

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:

Série:

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES EN
PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

PAR

ZAIMEN NOUREDDINE

THEME

TEMPS DE RETARD DANS LE CADRE DU MODELE DE KOTTLER ET APPLICATIONS
D'UNE BORNE INFERIEURE OPTIMISEE POUR L'ENERGIE A DES SYSTEMES
HADRONIQUES

Soutenu le: 02/02/2012

Devant le jury :

<u>Président:</u>	F.BENAMIRA	Prof.	Université Mentouri-Constantine
<u>Rapporteur:</u>	S.R.ZOUZOU	Prof.	Université Mentouri-Constantine
<u>CoRapporteur:</u>	Th. SCHÜCKER	Prof.	Université de Provence, France
<u>Examineurs:</u>	L.GUECHI	Prof.	Université Mentouri-Constantine
	S.HASSANI	D.R.	Centre de Recherche Nucléaire d'Alger
	N.ZENINE	D.R.	Centre de Recherche Nucléaire d'Alger

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon Directeur de Thèse M. Sami Ryad Zouzou, Professeur à l'Université Mentouri- Constantine, d'avoir assuré la direction de mon travail de recherche. Son encadrement, Ses conseils, ses remarques, son assistance, et les aides de toute sorte qu'il m'a apporté ont permis l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à témoigner de ma profonde gratitude à mon Co-Directeur de Thèse M. Thomas Schücker, Professeur à l'Université de Provence, de m'avoir accueilli au Centre de Physique Théorique de Marseille et de m'avoir offert l'opportunité de travailler avec lui. Je lui suis reconnaissant pour sa gentillesse, sa disponibilité, son encadrement et tous les moyens qu'il a mis à ma disposition.

J'exprime mes vifs remerciements aux membres du jury : à M. Farid Benamira, Professeur à l'Université Mentouri- Constantine, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse et pour toute l'aide qu'il m'a apporté , à messieurs, Larbi Guechi, Professeur à l'Université Mentouri- Constantine, Saoud Hassani et Nadjah Zenine, Directeurs de Recherche au C.N.R.A., de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury de cette thèse.

Table des matières

Introduction	3
1 Relativité générale	7
1.1 Introduction	7
1.2 Le Principe d'équivalence	8
1.3 Cadre mathématique de la relativité générale	10
1.3.1 Introduction	10
1.3.2 Tenseurs	11
1.4 Connexion affine ou symboles de Christoffel	18
1.5 Dérivation covariante d'un tenseur	19
1.6 Le tenseur de courbure	22
1.6.1 Propriétés du tenseur de courbure	24
1.7 Equation des géodésiques et équations d'Einstein	28
1.7.1 Equation des géodésiques	28
1.7.2 Equations d'Einstein	30
1.8 Métriques de Schwarzschild et de Schwarzschild-de Sitter	34
1.8.1 Introduction	34
1.8.2 Métrique de Schwarzschild	34
1.8.3 Métrique de Schwarzschild-de Sitter	39
2 Application à l'effet de lentille gravitationnelle en présence d'une constante cosmologique	43
2.1 Déviation de la lumière	43
2.1.1 Introduction	43
2.1.2 Hypothèses et géométrie du phénomène	45
2.1.3 Intégration des géodésiques	46
2.2 Temps de retard	64
2.2.1 Introduction	64
2.2.2 Intégration des géodésiques	66

2.3	Le quasar-source SDSS J1004+4112	74
3	Les systèmes à petit nombre de corps	80
3.1	Borne inférieure optimisée	80
3.2	Développement systématique sur des Gaussiennes corrélées	83
3.2.1	La méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées	83
3.3	Energie de l'état fondamental d'un baryon	91
3.3.1	Borne inférieure optimisée pour l'énergie de l'état fondamental d'un baryon	91
3.3.2	Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un baryon	95
3.4	Energie de l'état fondamental d'un système tétraquark	104
3.4.1	Borne inférieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système tétraquark	104
3.4.2	Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système tétraquark	109
3.5	Energie de l'état fondamental d'un système pentaquark	124
3.5.1	Borne inférieure pour l'énergie d'un système pentaquark	124
3.5.2	Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système pentaquark	126
4	Application à la spectroscopie hadronique	136
4.1	Introduction	136
4.2	Le modèle	138
4.2.1	Facteurs de couleur	140
4.3	Résultats numériques	141
	Conclusion générale	148
	Bibliographie	152

Introduction

Cette thèse regroupe deux ensembles de travaux bien distincts. Le premier ensemble, situé dans le domaine de la cosmologie relativiste, a trait à la déviation de la lumière par une lentille gravitationnelle. Le deuxième ensemble de travaux, qui s'inscrit dans le cadre des systèmes à petit nombre de corps, s'intéresse à l'application d'une borne inférieure pour l'énergie, dite borne inférieure optimisée, à la spectroscopie hadronique.

La déviation de la lumière par une lentille gravitationnelle dans le cas où celle-ci donne naissance à des images multiples d'une source d'arrière plan, est devenue un outil important pour l'étude des grandes structures existant dans l'univers. Grâce à ce phénomène, on a obtenu de nombreuses informations sur l'univers lointain, informations difficiles à obtenir par un autre moyen. La déviation des rayons lumineux constitue l'une des premières prédictions de la relativité générale. Cette dernière prévoit que des perturbations locales de la courbure sont engendrées par la présence de matière, telle qu'une étoile, une galaxie ou un amas de galaxies. Suivant la théorie de la relativité générale d'Einstein, la lumière émise par une source (une étoile ou un quasar) est déviée lors de son passage au voisinage de la distribution de masse d'une galaxie ou d'un amas de galaxies, qui agit comme une sorte de lentille, et est appelée pour cette raison lentille gravitationnelle. On distingue plusieurs types d'effets de lentilles gravitationnelles. Ici, on s'intéresse à l'effet de lentille gravitationnelle fort, où l'amas de galaxies donne naissance à plusieurs images de la même source. En outre, les rayons lumineux correspondant aux différentes images, mettent des temps différents pour nous parvenir. C'est le phénomène du temps de retard. En plus de la multiplication des images de la source, la lentille gravitationnelle va également concentrer la lumière de celle-ci et donc produire des images bien plus brillantes que ne l'est la source elle-même. Cet effet peut s'avérer très utile lorsque l'on observe des corps très peu lumineux. En 1936, Einstein a découvert les caractéristiques principales des lentilles gravitationnelles dans le cas des étoiles et a montré que si l'observateur, la lentille et la source sont alignés, la lumière provenant de la source est déviée d'une manière symétrique formant une image sous forme d'anneau, appelé aujourd'hui anneau d'Einstein. L'inventeur de la relativité générale était sceptique quant à la possibilité d'observer le phénomène de lentille à partir des étoiles. Zwicky, en 1937, a considéré de plus près le cas où les galaxies

tiennent lieu de lentilles gravitationnelles. Il a conclu qu'il y'a une très grande probabilité d'observer plusieurs images de la source, vu l'importance des masses mises en jeu. Zwicky a proposé d'utiliser ces structures cosmologiques comme des télescopes astronomiques pour la découverte des distributions de masse de l'univers lointain. L'observation de ce phénomène n'a été faite que 42 ans après la prédiction de Zwicky. En 1979, Walsh et al détectèrent deux images d'un même quasar, formées par une galaxie d'avant plan. Depuis cette époque, des dizaines d'images multiples de quasars ont été découvertes, avec deux, trois, ou davantage de composantes. Notons que le nombre total d'images de la source et leurs formes sont déterminés par la forme de la galaxie et la précision de l'alignement.

Lorsqu'on observe différentes images d'une même source, on a non seulement accès aux caractéristiques de la source à des temps différents, mais, en outre, on sonde une portion non négligeable de l'univers grâce aux différentes trajectoires des photons émis par la source. A partir des images correspondant à la source, les chercheurs obtiennent de précieux renseignements sur la forme et la masse de la lentille. Cet outil puissant permet de déterminer la masse de la lentille, notamment quand il s'agit d'un amas de galaxies, pouvant contenir une quantité importante de masse cachée. Ceci d'une part. D'autre part, le temps de retard entre les différentes images de la source peut être exploité pour la détermination des distances qui nous séparent des grandes structures de l'univers, de la courbure de l'espace-temps, de la constante cosmologique Λ , de la fameuse constante de Hubble H_0 , etc...Rappelons que la loi de Hubble, sous sa forme la plus simple, nous dit que la vitesse d'éloignement d'une galaxie est proportionnelle à cette constante : $V = H_0 D$, où D est la distance qui nous sépare de cette galaxie. Les observateurs déterminent la vitesse grâce à la mesure précise du redshift, le décalage spectral vers le rouge, affectant les raies émises par la source qui s'éloigne. La distance D est difficilement estimée à partir d'indicateurs, par exemple les céphéides et les supernovae. L'étude des lentilles gravitationnelles fournit ainsi un nouveau moyen d'accéder à la distance D et de déterminer ainsi la constante de Hubble.

De nombreux résultats de travaux cosmologiques de ces dernières années montrent que la constante cosmologique, qui a été rajoutée par Einstein en février 1917 à ses équations de la relativité générale, est le candidat favori pour la mystérieuse énergie noire, qui expliquerait l'expansion accélérée de l'Univers. Cette accélération a été mise en évidence par des mesures observationnelles récentes sur les supernovae IA. Ces mesures sont compatibles avec une constante cosmologique non nulle. Pendant longtemps, l'avis général était que la déviation de la lumière par une masse sphérique isolée est indépendante de la constante cosmologique. La raison étant que dans le cadre de la métrique de Kottler (Schwarzschild-de Sitter), qui fournit le cadre approprié de l'étude théorique, la constante cosmologique disparaît accidentellement de l'équation régissant la variation de la déviation du photon avec sa distance à la distribution de masse. Cet avis a prévalu jusqu'aux travaux de Rindler et Ishak [1], qui ont montré qu'il ne suffit pas de considérer les équations de la géodésique, mais qu'il faut également tenir compte de la métrique elle-même, qui

détermine les observations qui peuvent être effectivement faites. Rindler et Ishak ont alors conclu à la dépendance de la déviation de la lumière vis à vis de la constante cosmologique. Notre objectif dans cette thèse est de déterminer cette dépendance aussi bien pour l'angle de déviation que pour le temps de retard. Dans un premier temps, nous donnons la démonstration détaillée de la dépendance de l'angle de déviation pour un banc optique cosmologique composé d'une source très lointaine en arrière plan, d'une lentille gravitationnelle en avant plan supposée statique et à symétrie sphérique et d'un observateur, en la constante cosmologique. Dans une deuxième étape, nous dériverons une expression analytique du temps de retard en fonction de la constante cosmologique.

Le deuxième ensemble de travaux exposé dans cette thèse a trait aux applications d'une borne inférieure, appelée borne inférieure optimisée, pour l'énergie de l'état fondamental d'un Hamiltonien à N corps. Les conditions de validité de la borne inférieure optimisée sont un Hamiltonien régi par une cinématique non relativiste avec des interactions à deux corps invariantes par translation. La borne inférieure optimisée peut s'appliquer à des domaines aussi divers que la physique atomique et moléculaire, la physique du solide, la physique nucléaire, la physique des particules... dès que les conditions citées ci-dessus sont réunies. Ici, nous avons choisi d'appliquer cette borne inférieure optimisée aux états liés des interactions fortes, ou hadrons, dans le cadre des modèles de potentiel. Les applications concernent aussi bien des baryons, systèmes formés de trois quarks, dits aussi hadrons ordinaires que des systèmes multiquarks, systèmes formés de plus de trois quarks et/ou antiquarks, appelés aussi hadrons exotiques. Concernant les multiquarks, nous en considérons deux types : les tétraquarks, formés de deux quarks et de deux antiquarks, et les pentaquarks formés de quatre quarks et d'un antiquark ou d'un quark et de quatre antiquarks. Faisons un petit tour d'horizon des systèmes à petit nombre de corps, afin de bien comprendre l'importance et l'utilité de borne inférieure optimisée. Les systèmes à N corps (systèmes à petit nombre de corps) sont régis par une équation de Schrödinger à N corps, qui est extrêmement difficile à résoudre exactement. Déjà, l'équation de Schrödinger à 1 corps avec un potentiel central, ou, ce qui revient au même après élimination du mouvement du centre de masse, l'équation de Schrödinger à 2 corps avec un potentiel invariant par rotation et par translation, ne sont résolubles exactement que pour des formes très particulières du potentiel. Devant cet état de fait, deux approches ont été adoptées :

- La mise au point de méthodes de résolution approchée de l'équation de Schrödinger à N corps, dont la méthode de Faddeev (pour le cas à trois corps) ou Faddeev-Yakubovsky (pour le cas à quatre corps et plus), la méthode de développement sur les harmoniques hypersphériques, qui est une méthode d'essence variationnelle, la méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées qui est également une méthode d'essence variationnelle... Pour atteindre un haut degré de précision, ces méthodes demandent des moyens de calcul numériques gigantesques, qui sont hors de notre portée.

- La dérivation de résultats exacts, dont des exemples importants sont les différentes bornes inférieures pour l'énergie de l'état fondamental d'un système à N corps : borne

naïve, borne inférieure améliorée, ancienne borne inférieure optimisée et nouvelle borne inférieure optimisée (baptisée dans la suite de cette thèse borne inférieure optimisée). Contrairement à la première approche, les ressources numériques exigées sont tout à fait raisonnables. Ceci met en lumière l'importance de cette approche et en particulier celle de la borne inférieure optimisée. Bien sûr les deux approches ci-dessus exposées peuvent être combinées. Pour chaque système considéré dans cette thèse, nous avons déterminé la borne inférieure optimisée, qui nous fournit une borne inférieure pour l'énergie de l'état fondamental du système, et nous avons choisi d'utiliser le développement systématique sur des Gaussiennes corrélées pour obtenir une borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental du système. Nous obtenons de cette manière un encadrement de l'énergie de l'état fondamental pour chacun des systèmes considérés.

La thèse est organisée comme suit :

Le manuscrit commence par une introduction générale. Le chapitre 1 est une introduction à la relativité générale donnant les notions de base dont nous aurons besoin au cours de la première partie de cet thèse. Au chapitre 2, nous dérivons d'abord la métrique de Schwarzschild, métrique correspondant au cas statique et sphérique en l'absence de constante cosmologique, puis, dans une deuxième étape, la métrique de Schwarzschild-de Sitter, ou métrique de Kottler, métrique correspondant au cas statique et sphérique, mais en présence d'une constante cosmologique. En utilisant la métrique de Kottler nous étudions deux effets de lentille gravitationnelle, à savoir la déviation de la lumière et le temps de retard. Dans le premier cas, nous donnerons la démonstration détaillée de la dépendance de l'angle de déviation en la constante cosmologique et, dans le deuxième cas, nous dériverons l'expression du temps de retard en fonction de la constante cosmologique. Ceci d'une part. D'autre part, nous appliquerons les résultats obtenus pour l'angle de déviation et le temps de retard à l'exemple du quasar-source SDSS J1004+4112 et nous déduirons la plage de variation de la constante cosmologique Λ . Dans le chapitre 3, nous nous pencherons sur les systèmes à petit nombre de corps et nous introduirons quelques notions de base portant sur la borne inférieure optimisée et sur la méthode de développement systématique sur des gaussiennes corrélées. Le chapitre 4 est consacré à l'application de la borne inférieure optimisée et au développement systématique sur des gaussiennes corrélées à la spectroscopie hadronique : baryons, tetraquarks et pentaquarks. Le manuscrit se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Relativité générale

1.1 Introduction

La force gravitationnelle est l'une des quatre forces existantes dans la nature. La force gravitationnelle est la plus faible des quatre aux échelles microscopiques, mais elle est la force dominante qui gouverne la structure de l'univers à grande échelle. Plusieurs théories ont tenté de rendre compte de la gravitation. Actuellement, la théorie de la relativité générale, élaborée par Einstein durant la période 1907-1915, rend compte parfaitement de toutes les observations faites aussi bien en astronomie qu'en cosmologie. Elle est à la base de notre compréhension actuelle du big-bang, des trous noirs, des ondes gravitationnelles et de l'évolution de l'univers lui-même. Avant Einstein, la théorie Newtonienne postulait le découplage temps-espace et que la force gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle M_2 sur une autre masse ponctuelle M_1 était proportionnelle au produit des deux masses divisé par le carré de la distance r qui les sépare et est dirigée de la masse M_1 vers la masse M_2 ,

$$\vec{F} = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{U}_r, \quad (1.1)$$

avec

$$G = 6.67259(85) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, \quad (1.2)$$

et

$$\vec{U}_r := \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.3)$$

où \vec{r} est le rayon vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

D'après la mécanique de Newton, où l'espace et le temps sont parfaitement découplés (le temps est universel) et où le groupe d'invariance des équations de Newton est le groupe de Galilée, les effets de la force gravitationnelle se font sentir instantanément dans tout

l'espace. La mécanique newtonienne remporta des succès immenses et était en accord parfait avec l'expérience, à part quelques exceptions notées en astronomie comme la déviation de la lumière et le périhélie de mercure. A côté de cette théorie, il y'avait une autre théorie qui était en accord parfait avec l'expérience, à savoir la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell où l'espace et le temps étaient couplés et où le groupe d'invariance des équations de Maxwell est le groupe de Lorentz. La notion de point d'espace \vec{r} en un instant donné t était remplacée par la notion d'événement d'espace-temps (t, \vec{r}) . En d'autres termes, la géométrie de Minkowski prit la place de la géométrie d'Euclide. Une conséquence de l'invariance sous le groupe de Lorentz est que la vitesse des signaux ne peut excéder une certaine vitesse c , vitesse de la lumière. Donc on était en face de la situation suivante : Une physique fragmentée en deux théories, toutes deux en accord avec l'expérience, la mécanique basé sur le principe d'invariance de Galilée et l'électromagnétisme basé sur le principe d'invariance de Lorentz. Cette situation n'était guère satisfaisante du point de vu de l'unité de la physique, ce qui amena les physiciens à essayer de concilier les deux théories et aboutit à la théorie de la relativité restreinte, inventée par Einstein en 1905. Einstein modifia les lois de la mécanique pour les rendre conformes à l'invariance sous le groupe de Lorentz, la mécanique de Newton apparaissant alors comme un cas limite de la nouvelle théorie dans la limite des faibles vitesses. Rien depuis lors ne remet en cause la théorie de la relativité restreinte, qui fournit, entre autres, le cadre des théories des champs relativistes classique et quantique. L'étape suivante pour Einstein fut la quête d'une nouvelle théorie de la gravitation. Einstein construisit cette théorie en plusieurs étapes : Einstein commença d'abord par introduire le principe d'équivalence qui stipule l'égalité des masses gravitationnelle et inertielle, confirmé par la suite expérimentalement avec des précisions de plus en plus grandes atteignant la précision immense de 10^{-11} avec l'expérience de Dick en 1965. L'étape suivante fut l'identification par Einstein du champ de gravitation avec le tenseur métrique d'une variété riemannienne à 4 dimensions. Autrement dit, la gravitation est codée dans le tenseur métrique. L'étape finale fut l'établissement par Einstein des équations du champ de gravitation en exigeant l'invariance de celles-ci non pas seulement sous les transformations de Lorentz, mais sous toute transformation de coordonnées (invariance sous les transformations générales de coordonnées). En élaborant cette théorie, Einstein a révolutionné encore plus le concept d'espace-temps et en a fait, en particulier, une entité dynamique à part entière. L'espace-temps n'est plus seulement la scène où se déroulent les phénomènes de la nature mais l'espace-temps lui même entre en scène.

1.2 Le Principe d'équivalence

Le point de départ de la relativité générale est le principe d'équivalence qui postule l'égalité entre les masses gravitationnelle, qui entre dans la loi universelle de la gravitation

de Newton, (1.1), et inertielle, qui entre dans la relation fondamentale de la dynamique,

$$\vec{F}' = m \vec{a}, \quad (1.4)$$

où \vec{a} représente l'accélération de la particule.

Le principe d'équivalence est basé sur l'observation que les corps en chute libre, avec les mêmes conditions initiales ont le même mouvement, indépendamment de leurs masses et de leurs constitutions. Il en résulte d'après la loi de la dynamique que

$$M_I \vec{a} = M_g \vec{g},$$

où \vec{a} est l'accélération, \vec{g} le champ de gravitation et M_I et M_g sont respectivement les masses inertielle et gravitationnelle, l'égalité de ces deux dernières, impliquant que

$$\frac{M_I}{M_g} = \frac{g}{a} = 1. \quad (1.5)$$

L'égalité (1.5) constitue le principe d'équivalence faible. D'après la relation (1.5), tous les corps, quelque soit leur nature et leur masse, tombant en chute libre dans le champ de gravitation de la terre ont la même accélération. Ceci nous permet de dire que la chute libre des corps est indépendante de leurs masses et compositions, donc qu'elle est universelle. L'égalité (1.5) a été vérifiée expérimentalement par Galilée et Newton avec une précision qui depuis lors a été améliorée d'un facteur 10^3 . Les tests expérimentaux les plus récents ont montré que le coefficient de proportionnalité entre M_I et M_g est égal à 1, avec une précision supérieure à 10^{-12} . Bien que ce principe soit connu depuis longtemps, Einstein aura été le premier physicien à oser présenter cette identité numérique comme une équivalence entre le champ de gravitation et une accélération. Pour clarifier ce point, considérons un système de N particules interagissant par des forces à deux corps $F_{(ij)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ et plongé dans un champ de gravitation statique et homogène \vec{g} . Dans un référentiel galiléen, les équations de Newton s'écrivent comme

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = m_i \vec{g} + \sum_{j \neq i=1}^N \vec{F}_{(ij)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j). \quad (1.6)$$

Plaçons-nous maintenant dans un référentiel non galiléen en chute libre par rapport au référentiel galiléen, tel que

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \\ t' = t. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans ce référentiel, les équations précédentes (1.6) prennent alors la forme

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt'^2} = \sum_{j \neq i=1}^N \vec{F}_{(ij)}(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j), \quad (1.8)$$

où le champ gravitationnel statique et homogène \vec{g} a complètement disparu. Donc, pour l'observateur dans le référentiel galiléen de départ le champ de gravitation est présent tandis qu'il est absent pour l'observateur dans le référentiel accéléré. Autrement dit, l'observateur en chute libre est incapable de mettre en évidence la présence du champ gravitationnel extérieur. On peut donc éliminer le champ gravitationnel par une accélération, ce qui revient à dire qu'un champ gravitationnel est équivalent à une accélération. En d'autres termes, on peut toujours par un choix approprié des coordonnées éliminer le champ de gravitation. Cependant, on ne peut pas éliminer le champ de gravitation pour un champ gravitationnel qui n'est ni statique et/ou ni homogène. Mais, il est toujours possible d'éliminer le champ de gravitation localement en un point et au voisinage immédiat de ce dernier. Autrement dit, il est toujours possible de définir en tout point d'espace-temps un référentiel localement inertiel en chute libre dans lequel les lois de la mécanique puissent être formulées comme en l'absence de champ gravitationnel. C'est le principe d'équivalence d'Einstein. Ce principe est ensuite étendu au principe d'équivalence fort ou généralisé qui stipule qu'on peut toujours choisir en tout point d'espace-temps dans un champ de gravitation arbitraire, un système de coordonnées localement inertiel, tel que les lois de la physique, gravitationnelles ou non, dans une région suffisamment petite autour du point en question prennent la même forme qu'en relativité restreinte. Le principe d'équivalence fort impose donc une forme covariante pour les lois de la physique.

1.3 Cadre mathématique de la relativité générale

1.3.1 Introduction

L'application du principe d'équivalence a une conséquence directe sur la géométrie de l'univers. Un exemple couramment utilisé qui illustre ce point est le passage d'un rayon lumineux traversant les parois d'un ascenseur en chute libre dans un champ de gravitation. Puisque gravitation et accélération sont équivalentes, il suffira pour cela d'imaginer ce qui se passe dans ce référentiel accéléré. Il est clair que dans un tel référentiel le rayon lumineux va décrire une courbe. Ceci implique que l'espace temps est courbe car la trajectoire d'un rayon lumineux dans un espace plat est une droite. Autrement dit, le champ gravitationnel courbe l'espace-temps et la description de la gravitation requiert de passer d'un espace plat à un espace courbe. Ceci nous permet de dire que c'est la masse qui impose la géométrie de l'univers. Dans la théorie d'Einstein, la gravité n'est qu'une manifestation de la géométrie de l'espace-temps. Plusieurs tests ont confirmé ce résultat théorique. Citons, à titre d'exemple, le phénomène de la déviation de la lumière par le soleil, les galaxies ou amas de galaxies, le redshift gravitationnel et l'effet Shapiro ou le temps de retard. Tous ces résultats expérimentaux ont rendu cette théorie célèbre et son inventeur un génie de tous les temps.

1.3.2 Tenseurs

Le cadre approprié pour décrire la gravité est la géométrie riemannienne. Autrement dit, l'espace-temps est représenté par une variété de Riemann à quatre dimensions. Si on fait le choix d'un système général de coordonnées, un point M de la variété sera caractérisé par ses coordonnées $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Sous un changement de coordonnées,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x), \quad (1.9)$$

la différentielle dx^μ se transforme de la manière suivante

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (1.10)$$

Par définition un vecteur covariant A_μ et un vecteur contravariant B^ν sont des objets dont les composantes se transforment par changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, de la façon suivante :

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \quad (1.11)$$

et

$$B'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} B^\mu, \quad (1.12)$$

respectivement. Donc, en particulier, la différentielle dx^μ est un exemple de vecteur contravariant. La notion de vecteurs covariant et contravariant est généralisée par la notion de tenseur. Un tenseur est un objet mathématique qui se transforme de manière précise sous un changement général de coordonnées. Un (p, q) tenseur T est un objet avec p indices contravariants et q indices covariants de composantes $T^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ dans un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et se transformant sous un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ en

$$T'^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \dots \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\theta} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\rho} \dots \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\sigma} T^{\lambda\dots\theta}_{\zeta\dots\xi}, \quad (1.13)$$

où $T'^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$ sont les composantes du tenseur T dans le système de coordonnées $\{x'^\mu\}$. Il en résulte en particulier que A^μ , vecteur contravariant, est un $(1, 0)$ tenseur et B_μ , vecteur covariant, est un $(0, 1)$ tenseur.

Considérons l'intervalle d'espace-temps ou l'élément de ligne ds^2 , qui est donné en terme du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.14)$$

Comme l'élément de ligne ds^2 est invariant sous un changement de coordonnées (ds^2 est donc un $(0, 0)$ tenseur, appelé également scalaire)

$$ds'^2 = ds^2.$$

Mais

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu}$$

et

$$\begin{aligned} dx'^{\mu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} dx^{\sigma}, \\ dx'^{\nu} &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\sigma} dx^{\lambda} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

En faisant le changement d'indices $\mu \leftrightarrow \sigma$, $\nu \leftrightarrow \lambda$ dans le premier membre de la relation précédente

$$g'_{\sigma\lambda} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

d'où

$$g'_{\sigma\lambda} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\nu}.$$

En multipliant par $(\partial x^{\mu}/\partial x'^{\zeta}) (\partial x^{\nu}/\partial x'^{\xi})$ on obtient

$$g'_{\zeta\xi} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\zeta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\xi}}, \quad (1.15)$$

où on a fait usage de

$$\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\zeta}} = \delta^{\sigma}_{\zeta}, \quad \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\xi}} = \delta^{\lambda}_{\xi},$$

où δ^{λ}_{μ} est le symbole de Kronecker tel que

$$\delta^{\lambda}_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (1.16)$$

Donc, d'après (1.15), comme son nom l'indique, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est bien un $(0, 2)$ tenseur. Le tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ est défini par

$$g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}. \quad (1.17)$$

Sous un changement de coordonnées $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} \text{ et } g^{\mu\nu} \rightarrow g'^{\mu\nu},$$

avec

$$g'^{\rho\nu} g'_{\nu\mu} = \delta'^{\rho}_{\mu} = \delta^{\rho}_{\mu}.$$

Comme

$$g'_{\nu\mu} = \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} g_{\zeta\xi},$$

alors

$$g'^{\rho\nu} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} g_{\zeta\xi} = \delta^{\rho}_{\mu}.$$

Il est alors clair que $g'^{\rho\nu}$ doit avoir comme expression

$$g'^{\rho\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\theta\sigma}. \quad (1.18)$$

Donc le tenseur métrique inverse est un $(2, 0)$ tenseur.

Lorsque les indices contravariants sont absents, $p = 0$, on parle de tenseur covariant. Lorsque les indices covariants sont absents, $q = 0$, on parle de tenseur contravariant. Lorsque les deux types d'indices sont présents, on parle de tenseur mixte. De la loi de transformation des tenseurs, il est clair que si un tenseur est connu dans un système de coordonnées, il le sera dans tout autre système de coordonnées. En particulier, si le tenseur est nul dans un système de coordonnées, il le sera automatiquement dans tout autre système de coordonnées. Cette propriété trouve son application dans l'établissement des lois physiques qui sont formulées comme des égalités de tenseurs. Comme l'égalité de deux tenseurs dans un système de coordonnées entraîne leur égalité dans tout autre système de coordonnées, la covariance des lois physiques se trouve ainsi automatiquement garantie. Vu l'importance des tenseurs, introduisons quelques rudiments d'algèbre tensorielle.

On peut montrer que la somme T de deux (p, q) tenseurs T_1 et T_2 défini par

$$T^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} = T_1^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} + T_2^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$$

est également un (p, q) tenseur. On peut de même montrer que le produit d'un scalaire α par un (p, q) tenseur T , noté αT et défini par

$$(\alpha T)^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} = \alpha T^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma}$$

est également un (p, q) tenseur. Les deux propriétés précédentes confèrent aux (p, q) tenseurs la structure d'un espace vectoriel.

On définit le produit tensoriel T d'un (p_1, q_1) tenseur T_1 et d'un (p_2, q_2) tenseur T_2 comme

$$T^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} \zeta\cdots\xi_{\theta\cdots\lambda} = T_1^{\mu\cdots\nu}_{\rho\cdots\sigma} T_2^{\zeta\cdots\xi}_{\theta\cdots\lambda},$$

où T porte $p_1 + p_2$ indices contravariants $\mu, \cdots, \nu, \zeta, \cdots, \xi$ et $q_1 + q_2$ indices covariants $\rho, \cdots, \sigma, \theta, \cdots, \lambda$. On peut facilement montrer que T est un $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ tenseur.

On peut contracter deux indices d'un (p, q) tenseur T , un indice covariant et un indice contravariant, ce qui signifie que la contraction des indices ne peut concerner que les tenseurs mixtes. Si on définit ¹

$$V^{\zeta \dots \nu}_{\xi \dots \sigma} := T^{\mu \zeta \dots \nu}_{\mu \xi \dots \sigma},$$

on peut montrer également que V est un $(p - 1, q - 1)$ tenseur. Il est clair que l'opération de contraction des indices peut être répétée jusqu'à l'extinction des indices covariants et/ou des indices contravariants. Il est également clair que la contraction peut se faire de diverses manières : autant de manières que de choix possibles de l'indice covariant et de l'indice contravariant.

On peut également combiner produit tensoriel et contraction d'indices d'un tenseur. Un cas particulièrement important est celui de l'abaissement et de l'élévation des indices d'un tenseur par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et le tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ respectivement. Soit T un (p, q) tenseur de composantes $T^{\mu\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma}$. En multipliant T par le tenseur métrique $g_{\zeta\xi}$, on obtient un $(p, q + 2)$ tenseur de composantes $g_{\zeta\xi}T^{\mu\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma}$. Maintenant en contractant les indices ξ et μ on obtient un $(p - 1, q + 1)$ tenseur R de composantes

$$R_{\zeta}^{\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma} := g_{\zeta\mu}T^{\mu\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma}.$$

De même, en multipliant T par le tenseur métrique inverse $g^{\zeta\xi}$, on obtient un $(p + 2, q)$ tenseur de composantes $g^{\zeta\xi}T^{\mu\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma}$. En contractant cette fois-ci les indices ξ et ρ on obtient un $(p + 1, q - 1)$ tenseur W de composantes

$$W^{\zeta\mu\theta\dots\nu}_{\lambda\dots\sigma} := g^{\zeta\rho}T^{\mu\theta\dots\nu}_{\rho\lambda\dots\sigma}.$$

On dit d'un (p, q) tenseur $S^{\mu\nu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda}$ qu'il est symétrique vis à vis des deux indices μ et ν ssi

$$S^{\mu\nu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda} = S^{\nu\mu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda}.$$

On dit d'un (p, q) tenseur $A^{\mu\nu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda}$ qu'il est anti-symétrique vis à vis des deux indices μ et ν ssi

$$A^{\mu\nu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda} = -A^{\nu\mu\dots\theta}_{\rho\sigma\dots\lambda}.$$

Il est clair que les propriétés de symétrie et d'antisymétrie sont conservées par changement de coordonnées.

Considérons maintenant un $(1, 1)$ tenseur T^{μ}_{ν} dont les composantes dans un référentiel donné coïncident avec celles du symbole de Kronecker

$$T^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

¹Dans toute cette thèse, on utilise, sauf spécification contraire, la convention de sommation d'Einstein : sommation implicite de 0 à 3 sur tout indice grec répété une fois en haut, une fois en bas.

Faisons une transformation de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$. Les composantes du (1, 1) tenseur T dans le nouveau système de coordonnées x'^μ , $T'^\mu{}_\nu$, sont liées à ses composantes dans l'ancien système de coordonnées x^μ , $T^\mu{}_\nu$, par

$$T'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\lambda{}_\sigma$$

Mais,

$$T^\lambda{}_\sigma = \delta^\lambda{}_\sigma$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} T'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \delta^\lambda{}_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \end{aligned}$$

Donc les composantes du (1, 1) tenseur coïncident avec celles du symbole de Kronecker dans tout système de coordonnées. Par conséquent, le symbole de Kronecker est un (1, 1) tenseur.

Un autre symbole très utilisé en calcul tensoriel est le symbole de Levi-Civita à 4 indices $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Comme $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est complètement antisymétrique, il est obligatoirement nul si deux indices sont égaux. Comme les indices $\mu\nu\rho\sigma$ prennent leurs valeurs dans un ensemble de 4 éléments $\{0, 1, 2, 3\}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ n'est différent de zéro que si μ, ν, ρ, σ est une permutation de 0, 1, 2, 3. D'autre part, comme $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est complètement antisymétrique

$$\varepsilon^{\pi(0)\pi(1)\pi(2)\pi(3)} = (-1)^\pi \varepsilon^{0123},$$

où π est une permutation de 0, 1, 2, 3 et $(-1)^\pi$ est sa parité qui vaut 1 ou -1 selon que π est une permutation paire ou impaire. Il reste donc pour définir complètement le symbole de Levi-civita de donner, par exemple, une valeur à ε^{0123} . L'usage est de prendre $\varepsilon^{0123} = +1$. considérons maintenant un (4, 0) tenseur $W^{\mu\nu\rho\sigma}$ et définissons ses composantes comme confondues avec les composantes du symbole de Levi-Civita dans un système de coordonnées, x^μ , c'est à dire

$$W^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma},$$

dans le système de coordonnées x^μ . Faisons maintenant un changement du système de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$. Les composantes $W^{\mu\nu\rho\sigma}$ se transforment alors en

$$\begin{aligned} W'^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\xi} W^{\lambda\theta\zeta\xi}, \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\xi} \varepsilon^{\lambda\theta\zeta\xi}. \end{aligned}$$

Faisons une permutation π des indices $\mu, \nu, \rho, \sigma : \mu \rightarrow \pi(\mu), \dots$

$$W'^{\pi(\mu)\pi(\nu)\pi(\rho)\pi(\sigma)} = \frac{\partial x'^{\pi(\mu)}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^{\pi(\nu)}}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^{\pi(\rho)}}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^{\pi(\sigma)}}{\partial x^\xi} W^{\lambda\theta\zeta\xi}.$$

Comme $\lambda, \theta, \zeta, \xi$ sont des indices de sommation, on peut toujours les permuter. Faisons la même permutation sur $\lambda, \theta, \zeta, \xi$ que sur μ, ν, ρ, σ . Alors

$$W'^{\pi(\mu)\pi(\nu)\pi(\rho)\pi(\sigma)} = \frac{\partial x'^{\pi(\mu)}}{\partial x^{\pi(\lambda)}} \frac{\partial x'^{\pi(\nu)}}{\partial x^{\pi(\theta)}} \frac{\partial x'^{\pi(\rho)}}{\partial x^{\pi(\zeta)}} \frac{\partial x'^{\pi(\sigma)}}{\partial x^{\pi(\xi)}} \varepsilon^{\pi(\lambda)\pi(\theta)\pi(\zeta)\pi(\xi)}.$$

Il est clair que

$$\frac{\partial x'^{\pi(\mu)}}{\partial x^{\pi(\lambda)}} \frac{\partial x'^{\pi(\nu)}}{\partial x^{\pi(\theta)}} \frac{\partial x'^{\pi(\rho)}}{\partial x^{\pi(\zeta)}} \frac{\partial x'^{\pi(\sigma)}}{\partial x^{\pi(\xi)}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\xi}$$

et par conséquent

$$W'^{\pi(\mu)\pi(\nu)\pi(\rho)\pi(\sigma)} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\xi} \varepsilon^{\pi(\lambda)\pi(\theta)\pi(\zeta)\pi(\xi)}.$$

Mais

$$\varepsilon^{\pi(\lambda)\pi(\theta)\pi(\zeta)\pi(\xi)} = (-1)^\pi \varepsilon^{\lambda\theta\zeta\xi},$$

où $(-1)^\pi$ est le signe de la permutation π . Donc finalement

$$W'^{\pi(\mu)\pi(\nu)\pi(\rho)\pi(\sigma)} = (-1)^\pi W'^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Donc $W'^{\mu\nu\rho\sigma}$ est complètement antisymétrique. Il s'ensuit qu'il est numériquement proportionnel au symbole de Levi-Civita. Donc

$$W'^{\mu\nu\rho\sigma} = a\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.19)$$

Il reste à déterminer le facteur de proportionnalité a . Pour cela considérons un jeu de valeurs pour $\mu\nu\rho\sigma$, par exemple 0123. Nous avons

$$W'^{0123} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^1}{\partial x^\theta} \frac{\partial x'^2}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x'^3}{\partial x^\xi} \varepsilon^{\lambda\theta\zeta\xi}.$$

Le membre de droite n'est autre que la définition du déterminant de la matrice d'éléments $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$, c'est à dire du Jacobien de la transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, noté $|\partial x' / \partial x|$. Donc

$$W'^{0123} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|.$$

D'autre part, en utilisant (1.19),

$$W'^{0123} = a\varepsilon^{0123} = a.$$

En comparant les deux expressions de W^{0123} , on en déduit l'expression de a

$$a = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|.$$

Mais par définition $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est un symbole dont l'expression ne dépend pas du système de coordonnées. Donc

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Il s'ensuit que :

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1} W'^{\mu\nu\rho\sigma} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\theta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\zeta}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\xi}} \varepsilon^{\lambda\theta\zeta\xi}.$$

Donc $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ se transforme comme un tenseur à l'exception d'un facteur $|\partial x'/\partial x|^{-1}$: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est appelé densité tensorielle de poids -1 (puissance du facteur $|\partial x'/\partial x|$). De façon plus générale, un objet portant p indices contravariants et q indices covariants $\tau^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots}$ et se transformant dans un changement de coordonnées $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ comme

$$\tau^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} \rightarrow \tau'^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^w \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\theta}} \dots \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\sigma}} \tau^{\lambda\theta\dots}_{\zeta\xi\dots}$$

est appelé densité tensorielle de poids w .

Considérons maintenant moins le déterminant du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ qu'on notera g (on considère moins le déterminant du tenseur métrique plutôt que le déterminant du tenseur métrique car on sait, grâce au théorème de Sylvestre, que le tenseur métrique admet à l'instar du tenseur de Minkowski 3 valeurs propres négatives et une valeur propre positive, d'où un déterminant négatif et par conséquent il est plus commode de travailler avec moins le déterminant qu'avec le déterminant lui-même).

$$g = -\det |g_{\mu\nu}|.$$

Sous un changement de coordonnées

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\sigma}.$$

Définissons la matrice X par

$$X^{\sigma}_{\nu} := \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}},$$

alors

$$g'_{\mu\nu} = X^{\lambda}_{\mu} X^{\sigma}_{\nu} g_{\lambda\sigma} = X^{\lambda}_{\mu} g_{\lambda\sigma} X^{\sigma}_{\nu}.$$

Mais

$$X^\lambda{}_\mu = (X^T)_\mu{}^\lambda.$$

Donc

$$g'_{\mu\nu} = (X^T)_\mu{}^\lambda g_{\lambda\sigma} X^\sigma{}_\nu = (X^T g X)_{\mu\nu}.$$

Comme

$$\det X^T = \det X = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-1},$$

alors

$$\det |g'_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} \det |g_{\mu\nu}|.$$

Par conséquent, en multipliant par un signe moins

$$g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} g.$$

Donc g , moins le déterminant du tenseur métrique, est une densité scalaire (une $(0, 0)$ densité) de poids -2 . Il s'ensuit que

$$\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{g}}$$

est un $(4, 0)$ tenseur. De manière plus générale, un (p, q) tenseur peut être considéré comme le produit d'une (p, q) densité tensorielle de poids w fois $g^{w/2}$.

Considérons l'élément de volume d^4x . Sous une transformation de coordonnées

$$d^4x \rightarrow d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x,$$

qui est un résultat bien connu de la théorie de l'intégration à plusieurs dimensions. Donc d^4x est une densité scalaire de poids $+1$. Pour obtenir un scalaire ou un $(0, 0)$ tenseur il suffit de la multiplier par \sqrt{g} . Donc $\sqrt{g} d^4x$ est un scalaire ou un $(0, 0)$ tenseur.

1.4 Connexion affine ou symboles de Christoffel

La connexion affine $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ est définie en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ par

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (1.20)$$

En utilisant la loi de transformation du tenseur métrique et du tenseur métrique inverse sous un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}, \\ g^{\mu\nu} &\rightarrow g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}, \end{aligned}$$

on peut montrer que $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ se transforme sous un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ comme

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu \rightarrow \Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\lambda\zeta}^\sigma + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho}. \quad (1.21)$$

La loi de transformation de la connexion affine (1.21) montre que cette dernière n'est pas un (1, 2) tenseur à cause du terme inhomogène dans le membre de droite de (1.21). Ceci est un exemple d'un objet qui porte des indices covariants et contravariants et qui néanmoins n'est un tenseur. Avant d'aller plus loin, il est utile de donner une autre forme pour le terme inhomogène intervenant dans la loi de transformation de la connexion affine. Le point de départ est la remarque

$$\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} (\delta^\mu{}_\rho) = 0.$$

Mais

$$0 = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \right) = \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} = - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}.$$

Par conséquent, la loi de transformation de la connexion affine peut être réécrite sous la forme

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu \rightarrow \Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\lambda\zeta}^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}.$$

1.5 Dérivation covariante d'un tenseur

Considérons un scalaire (un (0, 0) tenseur) ϕ , un vecteur contravariant (un (1, 0) tenseur) V^μ et un vecteur covariant (un (0, 1) tenseur) W_μ et voyons tour à tour comment se transforment les quantités $\partial\phi/\partial x^\nu$, $\partial V^\mu/\partial x^\nu$ et $\partial W_\mu/\partial x^\nu$ sous une transformation générale de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$. Nous avons

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial\phi'}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\rho},$$

ce qui montre que $\partial\phi/\partial x^\nu$ est un vecteur covariant, un $(0, 1)$ tenseur. Pour $\partial V^\mu/\partial x^\nu$ nous avons la loi de transformation

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho \right), \quad (1.22)$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V^\rho. \quad (1.23)$$

Cette relation montre que $\partial V'^\mu/\partial x'^\nu$ n'est pas un $(1, 1)$ tenseur à cause du terme inhomogène du membre de droite. Examinons finalement la loi de transformation pour $\partial W_\mu/\partial x^\nu$

$$\frac{\partial W_\mu}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial W'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} W_\sigma \right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial W_\sigma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} W_\sigma. \quad (1.24)$$

Cette relation montre que $\partial W_\mu/\partial x^\nu$ n'est pas un $(0, 2)$ tenseur toujours à cause du terme inhomogène du membre de droite. Ceci se généralise au cas d'un (p, q) tenseur quelconque. La dérivée d'un (p, q) tenseur n'est pas un tenseur. Mais il y a un moyen de construire un objet qui généralise la notion de dérivée d'un tenseur et qui soit lui-même un tenseur. C'est la notion de dérivée covariante qui fait intervenir la connexion affine. Définissons la dérivée covariante de V^μ comme

$$D_\nu V^\mu := \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho \quad (1.25)$$

et voyons comment se transforme cette dernière sous une transformation générale de coordonnées. Nous avons

$$\begin{aligned} D'_\nu V'^\mu &= \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\nu} + \Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu V'^\rho \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho \right) + \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\lambda\zeta}^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \right) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi} V^\xi \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} V^\rho + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\lambda\zeta}^\sigma \delta^\zeta_\xi V^\xi - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \delta^\sigma_\xi V^\xi \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\zeta}^\rho V^\zeta \right). \end{aligned}$$

Donc $D_\nu V^\mu$ se transforme comme un $(1, 1)$ tenseur. Définissons maintenant la dérivée covariante de W_μ comme

$$D_\nu W_\mu := \frac{\partial W_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho W_\rho$$

et assurons-nous qu'elle se transforme bien comme un tenseur. Nous avons

$$\begin{aligned}
D'_\nu W'_\mu &= \frac{\partial W'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^\rho_{\nu\mu} W'_\rho \\
&= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} W_\sigma \right) - \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\zeta} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\mu} \Gamma^\zeta_{\xi\theta} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\rho} W_\lambda \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial W_\sigma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} W_\sigma - \delta^\lambda_\zeta \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\mu} \Gamma^\zeta_{\xi\theta} W_\lambda - \delta^\lambda_\sigma \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} W_\lambda \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial W_\sigma}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\zeta_{\lambda\sigma} W_\zeta \right),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $D_\nu V^\mu$ est bien $(0, 2)$ tenseur. La notion de dérivée covariante se généralise à un (p, q) tenseur T quelconque $T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}$. La dérivée covariante de $T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}$ est défini comme

$$D_\rho T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} := \frac{\partial T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\zeta} T^{\zeta\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} + \Gamma^\nu_{\rho\zeta} T^{\mu\zeta\dots}_{\lambda\sigma\dots} + \dots - \Gamma^\xi_{\rho\lambda} T^{\mu\nu\dots}_{\xi\sigma\dots} - \Gamma^\xi_{\rho\sigma} T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\xi\dots} - \dots \quad (1.26)$$

Remarquons qu'un terme " + Γ " est ajouté pour chaque indice contravariant du tenseur dont on prend la dérivée covariante alors qu'un terme " - Γ " est ajouté pour chaque indice covariant. De ce qui précède, il est bien clair que la dérivée d'un (p, q) tenseur est un $(p, q + 1)$ tenseur. L'opération de dérivation covariante satisfait aux propriétés suivantes :

- Linéarité

$$D_\rho (T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} + S^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}) = D_\rho T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} + D_\rho S^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}.$$

- Règle de Leibniz

$$D_\rho (T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} S^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}) = (D_\rho T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}) S^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} + T^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots} (D_\rho S^{\mu\nu\dots}_{\lambda\sigma\dots}).$$

- Commutativité de la contraction avec la dérivation covariante.
- Dans le cas général les dérivées covariantes ne commutent pas

$$D_\mu D_\nu \neq D_\nu D_\mu.$$

- La dérivée covariante du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est nulle.

Pour le démontrer, utilisons le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ pour réécrire le vecteur covariant $D_\rho V_\mu$ comme

$$D_\rho V_\mu = g_{\mu\sigma} D_\rho V^\sigma.$$

D'autre part, en utilisant l'expression

$$V_\mu = g_{\mu\sigma} V^\sigma$$

et la règle de Leibniz, on peut écrire

$$\begin{aligned} D_\rho V_\mu &= D_\rho(g_{\mu\sigma} V^\sigma) \\ &= (D_\rho g_{\mu\sigma}) V^\sigma + g_{\mu\sigma} D_\rho V^\sigma. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions de $D_\rho V_\mu$

$$(D_\rho g_{\mu\sigma}) V^\sigma = 0.$$

Comme V^σ est un vecteur arbitraire, il vient donc

$$D_\rho g_{\mu\sigma} = 0.$$

De même on peut montrer que

$$D_\rho g^{\mu\sigma} = 0.$$

– La dérivée covariante du symbole de Kronecker est également nulle.

En effet, on a

$$\begin{aligned} D_\rho \delta^\mu_\nu &= D_\rho(g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}) \\ &= (D_\rho g^{\mu\sigma}) g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} D_\rho g_{\sigma\nu} = 0. \end{aligned}$$

L'opération de dérivation covariante D_ρ est importante car l'existence de cette dernière garantit l'écriture d'équations physiques (équations différentielles) covariantes par rapport aux changements de coordonnées.

1.6 Le tenseur de courbure

Comme la dérivée covariante est tout simplement la dérivée partielle pour un scalaire et comme la connexion affine est symétrique vis à vis de ses deux indices du bas, alors

$$D_\sigma D_\rho \phi = D_\rho D_\sigma \phi.$$

Cette propriété n'est pas valable pour un vecteur ou plus généralement pour un tenseur, dans le cas général. Pour le voir considérons un vecteur de composantes V_μ et calculons le commutateur

$$[D_\sigma, D_\rho] V_\mu := D_\sigma D_\rho V_\mu - D_\rho D_\sigma V_\mu.$$

Partons de la définition de la dérivée covariante d'un vecteur covariant V_μ

$$\begin{aligned} D_\rho V_\mu &= \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu \\ &= \partial_\rho V_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu, \end{aligned}$$

où on a posé $\partial_\rho := \partial/\partial x^\rho$. Une seconde dérivation covariante nous donne

$$\begin{aligned}
D_\sigma D_\rho V_\mu &= \partial_\sigma (D_\rho V_\mu) - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha D_\rho V_\alpha - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha D_\alpha V_\mu \\
&= \partial_\sigma (\partial_\rho V_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu V_\nu) - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha (\partial_\rho V_\alpha - \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta) - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha (\partial_\alpha V_\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta V_\beta) \\
&= \partial_\sigma \partial_\rho V_\mu - (\partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\nu) V_\nu - \Gamma_{\rho\mu}^\nu \partial_\sigma V_\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha (\partial_\rho V_\alpha) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta \\
&\quad - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha (\partial_\alpha V_\mu) + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta V_\beta.
\end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice suivant $\sigma \leftrightarrow \rho$ dans la relation précédente, on aura l'expression de $D_\rho D_\sigma V_\mu$. En tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ par rapport aux indices inférieurs on obtient

$$D_\sigma D_\rho V_\mu - D_\rho D_\sigma V_\mu = -(\partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\nu) V_\nu + (\partial_\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\nu) V_\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta V_\beta - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta V_\beta \quad (1.27)$$

$$= -[\partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\nu - \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\nu] V_\nu \quad (1.28)$$

$$= -R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} V_\nu, \quad (1.29)$$

où

$$R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} := \partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\nu - \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\nu.$$

On va montrer que $R^\nu{}_{\mu\sigma\rho}$ suit bien la loi de transformation d'un tenseur. Sachant que le membre gauche de la relation est un tenseur, alors sous une transformation générale de coordonnées $x \rightarrow x'$ il se transforme comme

$$D'_\sigma D'_\rho V'_\mu - D'_\rho D'_\sigma V'_\mu = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\sigma} (D_\zeta D_\eta V_\kappa - D_\eta D_\zeta V_\kappa) \quad (1.30)$$

$$= -\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\sigma} R^\nu{}_{\kappa\eta\zeta} V_\nu. \quad (1.31)$$

En utilisant la loi de transformation du vecteur covariant V_ν sous une transformation générale de coordonnées

$$V'_\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} V_\nu,$$

on en déduit que

$$V_\nu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} V'_\alpha.$$

La relation (1.31) devient

$$D'_\sigma D'_\rho V'_\mu - D'_\rho D'_\sigma V'_\mu = -\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} R^\nu{}_{\kappa\eta\zeta} V'_\alpha. \quad (1.32)$$

D'autre part, on a

$$D'_\sigma D'_\rho V'_\mu - D'_\rho D'_\sigma V'_\mu = -R'^\alpha{}_{\mu\rho\sigma} V'_\alpha. \quad (1.33)$$

En comparant les relations (1.32) et (1.33), on obtient

$$R'^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\sigma}} R^{\nu}_{\kappa\eta\zeta}.$$

Faisons le changement d'indice $\alpha \leftrightarrow \nu$. On obtient

$$R'^{\nu}_{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\zeta}}{\partial x'^{\sigma}} R^{\alpha}_{\kappa\eta\zeta}.$$

Il s'ensuit que

$$R^{\nu}_{\mu\rho\sigma} := \partial_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\alpha} \quad (1.34)$$

est un $(1,3)$ tenseur mixte, calculable en fonction de la métrique grâce aux symboles de Christoffel Γ . $R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Toute l'information sur la courbure d'une variété est contenue dans ce tenseur. Un cas particulier important est que la nullité de ce tenseur est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une région de la variété soit plate. Dans le cas de l'espace euclidien le tenseur de Riemann-Christoffel est globalement nul. Il vaut la peine de noter que $R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ est l'unique tenseur qui peut être construit à partir de g et de ses dérivées premières et secondes et qui soit linéaire dans ces dernières. La contraction du tenseur de Riemann-Christoffel donne le tenseur de Ricci $R_{\mu\sigma}$

$$R_{\mu\sigma} := R^{\rho}_{\mu\rho\sigma}$$

et la contraction de ce dernier donne le scalaire de courbure R

$$R := g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}.$$

1.6.1 Propriétés du tenseur de courbure

Le tenseur de courbure possède un certain nombre de symétries et vérifie certaines identités que nous allons discuter dans cette section.

De l'expression du tenseur de courbure $R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}$ donnée ci-dessus, on peut montrer que ce dernier est antisymétrique dans le changement d'indice $\rho \leftrightarrow \sigma$. En effet, on a

$$\begin{aligned} R^{\nu}_{\mu\sigma\rho} &= \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} \\ &= -R^{\nu}_{\mu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

On peut montrer également que le tenseur de courbure vérifie l'identité suivante

$$R^{\nu}_{\mu\sigma\rho} + R^{\nu}_{\rho\mu\sigma} + R^{\nu}_{\sigma\rho\mu} = 0. \quad (1.35)$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} R^\nu{}_{\mu\sigma\rho} &= \partial_\rho \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\nu_{\mu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\rho\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\sigma\alpha}, \\ R^\nu{}_{\rho\mu\sigma} &= \partial_\sigma \Gamma^\nu_{\rho\mu} - \partial_\mu \Gamma^\nu_{\rho\sigma} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\nu_{\sigma\alpha} - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\alpha}, \\ R^\nu{}_{\sigma\rho\mu} &= \partial_\mu \Gamma^\nu_{\sigma\rho} - \partial_\rho \Gamma^\nu_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} \Gamma^\nu_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\nu_{\rho\alpha}. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les trois relations précédentes et tenant compte de la symétrie des symboles de Christoffel vis à vis des deux indices du bas, nous obtenons bien l'identité (1.35). En plus de la forme du tenseur de Riemann utilisé jusque là, il existe une forme covariante souvent utilisée pour illustrer les symétries du tenseur de courbure, forme que nous pouvons obtenir en abaissant l'indice contravariant du tenseur $R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma}$ grâce au tenseur métrique

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\alpha\mu} R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma}.$$

En substituant à $R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma}$ son expression (1.34) et en tenant des expressions des symboles de Christoffel en termes du tenseur métrique inverse et des dérivées premières du tenseur métrique, on obtient la relation

$$R_{\mu\rho\sigma\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \right) \quad (1.36)$$

$$+ g_{\lambda\eta} \left[\Gamma^\eta_{\sigma\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\eta_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \right]. \quad (1.37)$$

A partir de cette dernière forme, on peut facilement établir les propriétés de symétrie et d'antisymétrie suivantes :

$$R_{\mu\rho\sigma\nu} = -R_{\rho\mu\sigma\nu}, \quad (1.38)$$

$$R_{\mu\rho\sigma\nu} = -R_{\mu\rho\nu\sigma}, \quad (1.39)$$

$$R_{\mu\rho\sigma\nu} = R_{\sigma\nu\mu\rho}. \quad (1.40)$$

La première propriété (1.38) montre que le tenseur de courbure est antisymétrique par rapport à l'échange de ses deux premiers indices, la deuxième propriété (1.39) montre que le tenseur de courbure est antisymétrique par rapport à l'échange de ses deux derniers indices. La troisième propriété (1.40) montre que le tenseur de courbure est symétrique par rapport à l'échange de ses deux premiers indices avec ses deux derniers indices. On peut également montrer que La propriété de cyclicité (1.35) reste valable pour la forme covariante du tenseur de courbure

$$R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \quad (1.41)$$

En faisant usage des propriétés de symétrie et d'antisymétrie du tenseur de courbure nous avons par contraction d'indices du tenseur de courbure les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
g^{\mu\rho} R_{\mu\rho\sigma\nu} &= -g^{\mu\rho} R_{\rho\mu\sigma\nu} = -g^{\rho\mu} R_{\rho\mu\sigma\nu} = 0, \\
g^{\sigma\nu} R_{\mu\rho\sigma\nu} &= -g^{\sigma\nu} R_{\rho\mu\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0, \\
g^{\mu\nu} R_{\mu\rho\sigma\nu} &= -g^{\mu\nu} R_{\mu\rho\nu\sigma} = -R_{\rho\sigma}, \\
g^{\rho\nu} R_{\mu\rho\sigma\nu} &= +g^{\rho\nu} R_{\rho\mu\nu\sigma} = R_{\mu\sigma},
\end{aligned}$$

où on a fait usage de l'expression du tenseur de Ricci

$$R_{\rho\nu} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\rho\sigma\nu}. \quad (1.42)$$

Il vient donc, en raison des symétries du tenseur de courbure, qu'un seul tenseur non nul puisse être formé à partir de ce tenseur en contractant deux de ses indices. C'est le tenseur de Ricci défini précédemment. On peut de plus montrer que le tenseur de Ricci est symétrique dans l'échange de ses deux indices. En effet

$$R_{\rho\nu} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\rho\sigma\nu} = g^{\sigma\mu} R_{\sigma\rho\mu\nu} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\rho},$$

où on a permuté les indices de sommation, μ et σ , et on a fait usage des propriétés de symétrie du tenseur métrique et du tenseur de courbure. Le scalaire de courbure R est obtenu par contraction des deux derniers indices du tenseur de courbure

$$R = g^{\nu\rho} R_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho}.$$

Il y'a essentiellement une seule manière de contracter deux fois de suite les indices du tenseur de courbure. En effet

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} &= 0 \\
g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu\sigma\rho} &= -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R.
\end{aligned}$$

Il est clair que les composantes du tenseur de courbure ne sont pas toutes indépendantes, car elles sont liées par les relations de symétrie et d'antisymétrie obtenues ci-dessus qui contraignent le tenseur de Riemann en tout point de l'espace-temps. On peut montrer que le nombre des composantes indépendantes du tenseur de courbure dans un espace à N dimensions est égal à

$$\frac{N^2 (N^2 - 1)}{12}.$$

En particulier, le tenseur de courbure dans un espace à 4 dimensions a 20 composantes indépendantes. En plus des symétries algébriques que vérifie le tenseur de courbure, la

dérivée covariante de ce dernier obéit à une identité différentielle importante, appelée identité de Bianchi,

$$D_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} + D_\mu R_{\nu\lambda\sigma\rho} + D_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho} = 0. \quad (1.43)$$

Pour dériver l'identité (1.43) plaçons-nous dans un système de coordonnées localement inertiel. Dans un tel système, les symboles de Christoffel Γ et les dérivées premières du tenseur métrique g sont nuls. Il s'ensuit que la dérivé covariante du tenseur de courbure se réduit à sa dérivé ordinaire

$$\begin{aligned} D_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} &= \partial_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\rho \partial_\mu g_{\sigma\nu}). \end{aligned}$$

En permutant circulairement les trois premiers indices dans cette dernière relation, on obtient l'expression de $\partial_\mu R_{\nu\lambda\sigma\rho}$ et de $\partial_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho}$. La somme des trois dérivées du tenseur de Riemann nous donne

$$\begin{aligned} \partial_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} + \partial_\mu R_{\nu\lambda\sigma\rho} + \partial_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho} &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\lambda \partial_\sigma \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\mu g_{\sigma\nu} \\ &\quad + \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\mu \partial_\rho \partial_\lambda g_{\nu\sigma} + \partial_\mu \partial_\rho \partial_\nu g_{\sigma\lambda} \\ &\quad + \partial_\nu \partial_\sigma \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\nu \partial_\rho \partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\nu \partial_\rho \partial_\lambda g_{\sigma\mu}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'identité de Bianchi est valable dans un référentiel localement inertiel. Comme l'identité de Bianchi (1.43) stipule la nullité d'un tenseur, il est par conséquent clair qu'elle est valable dans n'importe quel système de coordonnées. L'identité de Bianchi est l'analogie de l'équation homogène de Maxwell en électromagnétisme

$$\partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = 0.$$

Remarquons qu'en contractant deux fois l'identité (1.43), on obtient

$$0 = g^{\rho\nu} g^{\sigma\lambda} (D_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} + D_\mu R_{\nu\lambda\sigma\rho} + D_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho}) = D^\sigma R_{\mu\sigma} - D_\mu R + D^\rho R_{\mu\rho},$$

ce qui est équivalent à

$$D^\sigma R_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} D_\mu R. \quad (1.44)$$

En utilisant le tenseur métrique, cette dernière relation peut être écrite comme

$$D^\sigma \left(R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} R g_{\mu\sigma} \right) = 0. \quad (1.45)$$

En posant

$$G_{\mu\sigma} := R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} R g_{\mu\sigma}, \quad (1.46)$$

on a

$$D^\sigma G_{\mu\sigma} = 0. \quad (1.47)$$

Le tenseur $G_{\mu\sigma}$ est appelé tenseur d'Einstein. D'après l'équation (1.47), ce tenseur est de divergence nulle.

1.7 Equation des géodésiques et équations d'Einstein

1.7.1 Equation des géodésiques

Déterminer la trajectoire d'une particule libre dans un champ gravitationnel entre deux points fixes A et B de l'espace-temps revient à chercher la courbe ou la géodésique qui minimise l'intervalle propre L_{AB} entre ces deux points. Autrement dit, pour obtenir l'équation de la géodésique, l'intervalle propre L_{AB} doit être extrémisée. Si la particule est massive, la géodésique est de genre temps, et nous pouvons paramétrer la trajectoire par le temps propre τ de la particule. L'intervalle propre L_{AB} est donné par l'intégrale suivante

$$L_{AB} := \int_A^B d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \quad (1.48)$$

En vertu des équations d'Euler-Lagrange, L_{AB} est extrémal si et seulement si

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\tau)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (1.49)$$

où L est la fonction de lagrange qui apparait dans (1.48)

$$L := \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \quad (1.50)$$

Nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\tau)} = \frac{1}{2L} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\tau)} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ &= -\frac{1}{L^2} \frac{dL}{d\tau} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{L} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \\ &= \frac{1}{L} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.52)$$

En remplaçant (1.51) et (1.52) dans (1.49), nous obtenons

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.53)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (1.53), on obtient

$$g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

D'où, en multipliant l'équation précédente par $g^{\beta\alpha}$,

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.54)$$

où on a utilisé la relation $g^{\beta\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\beta$.

Comme

$$\frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \Gamma_{\mu\nu}^\beta,$$

l'équation de la géodésique (1.54) prend la forme

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (1.55)$$

On peut montrer facilement que le membre de gauche de l'équation (1.55) est un (1,0) tenseur. Donc l'équation (1.55) stipule la nullité des composantes d'un tenseur qui est une propriété indépendante du système de coordonnées utilisé. Autrement dit, l'équation (1.55) est valable dans n'importe quel système de coordonnées. L'équation de la géodésique nous donne la trajectoire d'une particule se déplaçant sous l'effet du champ de gravitation dans un espace courbe. Cependant cette équation ne nous apprend pas comment l'espace-temps est courbé en présence des corps gravitationnels. Elle ne nous permet de connaître le comportement des corps qu'une fois la courbure déterminée.

1.7.2 Equations d'Einstein

Nous allons suivre dans cette section l'idée d'Einstein qui suggère que la gravité est une manifestation de la courbure de l'espace-temps dû à la présence d'une distribution de masse et établir ainsi un ensemble d'équations déterminant comment la courbure de l'espace-temps à un instant donné est liée à la distribution de masse ou d'énergie à cet instant. En d'autres termes, nous allons déterminer les champs ou les potentiels gravitationnels à partir des distributions de masse ou d'énergie. Dans ce but, nous adoptons l'approche originale d'Einstein qui repose sur la généralisation relativiste de l'équation de Poisson de la mécanique Newtonienne,

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.56)$$

où ϕ est le potentiel de Newton, G est la constante de Newton et ρ est la densité de masse. Si la gravité est une manifestation de la courbure de l'espace-temps alors nous avons dans la limite Newtonienne la généralisation suivante pour le potentiel gravitationnel

$$g_{00} = 1 + 2\phi,$$

où g_{00} est la composante 00 du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. D'autre part, nous savons que la généralisation tensorielle de la densité de masse est le tenseur d'énergie-impulsion,

$$T_{00} = \rho,$$

où T_{00} est la composante 00 du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Alors l'équation du champ (1.56) peut être réécrite comme

$$\Delta g_{00} = 8\pi GT_{00}. \quad (1.57)$$

Rappelons que cette équation est valable uniquement pour les champs faibles et statiques. Pour être invariante de Lorentz, elle doit être généralisée en une équation tensorielle. Pour ce faire remplaçons le membre de gauche de l'équation (1.57) par un tenseur $G_{\alpha\beta}$ dépendant de la métrique et de ses dérivées premières et secondes. Donc l'écriture tensorielle ou la forme covariante de l'équation (1.57), valable pour des champs faibles mais pas forcément statiques, s'écrit comme

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}, \quad (1.58)$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie-impulsion. D'après le principe de covariance générale, les équations qui gouvernent des champs gravitationnels d'intensité arbitraire doivent être de la forme

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.59)$$

où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur qui se réduit à $G_{\alpha\beta}$ pour des champs faibles. Le tenseur symétrique d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ nous renseigne sur le contenu énergétique du système considéré et

agit comme une source de gravitation. Il doit être de divergence nulle afin de préserver la conservation de l'énergie-impulsion

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

Le tenseur $G_{\mu\nu}$ doit avoir les propriétés suivantes :

- 1- $G_{\mu\nu}$ est un tenseur du second ordre.
- 2- $G_{\mu\nu}$, tout comme $T_{\mu\nu}$, doit être, selon l'équation 1.59, symétrique.
- 3-Comme $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$, $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$, toujours selon l'équation 1.59.
- 4- $G_{\mu\nu}$ doit être nul pour espace plat.
- 5- $G_{\mu\nu}$ doit être fonction uniquement du tenseur de Riemann, de ses contractions et du tenseur métrique.
- 6- $G_{\mu\nu}$ doit être linéaire en le tenseur de Riemann. Autrement dit, le tenseur $G_{\mu\nu}$ ne doit contenir que des termes linéaires dans les dérivées secondes ou quadratiques dans les dérivées premières de la métrique.
- 7-Pour des champs faibles statiques produits par une matière non relativiste, la composante G_{00} du tenseur $G_{\mu\nu}$ doit, selon l'équation (1.57), se réduire à,

$$G_{00} = \Delta g_{00}.$$

Déterminons maintenant le tenseur $G_{\mu\nu}$ en utilisant ses propriétés énumérées ci-dessus. Les propriétés 1, 2, 5 et 6 imposent à $G_{\mu\nu}$ d'être de la forme

$$G_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R, \quad (1.60)$$

où α et β sont des constantes. Imposons maintenant la condition

$$D^\mu G_{\mu\nu} = 0.$$

Nous avons

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \alpha D^\mu R_{\mu\nu} + \beta (D^\mu g_{\mu\nu}) R + \beta g_{\mu\nu} D^\mu R.$$

On a $D^\mu g_{\mu\nu} = 0$. Par conséquent,

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \alpha D^\mu R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} D^\mu R. \quad (1.61)$$

La contraction deux fois de suite de l'identité de Bianchi, (1.43),

$$D_\lambda R_{\mu\nu\sigma\rho} + D_\mu R_{\nu\lambda\sigma\rho} + D_\nu R_{\lambda\mu\sigma\rho} = 0,$$

nous donne, (1.44),

$$D^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} D_\nu R.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (1.61) peut être mise sous la forme

$$D^\mu G_{\mu\nu} = \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) D_\nu R.$$

En imposant $\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$, on a soit

$$\beta = -\frac{\alpha}{2},$$

soit

$$D_\nu R = 0.$$

La deuxième solution est à exclure. En effet si on multiplie l'équation (1.59) par $g^{\mu\nu}$ et en tenant compte de l'expression du tenseur $G_{\mu\nu}$ en termes du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, (1.60), on a

$$g^{\mu\nu} (\alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R) = 8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu},$$

qui se simplifie en

$$(\alpha + 4\beta) R = 8\pi G T,$$

où T est défini comme

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}.$$

Il s'ensuit que

$$D_\nu R = 0 \Rightarrow D_\nu T = 0,$$

qui n'est pas valable dans le cas anisotrope. Donc, finalement c'est la solution $\beta = -\alpha/2$ qui doit être retenue et l'expression du tenseur $G_{\mu\nu}$, (1.60), se précise davantage

$$G_{\mu\nu} = \alpha \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (1.62)$$

Il reste maintenant à déterminer la constante α . Ceci s'obtient en exigeant que dans la limite d'un champ faible statique la composante G_{00} du tenseur $G_{\mu\nu}$ se réduit à Δg_{00} , ce qui fixe la valeur de la constante α à -1 . Par conséquent,

$$G_{\mu\nu} = - \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (1.63)$$

Finalement, les équations de champ d'Einstein s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

On peut mettre cette dernière équation sous la forme suivante

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.65)$$

Il s'ensuit que dans le cas du vide, $T_{\mu\nu} = 0$, les équations d'Einstein s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.66)$$

Comme $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ sont tous symétriques, nous avons donc 10 équations indépendantes et autant de composantes indépendantes de la métrique $g_{\mu\nu}$ à déterminer. Cependant, l'identité de Bianchi, équivalente à $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$, réduit le nombre d'équations indépendantes à 6. A l'inverse de l'équation linéaire du champ de la gravité Newtonien, les équations d'Einstein sont non linéaires, ce qui rend très difficile la résolution de ces équations dans le cas général. Malgré ces complications, les équations d'Einstein expliquent à la perfection l'interaction espace matière. Autrement dit, ces équations expriment comment la matière déforme l'espace et comment l'évolution de la matière est liée à la structure géométrique de l'espace. Remarquons que si on renonce à la sixième condition et en utilisant le fait que

$$D^\mu g_{\mu\nu} = 0,$$

on peut ajouter à $G_{\mu\nu}$, c'est à dire au membre de gauche de l'équation (1.64) un nouveau terme possible de la forme $\Lambda g_{\mu\nu}$, de telle sorte que l'équation $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$ reste toujours vérifiée. Les équations d'Einstein s'écrivent alors comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.67)$$

où Λ est une nouvelle constante universelle de la nature appelée constante cosmologique. Cette constante a été introduite originalement par Einstein pour permettre à ses équations d'expliquer une cosmologie statique. En contractant l'équation (1.67), on obtient

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = -8\pi G g^{\mu\nu} T_{\mu\nu},$$

ce qui donne

$$R = 8\pi G T + 4\Lambda. \quad (1.68)$$

En remplaçant dans l'équation (1.67) le scalaire de courbure R par son expression (1.68), on obtient une deuxième forme pour les équations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.69)$$

Remarquons, comme le montre l'équation (1.67), qu'on peut considérer le terme ajouté $\Lambda g_{\mu\nu}$ comme une sorte de tenseur d'énergie-impulsion avec $T'_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$. Dans une telle interprétation $T'_{00} = \Lambda g_{00}$ peut être considéré comme la densité d'énergie du vide.

1.8 Métriques de Schwarzschild et de Schwarzschild-de Sitter

1.8.1 Introduction

La première solution des équations d'Einstein est la solution de Karl Schwarzschild, obtenue en 1916, quelques semaines après l'invention de la relativité générale par Albert Einstein en novembre 1915. La solution de Schwarzschild est la métrique qui correspond au champ de gravitation créé par une distribution de matière statique et à symétrie sphérique. Cette solution est d'une grande importance en cosmologie. Elle intervient dans la modélisation des étoiles, du système solaire et même des trous noirs. Nous allons l'utiliser pour étudier la déviation des photons par des lentilles gravitationnelles.

1.8.2 Métrique de Schwarzschild

Dans le cas statique à symétrie sphérique, on peut toujours trouver un système de coordonnées (t, x_1, x_2, x_3) tel que l'élément de ligne ds^2 prenne la forme suivante :

$$ds^2 = F(r)dt^2 - C(r)d\vec{r} \cdot d\vec{r} - D(r)(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - 2E(r)\vec{r} \cdot d\vec{r} dt, \quad (1.70)$$

où \vec{r} est le trivecteur défini par ses composantes $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$. En se plaçant dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , associé aux coordonnées "quasi-cartésiennes" (x_1, x_2, x_3) ,

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta, \end{cases} \quad (1.71)$$

l'élément de ligne, (1.70), peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)rdrdt - D(r)r^2dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad (1.72)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.73)$$

Faisons le choix d'un nouveau temps t' , lié à l'ancien temps t par la relation

$$t' = t + \Phi(r), \quad (1.74)$$

ce qui correspond à une resynchronisation des horloges. L'élément de ligne peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
ds^2 &= F(r) \left(dt' - \frac{d\Phi}{dr} dr \right)^2 - 2E(r)r dr \left(dt' - \frac{d\Phi}{dr} dr \right) \\
&\quad - D(r)r^2 dr - C(r) (dr^2 + r^2 dr^2) \\
&= F(r) dt'^2 - 2 \left(F(r) \frac{d\Phi}{dr} + E(r)r \right) dr dt' + \left(F(r) \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + 2E(r)r \frac{d\Phi}{dr} \right) dr^2 \\
&\quad - D(r)r^2 dr - C(r) (dr^2 + r^2 dr^2). \tag{1.75}
\end{aligned}$$

Faisons le choix de $\Phi(r)$ de telle manière à éliminer le terme en $dr dt'$ dans la métrique, ce qui donne

$$\frac{d\Phi}{dr} = -r \frac{E(r)}{F(r)} \tag{1.76}$$

et ds^2 prend alors la forme

$$ds^2 = F(r) dt'^2 - G(r) dr^2 - C(r) (dr^2 + r^2 dr^2), \tag{1.77}$$

avec

$$G(r) = r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right). \tag{1.78}$$

Faisons maintenant le choix d'une nouvelle coordonnée radiale r' telle que

$$r'^2 = r^2 C(r), \tag{1.79}$$

d'où

$$2r' dr' = \left(2rC(r) + r^2 \frac{dC}{dr} \right) dr \Rightarrow dr = \frac{2r' dr'}{2rC(r) + r^2 \frac{dC}{dr}} = \frac{r' dr'}{\frac{r^2}{2} \frac{dC}{dr} + rC(r)}.$$

L'élément de ligne prend alors la forme

$$ds^2 = B(r') dt'^2 - A(r') dr'^2 - r'^2 d\Omega^2, \tag{1.80}$$

avec

$$B(r') = F(r) \text{ et } A(r') = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}.$$

La forme de l'élément de ligne (1.80) est appelée forme standard de la métrique dans le cas statique et à symétrie sphérique. C'est la forme la plus utilisée dans les applications. En comparant à

$$ds^2 = +g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

on déduit les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées $(t', r', \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} g_{tt} &= B(r'), & g_{rr} &= -A(r'), \\ g_{\theta\theta} &= -r'^2, & g_{\varphi\varphi} &= -r'^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Donc le tenseur métrique est diagonal et est représenté par la matrice

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B(r') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r'^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Il vaut la peine de noter que la forme standard, (1.80), a été obtenue uniquement sur la base de considérations de symétrie. Achevons la détermination de (1.80), c'est à dire déterminons les fonctions inconnues $B(r')$ et $A(r')$, en faisant usage des équations d'Einstein, qui à l'extérieur de la distribution de masse s'écrivent

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, ce qui nécessite le calcul de ce dernier, qui lui même requiert le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Dans un but de simplification, on notera dans ce qui suit r' et t' , r et t respectivement.

En utilisant l'expression de la connexion affine en terme du tenseur métrique inverse, représenté par la matrice

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (1.83)$$

et des dérivées premières du tenseur métrique,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right),$$

on obtient pour les composantes non nulles de la connexion affine, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, \\ \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont données, en utilisant (1.84), par

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} - 1, \\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}, \\
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)},
\end{aligned} \tag{1.85}$$

où

$$' := \frac{d}{dr}.$$

Notons que seules les composantes diagonales du tenseur de Ricci sont différentes de zéro. Les équations d'Einstein se réduisent donc à :

$$R_{rr} = 0, \quad R_{\theta\theta} = 0, \quad R_{tt} = 0. \tag{1.86}$$

En faisant usage des expressions de R_{rr} et R_{tt} ,

$$\frac{R_{rr}}{A(r)} + \frac{R_{tt}}{B(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = 0.$$

ou

$$A(r)B'(r) + A'(r)B(r) = 0, \tag{1.87}$$

ce qui implique que

$$A(r)B(r) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.88}$$

Pour déterminer la constante C , utilisons le fait que la métrique se réduit à celle de Minkowski pour $r \rightarrow \infty$, c'est à dire que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1.$$

Il s'ensuit que C vaut 1 et

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \tag{1.89}$$

Donc l'élément de ligne se réduit à

$$ds^2 = B(r)dt^2 - \frac{1}{B(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (1.90)$$

En remplaçant $A(r)$ par son expression en terme de $B(r)$, les équations $R_{\theta\theta} = 0$ et $R_{rr} = 0$ se réduisent à :

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= -1 + rB'(r) + B(r) = 0, \\ R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB(r)} = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation $R_{rr} = 0$ est automatiquement satisfaite si $R_{\theta\theta} = 0$ l'est. En écrivant que $R_{\theta\theta} = 0$, on obtient l'équation suivante pour $B(r)$

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = 1 \Leftrightarrow B(r) = 1 + \frac{C}{r}.$$

Pour r suffisamment grand, on se trouve dans les conditions d'un champ faible statique, auquel cas la composante g_{tt} du tenseur métrique est liée au potentiel de Newton par la relation

$$g_{tt} \simeq 1 - \frac{2MG}{r}.$$

Il s'ensuit que

$$1 - \frac{2MG}{r} \simeq B(r) = 1 + \frac{C}{r},$$

d'où

$$C = -2MG.$$

Donc l'élément de ligne se réduit à

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.91)$$

IL est bien clair qu'en l'absence de gravitation $M \rightarrow 0$, cette métrique coïncide avec la métrique de Minkowski. Ceci d'une part. D'autre part, cette métrique présente deux points singuliers en $r = 0$ (le centre de la distribution de masse), et aussi en $r = 2MG$, appelé rayon de Schwarzschild. La première singularité est une singularité essentielle, c'est à dire qu'on ne peut pas la faire disparaître par un changement approprié du système de coordonnées. Par contre, la deuxième singularité est une singularité de coordonnées qui disparaît dans des systèmes de coordonnées appropriés (par exemple les systèmes de coordonnées d'Eddington-Finkelstein ou de Kruskal).

1.8.3 Métrique de Schwarzschild-de Sitter

Historiquement, l'introduction de la constante cosmologique dans les équations de la relativité générale a été faite par Einstein dans le but d'obtenir une solution correspondant à un univers statique. La constante cosmologique joue aujourd'hui un rôle essentiel en cosmologie car une valeur positive de cette dernière permet de rendre compte de l'accélération de l'expansion de l'univers mise en évidence par les observations actuelles. Signalons qu'il existe deux types d'univers selon le signe de la constante cosmologique. Dans le cas d'un univers isotrope et statique, la métrique de Schwarzschild est remplacée en présence d'une constante cosmologique par la métrique de Schwarzschild-de Sitter ou Schwarzschild-anti de Sitter, selon le signe, positif ou négatif, de la constante cosmologique, qui se réduisent asymptotiquement à la métrique de de Sitter ou à la métrique anti de Sitter respectivement.

Limitons nous au cas d'une constante cosmologique positive et déterminons l'élément de ligne de Schwarzschild-de Sitter correspondant. Comme on l'a vu précédemment les seules considérations de symétrie sphérique impliquent que l'élément de ligne est donné par, (1.80),

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2.$$

Mais maintenant, les équations d'Einstein s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

ou

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \Lambda g_{rr}, & R_{\theta\theta} &= \Lambda g_{\theta\theta}, \\ R_{\varphi\varphi} &= \Lambda g_{\varphi\varphi}, & R_{tt} &= \Lambda g_{tt}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

En faisant usage des expressions du tenseur de Ricci obtenues précédemment, (1.85), nous obtenons

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \Lambda g_{rr} \Leftrightarrow \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)} = -\Lambda A(r), \\ R_{\theta\theta} &= \Lambda g_{\theta\theta} \Leftrightarrow \frac{r}{2A(r)} \left(-\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} - 1 = -\Lambda r^2, \\ R_{\varphi\varphi} &= \Lambda g_{\varphi\varphi} \Leftrightarrow \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = -\Lambda r^2 \sin^2 \theta, \\ R_{tt} &= \Lambda g_{tt} \Leftrightarrow -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)} = \Lambda B(r). \end{aligned} \quad (1.93)$$

En combinant les équations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{R_{rr}}{A(r)} + \frac{R_{tt}}{B(r)} &= -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) = -\Lambda + \Lambda = 0 \\ \Rightarrow A(r) &= \frac{C}{B(r)},\end{aligned}$$

avec la constante C indépendante de Λ . En remplaçant A par C/B dans l'équation $R_{\theta\theta} = -\Lambda r^2$, on obtient

$$\left(r \frac{B}{C} \right)' = 1 - \Lambda r^2,$$

dont la solution est

$$B = C \left(\frac{D}{r} + 1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right),$$

où D est une deuxième constante. Il s'ensuit que $A(r)$ est donné par

$$A = \left(\frac{D}{r} + 1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1}.$$

En imposant que la métrique de Schwarzschild-de Sitter se réduise à celle Schwarzschild dans la limite d'une constante cosmologique nulle, Il vient que

$$D = -2GM \text{ et } C = 1.$$

Finalement, l'élément de ligne de Schwarzschild-de Sitter s'écrit comme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.94)$$

Cette métrique est appelée métrique de Schwarzschild-de Sitter. Le terme en Λ , qui est indépendant de M , correspond à une force centrale répulsive de l'ordre de $\frac{\Lambda r}{3}$. C'est une force antigravitationnelle importante à grande échelle.

Nous remarquons qu'en l'absence de la constante cosmologique, la métrique de Schwarzschild-de Sitter se réduit à la métrique de Schwarzschild donnée plus haut. Nous remarquons également si $M \rightarrow 0$, c'est à dire en l'absence de la gravitation, nous obtenons la métrique de de Sitter donnée par la relation

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.95)$$

On observe que la métrique de de Sitter présente une singularité à $r \rightarrow \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ ce qu'on appelle horizon de de Sitter. On peut montrer, comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild,

qu'en fait cette singularité n'est qu'apparente, par un changement approprié de système de coordonnées.

Dans le but de visualiser la géométrie de Schwarzschild-de Sitter, nous plongeons dans un espace à 3 dimensions une projection statique de cette géométrie. On prend $t = cst$ et $\theta = \pi/2$, c'est à dire qu'on se place dans le plan équatorial. Prenons d'abord le cas où le terme $\frac{MG}{r}$ est dominant par rapport à Λr^2 . Dans ce cas l'élément de ligne de Schwarzschild-de Sitter, (1.94) se réduit à

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.96)$$

En coordonnées cylindriques $(r, \varphi, z(r))$ l'élément de ligne (dl^2) en géométrie Euclidienne est donné par :

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

où r correspond à $(x^2 + y^2)^{1/2}$ et φ à l'angle de rotation autour l'axe des z . En identifiant avec la métrique de la projection, on a

$$\left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$z^2(r) = 8MG(r - 2MG), \quad (1.97)$$

qui représente ce qu'on appelle la géométrie de Flamm. La valeur $r_g = 2MG$ est le rayon de Schwarzschild qui correspond au cercle central de la parabolöide ($z = 0$). Notons que pour des corps ordinaires le rayon r_g se trouve bien à l'intérieur de la distribution de masse, où la solution discutée n'est plus valable. Par exemple, $r_g = 2.9km$ pour le soleil, $r_g = 0.88cm$ pour la terre .

Dans le cas où c'est le terme Λr^2 qui est dominant par rapport à $\frac{MG}{r}$, c'est dire loin de la distribution de matière, l'élément de ligne de la projection est donné par :

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.98)$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}r = \sin \theta \Rightarrow dr = \sqrt{3/\Lambda} \cos \theta d\theta$$

En remplaçant dans (1.98), on obtient

$$dl^2 = \frac{3}{\Lambda}(d\theta^2 + \sin^2 \theta \varphi^2),$$

ce qui représente la métrique d'une sphère de rayon $\sqrt{3/\Lambda}$. On remarque que la singularité en $r = \sqrt{3/\Lambda}$ a disparu, ce qui signifie que cette singularité est dû à un mauvais choix de coordonnées. En conclusion la surface qui remplace la parabolöide de Flamm dans le cas de la géométrie de Schwarzschild-de Sitter est une combinaison de la parabolöide de Flamm et de la sphère. La région de l'espace qui nous intéresse est entre les deux points de singularité $r = 2MG$ et $r = \sqrt{3/\Lambda}$, autrement dit, entre l'horizon de Schwarzschild et l'horizon de de Sitter.

Chapitre 2

Application à l'effet de lentille gravitationnelle en présence d'une constante cosmologique

2.1 Déviation de la lumière

2.1.1 Introduction

L'idée de la déviation de la lumière par un corps massif n'est pas récente. Newton déjà entrevit cette possibilité, sans cependant pouvoir démontrer la validité de son idée par l'expérience ou par l'observation. Ce n'est qu'en 1804 que l'astronome Soldner mit en pratique l'idée de Newton en calculant, dans le cadre de la mécanique Newtonienne, l'angle de déviation. La déviation trouvée, pour un rayon passant au bord du soleil, est de 0.875 secondes d'arc. Le calcul a été repris un siècle plus tard par Albert Einstein dans le cadre de la relativité générale. Cette dernière stipule qu'une masse comme le soleil déforme localement l'espace-temps. Les rayons lumineux qui passent au voisinage d'une telle masse suivent des géodésiques d'un espace-temps courbé. Einstein prédit en 1915 qu'un rayon lumineux rasant la surface du soleil doit être dévié d'un angle égal à 1.75 secondes d'arc, soit exactement le double de la valeur calculée par Soldner. Cette valeur a été confirmée expérimentalement avec une précision de $\simeq 20\%$ par Eddington pour la première fois lors d'une éclipse solaire en 1919. Les observations ultérieures ont confirmé ce résultat avec des précisions allant jusqu'à 0.1%. Ce résultat exclut le résultat classique et valide le point de vue de la théorie de la relativité d'Einstein. L'expression analytique de la déviation, dans le cadre de cette théorie, par une masse quelconque, dans la solution de Schwarzschild est donnée par la relation $\alpha = 4GM/(c^2b)$, où M est la masse déflectrice, b le paramètre d'impact du rayon lumineux lorsqu'il passe près de la masse, c est la vitesse de la lumière

[2]. Dans le cas du soleil $b = R$ (rayon du soleil), M est la masse du soleil, G est la constante de la gravitation.

La lumière étant déviée par le champ gravitationnel créé par la distribution de masse, celle-ci peut dans certains cas jouer le rôle de lentille gravitationnelle, c'est à dire permettre des effets de multiplication d'image et d'amplification de la lumière. Ce triplet cosmique : une source de lumière, un corps massif ou défecteur, un observateur définit une configuration d'optique gravitationnelle, un banc d'optique cosmique. Ce phénomène était prévu par Einstein lui même. Einstein avait même prédit que si l'observateur, le défecteur et la source étaient parfaitement alignés, l'image de la source est transformée en anneau parfait centré sur le défecteur, appelé depuis lors anneau d'Einstein. En 1937, Franz Zwicky percevait la richesse du phénomène comme moyen d'estimation de la masse de la lentille et la possibilité de détecter des objets lointains grâce au phénomène d'amplification. Ceci d'une part. D'autre part, ce phénomène peut nous renseigner sur les distances astronomiques des objets et constitue un point clé dans la compréhension de la formation et de l'évolution des galaxies, ainsi que des grandes structures de l'univers. Le calcul du temps de retard entre les différentes images de la source, en tenant compte des différents chemins parcourus par la lumière, peut fournir une mesure précise de la constante de Hubble.

Bien entendu, l'intensité du phénomène est évidemment variable suivant la distribution de matière dans le défecteur et dépend des positions apparentes sur le ciel de la source et du défecteur. De la déviation, on peut déduire approximativement que la déviation gravitationnelle est en général de très faible amplitude : environ une seconde d'arc pour une masse défectrice comme le soleil, moins de 10 secondes d'arc pour une galaxie de 10^{11} masses solaire, et environ 30 secondes d'arc pour un amas de galaxies (ensemble de galaxies) de 10^{15} masses solaire, ($1 \text{ radian} = 2 \times 10^5$ secondes d'arc). Notons que les paramètres d'impact typiques pour une galaxie et un amas de galaxies sont respectivement de 1 kpc et de 100 kpc, (1 parsec=31000 milliards de kilomètres).

C'est avec l'amélioration des techniques de détection que l'on a redécouvert le phénomène 41 ans après leur prédiction. Walsh, Carswell et Weymann détectèrent en 1979 le premier exemple d'un quasar, noyau actif d'une galaxie, baptisé Q0957+561 dont l'image est dédoublée par une galaxie, jouant le rôle de lentille gravitationnelle. Le quasar a deux images séparées de 6 secondes d'arc. Après cette découverte, des dizaines d'images multiples de quasars ont été découvertes, avec deux, trois ou quatre composantes.

Les données observationnelles actuelles montrent que l'univers est dominé par une certaine énergie noire, énergie du vide, qui représente 75% de l'univers. Cette énergie mystérieuse, responsable de l'expansion accélérée de l'univers, agit comme une force anti gravitationnelle répulsive à grande échelle. Plusieurs explications ont été données pour expliquer ce phénomène. Le candidat favori pour expliquer cette énergie noire est la constante cosmologique. Jusqu'en 2007, l'opinion officielle était que la constante cosmologique ne contribue pas au phénomène de lentille gravitationnelle [3, 4, 5, 6, 7, 8], la raison invoquée étant que la constante cosmologique disparaissait de l'équation de la trajectoire dans le cas

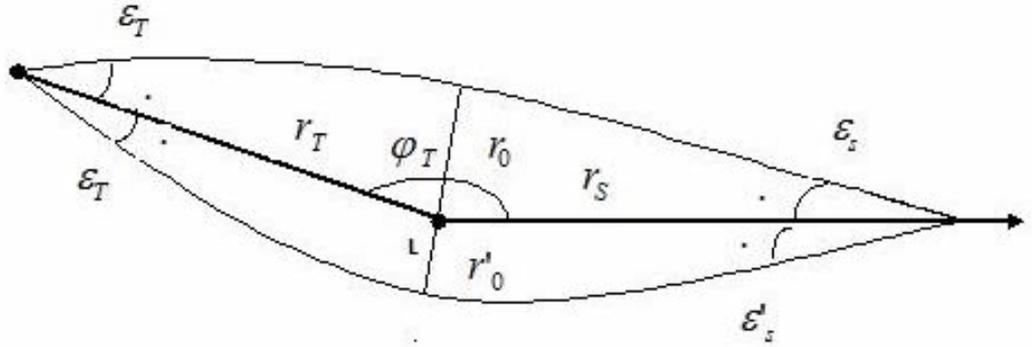


FIG. 2.1 – Double image de la source

d'une particule non massive, comme c'est le cas pour un photon. Cette disparition est un pur accident de calcul qui ne se produit d'ailleurs pas dans le cas d'une particule massive. Cette croyance fut remise en cause par Rindler et Ishak dans leur premier article sur le sujet, [1]. Ceci fut le début d'une riche controverse. Le résultat de Rindler et Ishak a été confirmé depuis par Lake, [9], Sereno, [10, 11], Schücker, [12, 13], Miraghaei et Nouri-Zonoz, [14], Kantowski, Chen et Dai, [15], mais infirmé par Khriplovich et Pomeransky, [16], Park, [17], Gibbons, Warnick et Werner, [18], Simpson, Peacock et Heavens, [19]. Nous allons déterminer dans la section suivante, la dépendance en la constante cosmologique du temps de retard des photons d'un quasar d'arrière plan défléchis par un amas de galaxies en présence d'une constante cosmologique.

2.1.2 Hypothèses et géométrie du phénomène

Dans un espace vide, considérons le banc d'optique cosmique présenté sur la figure 2.1. Il est formé d'une source S , un quasar, d'un amas de galaxie L , jouant le rôle d'une lentille gravitationnelle, et d'un observateur T .

On suppose que l'observateur et la source sont au repos par rapport à la lentille et on néglige leurs masses par rapport à cette dernière. La lentille est supposée statique et à symétrie sphérique. On prend un système de coordonnées centré en L . En raison de la symétrie sphérique, on utilise des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On sait que dans le cas à symétrie sphérique, la trajectoire d'une particule test est contenue dans un plan. On peut toujours faire le choix d'un système de coordonnées sphériques de telle manière que le

mouvement se fait dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les coordonnées polaires de la source et de l'observateur dans ce repère sont données par $(r_S, \varphi_S = 0)$ et (r_T, φ_T) respectivement. Le champ gravitationnel à l'extérieur de la lentille est donné par la métrique de Schwarzschild-de Sitter, (1.96)

$$ds^2 = Bdt^2 - B^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2, \quad \theta = \pi/2, \quad B = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2.$$

On suppose que $\Lambda r^2/3 < 9/10$ pour éviter la singularité de coordonnée à l'équateur de la sphère de de Sitter. On suppose également que $\delta := GM/r_0 \ll 1$ et nous ne gardons que les termes linéaires en cette quantité.

Soient r_0, r'_0 les paramètres des géodésiques (peri-lens) et α_T et α'_T les angles de déviation sur les deux trajets respectivement, figure 2.1. On définit $\epsilon_S := r_S |d\varphi/dr(r_S)|$, $\epsilon'_S := r_S |d\varphi'/dr(r_S)|$, $\epsilon_T := r_T |d\varphi/dr(r_T)|$ et $\epsilon'_T := r_T |d\varphi'/dr(r_T)|$ comme les angles de coordonnées de la source S et de l'observateur T sur les trajets 1 et 2 respectivement. Notons aussi que les angles intervenant dans le phénomène sont très faibles, de telle manière qu'on puisse les assimiler à leurs tangentes ($\alpha \approx \tan \alpha$).

2.1.3 Intégration des géodésiques

L'équation du mouvement du photon en chute libre dans le champ de gravitation de la lentille est donnée par

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0, \quad (2.1)$$

où p est un paramètre affine décrivant la trajectoire du photon.

En faisant $\theta = \pi/2$ dans le résultat du calcul des symboles de Christoffel de la sous-section (1.8.3), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= (dB/dr)/(2B), & \Gamma_{tt}^r &= B(dB/dr)/2, & \Gamma_{rr}^r &= -(dB/dr)/(2B), \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -rB, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= 1/r. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Les équations de la géodésique, (2.1), prennent alors la forme

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{1}{B} \frac{dB}{dr} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 r}{dp^2} - \frac{1}{2B} \frac{dB}{dr} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - rB \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{B}{2} \frac{dB}{dr} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0. \quad (2.5)$$

En divisant les équations (2.3) et (2.4) par dt/dp et $d\varphi/dp$ respectivement, on obtient

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0. \quad (2.7)$$

De l'équation (2.6), on déduit que,

$$\frac{dt}{dp} = \frac{C}{B}. \quad (2.8)$$

En faisant le changement de paramètre affine $p' = Cp$, (2.8) peut être mise sous la forme

$$\frac{dt}{dp'} = \frac{1}{B}. \quad (2.9)$$

Dans la suite, le paramètre p' sera réappelé p . L'équation (2.7) s'intègre en

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J. \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est une conséquence de l'invariance sous les rotations. J est interprété comme le moment angulaire par unité de masse.

Les équations (2.9) et (2.10) permettent de mettre l'équation (2.5) sous la forme

$$\frac{d^2 r}{dp^2} - \frac{1}{2B} \frac{dB}{dr} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{J^2}{r^3} B + \frac{1}{2B} \frac{dB}{dr} = 0. \quad (2.11)$$

En multipliant cette dernière équation par $2B^{-1}(dr/dp')$, on obtient

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} \right] = 0. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) s'intègre en

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -E. \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) est une conséquence de l'invariance sous les translations temporelles et la constante E est interprétée comme l'énergie par unité de masse. En faisant usage des relations (2.9), (2.10) et (2.13), l'élément de ligne réduit au plan équatorial,

$$d\tau^2 = Bdt^2 - B^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2, \quad (2.14)$$

se réduit à

$$d\tau^2 = Edp^2. \quad (2.15)$$

Sachant que les photons émis par la source suivent des géodésiques de genre lumière $d\tau = 0$, $E = 0$, et l'équation (2.13) se simplifie en

$$\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = 1 - \frac{J^2}{r^2} B. \quad (2.16)$$

Des équations (2.10) et (2.16), on déduit que

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{r^2/J^2 - B}. \quad (2.17)$$

Pour le photon du trajet du haut, on a $dr/d\varphi(r_0) = 0$ en $r = r_0$, ce qui implique que $J = r_0 \sqrt{B(r_0)}$. En remplaçant J par son expression dans l'équation (2.16), on arrive à

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r}{r+r_0} \right]^{-1/2}. \quad (2.18)$$

Notons que pour le photon du trajet du bas, on obtient une expression analogue à (2.18),

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r \sqrt{r^2/r_0'^2 - 1}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0'} \frac{r}{r+r_0'} \right]^{-1/2}. \quad (2.19)$$

Il est clair que $d\varphi/dr$ est négatif entre r_S et r_0 et est positif entre r_0 et r_T pour la première trajectoire. Par contre pour la deuxième trajectoire $d\varphi/dr$ est positif entre r_S et r_0' et est négatif entre r_0' et r_T . Si on fait l'hypothèse d'un champ faible ($GM/r_0 \ll 1$), et si on suppose que $r_0 \ll r_S, r_T$ alors $d\varphi/dr$ peut être approximé par :

$$\frac{d\varphi}{dr} \sim \frac{1}{r \sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r_0} \frac{r}{r+r_0} \right]. \quad (2.20)$$

Il vaut la peine de remarquer que l'équation (2.17) peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{J^2} - Bu^2$$

avec

$$u := \frac{1}{r}$$

En dérivant les deux membres de cette équation par rapport à φ , on trouve

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2. \quad (2.21)$$

En intégrant l'équation (2.18) on aura φ en fonction de r . D'un autre côté, l'intégration de l'équation (2.21) nous donne r en fonction de φ . Dans cette thèse, on utilise la première équation c'est à dire l'équation (2.18) pour étudier le phénomène de déviation de la lumière. On peut remarquer que la relation (2.18) nous permet de calculer les angles de coordonnées. On a

$$\begin{aligned} \epsilon_S &= r_S |d\varphi/dr(r_S)| = \frac{r_S}{r_S \sqrt{r_S^2/r_0^2 - 1}} \left[1 - \frac{2GM}{r_S} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r_S}{r_S + r_0} \right]^{-1/2} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{r_S^2/r_0^2 - 1}} \sim \frac{r_0}{r_S}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De même,

$$\epsilon'_S = r_S |d\varphi/dr(r_S)| \sim \frac{r'_0}{r_S}, \quad \epsilon_T = r_T |d\varphi/dr(r_T)| \sim \frac{r_0}{r_T}, \quad \epsilon'_T = r_T |d\varphi/dr(r_T)| \sim \frac{r'_0}{r_T}. \quad (2.23)$$

Il en résulte que

$$\epsilon_S r_S \sim \epsilon_T r_T \sim r_0; \quad \epsilon'_S r_S \sim \epsilon'_T r_T \sim r'_0. \quad (2.24)$$

Notons que la relation exacte (2.18) aussi bien que son approximation (2.20) ne font pas intervenir la constante cosmologique. C'est cette constatation qui a amené les physiciens à croire que la constante cosmologique n'a pas d'influence sur le phénomène de la déviation de la lumière [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Cependant, comme nous allons le voir, la contribution de la constante cosmologique vient en fait de la métrique de l'espace-temps elle-même indépendamment des géodésiques des photons [1]. Pour voir cette dépendance, cherchons d'abord une relation géométrique liant les différents paramètres du banc optique à savoir

les distances cosmologiques intervenant dans le phénomène : distance observateur-source, distance observateur-lentille, la masse de la lentille et les angles de déviation α_T , α'_T . Calculons pour cela, dans une première étape, φ_T en fonction de r_S , r_T , ϵ_S et φ'_T en fonction de r'_S , r'_T , ϵ'_S .

Pour le premier trajet, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_T - \varphi_S &= \varphi_T - \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi_S \Leftrightarrow \\ \varphi_T - 0 &= \varphi_T - \varphi_0 - (\varphi_S - \varphi_0) \Leftrightarrow \\ \varphi_T &= \int_{r_0}^{r_T} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr + \int_{r_0}^{r_S} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr.\end{aligned}\quad (2.25)$$

D'autre part, nous avons

$$\int \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr = I_1 + GM I_2 + \frac{GM}{r_0} I_3, \quad (2.26)$$

avec

$$I_1 = \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} = -\arcsin(r_0/r), \quad (2.27)$$

$$I_2 = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} = \frac{1}{r_0} \frac{\sqrt{r^2/r_0^2 - 1}}{(r/r_0)}, \quad (2.28)$$

$$I_3 = \int \frac{dr}{(r+r_0) \sqrt{r^2/r_0^2 - 1}} = \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}. \quad (2.29)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\varphi_T &= \pi - \arcsin \frac{r_0}{r_T} - \arcsin \frac{r_0}{r_S} + \frac{GM}{r_0} \left(\frac{\sqrt{r_T^2/r_0^2 - 1}}{(r_T/r_0)} + \sqrt{\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0}} + \frac{\sqrt{r_S^2/r_0^2 - 1}}{(r_S/r_0)} + \sqrt{\frac{r_S - r_0}{r_S + r_0}} \right) \\ &\sim \pi - \frac{\epsilon_S r_S}{r_T} - \frac{\epsilon_S r_S}{r_S} + \frac{4GM}{\epsilon_S r_S}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Donc

$$\varphi_T \sim \pi - \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) + \frac{4GM}{\epsilon_S r_S}. \quad (2.31)$$

De façon analogue, on trouve pour la deuxième trajectoire la relation suivante pour l'angle φ'_T

$$\begin{aligned}\varphi'_T &= - \int_{r'_0}^{r_T} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr - \int_{r'_0}^{r_S} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr \\ &\sim -\pi + \epsilon'_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) - \frac{4GM}{\epsilon'_S r_S}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

En imposant que les deux trajectoires se rencontrent au niveau de la terre, c'est à dire $2\pi + \varphi'_T = \varphi_T$, on a en utilisant les expressions de φ_T et φ'_T

$$\pi - \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) + \frac{4GM}{\epsilon_S r_S} = \pi + \epsilon'_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) - \frac{4GM}{\epsilon'_S r_S}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) (\epsilon_S + \epsilon'_S) &= \frac{4GM}{r_S} \left(\frac{\epsilon_S + \epsilon'_S}{\epsilon_S \epsilon'_S} \right) \Rightarrow \\ \frac{r_S}{r_T} &= \frac{4GM}{\epsilon_S \epsilon'_S r_S} - 1.\end{aligned}\quad (2.33)$$

On en déduit que,

$$\frac{r_T}{r_S} \sim \frac{4GM}{\epsilon_T \epsilon'_T r_T} - 1,\quad (2.34)$$

où on a fait usage de la relation (2.24). Remarquons que la relation (2.34) fait intervenir la masse de la lentille et les distances cosmologiques à savoir les distances observateur-source, observateur-lentille et les angles de coordonnées ϵ_T , ϵ'_T .

Dans leur travail, Rindler et Ishak [1] cherchent plutôt r ou u en fonction de φ_T et M . En partant de l'équation différentielle (2.21), la solution obtenue par les auteurs est donnée par

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\sin \varphi}{R} + \frac{3MG}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right),\quad (2.35)$$

où $\sin \varphi / R$ est une solution de

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0,$$

ce qui signifie que $R/\sin \varphi$ est la géodésique du photon dans l'espace plat. R est une constante du mouvement, liée à r_0 par la relation suivante

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{R} + \frac{MG}{R^2},\quad (2.36)$$

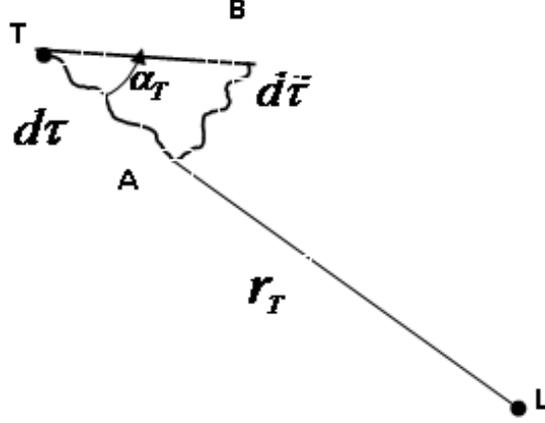


FIG. 2.2 – Mesure de l’angle physique α_T en ns/ns.

où on a remplacé φ par $\pi/2$ dans la relation (2.35) car $\left. \frac{d(1/r)}{d\varphi} \right|_{\pi/2} = 0$. En utilisant la relation (2.35), on peut également écrire r_T en fonction du paramètre R . En effet, on a pour $\varphi_T = \pi$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_T} &= \frac{\sin \pi}{R} + \frac{3MG}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\pi \right) = \frac{2MG}{R^2} \\ \Rightarrow r_T &= \frac{R^2}{2MG}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Exprimons maintenant les angles de coordonnées ϵ_T , ϵ'_T en fonction des angles physiques α_T , α'_T . Soit TAB un triangle élémentaire utilisé par l’observateur pour mesurer l’angle de déviation. Les points T , A et B sont caractérisés par les coordonnées $T(0, r_T, \varphi_T)$, $A(dt, r_T - dr, \varphi_T)$ et $B(dt + d\tilde{t}, r_T - dr, \varphi_T - d\varphi)$. Dans le but de mesurer l’angle physique on envoie un photon de T vers A et un deuxième photon de A vers B . En utilisant la relation entre les temps propres $d\tau$ et $d\tilde{\tau}$ et les temps de coordonnées dt et $d\tilde{t}$ correspondants, nous avons

$$\tan \alpha_T = \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} = \frac{\sqrt{B(r_T)} d\tilde{t}}{\sqrt{B(r_T)} dt} = \frac{d\tilde{t}}{dt}. \quad (2.38)$$

Comme le photon, particule de masse nulle, emprunte une géodésique de genre lumière, les intervalles de temps propres entre T et A

$$ds_{TA}^2 = B(r_T) dt^2 - B(r_T)^{-1} dr^2 \quad (2.39)$$

et entre A et B

$$ds_{AB}^2 = B(r_T) d\tilde{t}^2 - r_T^2 d\varphi^2 \quad (2.40)$$

sont nuls, c'est à dire

$$B(r_T) dt^2 - B(r_T)^{-1} dr^2 = 0 \quad (2.41)$$

et

$$B(r_T) d\tilde{t}^2 - r_T^2 d\varphi^2 = 0. \quad (2.42)$$

Il s'ensuit que

$$dt = B(r_T)^{-1} dr \quad (2.43)$$

et

$$d\tilde{t} = \frac{r_T}{\sqrt{B(r_T)}} d\varphi. \quad (2.44)$$

En substituant à dt et à $d\tilde{t}$ leurs expressions respectives (2.43) et (2.44) dans (2.38), on obtient

$$\tan \alpha_T = \sqrt{B(r_T)} r_T \frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{B(r_T)} \tan \epsilon_T. \quad (2.45)$$

Comme les angles α_T et ϵ_T sont très petits, $|\alpha_T| \ll 1$ et $|\epsilon_T| \ll 1$,

$$\tan \alpha_T \simeq \alpha_T$$

et

$$\tan \epsilon_T \simeq \epsilon_T$$

et la relation (2.45) se simplifie en

$$\alpha_T \simeq \sqrt{B(r_T)} \epsilon_T. \quad (2.46)$$

En procédant exactement de la même manière, on obtient la relation entre α'_T et ϵ'_T . Les relations (2.45) et (2.46) sont remplacées respectivement par

$$\tan \alpha'_T = \sqrt{B(r_T)} r_T \frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{B(r_T)} \tan \epsilon'_T \quad (2.47)$$

et

$$\alpha'_T \simeq \sqrt{B(r_T)} \epsilon'_T. \quad (2.48)$$

En remplaçant r_T et r_0 par leurs expressions respectives, (2.37) et (2.36), on retrouve l'angle de déviation obtenu par Rindler et Ishak [1]. Finalement, en utilisant (2.46) et (2.48), on peut réécrire la relation (2.34) en termes des angles physiques α_T et α'_T

$$\frac{r_T}{r_S} \sim \frac{4GM}{\alpha_T \alpha'_T r_T} \left(1 - \frac{\Lambda r_T^2}{3} \right) - 1, \quad (2.49)$$

Il est clair d'après les relations (2.45), (2.46), (2.47) et (2.48) que la constante cosmologique intervient dans le phénomène de la déviation de la lumière. En particulier, pour une valeur positive de la constante cosmologique, l'angle de déviation diminue. Cet effet est attendu car il est dû à la présence d'une force répulsive importante à grande échelle dont le rôle est de diminuer l'effet de la gravitation. On remarque également que l'énergie du photon, ou la longueur d'onde, n'intervient pas dans toutes ces relations, ce qui signifie que la déviation de la lumière cosmologique est achromatique à l'inverse du phénomène réalisé dans les laboratoires d'optique.

Comme prévu, la dernière équation, (2.49), montre à quel point le phénomène de la déviation de la lumière est riche en applications en cosmologie. Cette équation, très importante, nous permet d'accéder à la masse de la lentille ou aux distances cosmologiques de la source et de la lentille. Bien entendu, la correction apportée par la constante cosmologique sur ces paramètres, est négligeable à notre échelle vu la faible valeur, donnée par la cosmologie, de Λ ($\Lambda \simeq (1.5 \pm 0.7) \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$), mais on doit en tenir compte à l'échelle cosmologique ou extragalactique. La valeur prise pour cette constante diffère selon le modèle cosmologique utilisé pour décrire l'évolution de l'univers. C'est pour cela, qu'il est préférable de trouver d'autres limites sur la valeur de Λ basées sur l'observation de l'angle de déviation de la lumière par des galaxies ou des amas de galaxies. L'équation (2.49) peut servir à déterminer Λ connaissant $\alpha_T, \alpha'_T, r_T, r_S$ et M . Pour atteindre cet objectif, il faut déterminer les distances cosmologiques de la source et de la lentille intervenant dans cette dernière équation par d'autres méthodes.

Un paramètre qui sert à calculer les distances cosmologiques est le décalage spectral vers le rouge (redshift en anglais). En fait, les redshifts de la source et de la lentille peuvent être convertis en distances lumineuses vues depuis la terre. A partir de là on peut déterminer les distances de coordonnées r_T, r_S . Cherchons dans une première étape la correspondance entre distances lumineuses et distances de coordonnées, puis dans une deuxième étape le lien entre le décalage spectral et la distance lumineuse.

Soit dS la surface d'une plaque sensible du récepteur au niveau de l'observateur. Le flux des photons reçu par dS , de chandelles standards tel que les céphéides, supernova, qui rayonnent isotropiquement à partir de la lentille, provient de l'angle solide $d\Omega$.

La distance lumineuse vue depuis la terre est donnée par

$$\frac{dS}{d\Omega} = d_L^2 \quad (2.50)$$

d_L est par définition la distance lumineuse de la lentille. La définition de la distance lumineuse est motivée par le fait que dans un espace à trois dimensions, pour un observateur qui se trouve sur la surface extérieure d'une sphère de rayon R centrée sur la source. dS est égal à $d\Omega R^2$ où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide et $dS/d\Omega$ est donc juste le rayon de la sphère.

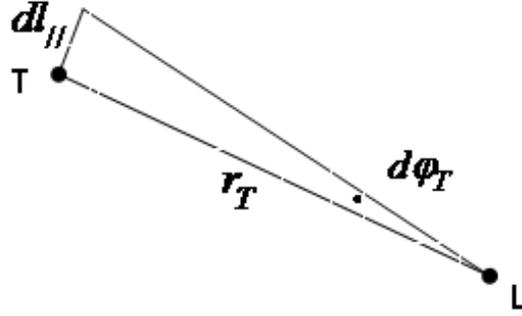


FIG. 2.3 – Distance lumineuse de la lentille vue de la terre.

La surface dS peut être obtenue en termes des temps propres de photons tests se déplaçant sur les arêtes de dS . Nous avons

$$dS = d\tau d\tilde{\tau} \quad (2.51)$$

où $d\tau$ et $d\tilde{\tau}$ sont respectivement les temps propres de vol de photons tests le long des arêtes appartenant au plan $\theta = \pi/2$ et perpendiculaire à celui-ci. L'élément d'intervalle d'espace-temps pour un photon se déplaçant le long de l'arête appartenant au plan $\theta = \pi/2$ est

$$ds^2 = 0 = B(r_T)dt^2 - r_T^2 d\varphi_T^2, \quad (2.52)$$

ce qui donne

$$d\tau = \sqrt{B(r_T)}dt = r_T d\varphi_T \quad (2.53)$$

Pour des raisons de symétrie, on trouve le même temps propre pour le photon se déplaçant le long de l'arête \perp au plan $\theta = \pi/2$. Donc,

$$d\tilde{\tau} = r_T d\varphi_T \quad (2.54)$$

L'angle solide formé par les deux arêtes de dS est égal à $d\varphi_T^2$. On obtient donc

$$dL = r_T \quad (2.55)$$

En ce qui concerne la source S, elle rayonne isotropiquement à une distance r_S de la lentille, sous l'angle physique α_S dont la période est $2\pi B(r_S)^{1/2}$. Nous avons $dS = dl_{||}dl_{\perp}$ tel que $dl_{||} \in$ au plan ($\theta = \pi/2$), et $dl_{\perp} \perp$ au plan ($\theta = \pi/2$). Le temps de vol d'un photon test traversant la longueur $dl_{||}$ est $d\tau_{||} = r_T |d\varphi_T|$.

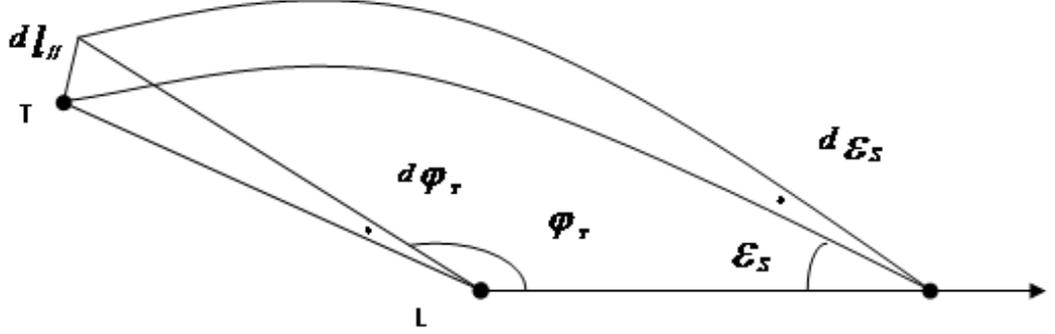


FIG. 2.4 – Distance lumineuse de la source vue de la terre.

En réécrivant cette relation en terme de l'angle de coordonnée et de la distance de coordonnée de la source, nous obtenons

$$\varphi_T \sim \pi - \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) + \frac{4GM}{\epsilon_S r_S}$$

Si on prend la différentielle de cette relation, on obtient

$$d\varphi_T \sim - \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) d\epsilon_S - \frac{4GM}{\epsilon_S^2 r_S} d\epsilon_S. \quad (2.56)$$

En utilisant l'équation (2.33)

$$4GM = \left(1 + \frac{r_T}{r_S} \right) \epsilon_T \epsilon_T' r_T. \quad (2.57)$$

En utilisant les relations (2.24), (2.46), (2.48) et (2.57), l'équation (2.56) se simplifie en

$$d\varphi_T \sim - \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) \left(1 + \frac{\epsilon_T'}{\epsilon_T} \right) d\epsilon_S \sim - \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) \left(1 + \frac{\alpha_T'}{\alpha_T} \right) \frac{d\alpha_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}, \quad (2.58)$$

ce qui donne

$$d\ell_{ll} = r_T |d\varphi_T| \sim r_T \left(1 + \frac{r_S}{r_T} \right) \left(1 + \frac{\alpha_T'}{\alpha_T} \right) \frac{d\alpha_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}. \quad (2.59)$$

La distance lumineuse de la source dans le plan $\theta = \pi/2$, est donnée par la relation

$$d_S = \frac{d\ell_{//}}{d\alpha_S} \sim (r_T + r_S) \left(1 + \frac{\epsilon'_T}{\epsilon_T}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}} \quad (2.60)$$

$$\sim (r_T + r_S) \left(1 + \frac{\alpha'_T}{\alpha_T}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}} \quad (2.61)$$

En particulier, si la source, la lentille et l'observateur sont alignés, l'équation (2.58) devient

$$d\varphi_T \sim -4d\epsilon_S \sim -4 \frac{d\alpha_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}} \sim -\frac{d\ell_{//}}{r_T} \quad (2.62)$$

$$\Rightarrow d_S \sim \frac{4r_T}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}. \quad (2.63)$$

Il est clair si $d\epsilon_S$ augmente, $d\varphi_T$ diminue. En l'absence de la constante cosmologique, (2.63) se simplifie en

$$d_S \sim 4r_T \quad (2.64)$$

Dans un espace plat la distance lumineuse s'identifie à la distance propre de l'objet. Cependant, on voit bien que ce n'est pas le cas dans la relation (2.64) car la distance propre entre l'observateur et la source est $2r_T$. Donc, on a un facteur 2 devant la distance propre entre l'observateur et la source dans la relation (2.64), ce qui veut dire qu'on a un dédoublement du flux de la source. Ce phénomène d'amplification est une propriété des lentilles gravitationnelles, une propriété importante qui nous permet de voir les sources les plus lointaines. On parle également du phénomène de magnification ou amplification lumineuse de la source qui est définie comme le rapport entre le flux total de l'image (énergie par unité de temps, unité de surface d'un détecteur donné) et le flux de la source. Dans le cas d'un objet ponctuel, on parle d'amplification dans la mesure où on n'observe pas une modification de la taille de la source mais toujours une magnification. C'est grâce à l'amplification lumineuse de la source qu'on a identifié des phénomènes de déviation de la lumière par des étoiles jouant le rôle de lentilles gravitationnelles.

Revenons maintenant au cas général du calcul de la distance lumineuse de la source. Nous avons déjà calculé $d\ell_{//}$. Il nous reste à calculer $d\ell_{\perp}$.

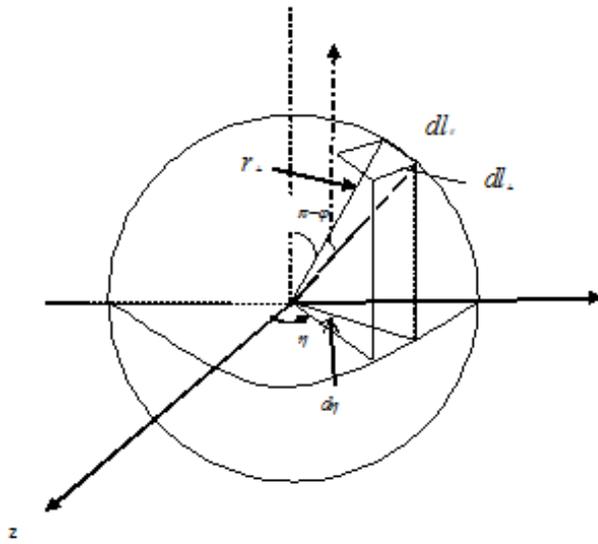


FIG. 2.5 -

D'après la figure 2.5, $d\ell_{\perp}$ est donné par

$$d\ell_{\perp} \sim r_T \sin(\pi - \varphi_T) d\eta \quad (2.65)$$

En utilisant les relations (2.31) et (2.57), on aura

$$\pi - \varphi_T \sim \epsilon_S \left(1 + \frac{r_S}{r_T}\right) - \epsilon'_T \left(1 + \frac{r_T}{r_S}\right). \quad (2.66)$$

Les relations (2.23) et (2.48) nous permettent d'écrire (2.66) sous la forme

$$\pi - \varphi_T \sim \left(1 + \frac{r_T}{r_S}\right) \frac{|\alpha_T - \alpha'_T|}{\sqrt{B(r_T)}}. \quad (2.67)$$

Comme les angles de déviation sont petits, on peut écrire

$$d\ell_{\perp} \sim r_T \left(1 + \frac{r_T}{r_S}\right) \frac{|\alpha_T - \alpha'_T|}{\sqrt{B(r_T)}} d\eta \quad (2.68)$$

$$\sim r_T \left(1 + \frac{r_T}{r_S}\right) \frac{|\alpha_T - \alpha'_T|}{\sqrt{B(r_T)}} \frac{d\eta_S}{\sqrt{B(r_S)}}. \quad (2.69)$$

Finalement, la distance lumineuse de la source vue de la terre est donnée par

$$d_S = \sqrt{\frac{d\ell_{//} d\ell_{\perp}}{d\alpha_S d\eta_S}} \sim \frac{(r_T + r_S)}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}} \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha'_T}{\alpha_T}\right) \frac{r_T}{r_S} \frac{|\alpha_T - \alpha'_T|}{\sqrt{1 - \Lambda r_T^2/3}}}. \quad (2.70)$$

Remarquons que si l'observateur, la lentille et la source sont alignés ($\alpha_T = \alpha'_T$), cette formule est singulière ($d_S \sim 0$). Le flux de l'image dans ce cas la est infini ($\Phi \propto 1/d_S$), Ce qui équivaut à une magnification infinie.

Notons qu'en l'absence de la lentille, d_S prend la forme

$$d_S = \frac{(r_T + r_S)}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}. \quad (2.71)$$

En l'absence de constante cosmologique, ($\Lambda = 0$), l'expression de d_S (2.71) se réduit à

$$d_S = (r_T + r_S). \quad (2.72)$$

Comme on l'a dit plus haut, dans l'univers de Friedmann il est possible de traduire les décalages spectraux z des objets cosmologiques en distances lumineuses. Autrement dit,

on peut repérer un objet cosmologique par son décalage spectral. L'étude de la courbe $d = f(z)$, diagramme de Hubble, est la deuxième étape de notre calcul pour la détermination des distances cosmologiques de la source et de la lentille. Dans cette étape, on va supposer que l'univers est en expansion avec une constante cosmologique, malgré le fait qu'on ait supposé au départ que la source et l'observateur sont statiques par rapport à la lentille. Enfin, on va supposer que le décalage spectral est dû exclusivement à l'expansion de l'univers, ce qui veut dire que les interactions gravitationnelles entre l'objet en question et le reste de l'univers n'ont aucun effet sur le décalage spectral.

En fait, z est une observable directe dont l'usage ne présuppose aucun modèle. Le spectre d'une galaxie ou d'un amas de galaxie fournit de manière simple et très précise la valeur de z . Par contre, il existe plusieurs modèles cosmologiques pour l'estimation de la distance lumineuse et des différents paramètres cosmologiques telle que la constante de Hubble H_0 . Parmi ces modèles, citons le modèle standard de la cosmologie, modèle qui ne souffre pas de contradictions avec les données observationnelles actuelles. Ce modèle, appelé également modèle Λ CDM (Λ CDM signifie un univers avec une constante cosmologique positive Λ et une matière sombre froide CDM (Cold Dark Matter)), décrit l'évolution d'un univers composé d'une matière sombre froide en présence d'une constante cosmologique. L'univers est décomposé en une famille d'espaces plats à 3 dimensions paramétrée par le temps cosmique t (un feuilletage de l'espace-temps en tranches $t = cste$). Dans notre cas, nous avons pris un univers avec 27% de matière avec $\Lambda = 1.5 \times 10^{-52} m^{-2}$, ce qui correspond à une constante de Hubble $H_0 = 2.5 \times 10^{-18} s^{-1}$.

Dans l'univers de Friedmann, l'intervalle de temps propre ds^2 est donné par

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)), \quad (2.73)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle qui paramètre l'expansion de l'univers, χ est la coordonnée comobile tel que pour un photon allant de la position $(\chi, t, \theta = \varphi = 0)$ à la position $(\chi_0 = 0, t_0 = 0, \theta_0 = \varphi_0 = 0)$ ou de la position $(\chi, t + \delta t, \theta = \varphi = 0)$ à la position $(\chi_0 = 0, \delta t_0, \theta_0 = \varphi_0 = 0)$, on a

$$\chi = \int_t^0 \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+\delta t}^{\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.74)$$

ou

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \quad (2.75)$$

On peut en déduire que

$$\frac{\delta t_0}{a(0)} = \frac{\delta t}{a(t)}, \quad (2.76)$$

ce qui fournit une expression pour le décalage spectral vers le rouge cosmologique

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a(0)}{a(t)} = \frac{a_0}{a} > 1, \quad (2.77)$$

avec $a_0 := a(0)$ et $a := a(t)$. $z \sim 6$ pour les objets les plus lointains que l'on a pu observer aujourd'hui. Pour les sources pas très éloignées $z \ll 1$, on peut faire un développement en série pour le facteur $a(t)$, ce qui donne

$$a(t) \approx a_0 [1 + H_0 t + \dots], \quad (2.78)$$

avec H_0 donnée par

$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}. \quad (2.79)$$

L'équation (2.77) prend alors la forme

$$z \approx -H_0 t + \dots \quad (2.80)$$

avec t négatif. A partir de (2.77), on peut également écrire que

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{a_0}{a^2} da = -\frac{a_0}{a} \frac{da}{dt} \frac{dt}{a} \\ &= \frac{a_0}{a} \frac{da}{dt} d\chi. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Donc, la distance lumineuse est donnée par la loi de Hubble

$$d(z) = a_0 \chi = \int_0^z \frac{a}{(da/dt)} dz \quad (2.82)$$

ou

$$d(z) = \int_0^z \frac{1}{H(z)} dz, \quad (2.83)$$

avec

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (2.84)$$

et

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1. \quad (2.85)$$

Le facteur d'échelle $a(t)$ obéit à l'équation de Friedmann, qui est une conséquence des équations d'Einstein

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda c^2, \quad (2.86)$$

avec

$$c = 1 \text{ am as}^{-1}$$

où $1 \text{ am} = 1.3011 \times 10^{26} \text{ m}$ et $1 \text{ as} = 4.34 \times 10^{17} \text{ s}$.

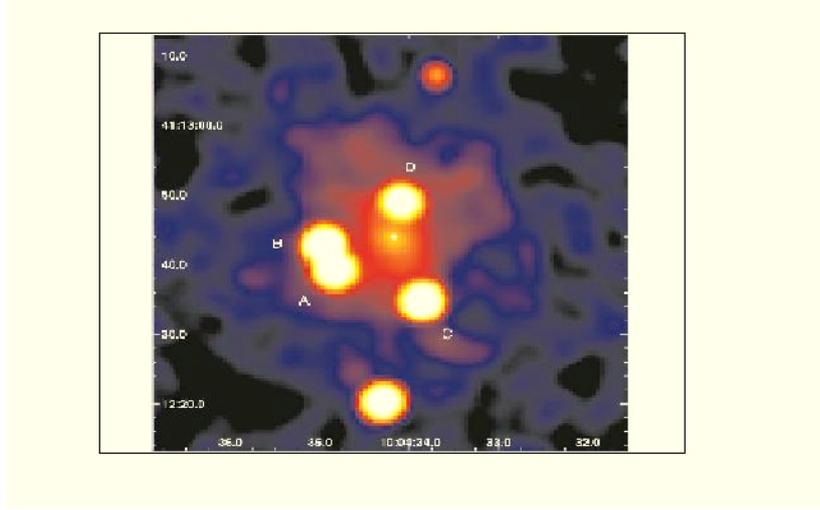


FIG. 2.6 – Images du quasar du système SDSS J1004+4112.

Finalement, pour trouver la distance lumineuse, il suffit de résoudre l'équation différentielle non linéaire, équation de Friedmann, (2.86) ainsi que l'équation (2.75) numériquement par la méthode de Runge-Kutta avec $a_0 = 1.2 \times 10^{26} m$, $\dot{a}_0 = 3 \times 10^8 m/s$, $\chi(0) = 0$, comme conditions initiales. Autrement dit, une intégration numérique de l'équation (2.81) suffit pour déterminer le diagramme de Hubble $d(z)$.

Dans le cadre du modèle standard, F. Henry-Couannier et al. [20] ont obtenu une approximation analytique de $a(t)$ avec une précision d'au moins 3% jusqu'à $z = 2$. En insérant cette expression approchée de $a(t)$, [20], dans (2.83), on obtient une expression, également approchée, pour la distance lumineuse

$$d = \frac{1}{H_0} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left((1 + z)^{1-1/\alpha} - 1 \right), \quad (2.87)$$

avec $\alpha = 1.41 \pm 0.13$

Maintenant on est en mesure de donner la plage de variation de la constante cosmologique en se basant sur nos données observationnelles. Notre banc optique choisi est composé d'un quasar comme source et d'un amas de galaxies comme lentille. Ce système est dénommé SDSS J1004+4112 avec quatre images A,B,C,D de la source, figure 2.6.

Le fait qu'il y'ait plus de deux images est une signature d'un écart par rapport à la symétrie sphérique. Mais, on va faire comme si de rien n'était et considérer les deux images qui présentent la plus grande déviation, à savoir les images C et D. L'écart des images C

et D est de $15''$. Pour être plus précis, les images C et D correspondent respectivement à des déviations

$$\alpha_T = 10'' \pm 10\%$$

et

$$\alpha'_T = 5'' \pm 10\%.$$

La masse M de la lentille est de

$$M = (1 \pm 0.2) \times 10^{44} \text{ kg}$$

avec un décalage spectral

$$z_L = 0.68.$$

En utilisant la relation (2.82), on obtient pour la distance lumineuse d_L

$$d_L = 7.0 \times 10^{25} \text{ m},$$

qui coïncide avec la distance de coordonnée r_T ($d_L = r_T$). Il est à remarquer que la formule approchée (2.87) nous donne pour d_L

$$d_L = 6.8 \times 10^{25} \text{ m},$$

Le décalage spectral de la source z_S qui vaut

$$z_S = 1.734,$$

nous donne, via la relation (2.82), pour la distance lumineuse terre-source

$$d_S = 13.8 \times 10^{25} \text{ m},$$

ce qui correspond à trois valeurs pour r_S suivant la formule utilisée pour estimer la distance propre de la source. La formule singulière pour la distance lumineuse (2.70) nous donne pour valeur de r_S ,

$$r_S = 7.5 \times 10^{20} \text{ m}.$$

D'autre part, r_T et r_S doivent vérifier la relation (2.34) pour que les deux géodésiques de photon se rencontrent en la terre, à savoir

$$\frac{r_T}{r_S} \sim \frac{4GM}{\alpha_T \alpha'_T r_T} (1 - \Lambda r_T^2/3) - 1$$

La valeur $r_S = 7.5 \times 10^{20} \text{ m}$ ne peut satisfaire à l'équation ci-dessus et ceci quelque soit la valeur adoptée, positive ou nulle, pour la constante cosmologique. Si on utilise la formule non singulière pour d_S , (2.71), on obtient $r_S = 5.6 \times 10^{25} \text{ m}$. Cette valeur ne satisfait la relation (2.34) que pour la valeur $\Lambda = 2.31 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ de la constante cosmologique. La deuxième formule non singulière pour d_S , (2.72), nous donne $r_S = 6.8 \times 10^{25} \text{ m}$. Cette valeur vérifie également la relation (2.34) pour $\Lambda = 2.67 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$. En tenant compte des incertitudes sur la masse de la lentille et sur les angles de déviation et en utilisant les formules non singulières pour la distance lumineuse, on obtient les tableaux (2.1) et (2.2).

TAB. 2.1 – Valeurs de Λ et r_S , $d_S = \frac{(r_T+r_S)}{\sqrt{1-\Lambda r_S^2/3}}$

$M \pm 20\%$	+	-	-	-	-	+	+	+
$\alpha \pm 10\%$	+	+	-	-	+	+	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	+	+	-	-	-	-	+
$r_S[10^{25} m]$	5.3	6.2	5.6	5.3	5.6	5.0	4.8	5.0
$\Lambda[10^{-52} m^{-2}]$	2.1	0.7	1.3	2.1	1.4	2.8	3.3	2.8

TAB. 2.2 – Valeurs de Λ et r_S , $d_S = (r_T + r_S)$.

$M \pm 20\%$	+	-	-	-	-	+	+	+
$\alpha \pm 10\%$	+	+	-	-	+	+	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	+	+	-	-	-	-	+
$r_S[10^{25} m]$	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8
$\Lambda[10^{-52} m^{-2}]$	2.6	0.9	1.9	2.6	1.8	3.2	3.8	3.3

2.2 Temps de retard

2.2.1 Introduction

Le temps de retard est un effet étroitement lié au phénomène de la déviation de la lumière. I.I. Shapiro démontra qu'un rayon lumineux n'était pas seulement dévié en passant près d'une masse, mais également que la durée de son trajet était allongée par rapport à une géométrie euclidienne. Curieusement, Einstein n'a jamais pensé à calculer cet effet. Ayant obtenu la déviation des trajectoires des photons au voisinage du soleil, il n'a apparemment jamais cherché à connaître le mouvement horaire des photons sur leurs trajectoires, ce qui lui aurait donné leur temps de retard gravitationnel Δt . La première confirmation expérimentale est faite par Shapiro et son équipe. Shapiro a mesuré en 1968 un temps de retard de 240 μs pour un signal qui fait l'aller retour entre la terre et la planète Mercure. Cet effet est totalement géométrique. Non seulement la trajectoire de la lumière est déviée de l'angle α , mais on enregistre également un temps de retard pour les photons. Le temps de retard, calculé dans le cadre de la métrique de Schwarzschild, est donné par

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \log \left(\frac{4r_T r_M}{R^2} \right),$$

où r_T et r_M sont les distances de la terre et de mercure au soleil. R est le rayon du soleil.

Loin du système solaire, c'est à dire à l'échelle cosmologique ou astrophysique, cet effet est attendu car les cas connus de déviation gravitationnelle impliquant des quasars

lointains montrent le plus souvent des images multiples de la source. Les trajets optiques reliant l'observateur et la source n'ont pas la même longueur et par conséquent les photons émis par la source n'ont pas la même durée de vol. Ce qui conduit à un temps de retard entre les images multiples des quasars. Le temps de retard est la différence de temps de vol entre deux photons émis par le quasar, la source, au même instant, suivant deux trajets différents et à la fin reçus à deux instants différents au niveau de l'observateur. En connaissant la masse de la lentille, la mesure du temps de retard de tels systèmes peut fournir une mesure précise de la constante de Hubble. En effet, le temps de retard étant un effet géométrique, il est directement relié à H_0 . Réciproquement, si la constante de Hubble est déterminée par d'autres méthodes, on peut déterminer la masse de la lentille ou la distribution de masse dans la lentille.

La richesse du phénomène de la déviation de la lumière a amené beaucoup d'astronomes, pendant les 20 dernières années, à consacrer beaucoup d'efforts aux observations de systèmes quasar-lentille, en particulier au contrôle à long terme de tels systèmes. Parmi ces systèmes figure le quasar-source SDSS J1004+4112 découvert récemment [21, 22, 23, 24, 25]. Ce système est composé d'un quasar source en arrière plan avec un décalage spectral $z_S = 1.734$ et un amas de galaxies, de masse de l'ordre de 5×10^{13} masses solaires, jouant le rôle d'une lentille gravitationnelle avec un décalage spectral $z_L = 0.68$. C'est le premier système entrant dans le cadre du régime fort "strong lensing", où l'objet central du phénomène, la lentille, est un amas de galaxies. La particularité de ce système est que la déviation maximale obtenue entre les images du quasar atteint 15 secondes d'arc. Cette grande déviation permet de limiter l'erreur sur les valeurs de la constante de Hubble et les autres paramètres cosmologiques déterminés par cette méthode. En octobre 2007, une borne inférieure égale à 5.7 années pour le temps de retard pour ce système a été publiée par Fohlmeister et al [25]. Le temps de vol pour un photon entre le quasar SDSS J1004+4112 et la terre est environ 10^{10} années. Dans la section précédente on a montré que si la métrique Schwarzschild-de Sitter est prise en considération, la constante cosmologique joue un rôle dans le phénomène de déviation de la lumière. Nous voulons maintenant connaître l'influence de la constante cosmologique sur le temps de retard. En faisant usage des résultats de la section précédente, nous allons calculer le temps de retard entre les deux images bien alignés du quasar source (C et D) en fonction de la constante cosmologique. Autrement dit, nous allons calculer

$$\Delta\tau = \sqrt{B(r_T)} (t'_T + t'_S - t_T - t_S), \quad (2.88)$$

comme fonction de M , α , α' , r_T , r_S et Λ . Dans la relation (2.88) t_S désigne le temps de vol du photon de la trajectoire du haut pour aller de la source, où le photon se trouve à une distance r_S de la lentille, jusqu'au peri-lens, où il s'approche le plus de la lentille, se trouvant à une distance r_0 de cette dernière, t_T dénote le temps de vol du photon de la trajectoire du haut pour passer du peri-lens jusqu'à sa réception sur terre, où il se trouve

à une distance r_T de la lentille. De même, t'_S et t'_T sont les temps de vol, correspondant respectivement à t_S et t_T , pour le photon de la trajectoire du bas.

2.2.2 Intégration des géodésiques

Comme nous l'avons vu plus haut l'élément de ligne à l'extérieur d'une distribution de masse statique, à symétrie sphérique et qui domine toute autre masse dans l'univers est donné par la relation (1.94). Rappelons brièvement les résultats de la section précédente. Nous avons obtenu les expressions suivantes pour les symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= B'/(2B), \quad \Gamma_{tt}^r = B'B/2, \quad \Gamma_{rr}^r = -B'/(2B), \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -rB, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = 1/r\end{aligned}$$

et pour les équations de mouvement nous avons obtenu

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} &= 0, \\ \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{1}{2}B'B \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 - rB \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2\varphi}{dp^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{dp} \frac{d\varphi}{dp} &= 0,\end{aligned}$$

où p est un paramètre affine et où nous avons noté $' := d/dr$. Une première intégration de ces trois équations nous a alors donné

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dp} &= 1/B(r), \\ \frac{d\varphi}{dp} &= \frac{r_0}{r^2 \sqrt{B(r_0)}}, \\ \frac{dr}{dp} &= \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_0)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

En éliminant le paramètre affine p entre la première et la troisième des trois relations précédentes, nous obtenons

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{\sqrt{B(r_0)}}{B(r) \sqrt{1 - r_0^2/r^2}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r}{r+r_0}\right]^{-1/2}. \quad (2.89)$$

La différence de temps de vol $t'_T - t_T$ est donnée par l'intégrale suivante

$$t'_T - t_T = \int_{r'_0}^{r_T} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr - \int_{r_0}^{r_T} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr.$$

Calculons tout d'abord t_T . Posons pour cela $\lambda := \sqrt{\Lambda/3} r_0$, $\delta := GM/r_0 \ll 1$, $y := r_0/r$ et $\epsilon_T := r_0/r_T$. On a

$$\begin{aligned} t_T &= \sqrt{B(r_0)} \int_{r_0}^{r_T} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr = \sqrt{B(r_0)} \int_{r_0}^{r_T} \frac{1}{B(r) \sqrt{1 - r_0^2/r^2}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r}{r+r_0} \right]^{-1/2} dr \\ &= r_0 \sqrt{B(r_0)} \int_{\epsilon_T}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2} y^2 \left(1 - 2y\delta - \frac{\lambda^2}{y^2} \right)} \left[1 - 2y\delta - 2\frac{\delta}{1+y} \right]^{-1/2} dy. \end{aligned}$$

Posons

$$f(\delta) := \frac{1}{\sqrt{1 - y^2} y^2 \left(1 - 2y\delta - \frac{\lambda^2}{y^2} \right)} \left[1 - 2y\delta - 2\frac{\delta}{1+y} \right]^{-1/2}.$$

Le développement en série à des termes d'ordre 2 en δ près donne

$$f(\delta) \sim \frac{(1 - y^2)^{-1/2}}{y^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{y^2} \right)} + \left(\frac{(1 - y^2)^{-1/2}}{y^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{y^2} \right)} \left(y + \frac{1}{1+y} \right) - \frac{2(1 - y^2)^{-1/2}}{\lambda^2 - y^2} \frac{y}{1 - \frac{\lambda^2}{y^2}} \right) \delta + O(\delta^2),$$

ce qui nous permet de mettre t_T sous la forme

$$t_T \sim r_0 \sqrt{B(r_0)} [I_{T1} + \delta I_{T2} + \delta I_{T3} + 2\delta I_{T4}], \quad (2.90)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{T1} &: = \int_{\epsilon_T}^1 \frac{1}{(y^2 - \lambda^2)} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}, \\ I_{T2} &: = \int_{\epsilon_T}^1 \frac{y}{(y^2 - \lambda^2)} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}, \\ I_{T3} &: = \int_{\epsilon_T}^1 \frac{1}{(y^2 - \lambda^2)} \frac{1}{1+y} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}, \\ I_{T4} &: = \int_{\epsilon_T}^1 \frac{y^3}{(y^2 - \lambda^2)^2} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

Le calcul de ces quatre intégrales donne

$$\begin{aligned}
I_{T1} &= \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{\epsilon_T} \right), \\
I_{T2} &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\epsilon_T^2}{1-\lambda^2}}, \\
I_{T3} &= \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \left[2 \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{1+\epsilon_T} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\epsilon_T^2}-\lambda\epsilon_T)(1+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\epsilon_T^2}+\lambda\epsilon_T)}{\epsilon_T^2-\lambda^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\epsilon_T^2}+\lambda\epsilon_T)(\epsilon_T-\lambda)}{(1+\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\epsilon_T^2}-\lambda\epsilon_T)(\epsilon_T+\lambda)} \right], \\
I_{T4} &= \frac{2-\lambda^2}{2\sqrt{1-\lambda^2}^3} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\epsilon_T^2}{1-\lambda^2}} + \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda^2)} \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{\epsilon_T^2-\lambda^2}.
\end{aligned}$$

En prenant $\Lambda = 0$, ce qui est équivalent à $\lambda = 0$, I_{T1} , I_{T2} , I_{T3} et I_{T4} se simplifient en

$$\begin{aligned}
I_{T1} &= \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{\epsilon_T}, \\
I_{T2} &= \tanh^{-1}(\sqrt{1-\epsilon_T^2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})}{(1-\sqrt{1-\epsilon_T^2})} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})^2}{\epsilon_T^2}, \\
I_{T3} &= \frac{1}{2} \left[2 \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{1+\epsilon_T} - \ln \frac{(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})}{\epsilon_T^2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{1-\epsilon_T}{1+\epsilon_T}} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})^2}{\epsilon_T^2}, \\
I_{T4} &= \tanh^{-1}(\sqrt{1-\epsilon_T^2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sqrt{1-\epsilon_T^2})^2}{\epsilon_T^2}.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
t_T &\simeq r_0 [I_{T1} + \delta I_{T2} + \delta I_{T3} + 2\delta I_{T4}] \\
&\simeq r_0 \left[\frac{\sqrt{1 - \epsilon_T^2}}{\epsilon_T} + \delta \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \epsilon_T^2})^2}{\epsilon_T^2} + \delta \sqrt{\frac{1 - \epsilon_T}{1 + \epsilon_T}} \right] \\
&\simeq \sqrt{r_T^2 - r_0^2} + 2MG \ln \frac{(r_T + \sqrt{r_T^2 - r_0^2})}{r_0} + MG \left(\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ce résultat est donné dans la plupart des livres de cosmologie, par exemple dans les références [2, 26]. Revenons maintenant au cas $\Lambda \neq 0$. On peut remarquer sans peine que le terme dominant dans la première intégrale $I_{T1} \sim \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{\epsilon_T^2} \right] \frac{\lambda}{\epsilon_T}$ est le même que celui donné dans l'équation (17) de Kagramanova, Kunz et Ammerzahl [6]. On peut également remarquer que pour obtenir l'expression de t'_T , il suffit de remplacer r_0 par r'_0 dans l'expression de t_T . Avant de procéder au calcul de $t'_T - t_T$, posons, dans un but de simplification, $x := \alpha'/\alpha \sim r'_0/r_0$, $\sigma := \lambda^2$ et $s := 2\delta$. Ceci d'une part. D'autre part, on peut mettre $t'_T - t_T$ sous la forme

$$t'_T - t_T = [\Delta I_{T1} + \delta \Delta I_{T2} + \delta \Delta I_{T3} + 2\delta \Delta I_{T4}],$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T1} &: = r'_0 \sqrt{B(r'_0)} I'_{T1} - r_0 \sqrt{B(r_0)} I_{T1} \\
&= \left[r'_0 \sqrt{B(r'_0)} \frac{1}{\lambda' \sqrt{1 - \lambda'^2}} \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \lambda'^2}} \frac{\sqrt{1 - \epsilon_T'^2}}{\epsilon_T'} \right) - \right. \\
&\quad \left. r_0 \sqrt{B(r_0)} \frac{1}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}} \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{\sqrt{1 - \epsilon_T^2}}{\epsilon_T} \right) \right].
\end{aligned}$$

Le développement en série jusqu'à l'ordre 2 en δ et λ des termes $r_0 \sqrt{B(r_0)}$ et $r'_0 \sqrt{B(r'_0)}$ donne

$$\begin{aligned}
r_0 \sqrt{B(r_0)} &\sim \frac{GM}{\delta} (1 - s - \sigma)^{1/2} = \frac{GM}{\delta} \left(1 - \frac{1}{2}(s + \sigma) - \frac{1}{8}(s + \sigma)^2 + \dots \right) \\
&\sim \frac{GM}{\delta} \left(1 - \delta - \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \dots \right) \\
&\sim GM \left(\frac{1}{\delta} - 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\delta} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r'_0 \sqrt{B(r'_0)} &\sim \frac{GM}{\delta'} (1 - s' - \sigma')^{1/2} = \frac{GM}{\delta} \left(1 - \frac{1}{2}(s' + \sigma') - \frac{1}{8}(s' + \sigma')^2 + \dots\right) \\
&\sim \frac{GM}{\delta'} \left(1 - \delta' - \frac{1}{2}\delta'^2 - \frac{1}{2}\lambda'^2 + \dots\right) \\
&\sim GM \left(\frac{1}{\delta'} - 1 - \frac{\delta'}{2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda'^2}{\delta'}\right) \\
&\sim GM \left(\frac{x}{\delta} - 1 - \frac{\delta}{2x} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\delta} x^3\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, le développement en série de la fonction \tanh^{-1} donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\sqrt{1-\epsilon_T^2}}{\epsilon_T}\right) &\sim \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} \tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T} \left(1 - \frac{\epsilon_T^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}\right)\right) \\
&\sim \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right)}{\lambda} \left(\tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\frac{\lambda}{\epsilon_T} \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)}{1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon_T^2}} + \dots\right) \\
&\sim \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right)}{\lambda} \left(\tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\lambda\epsilon_T}{2}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tanh^{-1}\left(\frac{\lambda'}{\sqrt{1-\lambda'^2}} \frac{\sqrt{1-\epsilon_T'^2}}{\epsilon_T'}\right) &\sim \tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2\right)\right) \\
&\sim \frac{\left(1 + \frac{\lambda'^2}{2}\right)}{\lambda'} \left(\tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\frac{\lambda}{\epsilon_T} \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2}{1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon_T^2}} + \dots\right) \\
&\sim \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2} x^2\right)}{\lambda x} \left(\tanh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\lambda\epsilon_T}{2} x^2\right),
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right)^2 \ll 1$ et $\left(\frac{\lambda'}{\epsilon_T'}\right)^2 \ll 1$.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T1} &= \left[GM \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{x} - \frac{\delta}{2x^2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\delta} x^2 \right) \left(\frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2} x^2\right) \left(\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\lambda \epsilon_T}{2} x^2\right)}{\lambda} \right) - \right. \\
&\quad \left. GM \left(\frac{1}{\delta} - 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\delta} \right) \left(\frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right) - \frac{\lambda \epsilon_T}{2}\right)}{\lambda} \right) \right] \\
&\sim GM \left[- \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right)}{\lambda} - \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_T}\right)}{\lambda} + \frac{\epsilon_T}{2\delta} (1 - x^2) \right].
\end{aligned}$$

Le deuxième terme de $t'_T - t_T$ est donné par

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T2} &: = \sqrt{B(r'_0)} I'_{T2} - \sqrt{B(r_0)} I_{T2} \\
&\sim (1 - \delta') \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_T'^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right) - (1 - \delta) \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_T^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \\
&= \left(1 - \frac{\delta}{x} \right) \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) x^2 \right) - (1 - \delta) \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon_T^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \\
&\sim \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) x^2 \right) - \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right) \\
&= \tanh^{-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) x^2 - 1 + \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right)}{1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) x^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right)} \right) \\
&\sim \tanh^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) (1 - x^2)}{\left(\frac{\epsilon_T^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) (x^2 + 1)} \right) = \left| \tanh^{-1} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right) \right| \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{1-x^2}{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\ln x.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le troisième terme ΔI_{T3} , nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T3} & : = \sqrt{B(r'_0)} I'_{T3} - \sqrt{B(r_0)} I_{T3} \\
& \sim \left(1 - \frac{\delta}{x}\right) I'_{T3} - (1 - \delta) I_{T3} \\
& \sim (1 - \delta') \left[(1 - \epsilon'_T) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\epsilon'^2_T} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda'^2}{\epsilon'^2_T}\right)} - \frac{1}{\lambda'} \frac{1}{2} \ln \frac{(\epsilon'_T - \lambda')}{(\epsilon'_T + \lambda')} \right] - \\
& \quad (1 - \delta) \left[(1 - \epsilon_T) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\epsilon^2_T} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon^2_T}\right)} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2} \ln \frac{(\epsilon_T - \lambda)}{(\epsilon_T + \lambda)} \right] \\
& = \left(1 - \frac{\delta}{x}\right) \left[(1 - \epsilon_T x) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\epsilon^2_T x^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon^2_T}\right)} + \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda x} \right] - \\
& \quad (1 - \delta) \left[(1 - \epsilon_T) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\epsilon^2_T} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon^2_T}\right)} + \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda} \right] \\
& \sim -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{\epsilon^2_T x^2} - \ln \frac{4}{\epsilon^2_T} \right) + \left(1 - \frac{\delta}{x}\right) \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda x} - (1 - \delta) \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda} \\
& \sim \ln x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda} - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \delta \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T4} & : = \sqrt{B(r'_0)} I'_{T4} - \sqrt{B(r_0)} I_{T4} \\
& \sim (1 - \delta') \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon'^2_T}{2} + \frac{\lambda'^2}{2}\right) - (1 - \delta) \tanh^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon^2_T}{2} + \frac{\lambda^2}{2}\right) \\
& = \left(1 - \frac{\delta}{x}\right) \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2\right) - (1 - \delta) \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right) \\
& \sim \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2\right) - \tanh^{-1} \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right) \\
& = \tanh^{-1} \frac{1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2 - 1 + \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)}{1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) x^2\right) \left(1 - \left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\right)} \\
& = \tanh^{-1} \frac{\left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) (1 - x^2)}{\left(\frac{\epsilon^2_T}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\right) (1 + x^2)} = \tanh^{-1} \frac{(1 - x^2)}{(1 + x^2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x^2} = -\ln x.
\end{aligned}$$

Finalement, $t'_T - t_T$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} t'_T - t_T &\sim [\Delta I_{T1} + GM\Delta I_{T2} + GM\Delta I_{T3} + 2GM\Delta I_{T4}] \\ &\sim GM \left[\frac{1}{2} (1 - x^2) \frac{\epsilon_T}{\delta} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \delta \frac{\tanh^{-1} \frac{\lambda}{\epsilon_T}}{\lambda} - 2 \ln x \right]. \end{aligned}$$

Pour achever le calcul du temps de retard, nous devons calculer également la différence de temps de vol $t'_S - t_S$. Nous avons

$$t'_S - t_S = \int_{r'_0}^{r_S} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr - \int_{r_0}^{r_S} \left| \frac{dt}{dr} \right| dr.$$

En remplaçant $\left| \frac{dt}{dr} \right|$ par leurs expressions pour les trajectoires du haut et du bas, nous obtenons

$$\begin{aligned} t'_S - t_S &= \int_{r'_0}^{r_S} \frac{\sqrt{B(r'_0)}}{B(r) \sqrt{1 - r_0'^2/r^2}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r'_0} \frac{r}{r + r'_0} \right]^{-\frac{1}{2}} - \\ &\int_{r_0}^{r_S} \frac{\sqrt{B(r_0)}}{B(r) \sqrt{1 - r_0^2/r^2}} \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r}{r + r_0} \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière que pour le calcul de $t'_T - t_T$, nous obtenons

$$t'_S - t_S = GM \left[\frac{1}{2} (1 - x^2) \frac{\epsilon_S}{\delta} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \delta \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_S} \right)}{\lambda} - 2 \ln x \right],$$

avec $\epsilon_S := r_0/r_S$.

Finalement, nous obtenons comme expression du temps de retard

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \sqrt{1 - \Lambda r_T^2/3} GM \left[\frac{1}{2} (1 - x^2) \frac{\epsilon_T}{\delta} + \frac{1}{2} (1 - x^2) \frac{\epsilon_S}{\delta} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \delta \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_T} \right)}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \delta \frac{\tanh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon_S} \right)}{\lambda} - 4 \ln x \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

En remplaçant x par α'/α , en utilisant l'expression de l'angle de déviation dérivée plus haut, à savoir

$$\alpha \sim \epsilon_T \sqrt{1 - \Lambda r_T^2/3}$$

et la relation

$$\epsilon_{TrT} \sim r_0,$$

nous obtenons l'expression du temps de retard en fonction de M , α , α' , r_T , r_S et Λ

$$\begin{aligned} \Delta\tau = & \sqrt{1 - \Lambda r_T^2/3} GM \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{1 - \Lambda r_T^2/3} \frac{r_T}{GM} \left(1 + \frac{r_T}{r_S} \right) \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Lambda r_T^2}{3} \right) \left(\frac{1}{\alpha'^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{GM}{\sqrt{\Lambda/3} r_T^2} \left(\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_T \right) + \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r_S \right) \right) + 4 \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Cette relation donne la dépendance du temps de retard en la constante cosmologique.

2.3 Le quasar-source SDSS J1004+4112

Utilisons la relation (2.92) pour calculer le temps de retard entre les deux images les plus alignées du quasar SDSS J1004+4112, à savoir les images C et D (FIG. 2.6).

Une borne inférieure pour le temps de retard pour le système cosmologique SDSS J1004+4112 a été obtenue par Fohlmeister et collaborateurs en 2007 [25], qui ont donné le chiffre de 5.7 années. Cette borne inférieure est donc actuellement, lors de l'écriture de ces lignes, de 9.7 années. Rappelons que le la lentille SDSS J1004+4112 correspond à un décalage spectral $z_L = 0.68$, c'est à dire à une distance lumineuse $d_L = 7.0 \times 10^{25} m$ si on prend $1.5 \times 10^{-52} m^{-2}$ comme valeur de Λ . Comme nous l'avons vu auparavant, cette distance lumineuse coïncide avec la distance de coordonnée r_T . Pour ce qui du quasar, c'est à dire de la source, de ce système, il présente un décalage spectral $z_S = 1.734$, ce qui correspond à une distance lumineuse $d_S = 13.8 \times 10^{25} m$. Dû à la magnification du quasar par le groupe de galaxies, la lentille, la correspondance entre distance lumineuse et distance de coordonnée est ambiguë. Elle dépend de l'image qui est employée. Ceci est d'une part. D'autre part, si la source, la lentille et l'observateur sont alignés la distance lumineuse de la source tend vers 0. Devant ce fait, on a opté pour la relation donnant la distance lumineuse de la source en l'absence de la lentille ($M = 0$), ce qui implique deux formules possibles pour d_S , $\Lambda \neq 0$, (2.71) et $\Lambda = 0$, (2.72), à savoir

$$d_S = \frac{r_T + r_S}{\sqrt{1 - \Lambda r_S^2/3}}$$

et

$$d_S = r_T + r_S.$$

Les relations (2.71) et (2.34) nous donnent $r_S = 5.3 \times 10^{25} m$ et $\Lambda = 2.2 \times 10^{-52} m^{-2}$. En utilisant l'expression du temps de retard, (2.92), on aura, pour ces valeurs de r_S et Λ , $\Delta\tau = 20.1$ années. Les relations (2.72) et (2.34) nous donnent $r_S = 6.8 \times 10^{25} m$ et $\Lambda = 2.7 \times 10^{-52} m^{-2}$. Le temps de retard correspondant est $\Delta\tau = 17.9$ années. En prenant en considération les marges d'erreur sur la masse de la lentille et sur les angles de déviation, on aura les deux tableaux (2.3) et (2.4) pour la constante cosmologique et le temps de retard.

TABLE. 2.3 – $\Lambda = 1.5 \times 10^{-52} m^{-2}$, $H = 2.481$, $z_L = 0.68$, $d_L = r_T = 7.0 \times 10^{25} m$, $z_S = 1.734$, $d_S = 13.8 \times 10^{25} m$, r_S et Λ sont déduits des relations (2.71) et (2.34).

$M \pm 20\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	+	+
$\alpha \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	–	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	+
$r_S [10^{25} m]$	5.3	5.1	5.5	5.5	5.2	5.2	5.7	5.3	5.2
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	2.2	2.7	1.8	1.8	2.5	2.5	1.4	2.1	2.4
$\Delta\tau [années]$	20.1	21.6	24.3	18.3	21.8	15.9	18.3	24.2	19.6
$M \pm 20\%$	+	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	–	–	–	–	–
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	–	$\pm 0\%$	–	+	$\pm 0\%$	+
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	+	–	–	–	$\pm 0\%$	+	+	$\pm 0\%$
$r_S [10^{25} m]$	5.2	5.6	5.3	5.0	5.5	5.5	6.2	5.9	5.9
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	2.4	1.5	2.1	2.8	1.8	1.8	0.7	1.0	1.0
$\Delta\tau [années]$	26	22.5	16.2	17.6	19.9	14.6	20.3	16.6	22.1
$M \pm 20\%$	–	$\pm 0\%$	–	+	+	+	+	+	$\pm 0\%$
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	+	$\pm 0\%$	–	–	–	–
$\alpha' \pm 10\%$	–	–	+	–	–	–	$\pm 0\%$	+	+
$r_S [10^{25} m]$	5.7	5.3	5.6	5.0	4.9	4.8	4.9	5.0	5.3
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.4	2.2	1.4	2.8	3.0	3.3	3.0	2.8	2.2
$\Delta\tau [années]$	23.7	25.9	12.8	27.8	23.3	18.8	17.0	15.2	14.1

A partir des deux tableaux (2.3) et (2.4) on obtient, pour la constante cosmologique et le temps de retard, les valeurs suivantes :

$$\Lambda = (2.0 \pm 1.3) \times 10^{-52} m^{-2}, \quad \Delta\tau = (20.2 \pm 7.5) \text{ années},$$

si on utilise la relation (2.71) et

$$\Lambda = (2.4 \pm 1.5) \times 10^{-52} m^{-2}, \quad \Delta\tau = (18.1 \pm 6.1) \text{ années},$$

si on fait usage de la relation (2.72) .

TAB. 2.4 – $\Lambda = 1.5 \times 10^{-52} m^{-2}$, $H = 2.481$, $z_L = 0.68$, $d_L = r_T = 7.0 \times 10^{25} m$, $z_S = 1.734$, $d_S = 13.8 \times 10^{25} m$, $r_S = d_S - r_T = 13.8 \times 10^{25} - 7.0 \times 10^{25} = 6.8 \times 10^{25} m$.

$M \pm 20\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	+	+
$\alpha \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	–	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	+
$\Lambda[10^{-52} m^{-2}]$	2.6	3.2	2.3	2.3	3.0	3.0	1.4	2.6	2.9
$\Delta\tau[ann\acute{e}es]$	18.1	18.9	22.2	16.7	19.3	14.1	18.3	21.9	17.5
$M \pm 20\%$	+	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	–	–	–	–	–
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	–	$\pm 0\%$	–	+	$\pm 0\%$	+
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	+	–	–	–	$\pm 0\%$	+	+	$\pm 0\%$
$\Lambda[10^{-52} m^{-2}]$	2.9	1.9	2.6	3.3	2.2	2.2	0.9	1.4	1.4
$\Delta\tau[ann\acute{e}es]$	23.2	20.9	14.6	15.4	13.4	13.4	19.7	15.8	21.0
$M \pm 20\%$	–	$\pm 0\%$	–	+	+	+	+	+	$\pm 0\%$
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	+	$\pm 0\%$	–	–	–	–
$\alpha' \pm 10\%$	–	–	+	–	–	–	$\pm 0\%$	+	+
$\Lambda[10^{-52} m^{-2}]$	1.8	2.7	1.8	3.3	3.5	3.8	3.5	3.3	2.7
$\Delta\tau[ann\acute{e}es]$	22.1	23.3	12.0	24.3	20.1	16.0	14.7	13.3	12.7

Dans le calcul précédent, le modèle Λ CDM est pris pour une certaine valeur fixe de Λ . L'ajustement sur Λ et r_S utilisant la solution de Kottler fournit une valeur de Λ qui n'est pas forcément la valeur de Λ utilisée dans le modèle Λ CDM. C'est ce que nous avons fait dans la référence [27] et c'est ce qui a été également adopté dans [12]. Pour des raisons de cohérence ou de self-consistance, il serait mieux d'utiliser la même valeur de Λ dans les deux modèles : modèle Λ CDM et modèle de Kottler. On prend une valeur de Λ pour le modèle Λ CDM. On obtient généralement une autre valeur de Λ pour la solution de Kottler. On change de valeur de Λ et on répète le processus jusqu'à ce que les deux valeurs de Λ , celle utilisée dans le modèle Λ CDM pour calculer d_S , et celle calculée en utilisant les relations (2.71) et (2.34) ou (2.72) et (2.34), coïncident [13]. En prenant en considération les plages de variation de la masse de la lentille et des angles de déviation, et le fait que $\Lambda < 2 \times 10^{-52} m^{-2}$ pour éviter que la densité du fluide cosmique ρ ne soit négative (on a utilisé la relation $\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = 1$ avec $H_0 = 2.481 \times 10^{-18} s^{-1}$), on obtient les deux tableaux (2.5) et (2.6)

Des deux tableaux (2.5) et (2.6) on obtient, pour la constante cosmologique et le temps de retard, les contraintes suivantes :

$$\Lambda = (1.45 \pm 0.55) \times 10^{-52} m^{-2}, \quad \Delta\tau = (20.45 \pm 7.65) \text{ ann\acute{e}es},$$

Tab. 2.5 – $d_S = \frac{(r_T+r_S)}{\sqrt{1-\Lambda r_S^2/3}}$.

$M \pm 20\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	+	+
$\alpha \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	–	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	+
$r_T [10^{25} m]$	7.5	8.0	7.3	7.3	7.9	7.9	6.9	7.5	7.8
$r_S [10^{25} m]$	6.5	7.3	6.0	6.0	7.0	7.0	5.5	6.5	6.9
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.8	2.0	1.7	1.7	1.9	1.9	1.4	1.8	1.9
$\Delta\tau [années]$	20.3	20.8	24.5	18.5	22.0	16.1	18.2	24.5	19.9
$M \pm 20\%$	+	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	–	–	–	–	–
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	–	$\pm 0\%$	–	+	$\pm 0\%$	+
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	+	–	–	–	$\pm 0\%$	+	+	$\pm 0\%$
$r_T [10^{25} m]$	7.8	7.0	7.5	8.2	7.2	7.2	6.3	6.6	6.6
$r_S [10^{25} m]$	6.9	5.6	6.4	7.7	6.0	6.0	4.8	5.1	5.1
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.9	1.5	1.8	2.0	1.6	1.6	0.9	1.2	1.2
$\Delta\tau [années]$	26.4	21.6	16.4	15.7	20.1	14.6	19.9	16.4	21.8
$M \pm 20\%$	–	$\pm 0\%$	–	+	+	–4%	+	+	$\pm 0\%$
$\alpha \pm 10\%$	+	+	–	+	$\pm 0\%$	–	+2%	–	–
$\alpha' \pm 10\%$	–	–	+	–	–1%	–	$\pm 0\%$	+	+
$r_T [10^{25} m]$	6.9	7.6	6.9	8.1	8.0	8.0	8.0	8.0	7.6
$r_S [10^{25} m]$	5.5	6.5	5.6	7.3	7.3	7.3	7.3	7.3	6.5
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.4	1.8	1.4	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.8
$\Delta\tau [années]$	23.6	26.2	12.8	28.1	20.7	17.0	22.6	14.5	14.2

si on fait usage de la relation (2.71) et

$$\Lambda = (1.5 \pm 0.4) \times 10^{-52} m^{-2}, \quad \Delta\tau = (17.2 \pm 4.6) \text{ années},$$

si on utilise la relation (2.72)

Il est encourageant de noter que les contraintes obtenues pour la constante cosmologique sont compatibles avec la plage observée $\Lambda = (1.36 \pm 0.3) \times 10^{-52} m^{-2}$. Les contraintes obtenues pour le temps de retard sont également compatibles avec la borne observée sur le temps de retard $\Delta\tau > 9.7$ années. Rappelons que les résultats consignés dans cette thèse ont été obtenus dans le cadre des approximations suivantes :

- La sphéricité de la lentille gravitationnelle.
- L'observateur et la source sont statiques par rapport à la lentille.
- La masse de la lentille domine toutes les autres masses existantes dans l'univers.

Aller au delà de ces approximations, exige la considération des interactions des photons avec la lentille gravitationnelle, c'est à dire de prendre en compte la forme de la lentille

TAB. 2.6 – $r_S = d_S - r_T$.

$M \pm 20\%$	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	–	$\pm 0\%$	–	–
$\alpha \pm 10\%$	+	$\pm 0\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	–
$\alpha' \pm 10\%$	$\pm 0\%$	+	$\pm 0\%$	+	–	$\pm 0\%$
$r_T [10^{25} m]$	7.8	7.8	7.3	7.4	7.7	7.7
$r_S [10^{25} m]$	9.7	9.7	7.6	8.0	9.3	9.3
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.9	1.9	1.6	1.7	1.9	1.9
$\Delta\tau [années]$	20.1	15.2	17	20.5	17.1	12.6
$M \pm 20\%$	–	–	–	–	–	
$\alpha \pm 10\%$	+	$\pm 0\%$	+	+	–	
$\alpha' \pm 10\%$	+	+	$\pm 0\%$	–	+	
$r_T [10^{25} m]$	6.5	6.9	6.9	7.3	7.3	
$r_S [10^{25} m]$	5.6	6.5	6.5	7.7	7.7	
$\Lambda [10^{-52} m^{-2}]$	1.1	1.4	1.4	1.7	1.7	
$\Delta\tau [années]$	19.5	15.8	20.9	21.8	11.9	

gravitationnelle ou la densité de la distribution de masse dans la lentille, et l'utilisation de solutions qui tiennent compte, d'une part, du fait que la terre et la source sont mobiles par rapport à la lentille et, d'autre part, de l'existence d'autres masses dans l'univers.

La solution d'Einstein-Straus [28, 29, 30] permet de s'affranchir de toutes les hypothèses faites dans le cadre du modèle de Kottler, à l'exception de l'hypothèse de sphéricité. La solution d'Einstein-Straus, dont la motivation première était d'expliquer l'absence de l'expansion aux échelles atomique et planétaire [28, 29, 30], résulte du raccordement sur la sphère de Schücking, appelée également vacuole de Kottler, de la solution de Kottler prévalant à l'intérieur de la sphère de Schücking avec la solution de Friedmann régissant à l'extérieur de la vacuole de Kottler. Plusieurs travaux ont été faits dans ce cadre aussi bien pour la déviation de la lumière, [31, 32], que pour le temps de retard [33]. Les auteurs de la référence [33] ont prédit pour le temps de retard des valeurs allant de 6 à 13 ans dans le cas du système SDSS J1004+4112.

En particulier, Ishak et al [31] ont adopté la solution d'Einstein-Straus. Cette solution permet, entre autres, d'éviter l'utilisation de deux métriques différentes, métrique de Kottler et métrique de Friedmann dans un même calcul. Les résultats obtenus par Ishak et collaborateurs [31] montrent que la constante cosmologique a un effet sur la déviation de la lumière, bien que cet effet soit atténué comparativement à l'effet de la constante cosmologique dans l'analyse faite dans le cadre de la métrique de Kottler [1, 12]. Ces résultats ont été confirmés par les calculs de Schücker[32].

En Renonçant à l'hypothèse de la sphéricité de la lentille et en prenant en considération les images A et B, Kawano et Oguri, [34], montrent que le temps de retard dans le cas de

SDSS J1004+4112 est inférieur à 10 années ($\Delta\tau < 10$ années.), si $\Lambda = 0$. Mais leur analyse n'est pas extensible de manière directe au cas $\Lambda > 0$.

Le calcul de Khriplovich et Pomeransky [16] où la terre est supposée comobile avec l'espace de de Sitter, qui est en expansion exponentielle, La constante cosmologique n'a pas d'effet sur le phénomène de la déviation de la lumière à l'échelle cosmologique.

Chapitre 3

Les systèmes à petit nombre de corps

3.1 Borne inférieure optimisée

Considérons un système non relativiste formé de N particules interagissant par des forces à deux corps invariante par translation. L'Hamiltonien qui décrit ce type de systèmes est donné par

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j=1}^N V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}), \quad (3.1)$$

où m_i , \vec{r}_i , \vec{p}_i désignent respectivement la masse, le vecteur position, l'impulsion de la $i^{\text{ème}}$ particule. $\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Le potentiel $V^{(ij)}$ est le potentiel d'interaction entre la particule i et la particule j , $V^{(ij)}$ peut dépendre des deux particules i et j . Comme dans le cas des bornes inférieures naïve [35, 36, 37, 38, 39, 40] et améliorée [41, 42, 43], le point de départ sera la décomposition du terme de l'énergie cinétique, qui dans ce cas prend la forme [44, 45, 46, 47, 48, 49] :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} = \left(\sum_{i=1}^N b_i \vec{p}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) + \sum_{i<j=1}^N a_{ij} \vec{p}_{ij}^2, \quad (3.2)$$

où $b_i, i = 1, 2, \dots, N$, et $a_{ij} \ i < j = 1, 2, \dots, N$ sont des paramètres tel que les a_{ij} sont définis positifs parceque jouant le rôle d'inverses des doubles de masses. L'impulsion \vec{p}_{ij} est une combinaison linéaire des différentes impulsions individuelles \vec{p}_i que l'on peut écrire sous la forme

$$\vec{p}_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^N x_{ij,l} \vec{p}_l}{2}, \quad (3.3)$$

où les $x_{ij,l}$ sont des paramètres choisis de tel sorte que \vec{r}_{ij} et \vec{p}_{ij} soient variables conjuguées l'une de l'autre, c'est à dire vérifient les relations de commutation canoniques suivantes :

$$[r_{ij,l}, p_{ij,k}] = i\hbar\delta_{lk}, \quad (3.4)$$

où $r_{ij,l}$ et $p_{ij,k}$ désignent respectivement la $l^{\text{ème}}$ composante de \vec{r}_{ij} et la $k^{\text{ème}}$ composante de \vec{p}_{ij} . Le facteur $1/2$ dans (3.3) est introduit pour des raisons de commodité. Remarquons qu'on peut sans perte de généralité, par une redéfinition de a_{ij} et des $x_{ij,k}$ pour $k \neq i = 1, \dots, N$, fixer $x_{ij,i}$ à 1. Les relations de commutation canonique impliquent alors que $x_{ij,j} = -1$. Il en résulte que nous avons en fait $N - 2$ paramètres $x_{ij,k}$ $k \neq i, k \neq j$ pour chaque paire (i, j) . En remplaçant la relation (3.3) dans (3.2), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} = \left(\sum_{i=1}^N b_i \vec{p}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) + \sum_{i < j=1}^N \frac{a_{ij}}{4} \left(\sum_{l=1}^N x_{ij,l} \vec{p}_l \right)^2. \quad (3.5)$$

Notons que la relation (3.5) fait intervenir N paramètres b_i , $N(N - 1)/2$ paramètres a_{ij} et $N(N - 1)(N - 2)/2$ paramètres $x_{ij,l}$ à travers les impulsions \vec{p}_{ij} . En identifiant les deux membres de la relation (3.5), on obtient $N + N(N - 1)/2$ équations impliquant les paramètres b_i , a_{ij} et $x_{ij,l}$. Ceci nous permet d'exprimer les b_i et les a_{ij} en fonction des paramètres $x_{ij,l}$. En d'autres termes, les paramètres b_i et a_{ij} seront considérés comme des fonctions des $x_{ij,l}$. Il s'ensuit que pour chaque jeu de valeurs des paramètres libres $x_{ij,l}$ vérifiant la condition $a_{ij} > 0$ correspond une décomposition particulière de l'énergie cinétique du système. En faisant usage de la relation (3.2), la décomposition de l'Hamiltonien, (3.1), prend la forme :

$$H = \left(\sum_{i=1}^N b_i \vec{p}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) + \sum_{i < j=1}^N \left(a_{ij} \vec{p}_{ij}^2 + V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}) \right), \quad (3.6)$$

avec \vec{p}_{ij} donné par (3.3).

Soit $|\Psi\rangle$ l'état fondamental du système qui est forcément invariant par translation et qui peut être pris, sans perte de généralité, comme normalisé et soit E_0 l'énergie correspondante. Nous avons

$$E_0 = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \left(\sum_{i=1}^N b_i \vec{p}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) + \sum_{i < j=1}^N \left(\frac{a_{ij}}{4} \left(\sum_{l=1}^N x_{ij,l} \vec{p}_l \right)^2 + V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}) \right) | \Psi \rangle. \quad (3.7)$$

Comme $|\Psi\rangle$ est invariant par translation,

$$\left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) | \Psi \rangle = 0. \quad (3.8)$$

Il s'ensuit que la contribution non nulle au membre de droite de l'équation (3.7) vient du deuxième terme. La relation (3.7) se réduit alors à :

$$E_0 = \langle \Psi | \sum_{i < j=1}^N \left(a_{ij} \vec{p}_{ij}^2 + V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}) \right) | \Psi \rangle. \quad (3.9)$$

Ceci d'une part. D'autre part, en vertu du principe variationnel

$$\langle \Psi | a_{ij} \vec{p}_{ij}^2 + V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}) | \Psi \rangle \geq E_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})], \quad (3.10)$$

où $E_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})]$ est l'énergie du niveau fondamental de l'Hamiltonien à deux corps $H_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})]$ donnée par

$$H_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})] = a_{ij} \vec{p}_{ij}^2 + V^{(ij)}(\vec{r}_{ij}). \quad (3.11)$$

Il en résulte une borne inférieure pour E_0

$$E_0 \geq \sum_{i < j=1}^N E_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})]. \quad (3.12)$$

Donc, nous obtenons de cette manière une famille de bornes inférieures, une borne inférieure pour chaque jeu de valeurs des paramètres $\{x_{kl,m}\}$. La meilleure de ces bornes, qu'on notera E_{olb} , est évidemment celle qui maximise le membre de droite de (3.12), c'est à dire

$$E_0 \geq \max_{\{x_{kl,m}\}} \sum_{i < j=1}^N E_{ij}^{(2)} [a_{ij}(\{x_{kl,m}\})]. \quad (3.13)$$

E_{olb} est appelée borne inférieure optimisée pour l'énergie du niveau fondamental du système à N corps. Il est bien clair que lorsque le maximum du membre de droite de l'équation (3.12) est atteint, toutes les dérivées partielles par rapport à $\{x_{kl,m}\}$ s'annulent, c'est à dire

$$\sum_{i < j=1}^N \frac{\partial E_{ij}^{(2)}}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_{kl,m}} = 0 \quad m \neq k, \quad m \neq l \text{ et } k < l = 1, 2, \dots, N. \quad (3.14)$$

Les équations (3.14) peuvent être considérées comme un système d'équations linéaires avec les $\partial E_{ij}^{(2)}/\partial a_{ij}$ comme inconnues et les $\partial a_{ij}/\partial x_{kl,m}$ comme coefficients. Comme les $\partial E_{ij}^{(2)}/\partial a_{ij}$ ne sont pas tous nuls, la matrice rectangulaire $\tilde{B} \left(\frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N-1)(N-2)}{2} \right)$ d'éléments $\partial a_{ij}/\partial x_{kl,m}$, où ij et kl, m correspondent respectivement aux indices de ligne et de colonne, doit être de rang $\frac{N(N-1)}{2} - 1$ au plus. Il s'ensuit que toute matrice carrée

$\frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N-1)}{2}$ extraite de la matrice \tilde{B} en sélectionnant $\frac{N(N-1)}{2}$ colonnes doit être forcément de déterminant nul. Cette condition nous permet d'obtenir $\frac{N(N-1)(N-2)}{2} - \frac{N(N-1)}{2} + 1$ relations indépendantes entre les valeurs des paramètres $x_{kl,m}$, $x_{kl,m}^{(0)}$, qui correspondent à la borne inférieure optimisée. Ces relations contraignant les valeurs des paramètres $x_{kl,m}$ au maximum sont appelées contraintes dynamiques universelles. Le qualificatif dynamique est justifié par le fait que ces contraintes résultent d'un principe dynamique, le principe variationnel en l'occurrence. L'appellation universelle est justifiée par le fait que ces relations sont indépendantes de la forme particulière du potentiel. Dans le cas où le système possède des symétries, les contraintes dynamiques universelles peuvent être classées en deux catégories : celles qui résultent de la symétrie du problème et celles obtenues par voie de calcul. Le nombre de contraintes dynamiques universelles obtenues par calcul est égal à la différence entre le nombre des $x_{ij,k}$ indépendants et le nombre des a_{ij} indépendants augmenté d'une unité. Ceci signifie, entre autres, que toutes les contraintes dynamiques universelles résultent de la symétrie lorsque le nombre des a_{ij} indépendants dépasse celui des $x_{ij,k}$ indépendants [47, 48, 49].

3.2 Développement systématique sur des Gaussiennes corrélées

Dans le but de donner un encadrement de l'énergie de l'état fondamental d'un système à N corps, nous présentons dans cette section la méthode de développement sur des gaussiennes corrélées. Cette dernière nous permet d'obtenir une valeur supérieure approchée de l'énergie de l'état fondamental d'un système à N corps gouverné par une cinématique non relativiste, tandis qu'une valeur inférieure approchée de l'énergie de l'état fondamental du système est fournie par la borne inférieure optimisée discutée dans la section précédente.

3.2.1 La méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées

Le but de cette section est de présenter la méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées [51, 50, 46, 47, 49], qui est une méthode très utilisée pour la résolution approximative de l'équation de Schrödinger pour des systèmes à petit nombre de corps.

Considérons un système non-relativiste de N particules de masses m_1, m_2, \dots, m_N interagissant par des forces centrales à deux corps. Le système est décrit par l'Hamiltonien (3.1)

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} + \sum_{i<j=1}^N V^{ij}(r_{ij}).$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$\{\vec{r}_i, i = 1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{\vec{x}_k, k = 1, 2, \dots, N; \vec{R}\}, \quad (3.15)$$

où les \vec{x}_k sont un ensemble de $N - 1$ coordonnées de Jacobi indépendantes et \vec{R} est la coordonnée du centre de masse. Les $\vec{r}_{ij} := \vec{r}_j - \vec{r}_i$ peuvent alors être écrits comme des superpositions linéaires des coordonnées de Jacobi \vec{x}_k

$$\vec{r}_{ij} = \sum_{k=1}^{N-1} d_{ij}^k \vec{x}_k, \quad (3.16)$$

où les d_{ij}^k sont des nombres réels, qui peuvent être considérés comme les éléments d'une matrice colonne d_{ij} $(N - 1) \times 1$. Le fait que \vec{r}_{ij} soit invariant sous les translations fait que le coefficient de \vec{R} dans le membre de droite de la relation (3.16) est nul, c'est à dire que \vec{R} est absent dans le développement de \vec{r}_{ij} .

On peut montrer, de manière tout à fait générale, que le terme d'énergie cinétique s'écrit, en termes des moments conjugués \vec{p}_k , associés aux coordonnées de Jacobi \vec{x}_k , et de l'impulsion totale \vec{P} , associée à la coordonnée du centre de masse \vec{R} , comme

$$\sum_{k=1}^N \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k}, \quad (3.17)$$

où M est la masse totale du système $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ et M_k est la masse associée à la coordonnée de Jacobi \vec{x}_k .

L'Hamiltonien du système (3.1) peut être mis sous la forme

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} + \sum_{i<j=1}^N V^{ij}(r_{ij}). \quad (3.18)$$

En fait, ce qui nous intéresse réellement est l'Hamiltonien réduit H_R du système, obtenu à partir de l'Hamiltonien H du système en retranchant l'énergie cinétique du centre de masse $\vec{P}^2/(2M)$. La relation (3.18) nous permet alors de déduire une expression pour H_R

$$H_R = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} + \sum_{i<j=1}^N V^{ij}(r_{ij}). \quad (3.19)$$

Comme son nom l'indique, la méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées consiste à adopter comme fonction d'onde d'essai pour l'état fondamental du système une superposition de Gaussiennes corrélées

$$\Psi(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_{N-1}) = \sum_{p=1}^G k_p \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^{N-1} a_{ij}^p \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \right) \right\}. \quad (3.20)$$

G est le nombre de générations. Les paramètres de poids k_p et les paramètres de portée a_{ij}^p , $p = 1 \dots G$, avec $a_{ij}^p = a_{ji}^p$ sont des paramètres variationnels à déterminer par une procédure d'optimisation. Les éléments a_{ij}^p , $i, j = 1 \dots N - 1$ forment une matrice carrée symétrique A^p de rang $N - 1$. Si on adopte la notation suivante :

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1} | n \rangle \equiv \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N-1} a_{ij}^p \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j \right), \quad (3.21)$$

alors (3.20) peut se mettre sous la forme

$$| \Psi \rangle = \sum_{n=1}^G k_n | n \rangle. \quad (3.22)$$

Avec la notation introduite ci-dessus, la valeur moyenne de l'Hamiltonien (3.1) dans l'état $| \Psi \rangle$ pourra être écrite comme

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \frac{\sum_{n,m=1}^G k_m^* k_n \langle m | H | n \rangle}{\sum_{n,m=1}^G k_m^* k_n \langle m | n \rangle}. \quad (3.23)$$

La relation (3.23) montre que pour calculer la valeur moyenne de l'Hamiltonien H dans l'état $| \Psi \rangle$, il suffit de savoir calculer l'élément de matrice de H entre deux gaussiennes corrélées ainsi que le recouvrement de ces deux dernières.

Pour le calcul des éléments de matrice $\langle m | H | n \rangle$ nous avons besoin de connaître les éléments de matrice

$$\langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle \quad (3.24)$$

et

$$\langle m | V^{(ij)}(r_{ij} \{ \vec{x}_k \}) | n \rangle, \quad i < j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.25)$$

Calculons tout d'abord le terme d'énergie potentielle entre deux Gaussiennes corrélées. Pour un potentiel en loi de puissance

$$V^{(ij)}(r_{ij} \{ \vec{x}_k \}) = \lambda_{ij} r_{ij}^\nu, \quad (3.26)$$

nous avons

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = \int \dots \int d^3 \vec{x}_1 \dots d^3 \vec{x}_{N-1} \lambda_{ij} r_{ij}^\nu \exp \left(-\sum_{i,j=1}^{N-1} a_{kl} \vec{x}_k \cdot \vec{x}_l \right), \quad (3.27)$$

avec

$$a_{kl} = \frac{1}{2} (a_{kl}^m + a_{kl}^n),$$

Le éléments a_{kl} forment la matrice carrée $(N-1) \times (N-1)$ A . Comme les a_{kl}^m et a_{kl}^n sont respectivement les éléments de deux matrices carrées réelles et symétriques A^m et A^n les a_{kl} sont également les éléments d'une matrice A également réelle et symétrique qui est la demi-somme des deux matrices A^m et A^n : $A = \frac{1}{2}(A^m + A^n)$. Remarquons qu'on peut toujours écrire

$$\sum_{k,l=1}^{N-1} a_{kl} \vec{x}_k \cdot \vec{x}_l = \vec{X}^T A \vec{X},$$

où \vec{X} est une matrice colonne $(N-1) \times 1$:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{x}_N \end{pmatrix}$$

La matrice carrée A réelle et symétrique peut toujours être diagonalisée via une transformation orthogonale. Autrement dit, on peut toujours trouver une matrice orthogonale R ,

$$R^T R = R R^T = 1_{N-1},$$

où 1_{N-1} dénote la matrice identité $(N-1) \times (N-1)$, tel que

$$A = R^T \tilde{A} R, \tag{3.28}$$

où \tilde{A} est une matrice diagonale réelle dont les éléments ne sont rien d'autre que les valeurs propre de la matrice A . On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{N-1} a_{kl} \vec{x}_k \cdot \vec{x}_l &= \vec{X}^T A \vec{X} = \vec{X}^T R^T \tilde{A} R \vec{X} = (R \vec{X})^T \tilde{A} (R \vec{X}) \\ &= \vec{Y}^T \tilde{A} \vec{Y}, \end{aligned}$$

avec

$$\vec{Y} = R \vec{X}.$$

Ceci nous amène au changement suivant des coordonnées de Jacobi

$$\vec{y}_k = \sum_{l=1}^{N-1} R_{kl} \vec{x}_l. \tag{3.29}$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k,l=1}^{N-1} a_{kl} \vec{x}_k \cdot \vec{x}_l = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k \vec{y}_k^2. \quad (3.30)$$

où les \tilde{a}_k sont les valeurs propres de la matrice A , ou bien encore les éléments diagonaux de la matrice \tilde{A} . Ceci d'une part. D'autre part, une propriété intéressante d'une transformation orthogonale est que l'élément d'intégration est invariant sous une telle transformation. Donc,

$$d^3 \vec{x}_1 \cdots d^3 \vec{x}_{N-1} = d^3 \vec{y}_1 \cdots d^3 \vec{y}_{N-1}. \quad (3.31)$$

Il s'ensuit que

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = \int \cdots \int d^3 \vec{y}_1 \cdots d^3 \vec{y}_{N-1} \lambda_{ij} r_{ij}^\nu \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{a}_k \vec{y}_k^2 \right). \quad (3.32)$$

Finalement, faisons une dilatation $\{\vec{y}_k \rightarrow \vec{z}_k\}$ tel que

$$\vec{z}_k = \sqrt{\tilde{a}_k} \vec{y}_k \quad (3.33)$$

Sous une telle transformation

$$\tilde{a}_k \vec{y}_k^2 = \vec{z}_k^2$$

et

$$\begin{aligned} d^3 \vec{y}_1 \cdots d^3 \vec{y}_{N-1} &= (\tilde{a}_1)^{-3/2} d^3 \vec{Z}_1 \cdots (\tilde{a}_{N-1})^{-3/2} d^3 \vec{Z}_{N-1} \\ &= (\Delta)^{-3/2} d^3 \vec{Z}_1 \cdots d^3 \vec{Z}_{N-1}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

où Δ , produit des \tilde{a}_k : $\Delta = \tilde{a}_1 \cdots \tilde{a}_{N-1}$, est le déterminant de la matrice \tilde{A} , qui est le même que celui de la matrice A . la relation (3.32) peut alors se mettre sous la forme

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = (\Delta)^{-3/2} \int \cdots \int d^3 \vec{Z}_1 \cdots d^3 \vec{Z}_{N-1} \lambda_{ij} r_{ij}^\nu \exp \left(- \sum_{n=1}^{N-1} \vec{Z}_n^2 \right). \quad (3.35)$$

Les \vec{r}_{ij} doivent être bien entendu écrits en termes des \vec{Z}_k . En utilisant (3.16), (3.29) et (3.33)

$$\vec{r}_{ij} = \sum_{p=1}^{N-1} d_{ij}^p R_{pn}^T \sum_{n=1}^{N-1} (\tilde{a}_n)^{-1/2} \vec{Z}_n. \quad (3.36)$$

D'autre part, on peut toujours faire une transformation orthogonale sur les $\{\vec{Z}_n\}$

$$\{\vec{Z}_n\} \rightarrow \{\vec{W}_n\}, \quad (3.37)$$

de telle manière que \vec{r}_{ij} soit proportionnel à \vec{W}_1 . En faisant usage de la relation

$$R^T \tilde{A}^{-1} R = A^{-1}, \quad (3.38)$$

il est clair que le facteur de proportionnalité est donné par

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l=1}^{N-1} d_{ij}^l R_{kl} (\tilde{a}_{kk})^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l=1}^{N-1} d_{ij}^l R_{kl} (\tilde{a}_{kk})^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\sum_{p=1}^{N-1} d_{ij}^p R_{kp} (\tilde{a}_{kk})^{-1/2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l,p=1}^{N-1} d_{ij}^l R_{kl} (\tilde{a}_{kk})^{-1} R_{kp} d_{ij}^p \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k,k'=1}^{N-1} \left((d_{ij}^T R^T)_k (\tilde{A}^{-1})_{kk'} (R d_{ij})_{k'} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[d_{ij}^T R^T \tilde{A}^{-1} R d_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Mais, en utilisant (3.38), le facteur de proportionnalité entre \vec{r}_{ij} et \vec{W}_1 est finalement donné par

$$\left[d_{ij}^T A^{-1} d_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\vec{r}_{ij} = \left[d_{ij}^T A^{-1} d_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} \vec{W}_1.$$

Comme $\{\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_{N-1}\} \rightarrow \{\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_{N-1}\}$ est une transformation orthogonale l'élément d'intégration $d^3 \vec{Z}_1 \dots d^3 \vec{Z}_{N-1}$ ainsi $\sum_{n=1}^{N-1} \vec{Z}_n^2$ sont préservés, ce qui nous permet d'écrire que

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = (\Delta)^{-3/2} \int \dots \int d^3 \vec{W}_1 \dots d^3 \vec{W}_{N-1} \lambda_{ij} \left[d_{ij}^T A^{-1} d_{ij} \right]^{\nu/2} W_1^\nu \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} \vec{W}_k^2 \right), \quad (3.40)$$

où Δ désigne le déterminant de A . En utilisant le résultat bien connu

$$\int d^3 \vec{W} \exp \left(- \vec{W}^2 \right) = \pi^{3/2}, \quad (3.41)$$

l'élément de matrice entre deux gaussiennes corrélées peut être mis sous la forme

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = (\Delta)^{-3/2} \pi^{3(N-2)/2} \int d^3 \vec{W}_1 \lambda_{ij} \left[d_{ij}^T A^{-1} d_{ij} \right]^{\nu/2} W_1^\nu \exp \left(- \vec{W}_1^2 \right). \quad (3.42)$$

En faisant $\lambda_{ij} = 1$, et $\nu = 0$, dans la relation précédente, on obtient l'expression du recouvrement de deux gaussiennes

$$\langle m | n \rangle = (\Delta)^{-3/2} \pi^{3(N-2)/2} \pi^{3/2} = (\pi^{N-1}/\Delta)^{3/2}. \quad (3.43)$$

La relation (3.43) nous permet de mettre la relation (3.42) sous la forme

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = \langle m | n \rangle \pi^{-3/2} \int d^3 \vec{W}_1 \lambda_{ij} [d_{ij}^T A^{-1} d_{ij}]^{\nu/2} W_1^\nu \exp\left(-\vec{W}_1^2\right). \quad (3.44)$$

En utilisant le résultat

$$\int d^3 \vec{W}_1 W_1^\nu \exp\left(-\vec{W}_1^2\right) = 4\pi \int_0^\infty dW_1 W_1^{\nu+2} \exp(-W_1^2) = 2\pi \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right),$$

valable pour $\nu > -3$, (3.44) se réduit à

$$\langle m | \lambda_{ij} r_{ij}^\nu | n \rangle = \langle m | n \rangle \frac{2\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \gamma_{ij,ij}^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right), \quad (3.45)$$

où

$$\gamma_{ij,ij} := [d_{ij}^T A^{-1} d_{ij}]. \quad (3.46)$$

Calculons maintenant l'élément de matrice $\langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle$. En utilisant la relation (3.21), nous avons

$$\vec{p}_{x_k} | n \rangle = i\hbar \sum_{p=1}^{N-1} A_{kp}^n \vec{x}_p | n \rangle. \quad (3.47)$$

Il s'ensuit que

$$\langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle = \frac{\hbar^2}{2M_k} \sum_{p,q=1}^{N-1} A_{kq}^m A_{kp}^n \langle m | \vec{x}_q \cdot \vec{x}_p | n \rangle. \quad (3.48)$$

D'autre part, en faisant usage des relations (3.29), (3.30) et (3.31), nous obtenons

$$\langle m | \vec{x}_q \cdot \vec{x}_p | n \rangle = \sum_{i,j=1}^{N-1} R_{qi}^{-1} R_{pj}^{-1} \int \dots \int d^3 \vec{y}_1 \dots d^3 \vec{y}_{N-1} (\vec{y}_i \cdot \vec{y}_j) \exp\left(-\sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n \vec{y}_n^2\right). \quad (3.49)$$

Comme la fonction $(\vec{y}_i \cdot \vec{y}_j)$ est une fonction impaire en \vec{y}_i , et aussi en \vec{y}_j , pour $i \neq j$, il s'ensuit que l'intégral ci-dessus est nulle pour $i \neq j$. Donc

$$\langle m | \vec{x}_q \cdot \vec{x}_p | n \rangle = \sum_{j=1}^{N-1} R_{qj}^T R_{jp} \int \dots \int d^3 \vec{y}_1 \dots d^3 \vec{y}_{N-1} \vec{y}_j^2 \exp\left(-\sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n \vec{y}_n^2\right), \quad (3.50)$$

où on a utilisé le fait que

$$R_{pj}^{-1} = R_{jp} \text{ et } R_{qj}^{-1} = R_{qj}^T. \quad (3.51)$$

En faisant usage de l'intégral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{k}^2 \exp(-b \vec{k}^2) d^3 \vec{k} = \frac{3}{2b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} \text{ si } b > 0, \quad (3.52)$$

il vient alors que

$$\begin{aligned} \langle m | \vec{x}_q \cdot \vec{x}_p | n \rangle &= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{3/2} \pi^{3(N-2)/2} \sum_{j=1}^{N-1} R_{qj}^T \tilde{A}_{jj}^{-1} R_{jp} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{3/2} \pi^{3(N-2)/2} A_{qp}^{-1} = \frac{3}{2} \langle m | n \rangle A_{qp}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

On aboutit finalement à l'expression suivante pour $\langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle$

$$\begin{aligned} \langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle &= \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{2M_k} \langle m | n \rangle \sum_{q,p=1}^{N-1} A_{kq}^m A_{qp}^{-1} A_{kp}^n \\ &= \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{2M_k} \langle m | n \rangle (A^m A^{-1} A^n)_{kk}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donc

$$\langle m | T | n \rangle = \sum_{k=1}^{N-1} \langle m | \frac{\vec{p}_{x_k}^2}{2M_k} | n \rangle = \frac{3}{2} \langle m | n \rangle \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\hbar^2}{2M_k} (A^m A^{-1} A^n)_{kk}. \quad (3.55)$$

Finalement $\langle m | H | n \rangle$ est donné, en utilisant (3.45) et (3.55), par

$$\langle m | H | n \rangle = \langle m | n \rangle \left(\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\hbar^2}{2M_k} (A^m A^{-1} A^n)_{kk} + \sum_{i < j=1}^N \frac{2\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \gamma_{ij,ij}^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \right). \quad (3.56)$$

Lorsque $|\Psi\rangle$ consiste en une seule génération de gaussiennes, $|\Psi\rangle = |n\rangle$, (3.56) se réduit à

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle n | H | n \rangle = \langle n | n \rangle \left(\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\hbar^2}{2M_k} (A^n A^{-1} A^n)_{kk} + \sum_{i < j=1}^N \frac{2\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \gamma_{ij,ij}^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \right). \quad (3.57)$$

Maintenant on va approximer successivement les énergies des états fondamentaux des systèmes baryons, tétraquarks et pentaquarks par la méthode de la borne inférieure optimisée, pour obtenir des limites inférieures pour les énergies des états fondamentaux, puis en faisant usage de la méthode du développement systématique sur des Gaussiennes corrélées, pour obtenir des limites supérieures pour les énergies de ces mêmes états fondamentaux.

3.3 Energie de l'état fondamental d'un baryon

3.3.1 Borne inférieure optimisée pour l'énergie de l'état fondamental d'un baryon

On considère toutes les configurations de masse possibles pour ce système.

Configuration (m_1, m_2, m_3)

Dans le cas d'un système à 3 corps de masses toutes différentes, la décomposition du terme d'énergie cinétique, correspondant à la borne inférieure optimisée, (3.2), s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} = \left(\sum_{i=1}^3 b_i \vec{p}_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i \right) + \sum_{i<j=1}^3 \frac{a_{ij}}{4} \left(\sum_l x_{ij,l} \vec{p}_l \right)^2, \quad (3.58)$$

ou, plus explicitement,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} &= (b_1 \vec{p}_1 + b_2 \vec{p}_2 + b_3 \vec{p}_3) (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) + \frac{a_{12}}{4} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + x_{12,3} \vec{p}_3)^2 \\ &\quad + \frac{a_{13}}{4} (\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + x_{13,2} \vec{p}_2)^2 + \frac{a_{23}}{4} (\vec{p}_2 - \vec{p}_3 + x_{23,1} \vec{p}_1)^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

D'après l'équation (3.59), nous avons 3 paramètres b_i , 3 paramètres a_{ij} et 3 paramètres $x_{ij,l}$. L'identification des deux membres de l'équation (3.59), donne 6 relations entre les

paramètres b_i , a_{ij} et $x_{kl,m}$, à savoir

$$\begin{aligned}
b_1 + \frac{a_{12}}{4} + \frac{a_{13}}{4} + \frac{x_{23,1}^2}{4} a_{23} &= \frac{1}{2m_1}, \\
b_2 + \frac{a_{12}}{4} + \frac{a_{23}}{4} + \frac{x_{13,2}^2}{4} a_{13} &= \frac{1}{2m_2}, \\
b_3 + \frac{a_{13}}{4} + \frac{a_{23}}{4} + \frac{x_{12,3}^2}{4} a_{12} &= \frac{1}{2m_3}, \\
b_1 + b_2 - \frac{a_{12}}{2} + \frac{x_{13,2}}{2} a_{13} + \frac{x_{23,1}}{2} a_{23} &= 0, \\
b_1 + b_3 - \frac{a_{13}}{2} + \frac{x_{12,3}}{2} a_{12} - \frac{x_{23,1}}{2} a_{23} &= 0, \\
b_2 + b_3 - \frac{a_{23}}{2} - \frac{x_{12,3}}{2} a_{12} - \frac{x_{13,2}}{2} a_{13} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

qu'on peut considérer comme un système de 6 équations à six inconnues les b_i et les a_{ij} , avec trois paramètres les $x_{jk,l}$. Comme seuls les a_{ij} nous intéressent, on peut éliminer les b_j entre les équations (3.60) pour aboutir finalement à un système linéaire de 3 équations pour a_{12} , a_{13} et a_{23} :

$$\begin{aligned}
a_{12} + \left(\frac{1-x_{13,2}}{2}\right)^2 a_{13} + \left(\frac{1-x_{23,1}}{2}\right)^2 a_{23} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}, \\
\left(\frac{1-x_{12,3}}{2}\right)^2 a_{12} + a_{13} + \left(\frac{1+x_{23,1}}{2}\right)^2 a_{23} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}, \\
\left(\frac{1+x_{12,3}}{2}\right)^2 a_{12} + \left(\frac{1+x_{13,2}}{2}\right)^2 a_{13} + a_{23} &= \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Le système d'équations (3.60) peut être écrit sous forme matricielle comme

$$\tilde{D}A := \alpha, \tag{3.62}$$

où \tilde{D} est une matrice carrée 3×3

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1-x_{13,1}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1-x_{23,1}}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{1-x_{12,3}}{2}\right)^2 & 1 & \left(\frac{1+x_{23,1}}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{1+x_{12,3}}{2}\right)^2 & \left(\frac{1+x_{13,2}}{2}\right)^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

A et α sont des matrices unicolonnes 3×1

$$A := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix} \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \\ \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

En dérivant l'équation (3.62) par rapport aux paramètres $x_{kl,m}$, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial x_{kl,m}} A + \tilde{D} \frac{\partial A}{\partial x_{kl,m}} = 0. \quad (3.65)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial A}{\partial x_{kl,m}} = -\tilde{D}^{-1} \frac{\partial \tilde{D}}{\partial x_{kl,m}} A, \quad (3.66)$$

que l'on peut écrire comme

$$\tilde{B} = -\tilde{D}^{-1} \tilde{M}, \quad (3.67)$$

où \tilde{B} est la matrice d'éléments $\partial a_{ij} / \partial x_{kl,m}$, où ij et kl, m correspondent respectivement aux indices de ligne et de colonne, où \tilde{M} est la matrice carrée 3×3 dont la colonne kl, m est le produit de la colonne non nulle de $\partial \tilde{D} / \partial x_{kl,m}$ avec a_{kl} . D'après (3.67) la colonne de la matrice \tilde{B} correspondant à kl, m est moins le produit de l'inverse de la matrice \tilde{D} par l'unique colonne non nulle de $\partial \tilde{D} / \partial x_{kl,m}$ multiplié par a_{kl} . En faisant usage de l'expression de la matrice \tilde{D} (3.63), on obtient par la procédure décrite ci-dessus la matrice \tilde{M}

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} \left(\frac{x_{13,2}-1}{2} \right) & a_{23} \left(\frac{x_{23,1}-1}{2} \right) \\ a_{12} \left(\frac{x_{12,3}-1}{2} \right) & 0 & a_{23} \left(\frac{1+x_{23,1}}{2} \right) \\ a_{12} \left(\frac{1+x_{12,3}}{2} \right) & a_{13} \left(\frac{1+x_{13,2}}{2} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Lorsque la borne inférieure optimisée est atteinte, la matrice \tilde{B} (3×3) doit être de rang 2 au plus, ce qui implique un déterminant nul pour la matrice \tilde{B} . D'après la relation (3.67), un déterminant nul pour la matrice \tilde{B} est équivalent à un déterminant nul pour la matrice \tilde{M} car

$$\det \tilde{D} \neq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\det \tilde{B} = 0 \Leftrightarrow \det \tilde{M} = 0. \quad (3.69)$$

D'après les propriétés des déterminants

$$\det \tilde{M} = a_{12} a_{13} a_{23} \det M,$$

où la matrice (3×3) M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{x_{13,2}-1}{2} \right) & \left(\frac{x_{23,1}-1}{2} \right) \\ \left(\frac{x_{12,3}-1}{2} \right) & 0 & \left(\frac{1+x_{23,1}}{2} \right) \\ \left(\frac{1+x_{12,3}}{2} \right) & \left(\frac{1+x_{13,2}}{2} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Il s'ensuit, puisque les a_{ij} n'ont aucune raison d'être nuls, que

$$\det M = 0, \quad (3.71)$$

ce qui donne pour l'unique contrainte dynamique universelle pour la borne inférieure optimisée dans le cas des systèmes à trois corps

$$x_{23,1} = \frac{x_{13,2} - x_{12,3}}{1 - x_{12,3}x_{13,2}}. \quad (3.72)$$

On pourra utiliser cette relation pour réduire l'optimisation à 2 paramètres qu'on pourra prendre comme $x_{12,3}$ et $x_{13,2}$. Si on pose

$$\begin{aligned} x &:= x_{12,3}, \\ y &:= x_{13,2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Le système d'équations (3.61) ou (3.62) donne pour a_{12} , a_{13} et a_{23} les expressions suivantes :

$$a_{12} = -\frac{2(m_1m_2(y-1)(y+1)(x-1) + 2m_1m_3(y-1)(x+1) + 2m_2m_3(y+1)(xy-1))}{m_1m_2m_3(x+y-xy+3)(-y+x^2y-4xy+x^2+3)}, \quad (3.74)$$

$$a_{13} = -\frac{2(m_1m_3(x-1)(x+1)(y-1) + 2m_1m_2(y+1)(x-1) + 2m_2m_3(x+1)(xy-1))}{m_1m_2m_3(x+y-xy+3)(-x+xy^2-4xy+y^2+3)}, \quad (3.75)$$

$$a_{23} = -2(xy-1)^2 \frac{2m_1m_3(x-1) + 2m_1m_2(y-1) + m_2m_3(xy + xym_2m_3 + 1)}{m_1m_2m_3(-x+xy^2-4xy+y^2+3)(-y+x^2y-4xy+x^2+3)}. \quad (3.76)$$

Configuration (m_1, m_1, m_3)

Dans ce cas, le système est invariant sous la permutation des deux particules de même masse. Il s'ensuit qu'on a deux a_{ij} indépendants et également deux b_i indépendants, à savoir

$$a_{12} =: a_{m_1m_1} \text{ et } a_{13} = a_{23} =: a_{m_1m_3} \quad (3.77)$$

$$b_1 = b_2 =: b \text{ et } b_3 \quad (3.78)$$

et un seul paramètre $x_{ij,k}$

$$\begin{aligned} x_{12,3} &= 0, \\ x_{13,2} &= x_{23,1} = x. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Le système d'équations (3.61) se réduit alors à un système de deux équations à deux inconnues $a_{m_1 m_1}$ et $a_{m_1 m_3}$:

$$\begin{aligned} a_{m_1 m_1} + \frac{(1-x)^2}{2} a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{m_1}, \\ \frac{1}{4} a_{m_1 m_1} + \frac{x^2 + 2x + 5}{4} a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

dont la solution est

$$a_{m_1 m_1} = \frac{2}{m_1 m_3 (x+3)^2} \left(4m_3 (x+1) - m_1 (x-1)^2 \right), \quad (3.81)$$

$$a_{m_1 m_3} = 2 \frac{2m_1 + m_3}{m_1 m_3 (x+3)^2}. \quad (3.82)$$

Notons que pour un tel système, la nouvelle borne inférieure optimisée coïncide avec l'ancienne borne inférieure optimisée, [45, 46, 47, 48, 49].

Configuration (m_1, m_1, m_1)

Le système est invariant sous toute permutation des trois particules. Il s'ensuit qu'on a un seul a_{ij} indépendant, un seul paramètre b indépendant et aucun paramètre $x_{ij,k}$ indépendant

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{m_1 m_1}, \quad (3.83)$$

$$b_1 = b_2 = b_3, \quad (3.84)$$

$$x_{12,3} = x_{13,2} = x_{23,1} = 0. \quad (3.85)$$

Le système d'équations (3.61) se réduit alors à une seule équation qui donne pour $a_{m_1 m_1}$ l'expression suivante

$$a_{m_1 m_1} = \frac{2}{3m_1}. \quad (3.86)$$

3.3.2 Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un baryon

Cas restreint Dans ce cas, on approxime la fonction d'onde Ψ de l'état fondamental par deux générations de Gaussiennes corrélées

$$\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + 2c \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda} \right\}\right) + \mu \exp\left(-\frac{x}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + 2c \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda} \right\}\right), \quad (3.87)$$

qui peut être mise sous la forme

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \quad (3.88)$$

avec

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + 2c \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda} \right\}\right) \quad (3.89)$$

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 2 \rangle = \exp\left(-\frac{x}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + 2c \vec{\rho} \cdot \vec{\lambda} \right\}\right), \quad (3.90)$$

où a, b, c, μ et x sont des nombres réels avec $ab - c^2 > 0$, a, b et x positifs. $\vec{\rho}$ et $\vec{\lambda}$ représentent les coordonnées de Jacobi pour ce système. Si $\mu = 0$, on aura affaire à une seule Gaussienne et le nombre de paramètres sur lesquels on optimise est réduit de deux unités. Remarquons que les relations (3.89) et (3.90) peuvent être réécrites comme

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \vec{\rho} & \vec{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} \right\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{X}^T A^1 \vec{X}\right) \quad (3.91)$$

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 2 \rangle = \exp\left(-\frac{x}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \vec{\rho} & \vec{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} \right\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{X}^T A^2 \vec{X}\right), \quad (3.92)$$

où

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \vec{X}^T = \begin{pmatrix} \vec{\rho} & \vec{\lambda} \end{pmatrix},$$

et où A^1 et A^2 sont des matrices carrées réelles symétriques définies par :

$$A^1 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} xa & xc \\ xc & xb \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

La valeur moyenne de l'Hamiltonien du système H ,

$$H = \sum_{k=1}^3 \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^3 V(r_{ij}), \quad (3.95)$$

dans l'état $|\Psi\rangle$ est donnée par

$$\langle H \rangle_{\Psi} = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle 1 | H | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | H | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | H | 2 \rangle}{\langle 1 | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle}. \quad (3.96)$$

En utilisant le résultat, (3.43), obtenu précédemment pour les recouvrements de gaussiennes, nous avons

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^1} \right)^{3/2} = \left(\frac{\pi^2}{ab - c^2} \right)^{3/2}, \quad (3.97)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^2} \right)^{3/2} = x^{-3} \left(\frac{\pi^2}{ab - c^2} \right)^{3/2} = x^{-3} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.98)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^3} \right)^{3/2} = 8(1+x)^{-3} \left(\frac{\pi^2}{(ab - c^2)} \right)^{3/2} = 8(1+x)^{-3} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.99)$$

où A^3 est la matrice carrée 2×2 demi-somme des matrices A^1 et A^2 et est par conséquent aussi réelle et symétrique

$$A^3 = \frac{1}{2} (A^1 + A^2). \quad (3.100)$$

Il s'ensuit que

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left[1 + 16(1+x)^{-3} \mu + x^{-3} \mu^2 \right] \langle 1 | 1 \rangle. \quad (3.101)$$

D'autre part,

$$\langle \Psi | H_R | \Psi \rangle = \langle \Psi | T_R | \Psi \rangle + \langle \Psi | V | \Psi \rangle. \quad (3.102)$$

Eléments de matrice de l'énergie cinétique Introduisons d'abord un ensemble de deux coordonnées de Jacobi indépendantes $\vec{\rho}$ et $\vec{\lambda}$. Un choix possible est :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (3.103)$$

$$\vec{\lambda} = \vec{r}_3 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.104)$$

La coordonnée du centre de masse est donnée par

$$\vec{R} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3). \quad (3.105)$$

en inversant les relations précédentes, (3.103), (3.104) et (3.105), on peut déduire les expressions des coordonnées individuelles des particules \vec{r}_1 , \vec{r}_2 et \vec{r}_3 en fonction de $\vec{\rho}$, $\vec{\lambda}$ et \vec{R} .

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{\rho} - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{\lambda} + \vec{R}, \quad (3.106)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{\rho} - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{\lambda} + \vec{R}, \quad (3.107)$$

$$\vec{r}_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{\lambda} + \vec{R}. \quad (3.108)$$

Introduisons les moments conjugués des coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}$ et $\vec{\lambda}$, \vec{P}_ρ et \vec{P}_λ respectivement

$$\vec{P}_\rho = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_2, \quad (3.109)$$

$$\vec{P}_\lambda = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \vec{p}_3 - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad (3.110)$$

ainsi que l'impulsion totale du système

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3, \quad (3.111)$$

Après inversion des relations (3.109), (3.110) et (3.111), l'énergie cinétique du système peut être réécrite comme

$$T = \frac{\vec{P}_R^2}{2M} + \frac{\vec{P}_\rho^2}{2M_\rho} + \frac{\vec{P}_\lambda^2}{2M_\lambda}, \quad (3.112)$$

avec

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \quad (3.113)$$

$$M_\rho = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.114)$$

$$M_\lambda = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (3.115)$$

En retranchant à T l'énergie cinétique du centre de masse, on obtient l'énergie cinétique du mouvement relatif T_R

$$T_R = \frac{\vec{P}_\rho^2}{2M_\rho} + \frac{\vec{P}_\lambda^2}{2M_\lambda}. \quad (3.116)$$

En utilisant la relation (3.42) ainsi que les définitions de A^1 , (3.93), A^2 , (3.94), et A^3 , (3.100),

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} \right), \quad (3.117)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 2 | 2 \rangle x \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} \right), \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} \left(A^1 (A^3)^{-1} A^2 \right)_{kk} \\ &= \frac{3}{2} \hbar^2 \langle 1 | 2 \rangle x (1+x)^{-1} \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.119)$$

En faisant usage de (3.97), (3.98) et (3.99), on obtient

$$\begin{aligned}\langle \Psi | T_R | \Psi \rangle &= \langle 1 | T_R | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | T_R | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | T_R | 2 \rangle \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} \right) \langle 1 | 1 \rangle \left[1 + 32x(1+x)^{-4} \mu + x^{-2} \mu^2 \right].\end{aligned}\quad (3.120)$$

Eléments de matrice de l'énergie potentielle En partant des expressions (3.45) et (3.46), nous obtenons

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle \sum_{i < j=1}^N \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \left(d_{ij}^T (A^1)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \Gamma \left(\frac{\nu+3}{2} \right), \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned}\langle 2 | V | 2 \rangle &= \langle 2 | 2 \rangle \sum_{i < j=1}^N \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \left(d_{ij}^T (A^2)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \Gamma \left(\frac{\nu+3}{2} \right) \\ &= x^{-3-\nu/2} \langle 1 | V | 1 \rangle,\end{aligned}\quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}\langle 1 | V | 2 \rangle &= \langle 1 | 2 \rangle \sum_{i < j=1}^N \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\pi}} \left(d_{ij}^T (A^3)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \Gamma \left(\frac{\nu+3}{2} \right) \\ &= 2^{3+\nu/2} (1+x)^{-3-\nu/2} \langle 1 | V | 1 \rangle.\end{aligned}\quad (3.123)$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | V | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | V | 2 \rangle \\ &= \left[1 + 2^{4+\nu/2} (1+x)^{-3-\nu/2} \mu + x^{-3-\nu/2} \mu^2 \right] \langle 1 | V | 1 \rangle.\end{aligned}\quad (3.124)$$

Calculons maintenant l'élément de matrice $\langle \Psi | V | \Psi \rangle$ pour un potentiel du type

$$V(r) = \frac{1}{2} A \left(r_{12}^\beta + r_{13}^\beta + r_{23}^\beta \right) + \frac{3}{2} B, \quad (3.125)$$

avec A et β deux réels de même signe et B réel. En faisant usage des relations (3.106), (3.107), et (3.108),

$$\begin{aligned}\vec{r}_{12} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}, \\ \vec{r}_{13} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{\rho} - \vec{\lambda}, \\ \vec{r}_{23} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{\rho} - \vec{\lambda}.\end{aligned}\quad (3.126)$$

En comparant à (3.16) dans le cas à trois corps

$$\vec{r}_{ij} = d_{ij}^1 \vec{\rho} + d_{ij}^2 \vec{\lambda}, \quad (3.127)$$

on déduit que

$$d_{12}^1 = 1, \quad d_{12}^2 = 0, \quad (3.128)$$

$$d_{13}^1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad d_{13}^2 = -1, \quad (3.129)$$

$$d_{23}^1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad d_{23}^2 = -1. \quad (3.130)$$

En considérant V comme la somme de deux potentiels en loi de puissance avec des valeurs différentes pour l'exposant, β et 0, et en faisant usage de la relation obtenue ci-dessus, on obtient l'expression suivante pour $\langle \Psi | V | \Psi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \left[1 + 2^{4+\frac{\beta}{2}} (1+x)^{-3-\frac{\beta}{2}} \mu + x^{-3-\frac{\beta}{2}} \mu^2 \right] \frac{A}{2} \langle 1 | r_{12}^\beta + r_{13}^\beta + r_{23}^\beta | 1 \rangle \\ &+ \left[1 + 2^4 (1+x)^{-3} \mu + x^{-3} \mu^2 \right] \frac{3B}{2} \langle 1 | 1 \rangle \end{aligned} \quad (3.131)$$

En faisant usage de la relation (3.35) après un calcul préalable de $\gamma_{ij,ij}$ défini par la relation (3.46) nous obtenons pour la valeur moyenne de l'Hamiltonien l'expression suivante

$$\begin{aligned} E = \langle H \rangle_\Psi &= \frac{\frac{3}{4} \hbar^2 \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} \right) \left[1 + 32x (1+x)^{-4} \mu + x^{-2} \mu^2 \right]}{\left[1 + 16 (1+x)^{-3} \mu + x^{-3} \mu^2 \right]} + \\ &\left(\frac{3B}{2} + \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \frac{\left(1 + 2^{4+\nu/2} (1+x)^{-3-\nu/2} \mu + x^{-3-\nu/2} \mu^2 \right)}{\left[1 + 16 (1+x)^{-3} \mu + x^{-3} \mu^2 \right]} \left[\left(\frac{4b}{4ab-c^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} + \right. \right. \\ &\left. \left(\left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \right)^2 \frac{4(a+b)}{4ab-c^2} + \frac{4m_2c}{(m_1+m_2)(4ab-c^2)} \right)^{\frac{\beta}{2}} + \right. \\ &\left. \left. \left(\left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \frac{4(a+b)}{4ab-c^2} - \frac{4m_1c}{(m_1+m_2)(4ab-c^2)} \right)^{\frac{\beta}{2}} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Cas général Dans le cas général le nombre de paramètres de la fonction d'onde d'essai est plus grand que le nombre de paramètres dans le cas restreint. La fonction d'onde d'essai

pour l'état fondamental du système est une superposition de deux Gaussiennes,

$$\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\{a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + 2c_1 \vec{\rho} \vec{\lambda}\}\right) + \mu \exp\left(-\frac{1}{2}\{a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + 2c_2 \vec{\rho} \vec{\lambda}\}\right), \quad (3.133)$$

où les paramètres $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sont indépendants. La relation (3.133) peut être écrite sous forme abstraite comme :

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \quad (3.134)$$

avec

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\{a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + 2c_1 \vec{\rho} \vec{\lambda}\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) A^1 \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}\right), \quad (3.135)$$

$$\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda} | 2 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\{a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + 2c_2 \vec{\rho} \vec{\lambda}\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) A^2 \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}\right), \quad (3.136)$$

avec A^1 et A^2 des matrices carrées réelles et symétriques, définies par

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}, \quad (3.137)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}. \quad (3.138)$$

Le fait que A^1 et A^2 soient définies positives se traduit par le fait que $a_1 > 0, b_1 > 0, a_1 b_1 - c_1^2 > 0$, et $a_2 > 0, b_2 > 0, a_2 b_2 - c_2^2 > 0$. En appliquant la relation (3.43), on obtient

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^1}\right)^{3/2} = \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 - c_1^2}\right)^{3/2}, \quad (3.139)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 - c_2^2}\right)^{3/2}, \quad (3.140)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{\det A^3}\right)^{3/2} = \left(\frac{\pi^2}{(a_3 b_3 - c_3^2)}\right)^{3/2}. \quad (3.141)$$

où A^3 est la matrice carrée 2×2 , demi-somme des matrices A^1 et A^2

$$A^3 = \frac{1}{2}(A^1 + A^2). \quad (3.142)$$

Il s'ensuit que

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b_3 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2}. \quad (3.143)$$

En faisant usage des relations (3.139), (3.140) et (3.141), on obtient

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left[\left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 - c_1^2} \right)^{3/2} + 2 \left(\frac{\pi^2}{(a_3 b_3 - c_3^2)} \right)^{3/2} \mu + \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 - c_2^2} \right)^{3/2} \mu^2 \right]. \quad (3.144)$$

Elément de matrice de l'énergie cinétique du mouvement relatif En utilisant la relation (3.55), nous obtenons

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} \right), \quad (3.145)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} \right), \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} \left(A^1 (A^3)^{-1} A^2 \right)_{kk} \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 2 \rangle \left(\frac{(a_2 c_1^2 + a_1 c_2^2 - a_1 a_2 b_1 - a_1 a_2 b_2)}{M_\rho} + \frac{(b_2 c_1^2 + b_1 c_2^2 - a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1 b_2)}{M_\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.147)$$

Il s'ensuit que

$$\langle \Psi | T_R | \Psi \rangle = F(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu), \quad (3.148)$$

avec

$$\begin{aligned} F(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu) &:= \frac{3}{4} \hbar^2 \left[\left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 - c_1^2} \right)^{3/2} \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} \right) + \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 - c_2^2} \right)^{3/2} \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} \right) \mu^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{\pi^2}{(a_3 b_3 - c_3^2)} \right)^{3/2} \left(\frac{(a_2 c_1^2 + a_1 c_2^2 - a_1 a_2 b_1 - a_1 a_2 b_2)}{M_\rho} + \frac{(b_2 c_1^2 + b_1 c_2^2 - a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1 b_2)}{M_\lambda} \right) \mu \right], \end{aligned} \quad (3.149)$$

où on a tenu compte du fait que $\langle 1 | T_R | 2 \rangle$ est réel.

Elément de matrice de l'énergie potentielle Nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \langle 1 | V | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | V | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | V | 2 \rangle \\
&= [\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle] \frac{3B}{2} + G(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu),
\end{aligned} \tag{3.150}$$

avec

$$\begin{aligned}
G(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu) &:= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta+3}{2}\right) \times \\
&\left\{ \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 - c_1^2}\right)^{3/2} \left[\left(\frac{4b_1}{4a_1 b_1 - c_1^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} + \left(\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_1 + b_1)}{4a_1 b_1 - c_1^2} + \frac{4m_2 c_1}{(m_1 + m_2)(4a_1 b_1 - c_1^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_1 + b_1)}{4a_1 b_1 - c_1^2} - \frac{4m_1 c_1}{(m_1 + m_2)(4a_1 b_1 - c_1^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right] + \right. \\
&\mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 - c_2^2}\right)^{3/2} \left[\left(\frac{4b_2}{4a_2 b_2 - c_2^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} + \left(\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_2 + b_2)}{4a_2 b_2 - c_2^2} + \frac{4m_2 c_2}{(m_1 + m_2)(4a_2 b_2 - c_2^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right. \\
&+ \left. \left. \left(\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_2 + b_2)}{4a_2 b_2 - c_2^2} - \frac{4m_1 c_2}{(m_1 + m_2)(4a_2 b_2 - c_2^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right] + \right. \\
&+ 2\mu \left(\frac{\pi^2}{a_3 b_3 - c_3^2}\right)^{3/2} \left[\left(\frac{4b_3}{4a_3 b_3 - c_3^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} + \left(\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_3 + b_3)}{4a_3 b_3 - c_3^2} + \frac{4m_2 c_3}{(m_1 + m_2)(4a_3 b_3 - c_3^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right. \\
&+ \left. \left. \left(\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{4(a_3 + b_3)}{4a_3 b_3 - c_3^2} - \frac{4m_1 c_3}{(m_1 + m_2)(4a_3 b_3 - c_3^2)}\right)^{\frac{\beta}{2}} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.151}$$

où on a fait usage de la relation (3.45). En tenant compte des relations (3.144), (3.148) et (3.150), on obtient l'expression suivante pour la valeur moyenne de l'Hamiltonien dans l'état $|\Psi\rangle$

$$E = \langle H \rangle_{\Psi} = \frac{F(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu) + G(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \mu)}{\left[\left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 - c_1^2}\right)^{3/2} + 2 \left(\frac{\pi^2}{a_3 b_3 - c_3^2}\right)^{3/2} \mu + \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 - c_2^2}\right)^{3/2} \mu^2 \right]} + \frac{3B}{2}. \tag{3.152}$$

3.4 Energie de l'état fondamental d'un système tétraquark

3.4.1 Borne inférieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système tétraquark

La décomposition de l'énergie cinétique correspondant à la borne inférieure optimisée pour un système à quatre corps est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m_4} &= (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) (b_1 \vec{p}_1 + b_2 \vec{p}_2 + b_3 \vec{p}_3 + b_4 \vec{p}_4) + \\
&a_{12} \left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + x_{12,3} \vec{p}_3 + x_{12,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
&a_{13} \left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + x_{13,2} \vec{p}_2 + x_{13,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
&a_{14} \left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_4 + x_{14,2} \vec{p}_2 + x_{14,3} \vec{p}_3}{2} \right)^2 + \\
&a_{23} \left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_3 + x_{23,1} \vec{p}_1 + x_{23,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
&a_{24} \left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_4 + x_{24,1} \vec{p}_1 + x_{24,3} \vec{p}_3}{2} \right)^2 + \\
&a_{34} \left(\frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_4 + x_{34,1} \vec{p}_1 + x_{34,2} \vec{p}_2}{2} \right)^2. \tag{3.153}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant quelques configurations spéciales de masses pour les systèmes à quatre corps.

Configuration (m_1, m_1, m_3, m_3) Dans ce cas la symétrie du problème implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{13} &= a_{14} = a_{23} = a_{24} =: a_{m_1 m_3}, \\
b_1 &= b_2, \quad b_3 = b_4 \\
x_{12,3} &= x_{12,4} = x_{34,1} = x_{34,2} = 0, \\
x_{13,2} &= x_{14,2} = x_{23,1} = x_{24,1} = x_1, \\
x_{13,4} &= x_{14,3} = x_{23,4} = x_{24,3} = x_2. \tag{3.154}
\end{aligned}$$

Il est clair qu'on a trois a_{ij} indépendants et deux paramètres indépendants x_1 et x_2 sur lesquels porte l'optimisation. En faisant usage de ces relations simplificatrices (3.154)

dans (3.153) et en identifiant les deux membres de cette dernière, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
b_1 + \frac{a_{m_1 m_1}}{4} + \frac{1+x_1^2}{2} a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{2m_1}, \\
b_3 + \frac{a_{m_3 m_3}}{4} + \frac{1+x_2^2}{2} a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{2m_3}, \\
b_1 + b_3 + \frac{x_2 - x_1 + x_1 x_2 - 1}{2} a_{m_1 m_3} &= 0, \\
2b_1 - \frac{a_{m_1 m_1}}{2} + 2x_1 a_{m_1 m_3} &= 0, \\
2b_3 - \frac{a_{m_3 m_3}}{2} - 2x_2 a_{m_1 m_3} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.155}$$

où on a adopté la notation $a_{12} = a_{m_1 m_1}$, $a_{34} = a_{m_3 m_3}$. En éliminant b_1 et b_3 entre les équations (3.155), on obtient le système linéaire d'équations suivant pour $a_{m_1 m_1}$, $a_{m_3 m_3}$ et $a_{m_1 m_3}$

$$\begin{aligned}
a_{m_1 m_1} + (1-x_1)^2 a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{m_1}, \\
\frac{a_{m_1 m_1}}{4} + \frac{1}{2} (x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + 3) a_{m_1 m_3} + \frac{a_{m_3 m_3}}{4} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}, \\
a_{m_3 m_3} + (1+x_2)^2 a_{m_1 m_3} &= \frac{1}{m_3},
\end{aligned} \tag{3.156}$$

dont la solution est

$$a_{m_1 m_1} = \frac{(-x_2 + 3)(-x_2 + 2x_1 + 1)m_3 - (x_1 - 1)^2 m_1}{(2 + x_1 - x_2)^2 m_1 m_3}, \tag{3.157}$$

$$a_{m_1 m_3} = \frac{m_1 + m_3}{(2 + x_1 - x_2)^2 m_1 m_3}, \tag{3.158}$$

$$a_{m_3 m_3} = \frac{(x_1 - 2x_2 + 1)(x_1 + 3)m_1 - (1 + x_2)^2 m_3}{(2 + x_1 - x_2)^2 m_1 m_3}. \tag{3.159}$$

Configuration (m_1, m_1, m_3, m_4) La symétrie du problème implique cette fois-ci que

$$\begin{aligned}
a_{13} &= a_{23}, \quad a_{14} = a_{24}, \\
b_1 &= b_2 \\
x_{13,2} &= x_{23,1} =: x_1, \quad x_{13,4} = x_{23,4} =: x_2, \\
x_{14,2} &= x_{24,1} =: x_3, \quad x_{14,3} = x_{24,3} =: x_4, \\
x_{34,1} &= x_{34,2} = x_5, \quad x_{12,3} = x_{12,4} = 0.
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Donc les a_{ij} et les $x_{ij,k}$ indépendants sont aux nombres de 4 et 5 respectivement. Il s'ensuit que le nombre de contraintes dynamiques universelles calculées est égal à $5 - 4 + 1 = 2$. Ces 2 contraintes dynamiques universelles permettent d'éliminer 2 paramètres parmi les 5 $x_{ij,k}$ initiaux. Donc on a à optimiser sur $5 - 2 = 3$ paramètres. En identifiant les deux membres de (3.153) et en tenant compte des simplifications apportées par (3.160), on obtient le système d'équations linéaires suivant pour les b_i et les a_{ij}

$$\begin{aligned}
b_1 + \frac{1}{4}a_{12} + \frac{1}{4}(1+x_1^2)a_{13} + \frac{1}{4}(1+x_3^2)a_{14} + \frac{1}{4}x_5^2a_{34} &= \frac{1}{2m_1}, \\
b_3 + \frac{1}{2}a_{13} + \frac{1}{2}x_4^2a_{14} + \frac{1}{4}a_{34} &= \frac{1}{2m_3}, \\
b_4 + \frac{1}{2}x_2^2a_{13} + \frac{1}{2}a_{14} + \frac{1}{4}a_{34} &= \frac{1}{2m_4}, \\
2b_1 - \frac{1}{2}a_{12} + x_1a_{13} + x_3a_{14} + \frac{1}{2}x_5^2a_{34} &= 0, \\
b_1 + b_3 - \frac{1}{2}(1+x_1)a_{13} + \frac{1}{2}x_4(1+x_3)a_{14} + \frac{1}{2}x_5a_{34} &= 0, \\
b_1 + b_4 + \frac{1}{2}x_2(1+x_1)a_{13} - \frac{1}{2}(1+x_3)a_{14} - \frac{1}{2}x_5a_{34} &= 0, \\
b_3 + b_4 - x_2a_{13} - x_4a_{14} - \frac{1}{2}a_{34} &= 0. \tag{3.161}
\end{aligned}$$

En éliminant les b_k entre les équations (3.161), on obtient le système d'équations linéaires suivant pour les a_{ij}

$$\begin{aligned}
a_{12} + \frac{1}{2}(1-x_1)^2a_{13} + \frac{1}{2}(1-x_3)^2a_{14} &= \frac{1}{m_1}, \\
\frac{1}{4}a_{12} + \frac{1}{4}(4+(1+x_1)^2)a_{13} + \frac{1}{4}((1-x_4)^2+(x_3-x_4)^2)a_{14} + \frac{1}{4}(1-x_5)^2a_{34} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}, \\
\frac{1}{4}a_{12} + \frac{1}{4}((1-x_2)^2+(x_1-x_2)^2)a_{13} + \frac{1}{4}(4+(1+x_3)^2)a_{14} + \frac{1}{4}(1+x_5)^2a_{34} &= \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_4}, \\
\frac{1}{2}(1+x_2)^2a_{13} + \frac{1}{2}(1+x_4)^2a_{14} + a_{34} &= \frac{1}{2m_3} + \frac{1}{2m_4}, \tag{3.162}
\end{aligned}$$

qu'on peut réécrire sous forme matricielle comme

$$\tilde{D} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_4} \\ \frac{1}{2m_3} + \frac{1}{2m_4} \end{pmatrix}, \tag{3.163}$$

avec \tilde{D} matrice carrée 4×4 ,

$$\tilde{D} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2(1-x_1)^2 & 2(1-x_3)^2 & 0 \\ 1 & 4+(1+x_1)^2 & (1-x_4)^2 + (x_3-x_4)^2 & (1-x_5)^2 \\ 1 & (1-x_2)^2 + (x_1-x_2)^2 & 4+(1+x_3)^2 & (1+x_5)^2 \\ 0 & 2(1+x_2)^2 & 2(1+x_4)^2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (3.164)$$

Il s'ensuit que la matrice M correspondante est donnée par

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(x_1-1) & 0 & 2(x_3-1) & 0 & 0 \\ (x_1+1) & 0 & (x_3-x_4) & (x_4-1) + (x_4-x_3) & (x_5-1) \\ (x_1-x_2) & (x_2-1) + (x_2-x_1) & (x_3+1) & 0 & (x_5+1) \\ 0 & 2(x_2+1) & 0 & 2(x_4+1) & 0 \end{pmatrix}.$$

En imposant à la matrice M d'être de rang 3 au plus, on obtient deux contraintes qui nous permettent par exemple d'exprimer x_4 et x_5 en termes de x_1 , x_2 et x_3

$$x_4 = \frac{1}{x_1-1} (x_1 - x_2 - x_3 + x_2x_3) \quad (3.165)$$

et

$$x_5 = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2 + x_2x_3 - 1}. \quad (3.166)$$

On va tirer profit des relations (3.165) et (3.166) pour optimiser sur trois paramètres, par exemple x_1 , x_2 et x_3 , au lieu des cinq paramètres initiaux, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5 .

En multipliant les deux membres de l'équation (3.163) par la matrice inverse de \tilde{D} , (3.164), on obtient

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \tilde{D}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_4} \\ \frac{1}{2m_3} + \frac{1}{2m_4} \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

En remplaçant x_4 et x_5 par leurs expressions respectives (3.165) et (3.166) dans la relation donnant la matrice \tilde{D} , (3.164), en inversant ensuite cette dernière, et finalement en effectuant le produit matriciel du membre de droite de (3.167), on obtient les expressions

suivantes a_{12} , a_{13} , a_{14} et a_{34} .

$$a_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad (3.168)$$

$$a_{13} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \quad (3.169)$$

$$a_{14} = \frac{1}{(x_3 - 1)} \frac{\Delta_{14}}{\Delta}, \quad (3.170)$$

$$a_{34} = \frac{1}{(x_3 - 1)} \frac{\Delta_{34}}{\Delta}, \quad (3.171)$$

$$(3.172)$$

avec Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} , Δ_{34} et Δ donnés par

$$\begin{aligned} \Delta_{12} : &= -m_1 (x_1 - 1)^2 \left(m_3 (1 + x_2)^2 (x_3 - 1)^2 + m_4 (1 - 2x_1 + x_2 + x_3 - x_2 x_3)^2 \right) \\ &+ 2m_3 m_4 \left(3 + 8x_1^3 - 2x_2^3 (x_3 - 1)^2 + x_2^4 (x_3 - 1)^2 + 4x_3 + x_3^2 - \right. \\ &2x_1^2 (3 - 6x_2 (x_3 - 1) + x_2^2 (x_3 - 1) + x_3) - 2x_2 (x_3^2 - 1) + 2x_2^2 (x_3^2 + x_3 - 2) \\ &\left. - 2x_1 (x_2^3 (x_3 - 1)^2 + 2(1 + x_3) - 2x_2^2 (2 - 3x_3 + x_3^2) + x_2 (-3 + 2x_3 + x_3^2)) \right), \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{13} : &= -m_1 \left(m_3 (1 + x_1 - 2x_2) (1 + x_2) (x_3 - 1)^2 \right. \\ &- m_4 (x_1 - 1) (-1 + 2x_1 + x_2 (x_3 - 1) - x_3) (3 + x_3) + \\ &2m_3 m_4 (1 + 2x_1^2 + x_1 (-3 + 3x_2 (-1 + x_3) - x_3) + \\ &\left. x_2^2 (x_3 - 1)^2 + x_3 - x_2 (x_3^2 + x_3 - 2)) \right), \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{14} : &= (x_1 - 1)^2 (2m_3 m_4 (1 + x_2) (-1 + x_1 + x_2 (x_3 - 1)) + \\ &m_1 (-m_4 (1 + x_1 - 2x_2) (-1 + 2x_1 + x_2 (x_3 - 1) - x_3) + \\ &m_3 (3 + x_1) (1 + x_2) (x_3 - 1)), \end{aligned} \quad (3.175)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{34} : &= (-1 + x_1 + x_2 (x_3 - 1))^2 (-2m_3 m_4 (1 + x_2) (-1 + 2x_1 + x_2 (-1 + x_3) - x_3) + \\ &m_1 (1 + x_1 - 2x_2) (m_3 (3 + x_1) (-1 + x_3) + m_4 (x_1 - 1) (3 + x_3))), \end{aligned} \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \Delta : &= 2m_1 m_3 m_4 (x_1^2 - 2 - x_2 + x_2^2 + x_1 (2 + x_2 (x_3 - 1)) - x_3 + x_2 x_3 - x_2^2 x_3)^2 \end{aligned} \quad (3.177)$$

3.4.2 Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système tétraquark

On va se limiter également ici aux configurations du type $(q_1, q_1, \bar{q}_3, \bar{q}_3)$ et $(q_1, q_1, \bar{q}_3, \bar{q}_4)$

Configuration $(q_1, q_1, \bar{q}_3, \bar{q}_3)$

Cas restreint On prend comme fonction d'onde d'essai de l'état fondamental une superposition de deux gaussiennes corrélées

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2\}\right) + \mu \exp\left(-\frac{x}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2\}\right) \\ &= \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle + \mu \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle\end{aligned}\quad (3.178)$$

ou, de manière abstraite,

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \quad (3.179)$$

avec

$$\begin{aligned}\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2}\vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j\right),\end{aligned}\quad (3.180)$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle &= \exp\left(-\frac{x}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2}\vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j\right),\end{aligned}\quad (3.181)$$

avec les \vec{x}_i définis par

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &:= \vec{\rho}, \\ \vec{x}_2 &:= \vec{\lambda}, \\ \vec{x}_3 &:= \vec{\sigma}\end{aligned}$$

et où A^1 et A^2 sont des matrices carrées diagonales 3×3 définies par

$$A^1 := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (3.182)$$

$$A^2 := xA^1. \quad (3.183)$$

a, b, c et x sont des nombres réels positifs, ce qui garantit que A^1 et A^2 sont des matrices réelles symétriques et définies positives. L'absence des termes en $\vec{\rho} \cdot \vec{\lambda}$, $\vec{\rho} \cdot \vec{\sigma}$ et $\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma}$ dans les expressions de $|1\rangle$ et de $|2\rangle$ garantit la symétrie de la fonction d'onde dans les échanges séparés $1 \leftrightarrow 2$ et $3 \leftrightarrow 4$.

Elément de matrice de l'énergie cinétique Pour la configuration considérée $(q_1, q_1, \bar{q}_3, \bar{q}_3)$ un choix judicieux des coordonnées de Jacobi est le suivant :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (3.184)$$

$$\vec{\lambda} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \quad (3.185)$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4) - \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2). \quad (3.186)$$

Les moments associés respectivement aux coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}$, $\vec{\lambda}$ et $\vec{\sigma}$ sont donnés par :

$$\vec{P}_\rho = \frac{1}{2}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1), \quad (3.187)$$

$$\vec{P}_\lambda = \frac{1}{2}(\vec{p}_4 - \vec{p}_3), \quad (3.188)$$

$$\vec{P}_\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_3}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) - \frac{m_3}{m_1 + m_3}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2). \quad (3.189)$$

L'impulsion totale \vec{P} du système, qui est le moment conjugué de la coordonnée du centre de masse, est donnée par

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4. \quad (3.190)$$

En inversant les relations (3.250), (3.188), (3.189) et (3.253) pour exprimer les impulsions individuelles en termes des moments de Jacobi et de l'impulsion totale, en reportant ensuite dans l'expression de l'énergie cinétique, puis en retranchant l'énergie cinétique du centre de masse, on arrive à l'expression de l'énergie cinétique du mouvement relatif T_R . On obtient tout calcul fait

$$T_R = \frac{\vec{P}_\rho^2}{2M_\rho} + \frac{\vec{P}_\lambda^2}{2M_\lambda} + \frac{\vec{P}_\sigma^2}{2M_\sigma}, \quad (3.191)$$

avec

$$M_\rho = \frac{m_1}{2}, \quad (3.192)$$

$$M_\lambda = \frac{m_3}{2}, \quad (3.193)$$

$$M_\sigma = \frac{2m_1m_3}{m_1 + m_3}. \quad (3.194)$$

Nous avons, en utilisant (3.43),

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{abc} \right)^{3/2}, \quad (3.195)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{x^3 abc} \right)^{3/2} = x^{-9/2} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.196)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{8\pi^2}{(1+x)^3 abc} \right)^{3/2} = 2^{9/2} (1+x)^{-9/2} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.197)$$

d'où on déduit $\langle \Psi | \Psi \rangle$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left[1 + \mu^2 x^{-9/2} + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu \right] \langle 1 | 1 \rangle. \quad (3.198)$$

En utilisant (3.55)

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right), \quad (3.199)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 x^{-7/2} \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right), \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} \left(A^1 (A^3)^{-1} A^2 \right)_{kk} \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle 2^{11/2} x (1+x)^{-11/2} \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.201)$$

Il s'ensuit que

$$\langle \Psi | T_R | \Psi \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right) \left[1 + x^{-7/2} \mu^2 + 2^{13/2} x (1+x)^{-11/2} \mu \right]. \quad (3.202)$$

Elément de matrice de l'énergie potentielle L'énergie potentielle du système est donnée par

$$\frac{1}{2} (V(r_{12}) + V(r_{34})) + \frac{1}{4} (V(r_{13}) + V(r_{14}) + V(r_{23}) + V(r_{24})). \quad (3.203)$$

Le facteur $1/2$ caractérise le couplage quark-quark tandis que le facteur $1/4$ caractérise le couplage quark-antiquark. En utilisant (3.45), nous avons pour un potentiel en loi de puissance (3.26), $V(r) = \lambda r^\nu$,

$$\begin{aligned} \langle 1 | V | 1 \rangle &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \langle 1 | 1 \rangle \left\{ \left(d_{12}^T (A^1)^{-1} d_{12} \right)^{\nu/2} + \left(d_{34}^T (A^1)^{-1} d_{34} \right)^{\nu/2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 \left(d_{ij}^T (A^1)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned} \langle 2 | V | 2 \rangle &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \langle 2 | 2 \rangle \left\{ \left(d_{12}^T (A^2)^{-1} d_{12} \right)^{\nu/2} + \left(d_{34}^T (A^2)^{-1} d_{34} \right)^{\nu/2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 \left(d_{ij}^T (A^2)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \right\} \\ &= x^{-\nu/2} x^{-9/2} \langle 1 | V | 1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.205)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | V | 2 \rangle &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \langle 1 | 2 \rangle \left\{ \left(d_{12}^T (A^3)^{-1} d_{12} \right)^{\nu/2} + \left(d_{34}^T (A^3)^{-1} d_{34} \right)^{\nu/2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 \left(d_{ij}^T (A^3)^{-1} d_{ij} \right)^{\nu/2} \right\} \\ &= 2^{(9+\nu)/2} (1+x)^{-(9+\nu)/2} \langle 1 | V | 1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Il nous reste à déterminer les matrices colonnes (3×1) d_{ij} . En combinant les relations (3.247), (3.185) et (3.186), on obtient

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{\rho}, \quad (3.207)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -\frac{1}{2}\vec{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.208)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_4 = -\frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.209)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \frac{1}{2}\vec{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.210)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_4 = \frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.211)$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_4 = -\vec{\lambda}, \quad (3.212)$$

ce qui nous permet, en comparant à,

$$\vec{r}_{ij} = d_{ij}^1 \vec{\rho} + d_{ij}^2 \vec{\lambda} + d_{ij}^3 \vec{\sigma},$$

de déduire les coefficients d_{ij}^k :

$$\begin{aligned}
d_{12}^1 &= -1, & d_{12}^2 &= 0, & d_{12}^3 &= 0, \\
d_{13}^1 &= -\frac{1}{2}, & d_{13}^2 &= \frac{1}{2}, & d_{13}^3 &= -1, \\
d_{14}^1 &= -\frac{1}{2}, & d_{14}^2 &= -\frac{1}{2}, & d_{14}^3 &= -1, \\
d_{23}^1 &= \frac{1}{2}, & d_{23}^2 &= \frac{1}{2}, & d_{23}^3 &= -1, \\
d_{24}^1 &= \frac{1}{2}, & d_{24}^2 &= -\frac{1}{2}, & d_{24}^3 &= -1, \\
d_{34}^1 &= 0, & d_{34}^2 &= -1, & d_{34}^3 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.213}$$

Dans le cas où V est le potentiel de Martin

$$V = \frac{1}{2}A \left(r_{12}^\beta + r_{34}^\beta \right) + \frac{1}{4}A \left(r_{13}^\beta + r_{14}^\beta + r_{23}^\beta + r_{24}^\beta \right) + 2B, \tag{3.214}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\langle 1 | V | 1 \rangle &= \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)^{\beta/2} \right) + \right. \\
&\quad \left. 2B \right) \langle 1 | 1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.215}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)^{\beta/2} \right) \times \right. \\
&\quad \left(1 + 2^{(\beta+11)/2} (1+x)^{-(\beta+9)/2} \mu + x^{-(\beta+9)/2} \mu^2 \right) + \\
&\quad \left. 2B \left(1 + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu + x^{-9/2} \mu^2 \right) \right) \langle 1 | 1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.216}$$

Finalement, l'énergie de l'état fondamental en fonction des paramètres a , b , c , μ et x

est donnée par

$$\begin{aligned}
E = & \frac{3}{4} \hbar^2 \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right) \frac{\left(1 + x^{-7/2} \mu^2 + 2^{13/2} x (1+x)^{-11/2} \mu \right)}{\left(1 + x^{-9/2} \mu^2 + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu \right)} + \\
& \frac{\left(1 + x^{-(9+\beta)/2} \mu^2 + 2^{(11+\beta)/2} (1+x)^{-(9+\beta)/2} \mu \right)}{\left(1 + x^{-9/2} \mu^2 + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu \right)} \times \\
& \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)^{\beta/2} \right) \right) + 2B.
\end{aligned} \tag{3.217}$$

Cas général Dans ce cas la fonction d'onde d'essai de l'état fondamental est une superposition linéaire de deux Gaussiennes corrélées sans aucune restriction sur les paramètres variationnels

$$\begin{aligned}
\Psi \left(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} \right) &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + c_1 \vec{\sigma}^2 \right\} \right) + \\
& \mu \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + c_2 \vec{\sigma}^2 \right\} \right) \\
&= \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle + \mu \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle
\end{aligned} \tag{3.218}$$

ou, de façon abstraite,

$$|\psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \tag{3.219}$$

avec

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + c_1 \vec{\sigma}^2 \right\} \right) \\
&= \exp \left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j \right),
\end{aligned} \tag{3.220}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + c_2 \vec{\sigma}^2 \right\} \right) \\
& \exp \left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j \right),
\end{aligned} \tag{3.221}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &:= \vec{\rho}, \\ \vec{x}_2 &:= \vec{\lambda}, \\ \vec{x}_3 &:= \vec{\sigma}\end{aligned}$$

et où A^1 et A^2 sont des matrices carrées (3×3) diagonales et réelles

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.222)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (3.223)$$

avec $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ tous positifs. Commençons par calculer le module au carré de la fonction d'essai puis passons au calcul des éléments de matrice des énergies cinétique et potentielle. Nous avons

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle 1 | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle, \quad (3.224)$$

avec

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2}, \quad (3.225)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_2} \right)^{3/2}, \quad (3.226)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = 2^{9/2} \left(\frac{\pi^2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \right)^{3/2}, \quad (3.227)$$

d'où

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2} + \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_2} \right)^{3/2} + 2^{11/2} \mu \left(\frac{\pi^2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \right)^{3/2}. \quad (3.228)$$

Eléments de matrice de l'énergie cinétique Nous avons

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} \right), \quad (3.229)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} \right), \quad (3.230)$$

$$\langle 1 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} \left(A^1 (A^3)^{-1} A^2 \right)_{kk} = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 2 \rangle \left(\frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{2b_1 b_2}{b_1 + b_2} + \frac{2c_1 c_2}{c_1 + c_2} \right). \quad (3.231)$$

En substituant à $\langle 1 | 1 \rangle$, $\langle 2 | 2 \rangle$ et $\langle 1 | 2 \rangle$ leurs expressions respectives, (3.225), (3.226) et (3.227), on aboutit à

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T | \Psi \rangle = & \frac{3}{4} \hbar^2 \left\{ \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2} \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} \right) + \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_3} \right)^{3/2} \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} \right) + \right. \\ & \left. 2^{11/2} \mu \left(\frac{\pi^2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)} \right)^{3/2} \left(\frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{2b_1 b_2}{b_1 + b_2} + \frac{2c_1 c_2}{c_1 + c_2} \right) \right\} \quad (3.232) \end{aligned}$$

Eléments de matrice de l'énergie potentielle Pour un potentiel du type $V(r) = Ar^\beta + B$, nous avons

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a_1} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_1} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{4}{c_1} \right)^{\beta/2} \right) + 2B \right\} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.233)$$

$$\langle 2 | V | 2 \rangle = \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a_2} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_2} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} + \frac{4}{c_2} \right)^{\beta/2} \right) + 2B \right\} \langle 2 | 2 \rangle, \quad (3.234)$$

$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left(\left(\frac{1}{a_3} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_3} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} + \frac{4}{c_3} \right)^{\beta/2} \right) + 2B \right\} \langle 1 | 2 \rangle, \quad (3.235)$$

avec

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2), \\ b_3 &= \frac{1}{2} (b_1 + b_2), \\ c_3 &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2). \end{aligned} \quad (3.236)$$

Sachant que,

$$\langle \Psi | V | \Psi \rangle = \langle 1 | V | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | V | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | V | 2 \rangle, \quad (3.237)$$

il s'ensuit que la valeur moyenne de l'Hamiltonien pour la fonction d'onde d'essai (3.218) s'exprime en fonction de $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ et μ comme

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{\left[\left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2} + \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_2} \right)^{3/2} + 2^{11/2} \mu \left(\frac{\pi^2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \right)^{3/2} \right]} \times \\ & \left[\frac{3}{4} \hbar^2 \left\{ \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2} \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} \right) + \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_2} \right)^{3/2} \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2^{11/2} \mu \left(\frac{\pi^2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \right)^{3/2} \left(\frac{2a_1 a_2}{a_1+a_2} + \frac{2b_1 b_2}{b_1+b_2} + \frac{2c_1 c_2}{c_1+c_2} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{\beta+3}{2} \right) \left\{ \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 c_1} \right)^{3/2} \left(\left(\frac{1}{a_1} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_1} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{4}{c_1} \right)^{\beta/2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu^2 \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 c_2} \right)^{3/2} \left(\left(\frac{1}{a_2} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_2} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} + \frac{4}{c_2} \right)^{\beta/2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2^{11/2} \mu \left(\frac{\pi^2}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)} \right)^{3/2} \left(\left(\frac{1}{a_3} \right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b_3} \right)^{\beta/2} + 2^{1-\beta} \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} + \frac{4}{c_3} \right)^{\beta/2} \right) \right\} \right] + \\ & 2B. \quad (3.238) \end{aligned}$$

Configuration $(q_1, q_1, \bar{q}_3, \bar{q}_4)$

Cas restreint On adopte pour fonction d'essai une superposition de deux gaussiennes :

$$\Psi \left(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + c \vec{\sigma}^2 + 2d \vec{\lambda} \vec{\sigma} \right\} \right) + \quad (3.239)$$

$$\mu \exp \left(-\frac{x}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + c \vec{\sigma}^2 + 2d \vec{\lambda} \vec{\sigma} \right\} \right), \quad (3.240)$$

ou

$$| \Psi \rangle = | 1 \rangle + \mu | 2 \rangle, \quad (3.241)$$

avec

$$\begin{aligned}\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + c \vec{\sigma}^2 + 2d \vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma} \right\} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j \right),\end{aligned}\quad (3.242)$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle &= \exp \left(-\frac{x}{2} \left\{ a \vec{\rho}^2 + b \vec{\lambda}^2 + c \vec{\sigma}^2 + 2d \vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma} \right\} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j \right),\end{aligned}\quad (3.243)$$

où

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &: = \vec{\rho}, \\ \vec{x}_2 &: = \vec{\lambda}, \\ \vec{x}_3 &: = \vec{\sigma}\end{aligned}\quad (3.244)$$

et où A^1 et A^2 sont des matrices carrées (3×3) réelles symétriques

$$A^1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & d & c \end{pmatrix}, \quad (3.245)$$

$$A^2 = x A^1. \quad (3.246)$$

tels que $a, b, c, bc - d^2$ et x soient tous positifs, ce qui garantit que A^1 et A^2 soient des matrices définies positives. L'absence de termes en $\vec{\rho} \cdot \vec{\lambda}$ et $\vec{\rho} \cdot \vec{\sigma}$ garantit que $|\Psi\rangle$ est symétrique dans l'échange $1 \leftrightarrow 2$.

Un choix approprié des coordonnées de Jacobi est le suivant :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (3.247)$$

$$\vec{\lambda} = \vec{r}_3 - \vec{r}_4, \quad (3.248)$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \frac{m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4}{m_3 + m_4}. \quad (3.249)$$

Les moments conjugués associés à $\vec{\rho}, \vec{\lambda}$ et $\vec{\sigma}$, notés respectivement $\vec{p}_\rho, \vec{p}_\lambda$ et \vec{p}_σ sont donnés par

$$\vec{p}_\rho = \frac{1}{2} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad (3.250)$$

$$\vec{p}_\lambda = \frac{m_4}{m_3 + m_4} \vec{p}_3 - \frac{m_3}{m_3 + m_4} \vec{p}_4, \quad (3.251)$$

$$\vec{p}_\sigma = \frac{m_3 + m_4}{2m_1 + m_3 + m_4} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - \frac{2m_1}{2m_1 + m_3 + m_4} (\vec{p}_3 + \vec{p}_4). \quad (3.252)$$

En adjoignant l'expression de l'impulsion totale

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \quad (3.253)$$

aux 3 relations précédentes, puis en inversant les quatre relations pour tirer les impulsions individuelles en termes des moments de Jacobi et de l'impulsion totale. En reportant ensuite dans l'expression de l'énergie cinétique, puis en retranchant l'énergie cinétique du centre de masse, on obtient, tout calcul fait, l'expression suivante pour l'énergie cinétique du mouvement relatif

$$T_R = \frac{\vec{p}_\rho^2}{2M_\rho} + \frac{\vec{p}_\lambda^2}{2M_\lambda} + \frac{\vec{p}_\sigma^2}{2M_\sigma}, \quad (3.254)$$

avec

$$M_\rho = \frac{m_1}{2}, \quad (3.255)$$

$$M_\lambda = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}, \quad (3.256)$$

$$M_\sigma = \frac{2m_1(m_3 + m_4)}{(2m_1 + m_3 + m_4)}. \quad (3.257)$$

Calculons $\langle \Psi | \Psi \rangle$. Nous avons

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \left(1 + x^{-9/2} \mu^2 + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu \right) \left(\frac{\pi^2}{abc - ad^2} \right)^{3/2}, \quad (3.258)$$

où on a tenu compte des relations

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{abc - ad^2} \right)^{3/2}, \quad (3.259)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{x^3 (abc - ad^2)} \right)^{3/2} = x^{-9/2} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.260)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{8\pi^2}{(1+x)^3 (abc - ad^2)} \right)^{3/2} = 2^{9/2} (1+x)^{-9/2} \langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.261)$$

où A^3 est la demi-somme des matrices A^1 et A^2 : $A^3 = (A^1 + A^2) / 2$

Eléments de matrice de l'énergie cinétique Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T_R | \Psi \rangle &= \langle 1 | T_R | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | T_R | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | T_R | 2 \rangle \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right) \left[1 + x^{-7/2} \mu^2 + 2^{13/2} x (1+x)^{-11/2} \mu \right], \end{aligned} \quad (3.262)$$

où on a tenu compte des relations, conséquence de (3.55),

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right), \quad (3.263)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 x^{-7/2} \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right), \quad (3.264)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} \left(A^1 (A^3)^{-1} A^2 \right)_{kk} \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle 2^{11/2} x (1+x)^{-11/2} \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.265)$$

Eléments de matrice de l'énergie potentielle Nous avons pour un potentiel du type $V = Ar^\beta + B$, comme conséquence de la relation (3.45),

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle [f(a, b, c, d) + 2B], \quad (3.266)$$

$$\langle 2 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle x^{-9/2} \left[x^{-\nu/2} f(a, b, c, d) + 2B \right], \quad (3.267)$$

$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle 2^{9/2} (1+x)^{-9/2} \left[2^{\nu/2} (1+x)^{-\nu/2} f(a, b, c, d) + 2B \right], \quad (3.268)$$

avec

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) := & \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta+3}{2}\right) \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^{\beta/2} + \left(\frac{ac}{abc-ad^2}\right)^{\beta/2} + 2^{-\beta} \times \right. \\ & \left. \left(\frac{(4ab+bc-d^2)m_3^2 + 2(bc-d^2+4a(b+d))m_3m_4 + (bc-d^2+4a(b+c+2d))m_4^2}{a(bc-d^2)(m_3+m_4)^2} \right)^{\beta/2} \right. \\ & \left. + 2^{-\beta} \left(\frac{4ab+bc-d^2}{a(bc-d^2)} + \frac{4m_3((c-2d)m_3-2dm_4)}{(m_3+m_4)^2(bc-d^2)} \right)^{\beta/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.269)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \langle 1 | 1 \rangle \left\{ f(a, b, c, d) \left(1 + 2^{(11+\nu)/2} (1+x)^{-(9+\nu)/2} \mu + x^{-(9+\nu)/2} \mu^2 \right) + \right. \\ & \left. 2 \left(1 + 2^{11/2} (1+x)^{-9/2} \mu + x^{-9/2} \mu^2 \right) B \right\}. \end{aligned} \quad (3.270)$$

Des relations (3.258), (3.262) et (3.270), on déduit l'expression de la valeur moyenne de l'Hamiltonien dans l'état $|\Psi\rangle$

$$E = \frac{3}{4}\hbar^2 \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} \right) \frac{\left[1 + x^{-7/2}\mu^2 + 2^{13/2}x(1+x)^{-11/2}\mu \right]}{\left[1 + 2^{11/2}(1+x)^{-9/2}\mu + x^{-9/2}\mu^2 \right]} + \frac{\left[1 + 2^{(11+\nu)/2}(1+x)^{-(9+\nu)/2}\mu + x^{-(9+\nu)/2}\mu^2 \right]}{\left[1 + 2^{11/2}(1+x)^{-9/2}\mu + x^{-9/2}\mu^2 \right]} f(a, b, c, d) + 2B. \quad (3.271)$$

Cas général Dans ce cas on prend comme fonction d'onde d'essai

$$\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{a_1\vec{\rho}^2 + b_1\vec{\lambda}^2 + c_1\vec{\sigma}^2 + 2d\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right\}\right) + \mu \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{a_2\vec{\rho}^2 + b_2\vec{\lambda}^2 + c_2\vec{\sigma}^2 + 2d_2\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right\}\right), \quad (3.272)$$

où, de manière abstraite,

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu|2\rangle, \quad (3.273)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 1 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{a_1\vec{\rho}^2 + b_1\vec{\lambda}^2 + c_1\vec{\sigma}^2 + 2d\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2}\vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.274)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma} | 2 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{a_2\vec{\rho}^2 + b_2\vec{\lambda}^2 + c_2\vec{\sigma}^2 + 2d_2\vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma}\right\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^3 -\frac{1}{2}\vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.275)$$

où \vec{x}_1 , \vec{x}_2 et \vec{x}_3 sont définis par (3.244) et où A^1 et A^2 sont des matrices carrées réelles symétriques 3×3

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & d_1 \\ 0 & d_1 & c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.276)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & d_2 \\ 0 & d_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (3.277)$$

avec $a_1, b_1, c_1, b_1c_1 - d_1^2, a_2, b_2, c_2, b_2c_2 - d_2^2$ tous positifs, ce qui garantit que A^1 et A^2 sont définies positives. Dans ce cas les paramètres variationnels sont complètement indépendants.

Commençons par calculer la norme au carré de $|\Psi\rangle, \langle\Psi|\Psi\rangle$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\Psi\rangle &= \langle 1|1\rangle + \mu^2 \langle 2|2\rangle + 2\mu \langle 1|2\rangle \\ &= \left(\frac{\pi^2}{a_1b_1c_1 - a_1d_1^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{\pi^2}{a_2b_2c_2 - a_2d_2^2}\right)^{3/2} \mu^2 + \\ &\quad 2^{11/2} \left(\frac{\pi^2}{(a_1 + a_2)(b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_2c_2 - d_1^2 - d_2^2 - 2d_1d_2)}\right)^{3/2} \mu, \end{aligned} \quad (3.278)$$

où on a tenu compte des relations

$$\langle 1|1\rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_1b_1c_1 - a_1d_1^2}\right)^{3/2}, \quad (3.279)$$

$$\langle 2|2\rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_2b_2c_2 - a_2d_2^2}\right)^{3/2}, \quad (3.280)$$

$$\langle 1|2\rangle = 2^{9/2} \left(\frac{\pi^2}{(a_1 + a_2)(-d_1^2 - d_2^2 + b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_2c_2 - 2d_1d_2)}\right)^{3/2} \quad (3.281)$$

Eléments de matrice de l'énergie cinétique Nous avons

$$\langle 1|T|1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \langle 1|1\rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma}\right), \quad (3.282)$$

$$\langle 2|T|2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \langle 2|2\rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma}\right), \quad (3.283)$$

$$\begin{aligned} \langle 1|T|2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2 \langle 1|2\rangle \times \left(\frac{2a_1a_2}{(a_1 + a_2)M_\rho} + \right. \\ &\quad \left. 2\frac{b_2d_1^2 + b_1d_2^2 - b_1b_2c_1 - b_1b_2c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2)M_\lambda} + \right. \\ &\quad \left. 2\frac{c_2d_1^2 + c_1d_2^2 - b_1c_1c_2 - b_2c_1c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2)M_\sigma}\right). \end{aligned} \quad (3.284)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T | \Psi \rangle = & \frac{3}{4} \hbar^2 \left\{ \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} \right) + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} \right) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle \times \right. \\ & \frac{2a_1a_2}{(a_1 + a_2) M_\rho} + 2 \frac{b_2d_1^2 + b_1d_2^2 - b_1b_2c_1 - b_1b_2c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2) M_\lambda} \\ & \left. 2 \frac{c_2d_1^2 + c_1d_2^2 - b_1c_1c_2 - b_2c_1c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2) M_\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (3.285)$$

Eléments de matrice de l'énergie potentielle Nous avons pour un potentiel du type $V(r) = \alpha r^\beta + B$

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle [f(a_1, b_1, c_1, d_1) + 2B], \quad (3.286)$$

$$\langle 2 | V | 2 \rangle = \langle 2 | 2 \rangle [f(a_2, b_2, c_2, d_2) + 2B], \quad (3.287)$$

$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 2 \rangle [f(a_3, b_3, c_3, d_3) + 2B]. \quad (3.288)$$

où la fonction $f(a, b, c, d)$ est définie par la relation (3.269) et avec

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2), \\ b_3 &= \frac{1}{2} (b_1 + b_2), \\ c_3 &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2), \\ d_3 &= \frac{1}{2} (d_1 + d_2). \end{aligned} \quad (3.289)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | V | \Psi \rangle = & \langle 1 | 1 \rangle f(a_1, b_1, c_1, d_1) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle f(a_3, b_3, c_3, d_3) + \\ & \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle f(a_2, b_2, c_2, d_2) + 2B (\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle). \end{aligned} \quad (3.290)$$

Finalement, on obtient l'expression de la valeur moyenne, notée E , de l'Hamiltonien pour la fonction d'onde d'essai Ψ , (3.272), en fonction des paramètres $\{a_i, b_i, c_i, d_i; i = 1, 2\}$

$$\begin{aligned} E = & 2B + \frac{\langle 1 | 1 \rangle f(a_1, b_1, c_1, d_1) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle f(a_3, b_3, c_3, d_3) + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle f(a_2, b_2, c_2, d_2)}{[\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle]} + \\ & \frac{\frac{3}{4} \hbar^2}{[\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle]} \left\{ \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} \right) + \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} \right) \mu^2 + \right. \\ & 2^{11/2} \mu \langle 1 | 2 \rangle \left(\frac{2a_1a_2}{(a_1 + a_2) M_\rho} + 2 \frac{b_2d_1^2 + b_1d_2^2 - b_1b_2c_1 - b_1b_2c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2) M_\lambda} + \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{c_2d_1^2 + c_1d_2^2 - b_1c_1c_2 - b_2c_1c_2}{(d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2) M_\sigma} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.291)$$

3.5 Energie de l'état fondamental d'un système pentaquark

3.5.1 Borne inférieure pour l'énergie d'un système pentaquark

Pour un système à 5 corps la décomposition du terme d'énergie cinétique correspondant à la borne inférieure optimisée est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m_4} + \frac{\vec{p}_5^2}{2m_5} &= (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5) \times \\
&(b_1 \vec{p}_1 + b_2 \vec{p}_2 + b_3 \vec{p}_3 + b_4 \vec{p}_4 + b_5 \vec{p}_5) + \\
a_{12} &\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + x_{12,3} \vec{p}_3 + x_{12,4} \vec{p}_4 + x_{12,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{13} &\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_3 + x_{13,2} \vec{p}_2 + x_{13,4} \vec{p}_4 + x_{13,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{14} &\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_4 + x_{14,2} \vec{p}_2 + x_{14,3} \vec{p}_3 + x_{14,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{15} &\left(\frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_5 + x_{15,2} \vec{p}_2 + x_{15,3} \vec{p}_3 + x_{15,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
a_{23} &\left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_3 + x_{23,1} \vec{p}_1 + x_{23,4} \vec{p}_4 + x_{23,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{24} &\left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_4 + x_{24,1} \vec{p}_1 + x_{24,3} \vec{p}_3 + x_{24,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{25} &\left(\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_5 + x_{25,1} \vec{p}_1 + x_{25,3} \vec{p}_3 + x_{25,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
a_{34} &\left(\frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_4 + x_{34,1} \vec{p}_1 + x_{34,2} \vec{p}_2 + x_{34,5} \vec{p}_5}{2} \right)^2 + \\
a_{35} &\left(\frac{\vec{p}_3 - \vec{p}_5 + x_{35,1} \vec{p}_1 + x_{35,2} \vec{p}_2 + x_{35,4} \vec{p}_4}{2} \right)^2 + \\
a_{45} &\left(\frac{\vec{p}_4 - \vec{p}_5 + x_{45,1} \vec{p}_1 + x_{45,2} \vec{p}_2 + x_{45,3} \vec{p}_3}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.292}$$

Nous allons nous limiter dans ce qui suit à la configuration $(m_1, m_1, m_3, m_3, m_5)$.

Configuration $(m_1, m_1, m_3, m_3, m_5)$ Les symétries du problème impliquent que

$$\begin{aligned}
a_{13} &= a_{14} = a_{23} = a_{24}, \quad a_{15} = a_{25}, \quad a_{35} = a_{45}, \\
b_1 &= b_2, \quad b_3 = b_4, \\
x_{12,3} &= x_{12,4} = x_{12,5} = 0, \quad x_{34,1} = x_{34,2} = x_{34,5} = 0, \\
x_{14,3} &= x_{13,4} = x_{23,4} = x_{24,3} =: x_1, \\
x_{15,3} &= x_{15,4} = x_{25,3} = x_{25,4} =: x_2, \\
x_{23,1} &= x_{24,1} = x_{14,2} = x_{13,2} =: x_3, \\
x_{24,5} &= x_{14,5} = x_{13,5} = x_{23,5} =: x_4, \\
x_{35,1} &= x_{35,2} = x_{45,1} = x_{45,2} =: x_5, \\
x_{15,2} &= x_{25,1} = x_6; \quad x_{35,4} = x_{45,3} =: x_7.
\end{aligned} \tag{3.293}$$

Donc nous avons 5 a_{ij} indépendants et 7 paramètres $x_{ij,k}$ indépendants. En identifiant les deux membres de (3.292), on obtient, en tenant compte des relations impliquées par les symétries du problème (3.293), et après élimination des b un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues a_{12} , a_{13} , a_{15} , a_{34} et a_{35} avec 7 paramètres x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 et x_7 .

$$\tilde{D} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{15} \\ a_{34} \\ a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \\ \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_5} \\ \frac{1}{m_3} \\ \frac{1}{2m_3} + \frac{1}{2m_5} \end{pmatrix}, \tag{3.294}$$

avec

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 4 & 4(x_3 - 1)^2 & 2(x_6 - 1)^2 & 0 & 0 \\ 1 & (x_3 - x_1 + 2)^2 + (x_1 + 1)^2 + (x_3 - 1)^2 & (x_2 - x_6)^2 + (x_2 - 1)^2 & 1 & (x_5 - x_7)^2 + (x_5 - 1)^2 \\ 1 & 2(x_3 - x_4)^2 + 2(x_4 - 1)^2 & x_6^2 + 2x_6 + 5 & 0 & 2(x_5 + 1)^2 \\ 0 & 4(x_1 + 1)^2 & 0 & 4 & 2(x_7 - 1)^2 \\ 0 & 2(x_1 - x_4)^2 + 2(x_4 + 1)^2 & 2(x_2 + 1)^2 & 1 & x_7^2 + 2x_7 + 5 \end{pmatrix}. \tag{3.295}$$

A partir de l'expression de la matrice \tilde{D} , on peut construire la matrice M par la procédure suivante : On dérive l'unique colonne de \tilde{D} dépendant d'un paramètre x par rapport à ce dernier, et on répète la procédure pour chacun des paramètres x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 et x_7 . On obtient de cette manière une matrice rectangulaire dont le nombre de lignes est égal au nombre de a_{ij} indépendants et dont le nombre de de colonnes est égal au nombre de paramètres x . On obtient donc une matrice rectangulaire 5×7 :

$$M = 2 \begin{pmatrix} 4(x_3 - 1) & 0 & 0 & 2(x_6 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 2x_3 - x_1 + 1 & 2x_1 - x_3 - 1 & 0 & (x_6 - x_2) & 2x_2 - x_6 - 1 & 2x_5 - x_7 - 1 & (x_7 - x_5) \\ 2(x_3 - x_4) & 0 & 4x_4 - 2x_3 - 2 & (x_6 + 1) & 0 & 2(x_5 + 1) & 0 \\ 0 & 4x_1 + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_7 - 1) \\ 0 & 2(x_1 - x_4) & 4x_4 - 2x_1 + 2 & 0 & 2(x_2 + 1) & 0 & x_7 + 1 \end{pmatrix}. \tag{3.296}$$

En imposant à M d'être de rang 4 au plus, on obtient 3 contraintes, à savoir

$$x_2 = \frac{1}{x_3 - 1} (x_3 - x_4 - x_6 + x_4 x_6), \quad (3.297)$$

$$x_5 = \frac{x_3 - x_6}{x_3 - x_4 + x_4 x_6 - 1}, \quad (3.298)$$

$$x_7 = \frac{-x_4 + x_3 + x_1 - x_6 + x_4 x_6 - x_1 x_6}{x_3 - x_4 + x_4 x_6 - 1}. \quad (3.299)$$

3.5.2 Borne supérieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système pentaquark

Prenons toujours comme fonction d'onde d'essai une superposition de deux gaussiennes, avec toutefois, dans une première étape, des paramètres liés

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta}) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2 + d\vec{\sigma}^2 + 2e\vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta}\}\right) + \\ &\mu \exp\left(-\frac{x}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2 + d\vec{\sigma}^2 + 2e\vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta}\}\right) \end{aligned} \quad (3.300)$$

ou

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \quad (3.301)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta} | 1 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2 + d\vec{\sigma}^2 + 2e\vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta}\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^4 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.302)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta} | 2 \rangle &= \exp\left(-\frac{x}{2}\{a\vec{\rho}^2 + b\vec{\lambda}^2 + c\vec{\sigma}^2 + d\vec{\sigma}^2 + 2e\vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta}\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^4 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.303)$$

où

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &:= \vec{\rho}, \\ \vec{x}_2 &:= \vec{\lambda}, \\ \vec{x}_3 &:= \vec{\sigma}, \\ \vec{x}_4 &:= \vec{\zeta}, \end{aligned} \quad (3.304)$$

et où A^1 et A^2 sont des matrices réelles symétriques (4×4)

$$A^1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & e & d \end{pmatrix}, \quad (3.305)$$

$$A^2 = xA^1, \quad (3.306)$$

avec $a, b, c, d, cd - e^2$ et x tous positifs, ce qui garantit que les matrices A^1 et A^2 sont définies positives. Commençons par calculer la norme au carré de l'état $|\Psi\rangle$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \langle 1 | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle \\ &= \left(1 + x^{-6}\mu^2 + 2^7(1+x)^{-6}\mu\right) \left(\frac{\pi^2}{ab(cd-e^2)}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.307)$$

où on a tenu compte des relations suivantes :

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{ab(cd-e^2)}\right)^{3/2}, \quad (3.308)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{x^4ab(cd-e^2)}\right)^{3/2} = x^{-6}\langle 1 | 1 \rangle, \quad (3.309)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{16\pi^2}{ab(x+1)^4(cd-e^2)}\right)^{3/2} = 2^6(1+x)^{-6}\langle 1 | 1 \rangle. \quad (3.310)$$

Eléments de matrice de l'énergie cinétique Un choix de coordonnées de Jacobi approprié aux symétries du problème est le suivant :

$$\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (3.311)$$

$$\vec{\lambda} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3, \quad (3.312)$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4) - \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad (3.313)$$

$$\vec{\zeta} = \vec{r}_5 - \frac{m_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + m_3(\vec{r}_3 + \vec{r}_4)}{2(m_1 + m_3)}. \quad (3.314)$$

Les moments conjugués associés aux coordonnées de Jacobi $\vec{\rho}$, $\vec{\lambda}$, $\vec{\sigma}$ et $\vec{\zeta}$, notés respectivement \vec{P}_ρ , \vec{P}_λ , \vec{P}_σ et \vec{P}_ζ , sont donnés par

$$\vec{P}_\rho = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{2}, \quad (3.315)$$

$$\vec{P}_\lambda = \frac{\vec{p}_4 - \vec{p}_3}{2}, \quad (3.316)$$

$$\vec{P}_\sigma = \frac{m_1}{m_1 + m_3} (\vec{p}_3 + \vec{p}_4) - \frac{m_3}{m_1 + m_3} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad (3.317)$$

$$\vec{P}_\zeta = \frac{2m_1 + 2m_3}{2m_1 + 2m_3 + m_5} \vec{p}_5 - \frac{m_5}{2m_1 + 2m_3 + m_5} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \quad (3.318)$$

et l'impulsion totale \vec{P} est donnée par

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5 \quad (3.319)$$

En inversant les relations (3.315), (3.316), (3.317), (3.318) et (3.319) pour obtenir les impulsions individuelles en termes des impulsions de Jacobi et de l'impulsion totale, en reportant ensuite dans l'expression de l'énergie cinétique, puis en retranchant l'énergie cinétique du centre de masse, on obtient l'expression de l'énergie cinétique du mouvement relatif T_R . Tout calcul fait, on obtient

$$T_R = \frac{\vec{P}_\rho^2}{2M_\rho} + \frac{\vec{P}_\lambda^2}{2M_\lambda} + \frac{\vec{P}_\sigma^2}{2M_\sigma} + \frac{\vec{P}_\zeta^2}{2M_\zeta}, \quad (3.320)$$

avec

$$M_\rho = \frac{m_1}{2}, \quad (3.321)$$

$$M_\lambda = \frac{m_3}{2}, \quad (3.322)$$

$$M_\sigma = \frac{2m_1m_3}{m_1 + m_3}, \quad (3.323)$$

$$M_\zeta = 2 \frac{m_5(m_1 + m_3)}{m_5 + 2(m_1 + m_3)}. \quad (3.324)$$

Nous avons, en utilisant la relation (3.55) ainsi que les relations de définition de $|1\rangle$ et de $|2\rangle$, (3.302) et (3.303),

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} + \frac{d}{M_\zeta} \right), \quad (3.325)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 x^{-5} \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} + \frac{d}{M_\zeta} \right), \quad (3.326)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle &= \frac{3}{2} \langle 1 | 2 \rangle \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2M_k} (A_1 A_3^{-1} A_2)_{kk} \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 2^7 (1+x)^{-7} x \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} + \frac{d}{M_\zeta} \right). \end{aligned} \quad (3.327)$$

Il s'ensuit que

$$\langle \Psi | T_R | \Psi \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} + \frac{d}{M_\zeta} \right) \left[1 + x^{-5} \mu^2 + 2^8 x (1+x)^{-7} \mu \right]. \quad (3.328)$$

Eléments de matrice d'énergie potentielle Le terme d'énergie potentielle pour ce système est donnée par

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (V(r_{12}) + V(r_{34})) + \frac{1}{8} (V(r_{13}) + V(r_{14}) + V(r_{23}) + V(r_{24})) + \\ &\quad \frac{1}{4} (V(r_{15}) + V(r_{25}) + V(r_{35}) + V(r_{45})). \end{aligned} \quad (3.329)$$

Le système d'équations formé par (3.311), (3.312), (3.313), (3.314) et par la relation donnant la coordonnée du centre de masse \vec{R}

$$\vec{R} = \frac{m_1 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + m_3 (\vec{r}_3 + \vec{r}_4) + m_5 \vec{r}_5}{2m_1 + 2m_3 + m_5}, \quad (3.330)$$

peut être inversé pour obtenir les coordonnées individuelles \vec{r}_i puis les coordonnées rela-

tives \vec{r}_{ij} ,

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{\rho}, \quad (3.331)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -\frac{1}{2}\vec{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.332)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_4 = -\frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.333)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_5 = -\frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{m_3}{m_3 + m_1}\vec{\sigma} - \vec{\zeta}, \quad (3.334)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_3 = \frac{1}{2}\vec{\rho} + \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.335)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_4 = \frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{1}{2}\vec{\lambda} - \vec{\sigma}, \quad (3.336)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_5 = \frac{1}{2}\vec{\rho} - \frac{m_3}{m_3 + m_1}\vec{\sigma} - \vec{\zeta}, \quad (3.337)$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_4 = -\vec{\lambda}, \quad (3.338)$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_5 = -\frac{1}{2}\vec{\lambda} + \frac{m_1}{m_3 + m_1}\vec{\sigma} - \vec{\zeta}, \quad (3.339)$$

$$\vec{r}_4 - \vec{r}_5 = \frac{1}{2}\vec{\lambda} + \frac{m_1}{m_3 + m_1}\vec{\sigma} - \vec{\zeta}, \quad (3.340)$$

qui, elles, sont indépendantes de la coordonnée du centre de masse \vec{R} . En identifiant de nouveau avec la relation

$$\vec{r}_{ij} = d_{ij}^1 \vec{\rho} + d_{ij}^2 \vec{\lambda} + d_{ij}^3 \vec{\sigma} + d_{ij}^4 \vec{\zeta}, \quad (3.341)$$

on aboutit aux expressions des d_{ij}^k , $i < j = 1, \dots, 5$, $k = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned}
d_{12}^1 &= -1, \quad d_{12}^2 = 0, \quad d_{12}^3 = 0, \quad d_{12}^4 = 0, \\
d_{13}^1 &= -\frac{1}{2}, \quad d_{13}^2 = \frac{1}{2}, \quad d_{13}^3 = -1, \quad d_{13}^4 = 0, \\
d_{14}^1 &= -\frac{1}{2}, \quad d_{14}^2 = -\frac{1}{2}, \quad d_{14}^3 = -1, \quad d_{14}^4 = 0, \\
d_{15}^1 &= -\frac{1}{2}, \quad d_{15}^2 = 0, \quad d_{15}^3 = -\frac{m_3}{m_3 + m_1}, \quad d_{15}^4 = -1, \\
d_{23}^1 &= \frac{1}{2}, \quad d_{23}^2 = \frac{1}{2}, \quad d_{23}^3 = -1, \quad d_{23}^4 = 0, \\
d_{24}^1 &= \frac{1}{2}, \quad d_{24}^2 = -\frac{1}{2}, \quad d_{24}^3 = -1, \quad d_{24}^4 = 0, \\
d_{25}^1 &= \frac{1}{2}, \quad d_{25}^2 = 0, \quad d_{25}^3 = -\frac{m_3}{m_3 + m_1}, \quad d_{25}^4 = -1, \\
d_{34}^1 &= 0, \quad d_{34}^2 = -1, \quad d_{34}^3 = 0, \quad d_{34}^4 = 0, \\
d_{35}^1 &= 0, \quad d_{35}^2 = -\frac{1}{2}, \quad d_{35}^3 = \frac{m_1}{m_3 + m_1}, \quad d_{35}^4 = -1, \\
d_{45}^1 &= 0, \quad d_{45}^2 = \frac{1}{2}, \quad d_{45}^3 = \frac{m_1}{m_3 + m_1}, \quad d_{45}^4 = -1.
\end{aligned} \tag{3.342}$$

Pour un potentiel du type $V(r) = Ar^\beta + B$, on obtient, en utilisant la relation (3.45), les expressions suivantes pour les éléments de matrice de V

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle \left[g(a, b, c, d, e) + \frac{5}{2}B \right], \tag{3.343}$$

$$\langle 2 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle x^{-6} \left[x^{-\nu/2} g(a, b, c, d, e) + \frac{5}{2}B \right], \tag{3.344}$$

$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle 2^6 (1+x)^{-6} \left[2^{\nu/2} (1+x)^{-\nu/2} g(a, b, c, d, e) + \frac{5}{2}B \right], \tag{3.345}$$

avec

$$\begin{aligned}
g(a, b, c, d, e) &:= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta+3}{2}\right) \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^{\beta/2} + \left(\frac{1}{b}\right)^{\beta/2} + 2^{-\beta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4d}{cd-e^2}\right)^{\beta/2} + \right. \\
&2^{-\beta} \left(\frac{(4ac + cd - e^2) m_1^2 + 2(cd + 4a(c-e) - e^2) m_1 m_3 + (cd + 4a(c+d-2e) - e^2) m_3^2}{a(cd-e^2)(m_1+m_3)^2} \right)^{\beta/2} \\
&\left. + 2^{-\beta} \left(\frac{4bc + cd - e^2}{b(cd-e^2)} + \frac{4m_1((d+2e)m_1 - 2em_3)}{(m_1+m_3)^2(cd-e^2)} \right)^{\beta/2} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.346}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \langle 1 | 1 \rangle \left\{ g(a, b, c, d, e) \left(1 + 2^{(14+\nu)/2} (1+x)^{-(12+\nu)/2} \mu + x^{-(12+\nu)/2} \mu^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + 2^7 (1+x)^{-6} \mu + x^{-6} \mu^2 \right) \frac{5}{2} B \right\}. \end{aligned} \quad (3.347)$$

La valeur moyenne de l'Hamiltonien dans l'état $|\Psi\rangle$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{4} \hbar^2 \left(\frac{a}{M_\rho} + \frac{b}{M_\lambda} + \frac{c}{M_\sigma} + \frac{d}{M_\zeta} \right) \frac{\left[1 + x^{-5} \mu^2 + 2^8 x (1+x)^{-7} \mu \right]}{\left[1 + 2^7 (1+x)^{-6} \mu + x^{-6} \mu^2 \right]} + \\ &\quad \frac{\left[1 + 2^{(14+\nu)/2} (1+x)^{-(12+\nu)/2} \mu + x^{-(12+\nu)/2} \mu^2 \right]}{\left[1 + 2^7 (1+x)^{-6} \mu + x^{-6} \mu^2 \right]} g(a, b, c, d, e) + \frac{5}{2} B. \end{aligned} \quad (3.348)$$

Cas général Dans ce cas la fonction d'onde d'essai est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta}) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + c_1 \vec{\sigma}^2 + d_1 \vec{\zeta}^2 + 2e_1 \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}\right) + \\ &\quad \mu \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + c_2 \vec{\sigma}^2 + d_2 \vec{\zeta}^2 + 2e_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}\right) \end{aligned} \quad (3.349)$$

ou, en notation abstraite,

$$|\Psi\rangle = |1\rangle + \mu |2\rangle, \quad (3.350)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta} | 1 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a_1 \vec{\rho}^2 + b_1 \vec{\lambda}^2 + c_1 \vec{\sigma}^2 + d_1 \vec{\zeta}^2 + 2e_1 \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i,j=1}^4 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^1 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.351)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{\sigma}, \vec{\zeta} | 2 \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ a_2 \vec{\rho}^2 + b_2 \vec{\lambda}^2 + c_2 \vec{\sigma}^2 + d_2 \vec{\zeta}^2 + 2e_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{i,j=1}^4 -\frac{1}{2} \vec{x}_i A_{ij}^2 \vec{x}_j\right), \end{aligned} \quad (3.352)$$

où $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ et \vec{x}_4 sont définies par (3.304) et où A^1 et A^2 sont des matrices réelles symétriques (4×4)

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (3.353)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad (3.354)$$

tel que $a_1, b_1, c_1, d_1, c_1d_1 - e_1^2, a_2, b_2, c_2, d_2, c_2d_2 - e_2^2$ soient tous positifs pour garantir que les matrices A^1 et A^2 soient définies positives. La norme au carré de $|\Psi\rangle$ est donnée par

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle 1 | 1 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle, \quad (3.355)$$

avec

$$\langle 1 | 1 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_1 b_1 (c_1 d_1 - e_1^2)} \right)^{3/2}, \quad (3.356)$$

$$\langle 2 | 2 \rangle = \left(\frac{\pi^2}{a_2 b_2 (c_2 d_2 - e_2^2)} \right)^{3/2}, \quad (3.357)$$

$$\langle 1 | 2 \rangle = \left(\frac{16\pi^2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)((c_1 + c_2)(d_1 + d_2) - (e_1 + e_2)^2)} \right)^{3/2}. \quad (3.358)$$

Eléments de matrice d'énergie cinétique Nous avons

$$\langle 1 | T_R | 1 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} + \frac{d_1}{M_\zeta} \right), \quad (3.359)$$

$$\langle 2 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} + \frac{d_2}{M_\zeta} \right), \quad (3.360)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 | T_R | 2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \langle 1 | 2 \rangle & \left(\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)M_\rho} + \frac{2b_1b_2}{(b_1+b_2)M_\lambda} + \right. \\ & \frac{2(c_2e_1^2 + c_1e_2^2 - c_1c_2d_1 - c_1c_2d_2)}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 - c_1d_1 - c_1d_2 - c_2d_1 - c_2d_2)M_\sigma} + \\ & \left. \frac{2(d_2e_1^2 + d_1e_2^2 - c_1d_1d_2 - c_2d_1d_2)}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 - c_1d_1 - c_1d_2 - c_2d_1 - c_2d_2)M_\zeta} \right). \end{aligned} \quad (3.361)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | T_R | \Psi \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 & \left\{ \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} + \frac{d_1}{M_\zeta} \right) + \right. \\ & \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} + \frac{d_2}{M_\zeta} \right) + \\ & 2\mu \langle 1 | 2 \rangle \left(\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)M_\rho} + \frac{2b_1b_2}{(b_1+b_2)M_\lambda} + \right. \\ & \frac{2(c_2e_1^2 + c_1e_2^2 - c_1c_2d_1 - c_1c_2d_2)}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 - c_1d_1 - c_1d_2 - c_2d_1 - c_2d_2)M_\sigma} + \\ & \left. \left. \frac{2(d_2e_1^2 + d_1e_2^2 - c_1d_1d_2 - c_2d_1d_2)}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 - c_1d_1 - c_1d_2 - c_2d_1 - c_2d_2)M_\zeta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.362)$$

Eléments de matrice d'énergie potentielle Nous avons pour un potentiel $V(r) = Ar^\beta + B$

$$\langle 1 | V | 1 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle \left[g(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) + \frac{5}{2}B \right], \quad (3.363)$$

$$\langle 2 | V | 2 \rangle = \langle 2 | 2 \rangle \left[g(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) + \frac{5}{2}B \right], \quad (3.364)$$

$$\langle 1 | V | 2 \rangle = \langle 1 | 2 \rangle \left[g(a_3, b_3, c_3, d_3, e_3) + \frac{5}{2}B \right], \quad (3.365)$$

avec la fonction $g(a, b, c, d, e)$ définie par (3.346). et avec

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \\
b_3 &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2), \\
c_3 &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \\
d_3 &= \frac{1}{2}(d_1 + d_2), \\
e_3 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2),
\end{aligned} \tag{3.366}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | V | \Psi \rangle &= \langle 1 | 1 \rangle g(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle g(a_3, b_3, c_3, d_3, e_3) + \\
&\quad \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle g(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2) + \frac{5}{2} B (\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle).
\end{aligned} \tag{3.367}$$

Finalement, on obtient l'expression de l'énergie de l'état fondamental en fonction des paramètres $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\langle 1 | 1 \rangle g(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle g(a_3, b_3, c_3, d_3, e_3) + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle g(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2)}{[\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle]} + \\
&\quad \frac{3\hbar^2}{4[\langle 1 | 1 \rangle + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle + \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle]} \left\{ \langle 1 | 1 \rangle \left(\frac{a_1}{M_\rho} + \frac{b_1}{M_\lambda} + \frac{c_1}{M_\sigma} + \frac{d_1}{M_\zeta} \right) + \right. \\
&\quad \mu^2 \langle 2 | 2 \rangle \left(\frac{a_2}{M_\rho} + \frac{b_2}{M_\lambda} + \frac{c_2}{M_\sigma} + \frac{d_2}{M_\zeta} \right) + 2\mu \langle 1 | 2 \rangle \left(\frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2) M_\rho} + \frac{2b_1 b_2}{(b_1 + b_2) M_\lambda} + \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{c_2 e_1^2 + c_1 e_2^2 - c_1 c_2 d_1 - c_1 c_2 d_2}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 e_2 - c_1 d_1 - c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_2 d_2) M_\sigma} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{d_2 e_1^2 + d_1 e_2^2 - c_1 d_1 d_2 - c_2 d_1 d_2}{(e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 e_2 - c_1 d_1 - c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_2 d_2) M_\zeta} \right) \right\} + \frac{5}{2} B.
\end{aligned} \tag{3.368}$$

Chapitre 4

Application à la spectroscopie hadronique

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les résultats exposés au chapitre 3 (chapitre précédent) à la spectroscopie hadronique. Rappelons que les hadrons sont des particules qui en plus des interactions faibles et électromagnétiques ont également des interactions fortes. Les hadrons sont des particules composites formés de quarks. Autrement dit, les hadrons sont des états liés de quarks. L'interaction responsable de la liaison est décrite par la chromodynamique quantique, théorie de jauge de type Yang-Mills, basée sur le groupe $SU(3)$ de couleur, noté $SU_c(3)$, à distinguer du groupe $SU(3)$ de saveur, noté $SU_f(3)$, à la base de classification des particules élémentaires. La chromodynamique quantique possède deux propriétés : la liberté asymptotique aux grandes énergies, ou aux petites distances et le confinement aux basses énergies, ou aux grandes distances. Ceci signifie que plus vous rapprochez deux quarks l'un de l'autre, plus leur interaction diminue et plus vous les éloignez l'un de l'autre, plus leur interaction augmente. Ces propriétés de liberté asymptotique et de confinement font que la théorie des perturbations n'est applicable qu'aux grands moments de transfert. En particulier, le régime des basses énergies ne peut être analysé par la chromodynamique quantique perturbative. Il se trouve précisément que la spectroscopie hadronique est justement située dans le régime des basses énergies. Seules les combinaisons non colorées de quarks, on dit singlets de couleur, peuvent être observées. Ceci explique la non observation de systèmes à deux quarks si on a à l'esprit que les quarks occupent une représentation triplet de couleur car la combinaison de deux triplets de couleur $3 \otimes 3$ ne peut donner un singlet de couleur

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$$

Par contre, les systèmes quark-antiquark, appelés mésons, sont observables, car comme un antiquark occupe la représentation conjuguée de $3, \bar{3}$

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

et par conséquent les mésons peuvent occuper une représentation singlet de couleur. Trois quarks peuvent également se mettre ensemble pour former un singlet de couleur :

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (\bar{3} \oplus 6) \otimes 3 = (\bar{3} \otimes 3) \oplus (6 \otimes 3) \\ &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10, \end{aligned}$$

et sont par conséquent observables. Les particules ainsi constituées sont désignées sous le nom de baryons. D'autres combinaisons de plus de 3 quarks et/ou antiquarks peuvent également donner des singlets de couleur. Les exemples les plus simples sont les systèmes composés de 2 quarks et 2 antiquarks, appelés pour cette raison systèmes tétraquarks et les systèmes composés de 4 quarks et d'un antiquark (ou de 4 antiquarks et d'un quark) appelés pentaquarks. Par rapport aux mésons et aux baryons, les tétraquarks peuvent se trouver dans deux états singlets de couleur différents : l'état "True" $|T\rangle$ où les deux quarks se trouvent dans un état antitriplet de couleur $\bar{3}$ et où les deux antiquarks se trouvent dans un état triplet de couleur 3

$$|T\rangle = |\bar{3}, 3\rangle,$$

avec $\bar{3}$ et 3 se combinant pour donner un singlet de couleur, l'état "Mock" $|M\rangle$ où les deux quarks se trouvent dans un état sextet de couleur 6 et les deux antiquarks se trouvent dans un état antisextet de couleur $\bar{6}$

$$|M\rangle = |6, \bar{6}\rangle,$$

avec 6 et $\bar{6}$ se combinant en un singlet de couleur. La situation pour les pentaquarks est similaire à celle des tétraquarks. Les quatre quarks et le seul antiquark (ou les quatre antiquarks et le seul quark) du pentaquark peuvent se combiner en un singlet de couleur de trois manières différentes. Autrement dit, il y'a trois états singlets de couleur indépendants (différents) pour le pentaquark : l'état $|\bar{3}, \bar{3}\rangle$, où les deux premiers quarks occupent un état antitriplet de couleur $\bar{3}$ et les deux derniers quarks occupent également un état antitriplet de couleur, l'état $|\bar{3}, 6\rangle$, où les deux premiers quarks occupent un état antitriplet de couleur $\bar{3}$ et les deux derniers quarks un état sextet de couleur, l'état $|6, \bar{3}\rangle$ où les rôles de deux premiers quarks et deux derniers quarks sont intervertis. Dans chaque cas, l'état singlet de couleur est formé en combinant le $\bar{3}$ de l'antiquark avec le 3 résultant de la combinaison des couleurs des 4 quarks. Le problème avec de tels systèmes multiquarks (tétraquarks, pentaquarks,...) est qu'il y'a très peu d'évidences expérimentales de leur existence. En vérité, la possibilité pour un système multiquark de former un singlet de couleur ne suffit pas pour garantir son existence. Il faut pour trancher la question considérer le

côté dynamique du problème. Plus explicitement, il faudrait calculer les masses de tels systèmes multiquarks et les comparer à leurs seuils de désintégration superpermis (par simple réarrangement des quarks). On conclura à l'existence ou à la non existence de tel ou tel système multiquark selon que sa masse est inférieure ou supérieure à son seuil de désintégration superpermise.

Comme la chromodynamique quantique perturbative est inapplicable aux échelles de distances caractéristiques de la spectroscopie hadronique, on recourt à des modèles, dont les plus populaires sont, par degré de proximité avec la chromodynamique,

- Les modèles sur réseau
- Les modèles du sac
- Les modèles de potentiels

Notre travail s'inscrira ici dans le cadre des modèles de potentiel.

4.2 Le modèle

On considérera une cinématique non relativiste avec des forces centrales à deux corps résultant de l'échange d'un octet de couleur. En d'autres termes, on prendra comme Hamiltonien H

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \frac{3}{16} \sum_{i<j=1}^N \tilde{\lambda}_i \cdot \tilde{\lambda}_j V(\vec{r}_{ij}), \quad (4.1)$$

et on conjecturera un potentiel indépendant de saveur $V(\vec{r}_{ij})$. Les $\tilde{\lambda}_i$ sont les matrices de Gell-Mann. Dans le cas d'un méson $q\bar{q}$, $N = 2$, le quark occupe un triplet de couleur et l'antiquark un antitriplet de couleur. Par conséquent :

$$\tilde{\lambda}_1^2 = \tilde{\lambda}_2^2 = \frac{16}{3}.$$

Comme le méson est un singlet de couleur :

$$\left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right)^2 = 0.$$

En utilisant l'identité

$$\tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right)^2 - \tilde{\lambda}_1^2 - \tilde{\lambda}_2^2 \right],$$

on obtient

$$\tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{\lambda}_2 = -\frac{16}{3},$$

ce qui donne pour l'Hamiltonien H , (4.1), dans le cas d'un méson

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_{12}) \quad (4.2)$$

Dans le cas d'un baryon qqq , $N = 3$, chacun des 3 quarks occupe un triplet de couleur. Ceci d'une part. D'autre part, pour former un singlet de couleur, chaque paire de quarks doit se trouver dans un état antitriplet de couleur $\bar{3}$, pour que combiné à la représentation triplet du troisième quark, on puisse obtenir un singlet de couleur. En utilisant l'identité

$$\tilde{\lambda}_i \cdot \tilde{\lambda}_j = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_j \right)^2 - \tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2 \right],$$

et sachant que

$$\tilde{\lambda}_i^2 = \tilde{\lambda}_j^2 = \frac{16}{3}, \quad \left(\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_j \right)^2 = \frac{16}{3},$$

on obtient

$$\tilde{\lambda}_i \cdot \tilde{\lambda}_j = -\frac{8}{3}$$

pour chaque paire $\{i, j\} = \{1, 2\} = \{1, 3\} = \{2, 3\}$. L'Hamiltonien, (4.1), prend alors la forme pour $N = 3$

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{1}{2} (V(\vec{r}_{12}) + V(\vec{r}_{13}) + V(\vec{r}_{23})). \quad (4.3)$$

En comparant au cas des mésons, on remarque que l'interaction quark-quark dans un baryon est la moitié de l'interaction quark-antiquark dans un méson. C'est la fameuse règle " $\frac{1}{2}$ " couramment utilisée pour passer des mésons aux baryons et qui a remporté un succès phénoménologique certain.

Pour des systèmes multiquarks (tétraquarks, pentaquarks,...), la situation est plus compliquée. D'une part, le calcul des $\lambda_i \cdot \lambda_j$ est moins simple. D'autre part, plusieurs états de couleur linéairement indépendants correspondent à un singlet de couleur. Ceci signifie que l'Hamiltonien doit en toute rigueur s'écrire sous la forme d'une matrice carrée dont la dimension est égale au nombre d'états singlets de couleur linéairement indépendants. Donc H sera une matrice (2×2) dans le cas des tétraquarks, et une matrice (3×3) dans le cas des pentaquarks. En vérité, on se restreindra aussi bien pour les tétraquarks que pour les pentaquarks à l'état de couleur où toutes les interactions conspirent en faveur de la liaison parceque c'est pour ces états qu'on aura le plus de chance d'obtenir des états liés. Autrement dit, on considérera dans chaque cas l'état singlet de couleur où toutes les paires de particules ont des interactions attractives. Il se trouve qu'il y a un seul état tétraquark singlet de couleur où toutes les interactions entre quark-quark, quark-antiquark et antiquark-antiquark sont attractives. C'est l'état "True" $|\bar{3}-3\rangle$. C'est la même situation pour les pentaquarks : un seul état singlet de couleur correspond à des interactions entre paires toutes attractives. C'est l'état $|\bar{3}-\bar{3}\rangle$. Donnons maintenant les facteurs de couleur $\lambda_i \cdot \lambda_j$ pour chacun des deux états $|\bar{3}-3\rangle$ et $|\bar{3}-\bar{3}\rangle$ en utilisant les résultats consignés dans [52, 53].

4.2.1 Facteurs de couleur

Tétraquarks Dans l'état $|\bar{3} - 3\rangle$, les facteurs de couleur valent :

$$\widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_2 = -\frac{8}{3}, \quad \widetilde{\lambda}_3 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = -\frac{8}{3}, \quad \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda}_2 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = \widetilde{\lambda}_2 \cdot \widetilde{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = -\frac{4}{3}. \quad (4.4)$$

L'Hamiltonien H , (4.1), se réduit alors à

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m_4} + \frac{1}{2} (V(\vec{r}_{12}) + V(\vec{r}_{34})) + \frac{1}{4} (V(\vec{r}_{13}) + V(\vec{r}_{14}) + V(\vec{r}_{23}) + V(\vec{r}_{24})). \quad (4.5)$$

Pentaquarks Dans l'état $|\bar{3} - \bar{3}\rangle$ les facteurs de couleur sont

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_2 &= -\frac{8}{3}, \quad \widetilde{\lambda}_3 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = -\frac{8}{3}, \quad \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda}_2 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = \widetilde{\lambda}_2 \cdot \widetilde{\lambda}_3 = \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_4 = -\frac{2}{3}, \\ \widetilde{\lambda}_1 \cdot \widetilde{\lambda}_5 &= \widetilde{\lambda}_2 \cdot \widetilde{\lambda}_5 = \widetilde{\lambda}_3 \cdot \widetilde{\lambda}_5 = \widetilde{\lambda}_4 \cdot \widetilde{\lambda}_5 = -\frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'Hamiltonien H , (4.1), prend alors la forme

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\vec{p}_3^2}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^2}{2m_4} + \frac{\vec{p}_5^2}{2m_5} + \frac{1}{2} (V(\vec{r}_{12}) + V(\vec{r}_{34})) + \frac{1}{8} (V(\vec{r}_{13}) + V(\vec{r}_{14}) + V(\vec{r}_{23}) + V(\vec{r}_{24})) + \frac{1}{4} (V(\vec{r}_{15}) + V(\vec{r}_{25}) + V(\vec{r}_{35}) + V(\vec{r}_{45})). \quad (4.7)$$

On prendra comme potentiel V , le potentiel de Martin donné par

$$V(r) = Ar^{\beta} + B, \quad (4.8)$$

avec

$$A = 6.9923 \text{ GeV}, \quad B = -8.3377 \text{ GeV}, \quad \beta = 0.1. \quad (4.9)$$

Le potentiel de Martin est intéressant à double titre. D'abord, il constitue une bonne interpolation du potentiel Coulomb+linéaire

$$V(r) = -\frac{b}{r} + ar, \quad (4.10)$$

qui incorpore les deux propriétés de confinement et de liberté asymptotique et qui est plus justifié que le potentiel de Martin d'un point de vue théorique. Ensuite, il possède des

propriétés d'échelle intéressantes. Explicitons ces propriétés d'échelle pour l'énergie dans le cas de l'Hamiltonien d'un système à deux corps, donné par :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \left(Ar^\beta + B \right), \quad (4.11)$$

La loi d'échelle pour l'énergie stipule alors que lorsque la masse réduite μ est multipliée par un facteur α et/ou lorsque l'intensité de l'interaction est multipliée par un facteur γ , les niveaux d'énergie du système obéissent à la relation

$$E(\alpha\mu, \gamma A) - B = \alpha^{-\frac{\beta}{2+\beta}} \gamma^{\frac{2}{2+\beta}} E(\mu, A) - B. \quad (4.12)$$

4.3 Résultats numériques

On a considéré en plus du potentiel de Martin (4.9), un autre potentiel du même type, superposition d'un potentiel linéaire et d'une constante

$$V(r) = Ar^\beta + B, \quad (4.13)$$

avec

$$A = 0.016174 \text{ Gev}, B = -0.1747 \text{ Gev}, \beta = 1. \quad (4.14)$$

Pour les deux potentiels, (4.8) et (4.13), nous avons adopté les mêmes valeurs pour les masses des quarks. Nous avons pris :

$$m_u = m_d = m_q = 0.3 \text{ Gev}, m_s = 0.6 \text{ Gev}, m_c = 1.895 \text{ Gev}, m_b = 5.174 \text{ Gev}, \quad (4.15)$$

où m_u , m_d , m_s , m_c et m_b désignent respectivement les masses d'un quark "up", noté u , d'un quark "down", noté d , d'un quark étrange, noté s , d'un quark charmé, noté c et d'un quark beau, noté b . Nous avons pris les quarks "up" et "down" comme étant de même masse, ce qui correspond à la limite d'une symétrie $SU_f(2)$ de saveur exacte. Dans ce qui suit, nous emploierons le vocable de quark ordinaire pour désigner aussi bien un quark "up" qu'un quark "down". Un quark ordinaire sera noté q . E_{1G} , E_{2G} , $E_{2G.G}$ désignent la valeur approchée par en haut, borne supérieure, de l'énergie de l'état fondamental du système considéré correspondant respectivement aux approximations d'une Gaussienne corrélée, de la superposition de deux Gaussiennes corrélées, avec des relations entre les paramètres des deux gaussiennes, et également de la superposition de deux Gaussiennes corrélées, mais sans relations présumées cette fois-ci entre les paramètres des deux gaussiennes. Pour finir E_{opt} désigne la valeur de la borne inférieure optimisée obtenue pour le système en question, et qui constitue une approximation d'en bas pour l'énergie du système.

TAB. 4.1 – Baryons, configuration avec une seule saveur, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qqq</i>	0.203141	0.195258	0.19004	0.1784
<i>sss</i>	-0.209486	-0.217113	-0.222161	-0.233424
<i>ccc</i>	-0.864758	-0.87198	-0.876759	-0.887421
<i>bbb</i>	-1.40843	-1.41531	-1.41987	-1.43003

TAB. 4.2 – Baryons, configuration avec deux saveurs différentes, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qqs</i>	0.0853859	0.0775754	0.0723849	0.0608738
<i>qqc</i>	-0.0255141	-0.0332558	-0.0384664	-0.0498103
<i>qqb</i>	-0.0663933	-0.0741096	-0.0793416	-0.0906099
<i>ssq</i>	-0.0525954	-0.0603203	-0.0654674	-0.0768389
<i>ssc</i>	-0.376712	-0.384236	-0.389261	-0.400325
<i>ssb</i>	-0.446818	-0.454298	-0.459347	-0.470294
<i>ccq</i>	-0.387106	-0.394623	-0.39991	-0.410698
<i>ccs</i>	-0.596856	-0.604243	-0.609234	-0.620039
<i>ccb</i>	-1.00862	-1.01575	-1.0205	-1.031
<i>bbq</i>	-0.616427	-0.623802	-0.629532	-0.639573
<i>bbs</i>	-0.85402	-0.861248	-0.866464	-0.876703
<i>bbc</i>	-1.19097	-1.19799	-1.20271	-1.213

TAB. 4.3 – Baryons, configuration avec trois saveurs différentes, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qsc</i>	-0.192291	-0.19993	-0.205103	-0.216263
<i>qsb</i>	-0.247733	-0.255337	-0.260546	-0.271597
<i>qcb</i>	-0.48102	-0.488479	-0.493904	-0.50443
<i>scb</i>	-0.704982	-0.712302	-0.717354	-0.727955

TAB. 4.4 – Baryons, configuration avec une seule saveur, $\beta=1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qqq</i>	0.107787	0.107475	0.107178	0.106734
<i>sss</i>	0.0314899	0.031242	0.0310068	0.0306539
<i>ccc</i>	-0.0619804	-0.0621494	-0.0623096	-0.0625502
<i>bbb</i>	-0.118905	-0.119026	-0.119141	-0.119064

TAB. 4.5 – Baryons, configuration avec deux saveurs différentes, $\beta = 1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qqs</i>	0.0846407	0.084348	0.0840689	0.0836534
<i>qqc</i>	0.0643052	0.0640296	0.063763	0.0633758
<i>qqb</i>	0.0571465	0.056877	0.0566141	0.0562374
<i>ssq</i>	0.0590554	0.0587842	0.0585248	0.0581409
<i>ssc</i>	0.00496644	0.00474094	0.00452471	0.00420597
<i>ssb</i>	0.0590554	0.0587842	0.0585248	0.0581409
<i>ccq</i>	0.00579814	0.00557194	0.00533938	0.0050353
<i>ccs</i>	-0.596856	-0.604243	-0.620039	-0.620039
<i>ccb</i>	-0.078485	-0.0786401	-0.0787884	-0.0790078
<i>bbq</i>	-0.0229659	-0.0231678	-0.0234078	-0.0235268
<i>bbs</i>	-0.0576147	-0.0577873	-0.0577873	-0.0581969
<i>bbc</i>	-0.0976893	-0.0978281	-0.0979623	-0.0980115

TAB. 4.6 – Baryons, configuration avec trois saveurs différentes, $\beta = 1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qsc</i>	0.0353679	0.0351168	0.0348716	0.0345209
<i>qsb</i>	0.0265539	0.0263102	0.026069	0.025732
<i>qcb</i>	-0.0068153	-0.00703085	-0.00726314	-0.00754221
<i>scb</i>	-0.0404756	-0.0406627	-0.04085	-0.0411066

TAB. 4.7 – Tétraquarks, configuration $(QQ\overline{Q}'\overline{Q}')$, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
<i>qq\overline{s}</i>	0.10114	0.0973104	0.088984	0.0684822
<i>qq\overline{c}</i>	-0.232803	-0.244903	-0.236557	-0.264811
<i>qq\overline{b}</i>	-0.460395	-0.464097	-0.472665	-0.49088
<i>ss\overline{c}</i>	-0.583577	-0.595285	-0.58725	-0.614902
<i>ss\overline{b}</i>	-0.839572	-0.843187	-0.85131	-0.869215
<i>cc\overline{b}</i>	-1.40056	-1.40405	-1.41166	-1.42882

TAB. 4.8 – Tétraquarks, configuration $(QQ\overline{Q'Q'})$, $\beta = 1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
$qq\overline{s\bar{s}}$	0.111276	0.111123	0.110733	0.109964
$qq\overline{c\bar{c}}$	0.0561681	0.056033	0.0556676	0.055013
$qq\overline{b\bar{b}}$	0.0267879	0.0266626	0.0262923	0.0258382
$ss\overline{c\bar{c}}$	-0.00397869	-0.00409374	-0.00439055	-0.00496245
$ss\overline{b\bar{b}}$	-0.0358647	-0.0359691	-0.0362626	-0.0366269
$cc\overline{b\bar{b}}$	-0.109893	-0.109973	-0.110177	-0.110424

 TAB. 4.9 – Tétraquarks, configuration $(QQ\overline{Q'Q''})$, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
$qq\overline{c\bar{s}}$	-0.0411299	-0.0532643	-0.0481085	-0.0735109
$qq\overline{b\bar{s}}$	-0.0994984	-0.106453	-0.111658	-0.131766
$qq\overline{b\bar{c}}$	-0.326905	-0.339055	-0.333764	-0.358729
$ss\overline{c\bar{q}}$	-0.185906	-0.192824	-0.198013	-0.218005
$ss\overline{b\bar{q}}$	-0.247864	-0.254756	-0.260037	-0.279843
$ss\overline{b\bar{c}}$	-0.692838	-0.699543	-0.70455	-0.72395
$cc\overline{q\bar{s}}$	-0.399901	-0.406729	-0.411865	-0.431583
$cc\overline{b\bar{q}}$	-0.702834	-0.709535	-0.715053	-0.733927
$cc\overline{b\bar{s}}$	-0.922794	-0.929403	-0.934484	-0.953458
$bb\overline{q\bar{s}}$	-0.641348	-0.648075	-0.653425	-0.67256
$bb\overline{c\bar{q}}$	-0.876395	-0.883023	-0.888552	-0.90715
$bb\overline{c\bar{s}}$	-1.09861	-1.10515	-1.11019	-1.12894

TABLE 4.10 – Tétraquarks, configuration $(QQ\overline{Q}'\overline{Q}'')$, $\beta = 1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
$qq\overline{c}\overline{s}$	0.0862301	0.0862301	0.0857095	0.0849894
$qq\overline{b}\overline{s}$	0.0765669	0.0765669	0.0760528	0.0753537
$qq\overline{b}\overline{c}$	0.0431037	0.0431037	0.0431037	0.0419859
$ss\overline{c}\overline{q}$	0.0588475	0.0586085	0.05836	0.0576848
$ss\overline{b}\overline{q}$	0.0486358	0.0484029	0.0481551	0.0475022
$ss\overline{b}\overline{c}$	-0.0184581	-0.0186517	-0.0188595	-0.0194006
$cc\overline{q}\overline{s}$	-0.399901	-0.406729	-0.411865	-0.431583
$cc\overline{b}\overline{q}$	-0.0185271	-0.0187207	-0.0189511	-0.0194694
$cc\overline{b}\overline{s}$	-0.0521033	-0.0522773	-0.0524644	-0.192724
$bb\overline{q}\overline{s}$	-0.00390114	-0.00410334	-0.00435027	-0.00488513
$bb\overline{c}\overline{q}$	-0.0379205	-0.0381028	-0.038337	-0.0388076
$bb\overline{c}\overline{s}$	-0.0715557	-0.0717183	-0.0719018	-0.072347

TAB. 4.11 – Pentaquarks, configuration $QQQ'Q'\bar{Q}'$, $\beta = 0.1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
$qqqq\bar{q}$	0.502557	0.495837	0.490628	0.461003
$qqqq\bar{s}$	0.382662	0.375979	0.370761	0.341341
$qqqq\bar{c}$	0.262347	0.255702	0.250394	0.22126
$qqqq\bar{b}$	0.214337	0.207707	0.202331	0.173343
$qqss\bar{q}$	0.244146	0.237507	0.232796	0.203094
$qqss\bar{s}$	0.106464	0.0998684	0.0950844	0.0656807
$qqss\bar{c}$	-0.0408008	-0.0473503	-0.0523658	-0.0812978
$qqss\bar{b}$	-0.104348	-0.110878	-0.116046	-0.144721
$qqcc\bar{q}$	-0.0921535	-0.0986868	-0.10187	-0.13255
$qqcc\bar{s}$	-0.254761	-0.261244	-0.264637	-0.294842
$qqcc\bar{c}$	-0.450666	-0.457086	-0.461231	-0.490365
$qqcc\bar{b}$	-0.552242	-0.558631	-0.563341	-0.591743
$qqbb\bar{q}$	-0.32066	-0.327121	-0.32967	-0.360612
$qqbb\bar{s}$	-0.496286	-0.502692	-0.505418	-0.535896
$qqbb\bar{c}$	-0.725203	-0.731537	-0.735219	-0.764368
$qqbb\bar{b}$	-0.864063	-0.870353	-0.874956	-0.902957
$ssss\bar{q}$	-0.0357433	-0.0422945	-0.0474108	-0.0762501
$ssss\bar{s}$	-0.190479	-0.196981	-0.202021	-0.230684
$ssss\bar{c}$	-0.363004	-0.369452	-0.363004	-0.402873
$ssss\bar{b}$	-0.441471	-0.447894	-0.453054	-0.481188
$sscc\bar{q}$	-0.402199	-0.408635	-0.412678	-0.441993
$sscc\bar{s}$	-0.581606	-0.587986	-0.591932	-0.621051
$sscc\bar{c}$	-0.800741	-0.807051	-0.811312	-0.839758
$sscc\bar{b}$	-0.915685	-0.921959	-0.926586	-0.954478
$ssbb\bar{q}$	-0.646303	-0.652661	-0.655668	-0.685621
$ssbb\bar{s}$	-0.839208	-0.845506	-0.848311	-0.87815
$ssbb\bar{c}$	-1.09115	-1.09737	-1.10067	-1.1296
$ssbb\bar{b}$	-1.24235	-1.24852	-1.25258	-1.28051
$cccc\bar{q}$	-0.824053	-0.830356	-0.835653	-0.863025
$cccc\bar{s}$	-1.0282200	-1.0344600	-1.0394200	-1.0668000
$cccc\bar{c}$	-1.29106	-1.29721	-1.30198	-1.32912
$cccc\bar{b}$	-1.43885	-1.44496	-1.44976	-1.47663
$cbb\bar{q}$	-1.10668	-1.11289	-1.11771	-1.1451
$cbb\bar{s}$	-1.32512	-1.33126	-1.33549	-1.36311
$cbb\bar{c}$	-1.62054	-1.62659	-1.63052	-1.65796
$cbb\bar{b}$	-1.80221	-1.80821	-1.81234	-1.83928
$bbb\bar{q}$	-1.42908	-1.43519	-1.44115	-1.46688
$bbb\bar{s}$	-1.66226	-1.6683	-1.67357	-1.6996
$bbb\bar{c}$	-1.99055	-1.99649	-2.00117	-2.02725
$bbb\bar{b}$	-2.20419	-2.21006	-2.2146	-2.24047

TAB. 4.12 – Pentaquarks, configuration $QQQ'Q'\bar{Q}''$, $\beta = 1$.

<i>Systèmes</i>	E_{1G}	E_{2G}	$E_{2G.G}$	E_{opt}
$qqqq\bar{q}$	0.214183	0.213893	0.21359	0.212329
$qqqq\bar{s}$	0.189132	0.188853	0.188558	0.187349
$qqqq\bar{c}$	0.165511	0.165243	0.164951	0.163796
$qqqq\bar{b}$	0.156478	0.156214	0.155922	0.154789
$qqss\bar{q}$	0.16253	0.162264	0.162082	0.160824
$qqss\bar{s}$	0.135552	0.135298	0.135118	0.135118
$qqss\bar{c}$	0.108924	0.108681	0.108492	0.10737
$qqss\bar{b}$	0.0980988	0.0978607	0.097663	0.0965756
$qqcc\bar{q}$	0.106155	0.105914	0.105879	0.104609
$qqcc\bar{s}$	0.0767319	0.0765033	0.0764641	0.0752695
$qqcc\bar{c}$	0.0454301	0.0452155	0.0451513	0.0440569
$qqcc\bar{b}$	0.0309728	0.0307646	0.0306756	0.0296408
$qqbb\bar{q}$	0.0762507	0.0760223	0.0760172	0.0747897
$qqbb\bar{s}$	0.0456395	0.0454248	0.0454143	0.0442657
$qqbb\bar{c}$	0.0116154	0.0114158	0.0113741	0.0103385
$qqbb\bar{b}$	-0.00570202	-0.00589391	-0.00597377	-0.00692965
$ssss\bar{q}$	0.108491	0.108248	0.107991	0.106938
$ssss\bar{s}$	0.0798958	0.0796658	0.079425	0.0784244
$ssss\bar{c}$	0.0507658	0.0505488	0.0503168	0.0493774
$ssss\bar{b}$	0.0383765	0.038165	0.0379336	0.0370234
$sscc\bar{q}$	0.0489547	0.0487384	0.0486468	0.0475714
$sscc\bar{s}$	0.0182093	0.0180067	0.0180175	0.0169135
$sscc\bar{c}$	-0.0149716	-0.0151594	-0.0151622	-0.0161728
$sscc\bar{b}$	-0.0305994	-0.0307802	-0.0308023	-0.0317562
$ssbb\bar{q}$	0.0174826	0.0172804	0.0172558	0.0161889
$ssbb\bar{s}$	-0.014378	-0.014566	-0.0145819	-0.0155809
$ssbb\bar{c}$	-0.0500739	-0.0502461	-0.0502726	-0.0511752
$ssbb\bar{b}$	-0.0683627	-0.0685267	-0.0684974	-0.0694118
$cccc\bar{q}$	-0.0158476	-0.016035	-0.0162572	-0.0170464
$cccc\bar{s}$	-0.04836970	-0.04854260	-0.04873040	-0.04873040
$cccc\bar{c}$	-0.0846168	-0.0847736	-0.0849377	-0.0856197
$cccc\bar{b}$	-0.102661	-0.10281	-0.102968	-0.117861
$ccb\bar{b}\bar{q}$	-0.0506531	-0.0508249	-0.0509501	-0.0517527
$ccb\bar{b}\bar{s}$	-0.0841659	-0.0843228	-0.0844102	-0.100568
$ccb\bar{b}\bar{c}$	-0.122488	-0.122628	-0.122634	-0.123384
$ccb\bar{b}\bar{b}$	-0.142668	-0.142799	-0.142868	-0.143505
$bbb\bar{b}\bar{q}$	-0.0884178	-0.0885729	-0.0888111	-0.0894099
$bbb\bar{b}\bar{s}$	-0.122858	-0.122998	-0.123175	-0.137461
$bbb\bar{b}\bar{c}$	-0.162961	-0.163082	147 0.163214	-0.16374
$bbb\bar{b}\bar{b}$	-0.184808	-0.18492	-0.185037	-0.185525

Conclusion générale

Le travail décrit dans le manuscrit de cette thèse de Doctorat en Sciences est composé de deux parties s'inscrivant dans deux domaines bien distincts : la cosmologie relativiste et les systèmes à petit nombre de corps. La première partie, située dans le domaine de la cosmologie, a trait à l'influence de la constante cosmologique Λ sur les deux phénomènes de déflexion de la lumière et de temps de retard à l'échelle cosmologique. Nous avons la situation suivante : Une source S , typiquement un quasar, émet des photons qui sont déviés par une galaxie ou un amas de galaxies, jouant le rôle d'une lentille gravitationnelle L , puis sont ensuite observés sur terre. Notre travail est basé sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'amas de galaxies de masse M , la lentille L , est supposé statique et à symétrie sphérique.
- Toutes les masses de l'univers ont été négligés, y compris les masses du groupe local et de la source, excepté la masse de la lentille.
- La terre T tout aussi bien que la source S sont considérés comme étant au repos par rapport à la lentille L .

Avec les hypothèses adoptées, le cadre approprié de l'étude est la métrique de Kottler, appelée encore métrique de Schwarzschild-de Sitter. Nous nous intéressons au cas du lensing fort, où la source possède plus d'une image. Le cas d'une symétrie sphérique correspond à deux images (cependant, lorsque la terre, la lentille et la source sont alignés, l'image de la source est un anneau, appelé anneau d'Einstein). On considère donc deux photons, empruntant deux trajectoires différentes, dénommées ci-après trajectoires du haut et du bas. Les deux trajectoires sont régies par les mêmes équations, les équations de la géodésique, avec, toutefois des conditions finales différentes. Nous avons intégré les équations de la géodésique correspondant aux deux trajectoires du haut et du bas, jusqu'au premier ordre inclus en le rapport du rayon de Schwarzschild au peri-lens, distance minimale lentille-photon lors du voyage du photon depuis son émission par le quasar jusqu'à sa réception sur terre. En imposant que les deux photons des trajectoires du haut et du bas soient reçus tous deux au même point (sur terre, on obtient une relation liant les distances de coordonnée terre-lentille et source-lentille r_T et r_S respectivement, la masse

M de la lentille, et les angles de coordonnée ϵ_T et ϵ'_T . Cependant, les angles observés α et α' diffèrent des angles de coordonnée ϵ_T et ϵ'_T et la relation entre les deux fait intervenir la constante cosmologique Λ . En remplaçant dans la relation dont il a été question ci-dessus ϵ_T et ϵ'_T par leurs expressions en termes de α , de α' et de la constante cosmologique Λ , on obtient alors une relation faisant intervenir les distances de coordonnée r_T et r_S , la masse M de la lentille, les angles physiques α et α' , et la constante cosmologique Λ . Les distances de coordonnée, non plus, ne sont pas observables physiquement. Les distances auxquelles on a accès expérimentalement sont les distances lumineuses terre-lentille et terre-source d_L et d_S respectivement, via les décalages spectraux de la lentille z_L et de la source z_S , qui eux sont directement mesurables. La distance lumineuse d_L est identique à la distance de coordonnée r_T , mais la distance de coordonnée r_S s'exprime en termes des distances lumineuses d_L et d_S et également de la constante cosmologique Λ . Finalement on obtient une relation entre les distances lumineuses, d_L et d_S , la masse de la lentille, M , les angles physiques, α et α' , les angles physiques, α et α' , et la constante cosmologique Λ . On en conclue que la déflexion de la lumière par une lentille L est modifiée ou influencée par la présence de la constante cosmologique. Nous n'avons fait que retrouver les calculs de Schücker et ses résultats. C'est la même conclusion que celle d'Ishak et Rindler. Cependant, il faut remarquer que dans les situations cosmologiques, l'observateur, la terre T , aussi bien que la source S sont mobiles par rapport à la lentille L . En tenant compte de vitesses réalistes pour l'observateur, l'effet de la constante cosmologique sur la déflexion de la lumière persiste, quoique atténué. Nous nous sommes dans une deuxième étape, et c'est la que se situe la partie originale de la première partie de la thèse, intéressés à la détermination de la dépendance du temps de retard en la constante cosmologique Λ . Les deux photons empruntant les deux trajectoires mettent des temps différents, en terme du temps propre de l'observateur terrestre, pour arriver sur terre. Si on considère que les deux photons arrivent sur terre au même instant, cela veut dire qu'ils ont été émis par la source S en des instants différents. Nous avons obtenu une expression pour le temps de retard en termes de la masse M de la lentille, des angles physiques α et α' , des distances de coordonnée r_T et r_S , et de la constante cosmologique Λ . Nous avons, en outre, à notre disposition deux relations : Une première relation liant les angles physiques α et α' , les distances de coordonnée r_T et r_S , la masse M de la lentille, et la constante cosmologique Λ , obtenue en imposant que les deux photons des trajectoires du haut et du bas soient reçus au même point, la terre. Une deuxième relation liant les distances de coordonnée r_T et r_S , la distance lumineuse terre-source d_S et la constante cosmologique Λ . Sachant que la distance de coordonnée terre-lentille r_T est identique à la distance lumineuse terre-lentille d_L , nous pouvons alors utiliser les deux relations dont il est question ci-dessus pour tirer la distance de coordonnée r_S et la constante cosmologique Λ en termes des distances lumineuses d_L et d_S , des angles physiques α et α' et de la masse M de la lentille. Alternativement, on peut aussi choisir de tirer la distance de coordonnée r_S et la masse M de la lentille en termes des distances lumineuses d_L et d_S , des angles physiques α et α' et

de la constante cosmologique Λ . La méthodologie ainsi développée a été appliquée au cas particulier du système quasar-lentille *SDSS J1004 + 4112*. Nous avons ignoré le fait que nous avons plus de deux images (quatre images en tout), ce qui constitue une signature d'un écart par rapport à la symétrie sphérique, et considéré les deux images qui sont les plus alignées avec le quasar, les images *C* et *D*, et nous avons appliqué notre expression pour le temps de retard. Nous avons obtenu pour la constante cosmologique Λ des valeurs compatibles avec les valeurs favorisées par l'expérience et des prédictions pour le temps de retard allant de 12 à 28 ans.

La deuxième partie de cette thèse traite de systèmes à petit nombre de corps. Nous nous sommes placés dans le cas de systèmes gouvernés par une cinématique non relativiste et nous avons supposé que les interactions entre les constituants du système se fait par des forces à 2 corps invariantes par translation. Comme il est bien établi, les méthodes variationnelles de résolution, approximative, de l'équation de Schrödinger à N corps, dont le développement systématique sur des Gaussiennes constitue un exemple, fournissent des bornes supérieures pour les énergies des états fondamentaux de tels systèmes à N corps. Il serait bon également d'obtenir des bornes inférieures pour les énergies des états fondamentaux de systèmes à N corps, de façon à obtenir un encadrement pour les énergies des états fondamentaux des systèmes à N corps en question.

Parmi les systèmes à N corps, nous nous sommes intéressés plus précisément à ceux situés dans le domaine de la physique des particules, les hadrons, systèmes liés de quarks et/ou d'antiquarks, constituants fondamentaux des particules à interaction forte, dont l'étude constitue la spectroscopie hadronique. Nous avons rappelé au chapitre 3 la méthodologie utilisée en vue d'obtenir une borne inférieure optimisée et également les éléments de base de la méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées. Nous avons ensuite détaillé les méthodes de la borne inférieure optimisée et du développement systématique sur des Gaussiennes corrélées pour les cas à 3, à 4 et à 5 corps successivement en distinguant soigneusement les différentes configurations de masse. Au chapitre 4, nous avons appliqué nos résultats obtenus au chapitre 3, pour les baryons, hadrons ordinaires formés de 3 quarks, pour les tétraquarks, hadrons exotiques formés de 2 quarks et de 2 antiquarks, et pour les pentaquarks, hadrons exotiques formés de 4 quarks et d'un (1) antiquark (ou d'un (1) quark et de 4 antiquarks). Comme potentiel d'interaction, nous avons utilisé un potentiel à 2 corps indépendant de saveur, résultant de l'échange d'un octet de couleur, qui dans le cas d'un système à 2 corps (système quark-antiquark ou méson) se réduit au potentiel de Martin, qui a rencontré un succès éclatant dans la description de la spectroscopie des mésons.

Nous avons obtenu un encadrement de l'énergie de l'état fondamental pour chacun des systèmes baryons, tétraquarks et pentaquarks et ce pour diverses configurations de masse. Nous avons la conviction que la borne inférieure optimisée, à cause de sa grande flexibilité, fournit une meilleure approximation pour l'énergie de l'état fondamental d'un système à N corps que le développement systématique sur des Gaussiennes corrélées limité

à une seule génération de Gaussiennes. Pour obtenir une approximation de l'énergie de l'état fondamental de la même qualité que celle fournie par la borne inférieure optimisée, il faut inclure plusieurs générations de Gaussiennes. Ceci montre que la borne inférieure optimisée fournit des valeurs qui constituent souvent d'excellentes approximations pour les énergies des états fondamentaux de systèmes à N corps.

Bibliographie

- [1] W. Rindler, M. Ishak, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons 1972).
- [3] N.J. Islam, Phys. Lett. A **97**, 239, (1983).
- [4] W.H.C. Freire, V.B. Bezerra, J.A.S. Lima, Gen. Relativ. Gravit. **33**, 1407 (2001).
- [5] A.W. Kerr, J.C. Hauck, B. Mashhoon, Class. Quant. Grav. **20**, 2727 (2003).
- [6] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, Phys. Lett. B **634**, 465 (2006).
- [7] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, Phys. Rev. D **75**, 043003 (2007).
- [8] M. Sereno, Ph. Jetzer, Phys. Rev. D **73**, 063004 (2006).
- [9] K. Lake, arXiv :0711.0673.
- [10] M. Sereno, Phys. Rev. D **77**, 043004 (2008).
- [11] M. Sereno, Phys. Rev. Lett. **102**, 021301 (2009).
- [12] T. Schücker, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 67 (2009).
- [13] T. Schücker, arXiv :0805.1630, Moriond Proceedings ‘Cosmology 2008’
- [14] H. Miraghaei, M. Nouri-Zonoz, arXiv :0810.2006.
- [15] R. Kantowski, B. Chen, X. Dai, arXiv :0909.3308v1.
- [16] I.D. Khriplovich, A.A. Pomeransky, Int. J. Mod. Phys. D **17**(12), 2255 (2008).
- [17] M. Park, Phys. Rev. D **78**, 023014 (2008).
- [18] G.W. Gibbons, C.M. Warnick, M.C. Werner, Class. Quant. Grav. **25**, 245009 (2008).
- [19] F. Simpson, J.A. Peacock, A.F. Heavens, arXiv :0809.1819.
- [20] F. Henri-Couannier, A. Tilquin, A. Ealet, A. Bonissent, D. Fouchez, C. Tao, arXiv :0507065 (2005).
- [21] N. Inada, et al, Nature **426**, 810 (2003).
- [22] M. Oguri, et al, Astrophys. J. **605**, 78 (2004).

- [23] K. Sharon, et al, *Astrophys. J.* **629**, L73 (2005).
- [24] N. Ota, et al, *Astrophys. J.* **647**, 215 (2006).
- [25] J. Fohlmeister et al, *Astrophys. J.* **676**, 761 (2008).
- [26] S.Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, New York 2008).
- [27] T. Schücker, *N. Zaimen, A & A* **484**, 103 (2008).
- [28] A. Einstein, E.G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 120 (1945).
- [29] A. Einstein, E.G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **18**, 148 (1946).
- [30] E. Schücker, *Z. Phys.* **137**, 595 (1954).
- [31] M. Ishak, W. Rindler, W. Dossett, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* DOI :10.1111/j.1365 – 2966.2010.16261.x(2010).
- [32] T. Schücker, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 1595 (2009).
- [33] Kh. Boudjemaa, M. Guenouche, S.R. Zouzou, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 1707 (2011).
- [34] Y. Kawano, M. Oguri, *Publ. Astron. Soc. Jap.* **58**(2), 271 (2006).
- [35] M.E. Fisher, D. Ruelle, *J. Math. Phys.* **7**, 260 (1966).
- [36] F.J. Dyson, A. Lenard, *J. Math. Phys.* **8**, 423 (1967).
- [37] J.-M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.* **10**, 806 (1969).
- [38] J.-P. Ader, J.-M. Richard, P. Taxil, *Phys. Rev. D* **25**, 2370 (1982).
- [39] S. Nussinov, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2081 (1983).
- [40] J.-M. Richard, *Phys. Lett. B* **139**, 408 (1984).
- [41] R. L. Hall, H.R. Post, *Proc. Phys. Soc.* **90**, 381 (1967).
- [42] J.-L. Basdevant, A. Martin, J.-M. Richard, *Nucl. Phys. B* **343**, 60 (1990).
- [43] J.-L. Basdevant, A. Martin, J.-M. Richard, *Nucl. Phys. B* **343**, 69 (1990).
- [44] J.-L. Basdevant, A. Martin, J.-M. Richard, T.T. Wu, *Nucl. Phys. B* **393**, 111 (1993).
- [45] A. Benslama, A. Metatla, A. Bachkhaznadj, S.R. Zouzou, A. Krikeb, J.-L. Basdevant, J.-M. Richard, T.T. Wu, *Few-Body Syst.* **24**, 39 (1998).
- [46] Kh. Boudjemaa, Thèse de Magister, Université de Constantine (2000)
- [47] Kh. Boudjemaa, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mentouri-Constantine (2007)
- [48] Kh. Boudjemaa, S.R. Zouzou, *J. Phys. A : Math. Gen.* **39**, 7383 (2006).
- [49] Kh. Boudjemaa, S.R. Zouzou, *Few-Body Syst.* **46**, 199 (2009).
- [50] S. Fleck, J.-M. Richard, *Few-Body Syst.* **19**, 19 (1995).
- [51] K. Varga, Y. Suzuki, *Phys. Rev. C* **52**, 2885 (1995).
- [52] S. Zouzou, Thèse de Doctorat d’Etat, Université de Constantine (1995)
- [53] S. Zouzou, J.-M. Richard, *Few-Body Syst.* **16**, 1 (1994).

Time Delay in the Framework of the Kottler Model and Applications of a Lower Bound for the Energy to Hadronic Systems

Abstract

This Doctorat in Sciences thesis is involved with two different topics. The first set of works, belonging to the domain of cosmology, deals with the influence of the cosmological constant on strong lensing. A source, typically a quasar, emits photons which are deflected by a gravitational lens, typically a cluster of galaxies, and finally received on earth. The photons may follow different trajectories, which correspond to multiple images of the source, given by the lens. The computations are made in the framework of the Kottler model which correspond to the static spherical case, which imply a certain number of simplifying hypothesis. The deflexion of light, in the centre of a controversy about the dependence or not on the cosmological constant, and the time delay are considered in turn. An analytical expression for the time delay is established. Before that, physical angles are related to coordinate angles and, on the other side, angular distances are related to coordinate distances thanks to the Λ CDM model, an element external to the Kottler model. This analytical expression is then applied to the SDSSJ1004+4112 system. The predictions for the time delay range from 12 to 28 years if one takes into account the observational uncertainties.

The second set of works, belonging to the few-body systems topic, deals with the application of an energy lower bound to the ground-state energy of an N-body system. This lower bound, called optimized since resulting from an optimisation process over a number of free parameters, is applicable every time the considered system is governed by non relativistic kinematics and interacts via translationally-invariant two-body forces. The chosen applications belongs to hadronic spectroscopy in the framework of potential models. The methodology is applied to baryons, ordinary hadrons, to tetraquarks and pentaquarks, exotic hadrons. In this manner, a lower bound for energy is obtained for each of the considered systems. An upper bound for the energy is also obtained in each case by a variational method of resolution of the N-body Schrödinger equation, the method of the systematic development on correlated Gaussians. The lower and upper bounds then allow to obtain a framing for the ground state energy of each one of the considered hadrons.

Key Words: General Relativity, Relativistic Cosmolgy, Cosmological Constant, Kottler Model, Λ CDM model, Light Deflexion, Time delay, Optimised Lower Bound, Correlated Gaussians, Baryons, Tetraquarks, Pentaquarks, Potential Models.

Temps de Retard dans le Cadre du Modèle de Kottler et Applications d'une Borne Inférieure pour l'Énergie à des Systèmes Hadroniques

Résumé

Cette thèse de Doctorat en Sciences porte sur deux thèmes différents. Le premier ensemble de travaux, situé, dans le domaine de la cosmologie, porte sur l'influence de la constante cosmologique sur l'effet de lentille gravitationnel fort. Une source, typiquement un quasar, émet des photons qui sont défléchis par une lentille gravitationnelle, typiquement une galaxie ou un amas de galaxies, pour être finalement reçus sur terre. Les photons peuvent emprunter plusieurs chemins, ce qui correspond à plusieurs images, données par la lentille, de la source. Le calcul est fait dans le cadre du modèle de Kottler qui correspond au cas statique à symétrie sphérique, ce qui suppose un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Tour à tour la déflexion de la lumière, au centre de la polémique concernant la dépendance ou non vis-à-vis de la constante cosmologique, puis le temps de retard sont étudiés. Une expression analytique pour le temps de retard est obtenue. Auparavant un lien est établie entre angles physiques et angles de coordonnées d'une part et entre distances angulaires et distances physiques grâce à un élément externe au modèle de Kottler, le modèle Λ CDM en l'occurrence, d'autre part. Cette expression est appliquée au système SDSSJ1004+4112. Les prédictions pour le temps de retard vont de 12 à 28 ans, lorsque l'on tient compte des erreurs observationnelles.

Le deuxième ensemble de travaux, situé dans le domaine des systèmes à petit nombre de corps a trait à des applications physiques d'une borne inférieure pour l'énergie de l'état fondamental d'un système à N corps. Cette borne inférieure dite optimisée, car résultant d'un processus d'optimisation sur un certain nombre de paramètres libres, est applicable chaque fois que le système considéré est gouverné par une cinématique non relativiste et interagit par des forces à deux corps invariante par translation. Les applications choisies relèvent du domaine de la spectroscopie hadronique dans le cadre des modèles de potentiel. La méthodologie est appliquée aux baryons, hadrons ordinaires, aux tétraquarks et pentaquarks, hadrons exotiques. De cette manière, une borne inférieure pour l'énergie est obtenue pour chacun des systèmes considérés. une borne supérieure pour l'énergie est également obtenue dans chaque cas en appliquant une méthode de résolution de l'équation de Schrödinger à N corps d'essence variationnelle, la méthode de développement systématique sur des Gaussiennes corrélées. Les deux bornes inférieure et supérieure permettent alors d'obtenir un encadrement pour l'énergie de l'état fondamentale pour chacun des hadrons envisagés.

Mots Clés : Relativité Générale, Cosmologie relativiste, Constante Cosmologique, Modèle de Kottler, Modèle Λ CDM, Déflexion de la lumière, Temps de Retard, Borne inférieure Optimisée, Gaussiennes corrélées, Baryons, Tétraquarks, Pentaquarks, modèle de potentiel