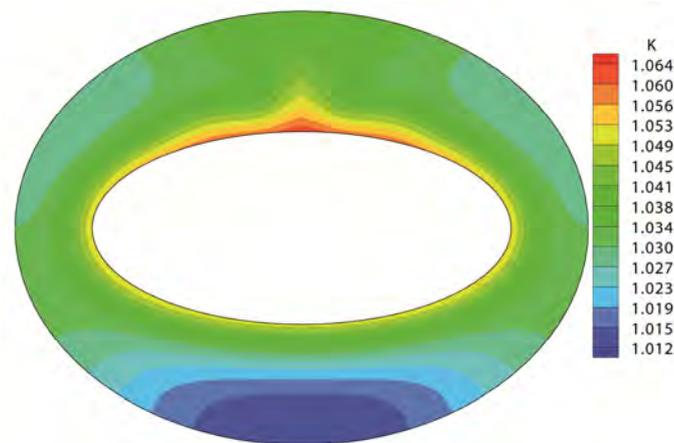


Figure. 4.48. Les variations de la conductivité à  
 a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

4.4.4. Cas De Gr=15000:

4.4.4.1. L'écoulement secondaire :

L'écoulement secondaire est qualitativement similaire à celui du cas Gr=15000 avec des propriétés physiques constantes ; mais il est plus fort que ce dernier. À partir de  $z^*=3.75$ , l'écoulement secondaire se présente sous la forme de deux cellules principales, l'une dans la partie droite de la section et tourne dans le sens horaire et l'autre dans la partie gauche de la section et tourne dans le sens antihoraire. Les deux cellules occupent l'aire de surface de la section annulaire transversale. Les deux cellules transportent les particules fluides chaudes vers le haut de l'espace annulaire et les particules froides vers le bas de l'espace annulaire. Ce transport qui s'intensifie axialement fait un brassage transversal important et améliore le transfert de chaleur.

Les deux cellules principales occupent tout l'espace annulaire jusqu'à  $z^*=33.2$  où deux petites cellules commencent à apparaître dans la partie supérieure dans le grand entrefer. Les causes d'apparition, d'intensification et de disparition de ces petites cellules sont les mêmes que celles citées pour le cas de Gr=15000 avec des propriétés physiques constantes. L'écoulement secondaire à l'intérieur des petites cellules apparaît à  $z^*=33.2$  ; il s'intensifie jusqu'à  $z^*=60.25$  ; il s'affaiblit à partir de  $z^*=60.25$  et disparaît à  $z^*=92.25$ .

À  $z^*=91.25$ , et dans la partie inférieure du pipe, deux petites cellules commencent à apparaître et qui sont illustrées dans la **Figure.4.49c**. La circulation des deux cellules secondaires est plus faible comparée par rapport aux circulations des petites cellules et des cellules principales. La vitesse maximale de l'écoulement secondaire à la sortie du conduit est égale à  $1.09 \times 10^{-1}$  ( $4.81 \times 10^{-2}$  pour le cas de Gr=10000 propriétés variables et  $5.77 \times 10^{-2}$  pour Gr=15000 propriétés constantes).

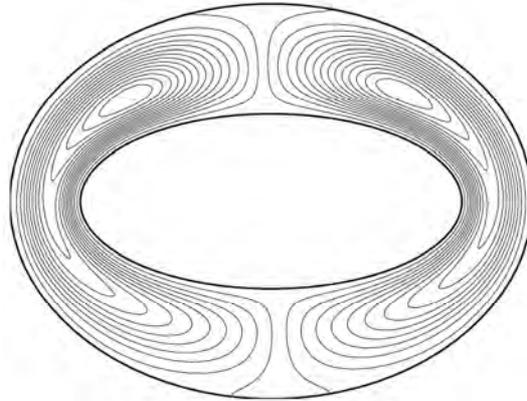
Dans le **Tableau 4.4**, nous présentons les domaines axiaux des différentes cellules des écoulements secondaires de tous les cas de la convection mixte.

**Tableaux 4.4** : les positions axiales des cellules de l'écoulement secondaire.

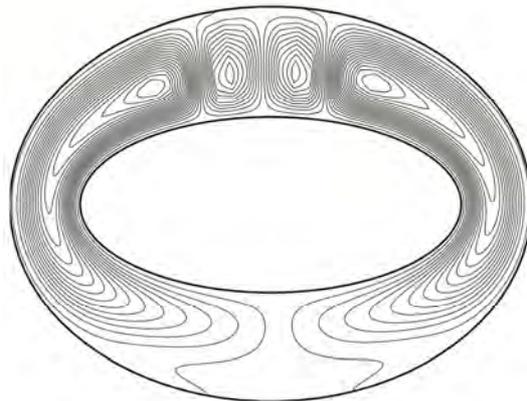
Propriétés constantes	Cellules principales	Petites cellules dans la partie supérieure de l'annulaire	Cellules secondaires dans la partie inférieure de l'annulaire
$Gr=5 \times 10^3$	7.75-100	-	72.25-100
$Gr= 10^4$	6.25-100	-	59.75-100
$Gr=1.5 \times 10^4$	4.25-100	33.75-85.75	58.25-100

Propriétés variables			
$Gr=5 \times 10^3$	5.75-100	-	99.25-100
$Gr= 10^4$	4.75-100	-	95.75-100
$Gr=1.5 \times 10^4$	3.75-100	33.25-92.25	91.25-100

a)



b)



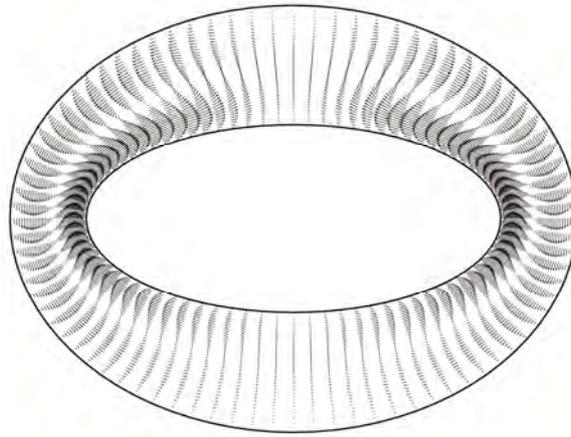
c)



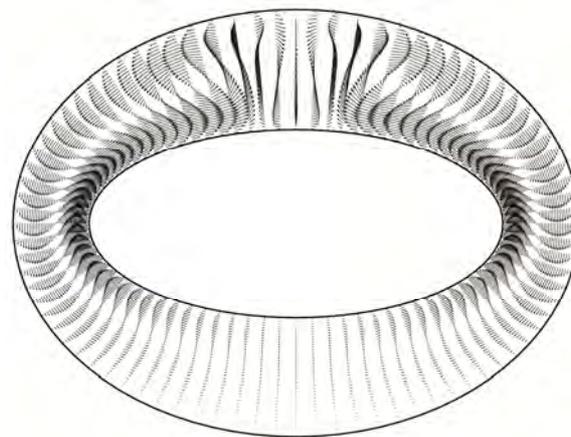
Figure. 4.49.L'écoulement secondaire présenté par des cellules

a)  $z^*= 24.25$ , b) $z^*=66.75$ ,c) $z^*=100$

a)



b)



c)



d)

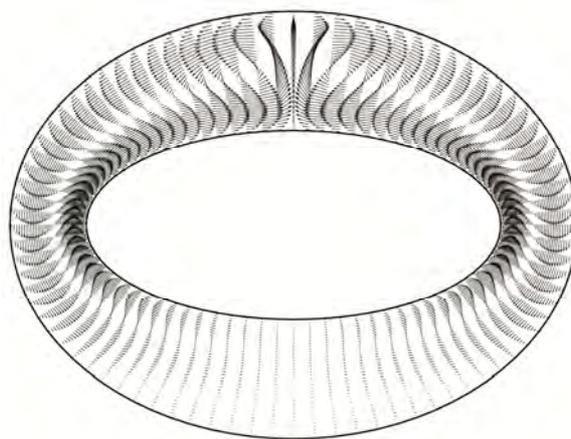


Figure. 4.50. L'écoulement secondaire présenté des vecteurs

a)  $z^*=25.25$ , b)  $z^*=50.25$  c)  $z^*=75.25$  et d)  $z^*=100$

#### 4.4.4.2.Écoulement axial:

Les variations de la vitesse axiale sont illustrées dans la **Figure 4.51** dans quatre stations axiales ( $z^*=25.25, z^*=50.25, z^*=75.25$  et  $z^*=100$ ). Les résultats montrent que l'écoulement axial est tridimensionnel avec des variations radiale, angulaire et axiale importantes. Dans la partie inférieure du conduit, les variations radiale, angulaire et axiale sont qualitativement identiques à celles des cas  $Gr=5000$  et  $Gr=10000$ , avec des propriétés variables. Dans la partie inférieure du conduit, juste après l'entrée, les isocontours de la vitesse axiale se présentent sous la forme de croissants. Les grandes vitesses sont concentrées dans les noyaux de ces croissants. On note que la vitesse axiale maximale locale continue à augmenter axialement, sans changement de position polaire ( $\varepsilon = 0.7687$  et  $\eta = \frac{3\pi}{2}$ ), jusqu'à  $z^*=17.75$  où elle atteint la valeur 1.896 qui est la valeur maximale dans la partie inférieure. À partir de  $z^*=17.75$ , la vitesse axiale maximale locale commence à diminuer axialement (sans changement de position polaire) pour atteindre la valeur 1.741 à la sortie du conduit.

Dans la partie supérieure, et juste après l'entrée, les isocontours de la vitesse axiale se présentent sous la forme de croissants. Les grandes vitesses sont concentrées dans les noyaux de ces croissants. Dans l'intervalle  $0 \leq z^* \leq 40.25$ , la vitesse maximale locale augmente axialement pour atteindre la valeur 1.928 à  $z^*=40.25$  et à ( $\varepsilon = 0.7687$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ). A  $z^*=24.25$  les deux vitesses maximales locales dans les parties, inférieure et supérieure, sont égales et valent 1.887.

À partir de  $z^*=40.25$ , l'écoulement secondaire des deux petites cellules dans la partie supérieure modifie la forme de la distribution de la vitesse axiale. La partie descendante de cet écoulement pousse les isotaques de la vitesse axiale vers la paroi du cylindre intérieur alors que sa partie ascendante éloigne les isotaques du même cylindre. Ces déformations des isotaques de la vitesse axiale sont visibles dans les **Figures 4.51b** et **4.51c**. La vitesse maximale locale est localisée en deux positions polaires près du petit axe elliptique. L'effet des deux petites cellules commence à s'affaiblir à partir de  $z^*=60.25$  et la vitesse axiale maximale locale commence à retourner à sa position sur le petit axe elliptique ( $\varepsilon = 0.7687$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ) progressivement. La vitesse axiale maximale locale augmente axialement pour atteindre la valeur 2.010 à ( $\varepsilon = 0.7437, \eta = \frac{\pi}{2}, z^*=89.25$ ). À partir de  $z^*=89.25$ , l'écoulement secondaire des deux cellules principales devient plus fort, et commence à pousser légèrement les isotaques de la vitesse axiale vers la paroi du cylindre adiabatique. À  $z^*=92.75$ , l'écoulement secondaire divise la zone des grandes vitesses en deux parties, près du petit axe elliptique, qui sont illustrées dans la **Figure 4.51d**. La valeur de la vitesse axiale locale maximale à la sortie du conduit est 1.995, localisée dans deux positions polaires ( $\varepsilon = 0.7937, \eta = 1.7203$  et  $\varepsilon = 0.7937, \eta = 1.4211$ ).

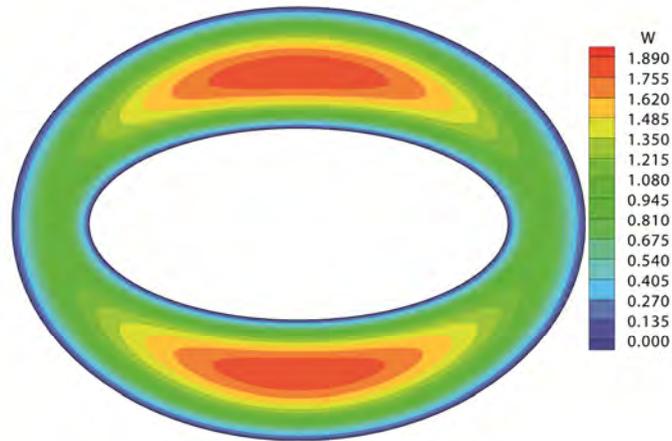
Dans le **Tableau 4.5**, nous présentons, à titre de comparaison, les valeurs et les positions des vitesses axiales maximales de tous les cas de notre étude.

**Tableau 4.5** : Les valeurs et les positions des vitesses axiales maximales.

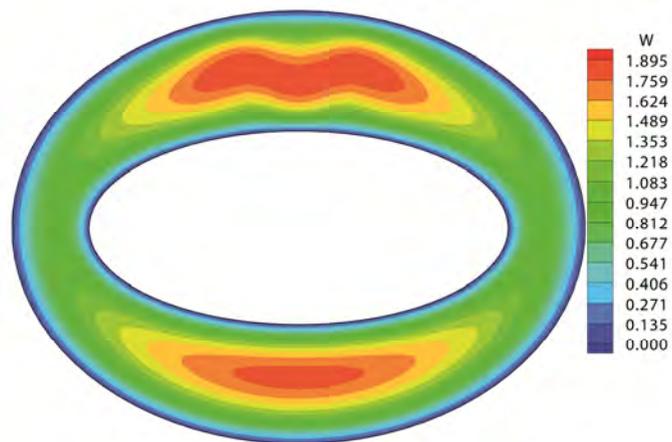
Propriétés constantes	Position axiale	Position polaire	$W^*_{max}$
<b>Gr=0</b>	$z^* = 21.25 - 100$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	1.919
<b>Gr=5 × 10<sup>3</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$	1.928
<b>Gr= 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 92.75$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$	1.938
<b>Gr=1.5 × 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 70.75$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{3\pi}{2})$	1.949
Propriétés variables	Position axiale	Position polaire	$W^*_{max}$
$q_w = 4172 W/m^2$	$z^* = 22.25$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2})$	1.904
$q_w = 8344 W/m^2$	$z^* = 19.75$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2})$	1.893
$q_w = 12516 W/m^2$	$z^* = 18.25$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2})$	1.883
<b>Gr=5 × 10<sup>3</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.7687, \eta = \frac{\pi}{2})$	1.968

$Gr= 10^4$	$z^* = 97.75$	$(\varepsilon = 0.7937, \eta = \frac{\pi}{2})$	1.989
$Gr=1.5 \times 10^4$	$z^* = 89.25$	$(\varepsilon = 0.7437, \eta = \frac{\pi}{2})$	2.010

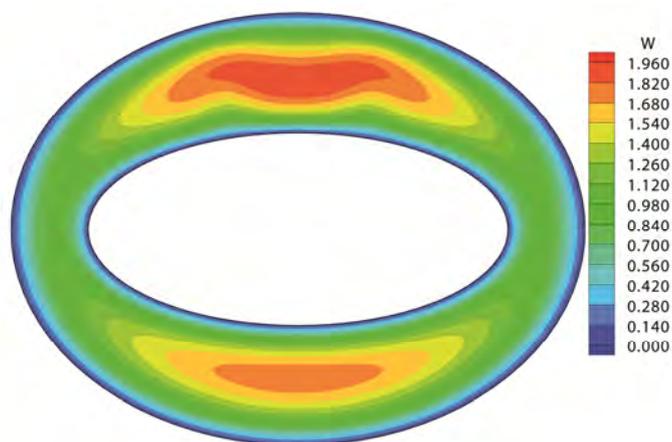
a)



b)



c)



d)

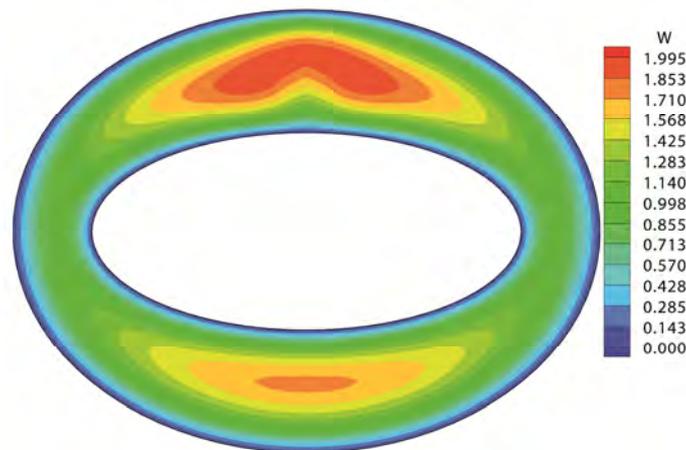


Figure. 4.51. Le champ de la vitesse axiale à

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

#### 4.3.4.3. Champ thermique:

Les variations de la température sont illustrées dans la **Figure 4.52** dans quatre positions axiales. Axialement, la température augmente de l'entrée à la sortie du conduit. Les variations radiale et angulaire dans la partie inférieure sont qualitativement similaires à celles du cas de  $Gr=10000$  avec les propriétés variables.

Les variations polaires de la température dans la partie supérieure sont très importantes. Dans le domaine  $0 \leq z^* \leq 31.25$  et  $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ , la température diminue radialement à partir du cylindre chaud en allant vers le cylindre adiabatique. Les variations angulaires sont divisées en trois parties : près de cylindre chaud, milieu de l'entrefer et près du cylindre adiabatique. Près du cylindre chaud, la température augmente entre  $\eta = 0$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . Au milieu de l'entrefer les variations angulaires sont presque négligeables. Près du cylindre adiabatique, la température diminue angulairement pour atteindre un minimum dans le grand entrefer.

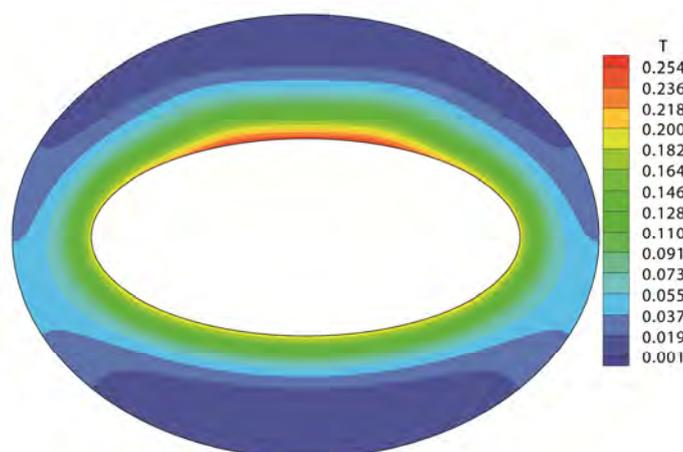
Dans le domaine  $31.25 \leq z^* \leq 92.75$  et  $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ , les variations radiales sont presque les mêmes que celles de l'intervalle  $0 \leq z^* \leq 31.25$ ; mais les variations angulaires sont différentes. La température augmente suivant la direction angulaire pour atteindre un maximum local à une position angulaire qui se rapproche du grand axe elliptique en allant vers la direction axiale. À partir de son minimum local, la température diminue angulairement pour atteindre un minimum local. Dans l'intervalle  $92.75 \leq z^* \leq 100$  et

$0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ , les variations radiales restent les mêmes. En revanche les variations angulaires sont changées. La température augmente diminue à partir de  $\eta = 0$  pour atteindre une valeur maximale locale à  $\eta = \frac{\pi}{2}$ . Dans le **Tableau 4.6**, nous présentons, à titre de comparaison, les niveaux de d'augmentation de la température des cas de notre étude

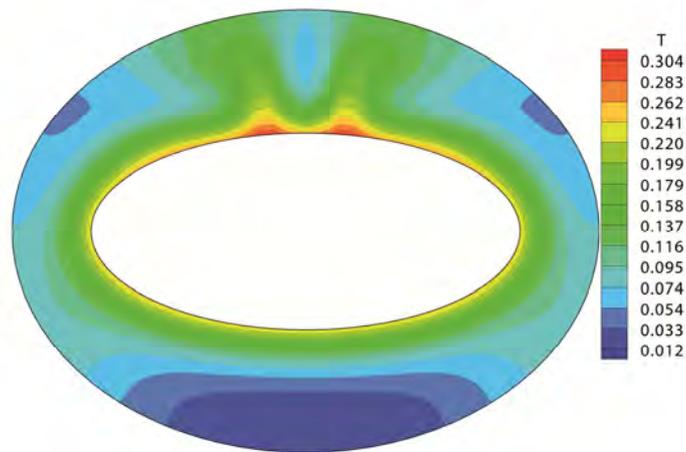
**Tableau 4.6 :** Les valeurs et position de la température.

Propriétés constantes	Position axiale	Position polaire	$T^*_{max}$
<b>Gr=0</b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, (\eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515 \text{ et } \eta = 5.909))$	0.418
<b>Gr=5 × 10<sup>3</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.448
<b>Gr= 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.459
<b>Gr=1.5 × 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.465
Propriétés variables	Position axiale	Position polaire	$T^*_{max}$
<b><math>q_w = 4172W/m^2</math></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909)$	0.412
<b><math>q_w = 8344W/m^2</math></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909)$	0.410
<b><math>q_w = 12516W/m^2</math></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909)$	0.400
<b>Gr=5 × 10<sup>3</sup></b>	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.450
<b>Gr= 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 97.75$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.434
<b>Gr=1.5 × 10<sup>4</sup></b>	$z^* = 90.25$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	0.422

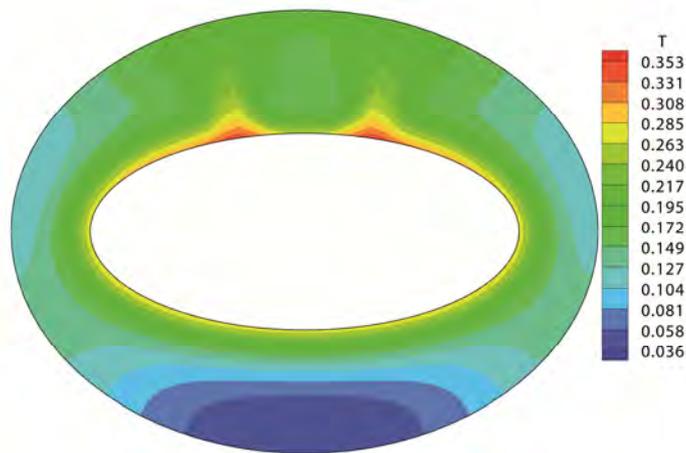
a)



b)



c)



d)

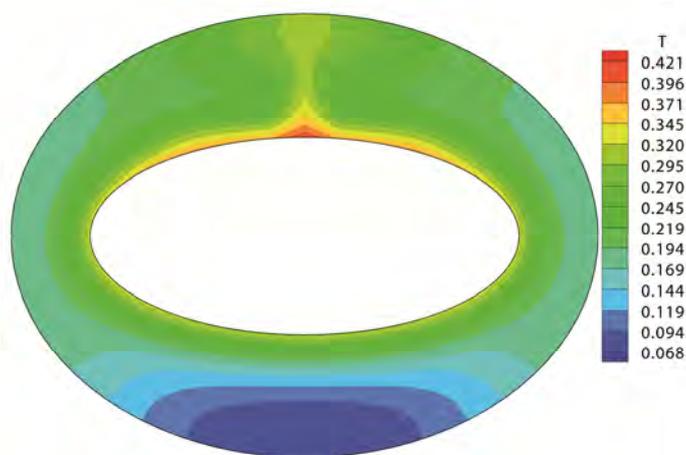


Figure. 4.52. Les variations de la température à  
 a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

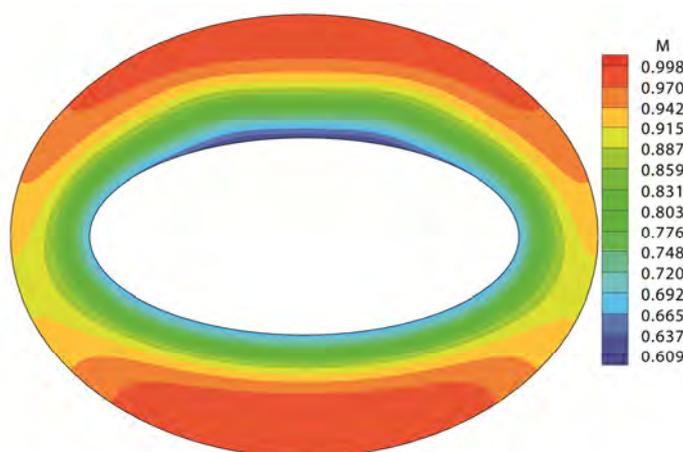
4.4.4.4. Les variations de la viscosité:

Les variations de la viscosité sont illustrées dans la **Figure 4.53** dans quatre positions axiales. La réduction de la viscosité est très importante. Les variations de la viscosité sont opposées qualitativement aux variations de la température mais qualitativement sont différentes. La valeur minimale de la viscosité égale à 0.471 est située à ( $\varepsilon = 0.5$  et  $\eta = \frac{\pi}{2}$ ,  $z^*=90.25$ ). La réduction de la viscosité est importante 52.9%. Dans le **Tableau 4.7**, nous présentons, à titre de comparaison, les niveaux de réduction de la viscosité des cas de notre étude.

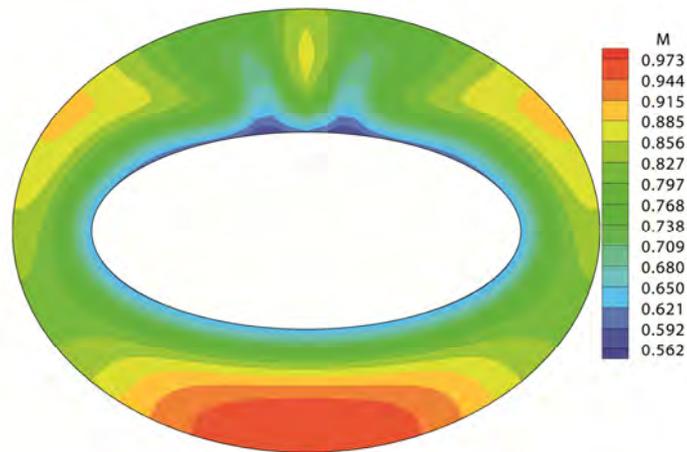
**Tableau 4.7** : Les valeurs et positions de la viscosité minimale.

Propriétés Variables	Position axiale	Position polaire	$\mu_{min}^*$
$q_w = 4172 W/m^2$	$z^* = 100$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909$ )	0.749
$q_w = 8344 W/m^2$	$z^* = 100$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909$ )	0.590
$q_w = 12516 W/m^2$	$z^* = 100$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909$ )	0.486
$Gr=5 \times 10^3$	$z^* = 100$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2$ )	0.731
$Gr= 10^4$	$z^* = 97.75$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2$ )	0.575
$Gr=1.5 \times 10^4$	$z^* = 90.25$	( $\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2$ )	0.471

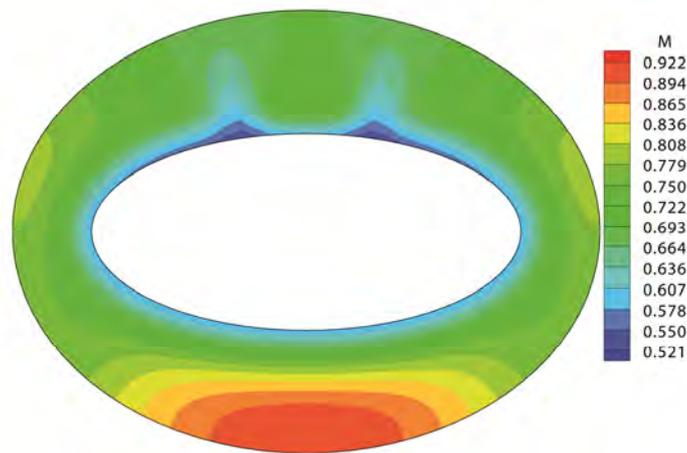
a)



b)



c)



d)

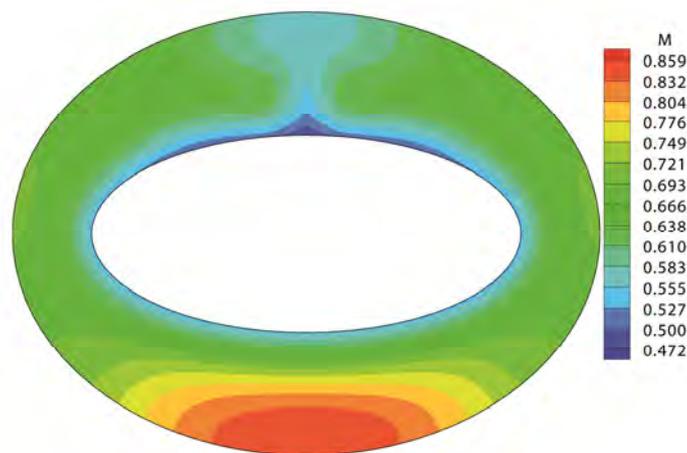


Figure. 4.53. Les variations de la viscosité

a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

4.4.4.5. Les variations de la conductivité :

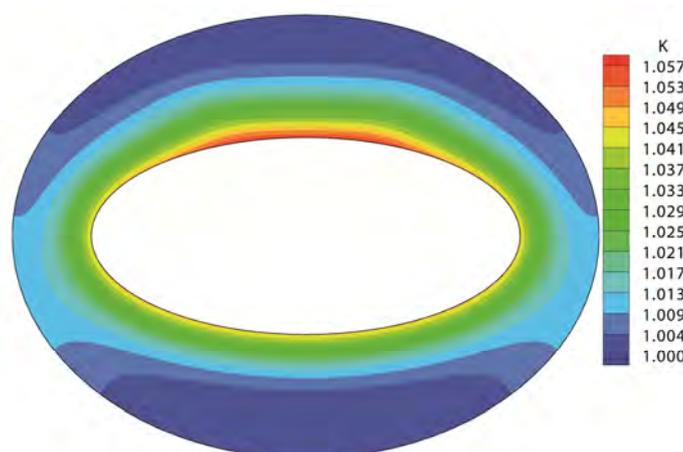
La Figure 4.54 montre les variations de la conductivité dans quatre stations axiales. Les variations de la conductivité sont qualitativement identiques à l'inverse des variations de la viscosité. La valeur maximale de la conductivité est située dans le même endroit où est située la viscosité minimale et prend la valeur 1.089. L'augmentation de la conductivité reste modeste (8.9% dans le point le plus chaud de l'écoulement) et donc l'effet de la conductivité sur l'amélioration de la conduction de chaleur est faible dans cette étude.

Dans le Tableau 4.8, nous présentons, à titre de comparaison, les niveaux de d'augmentation de la conductivité thermique des cas de notre étude.

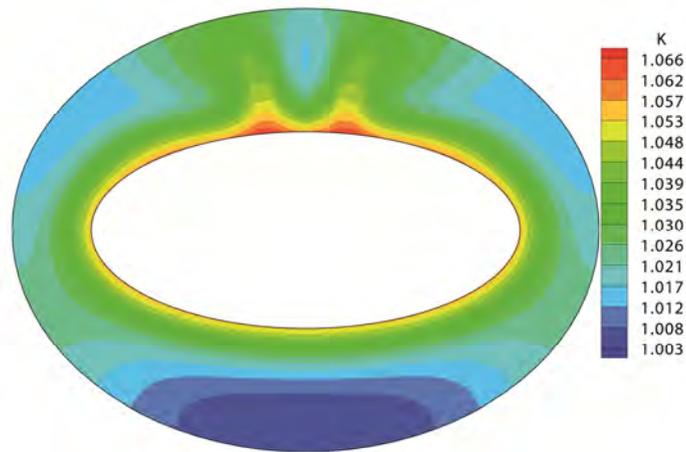
Tableau 4.8 : Les valeurs et position de la conductivité thermique maximale.

Propriétés Variables	Position axiale	Position polaire	$K_{max}^*$
$q_w = 4172 W/m^2$	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, (\eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515 \text{ et } \eta = 5.909))$	1.033
$q_w = 8344 W/m^2$	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909)$	1.061
$q_w = 12516 W/m^2$	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = 0.734, \eta = 2.767$ $\eta = 3.515, \eta = 5.909)$	1.083
$Gr=5 \times 10^3$	$z^* = 100$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	1.036
$Gr= 10^4$	$z^* = 97.75$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	1.064
$Gr=1.5 \times 10^4$	$z^* = 90.25$	$(\varepsilon = 0.5, \eta = \pi/2)$	1.089

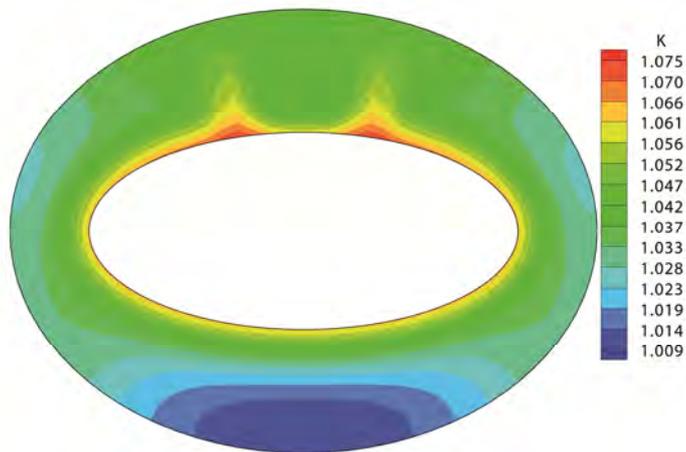
a)



b)



c)



d)

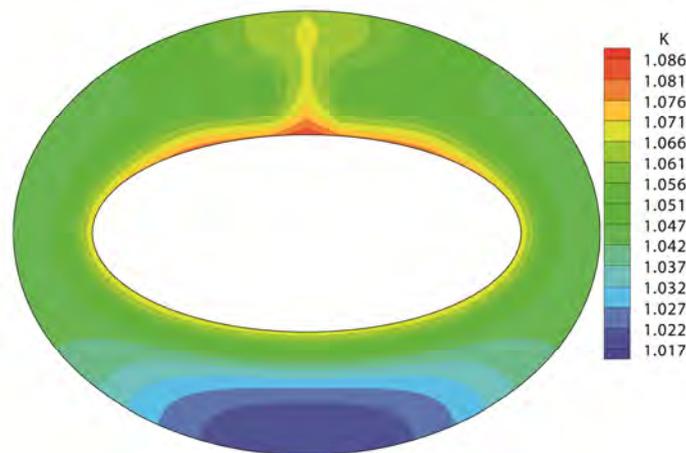


Figure. 4.54. Les variations de la conductivité  
 a)  $z^* = 25.25$ , b)  $z^* = 50.25$  c)  $z^* = 75.25$  et d)  $z^* = 100$

4.4.5. Les nombres du Nusselt axiaux et moyennes :

L'effet combiné des propriétés thermophysiques variables et la flottabilité améliorent considérablement le transfert thermique. Ceci est démontré par la comparaison des nombres de Nusselt locaux avec celui de la convection forcée avec des propriétés constantes. Cette comparaison est illustrée dans la **Figure 4.55**. La différence augmente de l'entrée à la sortie de l'espace annulaire et elle augmente également avec le nombre de Grashof. Le nombre de Nusselt axial est également plus élevé que celui de la convection mixte avec des propriétés constantes et beaucoup plus élevé que celui de la convection forcée à propriétés variables. Les nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit et les valeurs des nombres de Nusselt moyens des cas considérés sont présentés dans le **Tableau 4.9**.

**Tableau 4.9** Les nombres de Nusselt axiaux à la sortie du conduit  
et les nombres de Nusselt moyens

Propriétés Constantes	Nombre du Nusselt à la sortie du conduit	Nombre du Nusselt Moyenne
Convection Forcée	4.749	5.870
Gr = $5 \times 10^3$	5.166	6.080
Gr = $10^4$	6.244	6.522
Gr = $1.5 \times 10^4$	6.608	6.786
Propriétés Variables	Nombre du Nusselt à la sortie du conduit	Nombre du Nusselt Moyenne
Convection Forcée, $q_w = 4172 \text{ W/m}^2$	4.905	6.014
Convection Forcée, $q_w = 8344 \text{ W/m}^2$	5.034	6.139
Convection Forcée, $q_w = 12516 \text{ W/m}^2$	5.177	6.269
Gr = $5 \times 10^3$	6.164	6.457
Gr = $10^4$	6.843	6.935
Gr = $1.5 \times 10^4$	8.006	7.607

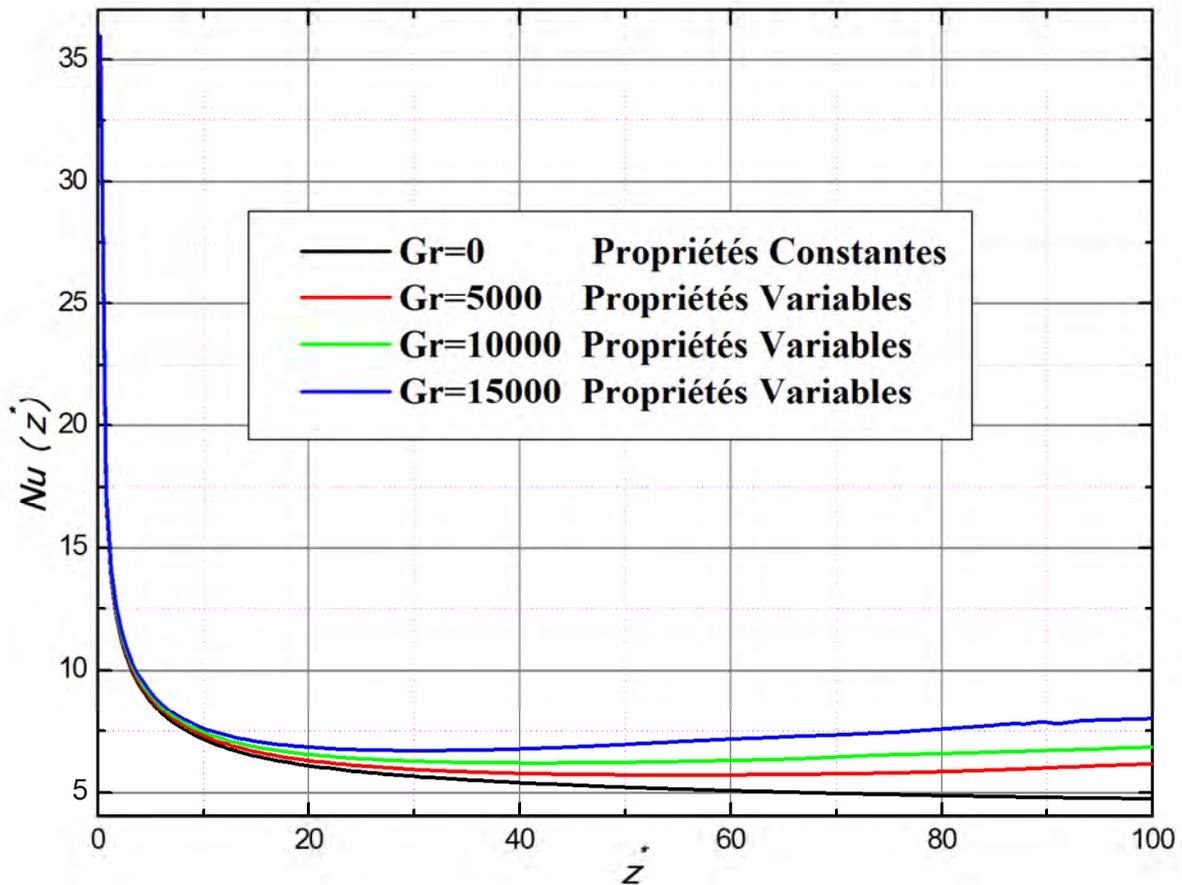


Figure. 4.55. Les variations axiales des nombreux Nusselt.

4.5. La chute de pression axiale:

La pression dans les équations de quantité de mouvement est la somme de la pression statique et de la pression hydrostatique. Lorsqu'elle est présente, la poussée thermique provoque la stratification horizontale de la pression (parallèle à l'axe elliptique majeur) sur une section transversale d'écoulement. La flottabilité thermique tend à augmenter légèrement la pression à partir du bas vers le haut de la section transversale. La variation de la pression dans une section transversale augmente axialement ainsi que l'effet de flottabilité. Pour obtenir une estimation de la chute de la pression axiale, il est utile de définir une pression moyenne de la section transversale comme suit :

$$P_m^*(z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} P^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \tag{4.11}$$

La chute de pression dans le conduit est :

$$\Delta P^* = P_m^*(0) - P_m^*(100) \tag{4.12}$$

La multiplication de l'équation de la quantité de mouvement axiale (équation (2.20)) par le volume différentiel  $h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta dz^*$  et son intégration entre les limites du domaine physique, en utilisant les conditions aux limites et les définitions dans les équations (4.11). et (4.12), l'expression suivante est obtenue:

$$\begin{aligned} \Delta P^* = & \frac{1}{S^*} \int_0^{2\pi} \int_{0.5}^1 [V_z^*(\varepsilon, \eta, 100)]^2 h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta - 1 \\ & + \frac{1}{ReS^*} \int_0^{100} \int_0^{2\pi} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} - \mu^* \frac{\partial V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=1} \right) d\eta dz^* \\ & + \frac{2}{ReS^*} \int_0^{2\pi} \int_{0.5}^1 \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*(\varepsilon, \eta, z^*)}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} \right) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \end{aligned} \quad (4.13)$$

De l'équation (4.11), il est clair que la perte de charge axiale est affectée par le niveau de la viscosité et la distribution spatiale de la vitesse axiale, qui sont dépendantes du niveau de chauffage. Les deux premiers termes sur le côté droit de l'équation (4.13), montrent l'effet de la différence des profils de la vitesse axiale entre l'entrée et la sortie du conduit. La deuxième intégrale est la contribution de la contrainte de cisaillement (des frottements) sur les parois de l'annulaire. Il s'agit de la principale composante de la chute de pression. La troisième intégrale représente la chute de pression due à la contrainte visqueuse axiale normale à l'entrée de l'espace annulaire. Cette composante est négligeable dans tous les cas étudiés.

#### 4.5.1. La chute de pression des cas des propriétés constantes :

Dans le cas de la convection forcée hydrodynamiquement développé, la chute de pression est:  $\Delta P^* = 37.538$ . Dans le cas de la convection mixte en développement, une très légère augmentation de la chute de la pression se produit par l'action de l'écoulement secondaire qui modifie le profil de vitesse axiale. Cette faible augmentation de la chute de pression est relativement plus élevée lorsque l'écoulement secondaire est renforcé par une augmentation du nombre de Grashof. Les chutes de pression sont :  $\Delta P^* = 37.540$ ,  $\Delta P^* = 37.557$  et  $\Delta P^* = 37.596$  pour les nombres de Grashof  $5 \times 10^3, 10^4$  and  $1.5 \times 10^4$  respectivement.

#### 4.5.2. La chute de pression pour les cas de la convection forcée et mixte avec des propriétés variables:

Dans le cas de la convection forcée, la réduction de la viscosité par le chauffage conduit à une diminution de la contrainte de cisaillement au niveau des parois annulaires (moins de frottements) et diminue la chute de pression significativement. Les chutes de pressions

sont :  $\Delta P^* = 34.256$ ,  $\Delta P^* = 31.593$  et  $\Delta P^* = 29.462$ , pour les niveaux de chauffages  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$ , respectivement. Pour la convection mixte, l'effet de la réduction de viscosité est le même que dans le cas de la convection forcée. Cependant, l'écoulement secondaire de flottabilité tend à augmenter la chute de pression par une très petite quantité. Par conséquent, la chute de pression de la convection mixte est légèrement supérieure à celui de la convection forcée, pour le même niveau de chauffage. Les chutes de pressions sont:  $\Delta P^* = 34.312$ ,  $\Delta P^* = 31.711$  et  $\Delta P^* = 29.626$ , pour les nombres de Grashof  $5 \times 10^3$ ,  $10^4$  et  $1.5 \times 10^4$ , respectivement.

**Chapitre V**

**Conclusion Générale**

Dans ce travail on a considéré un écoulement laminaire, visqueux et incompressible dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres elliptiques horizontaux. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé alors que le cylindre extérieur est adiabatique. Les deux cylindres sont considérés statiques. A l'entrée de l'espace annulaire, l'écoulement froid est axial et uniforme tandis qu'à la sortie, l'écoulement est considéré axialement développé. Les rayons elliptiques des cylindres intérieur et extérieur sont  $\varepsilon_i = 0.5$  et  $\varepsilon_e = 1$ , respectivement. La longueur des cylindres est égale à 100 fois la demi distance focale elliptique ( $a = 0,0045$  m). Le nombre de Reynolds est  $Re=100$ . Le fluide considéré dans cette simulation est l'eau ( $Pr=7$ ) et sa viscosité et sa conductivité thermique peuvent être considérées constantes, soit comme des fonctions variables de la température. L'approximation de Boussinesq est appliquée lorsqu'on tient compte la convection naturelle. Avec les propriétés constantes, on a considéré quatre cas, le cas de la convection forcée simulée avec un nombre de Grashof égal à zéro ( $Gr=0$ ) et les trois cas de la convection mixte avec les nombres de Grashof  $Gr=5000$ ,  $Gr=1000$  et  $Gr=15000$ . Avec les propriétés variables, on a considéré trois cas de la convection forcée avec les flux de chaleur  $q_w = 4172 \frac{W}{m^2}$ ,  $q_w = 8344 \frac{W}{m^2}$  et  $q_w = 12516 \frac{W}{m^2}$  ; et trois cas de la convection mixte avec les nombres de Grashof  $Gr=5000$ ,  $Gr=1000$  et  $Gr=15000$  correspondant aux trois flux de chaleur cités.

Ce problème physique est modélisé dans un repère cylindrique elliptique par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de la masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser le domaine physique et les équations de Navier-Stokes et de l'énergie. On a utilisé une discrétisation numérique spatio-temporelle du second ordre. La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation suit l'algorithme SIMPLER. Le maillage utilisé a 42 points suivant la direction radiale, 202 points suivant la direction axiale et 85 points suivant la direction azimutale. On a utilisé un pas de temps  $\Delta t = 5.10^{-4}$  pour les deux cas des propriétés constantes ( $Gr=0$  et  $Gr=5000$ ) et pour tous les autres cas, le pas de temps utilisé est  $\Delta t = 10^{-4}$ .

On a élaboré un code de calcul personnel, écrit en langage de Fortran. La validation des résultats numériques de notre code est faite par une reproduction précise de la solution analytique exacte de l'écoulement axial développé et du champ thermique développé de la convection forcée avec des propriétés constantes.

Les résultats des écoulements et des champs thermiques de la convection forcée avec des propriétés physiques constantes et variables et la convection mixte avec des propriétés physiques constantes et variables ont été présentés et comparés.

Nous avons trouvé que la convection mixte avec des propriétés physiques variables donne des écoulements et des champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée avec des propriétés variables et de ceux de convection mixte avec des propriétés constantes. Cette différence augmente avec le niveau du chauffage pariétal. On constate qu'avec des flux de chaleur relativement élevés, entraînant de larges variations de température, les résultats de la convection mixte avec des propriétés variables sont les plus réalistes.

Pour la convection mixte avec des propriétés physiques constantes, la flottabilité provoque une asymétrie qui augmente le niveau de la vitesse axiale dans l'espace annulaire de la partie inférieure de la section transversale, et augmente le niveau de la température dans l'espace annulaire de la partie supérieure de la section transversale.

Pour la convection mixte avec des propriétés physiques variables, l'effet combiné de la réduction de la viscosité et de la flottabilité conduit à une dissymétrie qui augmente le niveau de la vitesse axiale dans l'espace annulaire de la partie supérieure de la section transversale et qui modère le niveau de la température maximale dans la même partie.

Pour les paramètres de contrôle géométriques, dynamiques et thermiques considérés, la comparaison des nombres de Nusselt axiaux et moyens ont montré que, pour un même niveau de chauffage, le meilleur transfert de la chaleur est obtenu avec un écoulement de convection mixte avec des propriétés physiques variables.

Par ailleurs, la chute de pression axiale est faiblement augmentée par la flottabilité (qui induit l'écoulement secondaire), mais elle est considérablement réduite par la réduction de la viscosité surtout lorsque le niveau de chauffage est augmenté.

L'essentiel du travail de cette thèse est publié dans une publication intitulée : « **Forced and Mixed Convection in the Annulus between Two Horizontal Confocal Elliptical Cylinders** », dans le journal : **International Journal of Thermal Sciences**. Volume 74, Pages 126–144. Dec.2013.

Nos perspectives futures sont nombreuses; nous pensons à l'amélioration du transfert thermique par le remplissage de l'espace annulaire avec un milieu poreux et à l'étude de l'effet de l'inclinaison du conduit par rapport à l'horizontale sur le transfert thermique et la chute de pression axiale. Ces études peuvent être détaillées avec les variations des paramètres de contrôle géométriques, dynamiques et thermiques.

# Bibliographie

- [1] **E.C. Guyer and D.L. Brownell**, Handbook of Applied Thermal Design, Mc-Graw-Hill. Hamilton Printing Co. Castleton, N.Y, (1999).
- [2] **Y. D. Zhu, C. Shu, J. Qiu and J. Tani**, Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method, Int.J. Heat and Mass transfer, Vol.47, pp.797-808, (2004).
- [3] **J. P. B. Mota, I.A.A.C. Esteves, C.A.M. Portugal, J.M.S.S. Ensperança and E. Saatdjian**, Natural convection heat transfer in horizontal eccentric elliptic annuli containing saturated porous media, Int. J. Heat and Mass transfer, Vol.43, pp.4367-4379, (2000).
- [4] **W. Chmaisser, S.J. Suh and M. Daguinet**, Numerical study of the Boussinesq model of natural convection in an annular space: having a horizontal axis bounded by circular and elliptical isothermal cylinders, Journal of Applied Thermal Engineering, Vol.22, pp.1013-1025, (2002).
- [5] **D.E. Gilbert, R.W. Leary and H. Barrow**, Theoretical Analysis of Forced laminar convection Heat Transfer in The entrance Region of An Elliptic Duct, Int.J.Heat and Mass Transfer, Vol.16, pp. 1501-1503, (1973).
- [6] **R.M. Abd-Elwahed, A.E. Attia and M.A. Hifni**, Experiments on laminar flow and heat transfer in an elliptical duct, Int.J.Heat and Mass Transfer, Vol.27, pp. 2397-2413, (1984).
- [7] **V.D. Sakalis, P.M. Hatzikonstantinou and N. Kafousias**, Thermally developing flow in elliptic ducts with axially variable wall temperature distribution, Int.J. Heat and Mass Transfer, Vol.45, pp.25-35, (2002).
- [8] **K. Velusamy and V. K.Garg**, Laminar mixed convection in vertical elliptic ducts, Int.J. Heat and Mass Transfer, Vol.39, pp.745-752, (1996).

- [9] **H.C. Topakoglu and O.A. Arnas**, Convective heat transfer for steady laminar flow between two confocal elliptic pipes with longitudinal uniform wall temperature gradient, *Int.J. Heat and Mass Transfer*, Vol.17, pp.1487-1498, (1974).
- [10] **O.A. Arnas and M.A. Ebadian**, Convective heat transfer for steady laminar flow between two confocal elliptic pipes with longitudinal uniform wall temperature gradient and uniform heat generation, *Int.J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.657-659, (1988).
- [11] **A.O. Niecele and S.V. Patankar**, Laminar mixed convection in concentric annulus with horizontal axis, *J. Heat Transfer*, Vol.107, pp.902–909, (1985).
- [12] **M.A. Habib and A.A.A. Negm**, Laminar mixed convection in horizontal concentric annuli with non-uniform circumferential heating, *J.Heat and Mass Transfer*, Vol.37, pp427–435, (2001).
- [13] **N. Islam, U.N. Gaitonde and G.K. Sharma**, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.44 , pp.2107–2120, (2001).
- [14] **A. Mojtabi et J.P. Caltagirone**, Analyse du transfert de chaleur en convection mixte laminaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.23, pp.1369–1375, (1980).
- [15] **O. Terhmina et A. Mojtabi**, Écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.583-590, (1988).
- [16] **C. Nouar**, Numerical solution for laminar mixed convection in a horizontal annular duct: temperature-dependent viscosity effect, *Int. J. For Numerical Methods In Fluids*, Vol. 29, pp.849-864, (1999).
- [17] **M. Kaviany**, Laminar combined convection in a horizontal annulus subject to constant heat flux inner wall and adiabatic outer wall, *J. Heat Transfer*, Vol.108, pp.392–397, (1986).
- [18] **E. Zanchini**, Mixed convection with variable viscosity in a vertical annulus with uniform wall temperatures, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.51, pp.30–40, (2008).
- [19] **H.A. Mohammed , A. Campo and R. Saidur**, Experimental study of forced and free convective heat transfer in the thermal entry region of horizontal concentric annuli, *Int. Communications in Heat and Mass transfer*, Vol.37, pp.739-747, (2010).

- [20] **L. M. Jiji**, Heat convection, 2<sup>nd</sup> Ed. Springer, (2009).
- [21] **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New-York, (1980).
- [22] **Frank P.Incopera et David PDeWitt**, Introduction to heat transfer,Third Edition, JOHN WILLY&SONS.INC, (1996).

# **The Effect Of Thermophysical Properties Variables On Mixed Convection In Annular Space Between Two Horizontal Elliptic Cylinders**

## **Abstract**

This study presents a numerical simulation of the three dimensional laminar mixed convection between two elliptical horizontal cylinders using temperature dependent physical properties. The inner cylinder is uniformly heated whereas the outer cylinder is adiabatic. The flow and thermal fields are modeled by the continuity, momentum and energy equations with appropriate initial and boundary conditions using an elliptical coordinate system. The model equations are numerically solved by a finite volume numerical method with second order accurate spatiotemporal discretizations. For the considered geometric, dynamic and thermal controlling parameters, it is found that the realistic consideration of the mixed convection with variable physical properties gives physically sound flows and thermal fields that are qualitatively and quantitatively different from those of forced convection with temperature dependent properties and those of mixed convection with constant properties; the obtained Nusselt number is also higher in this case. The heat transfer enhancement obtained by considering natural convection within mixed convection with temperature dependent physical properties increases with the increased Grashof number which is proportional to the heat flux imposed at the surface of the inner cylinder.

**Keywords: Mixed convection, Temperature dependent properties, Elliptic confocal cylinders, Finite volume method.**

## تأثير الخواص الفيزيائية المتعلقة بدرجة الحرارة على الحمل الحراري المختلط في

### الفضاء الحلقي بين أسطوانتين إهليجيتين أفقيتين

#### ملخص

تقدم هذه الدراسة محاكاة عددية ثلاثية البعد لجريان رقائقي للحمل الحراري المختلط بين اسطوانتين أفقيتين إهليجيتين الشكل مع تعلق الخواص الفيزيائية بدرجة الحرارة. الأسطوانة الداخلية مسخنة بشكل منتظم في حين الأسطوانة الخارجية كاذمة. الجريان و الحقل الحراري عُبر عنه بواسطة معادلة الاستمرارية ، معادلات كمية الحركة ومعادلة الطاقة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية و الحدية المناسبة باستخدام نظام الإحداثيات الإهليجي. تم حل المعادلات باستعمال طريقة الحجوم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية في الفضاء و الزمن. من أجل المظاهر الهندسية ، الديناميكية و الحرارية التي هي معايير التحكم. وجد أنه إعتبار واقعية الحمل الحراري المختلط مع الخصائص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة يعطي معنى فيزيائي للجريان و الحقل الحراري والذي هو كميًا ونوعيًا مختلف عن أولئك من الحمل القصري مع الخواص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة و أولئك من الحمل الحراري المختلط مع خواص فيزيائية ثابتة وعدد نوسلت هو كذلك أكبر في هذه الحالة. التحسين في نقل الحرارة تم الحصول عليه باعتبار الحمل الحراري الطبيعي و الحمل الحراري المختلط مع الخواص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة و الذي يزيد بزيادة العدد غراشوف الذي يتناسب مع تدفق الحرارة المطبق على سطح الأسطوانة الداخلية.

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري المختلط، الخواص الفيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة ،أسطوانات متحدة

البؤر إهليجية الشكل ، طريقة الحجوم المنتهية.

## Résumé

Cette étude présente une simulation numérique en trois dimensions d'un écoulement laminaire de la convection mixte entre deux cylindres elliptiques horizontaux avec des propriétés physiques dépendant de la température. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé tandis que le cylindre extérieur est adiabatique. L'écoulement et les champs thermiques sont modélisés par l'équation de continuité, les trois équations de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie avec des conditions initiales et aux limites appropriées en utilisant un système de coordonnées elliptiques. Les équations du modèle sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. Pour une géométrie considérée, des paramètres de contrôle dynamiques et thermiques, il est constaté qu'en réalité la prise en compte de la convection mixte avec des propriétés physiques variables donne un sens physique sur l'écoulement et les champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée avec des propriétés dépendantes de la température et les cas de la convection mixte avec des propriétés constantes, le nombre de Nusselt obtenu est également plus élevé dans ce cas. L'amélioration du transfert de chaleur obtenue en considérant la convection naturelle au sein de la convection mixte avec des propriétés physiques dépendant de la température augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof qui est proportionnel au flux thermique imposé à la surface du cylindre intérieur.

**Mots clé : Convection mixte, Propriétés dépendent de la température, cylindres elliptiques confocaux, la méthode des volumes finis.**