

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N<sup>0</sup> d'ordre :  
Série :

**THESE**

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES  
SPECIALITE : PHYSIQUE  
OPTION : ENERGETIQUE

THEME

Optimisation d'un écoulement de couche limite par la méthode E-G-M  
*Entropy Generation Minimization*

Par  
**MAOUGAL Abdelaziz**

Soutenue Le : 24 / 06 / 2010

Devant le Jury :

Président	A.CHARI	Prof. Univ. Constantine
Papporteur	A.CHAKER	Prof. Univ. Constantine
Examineurs :	J.P.CHARLES	Prof. Univ. Metz
	B.BENYOUCEF	Prof. Univ. Tlemcen
	N.BIBITRIKI	M.C Univ. Tlemcen
	N.BELLEL	M.C Univ. Constantine

Personne n'acquiert le génie ;  
c'est un don de Dieu.  
Mais on peut acquérir la patience,  
le courage, la sagesse, la compréhension.

*(Miller Henry, Peindre c'est aimer de nouveau, Livre de Poche n° 3640, page 84)*

# Remerciements

Je remercie Madame la professeur ABLA CHAKER pour avoir accepté mon encadrement le jour où toutes les portes étaient fermées. Je la remercie aussi pour son suivi, pour sa patience son savoir et son efficacité à diriger ce travail de recherche.

Je remercie tous les membres du jury d'avoir accepté l'invitation, de venir peut-être de loin pour corriger et donner les directives et remarques, afin de perfectionner ce travail.

Je ne remercierai jamais assez le Mathématicien M<sup>ed</sup> EI-Hadi CHIBAT pour son apport, sa compétence incontestable dans le domaine de la mécanique des fluides et les problèmes liés à la théorie de la couche limite.

Je remercie aussi mon ami CHAOUKI LAEKHAL pour son aide technique et son élégance à manipuler les logiciels, ainsi que tout mes amis que je ne peux tous citer.

## Dédicaces

Je dédie ce travail au martyr des martyrs LARBI BENMHIDI. *Si jamais nous oublions si Larbi et ses compagnons, on sortira tous par la petite porte de l'histoire.*



1923-1957

Aussi, ce travail est dédié à ma petite famille, ma femme, ma fille ainsi que mon fils qui m'ont soutenu tout au long de cette expérience, je leur envoie toute ma gratitude.

# SOMMAIRE

## Nomenclature

Introduction Générale.....2

## CHAPITRE 1. Théorie de la couche limite laminaire.

1.1 Etude dynamique .....	8
1.1.1 Equations de la couche limite .....	12
1.1.2 Equation de Blasius (1908), hypothèse d'affinité .....	12
1.1.3 Equation de Blasius généralisée .....	16
1.1.4 La méthode de Falkner-Skan .....	17
1.2 Etude thermique	
1.2.1 Mise en équations .....	19
1.2.2 Equation de Pohlhausen .....	20
1.2.3 Etude thermique avec dissipation visqueuse .....	21

## CHAPITRE 2. L'Entropie.

2.1 Généralités sur la thermodynamique .....	24
2.2 La production d'entropie .....	28

## CHAPITRE3. Position du problème et Modèle mathématique.

3.1 Le système physique étudié .....	34
3.2 Equations .....	35
3.3 D'un système d'équations différentielles aux dérivées par à un système d'équations différentielles ordinaires .....	32
3.3.1 Transformations auto similaires .....	36
3.4 Production d'entropie .....	39

## CHAPITRE4. Méthode numérique.

4.1 Introduction .....	42
4.2 Méthode d'Euler (1768) .....	42
4.3 Méthode de Runge-Kutta (1895) .....	45

4.3.1	Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre .....	47
4.4	La méthode de TIR .....	48
4.4.1	Algorithme de résolution .....	49

## CHAPITRE 5. Résultats et interprétations.

5.1	Introduction .....	53
5.2	Formulation de la production d'entropie spécifique au problème .....	53
5.3	Interprétations des courbes obtenues .....	59

## CHAPITRE 6. Perspectives : La théorie constructale.

6.1	Introduction .....	70
6.2	Principe .....	70
6.3	La démarche .....	71
6.4	Exemples : systèmes de refroidissement d'une surface.....	71
6.5	Domaines d'applications .....	78
	Conclusion générale.....	82
	Annexe A.....	87
	Annexe B .....	88
	Annexe C .....	90
	Références .....	93
	Résumés	

# NOMENCLATURE

$a$	Diffusivité thermique	(m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ).
$a_i$	Constantes de Runge-Kutta	
$B_r$	Nombre de Brinkman	
$C, c_1, c_2$	Constantes arbitraires	
$C_p$	Capacité calorifique	(kJ.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ).
$e$	Energie interne	(J).
$E$	Nombre d'Eckert	
$f$	Fonction de la variable auxiliaire	
$F$	Fonction intégrale de $f$	
$g$	Fonction introduite pour obtenir l'équation de Falkner et Skan	
$G$	Fonction liée à la constante d'intégration de $f$	
$h$	Coefficient de transfert thermique	(W.m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ).
$k$	Conductivité thermique	(W.m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ).
$k_i$	Constantes de Runge-Kutta	
$l$	Longueur caractéristique	(m).
$m$	Constante égale à $\frac{b}{2-b}$	
$N_s$	Nombre entropique	
$N_u$	Nombre de Nusselt	
$N_{u_x}$	Nombre de Nusselt local	
$P_r$	Nombre de Prandtl	
$P_\infty$	Pression loin du système physique	(Pa).
$p_i$	Constantes de Runge-Kutta	
$p$	Pression	(Pa).
$p^*$	Pression sans dimension	

$q_{i,j}$	Constantes de Runge-Kutta	
$q$	Flux de chaleur	(W.m <sup>-2</sup> ).
$Q$	Rapport entre les vitesses loin du système physique	
$Q_c$	Chaleur échangée	(J).
$R_x$	Nombre de Reynolds local	
$R_e$	Nombre de Reynolds	
$S$	Fonction entropie	
$S_{gen}$	Entropie produite	(W.m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> ).
$\Delta S$	Variation d'entropie	(W.m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> ).
$t$	Temps	(s).
$\Delta t$	Incrément de temps	(s).
$T$	Température du fluide	(K).
$T_\infty$	Température ambiante	(K).
$T_w$	Température de la paroi	(K).
$T_f$	Température pariétale de frottement	(K).
$u, v, w$	Composantes de la vitesse	(m.s <sup>-1</sup> ).
$u^*, v^*, w^*$	Composantes de la vitesse sans dimensions	
$U_\infty$	Vitesse loin du système physique suivant l'axe Ox	(m.s <sup>-1</sup> ).
$V$	Vitesse suivant l'axe Oy	(m.s <sup>-1</sup> ).
$W_\infty$	Vitesse loin du système physique suivant l'axe Oz	(m.s <sup>-1</sup> ).
$x, y$	Coordonnées	(m).
$x^*, y^*$	Coordonnées sans dimensions	
$\Delta T$	Ecart de température entre la paroi et le fluide	(K).

## Symboles grecques

$a$	Constante arbitraire	
$b$	Paramètre lié à l'angle entre les parois du dièdre	
$d$	Epaisseur de la couche limite dynamique	(m).
$\Delta$	Epaisseur de la couche limite thermique	(m).
$\Gamma$	Fonction incrément	
$x$	Fonction introduite pour obtenir l'équation de Falkner et Skan	
$j_p$	Densité de flux de chaleur à la paroi	(W .m <sup>-2</sup> ).
$m$	Viscosité dynamique	(N.s.m <sup>-2</sup> ).
$n$	Viscosité cinématique	(m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ).
$h$	Variable auxiliaire	
$r$	Masse volumique	(Kg.m <sup>-3</sup> ).
$q$	Température sans dimensions	
$j$	Fonction d'irréversibilité	
$\Phi$	Fonction de dissipation visqueuse	
$y(x, y)$	Fonction de courant	
$t$	Contrainte à la paroi	(Kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-2</sup> ).

## Abréviations

(EGM)	( <i>Entropy generation minimization.</i> ) Minimisation de la génération d'entropie.
(EDP)	Equation différentielle aux dérivées partielles.
(EDO)	Equation différentielle ordinaire.
(BVP)	( <i>Boundary value problem.</i> ) Problème aux conditions aux limites.
(IVP)	( <i>Initial value problem.</i> ) Problème aux conditions initiales.

# Introduction Générale

L'existence d'une couche limite est lié à un écoulement de fluide à grand nombre de Reynolds [1]. Dans le cas d'un écoulement autour d'une plaque plane,  $Re \gg 1$ . La couche limite est définie comme étant une fine partie du fluide adjacente à la paroi du solide autour duquel s'écoule le fluide. Le raccordement entre la solution d'écoulement de fluide parfait et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait sur une zone appelée couche limite, son épaisseur est d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand. Dans cette zone les termes de viscosité et de convection sont à prendre en compte simultanément, d'où la présence d'un grand gradient de vitesse et d'efforts de cisaillement. Les divers processus de transfert qui ont lieu entre fluide et paroi solide se réalisent à travers cette mince couche de fluide. La notion de couche limite représente ainsi le point de liaison entre deux domaines importants de la mécanique des fluides, l'étude des champs de vitesse de fluides parfaits en écoulement potentiel, et la détermination de l'écoulement de fluide visqueux à grand nombre de Reynolds. Cette notion de couche limite revient à L.Prandtl (1904) [2]. Si les parois du solide sont chauffées, la présence d'un transfert thermique implique l'existence d'une couche limite thermique. Le concept d'une couche limite joue un rôle important dans beaucoup de branches des sciences et de la technologie, particulièrement dans l'automobile, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, et la technologie marine. Dans le cas présent, les équations de la couche limite, de l'énergie et de la production d'entropie sont appliquées au cas d'un écoulement de fluide autour d'un dièdre plan, symétrique, semi infini et à parois chauffées. L'optimisation de cet écoulement est faite par la méthode (EGM), (*Entropy Generation Minimization*) minimisation de la production d'entropie. Elle est apparue pour la première fois en (1996) dans les travaux du professeur A.Bejan [3] de l'université Duke (USA). Cette méthode qui s'est généralisée un peu plus tard par la théorie constructale\* du même auteur, et qui énonce que tout être physique se développe par construction, et non pas par fragmentation comme l'avait prédit la théorie fractale\*. L'étude que nous allons réaliser s'inscrit dans ce contexte, celui d'utiliser la production d'entropie en tant que paramètre d'optimisation. Il s'agit d'un écoulement de couche limite tridimensionnel autour d'un dièdre plan d'angle au sommet  $p b$ ,  $b$  étant un paramètre réel agissant sur la géométrie du système physique, variant dans l'intervalle  $[0,1]$ .

Le fluide est considéré newtonien, incompressible et à propriétés physiques constantes. Les parois du dièdre sont portées à une température constante  $T_w$ . Le but est de trouver les valeurs optimales du paramètre  $b$  pour lesquelles nous avons un meilleur transfert thermique, et une contrainte à la paroi aussi faible que possible. Ces deux quantités sont traduites respectivement par les variations du nombre de Nusselt [4] et du coefficient de frottement à la paroi. Nous essayerons de tester la sensibilité de la production d'entropie à certains paramètres tels que, le nombre de Prandtl et la fonction d'irréversibilité. Quant à la résolution numérique du système d'équations gouvernantes, nous avons adopté la méthode de Runge–Kutta [5] au quatrième ordre, après avoir transformé le système d'équations aux dérivées partielles (EDP), en un système d'équations ordinaires (EDO), et d'un problème aux conditions aux limites (BVP), (*Boundary Value Problem*), en un problème aux conditions initiales (IVP), [6] (*Initial Value Problem*).

*\* Fondamentalement la loi constructale (1996) fournit aux concepteurs une méthode pour minimiser la résistance du fluide pour tout système dynamique, et les aide à comprendre les limites de la performance et de l'efficacité.*

*\* La théorie fractale (1975) a été élaborée par Benoit Mandelbrot (Mathématicien Polonais). Le terme fractal découle du verbe latin 'fractus' qui signifie briser pour décrire les nouvelles formes géométriques, dont le motif, de plus en plus petit, se répète à l'infini.*

Au début du 20<sup>ième</sup> siècle se posait le problème des différences entre le modèle du fluide parfait qui négligeait la viscosité et les résultats expérimentaux obtenus. En réponse à cette problématique, Prandtl exposa le modèle de couche limite qui porte son nom. Prandtl subdivisa le domaine d'écoulement en deux parties, une zone extérieure où la viscosité peut être négligée, et une autre très mince et proche des parois solides où les termes traduisant les forces de viscosité jouent un rôle déterminant. Le modèle de Prandtl donne des résultats très proches des résultats expérimentaux. Le système d'équations proposé est issu des équations de Navier-Stokes\* après analyse des ordres de grandeur des différents termes pour des nombres de Reynolds grands. Dans la zone de faible épaisseur, la vitesse longitudinale du fluide passe de la valeur imposée par les conditions d'adhérence à la paroi à celle donnée par l'écoulement extérieur. Ce modèle indique aussi que le gradient de pression transversal sur l'épaisseur de la couche limite peut être négligé. Généralement on qualifie le système d'équations obtenu de « parabolique-hyperbolique ». Les premières méthodes numériques développées dans les années 30 pour résoudre ces équations indiquaient l'existence de singularités à l'approche d'une abscisse, dite de décollement. Goldstein [7] en 1939, puis en 1948 [8] fut l'un des pionniers qui a proposer des solutions sous forme polynomiale, du champ de vitesses et de pression et a chercher à trouver les conditions sur les gradients de pression pour que la singularité au point de décollement n'existe plus. Dans le but de surmonter les obstacles mis en évidence par Goldstein, des modèles avaient été proposés par Lighthill (1955) [9], puis Stewartson et Brown (1969), [10] qui ont aboutit au modèle dit de *triples couches*. Depuis, un nombre important de chercheurs a contribué à la résolution numérique et analytique des équations de la couche limite, et du problème de Goldstein.

\* - **Claude Louis Marie Henri Navier**, (1785-1836) ingénieur français. Spécialiste en mécanique, établit en 1821 et 1822 les équations de Navier-Stokes, décrivant la mécanique des fluides.

- **George Gabriel Stokes** (1819- 1903) mathématicien et physicien britannique. Ses contributions majeures concernent la mécanique des fluides, l'optique et la géodésie.

Toutes ces méthodes ont été élaborées pour obtenir les gradients de pression donnant des solutions régulières au point de décollement. Parmi elles nous pouvons citer, Van Dyke [11], Nayfeh [12] et Mauss et Cousteix [13].

Cette thèse comporte six chapitres. Dans le premier chapitre la théorie de la couche limite laminaire est développée. Le passage des équations de Navier-Stokes aux équations de couche limite est réalisé en détail. Le but de ce chapitre est d'aboutir aux équations différentielles ordinaires régissant l'écoulement de couche limite avec transfert de chaleur se développant autour d'un dièdre plan.

Dans le deuxième chapitre le second principe de la thermodynamique est présenté. On essaye de démystifier au maximum le principe de l'entropie et montrer comment aboutir à l'équation de la production de l'entropie dans un cas d'écoulement de fluide avec transfert de chaleur.

Le troisième chapitre est consacré à l'obtention des équations de couche limite et de la production de l'entropie dans le cas du système physique étudié, celui d'un dièdre plan à parois chauffées, dont l'angle au sommet est variable. Le détail de la formule obtenue de la production d'entropie pour ce cas de figure est largement exposé.

La méthode numérique fait l'objet du quatrième chapitre. Il s'agit de la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre largement connue. Cette méthode rigoureuse est bien adaptée à notre cas. En parallèle à cette méthode nous avons utilisé la méthode du tir nécessaire pour faire démarrer la méthode de Runge-Kutta.

Le cinquième chapitre est réservé à l'ensemble des résultats obtenus et leur interprétation physique. Une validation des résultats antérieurs est également présentée.

Le lecteur trouvera dans le dernier chapitre des perspectives ainsi que la suite logique de cette étude qui doit aboutir à la théorie constructale.

Les objectifs de cette recherche sont:

1. L'obtention des équations de la couche limite dynamique et thermique pour un problème de convection forcée autour d'un dièdre plan à parois chauffées.
2. L'introduction, et le couplage des équations de la couche limite, de l'énergie et de l'équation de la production de l'entropie.
3. Trouver la solution du système d'équations couplées, non linéaires, d'un écoulement de couche limite se développant autour d'un dièdre plan semi infini à parois chauffées via les transformations auto semblables.
4. La formulation d'une loi de la production de l'entropie dans un tel cas d'écoulement.
5. L'étude de l'impact de certains paramètres aérothermiques sur la production d'entropie traduite par la nouvelle formule.
6. La présentation de la théorie constructale, cette théorie assez nouvelle qui s'appuie sur le second principe de la thermodynamique pour concevoir et aboutir à des systèmes physiques de plus en plus performants.

# CHAPITRE 1

## Théorie de la couche limite laminaire

Le but de ce chapitre est de présenter les étapes de calcul nécessaires pour aboutir aux équations modélisant les couches limites dynamique et thermique. Pour ne pas alourdir les calculs, on présentera le cas d'un écoulement de fluide incompressible à deux dimensions immergeant une plaque plane placée parallèlement aux lignes de courants de cet écoulement. On en déduira après les équations à trois dimensions de la couche se rapportant à notre cas.

### 1.1 Etude dynamique

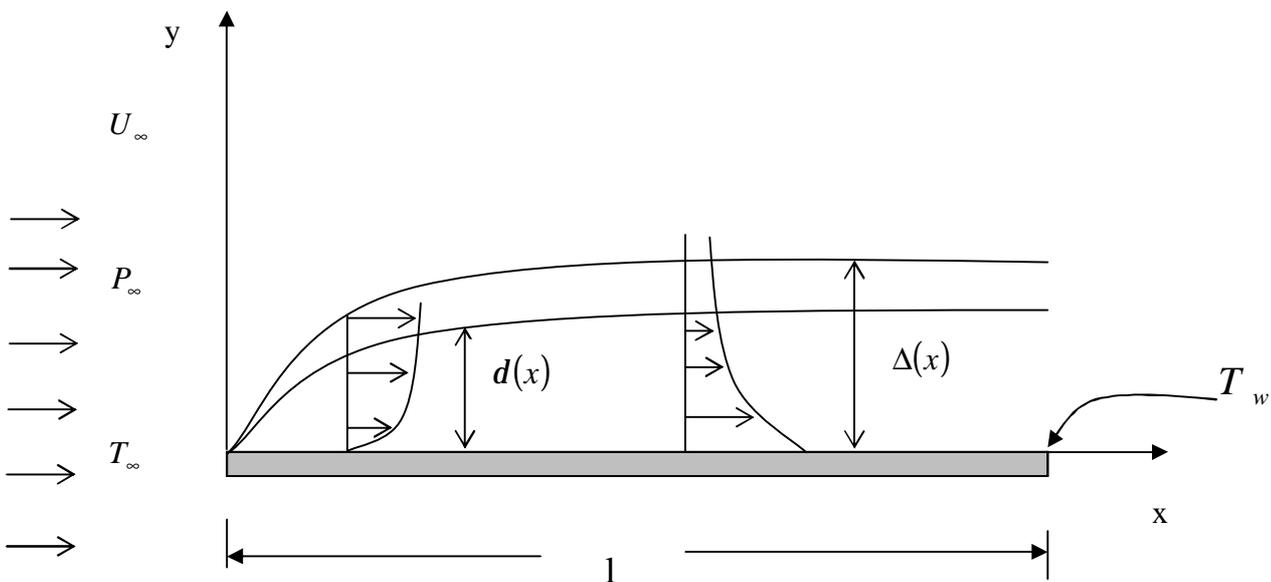


Figure 1.1 Représentation schématique des couches limites dynamique et thermique se développant sur une plaque plane.

Dans le cas d'un fluide newtonien en écoulement incompressible et permanent, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Equations de Navier- Stokes) s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites du problème représenté sur la figure 1.1 sont :

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad u(x,\infty) = U_\infty$$

$U_\infty$  : est la vitesse de l'écoulement en amont de la plaque plane.

Pour effectuer une estimation des termes qui apparaissent dans les équations du mouvement, deux échelles caractéristiques de l'écoulement sont utilisées, à savoir :

- $d$  : l'épaisseur de la couche limite.
- $l$  : une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement.

Normalisation des termes qui figurent dans les équations de Navier- Stokes:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{u}{U_\infty}, & x^* &= \frac{x}{l} \\ v^* &= \frac{v}{V}, & y^* &= \frac{y}{d} \\ p^* &= \frac{p}{rU_\infty^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$V$  : une vitesse de normalisation suivant la direction transversale que l'on déterminera plus tard.

Les dérivées partielles de l'équation de continuité s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_\infty}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V}{d} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \quad (1.6)$$

d'où l'équation de continuité :

$$\frac{U_{\infty}}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V}{d} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1.7)$$

Pour que cette équation soit satisfaite, ses deux termes doivent être du même ordre de

grandeur:  $\frac{V}{d} \cong \frac{U_{\infty}}{l}$ .

On peut donc déduire l'ordre de grandeur de la vitesse transversale.  $V \cong U_{\infty} \frac{d}{l}$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement sont :

$$\frac{U_{\infty}^2}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_{\infty}^2}{l} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{U_{\infty}^2}{l} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + n \frac{U_{\infty}}{l^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + n \frac{U_{\infty}}{d^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.8)$$

$$\frac{U_{\infty}^2 d}{l^2} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{U_{\infty}^2 d}{l^2} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{U_{\infty}^2}{d} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + n \frac{U_{\infty} d}{l^3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + n \frac{U_{\infty}}{dl} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.9)$$

En divisant la première équation par  $\frac{U_{\infty}^2}{l}$ , et la deuxième par  $\frac{U_{\infty}^2}{d}$ , on obtient :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{n}{U_{\infty} l} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{nl}{U_{\infty} d^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2}{l^2} \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{nd^2}{U_{\infty} l^3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{n}{U_{\infty} l} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.11)$$

Dans un tel cas d'écoulement, l'accroissement de la vitesse axiale est plus important suivant y que suivant x, par conséquent:

$$\frac{\partial u}{\partial y} > \frac{\partial u}{\partial x} \text{ pour } x < l .$$

Par hypothèse nous avons  $\frac{d}{l} \ll 1$ , il en résulte que le premier terme visqueux de la première équation est négligeable devant le deuxième :

$$\frac{n}{U_{\infty} l} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{n}{U_{\infty} l} \frac{l^2}{d^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.12)$$

Concernant l'équation (1.11), l'existence du terme  $\frac{d^2}{l^2} \ll 1$ , fait que tout son premier membre tend vers zéro.

Les coefficients de l'inégalité (1.12) sont du même ordre de grandeur

$$\frac{nl}{U_\infty d^2} = \frac{n}{U_\infty l} \frac{l^2}{d^2} \cong 1 \Rightarrow \frac{n}{U_\infty l} \cong \frac{d^2}{l^2} \text{ est très faible devant l'unité.}$$

On en déduit que les deux termes visqueux de l'équation (1.11) sont nuls.

Puisque:  $\frac{d^2}{l^2} \cong \frac{n}{U_\infty l}$  ce qui nous permet d'écrire :

$$d \cong \sqrt{\frac{nl}{U_\infty}} \Rightarrow d \cong \frac{l}{\sqrt{R_e}}$$

Ainsi pour que l'approximation  $\frac{d}{l} \ll 1$  soit vraie, on doit avoir le nombre de Reynolds basé sur la distance  $l$  suffisamment grand  $R_e \gg 1$ , ce qui explique pourquoi on classe les écoulements de couche limite comme des écoulements à grands nombres de Reynolds.

Les équations réduites de Navier-Stokes s'écrivent en non dimensionnel comme suit :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{n}{U_\infty l} \frac{l^2}{d^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.13)$$

$$0 = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} \quad (1.14)$$

Les équations de mouvement pour la couche limite laminaire ont alors pour expression:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.15)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.16)$$

On en déduit que dans une couche limite, la pression ne varie que suivant la direction de l'écoulement.

Il s'ensuit que :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.17)$$

Le fait qu'il n'existe pas de gradient de pression suivant la direction transversale, l'équation du mouvement en dehors de la couche limite est :

$$U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dx} \quad (1.18)$$

L'intégration de cette équation n'est autre que l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = \text{Constante} \quad (1.19)$$

Finalement, la couche limite laminaire incompressible est décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \end{cases} \quad (1.20)$$

### 1.1.1 Equations de la couche limite

Dans le cas d'une plaque plane placée dans un écoulement uniforme de vitesse constante  $U_{\infty}$  et sans gradient de pression axiale, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.22)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad u(x,\infty) = U_{\infty} \quad (1.23)$$

A ce niveau, on introduit la fonction de courant  $\psi(x, y)$  tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.24)$$

L'équation de continuité est satisfaite, mais l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.25)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial y}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y}(x,\infty) = U_\infty \quad (1.26)$$

1.1.2 Equation de Blasius (1908), hypothèse d'affinité

Le calcul suivant est basé sur une hypothèse d'affinité ou de similitude des profils des vitesses  $u(x, y)$  dans la couche limite. L'expérience montre que pour un nombre de Reynolds,  $Re \leq 3.10^5$  qui n'est autre qu'une valeur critique au-delà de laquelle l'écoulement passera du régime laminaire au régime turbulent, les courbes  $u(x, y)$  restent semblables à elles-mêmes quand  $x$  varie, c'est la condition de similitude. On désigne par  $b(x)$  une longueur caractéristique de la couche limite, l'hypothèse d'affinité des profils des vitesses est telle que :

$$\frac{u(x, y)}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{b(x)}\right) \quad \forall x \quad Re \leq 3.10^5 \quad (1.27)$$

On introduit une variable dite auxiliaire ou de similitude:  $h = \frac{y}{b(x)}$

On écrit alors:

$$\frac{u(x, y)}{U_\infty} = f(h) \quad (1.28)$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que d'une seule variable  $h$  qui correspond à la distance  $y$  perpendiculaire à la plaque normalisée par une longueur construite avec la variable  $x$ .

Nous devons exprimer  $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  en fonction de  $h$ .

Nous avons déjà mentionné que :  $v = -\frac{\partial y}{\partial x}$ ,  $u = U_\infty f(h)$ , (équations 1.24 et 1.25)

Calculons  $y$  :

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} = ub = U_\infty b f(h) \quad (1.29)$$

d'où :

$$y = U_\infty b(x) \int_0^h f(u) du + G(x) = U_\infty b(x) \left[ \int_0^h f(u) du + \frac{G(x)}{U_\infty b(x)} \right] \quad (1.30)$$

$F(h) = \int_0^h f(u) du + \frac{G(x)}{U_\infty b(x)}$  On peut poser

$$F(h) = \int_0^h f(u) du + F(0) \quad (1.31)$$

Finalement :  $f(h) = F'(h) = \frac{u}{U_\infty}$  (1.32)

$$v = -\frac{\partial y}{\partial x} = -U_\infty \left[ F \frac{db(x)}{dx} + b(x) \frac{dF}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{y}{b^2(x)} \frac{db(x)}{dx} = -\frac{h}{b(x)} \frac{db(x)}{dx} \quad (1.34)$$

En reportant dans l'équation (1.32) on obtient:  $v = -U_\infty \left[ F \frac{db(x)}{dx} - \frac{dF}{dh} h \frac{db(x)}{dx} \right]$  (1.35)

$$v = U_\infty \frac{db(x)}{dx} [hF' - F] \quad (1.36)$$

Les autres termes qui figurent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = -U_\infty F'' \frac{h}{b(x)} \frac{db(x)}{dx} \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} = U_\infty F'' \frac{1}{b(x)} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{b(x)} F''' \frac{1}{b(x)} = \frac{UF'''}{b^2(x)} \quad (1.39)$$

L'équation (1.22) prend alors la forme:

$$-U_\infty F' \cdot U_\infty F \frac{h}{b(x)} \frac{db(x)}{dx} + U_\infty \frac{db(x)}{dx} (hF' - F) U_\infty F'' \frac{1}{b(x)} = n \frac{U_\infty F'''}{b^2(x)} \quad (1.40)$$

Après simplification on arrive à :

$$F''' + \frac{U_\infty v b(x)}{n} \frac{db(x)}{dx} F F'' = 0 \quad (1.41)$$

D'après l'hypothèse d'affinité, les solutions de cette équation ne dépendent que de  $h$ , donc le coefficient du terme  $FF''$  est constant.

$$\frac{U_{\infty} b(x)}{n} \frac{db(x)}{dx} = S = Cte \quad (1.42)$$

Les choix de  $b(x)$  et de  $S$  sont arbitraires. Par convention, Blasius [17] prend  $S = \frac{1}{2}$ .

Finalement l'équation de la couche limite sans gradient de pression, trouvée par Blasius est :

$$2F''' + FF'' = 0 \quad (1.43)$$

Les conditions aux limites au niveau de la paroi associées à l'équation de Blasius sont :

$$(y=0, h=0): U_{\infty} = 0 ; F'(0) = \frac{u(0)}{U_{\infty}} = 0 \quad (1.44)$$

Toujours au niveau de la paroi dans le cas où celle-ci est imperméable on a :

$$v_{(h=0)} = v_p = 0 \Rightarrow F(0) = 0. \quad (1.45)$$

$$\text{Loin de la paroi, } (y \rightarrow \infty, h \rightarrow \infty): u = U_{\infty} \Rightarrow F'(\infty) = 1 \quad (1.46)$$

Concernant le terme  $b(x)$ , puisque  $S = \frac{1}{2}$ , on a :

$$S = \frac{1}{2} = U_{\infty} \frac{b(x)}{n} \frac{db(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{U_{\infty}}{n} \frac{db^2(x)}{dx} \quad (1.47)$$

Ce qui explique le choix de  $S = \frac{1}{2}$ , à cause de la simplification, donc:

$$\frac{db^2(x)}{dx} = \frac{n}{U_{\infty}} \Rightarrow b^2 = \frac{n}{U_{\infty}} x + Cte \quad (1.48)$$

Au bord d'attaque de la plaque ( $x=0$ ) il n'y a pas de couche limite. On doit avoir  $b(0) = 0$ , donc la constante est nulle, d'où la forme de  $b(x)$  :

$$b(x) = \left( \frac{nx}{U_{\infty}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.49)$$

En se référant à l'équation (1.27), on détermine la forme finale de la variable de similitude  $h$  :

$$h = y \left( \frac{U_{\infty}}{nx} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.50)$$

Il faut noter que dans plusieurs références, il est courant de poser  $S = 1$ . En développant

l'équation (1.35), la composante de la vitesse transversale a pour valeur :

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{nU_\infty}{x} \right)^2 (hF' - F) \quad (1.51)$$

Généralement la composante transversale est négligeable devant la composante longitudinale, leur rapport est de l'ordre  $\frac{v}{u} \approx 10^{-2}$ , sauf au voisinage du bord d'attaque.

### 1.1.3 Equation de Blasius généralisée

Dans ce cas on étudie les équations de la couche limite en présence d'un gradient de pression dans l'écoulement externe. L'étude théorique démontre qu'il ne peut y avoir de solutions auto semblables, ou similaires, que pour un champ externe de vitesse ayant la forme

$$U_\infty = Cx^m \quad (1.52)$$

Ce qui correspond à un gradient de pression extérieur traduit par l'équation (1.52).

$$U_\infty = Cx^m \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dp}{dx} = -Cmx^{2m-1} \quad (1.53)$$

Rappelons les équations de la couche limite :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.54)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.55)$$

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{dp}{dx} \quad (1.56)$$

L'équation (1.54) devient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.57)$$

On introduit la fonction de courant  $\psi(x, y)$  dans l'équation (1.54), tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (1.59)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y) = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U_\infty \quad (1.60)$$

L'équation (1.59) sera développée par Falkner et Skan pour aboutir à une équation différentielle ordinaire fondamentale en théorie de la couche limite et qui porte leur nom.

#### 1.1.4 La méthode de Falkner Skan

Lorsque la vitesse externe varie en loi de puissance avec la coordonnée longitudinale  $x$ , il existe des solutions auto similaires à l'équation de la couche limite. Ces solutions ont été déterminées numériquement par Falkner et Skan en 1930 [18]. Pour arriver à l'équation différentielle ordinaire qui porte leur nom on peut procéder au changement de variable suivant :

$$x = x ; h = y g(x) \tag{1.61}$$

Les dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  sont:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{g'}{g} \frac{\partial}{\partial h} \tag{1.62a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 + g \frac{\partial}{\partial h} \tag{1.62b}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{g'}{g} \frac{\partial}{\partial h} \tag{1.63a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = g \frac{\partial}{\partial h} \tag{1.63b}$$

En exprimant les vitesses en fonction de la fonction de courant et en utilisant les nouvelles variables, l'équation de mouvement (1.58) devient alors:

$$g \frac{\partial y}{\partial h} \left( g \frac{\partial^2 y}{\partial h \partial x} + g' \frac{\partial y}{\partial h} \right) - g^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial h^2} = U_{\infty} \frac{dU}{dx} + n g^3 \frac{\partial^3 y}{\partial h^3} \tag{1.64}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial y}{\partial h}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial h}(x,\infty) = U_{\infty}(x) \tag{1.65}$$

Nous cherchons des solutions particulières de la forme :

$$U_{\infty}(x) = c_0 x^m; \quad g(x) = c_1 x^a; \quad y(x,h) = c_2 x^b f(h) \tag{1.66}$$

Où  $c_0, c_1, c_2, m, a, b$  sont des constantes.

En remplaçant dans l'équation (1.65), on trouve :

$$(a + b) c_1^2 c_2^2 x^{2a+2b-1} f' - c_1^2 c_2^2 x^{2a+2b-1} f f'' = c_0^2 m x^{2m-1} + n c_1^3 c_2 x^{3a+b} f''' \tag{1.67}$$

Afin que cette équation soit homogène on doit avoir :

$$2a + 2b - 1 = 2m - 1$$

$$2a + 2b - 1 = 3a + b$$

$$\text{d'où : } b = \frac{m+1}{2} ; a = \frac{m-1}{2} \quad (1.68)$$

Dans cette situation la variable  $x$  est éliminée.

$$m c_1^2 c_2^2 (f')^2 - \frac{m+1}{2} c_1^2 c_2^2 f f'' = m c_0^2 + n c_1^3 c_2 f''' \quad (1.69)$$

En général,  $c_0$  est donnée mais  $c_1 ; c_2$  sont des constantes arbitraires.

L'homogénéité de l'équation nous permet de poser:

$$\begin{aligned} c_1^2 c_2^2 &= c_0^2 \\ c_1^2 c_2^2 &= n c_1^3 c_2 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = \left( \frac{c_0}{n} \right)^{\frac{1}{2}} ; c_2 = (n c_0)^{\frac{1}{2}} \quad (1.70)$$

L'équation 1.68 prend la forme finale, dite de Falkner Skan, où la fonction  $f$  obéit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0 \quad (1.71)$$

Donnons quelques remarques concernant la constante  $m$ . Pour  $m = 0$ , la vitesse est uniforme le long de la couche limite et l'équation précédente est équivalente à l'équation de Blasius. Il est aussi important de noter qu'il existe une valeur critique de  $m$  égale à  $-0,091$ , en dessous de laquelle la couche limite se sépare de la paroi solide, c'est le phénomène de décollement de la couche limite, d'où la conclusion qu'il ne peut exister de couche limite que pour  $m \in [-0,091, +\infty[$ .

Une autre remarque importante s'impose ici, à savoir qu'au bord d'attaque de la plaque ( $x = 0$ ), l'épaisseur de la couche limite est forcément nulle. Cette condition n'est pas compatible avec l'hypothèse (1.51) ce qui en pratique serait assez peu réaliste, puisque pour  $x = 0$ ,  $U_\infty$  devrait être soit nulle (pour  $m \neq 0$ ) soit infinie (pour  $m = 0$ ). La difficulté vient en réalité du fait que la méthode utilisée ne décrit pas correctement ce qui se passe au voisinage de ce point singulier qu'est le bord d'attaque, où en particulier la similitude des profils de vitesse dans la couche limite n'est pas vérifiée. La validité des résultats donnés par l'équation (1.70) n'est donc assurée qu'à partir d'une certaine distance du bord d'attaque, que l'on peut chiffrer très approximativement à  $10^{-2} x_c$ , où  $x_c$  représente l'abscisse critique, celle du décollement de la couche limite obtenue pour  $m = -0,091$  [37].

Rappelons les conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad ; \quad f'(\infty) = 1 \quad (1.72)$$

$$U_\infty = Cx^m \quad ; \quad y(x, y) = (U_\infty n x)^{\frac{1}{2}} f(h) \quad ; \quad h = y \left( \frac{U_\infty}{n x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.73)$$

## 1.2 Etude thermique

### 1.2.1 Mise en équations

Quant un solide chauffé se trouve immergé par un écoulement de fluide, nous sommes en présence d'un problème de convection. Le cas d'écoulement de couche limite est classé parmi les problèmes de convection forcée. La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne du fluide. La couche limite est d'une importance essentielle dans les transferts thermiques entre le fluide et la paroi. Il existe également une zone mince près de la paroi où les variations de température sont rapides, c'est la couche limite thermique. Connaissant le champ des vitesses, on peut maintenant chercher à résoudre l'équation de l'énergie.

Si on considère que les vitesses sont assez faibles pour que l'on puisse négliger la dissipation visqueuse, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.74)$$

Avec les conditions aux limites :

$$y = 0; T = T_w \quad y \rightarrow \infty; T = T_\infty \quad (1.75)$$

Cette équation est analogue à l'équation dynamique. On introduit la variable réduite, ou température adimensionnelle  $q = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$ , l'équation (1.74) devient alors :

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = a \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \quad (1.76)$$

Par ailleurs sachant que :

$$u = U_\infty f' \quad ; \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n U_\infty}{x}} (h f' - f) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2x} h f'' \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{n x}} f'' \quad (1.77)$$

Par analogie aux égalités écrites dans (1.77) on peut écrire que:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{U_\infty}{2x} h q'' ; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = U \sqrt{\frac{U_\infty}{n x}} q'' \quad (1.78)$$

### 1.2.2 Equation de Pohlhausen

En remplaçant dans l'équation (1.76) les dérivées trouvées dans l'équation (1.78), on obtient l'équation de la chaleur sous forme d'équation différentielle ordinaire :

$$q'' + \frac{1}{2} P_r f q' = 0 \quad (1.79)$$

$P_r$  étant le nombre de Prandtl. Il est égal au rapport de la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. Ce nombre compare la rapidité des phénomènes thermiques par rapport aux phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. L'équation (1.79) est dite de Pohlhausen [19]. Par hypothèse on a considéré que les propriétés physiques du fluide étaient constantes, donc le nombre de Prandtl est constant.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} h = 0 ; f' = 0 ; f = 0 ; q = 0 (T = T_w) \\ h = 1 ; f' = 1 ; q = 1 (T = T_\infty) \end{aligned} \quad (1.80)$$

Au voisinage d'un nombre de Prandtl égal à l'unité on a une égalité empirique [20]:

$$q' = 0.332 \sqrt[3]{P_r} \quad (1.81)$$

Si la diffusion de la quantité de mouvement dans la fluide caractérisée par la viscosité cinématique  $n$  s'effectue mieux que la diffusion de la quantité de chaleur, caractérisée par la diffusion thermique  $a$  : ( $n > a$ ) ceci implique que ( $d > \Delta$ ) autrement dit, la couche limite dynamique est plus importante que la couche limite thermique, (figure 1.1).

L'introduction du nombre de Prandtl  $P_r = \frac{n}{a}$  nous informe sur la nature du fluide en

mouvement. Donnons quelques exemples :

$P_r < 1$  (Air, métaux liquides)  $d < \Delta$ .

$P_r > 1$  (Vapeur d'eau, liquides usuels)  $d > \Delta$

La densité de flux de chaleur à la paroi est définie par:

$$j_p = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (1.82)$$

D'après la définition de la variable réduite  $q$ , on calcule la densité du flux à la paroi :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = -(T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_p = -(T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial q}{\partial h}\right)_p \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_p \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = -(T_w - T_\infty) q'_p \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_p ; \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_p = \frac{\sqrt{R_x}}{x} \quad (1.84)$$

En prenant pour  $q'_p$  la formule empirique,  $q'_p = 0.332 \sqrt[3]{P_r} [31]$  (1.85)

On aboutit à la formule finale de la densité de flux de la chaleur à l'abscisse  $x$  :

$$j_p = 0.332 \frac{k}{x} \sqrt{R_x} \sqrt[3]{P_r} (T_w - T_\infty) \quad (1.86)$$

D'où le coefficient local de convection, ou de transfert thermique  $h$  :

$$h = \frac{j_p}{T_w - T_\infty} = 0.332 \frac{k}{x} \sqrt{R_x} \sqrt[3]{P_r} \quad (1.87)$$

Le nombre de Nusselt local est :

$$N_{ux} = \frac{hx}{k} = 0.332 \sqrt{R_x} \sqrt[3]{P_r} \quad (1.88)$$

### 1.2.3 Etude thermique avec dissipation visqueuse

Considérons maintenant un fluide à propriétés physiques constantes, en présence d'une dissipation d'énergie. Dans ce cas il y a échauffement cinétique. La plaque est en matériau parfaitement isolant, on rajoute donc à l'équation (1.74) un terme de dissipation. L'équation de l'énergie devient alors :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{m}{rC_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (1.89)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$y = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 ; y = \infty \rightarrow T = T_\infty \quad (1.90)$$

Puisqu'il existe une dissipation de la chaleur dans la couche limite, la plaque doit avoir une température  $T_w > T_\infty$ , dite température pariétale de frottement. L'échauffement local d'arrêt est en tout point :

$$\Delta T = T_w - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2C_p} \quad (1.91)$$

Dans ce cas on définit une autre variable de Blasius :

$$q = \frac{T - T_\infty}{U_\infty^2 / 2C_p} \quad (1.92)$$

En portant dans l'équation (1.89), les expressions des vitesses  $u$ ,  $v$  et celles des dérivées, la température est déduite de l'équation (1.92), on arrive sans difficulté à l'équation de la chaleur sous forme d'équation différentielle ordinaire :

$$q'' + \frac{1}{2} P_r f q' + 2P_r (f'')^2 = 0 \quad (1.93)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} h = 0; f' = 0; f = 0; q' = 0; \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = 0 \\ h = \infty; f' = 1; q = 0; T = T_\infty \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

# CHAPITRE 2

## L'entropie

Ce chapitre est consacré à une brève présentation du second principe de la thermodynamique. L'entropie est présentée dans son contexte macroscopique. Les différentes étapes de calcul pour exprimer la production d'entropie ou, la génération de l'entropie dans le cas irréversible d'un écoulement de fluide incompressible avec transfert de chaleur, sont exposées.

### 2.1 Généralités sur la thermodynamique

On garde toujours de la thermodynamique une impression floue, comme si c'était une partie de la physique qui échappait partiellement à la démonstration et au raisonnement et comme le dit si bien Arnold Sommerfeld\* : *« La thermodynamique est un sujet curieux. La première fois qu'on l'aborde, on ne la comprend pas du tout. La deuxième fois, on pense qu'on la comprend, sauf l'un ou l'autre point. La troisième fois, on sait qu'on ne la comprend pas, mais à ce stade on est tellement habitué qu'on ne s'en préoccupe plus »*

Traditionnellement on associe la naissance de la seconde loi de la thermodynamique à Sadi Carnot (1796-1832), [14] mais il mourut avant la formulation de ce principe. En fait la thermodynamique est la partie de la physique qui étudie les phénomènes thermiques (chaleur, température...) et leur lien avec la mécanique, et la chimie. Le mot thermodynamique a été introduit pour la première fois par William Thomson en (1882), [15]. Fahrenheit (1686-1736), a produit le premier thermomètre, ce qui a rendu possible une étude quantitative systématique de la température et de la chaleur.

**\*Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld** (1868 –1951), physicien théoricien allemand, né à Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad, en Russie).

Quand des corps à différentes températures sont mis en contact et que tous les changements aient cessé, un thermomètre placé en contact avec chaque corps donne la même lecture. C'est une observation des plus importantes. En effet il a été reconnu depuis, qu'il y a un "**principe zéro**" de la thermodynamique qui stipule que deux systèmes thermodynamiques en équilibre avec un troisième sont en équilibre entre eux.

Cela veut dire aussi que pour qu'il y ait transfert d'énergie, il faut une différence de température, les premier et deuxième principes de la thermodynamique avaient été déjà formulés. Joseph Black (1728-1799), a beaucoup fait pour clarifier ceci ainsi que d'autres questions concernant la nature de la chaleur et de la température. Son travail a été édité en (1803) dans *Lectures on the elements of chemistry*. L'auteur distingue clairement entre la quantité et l'intensité de la chaleur, c.-à-d., entre la chaleur et la température. Il a également présenté le concept de la capacité calorifique et les propriétés thermiques des substances. Cependant, il y avait toujours une grande division d'opinion au sujet de la nature de la chaleur. Isaac Newton considérait que la chaleur ne peut être que le choc entre les particules en mouvement chaotique à l'intérieur de la matière. Tandis que quelques scientifiques en ce temps-là pensaient de la chaleur comme étant *une substance appelée la matière de la chaleur* ou comme un fluide porteur (Plus tard il sera appelé *calorique*).

A cette époque, Benjamin Thomson (1753-1814), a commencé ses importantes expériences sur la nature de la chaleur. Son expérience consistait à brasser de l'eau à l'intérieur d'un cylindre. Ce qui provoquait une augmentation de la température. Ses expériences ont bien montré le lien entre travail et chaleur. Le fait que le frottement pouvait générer de la chaleur, cinq années plus tard (1840) Joule présenta un article à la (*Royal Society*) où il donna une étude plus détaillée que celle de Thomson. C'est le **premier principe** de la thermodynamique qui introduit le dogme de la conservation d'énergie et de l'équivalence entre travail (W) et chaleur (Q) mesurés en Joules (J). Une turbine ou un piston transforment de la chaleur en travail. Dans un système fermé le bilan énergétique ( $W+Q=0$ ) est nul par définition, ce qui rend impossible tout mouvement perpétuel sans apport externe d'énergie dès lors qu'il y a travail. C'est pour l'énergie qu'est absolument vrai qu'une augmentation d'un côté se traduit par une diminution de l'autre. L'énergie se conserve (mécanique, thermique, chimique, électromagnétique), elle ne peut être ni créée, ni détruite mais elle se transforme. L'énergie se définit ainsi comme une constante numérique, ce qui implique de toujours

chercher, dans un bilan énergétique, où est passé l'énergie manquante (sous forme de chaleur et de rayonnement). Car si l'énergie se conserve, elle se transforme aussi et dans sa transformation il y a de la perte. Il n'y a jamais transformation intégrale dans une seule forme d'énergie mais toujours des fuites plus ou moins importantes dans les autres formes, ce qui débouche sur le second principe.

Le **second principe** est celui qui nous intéresse, car, si le premier principe énonce une conservation de l'énergie qui semble en contradiction avec notre expérience quotidienne, le second confirme qu'il y a toujours des phénomènes de frottement, de diffusion, que l'on considère comme des pertes d'énergie utilisable, c'est-à-dire qu'on peut transformer en travail. L'énergie ne se conserve pas dans sa forme originelle mais se transforme et se divise. On expérimente constamment que l'entropie d'un système isolé augmente, c'est-à-dire que l'énergie, bien que toujours présente, y est de moins en moins concentrée et disponible. Seule la différence de niveau d'énergie (de température) est utilisable, différence qui tend à s'estomper, à revenir à l'équilibre d'une moyenne en se dissipant ou en se mélangeant. Ce que le second principe énonce c'est que l'entropie n'est pas l'énergie.

Le terme *entropie* a été forgé en 1865 par le physicien allemand Clausius [16] à partir de la racine grecque *tropi* qui évoque l'idée de transformation ou de retour en arrière. Il introduisit cette grandeur afin de caractériser mathématiquement l'irréversibilité de processus physiques tels qu'une transformation de travail en chaleur.

A l'origine, l'entropie désigne le phénomène de l'échange thermique qui égalise les températures ou la dissipation de l'énergie en chaleur, mais c'est une loi bien plus générale et qui n'est pas si facile à interpréter. On peut même considérer comme Einstein\* que c'est le principe le plus important de la physique. En tout cas, c'est l'existence de l'**entropie** qui pose problème, suscitant de nombreuses interprétations. **L'entropie n'est pas l'énergie**, car il y a toujours perte et création d'ordre alors qu'il n'y a jamais création d'énergie.

Au début du 19<sup>ième</sup> siècle, Carnot et Clausius étaient les fondateurs de la thermodynamique. Tout a commencé par la conception des machines à vapeur, dont le but était d'extraire de l'énergie motrice et de la chaleur, d'où le nom de thermodynamique, associant thermique et dynamique à la fois. Cela a incité les chercheurs à vouloir passer d'une forme d'énergie vers une autre, la thermodynamique est devenu alors, la science des passages d'une forme d'énergie à une autre.

\* **Albert Einstein** (1879- 1955), éminent Physicien Allemand.

Ainsi dans une résistance électrique, par exemple, l'énergie électrique est transformée en chaleur, ou encore, de l'énergie électrique peut être produite à partir de l'énergie éolienne, solaire et nucléaire. L'énergie se conserve, c'est le premier principe de la thermodynamique, mis en évidence par la fameuse expérience de Joule [20].

Les expériences ont montré qu'il est facile de transformer un travail en chaleur (*frottements*), alors que l'inverse est beaucoup plus difficile. Par ailleurs une centrale nucléaire ne transforme pas plus du tiers de chaleur dégagée dans le réacteur en énergie électrique, le théorème de Carnot, donne une limite supérieure à ce rendement, qui est égale à la différence de température entre les sources chaudes, et froides, divisé par la température de la source chaude. Pour avoir un ordre de grandeur, prenons les températures de 473K, (200°C) et 293K (20°C) respectivement pour les sources chaude et froide, cela conduit à un rendement maximal de 38%, ce qui n'est guère appréciable. Tout cela vient du fait que la chaleur est une forme d'énergie *désordonnée*, ce n'est autre que l'agitation dans tout les sens des molécules, la température étant la mesure de l'état d'agitation des molécules.

Le travail, lui, est une forme d'énergie *ordonnée*, ainsi dans un fil parcouru par un courant électrique, les électrons se déplacent avec un mouvement d'ensemble ordonné, produisant du travail électrique. Cette dualité ordre, désordre est fondamentale en thermodynamique, ce qui va entraîner celle-ci dans des considérations proches de la philosophie. De cela est naît la notion d'entropie, qui est la *mesure du désordre*, et qui postule aussi que toute transformation va vers l'état le plus probable. Etymologiquement parlant, l'entropie est synonyme de transformation (du grec "entropê" qui signifie, " cause d'évolution "). Pour Clausius, cela signifie que dans un système quel qu'il soit, la chaleur d'une source est toujours transmise à la source froide, jamais l'inverse (encore la direction est vers l'état le plus probable). On ne pourrait s'empêcher de faire un lien entre la notion d'entropie et les transformations, dites irréversibles. Au début, les physiciens ne s'occupaient que des états d'équilibre, on peut alors définir des variables d'états, telles que volume, température ou pression. Toute transformation où les variables d'états restent définies à tout instant est une transformation réversible, qui est une suite d'états d'équilibre. En réalité ce n'est qu'un modèle, utile pour les calculs, mais irréalisable. Les transformations réelles, sont toujours hors d'équilibre et irréversibles et obéissent au second principe [21].

L'irréversibilité des transformations réelles provient de l'existence des frottements. S'il existe une différence de température à l'intérieur du système, la chaleur va passer de la partie chaude vers la partie froide de façon irréversible. Le deuxième principe est défini que si dans un système il y a échange de chaleur avec le milieu extérieur, il s'accompagne toujours d'un échange d'entropie égal au quotient de la chaleur échangée par la température absolue de la frontière où a lieu l'échange.

$$\Delta S = \frac{Q_c}{T} \quad (2.1)$$

C'est un principe d'évolution qui établit l'irréversibilité. Nous pouvons énoncer la loi suivante: *toute transformation d'un système thermodynamique s'effectue avec une augmentation du désordre global incluant le désordre du système et le désordre du milieu extérieur. On dit encore qu'il y a création d'entropie: car la fonction d'état  $S$ , est une mesure du désordre [21].*

$$\Delta S_{\text{global}} = \Delta S_{\text{création}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{ext}} \geq 0. \quad (2.2)$$

Si la transformation est réversible, la création d'entropie est nulle.

## 2.2 La génération d'entropie

Nous avons défini une transformation réversible, comme étant une suite d'états d'équilibre. Nous pouvons considérer que cette transformation est une suite d'états infinitésimaux où à chaque état correspond une température  $T_i$  et un transfert de chaleur  $dQ_i$ , durant cette transformation nous pouvons aussi évaluer la somme  $\sum_{i=1}^N \frac{dQ_i}{T_i}$ ,  $N$  étant le nombre d'états infinitésimaux. Si réellement les états sont très petits, on passe d'un système discret à un système continu, et le sigma devient une intégrale  $\int \frac{dQ}{T}$ . On accepte le postulat annonçant que la quantité intégrée représente une propriété du système physique, que l'on note par la lettre  $S$  tels que  $dS = \frac{dQ}{T}$ . En passant d'un état 1 à un état 2, la variation de l'entropie pour une transformation réversible n'est autre que :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}. \quad (2.3)$$

Si la transformation est irréversible on doit rajouter un terme à l'équation précédente, tel que :

$$dS = \frac{dQ}{T} + dS_{gen}. \quad (2.4)$$

Dans cette dernière équation, le terme  $dS_{gen}$  représente l'entropie produite, ou générée par toute forme d'irréversibilité, frottement, transfert thermique ou autres transformations incontrôlables. La variation d'entropie devient :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_{1-2gen}. \quad (2.5)$$

On se propose dans ce qui suit de calculer cette production d'entropie dans le cas d'un écoulement de fluide en présence de transfert de chaleur. Considérons un point  $(x, y)$  du fluide de *volume*  $dx \times dy$ . Pour ne pas alourdir les calculs, l'écoulement est considéré à deux dimensions. L'élément de fluide est traversé par un flux de chaleur et de masse suivant les deux directions, figure 2.1. Le taux de l'entropie produite par unité de volume  $S_{gen}$  ( $\text{W}/\text{m}^3\text{K}$ ) [22], est estimé en écrivant le second principe de la thermodynamique.

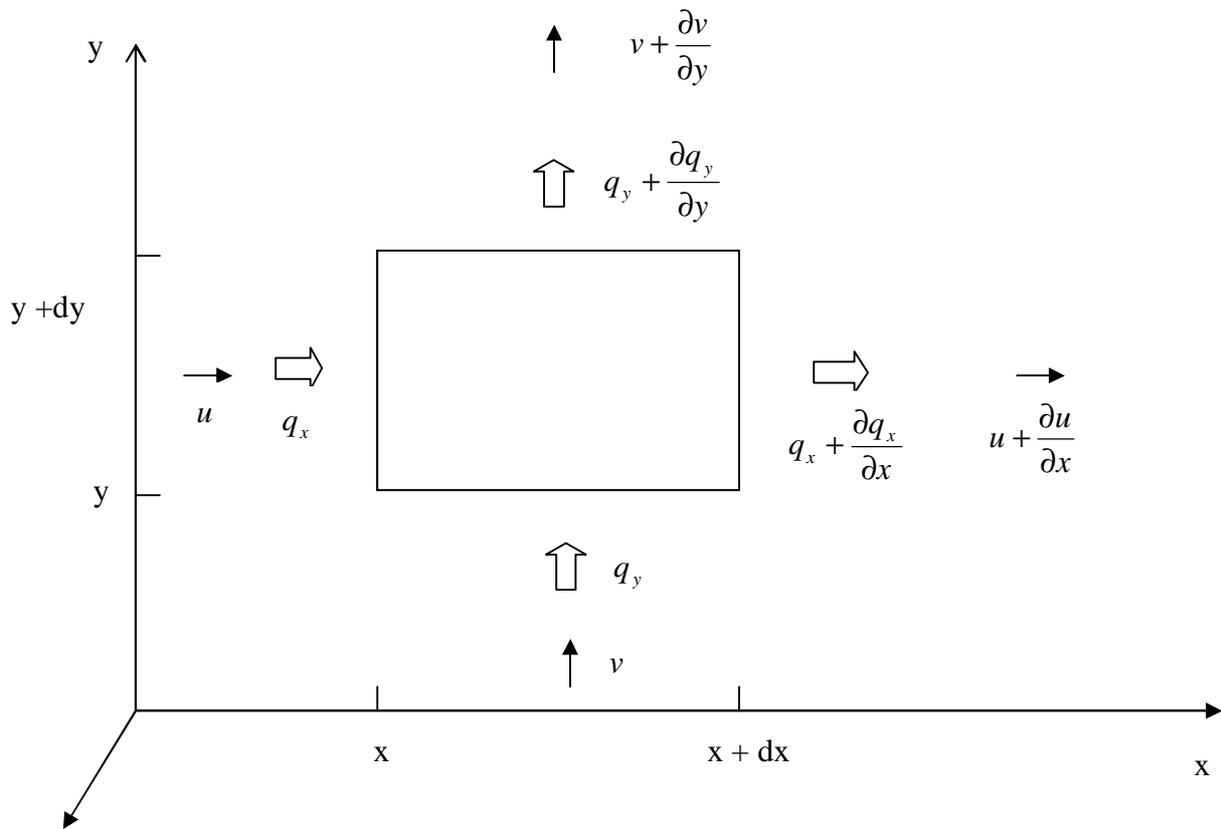


Figure 2.1 Elément de fluide traversé par un flux de chaleur et de masse.

$$\left. \begin{aligned}
 S_{gen} = & \frac{q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx}{T + \frac{\partial T}{\partial x}} dy + \frac{q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy}{T + \frac{\partial T}{\partial y}} dx - \frac{q_x}{T} dy - \frac{q_y}{T} dx \\
 & + \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \left( r + \frac{\partial r}{\partial x} dx \right) dy \\
 & + \left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \left( r + \frac{\partial r}{\partial y} dy \right) dx \\
 & - S v_x r dy - S v_y r dx + \frac{\partial(rS)}{\partial t} dx dy
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Dans cette expression, les quatre premiers termes représentent l'entropie associée au transfert de chaleur, les quatre termes suivants représentent l'entropie transportée par convection à travers le volume de contrôle  $dx dy$ . Le dernier terme représente l'accumulation temporelle de la production d'entropie.

En divisant par  $dx dy$ , l'équation (2.6) devient :

$$S_{gen} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{T^2} \left( q_x \frac{\partial T}{\partial x} + q_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + r \left( \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) + s \left( \frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \quad (2.7)$$

On peut noter que le dernier terme n'est autre que l'équation de conservation de la masse, donc il est identiquement nul. En notation vectorielle, l'équation (2.7) prend la forme :

$$S_{gen} = \frac{1}{T} \mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T + r \frac{DS}{Dt} \quad (2.8)$$

Avec :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

En faisant appel au premier principe de la thermodynamique, la variation de l'énergie interne par unité de volume est :

$$r \frac{De}{Dt} = -\mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{q} - P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + m\Phi \quad (2.9)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (2.9) représente le transfert thermique par conduction, le deuxième n'est autre que le travail de compression, et le dernier est associé à la dissipation visqueuse équivalente à la transmission de l'énergie due aux frottements internes du fluide. Rappelons la forme différentielle de l'énergie interne et celle de l'entropie :

$$du = T ds + P d \left( \frac{1}{r} \right) \quad \text{et} \quad r \frac{DS}{Dt} = \frac{r}{T} \frac{Du}{Dt} - \frac{P}{rT} \frac{Dr}{Dt} \quad (2.10)$$

En combinant ces deux équations on obtient :

$$S_{gen} = -\frac{1}{T} \mathbf{r} \cdot \nabla T + \frac{m}{T} \Phi \quad (2.11)$$

Avec :  $\mathbf{q} = -k \cdot \nabla T$

La forme finale de la production d'entropie par unité de volume est:

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{m}{T} \Phi \quad (2.12)$$

Pour un système de coordonnées cartésiennes à deux dimensions, on écrit :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{m}{T} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2.13)$$

Les deux paramètres physiques qui créent l'irréversibilité sont clairement identifiés dans cette équation, le phénomène de conduction traduit par le coefficient de conductivité  $k$ , et le frottement traduit par le coefficient de viscosité  $m$ . Cette forme quadratique de la production d'entropie montre qu'elle est toujours positive et finie. Nous voyons bien que la formule de la production d'entropie comporte deux termes : l'un est lié au transfert thermique, l'autre au frottement visqueux. Une remarque importante, est de déterminer l'ordre de grandeur d'un terme par rapport à l'autre. Cette issue exige un certain soin puisque, dans un grand nombre de problèmes de convection thermique le deuxième terme concernant la dissipation visqueuse  $m\Phi$  est négligé. On écrit alors:

$$S_{gen} = S_{gen}(\text{transfert thermique}) + S_{gen}(\text{frottement du fluide}) \quad (2.14)$$

A cette étape de calcul on introduit une fonction dite : *distribution d'irréversibilité* que l'on note  $f$  [22]. Cette fonction mesure le degré de l'irréversibilité causé par les deux parties, l'une par rapport à l'autre tel que :

$$f = \frac{S_{gen}(\text{frottement du fluide})}{S_{gen}(\text{transfert thermique})} \quad (2.15)$$

Dans l'annexe C nous présenterons une équation générale de la production d'entropie.

# CHAPITRE 3

## Position du problème et Modèle mathématique

### 3.1 Le système physique étudié

Le système physique étudié, illustré par la figure 3.1, est un dièdre plan, symétrique, à parois chauffées, dont l'angle au sommet est égal à  $\rho b$ . Un écoulement de couche limite laminaire à trois dimensions se développe autour de ce dièdre. La présence de transfert de chaleur des parois solides vers le fluide, impose l'introduction de l'équation de l'énergie en plus des équations de mouvement de couche limite. L'introduction de l'équation de la production d'entropie est pour répondre à la question clef du problème, à savoir : y a-t-il un angle du dièdre, soit une valeur de  $b$  pour laquelle le système physique est optimal du point de vue dynamique et thermique. Par optimal on entend, un meilleur rendement traduit par, un meilleur transfert thermique, et un minimum de frottement.

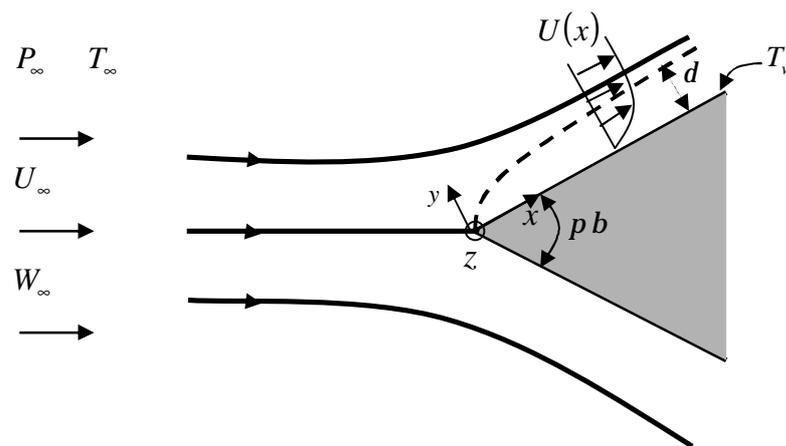


Fig 3.1 Représentation schématique du système physique.

### 3.2 Equations

Les équations gouvernantes sont, l'équation de continuité, les équations de couche limite, l'équation de l'énergie et l'équation de la production d'entropie. Ces équations sont regroupées dans le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = W_{\infty} \frac{\partial W_{\infty}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{m}{T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

Avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} y = 0; & u = v = w = 0; & T = T_w \\ y = \infty; & u = U_{\infty}; & w = W_{\infty}; & T = T_{\infty} \end{cases} \quad (3.6)$$

Vu la complexité de la géométrie, on a opté de résoudre ce système d'équations différentielles par la méthode de Runge-Kutta au quatrième ordre. La méthode numérique sera largement exposée au chapitre suivant.

### 3.3 D'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires

Au premier chapitre nous avons présenté le calcul basé sur une similitude des profils des vitesses, ce sont des fonctions qui permettent de passer d'un système d'équations

différentielles aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires. Dans ce qui suit nous présentons succinctement ces fonctions.

### 3.3.1 Transformations auto similaires

Au voisinage du bord d'attaque du dièdre, la vitesse externe varie en loi de puissance avec la coordonnée longitudinale  $x$ , soit :  $U_{\infty}(x) = C x^m$ . On démontre dans la bibliographie spécialisée [23], qu'il n'existe de solutions pour ce genre de problème, que si la vitesse en amont du système physique considéré est une puissance de l'abscisse longitudinale  $x$ , l'exposant est noté  $m$ , il est lié au paramètre  $b$  par la relation:  $m = \frac{b}{2-b}$  ; aussi  $W_{\infty}$  vitesse loin des parois du dièdre suivant la direction de l'axe  $Oz$ , ( figure 3.1) doit être une constante. On introduit alors la fonction  $f$  de la variable  $h$ , ainsi que la fonction de courant  $y(x, y)$ , on définit  $h$  comme étant une distance perpendiculaire à la paroi solide normalisée par une longueur construite à partir de la variable  $x$  [23]. Les nouvelles variables  $h$  et  $f$  sont, respectivement proportionnelles à  $y$  et  $y'$ . Ce changement de variable parvient à une solution du système d'équations satisfaisant aux conditions aux limites imposées, les résultats obtenus sont en parfait accord avec l'expérience [31].

$$h = y \sqrt{\frac{(m+1)U_{\infty}}{2n x}} ; \quad f(h) = \frac{y(x, y)}{U_{\infty} x} \sqrt{\frac{(m+1)U_{\infty} x}{2n}} \quad (3.7)$$

$$u = U_{\infty} f' ; \quad w = W_{\infty} g \quad (3.8)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2n U_{\infty}}{(m+1)x}} \left( \frac{m+1}{2} f + \frac{m-1}{2} h f' \right) \quad (3.9)$$

On cherche une solution de la température ayant la forme suivante [24]:

$$T = T_{\infty} + \Delta T q_1(h) + \frac{U_{\infty}^2}{C_p} q_2(h) + \frac{W_{\infty}^2}{C_p} q_3(h) \quad (3.10)$$

Où  $f, g, q_1, q_2, q_3$  sont solutions du système d'équations ordinaires.

En appliquant ces transformations au système d'équations différentielles (3.1-3.5), on obtient le système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$f''' + ff'' + b(1 - f'^2) = 0 \tag{3.11}$$

$$g'' + fg' = 0 \tag{3.12}$$

$$q_1'' + P_r f q_1' = 0 \tag{3.13}$$

$$q_2'' + P_r f q_2' + P_r f'^2 = 0 \tag{3.14}$$

$$q_3'' + P_r f q_3' + P_r g'^2 = 0 \tag{3.15}$$

Avec les conditions aux limites :

$$h = 0 ; f = f' = g = 0 ; q_1 = 1, q_2 = q_3 = 0 \tag{3.16}$$

$$h = 1 ; f' = g = 1 ; q_1 = q_2 = q_3 = 0 \tag{3.17}$$

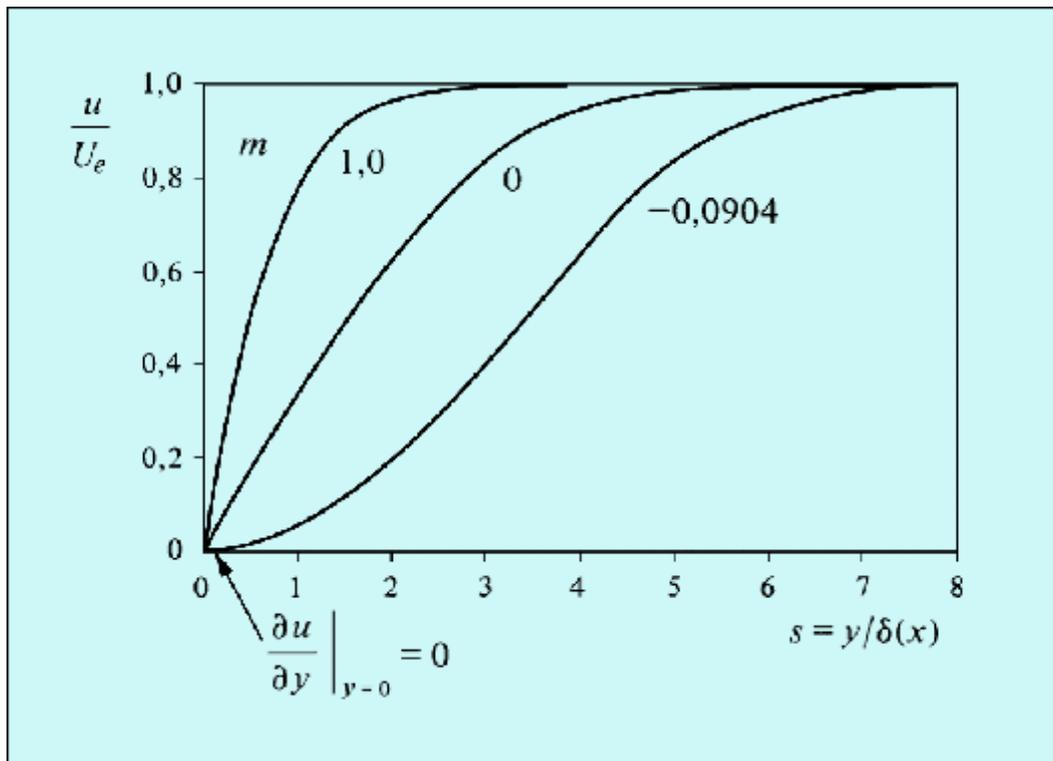


Fig 3.2 Variation de la vitesse longitudinale selon certaines valeurs de l'exposant m.

La figure 3.2 représente les variations de la vitesse longitudinale  $u$  normalisée par la vitesse  $U_e$  loin des parois du dièdre ( $U_e = U_\infty$ ), en fonction de l'ordonnée  $y$  normalisée par l'épaisseur de la couche limite  $d(x)$ . L'examen des solutions de l'équation de Falkner-Skan, en présence de la décélération ( $m < 0$ ), montre que les profils de vitesse ont un point d'inflexion (pour  $m = 0$ ), le point d'inflexion est situé à la paroi). Les courbes de la figure 3.2 sont tracées pour trois valeurs importantes de l'exposant  $m$ . Nous avons déjà montré que pour  $m = 0$  l'angle du dièdre est fermé, ce qui correspond au cas de la plaque plane. Pour  $m = 1$  nous sommes en présence de l'écoulement de stagnation. Quant au dernier cas, celui où  $m = -0.0904$  correspondant au cas limite de l'existence de la couche limite, en dessous duquel le fluide se sépare de la paroi solide, c'est le phénomène du décollement de la couche limite. La condition du décollement de la couche limite est inscrite sur la figure 3.2 : on a

$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ . Si  $m < -0,0904$  le gradient de vitesse à la paroi change de signe  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) < 0$ , il y

renversement de l'écoulement à la paroi. Ce décollement est en général associé à un épaissement très important de la couche limite et également à l'apparition d'instabilités. Les approximations que nous avons faites pour décrire la couche limite ne s'appliquent plus alors. La conséquence essentielle pour les applications est que la vitesse dans la couche limite décroît considérablement (beaucoup plus vite que la décélération imposée par l'écoulement potentiel externe) et la pression croît également rapidement dans la direction de l'écoulement moyen.

### 3.4 Production d'entropie

L'écriture du second principe de la thermodynamique pour un système physique passant d'un état (1) à un état (2) est:  $S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}$  (3.18)

Le premier terme représente la variation de l'entropie, le deuxième terme le transfert d'entropie.

La génération d'entropie est définie par:

$$S_{gen} = S_2 - S_1 - \int_1^2 \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (3.19)$$

En se referant à A.Bejan [22], on écrit :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{m}{T} \Phi \quad (3.20)$$

En appliquant les approximations de la couche limite, l'équation se simplifie et on obtient alors :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{m}{T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

Le premier et le deuxième terme représentent respectivement l'entropie produite par les pertes d'énergie causées par le transfert thermique et les frottements. L'expression (3.20) doit être normalisée comme suit :

$$x^* = \frac{x}{L} ; y^* = \frac{y}{d} ; q(h) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (3.22)$$

Où L est une longueur caractéristique et d l'épaisseur de la couche limite.

On définit les quantités suivantes:

$$\Delta T = T_w - T_\infty ; \Omega = \frac{\Delta T}{T_\infty} ; B_r = Pr E ; f = \frac{B_r}{\Omega} \quad (3.23)$$

$B_r$  représente le nombre de Brinkman qui, physiquement est équivalent au rapport de la chaleur produite par dissipation des forces visqueuses sur la chaleur transférée par conduction.  $f$  est la fonction définie par l'équation (2.15).

En divisant par  $\Delta T$  l'expression de la température, (équation (3.10)) on obtient la température sans dimensions :

$$q(h) = q_1(h) + E_1 q_2(h) + E_2 q_3(h) \quad (3.24)$$

$E_1$  et  $E_2$  sont des nombres d'Eckert définis comme suit:

$$E_1 = \frac{U_\infty^2}{C_p \Delta T}; E_2 = \frac{W_\infty^2}{C_p \Delta T} \quad (3.25)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.26)$$

L'expression de la production d'entropie devient:

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ (\Delta T \cdot q')^2 \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \frac{m}{T} \left[ U_\infty^2 f'^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + W_\infty^2 g'^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.27)$$

Posons :

$$Q = \frac{W_\infty}{U_\infty} \quad (3.28)$$

Nous allons appliquer les approximations de la couche limite à l'équation de la production d'entropie (3.27). Sachant que l'épaisseur de la couche limite est très petite par rapport à la longueur caractéristique, soit  $d \ll L$ . Calculons les dérivées de  $h$  par rapport à  $x$  et à  $y$  :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial h}{\partial x^*} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial h}{\partial y^*} \quad (3.30)$$

Ce qui est équivalent à,  $\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \ll \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)$

L'équation (3.27) devient :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} (\Delta T \cdot q')^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{m}{T} U_\infty^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 (f'^2 + Q^2 \cdot g'^2) \quad (3.31)$$

Le terme  $k\Omega^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2$  possède la dimension d'une entropie. Divisons par ce terme l'équation

(3.31), on obtient la formule de la production d'entropie normalisée, ou nombre entropique spécifique au système physique considéré. Nous avons abouti à une formule de la production d'entropie sans dimension caractérisant un écoulement de couche limite tridimensionnel avec transfert de chaleur autour d'un dièdre plan d'angle au sommet  $pb$ .

$$N_s = \left( \frac{q'}{1 + \Omega q} \right)^2 + \frac{f}{1 + \Omega q} (f''^2 + Q^2 \cdot g'^2) \quad (3.32)$$

Les conditions initiales des fonctions  $q'_1, q'_2, q'_3, f', f'', g'$  obtenues par la méthode du tir indispensables pour la résolution numérique du système d'équations ordinaires, sont indiquées dans l'annexe A.

# CHAPITRE 4

## Méthode numérique

### 4.1 Introduction

Le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses est celui de la résolution des équations différentielle. Cela vient du fait que toute modélisation mathématique d'un, ou de plusieurs phénomènes physiques, est décrite par une, ou un système d'équations différentielles. Vu que la majorité, pour ne pas dire la totalité des phénomènes physiques ne sont pas linéaires, il n'existe pas de solutions analytiques pour ces problèmes. Nous sommes obligé de chercher des solutions approchées de la solution exacte (analytique). La, ou les solutions de ces équations sont déduites par une approche numérique adéquate. Ce chapitre est consacré au développement de la méthode numérique utilisée pour la résolution du système d'équations non linéaire obtenu au chapitre précédent.

Les équations différentielles se divisent en deux familles, les équations différentielles aux dérivées partielles, et les équations différentielles ordinaires. La différence entre les deux est que, dans les équations différentielles ordinaires ne figure qu'une seule variable indépendante, d'où l'existence d'une dérivée totale.

Toute méthode numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles représentant un phénomène physique, a pour objectif de faire passer le domaine continu (*physique*), en un domaine discret (*mathématique*). L'équation différentielle est remplacée par une ou plusieurs équations algébriques, qui sont nécessairement plus faciles à résoudre.

Le problème qu'on résout dans le cadre de ce travail est classé parmi les problèmes dits, aux conditions aux limites, (*Boundary Value Problem*) [25]. L'usage et la logique mathématique font que l'on a tendance à simplifier. Ce que les mathématiciens nous imposent généralement à faire, est de passer d'un problème aux conditions aux limites, à un problème aux conditions initiales (*Initial Value Problem*), beaucoup plus simple à résoudre. Mais pour cela, nous devons utiliser en plus de la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre

(Rk4) très connue pour ce genre de problème, une méthode supplémentaire dite de tir (*Shooting Method*) [25], qui nous permet précisément d'aboutir aux conditions initiales, absolument nécessaires pour faire démarrer l'algorithme de Runge-Kutta, et en déduire les solutions de notre système d'équations.

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode d'Euler, celle de Runge-Kutta d'ordre quatre, la méthode de tir et le programme fortran utilisé pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires modélisant le problème physique étudié. Le lecteur trouvera des informations complémentaires dans l'annexe B.

## 4.2 Méthode d'Euler (1768)

C'est la méthode qui est de loin la plus simple pour résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre un à une condition initiale. Elle a une bonne interprétation géométrique et son emploi est facile. L'inconvénient est néanmoins qu'elle est peu précise. Toutefois, elle est recommandée pour ceux qui veulent s'initier dans le domaine de l'analyse numérique [26].

On appelle équation différentielle ordinaire, une équation, ou un système d'équations, dont les fonctions et leurs dérivées successives ne dépendent que d'une seule variable. On appelle ordre de l'équation, le plus fort degré de dérivation apparaissant dans l'équation. Une équation différentielle est dite linéaire, si elle est écrite sous forme d'une combinaison linéaire à (coefficients constants) de dérivées successives des inconnues.

Elle s'écrit de la façon suivante :

$$y'_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{4.1}$$

Le passage au domaine discret se fait par un développement en série de Taylor de la solution  $y(t_{i+1})$  autour de  $t = t_i$ . On écrit alors :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!} \frac{d^2 y(t_i)}{dy^2} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^3}{3!} \frac{d^3 y(t_i)}{dy^3} + \dots \tag{4.2}$$

Généralement on arrête le développement à un ordre qui dépend de la précision voulue.

Si on fait un développement d'ordre deux, on écrit [32]:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!} \frac{d^2 y(z_i)}{dt^2} \tag{4.3}$$

Avec  $t_i \leq z \leq t_{i+1}$  :

On pose  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$  alors :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \left( \frac{dy}{dt} \right)_i + O(\Delta t^2) \tag{4.4}$$

$O(\Delta t^2)$  est appelée erreur de troncature, et est bornée, ce qui est équivalent d'écrire :

$O(\Delta t^2) \leq k\Delta t^2$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $k$  étant une constante réelle positive, on écrit alors :

$$y_{i+1} \approx y_i + \Delta t \frac{dy}{dt} \tag{4.5}$$

On obtient alors le schéma d'Euler, qui s'écrit sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(y_i, t_i) \tag{4.6}$$

Le but est d'appliquer la méthode de Runge-Kutta, qui est très recommandée pour ce genre de problème. Elle nous permet d'aboutir à des solutions approximatives avec une grande précision. Les détails de cette méthode concernant les différents schémas numériques, et leur stabilité ne seront pas abordés. Le lecteur pourra consulter la littérature [32].

### 4.3 Méthode de Runge-Kutta (1895)

Les méthodes de Runge-Kutta, sont une généralisation de la méthode d'Euler. Ce sont des méthodes très utilisées, qui ont l'avantage d'être faciles à programmer, et surtout d'être stables (peu d'erreurs) et d'une grande précision [33]. Ce sont des méthodes à pas unique, directement dérivées de la méthode d'Euler, elles ont surtout l'immense avantage de ne pas demander autre chose que de connaître que les conditions initiales pour démarrer. Cependant un léger inconvénient, du fait qu'elles soient assez consommatrices en temps de calcul. Cette famille de méthodes explicites plus efficaces et plus pratiques que les méthodes d'Euler, est basée sur le schéma numérique suivant :

$$y_{i+1} = y_i + \Gamma(y_i, t_i, \Delta t) \Delta t \tag{4.7}$$

Avec  $\Gamma$ , la fonction incrément, et qui s'écrit :  $\Gamma = \sum_{i=1}^n a_i k_i$  (4.8)

$a_i$  étant des constantes, et les  $k_i$  sont définis par :

$$k_1 = f(y_i, t_i)$$

$$k_2 = f(y_i + q_{1,1} k_1 \Delta t, t_i + p_1 \Delta t)$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f(y_i + q_{2,1}k_1\Delta t + q_{2,2}k_2\Delta t, t_i + p_2\Delta t) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 k_n &= f(y_i + q_{n-1,1}k_1\Delta t + q_{n-2,2}k_2\Delta t + \dots q_{n-1,n-1}k_{n-1}\Delta t, t_i + p_{n-1}\Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Avec n l'ordre désiré de la méthode de Runge-Kutta qui sera explicitement déterminé une fois que les constantes  $a_j, p_j, q_{j,k}$  seront connues. Pour intégrer numériquement un système différentiel, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, part d'un état initial  $x(t_0)$ , le pas d'intégration  $\Delta t$  étant donné, elle calcule itérativement les quantités suivantes:

$$x(t_0 + \Delta t), x(t_0 + 2\Delta t), x(t_0 + 3\Delta t), \dots, x(t_0 + k\Delta t)
 \tag{4.10}$$

En sollicitant la fonction  $f(x)$  quatre fois à chaque pas  $\Delta t$ .

Elle est précise quand  $\Delta t$  est suffisamment petit, puisque l'erreur cumulée entre deux valeurs de  $t$  fixées est approximativement proportionnelle à la puissance 4 de  $\Delta t$ , mais la méthode diverge si  $\Delta t$  est trop grand. Pour donner une idée sur l'ordre de grandeur de l'erreur commise en appliquant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, on propose le tableau 4.1. En considérant un micro-ordinateur IBM ayant une erreur arithmétique en simple précision égale à  $1.19 \times 10^{-7}$ , dans le cas d'une double précision, elle vaut  $2.22 \times 10^{-16}$ , l'erreur totale commise est donnée par, [34] :

$$\frac{\text{L'erreur arithmétique}}{\Delta t_0} + (\Delta t_0)^n
 \tag{4.11}$$

Le second membre de l'expression (4.11) est l'erreur de troncature.

$n$	$\Delta t_0$	Erreur totale
1	$1.5 \times 10^{-8}$	$1.5 \times 10^{-8}$
2	$6.1 \times 10^{-6}$	$3.7 \times 10^{-11}$
3	$1.2 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-12}$
4	$7.4 \times 10^{-4}$	$3.0 \times 10^{-13}$
5	$2.4 \times 10^{-3}$	$9.0 \times 10^{-14}$

Tableau 4.1 Erreur totale pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.

### 4.3.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre

Pour ne pas alourdir le texte nous donnons dans ce qui suit une description succincte des résultats de la méthode RK4:

On part de la formule d'Euler, qui donne :  $y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n)$ , et  $x_{n+1} = x_n + h$

La méthode RK du quatrième ordre produit quatre coefficients  $k_1, k_2, k_3, k_4$  tel que :

$$k_1 = h * f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h * f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h * f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h * f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5) \tag{4.12}$$

Une représentation géométrique de l'algorithme de Runge-Kutta est donnée sur la figure 4.1.

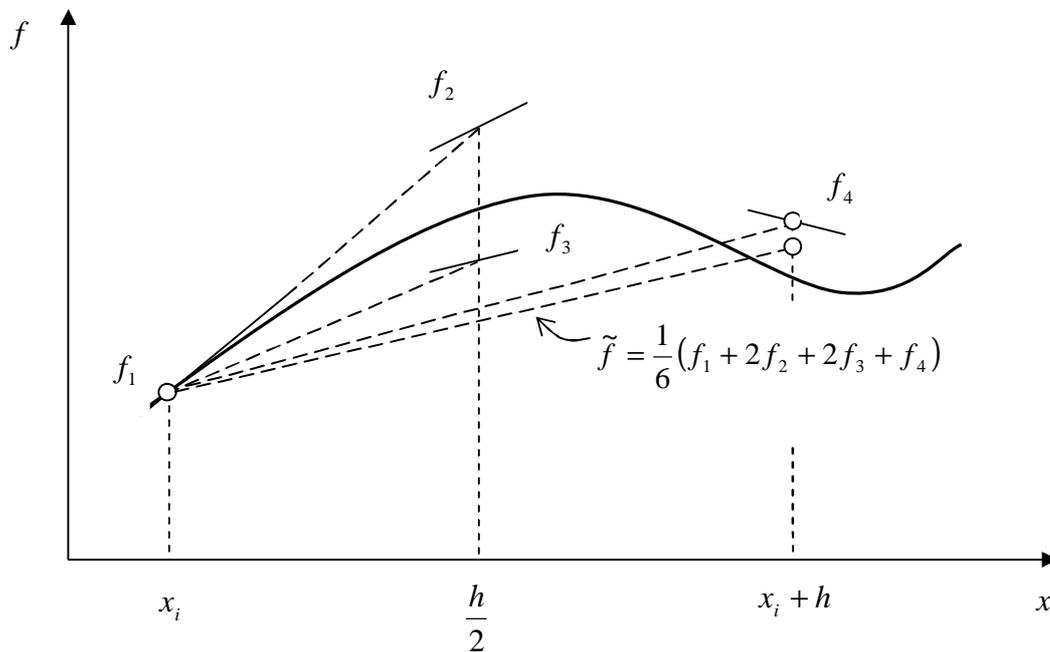


Figure 4.1 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre.

- $k_1$  est la pente au début de l'intervalle ;
- $k_2$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $k_1$  pour calculer la valeur de  $y$  au point  $x_n + \frac{h}{2}$  par le biais de la méthode d'Euler;
- $k_3$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente  $k_2$  pour calculer  $y$ ;
- $k_4$  est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $y$  calculée en utilisant  $k_3$ .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

$$pente = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (4.13)$$

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de  $h^5$ , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de  $h^4$ .

Le programme fortran concernant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre est présenté dans l'annexe B.

#### 4.4 La méthode du TIR

A ce point du raisonnement, nous avons seulement considéré les solutions des équations différentielles pour lesquelles les conditions initiales sont connues. Cependant, beaucoup d'applications dans les sciences physiques n'ont pas des conditions initiales, mais plutôt des conditions aux limites. La méthode de TIR consiste à remplacer le problème de conditions aux limites par un problème de conditions initiales, [25].

Elle est basée sur les quatre étapes itératives suivantes :

- On choisit une condition initiale  $X(t_0)$ , qui peut être la vitesse initiale par exemple.
- On résout alors le problème aux conditions initiales par l'une des méthodes précédemment exposées, telle que la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre.
- On calcule la valeur de la condition aux limites.
- Si la valeur finale n'est pas atteinte, on modifie la valeur initiale, et on réitère les étapes précédentes jusqu'à l'obtention de la valeur finale souhaitée.

Pour donner au lecteur une idée, nous présentons l'exemple suivant. Soit l'équation différentielle ordinaire du second ordre aux conditions aux limites suivantes :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right); \text{ Avec } t \in [a, b] \tag{4.14}$$

Ayant les conditions aux limites :  $y(a) = a$  et  $y(b) = b$  . Nous pouvons encore approcher ce

problème par le choix des conditions initiales suivantes :  $y(a) = a$  et  $\frac{dy(a)}{dt} = A$  .

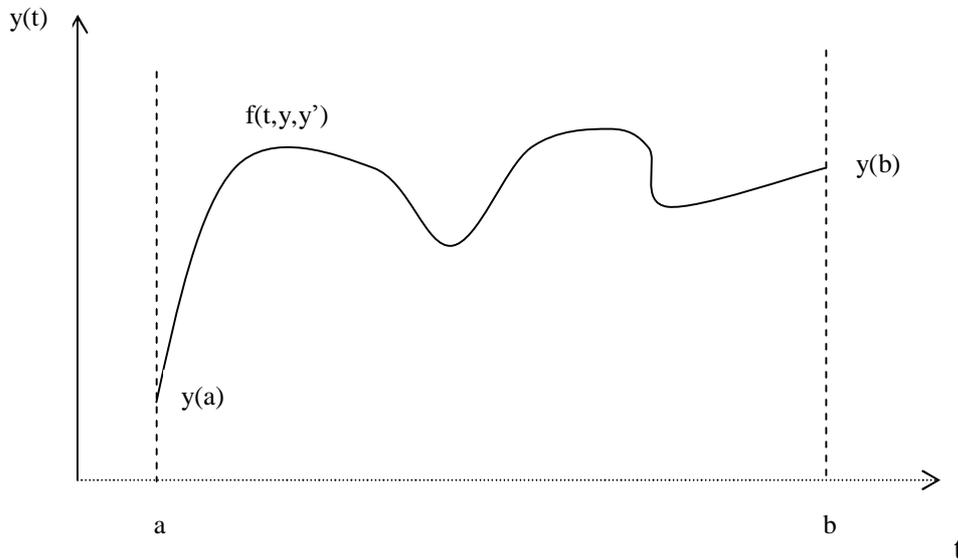


Fig 4.1 : Description schématique pour résoudre un problème aux conditions aux limites.

La constante  $A$  doit être déterminée de telle sorte que pour  $t = b$ , on trouve justement  $y(b) = b$  . Par itérations successives on détermine la constante  $A$  .

#### 4.4.1 Algorithme de résolution

L'exemple cité précédemment montre bien que le problème consiste à chercher la valeur appropriée de  $A$  , qui satisfait le problème original, l'algorithme est comme suit :

- On résout l'équation différentielle pour des conditions initiales quelconques  $y(a) = a$  , et  $y'(a) = A$  .
- On évalue pour  $t = b$ , la valeur de  $y(b)$ , puis on compare cette valeur à la valeur recherchée.
- On ajuste la valeur de  $A$  (plus grand ou plus petit) jusqu'au un niveau de précision désiré.
- Une fois que l'on obtient par itérations successives, la valeur cible voulue avec la précision désirée, on affiche les conditions initiales trouvées.

La figure 4.2 récapitule toute la procédure numérique décrite.

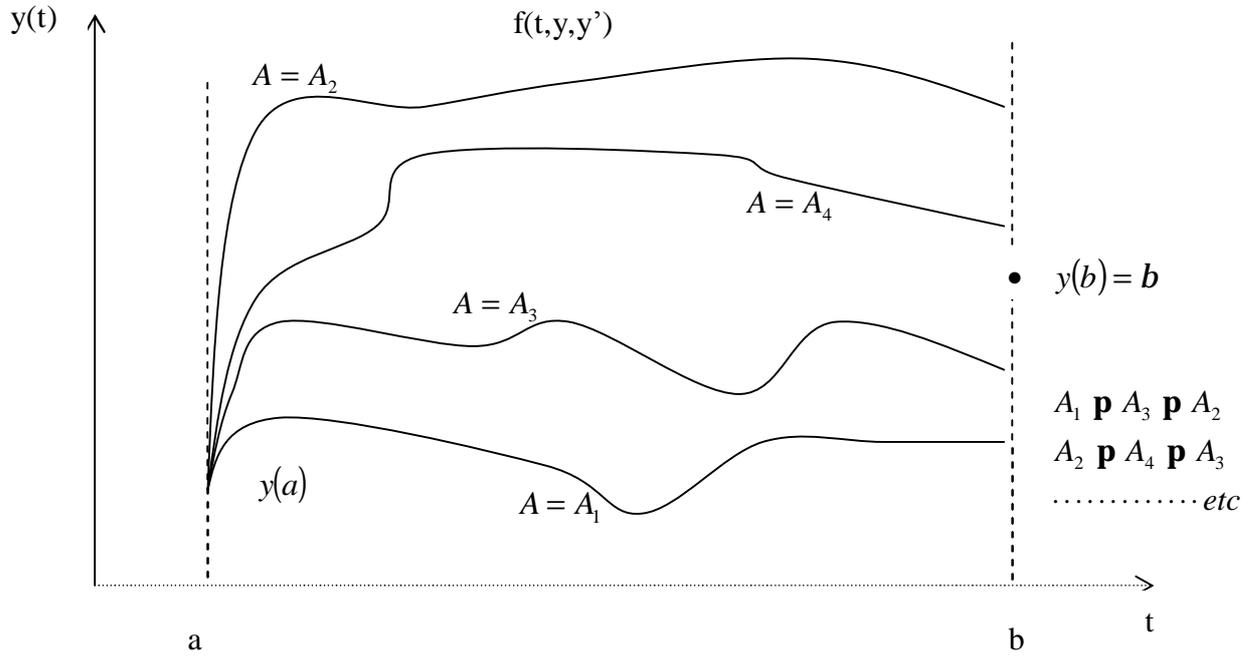


Fig 4.2 : Description schématique pour déterminer la constante  $A$  pour que la solution converge vers la valeur cible  $y(b) = \beta$ .

# CHAPITRE 5

## Résultats et interprétations

### 5.1 Introduction

Les résultats obtenus dans le cadre de ce travail ainsi que la démarche suivie font l'objet de ce chapitre. Nous rappelons que notre étude concerne un écoulement de couche limite à trois dimensions qui se développe autour d'un dièdre plan, symétrique et à parois chauffées. Du fait de l'existence d'un transfert thermique, il y a un couplage entre l'aspect dynamique et thermique du problème. Le choix du dièdre comme configuration géométrique n'est qu'un exemple.

L'originalité du problème, est que l'on utilise une méthode assez nouvelle, dite la méthode E-G-M (*Entropy Generation Minilization*) introduite vers la fin des années 90 par l'éminent thermicien Adrian Bejan de l'université *Duck University* au USA, et qui utilise le second principe de la thermodynamique comme paramètre d'optimisation des systèmes énergétiques. Dans notre cas, on a écrit les équations mathématiques traduisant l'écoulement de couche limite couplé aux équations de l'énergie et de la production d'entropie. Une fois que le système d'équations obtenu est résolu, on présente et on discute dans ce chapitre les résultats obtenus.

### 5.2 Formulation détaillée de la production d'entropie spécifique au problème Posé.

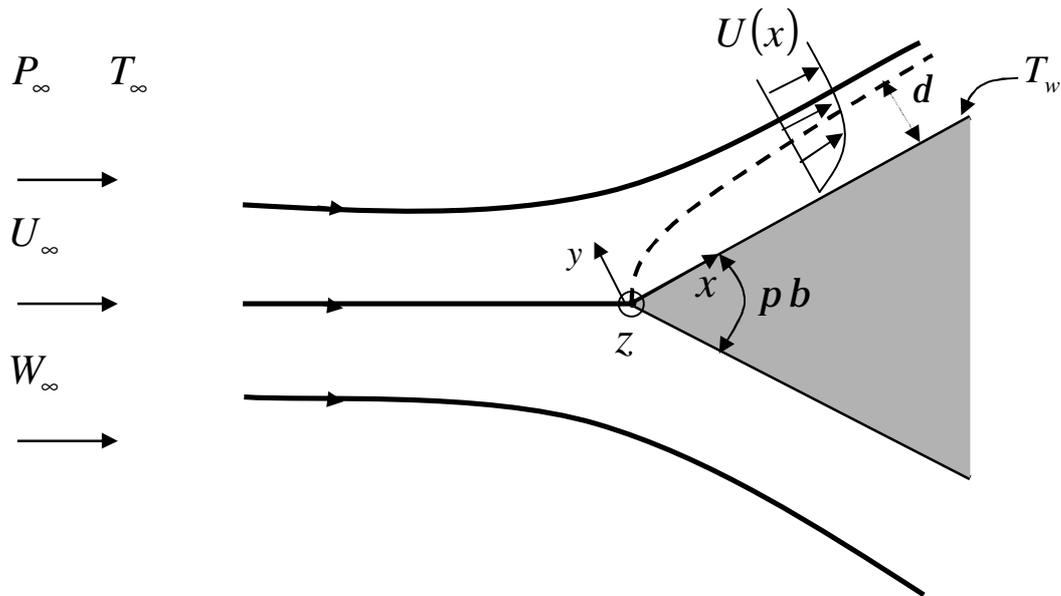


Fig 5.1 Représentation schématique du système physique.

Les équations gouvernantes sont connues, et ont été présentées au troisième chapitre, le système d'équations différentielles ordinaire obtenu est :

$$\left. \begin{aligned}
 f''' + ff'' + b(1 - f'^2) &= 0 \\
 g'' + fg' &= 0 \\
 q_1'' + P_r f q_1' &= 0 \\
 q_2'' + P_r f q_2' + P_r f'^2 &= 0 \\
 q_3'' + P_r f q_3' + P_r g'^2 &= 0 \\
 N_s &= \left( \frac{q'}{1 + \Omega q} \right)^2 + \frac{f}{1 + \Omega q} (f'^2 + Q^2 \cdot g'^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Les fonctions dynamiques  $f$  et  $g$ , ainsi que les fonctions thermiques  $q$ , dépendent de la variable auxiliaire  $h$  définie au premier chapitre.

Les conditions aux limites étant :

$$\left. \begin{aligned} h = 0; f = f' = g = 0; q_1 = 1; q_2 = q_3 = 0 \\ h = 1; f' = g = 1; q_1 = q_2 = q_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Le système obtenu se compose de cinq équations qui définissent absolument l'écoulement. Sa résolution nous permet de connaître les champs dynamique et thermique de l'écoulement de couche limite en question. La sixième équation du système d'équations (5.1) est directement déduite du second principe de la thermodynamique, écrite en fonction des paramètres du problème. Quant à la première équation du système (5.1) connue sous le nom d'équation de Falkner-Skan (1930) [18], elle est primordiale pour la résolution du système. Sa solution nous renseigne sur le champ des vitesses de l'écoulement.

Remarquons que la fonction  $f$  ou bien ses dérivées existent dans toutes les autres équations,  $b$  étant le paramètre géométrique définissant l'écartement entre les deux plans du dièdre.

Dans la littérature,  $b$  est lié à  $m$  par la relation  $b = \frac{2m}{m+1}$ ,  $m$  est une constante arbitraire, mais qui est posée comme étant l'exposant de la vitesse en amont du système physique,  $U_\infty = Cx^m$ .

La deuxième équation du système d'équations (5.1) représentée par la fonction  $g$  nous renseigne sur les variations de la vitesse  $w$ , troisième composante du champ des vitesses. Les trois équations qui suivent en  $q_1, q_2, q_3$  déterminent le champ de température autour du dièdre.

Nous avons supposé que la température suivait la distribution :

$$T = T_\infty + \Delta T q_1(h) + \frac{U_\infty^2}{C_p} q_2(h) + \frac{W_\infty^2}{C_p} q_3(h) \quad (5.3)$$

En divisant par  $\Delta T$ , on retrouve la température sans dimension  $q(h)$  recherchée, fonction des solutions générale  $q_1(h)$ , et particulières  $q_2(h)$  et  $q_3(h)$  :

$$q(h) = q_1(h) + E_1 q_2(h) + E_2 q_3(h) \quad (5.4)$$

$E_1, E_2$  étant les deux nombres d'Eckert définis à partir des deux vitesses loin du système physique suivant les axes  $x$  et  $z$ . Les cinq équations du système (5.1) sont connues, on peut les trouver dans la littérature spécialisée [23], par contre la dernière équation du système (5.1) est

spécifique à notre problème, elle représente la synthèse de ce travail. Nous Allons par conséquent la développer en détail.

Partons du second principe de la thermodynamique. Soit un système évoluant entre deux états 1 et 2 tel qu'il est représenté sur la figure 5.2 .



Fig 5.2 Evolution un système physique entre deux états.

L'écriture du deuxième principe de la thermodynamique dans ce cas de figure, s'écrit :

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} \leq s_2 - s_1 \tag{5.5}$$

En fait il existe une infinité de chemin permettant le passage de l'état 1 à l'état 2, comme il est représenté sur la figure 5.3:

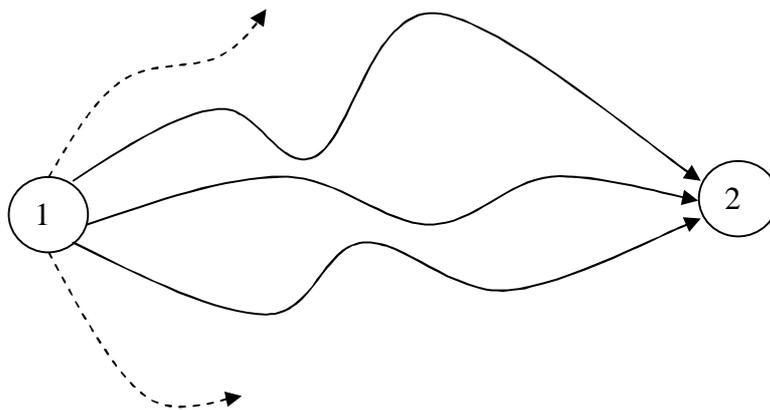


Fig 5.3 Différents chemins possibles entre deux états.

Une bonne exploitation du second principe de la thermodynamique nous permet justement de trouver le passage optimal entre l'état 1 et l'état 2. Celle-ci fait appel à la minimisation de l'entropie produite du système physique. La production d'entropie est définie comme suit [22] :

$$s_{gen} = s_2 - s_1 - \int_1^2 \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (5.6)$$

Dans le cas de notre système physique, la production d'entropie par unité de volume s'écrit :

$$s_{gen} = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{m}{T} \Phi \quad (5.7)$$

Le premier terme est équivalent à l'entropie produite par le transfert thermique, le second est dû au frottement. Les approximations de la couche limite nous permettent d'écrire :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{m}{T} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.8)$$

Pour aboutir à une production d'entropie sans dimension, on a besoin des quantités suivantes :

$$x^* = \frac{x}{L} ; \quad y^* = \frac{y}{d} ; \quad q = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} ; \quad \Delta T = T_w - T_\infty ; \quad \Omega = \frac{\Delta T}{T_\infty} ; \quad B_r = P_r E ; \quad f = \frac{B_r}{\Omega} ; \quad Q = \frac{W_\infty}{U_\infty}$$

$B_r$  étant le nombre de Brinkman qui physiquement représente le rapport entre la chaleur produite dissipation des forces visqueuses et la chaleur transférée par conduction. La fonction  $f$ , dite d'irréversibilité est égale au rapport de la production d'entropie créée par le frottement sur la production d'entropie créée par le transfert thermique.

On calcule les différentes dérivées :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \Delta T q' \frac{\partial h}{\partial x} ; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \Delta T q' \frac{\partial h}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty f''(h) ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = W_\infty g'(h) \quad (5.9)$$

L'équation de la production d'entropie devient :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[ (\Delta T q')^2 \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \frac{m}{T} \left[ U_{\infty}^2 f'^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + W_{\infty}^2 g'^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.10)$$

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left( \Delta T q' \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \left( 1 + \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} \right) + \frac{m}{T} U_{\infty}^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (5.11)$$

$$\text{Sachant que : } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial h}{\partial x^*} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} = \frac{1}{d} \frac{\partial h}{\partial y^*} \quad (5.12)$$

$$\text{Le rapport } \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} = \frac{d^2}{L^2} \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial x^*} \right)^2}{\left( \frac{\partial h}{\partial y^*} \right)^2} \ll 1 \quad (5.13)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$S_{gen} = \frac{k}{T^2} \left( \Delta T q' \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{m}{T} U_{\infty}^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (5.14)$$

$$\text{Considérons le terme } \left( \frac{q'}{T} \right)^2 : \frac{q'}{T} = \frac{q'}{T_{\infty} + q \Delta T} = \frac{q'}{T_{\infty} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_{\infty}} q \right)} = \frac{q'}{T_{\infty} (1 + \Omega q)} \quad (5.15)$$

Le premier terme de l'équation 5.9 il devient :

$$\frac{k}{T^2} \Delta T^2 q'^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = k \frac{\Delta T^2}{T_{\infty}^2} \left( \frac{q'}{1 + \Omega q} \right)^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = k \Omega^2 \left( \frac{q'}{1 + \Omega q} \right)^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \quad (5.16)$$

Quant au second terme de l'équation 5.9 devient :

$$\frac{m}{T} U_{\infty}^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = \frac{k P_r}{C_p T} U_{\infty}^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 = \frac{k P_r U_{\infty}^2}{C_p (T_{\infty} + q \Delta T)} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \quad (5.17)$$

En faisant sortir  $T_{\infty}$  des parenthèses, et en multipliant et en divisant par  $\Delta T$  on trouve :

$$k P_r \frac{U_{\infty}^2}{C_p \Delta T} \frac{\Delta T}{T_{\infty}} \frac{1}{1 + \Omega q} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \quad (5.18)$$

On reconnaît dans l'équation (5.16) les quantités suivantes :  $k(P_r E) \Omega \frac{1}{1 + \Omega q} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2$

En multipliant et en divisant par  $\Omega$ , on trouve le terme :

$$k\Omega^2 \left( \frac{B_r}{\Omega} \right) \frac{1}{1 + \Omega q} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2$$

On démontre que le terme  $\left( \frac{B_r}{\Omega} \right)$  n'est autre que  $f$ , la fonction d'irréversibilité. Rappelons que le nombre de Brinkman donne le rapport entre l'énergie des forces visqueuses dissipées et l'énergie transférée par conduction thermique

L'équation de la production d'entropie devient alors:

$$\frac{S_{gen}}{\left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} = k\Omega^2 \frac{q'^2}{(1 + \Omega q)^2} + k\Omega^2 \frac{f}{1 + \Omega q} (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (5.19)$$

Sachant que  $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h}{y} = \sqrt{\frac{(m+1)U_\infty}{2nx}}$  ce qui nous impose de définir une production d'entropie

$$\text{spécifique } \tilde{S}_{gen} = S_{gen} \frac{2nx}{(m+1)U_\infty} \quad (5.20)$$

Finalement on peut trouver le nombre entropique recherché, ce dernier étant égal à :

$$N_s = \frac{\tilde{S}_{gen}}{k\Omega^2} \quad (5.21)$$

$$N_s = \frac{q'^2}{(1 + \Omega q)^2} + \frac{f}{1 + \Omega q} (f'^2 + Q^2 g'^2) \quad (5.22)$$

Nous remarquons que cette quantité est toujours positive, ce qui est en accord avec le principe de la production d'entropie (qui ne peut être que positive). Le premier terme de cette relation représente l'entropie liée aux échanges de chaleur entre le système et le milieu extérieur. Le second terme, est l'entropie créée au sein du système, due aux phénomènes irréversibles tels que les frottements. L'existence de champs électrique, magnétique, rayonnement, réactions chimiques ou autres au sein de l'écoulement devront être pris en considération dans l'équation de la production d'entropie.

### 5.3 Interprétation des courbes obtenues

Ces courbes sont obtenues, pour un nombre de Prandtl égal à 0.7. Le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^4$ . L'étude paramétrique concerne le nombre réel  $b$  qui représente l'écartement entre les deux plans du dièdre. Nous avons considéré un écoulement à trois dimensions et nous avons supposé que  $Q=1$ .

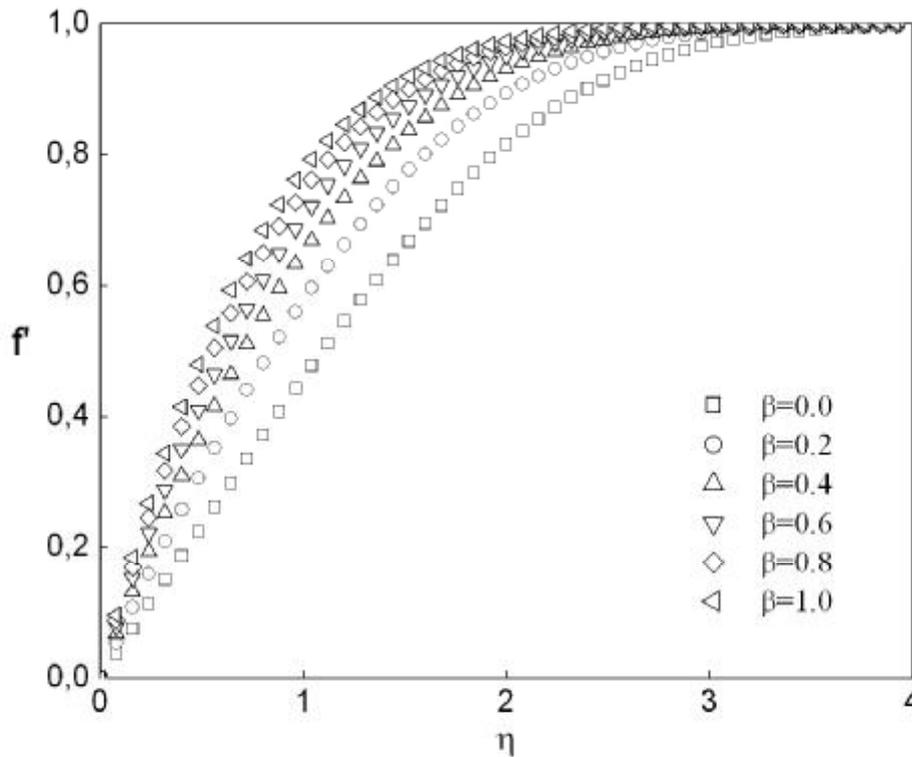


Fig 5.1a: Effet du paramètre  $\beta$  sur le profil de  $f'$ .

La figure 5.1a représente les variations de la fonction  $f'$  en fonction de la variable  $\eta$ , qui n'est autre que la vitesse sans dimension  $\frac{u}{U_\infty}$ . Nous avons ainsi les variations du champ des vitesses suivant l'axe des  $x$  par rapport au paramètre  $b$ . On remarque que l'angle du dièdre accélère l'écoulement, et que la valeur de  $f'=1$  est une asymptote horizontale. Ce qui permet d'affirmer que l'on est effectivement en présence d'un écoulement de couche limite.

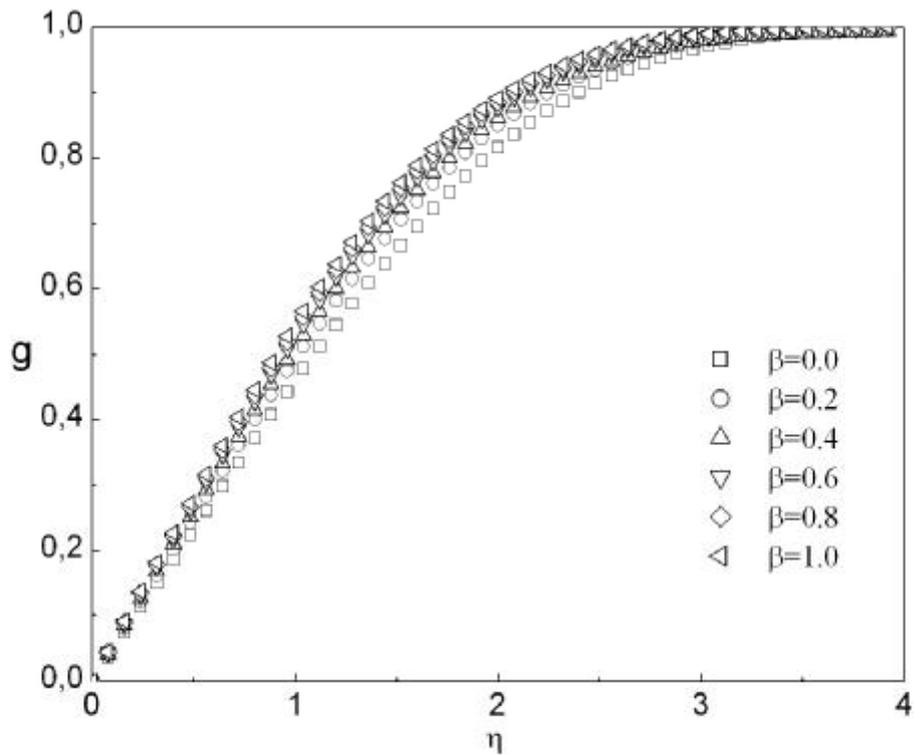


Fig 5. 1b: Effet du paramètre  $\beta$  sur le profil de  $g$ .

Les commentaires et explications précédentes restent valables en ce qui concerne les variations du champ des vitesses suivant l'axe des  $z$  (figure 5.1b), sauf que les courbes sont plus rapprochées. Une deuxième couche limite se développe sur les parois du dièdre suivant la direction de l'axe  $Oz$ , mais elle est moins importante que celle de l'écoulement de base suivant l'axe  $Ox$ .

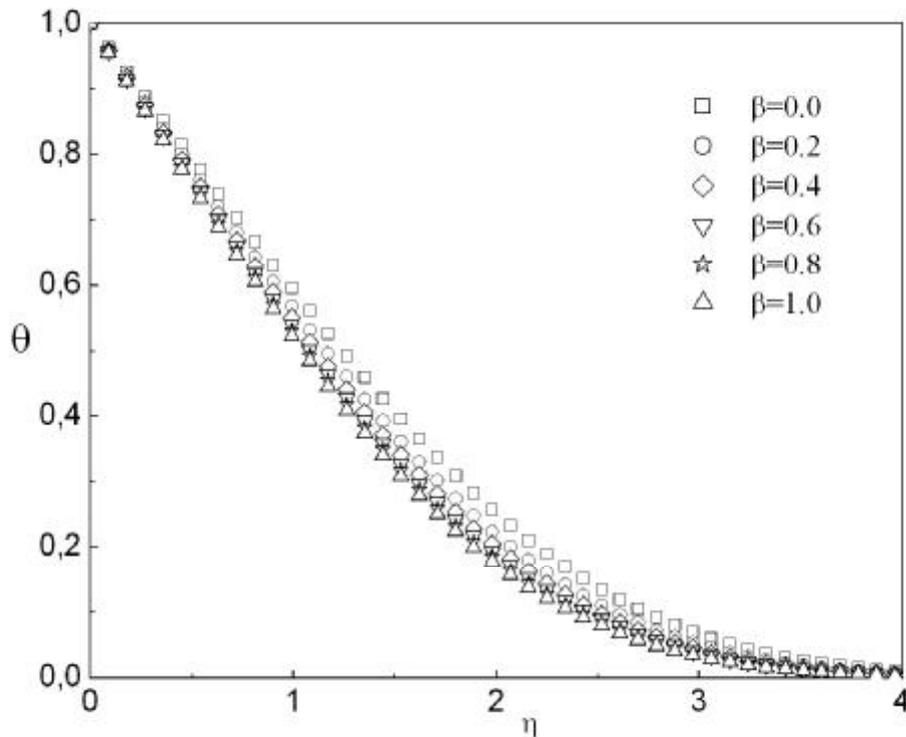


Fig 5.1c: Effet du paramètre  $\beta$  sur la température.

Les variations de la température adimensionnelle en fonction de la variable auxiliaire  $h$  pour les différentes valeurs de  $b$ , sont illustrées par les courbes de la figure 5.1c. Il faut noter que l'allure des courbes obtenues est typique à celle d'un écoulement de couche limite. En effet quand  $h = 0$ , (c'est-à-dire au niveau de la paroi),  $q = 1$  ce qui est identique à  $T = T_w$ , et quand  $h \rightarrow \infty$ , (loin de la paroi),  $q \rightarrow 0$  ce qui est identique à  $T = T_\infty$ . Une remarque sur laquelle nous reviendrons plus tard, est que la température est plus importante pour la valeur de  $b = 0$ , cas de la plaque plane. Les figures 5.1a, 5.1b et 5.1c sont en parfait accord avec la bibliographie spécialisée [22].

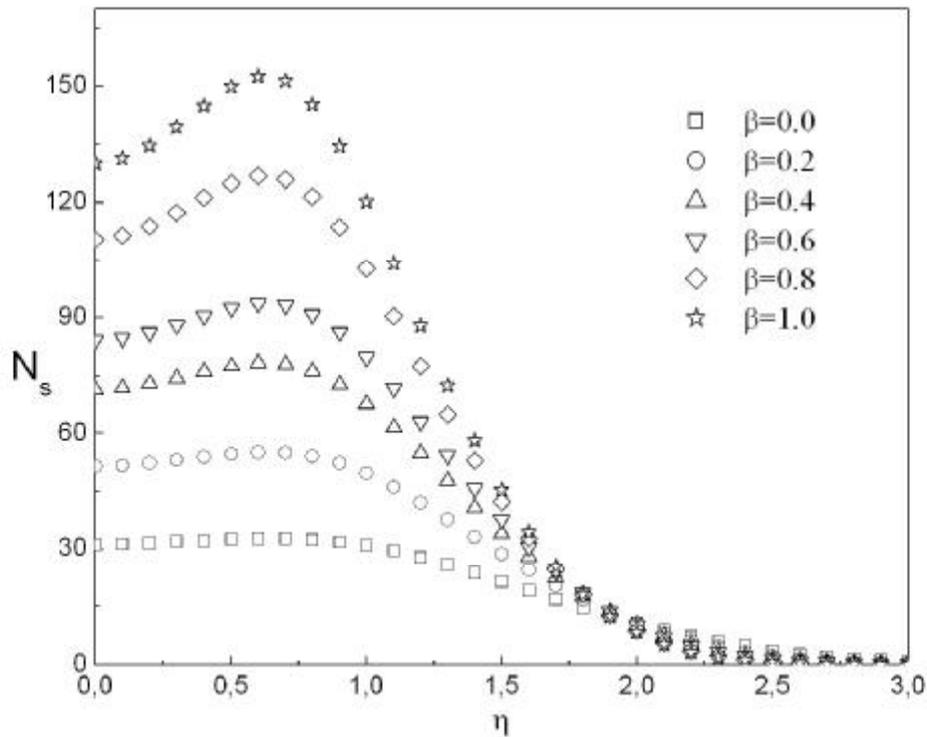


Fig 5.2: Profil du nombre entropique  $N_s$  pour les différentes valeurs du paramètre  $\beta$ .

La remarque émergeante de l'observation concernant les courbes de la figure 5.2 qui représentent les variations du nombre entropique selon les différentes positions des deux plans du dièdre est que la production d'entropie augmente avec  $b$ , elle est maximale dans le cas d'un écoulement de stagnation, et minimale dans le cas d'un écoulement autour d'une plaque plane, c'est l'objectif visé.

On doit prouver maintenant que cette configuration est la configuration optimale en terme d'une contrainte à la paroi, minimale et d'un meilleur transfert thermique. Les variations de la contrainte à la paroi le long des plans du dièdre à différents  $b$  sont illustrées par les courbes de la figure 5.3.

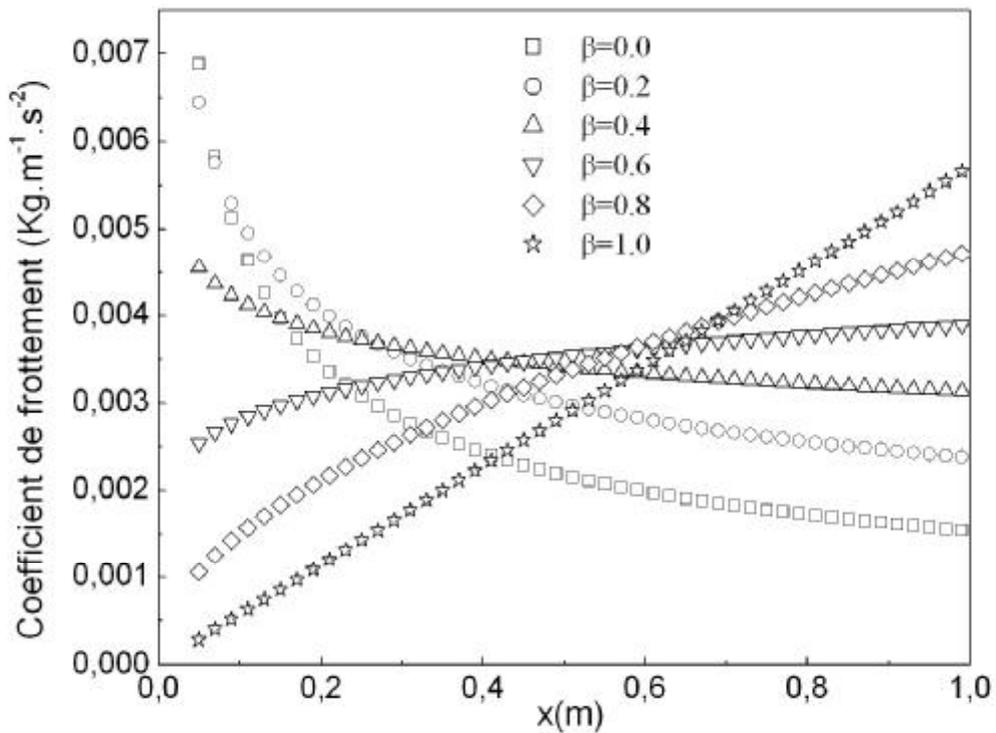


Fig 5.3: Variation du coefficient de frottement en fonction de  $\beta$  le long de la paroi.

Le frottement par unité de surface dont la normale est orientée suivant l'axe  $oy$  est donné par la relation de la composante de la contrainte :

$$t = m \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{5.23}$$

Le fait que nous avons considéré que l'écoulement est tridimensionnel, nous oblige à rajouter une deuxième composante, créé par la vitesse  $w$  , on obtient alors :

$$t = m \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{5.24}$$

On aboutit à une relation en fonction de  $h$  , en procédant de la façon suivante :

Rappelons que  $h = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{n x}}$  et que  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial u}{\partial h} \right)_{h=0} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{n x}} \tag{5.25}$$

Sachant que  $\frac{u}{U_\infty} = f'(h)$  et que  $\frac{g}{W_\infty} = g(h)$ , on trouve que :

$$t = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{nx}} (mU_\infty f''(0) + mW_\infty g'(0)) \quad (5.26)$$

En faisant un réarrangement de l'équation (5.26), on déduit que :

$$t = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{nx}} mU_\infty (f''(0) + Qg'(0)) \quad (5.27)$$

En faisant apparaître un terme de la forme  $rU_\infty^2$  homogène à une pression et un terme égal à l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds local, on déduit aisément que :

$$t = rU_\infty^2 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} [f''(0) + Qg'(0)] \quad (5.28)$$

On connaît déjà la relation liant  $m$  à  $b$ , quant à  $f''(0)$  et  $g'(0)$  elles sont déterminées par le calcul numérique. La figure 5.3 montre clairement que le frottement est minimal pour la valeur de  $b = 0$  correspondant au cas d'un écoulement de couche limite autour d'une plaque plane. Il s'agit maintenant de prouver que le meilleur transfert thermique est aussi pour le cas où  $b = 0$ .

Rappelons que le nombre de Nusselt et le coefficient de transfert thermique ont pour expressions [27] :

$$N_u = \frac{hx}{k} \quad (5.29)$$

$$h = -q'(0) \sqrt{\frac{(m+1)U_\infty}{2nx}} \quad (5.30)$$

Il apparaît clairement sur les courbes de la figure 5.4 représentant les variations du nombre de Nusselt local que la plus grande valeur du nombre de Nusselt correspond à la valeur  $b = 0$ .

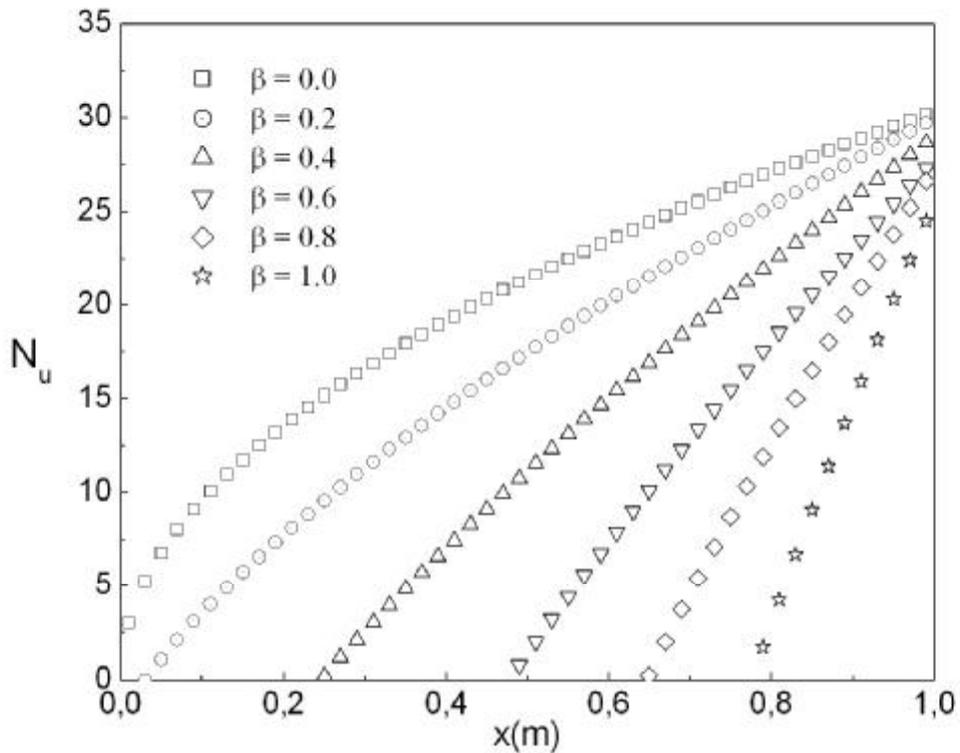


Fig 5.4: Variation du nombre de Nusselt pour différentes valeurs de  $\beta$ .

Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 sont en parfait accord avec la méthode EGM introduite par Bejan [3], qui essaye d'étudier des systèmes physiques pour lesquelles le minimum de la production d'entropie implique un meilleur rendement. Dans le cas présent, la plaque plane est le cas correspondant au minimum d'entropie qui est aussi équivalent au meilleur transfert thermique, et au frottement le plus faible.

La figure 5.5 représente les variations du nombre entropique  $N_s$  pour différents types de fluides ayant des viscosités différentes, caractérisées par leur nombre de Prandtl. Nous remarquons aisément que la production d'entropie augmente avec le nombre de Prandtl. Parmi les conclusions de R.Kandasamy citées dans son article [30], on peut lire : que l'augmentation de la viscosité entraîne une accélération du fluide, et une réduction de la température tout au long du dièdre, en d'autres termes l'augmentation du nombre de Prandtl a pour effet d'augmenter le frottement et de réduire le transfert thermique entre le fluide et les parois du dièdre. Par conséquent il faut trouver une production d'entropie minimale pour le nombre de Prandtl le plus faible, c'est effectivement ce qui apparaît sur la figure 5.5.

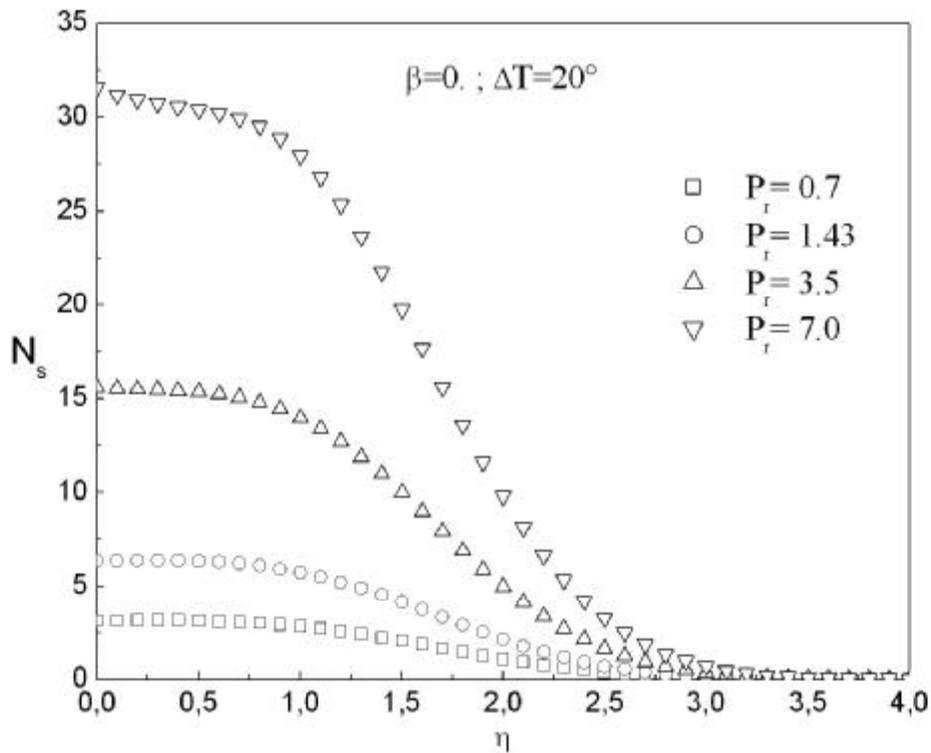


Fig 5.5: Variation de la production d'entropie pour différents nombres de Prandtl.

Le comportement du nombre entropique avec la fonction d'irréversiblement  $f$  est mis en évidence sur la figure 5.6. On suppose un écoulement d'air autour d'une plaque plane et une différence de température entre les parois du dièdre et le fluide à  $20^\circ\text{C}$ . Les résultats montrent sans ambiguïté que  $N_s$  augmente avec  $f$ . Pour interpréter ce résultat on se réfère à la définition de  $f$  dans l'équation (2.15), (rapport entre la production d'entropie due aux frottements, et celle liée au transfert de chaleur). Cette distribution mesure le taux d'irréversibilité, par conséquent, il est vrai de dire que la production d'entropie augmente avec l'accroissement du taux de l'irréversibilité, la figure 5.6 confirme une fois de plus le principe de la minimisation de la production d'entropie, qui serait minimale pour les conditions optimales de l'écoulement.

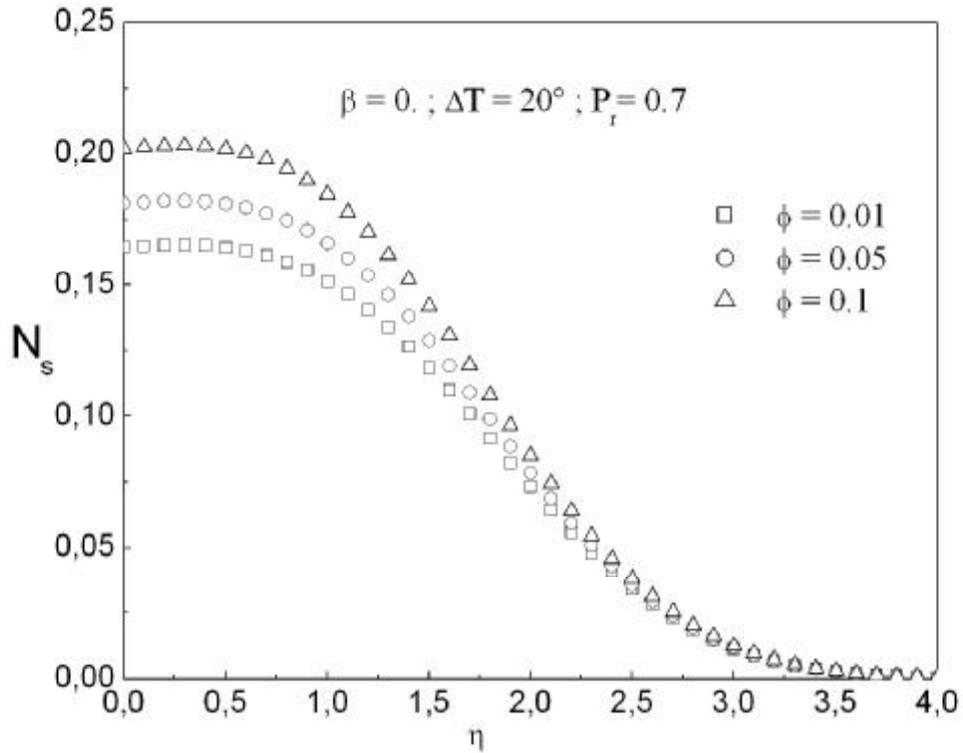


Fig 5.6 : Effet de la fonction d'irréversibilité sur la production d'entropie.

La figure 5.7 représente dans le cas optimal, celui de la plaque plane, les variations du nombre entropique en fonction de la température adimensionnelle pour deux valeurs différentes de l'écart de température entre les parois du dièdre et celle du fluide. La première constatation, est que le profil de  $N_s$  augmente avec  $q$ , ce qui est physiquement acceptable. La deuxième observation, est que la production d'entropie est plus importante pour le plus petit écart de température. Cela paraît contradictoire, mais ce cas de figure est tout à fait en accord avec le principe de la méthode EGM qui stipule que le minimum de la production d'entropie correspond au meilleur rendement. Nous savons que le meilleur transfert thermique est obtenu pour le plus grand écart de température.

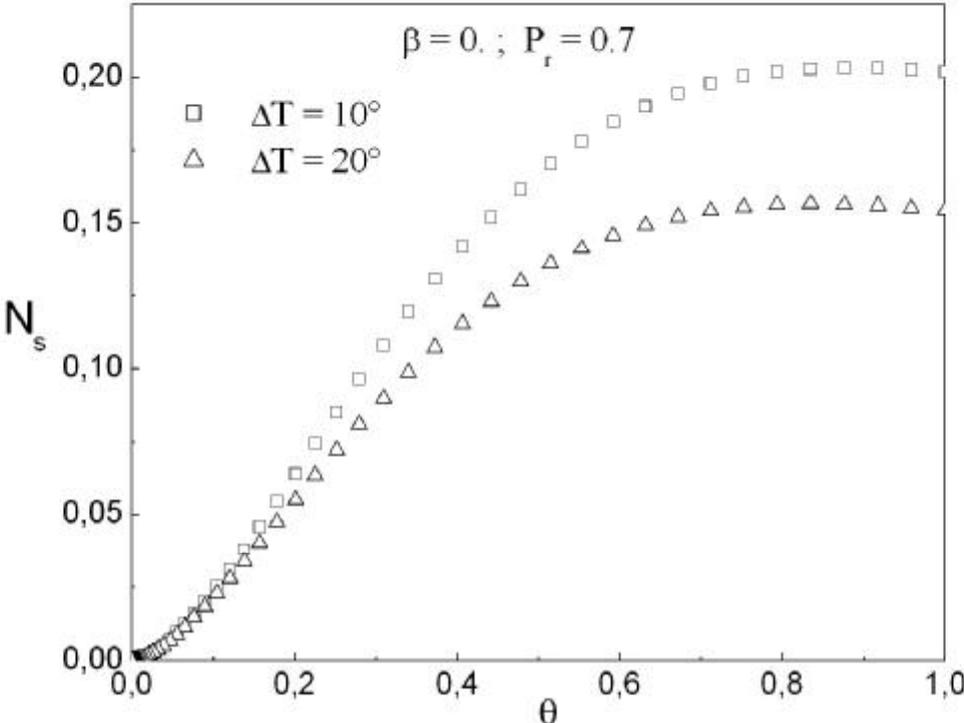


Fig 5.7: Profil du nombre entropique en fonction de l'écart de température  $\Delta T$ .

# CHAPITRE 6

## Perspectives : La théorie constructale

### 6.1 Introduction

Tout ce que nous observons autour de nous, toutes ces formes, toutes ces diversités, qui sont différentes les unes des autres, et qui appartiennent à des domaines différents, semble être géré par un algorithme commun. En se basant sur le deuxième principe de la thermodynamique, la théorie constructale essaye justement de trouver, et de prouver cette nouvelle conception de la nature vivante ou inerte. Elle postule que tout ce qui nous entoure serait le résultat d'une optimisation naturelle, et que la nature sur toutes ses formes suit le principe de la minimisation de la production d'entropie.

La théorie constructale a été créée à la fin des années 90 par Adrian Bejan, docteur en génie mécanique au MIT, (*Massachusetts Institut of Technology*). Le mot constructal a été choisi en écho avec le mot fractal de la théorie fractale élaborée par Benoit Mandelbrot (*Mathématicien polonais*). Le professeur A.Bejan remet en cause la théorie fractale, selon lui les choses ne se fragmentent pas, mais plutôt se construisent et s'agrègent. Dans la théorie fractale un dessin identique est indéfiniment répété.

L'algorithme est constant et il suffit de connaître sa forme à un certain niveau pour en déduire toutes les autres formes. Cela n'est pas vrai dans la nature, seulement peut être en cristallographie où justement on donne souvent l'exemple de cristaux de glaces. Constructal est un mot inventé par A.Bejan, du verbe latin (*construere*), et qui veut dire construire, [28]. Cette théorie s'inspire de processus d'optimisation des formes dans la morphogenèse naturelle

### 6.2 Principe

Le principe a été énoncé en 1996 par A.Bejan: "*For a finite-size flow system to persist in time to survive its configuration must evolve in such a way that it provides an easier access to the currents that flow through it*" [3]. « **Pour qu'un système de dimension finie persiste**

**dans le temps (*vive*), il doit évoluer de façon telle qu'il procure un accès facile aux courants imposés qui s'écoulent à travers ce système ».**

Donnons un exemple : pour qu'un arbre grandisse de façon optimale et vive le plus longtemps possible, il faudrait que la sève s'écoule au mieux à travers ses branches, et pour que cela puisse se réaliser il faut minimiser au maximum les contraintes et les résistances qui s'opposent à l'écoulement de la sève, (il faut noter que A.Bejan considère la biologie comme une discipline de la physique). Il faut noter aussi que la théorie constructale qui a un lien étroit avec la thermodynamique, considère comme cette dernière que la machine parfaite n'existe pas, mais ce qu'elle apporte en plus, elle répartie d'une façon optimale les imperfections entre les différentes parties de la machine, la résistance des flux de courant sont alors minimisés, d'où une augmentation de la performance de la machine.

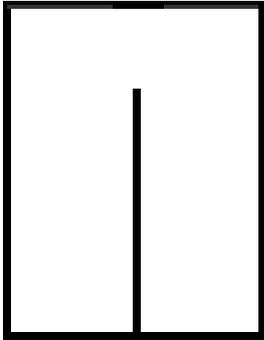
### 6.3 La démarche

Pour appliquer la théorie constructale, il est nécessaire de suivre trois étapes :

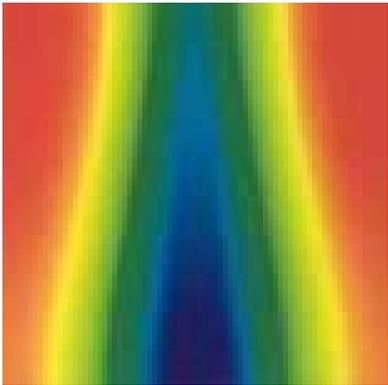
- a) Déterminer la plus petite forme possédant les proportions idéales en tenant compte des contraintes du système.
- b) Passer à l'échelle supérieure ayant des surfaces et volumes plus grands, en assemblant les petites formes une à une.
- c) La dernière phase consiste à déduire la forme finale recherchée et optimisée du système.

### 6.4 Exemples : systèmes de refroidissement d'une surface.

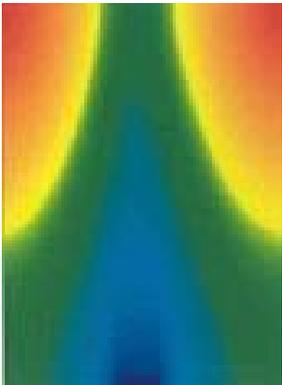
Le problème posé est le suivant : on dispose d'une surface rectangulaire ayant par exemple les dimensions d'un panneau solaire, et nous voulons déterminer la, ou les dispositions optimales des collecteurs de chaleur de sorte qu'on évacue le maximum de chaleur. En suivant les étapes dictées par la théorie constructale, il faut déterminer d'abord la surface élémentaire possédant les dimensions optimales et qui évacue aussi le plus de chaleur possible. On considère une géométrie rectangulaire à travers laquelle est placé un collecteur de chaleur. Une simulation numérique de cette configuration permet de visualiser les transferts de chaleur à cette première échelle. Les figures 6.1A, 6.1B, 6.1C montrent et nous renseignent sur la géométrie optimale. La figure 6.1 représente la maille élémentaire avant la détermination des dimensions voulues.



(A)



(B)



(C)



Fig 6.1 Surfaces rectangulaires comportant le collecteur de chaleur.

Les images (A), (B) et (C) représentent la distribution de la chaleur sur les trois configurations. Une remarque importante est que la géométrie de la surface rectangulaire influe énormément sur le transfert thermique. Aussi les dimensions de la figure 6.1B sont les mieux adaptées pour répondre à notre problème, l'évacuation de la chaleur est meilleure dans ce cas de figure. Passons maintenant à la deuxième étape, qui consiste à passer à l'échelle supérieure en assemblant plusieurs de ces surfaces élémentaires. Le but est de construire un réseau qui évacue toute la chaleur en un seul point. On obtient la configuration représentée par la figure 6.2.

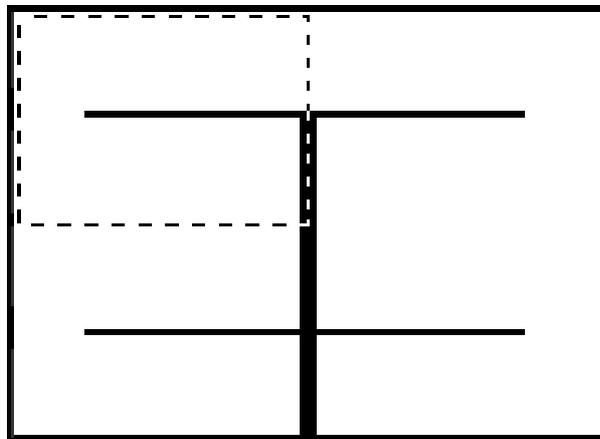


Fig 6.2 Assemblage de quatre mailles élémentaires.

La troisième et dernière étape consiste à étaler toutes ces mailles de second ordre sur la surface globale. On aura ainsi optimiser le système physique voulu. On continue ainsi en remontant progressivement les échelles jusqu'à obtenir la taille du système recherché. On obtient alors un système de refroidissement présentant une arborescence optimale et donc un rendement maximum. Finalement on aboutit au cas de figure illustré par la figure 6.3.

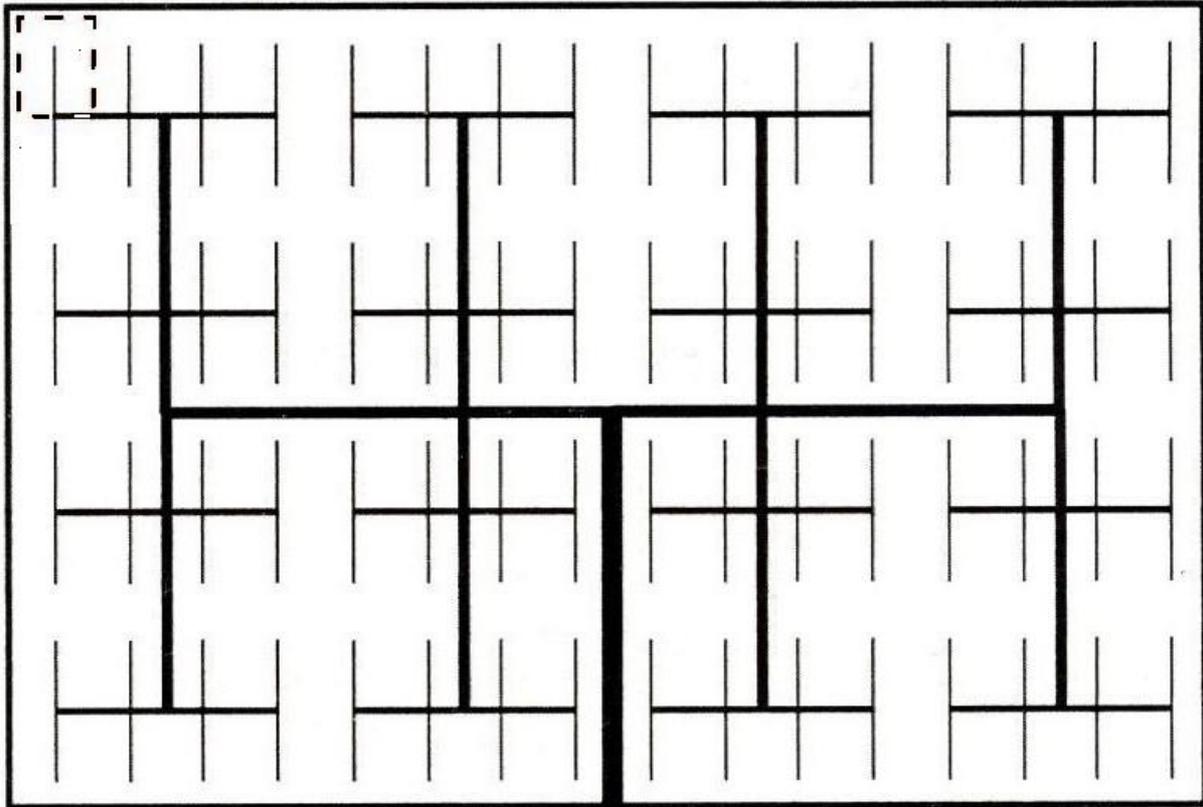


Fig 6.3 Surface totale refroidie de façon optimale.

La Nature est pleine de phénomènes qui font penser à des formes, configurations, similarités, auto organisation et auto optimisation. La forme joue un grand rôle unificateur dans la nature car elle apparaît aussi bien dans les systèmes vivants que dans les systèmes inertes. Un exemple est donné par les configurations dendritiques\* que l'on retrouve aussi bien dans les deltas des rivières que dans les éclairs, les poumons, les tissus vasculaires et le trafic urbain.

\*Dendritique : relatif à une dendrite, à une cristallisation rocheuse proche du dessin d'un arbre, (figure 6.4).

La figure 6.4 comporte deux images, l'image de gauche, qui est d'actualité et qui représente un circuit électronique optimisé à l'aide de la théorie constructale. L'image de droite représente une dendrite datant de plusieurs siècles, voire des millénaires. Remarquons la ressemblance frappante entre ces deux images. Les articles récents en théorie constructale travaillent sur ce sujet, ils essayent de trouver des configurations géométriques pour des panneaux solaires et les circuits de refroidissements électroniques qui sont une copie presque identique des dendrites, le résultat est frappant : le rendement est d'autant plus meilleur.

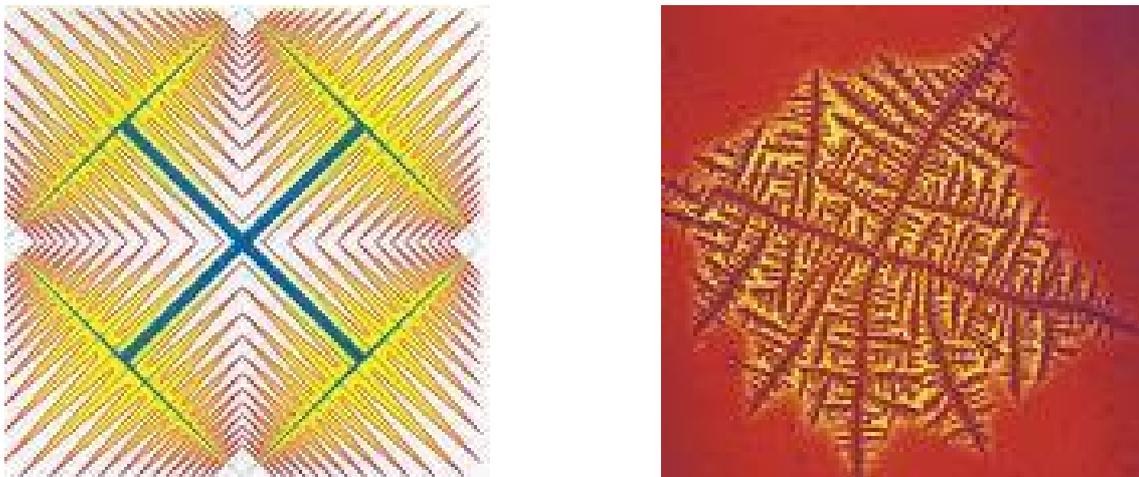


Fig.6.4 Analogie entre une dendrite et un circuit électronique.

La forme dans la Nature a toujours été un domaine d'étude très excitant, et cette thématique est maintenant d'un intérêt croissant pour tous les domaines de la science. Cela va de la biologie et de l'ingénierie jusqu'au coeur de la recherche scientifique que constitue la Physique (Physique vient du grec " phusikê " qui signifie science de la nature ; natura en latin signifiant celle qui donne naissance à tout). Dans ce mouvement qui gagne en ampleur, la génération et l'évolution de formes dans la nature est reconnue comme un phénomène physique et est élevée au niveau d'une loi de la physique : la loi constructale [38].

Encore une fois la théorie constructale exprime l'idée que la génération de formes dans la Nature est un phénomène général de la Physique et que ce phénomène est régi par la loi constructale qui propose des configurations où se déroule un scénario dans lequel les configurations existantes sont remplacées par des configurations qui, globalement, permettent des écoulements plus faciles [38].



Fig. 6.5 Circuit électronique conçu à partir de l'image d'un delta.

Sur la figure 6.5 est représentée une partie gauche montrant le delta de la rivière Lena dans le nord de la Sibérie et une partie droite qui montre une architecture d'écoulement en forme de delta, (ne croyez pas que c'est une plante), c'est un circuit de refroidissement conçu grâce à la théorie constructale, son but est de refroidir un disque recouvert de composants électroniques générateurs de chaleur [39].

L'invention des réseaux dendritiques illustre bien les deux faces de la théorie constructale. Un côté représente l'hypothèse qu'une seule dendrite est la forme naturelle pour obtenir l'écoulement maximal d'un point vers un volume. L'autre est la stratégie pour obtenir l'écoulement maximal entre deux lignes parallèles (ou deux plans parallèles) : la solution consiste à remplir l'espace d'écoulement avec des structures dendritiques disposées côte à côte, [38]. Ce qui est montré sur la figure 6.6.

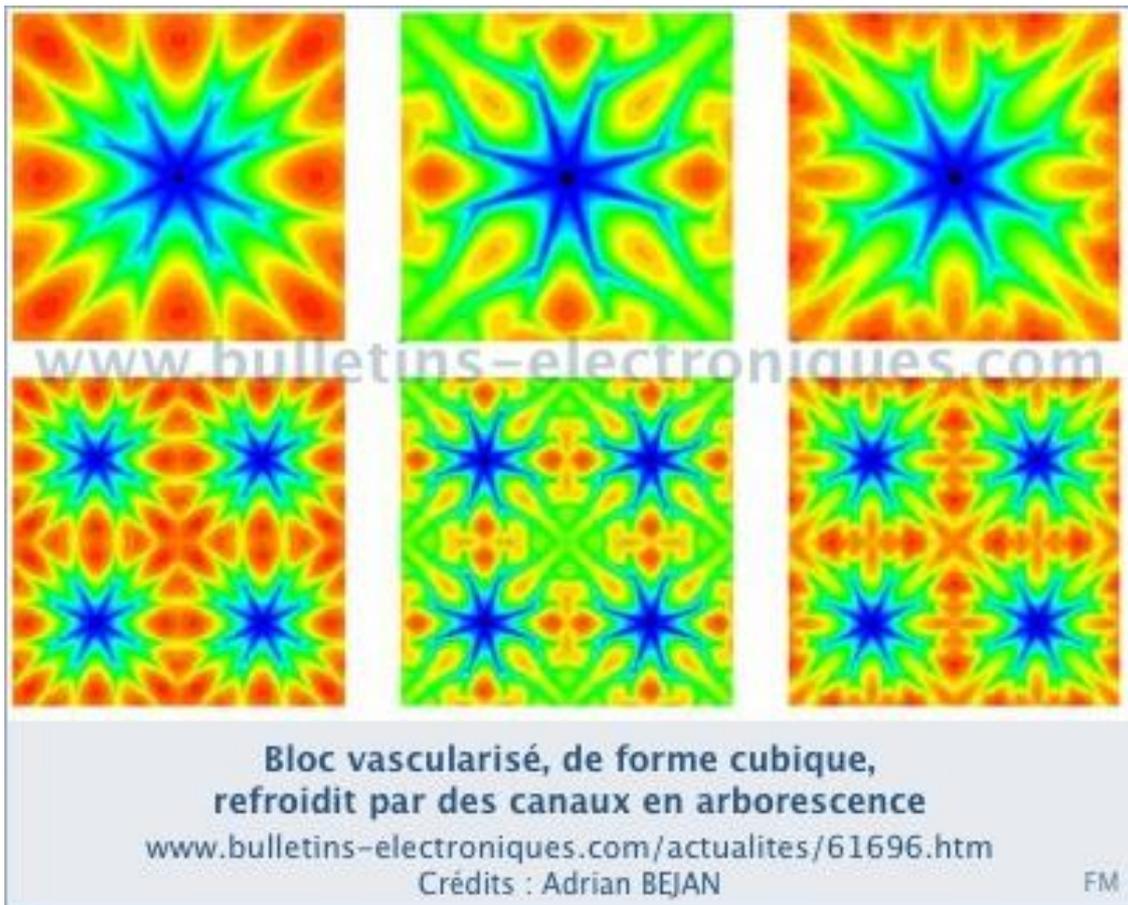


Fig. 6.6 Circuits de refroidissement de formes dendritiques.

Le développement de nouveaux matériaux intelligents nécessite de nouvelles configurations pour leur vascularisation : des architectures d'écoulement intriquées qui distribuent les fluides à travers le matériau et lui confèrent de nouvelles propriétés comme l'auto-réparation et l'auto-refroidissement. Les configurations d'écoulement vasculaires furent introduites pour la première fois comme une application de la théorie constructale.

La figure 6.6 montre un bloc vascularisé, de forme cubique, refroidi par des canaux en arborescence immergés juste sous la surface supérieure. La chaleur est générée uniformément sur la surface inférieure du bloc. Le fluide réfrigérant entre par le centre du bloc et s'évacue par des orifices sur la périphérie du carré. De gauche à droite, les réseaux dendritiques ont un, deux et trois niveaux de bifurcations, [38].

## 6.5 Domaines d'applications

Tous les systèmes soumis à des écoulements sont le sujet de la théorie constructale. Tous les réseaux de distribution d'eau, de gaz, d'électricité, de télécommunication, ainsi que tous les réseaux de circulation des personnes, (tel que les flux de véhicules et de la foule dans les villes...), d'argent, des affaires et d'informations peuvent être revus et corrigés.

On peut ainsi l'utiliser afin de revoir la structure de tous les véhicules, d'imaginer de nouvelles structures qui répartissent au mieux les charges mécaniques, de concevoir de nouveaux bâtiments facilitant la circulation des individus, de structurer l'Internet et son flux d'informations, voire d'affiner les stratégies militaires.

Les domaines d'applications sont vastes, ainsi et sans être exhaustif on peut citer:

- Economie, circulation des affaires : accès maximal, coût minimal, temps de voyage minimal, et profit maximal dans le mouvement des biens et des personnes entre certains points et certaines surfaces.

- Urbanisme, circulation des véhicules, des personnes, conception de nouvelles architectures pour des villes futures, où tous les trafics seront optimisés. Construction de bâtiments ayant des accès faciles avec exploitation maximale des espaces urbains.

- Sociologie, en considérant que le flux de la foule dans les grandes villes, le flux de voitures et de camions de transport, le flux des avions... assimilable à un système d'écoulement vivant très complexe à échelles multiples, A.Bejan explique dans son dernier ouvrage [29], *Constructal theory of social dynamics*, que l'on peut appliquer les lois de la théorie constructale pour améliorer « la vie » au sein de la société humaine et que la société est l'un des systèmes d'écoulement les plus compliqués puisque, vivant. Il faut aussi noter qu'il est très difficile de la comprendre et d'en prédire l'évolution puisque nous même, nous faisons partie de cette société. Nous présentons ici un exemple concret de l'application de la théorie constructale dans le domaine social, celui de l'aéroport de la ville d'Atlanta (figure 6.4). Cet aéroport possède une forme optimale au sens de la théorie constructale. Cet aéroport de forme rectangulaire donne un accès très facile aux passagers pour rejoindre la sortie, ou bien pour accéder aux avions.

A.Bejan et S.Lorente [35] ont démontré que la forme est optimale si le temps de marche du piéton est du même ordre de grandeur que celui mis par le train. Remarquons aussi le grand nombre d'avions que peut supporter cet aéroport.

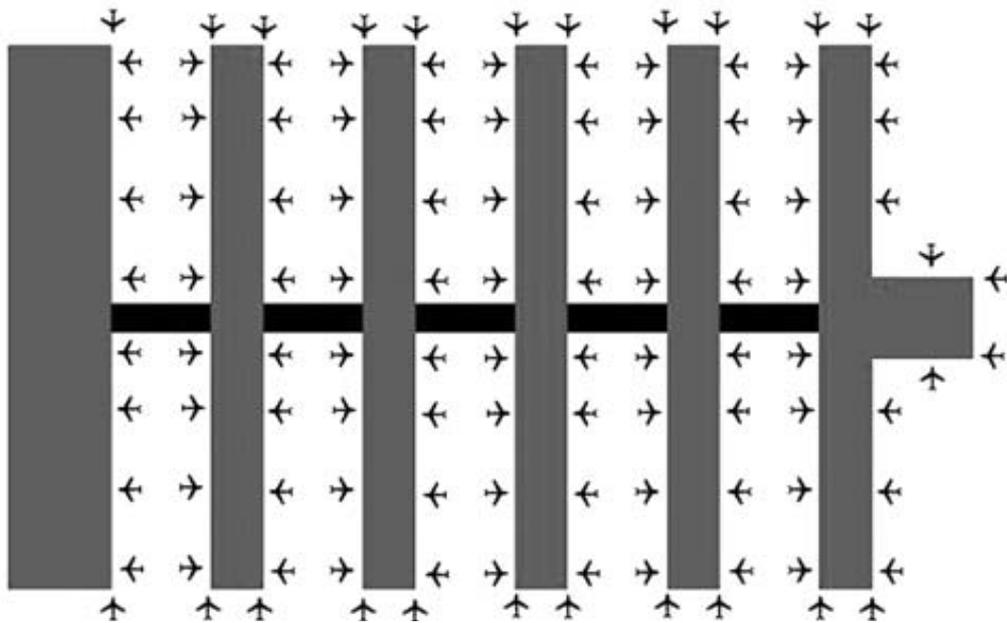
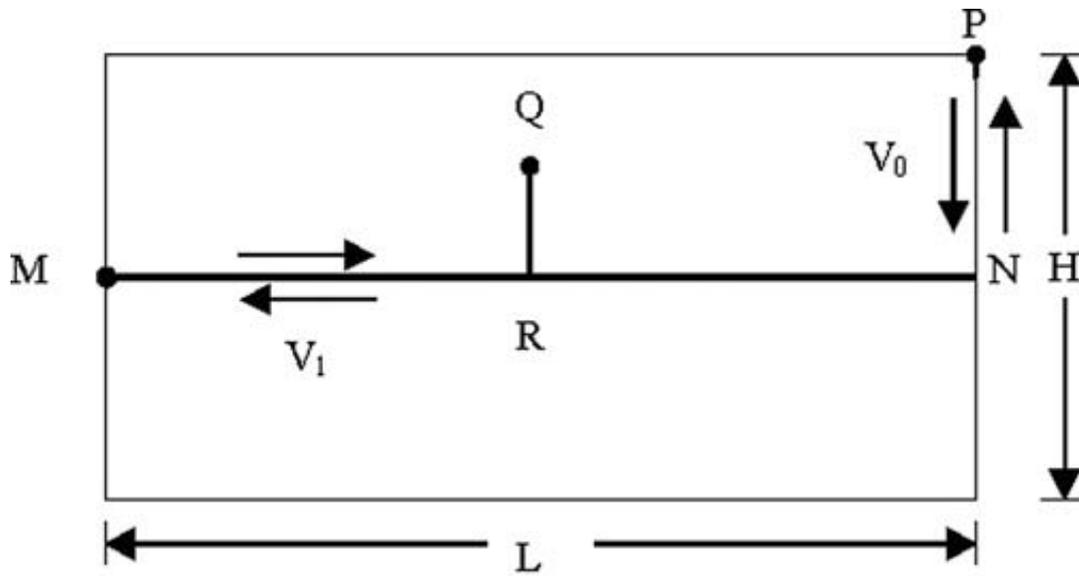


Fig 6.6 L'aéroport constructal d'Atlanta.

Quand le facteur de forme  $H/L$  est optimal, le temps de voyage entre le point P et le point N est le même que le temps de voyage du point N au point M, à savoir que :  $\frac{H}{2V_0} = \frac{L}{V_1}$ . Dans la théorie Constructale on reconnaît cela sous le nom de l'équipartition du temps (la résistance), ou la distribution optimale de l'imperfection. Cela est illustré par des édifices modernes tel que l'aéroport d'Atlanta. Plusieurs objectifs ont été poursuivis dans le développement de cette structure de flux en forme d'arbre : la minimisation de temps de voyage pour les piétons et la minimisation du temps et du coût du transport pour les marchandises passant entre le terminal et chaque porte. La ligne noire symbolise le système de haute *conductivité* entretenu par un train bilatéral. Les barres sombres représentent les foules le long desquelles le voyage est beaucoup plus lent (marche à pied, chariots).

En accord avec la théorie constructale, le temps de marche de la foule est le même que celui du train (de l'ordre de cinq minutes).

# Conclusion Générale

De nombreux problèmes ont surgi simultanément, le réchauffement climatique, la crise économique qui s'accompagne d'une explosion démographique où la population globale doublera en moins de cinquante ans et le besoin incessant en énergie. En un mot, notre planète Terre est en péril.

Si les terriens brûlent toutes les réserves de combustibles fossiles connues à ce jour, l'augmentation globale de température sera de 13° C à partir de 2100. Cela entraînera la disparition de toutes les forêts pluviales, détruira la fertilité de nombreux sols et fera fondre l'ensemble des glaces arctiques. La température de l'Europe sera celle du Maghreb, mais l'ensemble des zones très actives économiquement aura été submergé par une hausse des océans d'environ 10 mètres, alimentée principalement par la fonte des glaciers du Groenland et de l'Antarctique.

On peut se rassurer en pensant que les gisements de pétrole tirent à leur fin. Mais ce n'est pas le cas. Les réserves de carbone accessibles pour la production d'énergie sont malheureusement beaucoup plus élevées qu'il n'est pronostiqué quand on parle de la fin de l'ère du pétrole. Selon un centre universitaire britannique rassemblant des climatologues et des experts en énergies, (le Centre Tyndall) : l'humanité a déjà rejeté 400 milliards de tonnes de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère, entraînant une hausse moyenne de température de 0,6° C. Mais 10 fois plus de réserves demeurent accessibles, sous forme de pétrole profond, gaz naturel et charbon. De plus les combustibles non conventionnels, goudrons, sables bitumineux, clathrates\* de méthane sous océaniques contiendraient encore la masse considérable de 10.000 milliards de tonnes de CO<sub>2</sub>.

La question qui reste posée et dont la réponse permettra d'assurer la survie de l'humanité est : comment remédier à tout cela ? Dans ce travail, nous proposons un chemin à suivre, celui de l'optimisation.

\*clathrates : Association dans laquelle les molécules d'un type se placent dans les lacunes du réseau cristallin de l'autre type.

C'est un chemin qui n'est pas coûteux, mais qui demande une certaine culture scientifique et une conscience de la part de toutes les populations du danger imminent qui pourra déstabiliser l'équilibre naturel. Si nous n'agissons pas à temps notre planète ne sera plus vivable d'ici quelques générations.

Nous devons s'inspirer de la nature qui depuis sa création a trouvé le secret de réaliser des formes de systèmes parfaits, ou plutôt des formes moins imparfaites que possible, cette nature qui a pu survivre jusqu'à nos jours, en s'auto organisant et en surmontant les perturbations dont elle a été sujette.

Une question importante s'impose ici : existe-t-il des méthodes pour imiter de la façon la plus efficace que possible les formes optimisées de la nature ? Une méthode empirique aussi vieille que l'humanité consiste à faire ce que l'on pourrait appeler une copie analogique globale du système naturel. On prend ce dernier comme un tout dont on ne cherche pas à analyser l'organisation de détail (le rôle des divers éléments les uns par rapport aux autres). A partir de ce modèle, on essaye de construire un objet dont les apparences soient aussi proches que possible de celles du modèle. Reste ensuite à tester le nouveau système, afin de vérifier si ses fonctionnalités sont proches ou non de celles du système naturel. Dans les cas simples (par exemple le dessin d'une arme copiant la forme d'une défense d'animal) le résultat est satisfaisant. Dans des cas plus complexes, comme l'imitation d'une aile d'oiseau, les échecs sont la règle. L'inventeur empirique doit alors s'engager dans un long processus d'essais et d'erreurs afin de rapprocher le nouveau système du modèle. Le plus souvent, il n'y arrive pas et renonce à son projet.

Une méthode plus sophistiquée consiste à décomposer le modèle en éléments dont on étudie les rôles respectifs dans l'obtention de la performance finale. On appelle cela en ingénierie l'"analyse par éléments finis" ou "*finite-element analysis*". On construit ensuite le modèle en conjuguant des éléments artificiels aussi proches que possible, anatomiquement et fonctionnellement, des éléments naturels. L'apparence globale du modèle peut alors être assez différente de celle du modèle, mais peu importe si le système donne satisfaction. Par la suite, le résultat peut être optimisé de façon continue, en faisant appel à l'analyse et à la conception assistées par ordinateur.

Si l'ingénieur veut réaliser un système artificiel qui soit aussi efficace qu'un système naturel, notamment en termes de consommation d'énergie, il lui suffit en principe de copier le système naturel. On analyse celui-ci dans ses détails et on reconstruit un système artificiel en accumulant les détails favorables à l'obtention d'une solution optimisée. Mais nous avons vu que cette approche n'aboutissait généralement pas, car les systèmes naturels sont trop variés et détaillés pour permettre une analyse [40].

La recherche de systèmes énergétiques optimaux, et la conception de machines de plus en plus performantes a conduit en 1996, le professeur A.Bejan à élaborer une nouvelle théorie qu'il appelle : la théorie constructale. Cette nouvelle théorie thermodynamique utilise le principe de l'entropie pour améliorer le rendement des systèmes physiques. Elle s'inspire beaucoup des processus naturels. Vu que ces derniers développent spontanément une structure et une géométrie des flux, qui est la moins imparfaite que possible.

Le travail de cette thèse se situe dans ce contexte. Nous avons considéré comme paramètre, l'angle d'écartement d'un dièdre plan dont les parois sont chauffées. Le but était de répondre à la question : est-il possible d'optimiser ce système aérothermique en appliquant le principe élaboré par le professeur A.Bejan en théorie constructale, celui de dire que le minimum de la production d'entropie est équivalent au meilleur rendement?

Rappelons que pour tout processus réel, donc irréversible, le second principe de la thermodynamique stipule que la production d'entropie est positive. C'est une mesure de l'irréversibilité de ces processus. On cherche toujours à minimiser ces irréversibilités, qui sont un facteur néfaste pour la performance, elles s'accompagnent toujours d'une dégradation d'une forme noble de l'énergie.

Cependant il faut toujours prendre certaines précautions en cherchant à optimiser des systèmes physiques, on peut aboutir à des configurations ayant des géométries et des flux absurdes, (surfaces gigantesques et vitesses très faibles...).

En appliquant le principe de minimisation de la production d'entropie sur le système considéré, nous pouvons conclure que ce principe s'applique bien à ce genre de problème aérothermique. Nous avons abouti à un résultat que nous avons prévu d'avance, à savoir que le modèle de la plaque plane devrait être le plus performant au sens d'un meilleur transfert

thermique et d'un frottement minimal. Ce cas coïncide absolument avec le minimum de la production d'entropie, à l'encontre de l'écoulement de stagnation qui se révèle être le moins performant. Les champs des vitesses et de température sont validés par plusieurs résultats expérimentaux tels que les travaux publiés depuis les années quarante de Nikuradse [36]. Par ailleurs nous avons testé la sensibilité de la production d'entropie modélisée par la formule que nous avons trouvée avec plusieurs paramètres. L'analyse des résultats auxquelles nous avons abouti dans ce travail conduisent à certaines conclusions notamment que la production d'entropie augmente avec le frottement, le nombre de Prandtl et la fonction d'irréversibilité. Par contre elle est inversement proportionnelle à l'écart de température entre les parois chauffées du dièdre et le fluide. Toutes ces constatations semblent être nouvelles, vu que la recherche dans ce domaine est d'actualité.

Les perspectives de recherche dans ce domaine sont larges et prometteuses et nous invitons les chercheurs à investir dans le domaine de l'optimisation via le second principe de la thermodynamique et dans les diverses applications de la théorie constructale. Cette théorie prend la nature comme référence et rentre dans plusieurs domaines de la vie courante en proposant une vision futuriste de la société humaine.

Son but est de minimiser les imperfections causées par la mauvaise et inconsciente gestion des ressources naturelles.

Annexe A  
Les conditions initiales.

Dans cette annexe, nous présentons les conditions initiales qui ont été déterminées par la méthode de tir, et qui sont indispensables pour démarrer l'algorithme de Runge–Kutta. Ainsi le système d'équations ordinaires est passé, d'un système d'équations aux conditions aux limites (BVP), à un système d'équations ordinaires aux conditions initiales (IVP).

Pr = 0.7

$b$	$q_1'(0)$	$q_2'(0)$	$q_3'(0)$	$f''(0)$	$g'(0)$
0.0	-0.4139212	0.1729540	0.1729540	0.4696000	0.4696000
0.2	-0.4443894	0.2157794	0.1867875	0.6867080	0.5068610
0.4	-0.4632331	0.2527600	0.1953859	0.8544102	0.5300276
0.6	-0.4765884	0.2851188	0.2016722	0.4696000	0.5436002
0.8	-0.4869537	0.3146063	0.2065530	1.1202000	0.5598008
1.0	-0.4958653	0.3427965	0.2103840	1.2325800	0.5704690

Annexe B  
Le code de calcul.

Programme Fortran de la Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre

Nous présentons dans cette annexe une routine assez globale de sorte qu'elle peut être utilisée pour plusieurs modèles physiques :

Subroutine resolution RK4(x, y, dx, NbEquation, Derivee)

C x : abscisse

C y( ) : ce tableau contenant les valeurs y initiales.

C dx : pas de calcul

C NbEquation : nombre d'équations dans le système différentiel

C Derivee : nom de la fonction décrivant le système différentiel

Implicit none

External derivee ! fonction de calcul de la derivee

Integer NbEquation

Real x,y(NbEquation), dx

C Declaration des valeurs locales

Real pred1(NbEquation), pred2(NbEquation), pred3(NbEquation),  
pred4(NbEquation),ytemp(NbEquation),halfdx

Integer i

Halfdx=dx/2

C premiere prédiction

Call derivee(x, y, pred1, NbEquation)

Do i =1, NbEquation

Ytemp(i)=y(i)+ pred1(i)\*halfdx

Enddo

C seconde prediction

Call derivee(x+halfdx, ytemp, pred2, NbEquation)

Do i =1, NbEquation

```

    Ytemp(i)=y(i)+ pred2(i)*halfdx
Enddo
C troisième prediction
    Call derivee(x+halfdx, ytemp, pred3, NbEquation)
    Do i =1, NbEquation
    Ytemp(i)=y(i)+ pred3(i)*halfdx
enddo
C quatrième prediction
    Call derivee(x+dx, ytemp, pred4, NbEquation)
C     *** Estimation de y ***
    Do i=1, NbEquation
    Y(i)=y(i)+ (dx/6.0) *( pred1(i) + 2.0*pred2(i) + 2.0*pred3(i) + pred4(i) )
    Enddo
End

```

Annexe C  
La production d'entropie dans le cas général.

Une petite variation de la densité d'énergie interne  $u$  d'un système est liée à l'entropie volumique  $s$ , au nombre de particule  $N_j$  et à la densité de charge électrique  $r$ . En combinant le premier et le second principe de la thermodynamique, on peut écrire :

$$du = Tds + \sum_j m_j dN_j + f dr \quad (1)$$

Où  $m_j$  est le potentiel chimique des atomes de type  $j$  et  $f$  représente le potentiel électrique existant. En faisant un réarrangement de l'équation (1) on écrit que la variation d'entropie est:

$$ds = \frac{du}{T} + \sum_j \left( \frac{m_j}{T} \right) dN_j + \frac{f}{T} dr \quad (2)$$

L'équation (2) est de la forme :

$$ds = \sum_k f_k dr_k \quad (3)$$

$r_k$  représente une densité généralisée et  $f_k$ , un potentiel généralisé. On peut écrire que le potentiel  $f_k$  correspond à  $\frac{\partial s}{\partial r_k}$ . Chacune de ces densités généralisées doit vérifier

l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \nabla \cdot J_k = 0 \quad (4)$$

$J_k$  représente une densité de courant généralisée.

Le tableau suivant récapitule ce qu'on vient d'écrire :

	$r_k$	$f_k$	$\nabla f_k$
Energie	$u$	$\frac{1}{T}$	$\nabla \left( \frac{1}{T} \right)$
Nombre de particules j	$N_j$	$\frac{m_j}{T}$	$\nabla \left( \frac{m_j}{T} \right)$
Densité de charges	$r$	$-\frac{f}{T}$	$-\nabla \left( \frac{f}{T} \right)$

Cela nous amène à introduire un flux d'entropie qui lui-même est mesuré à partir d'une densité de courant d'entropie  $J_s$  qui aura sa propre équation de continuité, et dont la production d'entropie locale est :

$$S_{gen} = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot J_s \quad (5)$$

Nous pouvons exprimer la densité de courant d'entropie  $J_s$  de l'autre densité de courant via l'équation suivante :

$$J_s = \sum_k f_k \cdot J_k \quad (6)$$

En insérant cette équation dans l'équation (5) on obtient :

$$S_{gen} = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \sum_k f_k \cdot J_k \right) \quad (7)$$

Soit :

$$S_{gen} = \sum_k f_k \cdot \mathbf{\dot{f}}_k + \nabla \cdot \left( \sum_k f_k \cdot J_k \right) \quad (8)$$

En appliquant les lois du calcul vectoriel l'équation (7) devient :

$$\nabla \cdot \left( \sum_k f_k \cdot J_k \right) = \sum_k \nabla f_k \cdot J_k + \sum_k f_k \cdot \nabla J_k = \sum_k \nabla f_k \cdot J_k + \sum_k f_k \cdot (-\mathbf{\dot{f}}_k) \quad (9)$$

Par conséquent :

$$S_{gen} = \nabla \cdot \left( \sum_k f_k \cdot J_k \right) \quad (10)$$

L'équation (10) relie la production d'entropie locale notée  $S_{gen}$  aux densités de courants généralisées  $J_k$  et les champs de forces généralisés  $\nabla f_k$ .

## REFERENCES

- [1] Reynolds, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Phil, Trans. Roy.Soc, 174,935-982. (1883).
- [2] Prandtl, L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Proc, 3<sup>rd</sup> Intern, Math Congr, Heidelberg, 484-491(1904).
- [3] Bejan, A. Entropy Generation Minimization. The Method of Thermodynamic Optimization of Finite-Size Systems and Finite-Time Processes. ISBN 0-8493-9651-4 (1996).
- [4] Nusselt, W, Wärmeübergang in Rohrleitungen, Forsch. Arb Ing; Wes, N<sup>o</sup> 89, Berlin, (1910).
- [5] Runge, C. Ueber die numerische auflosungen von differentialgleichungen Math. Ann 67-178, (1895).
- [6] David O., A Self-similar Solution for forced Convection Boundary Layer Flow of a Newtonian fluid, Department of Mathematical Sciences University of Delaware, Newark DE 19716, USA, Applied mathematics letters (2006).
- [7] Goldstein, S. A on the boundary layer equations. Proc, Cambr;Phil. Soc, 35, 338-340, (1939).
- [8] Goldstein, S. On laminar boundary layer flow near a point of separation, J, Math, 1, 43-69, (1948).
- [9] Lighthill, M.J et Glauert, M.B.:The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder Proc, Roy, Soc, A 230, 188-203 (1955).

- [10] Brown, S.N and Stewartson, K. Laminar separation, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42-79, (1969).
- [11] Van Dyke, M. *Perturbation Methods In Fluid Mechanics*. California: The Parabolic Press, (1975).
- [12] Nayfeh, A. H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: John Wiley & Sons, Inc, (1993).
- [13] Cousteix, J; Mauss, J. *Analyse Asymptotique et couche limite*. ISBN 103-540-31002 Springer Berlin, Heidelberg, New York (2006).
- [14] Carnot, S., *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu*, Édition Critique par Robert. F. J.Vrin, Paris, (1978).
- [15] Thomson, W., *Mathematical and Physical Papers, Vol. I* Cambridge, University Press, Cambridge, (1882).
- [16] R. Clausius: “Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärme selbst ableiten lassen.” *Annalen der Physik und Chemie* 155 pp. 368–397. Translation by W.F. Magie: “On the motive power of heat, and on Loc.cit. pp109–152, (1850).
- [17] Blasius, H, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung*. *Z. Math. Phys.* 56, 1-37. Engl. Transl in NACA TN 1256, (1908).
- [18] Falkner, V.M; et Skan, S W, Some approximate solutions of boundary layer equations. *Phil. Mag.* 12, 865-890, ARC RM, 1314 (1930).
- [19] Pohlhausen, E *Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung*, *ZAMM* 1, 115-121, (1921).
- [20] Yunus A. Çengel, Robert H. Turner, John M. Cimbala. *Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences*, 3/e. McGraw-Hill Higher Education ISBN: 0073529257, (2008).

- [21] Roger Balian, *Les états de la matière*, p205, Université de tous les savoirs, Odile Jacob, (2002).
- [22] Bejan, A. Entropy generation through heat and fluid flow; John Willey & Sons (1982).
- [23] Schlichting Hermann, Boundary Layer Theory. Mac Graw-Hill, ISBN0-07-055334-3 Septième edition, (1978).
- [24] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit, Hydrodynamique Physique, EDP Sciences, CNRS Editions ISBN EDP Sciences ISBN 2-86883-502-3. CNRS Editions 2-271-005635-7, (2001).
- [25] Kincaid David, Cheney Ward, Numerical Analysis Mathematics of scientific computing Pacific Grove, California. ISBN 0-534-13014-3, (1991).
- [26] Devries, L,Paul, A First cours In Computational Physics.Joh, Wiley &Son. ISBN 0-471- 54869-3, (1994).
- [27] Dorfman, A. Sh,Conjugate problems in convective heat transfer ISBN -8237978-1-4200-1TJ260.D64, (2009).
- [28] Cardon M, La granulation solaire est-elle constructale, Département d'astrophysique; Université Paul Sabatier; Rapport scientifique, (2006).
- [29] Bejan, A.W,G.Merx. Constructal theory of social dynamics. Springer Science, Business Media, LLC.ISBN-13: 978-0-387-47680-3, (2007).
- [30] R Kandasamy, Effects of variable viscosity, heat and mass transfer on nonlinear mixed Convection flow over a porous wedge with heat radiation in the presence of homogenous Chemical reaction. ARPN Journal of Engineering and Applied Science, (2009).
- [31] E.A.Brun, A.Martinot-Lagarde, J.Mathieu. Mécanique des fluides Vol, 3, Dunod Paris, (1970).

- [32] N.Bensalah, Z, Tourki. Introduction aux méthodes numériques appliqués et à leur Programmation. Centre des Publications Universitaires, Tunis (2005).
- [33] A.Fortin. Analyse numérique pour ingénieurs, éditions de l'école polytechnique Montréal (1999).
- [34] Alfio Quartironi, Riccardo Sacco, Fausto Saleri. Méthodes numériques, Algorithmes, Analyse et Applications. Springer-Verlag , Italia, Milano (2007).
- [35] Bejan, A. and Lorente, S. Thermodynamic optimization of flow geometry in mechanical and civil engineering. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 26, 305–354. (2001).
- [36] Nikuradse, J. Laminar Reibungsschichten an der langsangestromten platte. Monograph Zentrale f.wiss. Berichtswesen. Berlin, (1942).
- [37] J. Padet, Fluides en écoulement, Méthodes et modèles *Professeur Émérite à l'Université de Reims*, Seconde édition revue et augmentée, (2008).
- [38] A, Bejan. S, Lorente. Design with Constructal Theory, Wiley, (2008).
- [39] A, Bejan. S, Lorente. Constructal theory of generation of configuration in nature and Engineering, *Journal Of Applied Physics* 100, 041301, (2006).
- [40] J.P, Baquiast. Pour un principe matérialiste fort, Editions J.P Bayol, (2007).

# Abstract

The ( EGM) method (Entropy Generation Minimization) appeared for the first time in the works of professor A.Bejan of the university Ducky (USA). This method which became widespread one can later by the constructal theory of the same author and which has for to say that physical everything to be develops by construction, and not by fragmentation as says it the fractal theory. The study which I present here goes into this context, that to use the entropy production as optimization parameter.

It is about a three-dimensional boundary layer wedge-flow being a real parameter  $b$  acting on the geometry of the physical system, varying while  $[0, 1]$ . The considered fluid is Newtonian, incompressible and in constant physical properties. The wedge walls are carried in a constant temperature  $T_w$ . The purpose of this work is to find the optimal values of the parameter.

This analysis proposes a formulation of the entropy generation in a three-dimensional laminar boundary layer flow developing around heated walls of a wedge. We seek for which value angle parameter  $b$  corresponds to the minimum of entropy generation, and prove that this geometrical configuration corresponds to the optimal case from dynamic and thermal point of view. We have proved that the minimum of the entropy generation corresponds to the best heat transfer, and the weakest friction. The dynamic and thermal fields obtained are in perfect agreement with the literature.

Key words: Boundary layer, entropy production, fourth orders Runge-Kutta method, shooting method, self similar solutions, constructal theory

## الخلاصة

تعني هذه الخلاصة بإيجاد حلول عددية لمعادلات الطبقة الحدية ثلاثية الابعاد مع معادليتي الطاقة والأنتروبي. المائع المستعمل لزج غير قابل للانضغاط مع اعتباره نيوتونيا ثابت براندتل يساوي 0.7. استعملنا المتغيرات التشابهية وبالتالي حولنا المعادلات التفاضلية إلى معادلات عادية وذلك بعدما انتقلنا من مسألة ذات قيم حدية إلى مسألة ذات قيم ابتدائية. حلت المعادلات المتحصل عليها باستخدام خوارزم رانج كوتا ذو الدرجة الرابعة وطريقة الرمي معا . يحدد السيلان الأحسن بالتحصل على أكبر قيمة للطاقة الحرارية المعطاة من طرف الجدار وأضعف قيمة للاحتكاك ما بين الجدار والمائع، وهذا يمكننا من الوصول لأحسن خصائص للسيلان، ثم نبحث عن قيمة الزاوية المتمثلة بالثابت  $\beta$  التي توافق أحسن خصائص السيلان. وجدنا بأن ذلك يوافق القيمة  $\beta=0$  الذي يوافق تماما أقل قيمة للأنتروبي . مما تحصلنا عليه أيضا هو أن الأنتروبي يتناقص مع درجة الحرارة كما أنه يتزايد مع الدالة المتميزة للارجوعية المعبر عنها بالكسر  $\Omega / Br$ .

الكلمات المفتاحية: الطبقة الحدية، الأنتروبي المنتجة، رانج-كوتا الدرجة الرابعة، طريقة الرمي، الحلول المشابهة ذاتيا، النظرية

# Résumé

La méthode (EGM), (*Entropy Generation Minimization*) minimisation de la production d'entropie est apparue pour la première fois dans les travaux du professeur A.Bejan de l'université Duke (USA). Cette méthode qui s'est généralisée un peu plus tard par la théorie constructale du même auteur, et qui a pour principe : que tout être physique se développe par construction, et non pas par fragmentation comme le dit la théorie fractale. L'étude présentée rentre dans ce contexte, celui d'utiliser la production d'entropie en tant que paramètre d'optimisation.

Il s'agit d'un écoulement de couche limite tridimensionnel autour d'un dièdre plan d'angle au sommet  $\pi b$ ,  $b$  étant un paramètre réel agissant sur la géométrie du système physique, variant dans l'intervalle  $[0,1[$ . Le fluide considéré est Newtonien, incompressible et à propriétés physiques constantes. Les parois du dièdre sont portées à une température constante  $T_w$ . Le but de ce travail est de trouver les valeurs optimales du paramètre  $b$  pour lesquelles on a un meilleur transfert thermique d'une part, et d'autre part une contrainte à la paroi aussi faible que possible. Ces deux quantités sont traduites respectivement par les profils du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement à la paroi pour les différentes valeurs de  $b$ . La sensibilité de la production d'entropie pour certains paramètres tels que, le nombre de Prandtl, la fonction d'irréversibilité  $f$  a été testée. La résolution numérique du système d'équations gouvernantes est réalisée à l'aide de la méthode de Runge–Kutta au quatrième ordre après avoir transformé le système d'équation aux dérivées partielles (EDP) en un système d'équations ordinaire (EDO), et d'un problème aux conditions aux limites (BVP), (*Boundary Value Problem*) en un problème aux conditions initiales (IVP), (*Initial Value Problem*). Les conditions initiales ont été déterminées par la méthode du tir, (*Shooting method*). Les résultats obtenus sont en parfait accord avec la bibliographie.

Mots clés : couche limite, production d'entropie, Runge-Kutta d'ordre quatre, méthode du tir, solutions auto semblables, théorie constructale.