

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ MENTOURI CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

THÈSE

**PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE DIPLÔME DE DOCTORAT EN SCIENCES
PHYSIQUES
SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE THÉORIQUE**

THÈME

**SUPERSYMMÉTRIE DANS LE FORMALISME DE LA
PARAQUANTIFICATION
ET MÉTRIQUE PSEUDO-COMPLEXE DE ROBERTSON-WALKER**

Maghlaoui Leila

SOUTENUE LE :...../.....

Devant le jury :

Président :	A. Benslama	Pr.	Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	N. Belaloui	Pr.	Université Mentouri Constantine
Examineur :	W. Greiner	Pr.	Institut des Etudes Avancées, Frankfurt
Examineur :	T. Boudjedaa	Pr.	Université de Jijel
Examineur :	K. Ait Moussa	Pr.	Université Mentouri Constantine
Examineur :	A. Boudine	MC.	Université de Oum El Bouagui

**A la mémoire de mon père
A ma très chère mère
A mes sœurs et frères**

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Nadir Belaloui, Professeur à l'université Mentouri-Constantine, pour m'avoir proposé ce sujet de recherche, pour m'avoir encadré, pour m'avoir guidé et encouragé dans ce travail de recherche, pour les connaissances scientifiques et les conseils qu'il m'a apporté, pour la patience et l'amabilité, pour ses grands valeurs humaines dont il a fait preuve tout au long de ces années. Grâce à lui j'ai beaucoup appris.

Je remercie également notre ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique pour le détachement de 18 mois qu'il m'avait accordé afin de finaliser cette thèse.

La dernière partie de ce travail de recherche a été réalisé au centre allemand **FIAS** pour la physique. Je tiens à remercier Professeurs Walter Greiner et Peter Hess Frankfurt Institute for Advanced Studies, Johann Wolfgang Goethe University et Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Circuito Exterior, C.U respectivement, pour avoir tout d'abord accepté de me recevoir dans leur laboratoire, pour les conseils et surtout leur assistance afin de mener à terme le travail réalisé sous leur direction.

Je remercie également Monsieur Achour Benslama Professeur à l'université de Constantine, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour avoir accepté la présidence du jury.

Je tiens à remercier les membres du jury, Achour Benslama professeur à l'université de Constantine, Karim Ait Moussa professeur à l'université de constantine, Tahar Boudjedaa à l'université de Jijel, Azdine Boudine à l'université de Oum El Bouagui pour avoir lu attentivement mon manuscrit et pour y avoir apporté leurs corrections.

Je tiens à remercier tout particulièrement Melles Nour el Houda Arabi, maitre assistant à l'université de Boumerdès, et Assia Abdaloui, maître de conférence à l'université de Oum El Bouagui, pour m'avoir soutenu et beaucoup aides respectivement au début et à la fin de la thèse.

Mon séjour à Frankfort m'a permis de me faire plusieurs amies qui ont contribué d'une façon ou une autre à la réalisation de ce travail. Je remercie spécialement : Birget et sa famille, Djamila et sa famille, Samia et sa famille, Mourade et sa famille et que mes amies Faycal et sa famille, Karima, Lynda, Fatima, Amel et Nehade, soient remerciées ici pour leur amitié et leurs disponibilités depuis de nombreuses années.

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	L'origine de la Mécanique Quantique	9
1.2	Quantification Canonique	11
1.3	Formalisme de la théorie paraquantique	12
1.3.1	Cas d'un oscillateur harmonique	12
1.3.2	Généralisation	14
1.4	Cas des parachamps	15
2	Supersymétrie	17
2.1	Introduction	17
2.2	Algèbre de Supersymétrie	19
2.3	Représentation de l'algèbre de supersymétrie	20
2.4	Multiplets de supersymétrie	21
2.5	Modèle supersymétrique	22
2.6	Supersymétrie en mécanique quantique	25
2.7	Les définitions de la supersymétrie en mécanique quantique	26
2.8	La construction du Hamiltonien supersymétrique	27
2.8.1	Potentiel partenaire supersymétrique	27
2.8.2	Factorisation et hiérarchie du Hamiltonien	29
2.8.3	L'invariance de forme	30
2.9	Equivalence	31
3	Parasupersymétrie	33
3.1	Introduction	33
3.2	Parasupersymétrie en mécanique quantique	34
3.2.1	Modèle de Rubackov-Spiridonov	34

3.2.2	Le modèle de Beckers et Debergh	35
3.3	La parasupersymétrie à l'ordre P quelconque	36
3.3.1	Le modèle de Khare	36
3.3.2	Le modèle de Chenaghlou et Fakhri	37
3.3.3	L'équivalence	39
3.4	Représentation matricielle d'un système parasupersymétrique à l'ordre P	41
4	Modèle Bosons-(P=2) Parafermion de Wess-Zumino	44
4.1	Le Lagrangian du système	44
4.2	La parasupercharge Q_a	46
4.2.1	Calcul de $\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle$	49
4.2.2	Calcul de $\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle$	55
4.3	Fermeture de la parasuperalgèbre des transformations	57
4.3.1	Algèbre des transformations du champ bosonique A	57
4.3.2	Algèbres des transformations du champ parafermionique $\Psi^a(x)$	58
4.4	Générateurs des transformations parasupersymétriques	59
4.4.1	Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}, Q], A]$	60
4.4.2	Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B]$	61
4.4.3	Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b]$	61
5	Le Modèle ($P = 2$) Parabosons-Parafermion de Wess-Zumino	64
5.1	Le Lagrangien du système	64
5.2	Parasuperalgèbre des générateurs Q_a	69
5.3	Fermeture de la superalgèbre	73
5.4	Générateurs de transformations infinitésimales	74
6	La Métrique Pseudo-Complexe de Robertson-Walker	77
6.1	Introduction	77
6.2	Les Variables Pseudo-Complexes	78
6.2.1	Relativité Générale Pseudo-Complexe	81
6.2.2	Principe variationnel	83
6.2.3	Quelques propriétés de la métrique	84
6.3	La métrique Pseudo-Complexe de Robertson-Walker	87
6.3.1	Symboles de Christoffel	87
6.4	Résolution des équations du mouvement	92
6.5	Conséquences	99

7 Conclusion Générale et Perspectives	104
Annexes	
A Relations utiles	106
B Calcul de P_μ	110
C Calcul de commutateur $[P_\mu, P_\nu]$	115
D Calcul du commutateur $[P_\mu, Q_a]$	117
E Calcul du commutateur $[R, P_\mu]$	118

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner un bref historique sur la mécanique quantique et sa généralisation à l'ordre P , d'une part, nous présenterons ensuite la généralisation de la première et la deuxième quantifications dans le formalisme de la paraquantification à l'ordre P .

Depuis plusieurs siècles, les physiciens cherchent à comprendre les phénomènes physiques à l'aide des lois fondamentales. En effet, tous les phénomènes physiques connus sont exprimés par quatre interactions fondamentales par lesquelles les objets ont une action l'un sur l'autre. Ils interagissent, suivant la nature des objets, par les forces d'interaction ; forte, électromagnétique, faible et la gravitation.

Interaction forte : L'interaction forte, ou force nucléaire forte, assure la cohésion du noyau en faisant fortement s'attirer les nucléons. Elle ne s'exerce qu'à des distances très courtes, quelques diamètres de noyaux. À distance égale, elle est 100 à 1 000 fois plus intense que l'interaction électromagnétique.

Interaction électromagnétique : se manifeste sous deux formes, la force électrique et la force magnétique. Toute matière est un mélange de protons positifs et d'électrons négatifs qui s'attirent et se repoussent avec la force électrique. Mais ce n'est pas vrai quand les charges sont en mouvement, en effet, les forces électriques dépendent aussi des mouvements des charges d'une façon compliquée. Nous appelons force magnétique une partie de la force qui s'exerce entre des charges en mouvement. C'est pourquoi nous appelons le sujet électromagnétisme. Elle porte à l'infini.

Interaction faible : Au début du XXe siècle, les physiciens découvrent la radioactivité bêta dans laquelle un neutron libre se transforme, en environ 10 minutes, en proton, électron et antineutrino ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$). En 1934, Enrico Fermi propose le premier modèle théorique

de la désintégration β , dans ce cas, une nouvelle interaction de faible intensité et de portée nulle, agissant ponctuellement a été mise en évidence : c'est l'interaction faible. En 1957, Richard Feynman et Murray Gell-Mann modifient la théorie de Fermi pour prendre en compte la violation de parité. Dans cette théorie, l'interaction faible est de portée nulle (ponctuelle).

Gravitation : Est une force analogue à l'interaction électromagnétique qui varie comme l'inverse du carré de la distance. C'est de très loin la force la plus faible des quatre : 10^{-40} fois plus faible que la force électromagnétique. La gravitation est toujours attractive et par contre, l'interaction électromagnétique se manifeste en deux formes attractive et répulsive.

En relativité générale, la gravitation n'est plus perçue comme une force d'attraction, mais plutôt comme une manifestation de la déformation de la géométrie de l'espace-temps sous l'influence des échelles de l'univers. Il faut lui adjoindre des hypothèses sur la répartition spatiale de la matière. Ceci a été représenté par le principe cosmologique dans lequel l'univers est spatialement homogène. Ce principe a été formulé par Albert-Einstein en 1917 en construisant un modèle d'univers statique.

La découverte de l'expansion de l'univers par Edwin Hubble remet en cause le modèle statique d'Einstein et finit de jeter les bases de la cosmologie moderne où l'univers est en expansion et décrit par la relativité générale. Son évolution est déterminée par cette théorie, ainsi que par les propriétés physiques des formes de matière présentes dans l'univers. Il existe cependant outre la matière visible constituant les étoiles, une matière noire aux propriétés et à la distribution encore très mal connues.

La dynamique de l'univers va dépendre des propriétés de la matière qui le compose, en particulier de son équation d'état. On peut montrer que, sauf cas particulier, l'univers peut être statique. Il est soit en contraction, soit en expansion globales. Le modèle qui décrit l'expansion d'univers spatialement homogène et isotrope est la métrique de Robertson-Walker.

Pour décrire précisément comment les quatre interactions interagissent dans la matière, il est nécessaire d'introduire les constituants élémentaires de cette matière [1]. Ces derniers se partagent en deux grandes catégories déterminées par leur participation aux interactions fondamentales, les leptons d'une part, qui ne participent pas à l'interaction forte et les quarks d'autre part, qui participent à toutes les interactions. Dans la catégorie des leptons, les leptons chargés participent à l'interaction électromagnétique et à l'interaction faible et les leptons neutres ou neutrinos ne participent qu'à l'interaction faible. La participation des constituants élémentaires aux interactions fondamentales est conditionnée par leur nombres quantiques conservés, ou charges d'interaction. À chaque constituant de la matière est associée son antiparticule, une particule de même masse et de charges opposées. Jusqu'à ces

derniers temps on étudiait les symétries associées aux groupes globaux. Dans le cadre de ces symétries, les trois types d'interactions (forte, électromagnétique et faible) étaient examinés séparément. L'idée s'est présentée donc de construire des modèles qui unifieraient en un seul les différents types d'interactions. L'utilisation des symétries associées aux groupes locaux présente pour la réalisation de cette idée des moyens très intéressants. C'est que pour construire des théories localement invariantes il faut introduire de nouveaux champs qui ont reçu le nom de champs de jauge. Nous pouvons supposer que les médiateurs de tous les trois types d'interactions sont les mêmes champs - champs de jauge vectoriels. En effet, toutes les particules élémentaires que nous avons vue jusqu'à maintenant sont appelées fermions. D'après la mécanique quantique, ces forces agissent sur les fermions élémentaires par l'échange de bosons de jauge. Le photon est le boson de l'interaction électromagnétique ou QED, les bosons intermédiaires W^+ , W^- et Z sont les bosons de l'interaction faible et les gluons sont les bosons de l'interaction forte au niveau des quarks, la chromodynamique quantique ou QCD. Au niveau de la théorie des groupes, l'interaction forte est représentée par le groupe de rotation $SU(3)$. De la même façon, les interactions électromagnétique et faible sont représentées par les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement.

Tous les types d'interactions obtiennent alors une base commune et il devient possible de les unifier. En effet, La symétrie locale d'isospin a entraîné l'unification des interactions électromagnétique et faible qu'on appelle l'interaction électrofaible. Dans ce cas, le groupe de symétrie est décrit par $U(1) \times SU(2)$. L'unification de l'interaction électrofaible avec l'interaction forte, est réalisée par le modèle standard. Le groupe de représentation est alors $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. La grande différence entre une théorie contenant deux interactions distinctes et l'unification de deux interactions en une seule est liée aux constantes de couplages de ces interactions. Par exemple la théorie électrofaible, les deux interactions possèdent chacune une constante de couplage distincte, elles ne sont pourtant pas unifiées. De la même façon, dans le modèle standard, elles ne sont pas plus unifiées que ne le sont les interactions électromagnétique et faible dans la théorie électrofaible, c'est-à-dire les trois interactions sont distinctes dans ce modèle. Cependant, une particule prédite par le modèle standard reste à découvrir, cette particule est appelée le boson de Higgs. En effet, sans cette particule, il est impossible de donner une masse aux W^+ , W^- et Z_0 , mais aussi aux particules comme l'électron ou les quarks (et donc à la matière). En 1973, Sheldon Glashow et Howard Georgi, postulent une nouvelle théorie dite de "Grande Unification" (GUT pour Grand Unified Theory), celle-ci est décrite par une seule interaction : l'interaction électro-nucléaire, unification des trois interactions électromagnétique, faible et forte. Les Théories de Grande Unification sont basées sur des groupes de jauge non abéliens, c'est-à-dire non

commutatifs, comme le sont $SU(5)$ et $SO(10)$. La prédiction principale de cette théorie est la possibilité de désintégration des protons (heureusement avec une probabilité suffisamment faible pour que nous ayons encore quelques milliards d'années devant nous!). Mais les résultats expérimentaux sont en désaccord avec ces prédictions et cette théorie ne semble pas être valable : jusqu'à présent aucun proton se désintégrant n'a pu être observé, sa durée de vie étant donc au moins supérieure à 10^{31} années. Jusqu'à maintenant nous avons vue uniquement l'unification des trois interactions (forte, électromagnétique et faible). Mais le grand rêve des physiciens est d'unifier les quatre interactions fondamentales pour aboutir à une ultime théorie unique : la théorie du tout. Au niveau de l'unification de la gravitation avec les trois forces fondamentales (modèle standard), il y a un problème important qui se traduit par le fait que le modèle standard est une théorie quantique, alors que la relativité générale d'Einstein est une théorie classique. La gravitation d'Einstein et la mécanique quantique semblent devoir demeurer incompatibles. Donc, il est nécessaire de construire une théorie quantique de la gravitation dans laquelle sont incluses les trois interactions fondamentales.

Les meilleures perspectives de succès pour quantifier la relativité générale reposent sur la construction de modèles unifiant l'interaction gravitationnelle aux autres interactions fondamentales, puisque le comportement quantique de ces dernières est mieux contrôlé. Des candidats très populaires sont fournis par la supersymétrie et la théorie des cordes. La supersymétrie permet l'introduction des interactions gravitationnelles dans la théorie quantique des champs. Une théorie des champs qui combine la supersymétrie et la relativité générale, nous l'appelons la supergravité. Comme la théorie de la gravitation d'Einstein est une théorie de jauge du groupe des translations et des rotations de l'espace-temps, une théorie avec supersymétrie locale inclut automatiquement la gravitation. En 1978, Eugène Cremmer, Bernard Julia et Joël Scherk construisent la théorie de supergravité dans un espace-temps à 11 dimensions. Comme toute théorie des champs de la gravité, une théorie de la supergravité contient un champ de spin 2 qui correspond au graviton. La supersymétrie entraîne l'existence d'une particule superpartenaire pour le graviton. Cette particule, qui a le spin $3/2$, est nommée le gravitino. A 11 dimensions, la théorie de supergravité représente aussi la théorie de supersymétrie maximale c'est-à-dire à cette dimension, la supergravité ne contient pas des champs de spin supérieur à 2. En effet, pour la dimension plus petite que 11, les théories de supergravité maximales considèrent des réductions dimensionnelles de la supersymétrie à 11 dimension sur des tores de différentes dimensions (on dit aussi compactification). En 1995, Witten propose que la théorie de supergravité maximale à 11 dimensions est considérée comme la limite classique d'une théorie quantique, pas encore formulée, appelée théorie M qui possèdent la propriété de connecter de façon continue les différentes théories de super-

cordes déjà existantes et reliées entre elles par des dualités. D'un point de vue quantique, l'objet fondamental de cette théorie devrait être une brane et non une corde, c'est à dire un objet qui décrit un espace à deux dimensions avec une dimension de temps qu'on appelle le volume d'univers alors que la surface d'univers pour le corde est représenté par une dimension d'espace et une dimension de temps. Par compactification de la brane autour de la dimension supplémentaire, on retrouve la corde fondamentale de la théorie IIA (c'est un type de la théorie des cordes). La supergravité aurait donc pu être une candidate sérieuse pour une théorie unifiée des particules élémentaires et de leurs interactions fondamentales.

Nous avons vu que les particules élémentaires (fermions et bosons), les interactions qu'elles peuvent avoir entre elles et la supersymétrie, sont en général décrites par la mécanique quantique. Dans les théories supersymétriques, les extensions de l'algèbre de Poincaré sont obtenues à partir d'une «Racine carrée» de la translation, $QQ \sim p$. Il est tentant d'envisager d'autres solutions où la nouvelle algèbre est obtenue à partir de racines encore plus élevées[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. La plus simple alternative que nous examinerons dans cette thèse est " $QQQ \sim p$ ". Il est important de souligner que de telles structures ne sont pas des (super) algèbres de Lie (même si elles contiennent une sous-algèbre de Lie), nous savons en outre qu'aucun no-go théorème associé à un tel type d'extension n'a été considéré dans la littérature. Plusieurs possibilités ont déjà été examinées dans la littérature. Ici nous nous concentrerons sur l'une des extensions possibles appelée parasupersymétrie qui décrit la supersymétrie dans le formalisme de la paraquantification. Par la suite nous allons voir que la généralisation de la mécanique quantique est donnée par la paraquantification à l'ordre P , tel qu'à $P = 1$ correspond le cas ordinaire. Les particules élémentaires sont alors des parafermions et des parabosons. Dans ce travail, nous allons nous intéresser à l'extension de la supersymétrie dans le formalime paraquantique. Cette thèse est constituée de six chapitres. On commence d'abords par une brève introduction sur le formalisme de la paraquantification à l'ordre P , c'est l'objet du chapitre 1. Nous nous concentrerons ensuite sur les différentes définitions de supersymétrie en mécanique quantique pour $N = 1$ et $N = 2$ où nous montrons l'équivalence entre ces définitions, c'est l'objet du chapitre 2. Dans le chapitre trois nous présenterons la généralisation de la supersymétrie dans le cadre de la paraquantification à l'ordre P . nous présenterons cinq différentes définitions de parasupersymétrie du modèle de Rubakov-Spiridnov à l'ordre deux pour $N = 1$ et $N = 2$ et à la différence du cas ordinaire, elles ne seront pas toutes équivalentes. Enfin nous déterminerons la condition générale pour avoir l'équivalence entre le modèle de Khare et le modèle de Chenaghlou et Fakhri. Par la suite, nous nous intéresserons à la construction du modèle de Wess-Zumino en termes de deux champs bosoniques et un parachamp fermionique d'ordre $P = 2$, et en termes des

parachamps fermioniques et bosoniques de même ordre $P = 2$, on dérivera en particulier les différentes parasupercharges et étudiera l'extension parasupersymétrique des algèbres de Poincaré pour les deux modèles de Wess-Zumino en question et vérifiera la fermeture de l'algèbre des transformations. c'est l'objet des chapitres 4 et 5. Dans le chapitre 6, nous présenterons un travail totalement différent aux chapitres précédents, le formalisme pseudo-complexe de la relativité générale ainsi que son application à la construction du modèle de l'univers. Ceci nous amènera à présenter les éléments clés de la construction d'une métrique d'univers : la métrique pseudo-complexe de Robertson-Walker. Aussi dans ce chapitre nous montrerons que ce modèle introduit de nouvelles fonctions ζ_k qui vont par la suite donner une nouvelle construction de l'énergie noire. Finalement nous terminerons notre travail par une conclusion générale et des perspectives.

1.1 L'origine de la Mécanique Quantique

Dans l'état actuel des connaissances scientifiques, la mécanique quantique joue un rôle fondamental pour la description et la compréhension des phénomènes. En effet, dès que ces derniers se produisent à une échelle très fine (échelle atomique ou subatomique) ils ne sont explicables que dans le cadre de la physique quantique. D'un point de vue historique, la mécanique quantique a repris et développé l'idée de dualité onde-particule introduite par de Broglie en 1924 consistant à considérer les particules de matière non pas seulement comme des corpuscules ponctuels, mais aussi comme des ondes, possédant une certaine étendue spatiale (voir Mécanique ondulatoire). Bohr a introduit le concept de « complémentarité » pour résoudre cet apparent paradoxe : tout objet physique est bien à la fois une onde et un corpuscule, mais ces deux aspects, mutuellement exclusifs, ne peuvent être observés simultanément. Si l'on observe une propriété ondulatoire, l'aspect corpusculaire disparaît. Réciproquement, si l'on observe une propriété corpusculaire, l'aspect ondulatoire disparaît. Les deux propriétés quantiques, corpusculaire (énergie E et impulsion \vec{p}) et ondulatoires (pulsation $\omega = 2\pi\nu$ et vecteur d'onde \vec{k} où $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$) sont reliées mathématiquement par les relations quantiques de Broglie sous la forme suivante

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (1.1.1)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (1.1.2)$$

Dans ce cas, de Broglie avait d'abord postulé l'existence d'une onde sans en avoir posé d'équation. À la suite, en 1926, la mécanique ondulatoire de Schrödinger apparaît de façon différente. Elle généralise les travaux de Broglie sur les ondes de matière, en proposant une

équation de propagation de l'onde qui représente le système quantique. Alors, nous associons à chaque particule (matière) une onde-plane $\Psi(\vec{r}, t)$ qui vérifie l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

L'opérateur $\Delta = \vec{\nabla}^2$ représente le Laplacien. $V(\vec{r})$ représente le potentiel d'une particule massive m .

À la même époque, Werner Heisenberg élabore la mécanique matricielle : au lieu d'utiliser comme Schrödinger une équation différentielle pour décrire l'évolution d'un système quantique, il utilise des objets mathématiques peu familiers aux physiciens de l'époque : des tableaux de nombres appelés matrices, qui ont la propriété de ne pas forcément commuter. La position et la vitesse des particules sont décrites par des matrices. L'impossibilité de déterminer simultanément avec précision la position et la vitesse d'une particule se traduit par le fait que la matrice correspondant à la position et celle correspondant à la vitesse ne commutent pas.

Dans le formalisme de la mécanique quantique, la relation qui combine la fréquence et l'énergie est une conséquence directe de l'équation du mouvement de Heisenberg

$$i\hbar\frac{dA}{dt} = [A, H] \quad (1.1.4)$$

où A est une observable arbitraire.

H est le Hamiltonien ou l'opérateur d'énergie du système.

En effet, si nous prenons la valeur moyenne de l'équation (1.1.4) entre deux états propres du Hamiltonien, nous trouvons la relation suivante

$$h\nu = E_1 - E_2 \quad (1.1.5)$$

De la même façon, la relation qui combine longueur-d'onde et impulsion est donnée par

$$-i\hbar\nabla A = [A, \vec{p}] \quad (1.1.6)$$

où \vec{p} est l'opérateur d'impulsion d'un système conservatif.

Dans la théorie relativiste (1.1.4) et (1.1.6) peuvent être écrites dans une forme unifiée telle que

$$-i\hbar\frac{dA}{dx_\mu} = [A, p_\mu] \quad (1.1.7)$$

p_μ est le quadrivecteur d'énergie-impulsion.

En théorie des champs quantiques, les champs ne sont pas liés à la dualité onde-corpuscule. Les particules élémentaires possèdent déjà cette dualité dans l'acceptation du terme de la

mécanique classique qu'on appelle la deuxième quantification. Ce que l'on entend par champ est un concept qui permet la création ou l'annihilation de particules en tout point de l'espace. Comme tout système quantique, un champ quantique a un hamiltonien et obéit à l'équation de Schrödinger

$$H |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \quad (1.1.8)$$

En 1926, Paul Adrien Maurice Dirac montre que ces deux descriptions sont parfaitement équivalentes. Les bases du formalisme mathématique de la mécanique quantique sont posées.

1.2 Quantification Canonique

Procéder à la quantification d'un système revient à suivre les étapes suivantes

A partir d'un Lagrangien classique L donné, les variables d'impulsion p_i ($i = 1, \dots, f$) qui sont conjuguées canoniques des variables dynamiques q_i sont définies. Le Hamiltonien est construit en termes des variables canoniques q_i et p_i . La transition à la mécanique quantique (quantification) est réalisée par la réinterprétation des q_i et p_i en termes d'opérateurs satisfaisant les équations (1.1.4) et (1.1.6), tout en essayant de garder le plus possible la forme de l'hamiltonien et des équations du mouvement inchangée. Ceci impose des contraintes sur q_i et p_j . Dès 1950, Wigner[13] démontre que c'est une solution possible mais en aucun cas la seule. Une solution suffisante (mais pas nécessaire) est donnée par les équations

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\hbar \delta_{ij} \\ [q_i, q_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Nous avons alors pris l'habitude de définir la quantification par la réinterprétation des q_i , p_j en termes d'opérateurs vérifiant (1.2.1). Cependant une solution plus générale satisfaisant aux conditions précédentes est possible. En effet en 1953, Green démontre que [14]

$$\begin{aligned} [q_k, [p_l, q_m]_{\mp}] &= 2\delta_{kl} q_m \\ [q_k, [p_l, p_m]_{\mp}] &= 2\delta_{kl} p_m \mp 2\delta_{km} p_l \\ [q_k, [q_l, q_m]_{\mp}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

où les équations (1.2.1) représentent un cas particulier ; c'est la paraquantification.

Le formalisme de la paraquantification est caractérisé par un paramètre P entier, appelé ordre de la paraquantification de telle sorte que $P = 1$ corresponde à la quantification ordinaire. Notons alors que les équations (1.1.4) et (1.1.6) sont les plus fondamentales de la mécanique quantique.

1.3 Formalisme de la théorie paraquantique

1.3.1 Cas d'un oscillateur harmonique

a. Cas parabosonique

Nous nous proposons de mettre en évidence la paraquantification à travers l'exemple de l'oscillateur harmonique [15, 16]. L'importance de l'oscillateur harmonique est justifiée (entre autre) par le fait qu'en théorie de champs, le champ est considéré comme un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques de différentes fréquences.

En considérant le système d'un oscillateur harmonique dont le Lagrangien et l'Hamiltonien classiques sont donnés respectivement par

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2) \quad (1.3.1)$$

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2) \quad (1.3.2)$$

et satisfaisant aux équations du mouvement d'Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -q \\ \dot{q} &= p \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Quantifier ce système revient à imposer aux opérateurs q_i , p_j les équations (1.1.4) et (1.1.6) tout en gardant les équations (1.3.3). Ceci est traduit par

$$\begin{aligned} i\dot{q} &= [q, H] = ip \\ i\dot{p} &= [p, H] = -iq \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Maintenant, au lieu des variables q_i , p_j , il est plus pratique d'utiliser les opérateurs a , a^\dagger définis par

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (q + ip) \\ a^\dagger &= \frac{1}{2} (q - ip) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

où † signifie le conjugué hermétique.

Les équations (1.3.2) et (1.3.4) prennent les formes suivantes

$$H = \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = N \quad (1.3.6)$$

$$[a, N] = a, \quad [a^\dagger, N] = a^\dagger \quad (1.3.7)$$

D'après l'équation (1.3.6), toutes les valeurs propres de l'opérateur hermitien N doivent être non négatives, donc le spectre de ce dernier est borné inférieurement, c'est à dire la valeur minimale existe. D'un autre côté, en agissant les équations (1.3.6) sur les vecteurs propres

$|n\rangle$ de N avec la valeur propre n , on trouve que les opérateurs a (a^\dagger) diminue respectivement (augmente) la valeur de n par unité. Ceci implique que le spectre de N est de la forme

$$N_n = N_o + n \quad (1.3.8)$$

avec

$$N_o \geq 0, (n = 0, 1, \dots) \quad (1.3.9)$$

En combinant (1.3.8) et (1.3.6), nous trouvons la relation suivante

$$N_o + n = \frac{1}{2} (|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2)$$

En faisant un raisonnement par récurrence sur n , nous obtenons directement les éléments de matrice des opérateurs a , a^\dagger

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^\dagger = \begin{cases} (2N_o + n)^{\frac{1}{2}} & \text{pour } n \text{ pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad (1.3.10)$$

D'après l'équation (1.3.10), nous pouvons écrire

$$\langle n | [a, a^\dagger] | n' \rangle = \delta_{n,n'} \begin{cases} 2N_o & \text{pour } n \text{ pair} \\ 2(1 - N_o) & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Pour le cas $N_o = \frac{1}{2}$, le commutateur (1.3.11) devient

$$[a, a^\dagger] = 1$$

qui correspond au cas des relations de commutation canoniques.

Pour le cas $N_o = 1$, nous pouvons démontrer que les opérateurs a , a^\dagger satisfont des relations de commutation trilineaires du type

$$aaa^\dagger - a^\dagger aa = 2a$$

Plus N_o augmente et plus les relations se compliquent c.à.d. deviennent du type

$$aaa^\dagger a + \dots, aa^\dagger aaa^\dagger + \dots$$

b. Cas parafermionique

Le système fermionique n'a pas l'analogie en mécanique classique, pour cela en utilisant une définition "ad hoc" correspondant à un oscillateur fermionique, le Hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{1}{2} (a^\dagger a - a a^\dagger) \quad (1.3.12)$$

De la même façon, nous trouvons les éléments de matrice des opérateurs a, a^\dagger

$$a_{n+1,n}^\dagger = a_{n,n-1} = \{(n+1)(P-n)\}^{\frac{1}{2}} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1.3.13)$$

Les relations de commutations que doivent satisfaire a, a^\dagger sont dérivées à partir de (1.3.13). Par exemple, le cas $P = 0$ conduit au résultat trivial : $a = a^\dagger = 0$. Dans le cas $P = 1$, les opérateurs a, a^\dagger satisfont aux relations d'anticommutations

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (1.3.14)$$

cas qui correspond à un oscillateur harmonique fermionique ordinaire.

Quant P augmente, la situation devient plus compliquée. Dans le cas $P = 2$, par exemple, les opérateurs a et a^\dagger ne satisfont plus les relations de commutation bilinéaire (1.3.14) mais des relations de commutation trilinéaires

$$a^3 = 0, \quad aa^+a = 2a, \quad aaa^+ + a^+aa = 2a$$

1.3.2 Généralisation

a. Cas de plusieurs oscillateurs harmoniques

Dans ce cas on considère un système de f oscillateurs, le k -ième étant décrit par les opérateurs a_k, a_k^\dagger ($k = 1, 2, \dots$). Chaque oscillateur vérifie les relations établies précédemment.

La paraquantification de ce système est définie par les relations de commutation trilinéaires suivantes

$$\begin{aligned} \left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_m \right]_{\mp} \right] &= 2\delta_{kl}a_m \\ \left[a_k, \left[a_l^\dagger, a_m^\dagger \right]_{\mp} \right] &= 2\delta_{kl}a_m^\dagger \mp 2\delta_{km}a_l^\dagger \\ \left[a_k, \left[a_l, a_m \right]_{\mp} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

où les signes en haut (en bas) correspondent respectivement au parafermions (parabosons) et où, on a introduit l'état du vide $|0\rangle$ qui vérifie les conditions suivantes

$$\begin{aligned} a_k |0\rangle &= 0 \text{ pour tout } k \\ N_k |0\rangle &= 0 \text{ pour tout } k \\ \langle 0 | 0 \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

L'avantage de ces relations est le fait qu'elles soient trilineaires quelque soit l'ordre P . L'inconvénient en est qu'elle ne se suffisent pas à elles seules mais dépendent de la condition sur le vide

$$a_k a_l^\dagger |0\rangle = P \delta_{kl} |0\rangle \quad (1.3.17)$$

qui fixe l'ordre de paraquantification P .

1.4 Cas des parachamps

En théorie des champs la paraquantification, se fait de la même façon que dans le cas précédent. En effet, considérons (pour simplifier) un champ non relativiste $\Psi(x, t)$ et son conjugué $\Psi^\dagger(x, t)$. En théorie classique, le champ $\Psi(x, t)$ obéit à l'équation suivante

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \Psi(x, t) \quad (1.4.1)$$

qui correspond au cas d'interaction libre, où m est une constante positive, de dimension de masse. L'expression de Hamiltonien est donnée par

$$H = \frac{1}{2m} \int d^3x (\nabla \Psi^\dagger(x, t), \nabla \Psi(x, t)) \quad (1.4.2)$$

Nous utilisons le même procédé de quantification, en considérant l'équation de mouvement de Heisenberg (1.1.4) comme la plus fondamentale. En effet, pour satisfaire le principe de correspondance et les équations de Heisenberg (1.1.2), les champs doivent vérifier

$$\begin{aligned} \left[\Psi(x, t), [\Psi^\dagger(y, t), \Psi(z, t)]_{\mp} \right] &= 2\delta^{(3)}(x-y) \Psi(z, t) \\ \left[\Psi(x, t), [\Psi^\dagger(y, t), \Psi^\dagger(z, t)]_{\mp} \right] &= 2\delta^{(3)}(x-y) \Psi^\dagger(z, t) \mp 2\delta^{(3)}(x-z) \Psi^\dagger(y, t) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

$$[\Psi(x, t), [\Psi(y, t), \Psi(z, t)]_{\mp}] = 0$$

où, la condition sur l'état du vide $|0\rangle$ devient

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) |0\rangle &= 0 \\ \Psi(x, t) \Psi^\dagger(y, t) |0\rangle &= P \delta^{(3)}(x-y) |0\rangle, \quad (P = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

P est l'ordre de la paraquantification. L'interprétation physique du nombre entier P est d'une part le nombre maximal de particules parabosoniques pouvant occuper un état antisymétrique, et d'autre part, P est le nombre maximal de particules parafermioniques pouvant occuper un état symétrique (en particulier, le nombre maximal qui peut être occupé dans le

même état). En général, nous avons deux méthodes de quantification, quantification canonique et quantification par l'intégrale de chemin. Dans la référence [17, 18], la parastatistique a été construite dans le formalisme de la quantification des intégrales de chemin en utilisant les composantes de Green qui vérifient des relations bilinéaires.

Chapitre 2

Supersymétrie

Dans ce chapitre, nous allons exposer les notions de base de la supersymétrie dans la théorie de champ quantique. D'une part, nous exposerons l'approche traditionnelle de la supersymétrie dans le formalisme des superchamps. Nous présenterons ensuite l'approche géométrique, quant à la construction de théories supersymétriques pour des supercharges. Nous donnerons les différents modèles supersymétries, nous définirons aussi les propriétés de ces modèles. D'autre part, nous allons donner un bref historique sur la supersymétrie au niveau de la mécanique quantique. Nous rappellerons les différentes définitions de supersymétrie en mécanique quantique. Ensuite, nous présenterons aussi l'indice de Witten et son importance pour la supersymétrie. Enfin, nous montrerons l'équivalence entre les différentes définitions pour $N = 1, 2$ supercharges et leur représentations matricielles.

2.1 Introduction

Le concept de symétrie joue un rôle essentiel dans la description des phénomènes physiques et la formulation des modèles d'unification déjà construits et constitue également le principal guide dans la recherche de nouveaux modèles. Il y a plusieurs symétries dans la nature. Certaines sont visibles et d'autres sont cachées. La théorie des particules élémentaires a largement recours à la théorie des groupes, qui permet d'établir plusieurs propriétés importantes des symétries. Il existe deux catégories des symétries des particules élémentaires. Parmi elles, certaines restent invariantes lors de la transformation de l'espace-temps quadridimensionnel, mais il existe aussi des transformations dans lesquelles les coordonnées spatio-temporelles ne changent pas, la variation portant seulement sur les fonctions d'ondes. Ces transformations sont liées aux propriétés internes des champs et des particules qui leur

correspondent, nous pouvons donc les appeler transformations internes. Pour la description des propriétés spatio-temporelles et internes, on peut introduire respectivement les groupes de symétries spatiales tels que le groupe de Poincaré, et interne, en particulier le groupe $SU(3)$.

Au cours du temps plusieurs études ont été effectuées pour unifier la symétrie d'espace-temps avec la symétrie interne. Effectivement, en 1967, Coleman et Mandula [19] fournissent un argument rigoureux qui prouve sous certaines hypothèses, que le groupe de symétrie continu maximal respectant le groupe de Lorentz, à quatre dimensions, est le groupe de Poincaré. Si nous cherchons alors, à rajouter des symétries continues d'espace-temps, toute théorie devient triviale (i.-e. sans interaction). Ce théorème n'autorise donc, a priori, que des symétries internes. Dans ce cas, l'invariance de groupe de la théorie peut être le produit direct du groupe de Poincaré et le groupe compact (interne). En 1974, Wess et Zumino [20, 21, 22] ont vérifié la proposition de Coleman-Mandula par l'introduction des relations d'anticommutation de la superalgèbre, que nous appelons dans la littérature, la supersymétrie de la théorie des champs qui transforme les bosons aux fermions et vice versa. Pour pouvoir relier des composantes bosoniques (qui commutent) et fermioniques (qui anticommulent), les générateurs de supersymétrie doivent, eux-mêmes, posséder le caractère fermionique. Nous pouvons alors considérer que la supersymétrie est une extension du groupe de Poincaré. Il est intéressant de noter qu'en 1975, Haag, Lopuszanski et Sohnius [23, 24] ont construit tous les générateurs possibles de la supersymétrie. La structure de cette superalgèbre qui respecte les assumptions du théorème de Coleman et Mandula est définie par les supercharges Q_α , tout en vérifiant les relations d'anticommutation.

Les extensions supersymétriques du Modèle Standard ont été introduites pour la première fois par P. Fayet [25]. Ainsi l'électron, particule chargée, de spin $1/2$, doit avoir des superpartenaires de spin 0 , appelé sélectrons (ou électrons scalaires), de même charge. Le photon, particule de spin 1 , doit avoir un superpartenaire de spin $1/2$, appelé photino. Les gluons, particules de spin 1 , ont comme superpartenaires les gluinos, de spin $1/2$. Les bosons de jauge W^+ , W^- et Z ont comme superpartenaires les winos et zinos, aussi de spin $1/2$. Nous arrivons ainsi à une duplication des particules élémentaires connues, la théorie obtenue s'appelle le Modèle Standard Supersymétrique. Celui-ci décrit aussi de nouveaux bosons de Higgs (notamment chargés), et les higgsinos correspondants.

Par conséquent, la supersymétrie est une symétrie supposée dans la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) constituant la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la supersymétrie, comme nous avons vu que chaque fermion est associé à

un ou plusieurs « super-partenaires » de spin entier, alors que chaque boson est associé à un ou plusieurs « super-partenaires » de spin demi-entier. Malgré le fait que le nombre de particules soit doublé, la supersymétrie possède de nombreux avantages

- En postulant l'existence de « super-partenaire » de l'ordre du TeV, l'unification de l'interaction forte, faible et électromagnétique devient possible à une échelle d'énergie de l'ordre de 10^{16} GeV (échelle de grande unification).

- Cette théorie permet également d'expliquer naturellement pourquoi la masse du Higgs peut être faible (en dessous du TeV).

- Elle offre également la possibilité d'expliquer la matière noire de notre univers par le biais des neutralinos (particules supersymétriques stables interagissant très faiblement avec la matière).

- Dans le cadre de la cosmologie, elle offre la possibilité d'expliquer la faiblesse de la constante cosmologique.

Des théories de supersymétrie ont été développées, notamment dans le contexte des Théories de Grande Unification, pour tenter d'unifier les interactions forte, faible et électromagnétique et expliquer pourquoi les particules ont une masse.

2.2 Algèbre de Supersymétrie

La densité lagrangienne dans la théorie des champs quantiques est une invariante sous le groupe de Poincaré. Ce groupe lui-même est une extension du groupe de Lorentz à quatre dimensions. Les générateurs de ce groupe sont représentés par le tenseur $M_{\mu\nu}$ et le vecteur d'impulsion P_μ quadridimensionnel. L'algèbre du groupe de Poincaré est donnée par les relations de commutations de ses générateurs

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{2.2.1}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu) \tag{2.2.2}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{2.2.3}$$

avec $\eta_{\mu\rho} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique.

Ce groupe a subi une extension au groupe de Super-Poincaré par l'introduction des générateurs fermioniques Q_a qui sont des spineurs de Majorana ; a étant un indice spinoriel

$a = \overline{1, 4}$, Ces générateurs satisfont les relations supplémentaires

$$[P_\mu Q_a] = 0 \quad (2.2.4)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_a] = -(\sigma_{\mu\nu}^4)_{ab} Q_b \quad (2.2.5)$$

$$\{Q_a, \overline{Q}_b\} = 2(\gamma^\mu)_{ab} P_\mu \quad (2.2.6)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \quad (2.2.7)$$

$$\{\overline{Q}_a, \overline{Q}_b\} = 2(C^{-1} \gamma^\mu)_{ab} P_\mu \quad (2.2.8)$$

Où $\sigma_{\mu\nu}^4 = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ et γ_μ et C représentent les matrices Gamma et la conjugaison de charge respectivement (Annexe A). Le groupe de Poincaré contient 10 générateurs bosoniques : P_μ et $M_{\mu\nu}$, le groupe de Poincaré élargi (super-Poincaré) contient en plus 4 générateurs fermioniques : Q_a , soit un total de 14 générateurs.

2.3 Représentation de l'algèbre de supersymétrie

La théorie de représentation du groupe de Poincaré est construit par l'utilisation du petit groupe ou méthode de Wigner [26], dans le but de construire les états propres de la représentation irréductibles. De la même manière, en utilisant les relations supplémentaires (2.2.6-8), nous obtenons les représentations irréductibles de l'algèbre de super-Poincaré et leurs états propres. Ceci nous permet de déterminer les propriétés comme la masse et les nombres des particules (fermionique et bosonique) pour chaque multiplet. Effectivement, nous trouvons que le nombre de degrés de liberté des particules bosoniques et fermioniques sont égaux et ont la même masse. Il est possible de montrer ces propriétés en utilisant directement l'algèbre de super-Poincaré.

D'une part, il est clair de voir que $P^2 = (P_\mu P^\mu)$ est encore un opérateur invariant par rapport à l'algèbre supersymétrique. Il est important de noter que $P^2 = (P_\mu P^\mu)$ est un opérateur de Casimir du super-Poincaré, à cause des relations des commutations (2.2.4) entre l'opérateur P_μ et la supercharge Q_a . Par conséquent toutes les particules d'un multiplets posséderont la même masse.

D'autre part, le deuxième opérateur de Casimir pour le groupe de Poincaré est le vecteur de Pauli-Lubanski

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma \quad (2.3.1)$$

Celui-ci nous permet de déterminer le spin des particules. Cette fois, le vecteur W^μ ne représente pas un opérateur de Casimir pour le groupe de super-Poincaré. Dans l'algèbre

de super-Poincaré, nous trouvons que le deuxième opérateur de Casimir est donné par le tenseur suivant [27, 28, 29]

$$C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu \quad (2.3.2)$$

avec

$$B_\mu = W_\mu + \frac{1}{8} \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q \quad (2.3.3)$$

Ceci signifie que les particules ont la même masse avec des spins différents pour chaque multiplet dans l'algèbre supersymétrique.

2.4 Multiplets de supersymétrie

Il est très important de noter, dans ce qui suit, que nous allons travailler avec la représentation de Weyl de deux composantes. Dans ce cas, les relations supplémentaires supersymétriques (2.2.6-2.2.8) deviennent

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}^\alpha, \bar{Q}^\beta\} = 0, \quad \{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = -2(\sigma^m)_\alpha^\beta P_m \quad (2.4.1)$$

$$[P_m, Q_\alpha] = [P_m, \bar{Q}^\beta] = 0 \quad (2.4.2)$$

$$[M_{mn}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{mn})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad [M_{mn}, \bar{Q}^\beta] = -i(\bar{\sigma}_{mn})^\alpha_\beta \bar{Q}^\beta \quad (2.4.3)$$

Q_α et \bar{Q}^β sont les spineurs de Weyl; α et β étant des indices spinoriels : $\alpha = 1, 2$; $\beta = \dot{1}, \dot{2}$. σ^m sont les matrices de Pauli (l'annexe A).

Comme nous avons vu que les supercharges Q_α et \bar{Q}^β sont considérées comme des opérateurs fermioniques, alors il est nécessaire d'introduire l'opérateur du nombre fermionique de sorte que la supercharge augmente le nombre fermionique d'une unité, ce qui nous permet d'écrire la relation suivante

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-1)^{N_F} \quad (2.4.4)$$

De plus, pour n'importe quelle représentation finie de l'algèbre supersymétrique dans laquelle la trace est bien définie

$$\begin{aligned} & Tr \left[(-1)^{N_F} \{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} \right] \\ &= Tr \left[(-1)^{N_F} \left(Q_\alpha \bar{Q}^\beta + \bar{Q}^\beta Q_\alpha \right) \right] \\ &= Tr [(-1)^{N_F} Q_\alpha \bar{Q}^\beta] + Tr [Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}^\beta] = 0 \end{aligned}$$

d'un autre coté, en utilisant la relation (2.4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[(-1)^{N_F} \left\{ Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}} \right\} \right] &= \text{Tr} \left[(-1)^{N_F} 2(\sigma^m)_\alpha^{\dot{\beta}} P_m \right] \\ &= 2(\sigma^m)_\alpha^{\dot{\beta}} P_m \text{Tr} \left[(-1)^{N_F} \right] \end{aligned}$$

Pour $P_m \neq 0$ et fixé, ceci se réduit à

$$\text{Tr} \left[(-1)^{N_F} \right] = 0 \quad (2.4.5)$$

Ceci signifie que, nous pouvons écrire cette relation sous la forme suivante

$$\sum_B \langle B | (-1)^{N_F} | B \rangle + \sum_F \langle F | (-1)^{N_F} | F \rangle \quad (2.4.6)$$

$$= N_B - N_F = 0 \quad (2.4.7)$$

avec $|B\rangle$ et $|F\rangle$ représentent les états bosoniques avec $N_B = 1$ et fermioniques avec $N_F = -1$ respectivement.

Où N_B et N_F , ont respectivement les nombres de degrés de liberté bosoniques et fermioniques dans la représentation de l'algèbre de supersymétrie.

2.5 Modèle supersymétrique

Nous avons vu que, une représentation de l'algèbre de supersymétrie possède le même nombre d'états bosoniques, que d'états fermioniques ayant la même masse, ce que nous appelons dans la littérature : un supermultiplet. Alors, la construction des modèles supersymétriques sont bien définis. En théorie des champs quantiques, nous pouvons distinguer deux méthode différentes. La première méthode consiste à prendre en considération les équations du mouvement, ce que nous appelons un modèle supersymétrique **on-shell**. Les modèles les plus connus sont

1. Modèle de Wess-Zumino : ce modèle est décrit par un champ fermionique massif de Majorana (deux degrés de liberté fermioniques) avec deux champs scalaires massifs (deux degrés de liberté bosoniques).

2. SuperQED : ce modèle représente l'extension de QED dans le formalisme supersymétrique qui est décrit par un champ fermionique avec un champ vectoriel, les deux champs ayant la même masse.

La deuxième méthode est l'inverse de la première c'est à dire, nous ne tenons pas compte des équations du mouvement, ce que nous appelons un modèle supersymétrie **off-shell**. Dans

ce cas, le modèle de Wess-Zumino est construit par un champ fermionique (quatre degrés de liberté fermioniques) avec quatre champs scalaires, chaque champ scalaire a un degré de liberté. Nous avons ajouté deux champs scalaires par rapport au cas on-shell, ces champs sont appelés les champs auxiliaires.

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser au modèle de Wess-Zumino qui représente un système supersymétrique on-shell. Dans ce cas, le Lagrangien est donné par un champ fermionique $\Psi(x)$ de Majorana avec deux champs scalaires A et B massifs sous la forme suivante

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \quad (2.5.1)$$

En théorie des champs quantiques, les champs fermioniques et bosoniques vérifient des relations d'anticommutations et de commutations respectivement sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \{\Psi_a^+(\vec{x}, t), \Psi_b(\vec{y}, t)\} &= \delta_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\Psi_a(\vec{x}, t), \Psi_b(\vec{y}, t)\} &= \{\Psi_a^+(\vec{x}, t), \Psi_b^+(\vec{y}, t)\} = 0 \\ [A(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= [A(\vec{x}, t), A(\vec{y}, t)] = 0 \\ [B(\vec{x}, t), \pi'(\vec{y}, t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\pi'(\vec{x}, t), \pi'(\vec{y}, t)] &= [B(\vec{x}, t), B(\vec{y}, t)] = 0 \end{aligned}$$

Où

$$\pi(x, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_o A(x, t))}, \quad \pi'(x, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_o B(x, t))}$$

De plus, le champ fermionique $\Psi(x)$ et les champs bosoniques $A(x)$ et $B(x)$ commutent entre eux.

$$[B(\vec{x}, t), A(\vec{y}, t)] = [\Psi_a(\vec{y}, t), B(\vec{x}, t)] = [\Psi_a(\vec{y}, t), A(\vec{x}, t)] = 0$$

ce modèle est invariant sous les transformations supersymétriques suivantes

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma^5 B)\varepsilon \\ \delta \bar{\Psi} &= \bar{\varepsilon}(A - i\gamma^5 B)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \\ \delta A &= \bar{\varepsilon}\Psi \\ \delta B &= -i\bar{\varepsilon}\gamma^5 \Psi \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

D'après le théorème de Noether, chaque invariance de Lagrangien laisse toujours une grandeur conservée que nous appelons le courant de Noether ou supercourant et qui est

décrit par la relation suivante

$$J^\mu = V^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \quad (2.5.3)$$

$$J^\mu = \frac{1}{\lambda} \bar{\varepsilon} k^\mu \quad (2.5.4)$$

avec

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \quad (2.5.5)$$

Φ_i représente les champs bosoniques et fermionique et λ représente une constante.

Dans ce modèle, nous pouvons trouver l'expression de supercharge Q_a qui est décrite par

$$Q_a = \int d^3 x k_a^0 \quad (2.5.6)$$

nous pouvons aussi retrouver les transformations supersymétriques (2.5.2) par l'utilisation de la supercharge et qui sont données en générale par la relation

$$\delta \Phi_i = -i [\bar{\varepsilon} Q, \Phi_i] \quad (2.5.7)$$

Une propriété importante en supersymétrie est la fermeture de l'algèbre des transformations de supersymétrie. Nous prenons comme exemple le champ bosonique A . En appliquant deux fois les variations sur le champ A , nous obtenons

$$\delta_2 \delta_1 A = \delta_2 (\bar{\varepsilon}_1 \Psi) = \bar{\varepsilon}_1 (-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) (A - i \gamma^5 B) \varepsilon_2$$

en tenant compte des équations du mouvement des champs A et B , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} [\delta_2, \delta_1] A &= \delta_2 (\bar{\varepsilon}_1 \Psi) = -i (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \partial_\mu A + (\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \partial^\mu \partial_\mu A \\ &\quad - (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1) \partial_\mu B - i (\bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1) \partial^\mu \partial_\mu B \end{aligned}$$

en utilisant le réarrangement de Fierz (l'annexe A), nous obtenons

$$\begin{aligned} [\delta_2, \delta_1] A &= -2i \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 (\partial_\mu A) \\ &= 2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 p_\mu A \end{aligned}$$

De la même manière pour les champs B et Ψ , nous trouvons

$$\begin{aligned} [\delta_2, \delta_1] B &= 2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 p_\mu B \\ [\delta_2, \delta_1] \Psi &= 2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 p_\mu \Psi \end{aligned}$$

Il est clair que, toute les fermetures de transformations des champs A, B et Ψ ont le même paramètre de fermeture $2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2$ et aussi sont proportionnelles au quadrivecteur impulsion p_μ . Ceci signifie que, si nous effectuons une première transformation pour un champ

bononique au point $M(ct, x, y, z)$, nous trouvons comme résultat un champ fermionique et la deuxième transformation pour ce champ fermionique nous conduit au champ bosonique en un autre point d'espace $M'(ct', x', y', z')$. Jusqu'à maintenant, nous avons vu la supersymétrie à quatre dimensions. En général, pour résoudre les problèmes de la théorie des champs, nous prenons comme modèle simple celui a une dimension. Par conséquent, la supersymétrie unidimensionnelle représente la supersymétrie en mécanique quantique, c'est l'objet de la section suivante.

2.6 Supersymétrie en mécanique quantique

Les applications de la supersymétrie ne sont pas limitées aux particules élémentaires ou aux théories des champs quantiques. La supersymétrie a été appliquée dans différents domaines de la physique théorique (nucléaire, atomique, l'état du solide ,et la physique statistique). L'importance de la théorie supersymétrique est l'existence des partenaires supersymétriques des quarks, des leptons et des particules scalaires (gauges) qui ont la même masse, et le fait qu'aucune de ces partenaires n'est observée, implique que la théorie de supersymétrie doit être brisée spontanément, ce qui peut expliquer le problème de hiérarchie des différences de masse. Pour cela, différents travaux ont été conduit pour essayer de résoudre ce problème. Dans cet axe, en 1976, la supersymétrie a été pour la première fois appliquée en mécanique quantique par Nicolai [30] qui a utilisé la supersymétrie pour construire le modèle de spin en physique statistique. En 1981, Witten [31] introduit la supersymétrie en mécanique quantique, basée sur la superalgèbre, pour fournir un modèle simple non-relativiste du mécanisme de la supersymétrie brisée spontanément. Certains auteurs commençaient à étudier les différents spectres de la mécanique quantique supersymétrique. La détermination des spectres d'un système (les fonctions propres avec leurs valeurs propres) est très intéressante dans la supersymétrie. Effectivement, la supersymétrie donne une tentative dans la méthode de factorisation de Infeld-Hull [32] qui était la première méthode pour classer analytiquement les solutions des problèmes de potentiels . En 1983, une autre méthote a été présenté par Gendenshtein [33] que nous appelons l'invariance de forme (Shape Invariant), dans laquelle le partenaire de potentiel a la même variation spatiale que le potentiel original avec une différence qui est représentée par des paramètres constants ou variés.

2.7 Les définitions de la supersymétrie en mécanique quantique

En mécanique quantique, La supercharge n'établit pas une transformation entre des bosons et des fermions, elle fait une transformation entre les deux valeurs propres orthogonales d'un Hamiltonien donné H avec la même valeur propre dégénérée.

$$Q^2 = H \quad (2.7.1)$$

$$H |E, q\rangle = E |E, q\rangle = Q^2 |E, q\rangle = q^2 |E, q\rangle \quad (2.7.2)$$

ceci nous conduit à écrire

$$E = \pm\sqrt{q}$$

Les deux états sont des vecteurs propres d'un opérateur que nous appelons opérateur de Parité de Witten K avec les valeurs propres $+1$ et -1 .

Alors, pour construire un système quantique supersymétrique, il est nécessaire de définir trois opérateurs importants, le Hamiltonien H , les supercharges Q_i et la Parité K de Witten qui joue un rôle important dans le mécanisme de la supersymétrie brisée spontanément.

Supposons que nous avons un système quantique qui est caractérisé par un opérateur hermitien H (Hamiltonien du système) agissant dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . De plus, nous postulons l'existence d'un opérateur hermitien K et de N opérateurs Q_i qui agissent également dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Selon $N = 1$ ou $N = 2$, nous distinguons cinq définitions équivalentes [34].

a-Définition 1 : N=2

Le système $N = 2$ supersymétrique de mécanique quantique $\{H, \mathcal{H}\}$ est défini par l'existence d'un ensemble d'opérateurs H, Q_1, Q_2 et K vérifiant la superalgèbre suivante

$$\begin{aligned} K^2 &= 1, & \{K, Q_i\} &= 0, & [K, H] &= 0 \\ \{Q_i, Q_j\} &= 2\delta_{ij}H & \text{pour } i, j &\in [1, N] = [1, 2] \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

L'opérateur K est aussi appelé opérateur de Klein, opérateur de chiralité, opérateur nombre fermionique, opérateur de Parité de Witten ou opérateur Z -gradué.

b-Définition 2 : N=1

Le système $N = 1$ supersymétrique de mécanique quantique $\{H, \mathcal{H}\}$ est défini par l'existence d'un ensemble d'opérateurs H, q (un opérateur non-adjoint), et K vérifiant la

superalgèbre suivante

$$\begin{aligned}
K^2 &= 1, & [K, H] &= 0 \\
\{K, q\} &= \{K, q^\dagger\} = 0 \\
\{q, q^\dagger\} &= 2H, & \{q, q\} &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Les opérateurs q, q^\dagger sont appelés les supercharges complexes.

c-Définition 3 : N=1

Le système $N = 1$ supersymétrique de mécanique quantique $\{H, \mathcal{H}\}$ est défini par l'existence d'un ensemble d'opérateurs H, Q (la supercharge est hermitienne) et d'un opérateur K vérifiant la superalgèbre suivante

$$\begin{aligned}
K^2 &= 1, & \{K, Q\} &= 0 \\
Q^2 &= H, & [H, Q] &= 0
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

d-Définitions 4 et 5

Ce que nous prenons pour les définitions (4) et (5) correspondent respectivement aux définitions (1) et (2) sans l'opérateur K . Ceci sera adopté encore dans les sections suivantes.

2.8 La construction du Hamiltonien supersymétrique

La détermination des spectres de la mécanique quantique supersymétrique est traité par plusieurs méthode dans lesquelles le problème de potentiel est résolu [35], par exemple, les méthodes les plus connus : potentiel de partenaire supersymétrique, la factorisation, l'hierarchie d Hamiltonien, et l'invariance de la forme (Shape Invariance)

2.8.1 Potentiel partenaire supersymétrique

L'étape principale dans la détermination du spectre des problèmes unidimensionnels d'un potentiel est la transition entre les fonctions d'ondes et le potentiel. Une fois que les fonctions d'ondes sont obtenues, nous pouvons trouver le potentiel. Nous avons l'équation de Schrodinger pour une particule avec l'énergie fondamentale de fonction d'onde $\psi_0(x)$ nulle

$$H_1 \psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0(x) = 0 \tag{2.8.1}$$

Ceci implique

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \tag{2.8.2}$$

ceci permet une reconstruction globale du potentiel $V_1(x)$ à partir de sa fonction d'onde de l'état fondamental. Une fois que nous réalisons ceci, il est très simple de factoriser le Hamiltonien en utilisant l'expression suivante

$$H_1 = A^\dagger A \quad (2.8.3)$$

avec

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.8.4)$$

$$A^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.8.5)$$

dans ce cas, le potentiel $V_1(x)$ devient

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (2.8.6)$$

Dans la littérature, la fonction $W(x)$ représente le superpotentiel. La relation (2.8.6) est également appelée équation de Riccati. Il est clair que la solution de $W(x)$ en terme de la fonction d'onde est

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (2.8.7)$$

ceci correspond aussi à la solution de l'équation $H_1 \psi_0(x) = A^\dagger A \psi_0(x) = 0$.

Maintenant, nous pouvons construire la théorie supersymétrique d'un système défini par le Hamiltonien H_2 à partir du Hamiltonien original H_1 . Le Hamiltonien est décrit par le renversement d'ordre des opérateurs A et A^\dagger , $H_2 = AA^\dagger$. Dans ce cas, le Hamiltonien H_2 correspondant au nouveau potentiel $V_2(x)$ devient

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (2.8.8)$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (2.8.9)$$

les potentiels $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sont appelés les potentiels partenaires de supersymétrie. Il est clair que, les valeurs propres $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$ et les fonctions propres $\psi_n^{(1)}(x)$, $\psi_n^{(2)}(x)$ pour les deux Hamiltonien H_1 , H_2 sont reliés respectivement par les relations suivantes

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, E_0^{(1)} = 0 \quad (2.8.10)$$

$$\psi_n^{(2)}(x) = (E_{n+1}^{(1)})^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}(x) \quad (2.8.11)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)}(x) = (E_n^{(2)})^{-1/2} A^\dagger \psi_n^{(2)}(x) \quad (2.8.12)$$

Nous remarquons que, d'une part, la fonction d'onde de l'état fondamental de H_1 est annihilée par l'opérateur A , cet état n'a aucun partenaire de supersymétrie. D'autre part nous obtenons que, à partir des fonctions propres de H_1 nous pouvons déterminer les fonctions propres de H_2 en utilisant l'opérateur A , et vice versa en utilisant A^\dagger nous pouvons reconstruire toutes les fonctions propres de H_1 à partir de H_2 excepté l'état fondamental.

Pour comprendre la dégénération du spectre de la supersymétrie, nous utilisons l'algèbre de supersymétrie. Dans ce cas, nous pouvons décrire le Hamiltonien sous forme d'une matrice à deux dimensions

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (2.8.13)$$

avec les supercharges Q et Q^\dagger qui sont données par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.14)$$

L'algèbre de supersymétrie est décrite par des relations de commutations et d'anticommutations entre H , Q et Q^\dagger . Ces relations vérifient une superalgèbre fermée $sl(1,1)$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0 \quad (2.8.15)$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = H, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (2.8.16)$$

le fait que les supercharges Q et Q^\dagger commutent avec H est responsable de la dégénération. Nous pouvons aussi interpréter les opérateurs Q et Q^\dagger comme des opérateurs qui changent le degré de liberté entre les fermions et les bosons.

2.8.2 Factorisation et hiérarchie du Hamiltonien

Nous rappelons que dans la détermination des superpotentiels dans la méthode du partenaire de potentiel supersymétrique, nous constatons qu'une fois que nous avons la fonction d'onde de l'état fondamental correspondant au Hamiltonien H_1 nous pouvons trouver le superpotentiel $W_1(x)$ qui est donné par l'équation (2.8.7). Nous avons aussi trouvé comme résultat que les opérateurs A_1 et A_1^\dagger peuvent être utilisés pour factoriser le Hamiltonien H_1 . D'une part, nous savons que l'état fondamental du partenaire du Hamiltonien H_2 est déterminé par le premier état d'excitation de H_1 en utilisant les applications de l'opérateur A_1 . Ceci permet une refactorisation du deuxième Hamiltonien H_2 en termes de $W_2(x)$. Le partenaire de cette refactorisation est un nouveau Hamiltonien H_3 . Ce développement peut continuer jusqu'à un nombre n d'états. Alors, une fois nous avons la solution du potentiel

pour H_1 , nous pouvons déterminer les valeurs propres et les fonctions propres pour l'hierarchie entière du Hamiltonien créés par des refactorisations répétées.

Nous supposons que, nous avons un Hamiltonien H_1 avec les valeurs propres $E_n^{(1)}$ et les fonctions d'ondes $\psi_n^{(1)}(x)$ avec $0 \leq n \leq (p-1)$, nous pouvons toujours construire une hiérarchie de $(p-1)$ Hamiltoniens H_2, \dots, H_p tels que le nombre m^{th} d'hiérarchies d'Hamiltonien H_m a la même valeur propre de H_1 excepté que les premières $(m-1)$ valeurs propres de H_1 sont absentes. En général, nous pouvons toujours écrire

$$H_m = A_m^\dagger A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{d^2x} + V_m(x) \quad (2.8.17)$$

avec

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad W_m(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(m)}(x)}{dx} \quad (2.8.18)$$

nous avons aussi

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \quad (2.8.19)$$

$$\psi_n^{(m)}(x) = (E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-1/2} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \quad (2.8.20)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{d^2x} \ln(\psi_0^{(1)}(x) \dots \psi_0^{(m-1)}(x)) \quad (2.8.21)$$

Par cette méthode nous avons déterminé toutes les fonctions d'ondes et leurs valeurs propres des $(p-1)$ hiérarchies du Hamiltonien.

2.8.3 L'invariance de forme

Dans cette méthode est liée par la forme de variation des potentiels déterminée. Si les deux potentiels de partenaires supersymétriques $V_1(x)$ et $V_2(x)$ définis dans (2.8.6) et (2.8.9) la même forme de variation et différente seulement dans des paramètres qui apparaissent dans eux-même, donc, cela que nous appelons l'invariance de forme. Plus précisément, si les potentiels de partenaires $V_1(x)$ et $V_2(x)$ satisfont la condition

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1) \quad (2.8.22)$$

avec a_1 est un ensemble des paramètres, a_2 est une fonction de a_1 et $R(a_1)$ est indépendant de x . Nous pouvons construire toutes les $(p-1)$ hiérarchies du Hamiltoniens en tenant compte de la condition de l'invariance de forme (2.8.22). Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$H_s = -\frac{d^2}{d^2x} + V_1(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad \text{avec } s = 1, 2, \dots \quad (2.8.23)$$

avec $a_s = f^{s-1}(a_1)$ c.à.d la fonction f appliquée $(s - 1)$ fois.

Il y a aussi d'autres méthodes que nous appelons les transformations d'opérateurs dans lesquelles l'équation de Schrodinger peut être réduite à une équation hypergéométrique en utilisant des transformations canoniques. Pour les applications de cette méthode on peut consulter l'article [36].

Nous remarquons que, toutes les méthodes ont des solutions algébriquement analytiques qui sont basées sur la détermination des fonctions propres et leurs valeurs propres pour n'importe quel système supersymétrique.

2.9 Equivalence

Nous avons donné les différentes définitions de supersymétries au niveau de la mécanique quantique. La question qui se pose ici, est-ce que ces définitions sont équivalentes?. La réponse a été confirmée par [34]. Effectivement, l'équivalence entre les définitions (1) et (2) et ainsi que (4) et (5) est fait en remplaçant $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2)$, ce qui implique $Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2)$. Cependant, l'équivalence entre les définitions (1) et (3) est établi en postulant $Q = Q_1$ et en construisant une deuxième supercharge en fonction de Q_1 et K par cette relation $Q_2 = -iKQ_1$. L'équivalence entre les définitions (4) et (1) et puis (5) et (2) est réalisée en prouvant l'existence de l'opérateur de Chiralité K agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Ce dernier est toujours possible à condition que $\ker Q_1 = \ker Q_2 = \ker H$ qui est vérifié dans le cas de supersymétrie de mécanique quantique.

Nous rappelons que l'opérateur K prend seulement les valeurs propres ± 1 , le sous-espace \mathcal{H}^\dagger avec $(+1)$ s'appelle souvent le sous-espace "bosonique" (ou avec la parité positive de Witten) tandis que celui \mathcal{H}^- avec (-1) s'appelle le sous-espace "fermionique" (ou avec la parité négative de Witten). Nous pouvons décomposer l'espace de Hilbert en deux sous-espaces de K . Ceci nous permet d'écrire la relation suivante

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger + \mathcal{H}^-$$

Dans ce cas, le fait que l'énergie positive est doublement dégénérée, signifie qu'à chaque état d'énergie positive de Parité de Witten correspond un autre état avec la même énergie et la Parité de Witten opposée. Par conséquent, la représentation générale en tenant compte des équivalences entre les différentes définitions d'un système supersymétrique est décrite sous la forme matricielle à deux dimensions par

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.9.1)$$

où A^\dagger et A sont des opérateurs linéaires qui sont donnés en fonction de superpotentiels

$$A^\dagger = \frac{d}{dx} + iW \quad , \quad A = \frac{d}{dx} - iW \quad (2.9.2)$$

ou W représente le superpotentiel.

Nous remarquons que l'opérateur de Witten est nécessaire dans la construction des modèles supersymétriques dans les deux cas, le cas relativiste à quatre dimensions ou la théorie des champs quantiques et le cas non-relativiste ou la mécanique quantique ordinaire qui représentent la deuxième et la première quantification respectivement. Jusqu'à maintenant, nous avons vu deux théories fondamentales dans la littérature, la supersymétrie et la paraquantification, et comme la supersymétrie est une théorie quantique, est-il possible de faire l'extension de cette théorie dans le formalisme paraquantique, c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Parasupersymétrie

Dans ce chapitre, nous allons exposer les deux modèles de parasupersymétries à l'ordre $P = 2$ Rubakov-Spiridonov et Beckers-Debergh, nous présenterons la généralisation de l'algèbre parasupersymétrique de ces modèles à l'ordre P quelconque, et nous montrerons l'équivalence entre les deux modèles à l'ordre P quelconque. Enfin, nous montrerons que pour le modèle de Rubakov-Spiridonov, par exemple et à la différence du cas ordinaire, les différentes définitions pour $N = 1, 2$ parasupercharge ne sont plus équivalentes.

3.1 Introduction

Comme il a été déjà mentionné, le concept de la symétrie a joué un rôle important dans le développement de la physique théorique moderne et de la science mathématique. Cela signifie que la nouvelle symétrie a permis de décrire de nouveaux phénomènes dans de nombreux domaines de la science, indépendamment du fait qu'ils ont été observés dans la nature. Dans ce chapitre, nous présentons un nouveau type de supersymétries non linéaires, appelée parasupersymétrie [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 60, 61, 62, 63], qui est une généralisation de la supersymétrie dans le formalisme paraquantique. C'est la réponse au chapitre suivant. En 1990, Rubakov et Spiridonov [64] construisent une théorie qui permet à des bosons de se transformer en parafermions et réciproquement, grâce à l'action d'une nouvelle symétrie : la mécanique quantique supersymétrique. Elle a été également développée dans un contexte, appelé parasupersymétrie en traitant des bosons et des $P = 2$ parafermions satisfaisant les propriétés parastatistiques c'est à dire vérifiant des relations doublées. Effectivement, la parasupersymétrie a été aussi construite par un modèle différent, le modèle de Beckers-Debergh [65]. La généralisation de la supersymétrie au niveau de la mécanique quantique est aussi décrite par la supersymétrie

fractionnelle [66], l'orthosupersymétrie [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74] et q-déformation de la supersymétrie [75]. Dans la référence [35, 76], les auteurs ont étudié leurs topologies ainsi que les différentes relations entre elles. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à la parasupersymétrie de mécanique quantique.

3.2 Parasupersymétrie en mécanique quantique

3.2.1 Modèle de Rubackov-Spiridonov

Rubackov et Spiridonov étaient les premiers à proposer une généralisation de la supersymétrie de mécanique quantique de Witten à une parasupersymétrie de l'ordre $P = 2$. De la même manière que pour la mécanique quantique supersymétrique, nous pouvons distinguer cinq définitions différentes par le nombre N des parasupercharges.

Soit un système paraquantique à l'ordre $P = 2$, décrit par un Hamiltonien H , l'opérateur (Hermitien) de Parité K et les N parasupercharges qui doivent vérifier des relations trilineaires. Ce système est $P = 2$ parasupersymétrique si une des définitions suivantes est satisfaite.

Définition 1 : le système est donné par un Hamiltonien H , une $N = 1$ parasupercharge Q et son conjugué Q^\dagger qui satisfont les relations trilineaires suivantes

$$Q^3 = 0 \quad (3.2.1)$$

$$Q^2 Q^\dagger + Q Q^\dagger Q + Q^\dagger Q^2 = 2QH \quad (3.2.2)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.2.3)$$

$$[K, H] = \{K, Q\} = 0 \quad (3.2.4)$$

D'après Mostafazadeh [76], le Hamiltonien du système est donné par

$$H = \frac{1}{2} \left[(QQ^\dagger)^2 + (Q^\dagger Q)^2 - \frac{1}{2} (Q(Q^\dagger)^2 Q + Q^\dagger Q^2 Q^\dagger) \right]^{1/2} \quad (3.2.5)$$

Définition 2 : le système est donné par un Hamiltonien H , deux $N = 2$ parasupercharges

Q_1 et Q_2 qui satisfont les relations trilinéaires suivantes

$$Q_1^3 = 2Q_1H \quad (3.2.6)$$

$$Q_2^3 = 2Q_2H \quad (3.2.7)$$

$$Q_1^3 - \{Q_1, Q_2^2\} - Q_2Q_1Q_2 = 0 \quad (3.2.8)$$

$$Q_2^3 - \{Q_2, Q_1^2\} - Q_1Q_2Q_1 = 0 \quad (3.2.9)$$

$$[Q_1, H] = [Q_2, H] = 0 \quad (3.2.10)$$

$$[K, H] = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\{K, Q_1\} = \{K, Q_2\} = 0 \quad (3.2.12)$$

Le Hamiltonien devient

$$H = \frac{1}{4} \left[(Q_1^2 + Q_2^2)^2 - 3 [Q_1, Q_2]^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.13)$$

Définition 3 : le système est donné par un Hamiltonien H , un opérateur d'évolution K , une $N = 1$ parasupercharge Q ($Q^\dagger = Q$) qui satisfont les relations trilinéaires suivantes

$$Q^3 = 2QH \quad (3.2.14)$$

$$[Q, H] = [K, H] = 0 \quad (3.2.15)$$

$$\{Q, K\} = 0 \quad (3.2.16)$$

Définition 4 et 5 : Ce que nous prenons comme définitions (4) et (5) correspondent respectivement aux définitions (1) et (2) sans l'opérateur K . Ceci sera adopté encore dans les sections suivantes.

3.2.2 Le modèle de Beckers et Debergh

Beckers et Debergh ont démontré que le choix du Hamiltonien n'est pas unique. Ils ont construit un nouveau Hamiltonien qui vérifie des relations trilinéaires. De la même manière, nous pouvons distinguer cinq définitions pour $N = 1, 2$

Définition 1 : le système est donné par le Hamiltonien H , l'opérateur d'évolution K , et $N = 1$ parasupercharge Q qui satisfaisant les relations trilinéaires comme suit

$$[Q, [Q^\dagger, Q]] = QH \quad (3.2.17)$$

$$[Q^\dagger, [Q, Q^\dagger]] = Q^\dagger H \quad (3.2.18)$$

$$Q^3 = (Q^\dagger)^3 = 0 \quad (3.2.19)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.2.20)$$

$$[K, H] = \{Q, K\} = 0 \quad (3.2.21)$$

Le Hamiltonian du système est défini par la même relation (3.2.5).

Définition 2 : le système est donné par le Hamiltonien H , l'opérateur d'évolution K , et $N = 1$ parasupercharges Q_1, Q_2 qui satisfaisant les relations trinéaires suivantes

$$Q_1^3 = 2Q_1H \quad (3.2.22)$$

$$Q_2^3 = 2Q_2H \quad (3.2.23)$$

$$Q_1Q_2Q_1 = Q_2Q_1Q_1 = 0 \quad (3.2.24)$$

$$\{Q_2^2, Q_1\} = Q_1^3 \quad (3.2.25)$$

$$\{Q_1^2, Q_2\} = Q_2^3 \quad (3.2.26)$$

$$[Q_1, H] = [Q_2, H] = 0 \quad (3.2.27)$$

$$[K, H] = \{Q, K\} = 0 \quad (3.2.28)$$

Le Hamiltonien est aussi donné par la relation (3.2.13).

Définition 3 : le système est donné par le Hamiltonien H , l'opérateur d'évolution K et $N = 1$ parasupercharges Q ($Q^\dagger = Q$) qui satisfont les relations trinéaires suivantes

$$Q^3 = 2QH \quad (3.2.29)$$

$$[Q, H] = [K, H] = 0 \quad (3.2.30)$$

$$\{Q, K\} = 0 \quad (3.2.31)$$

Définition 4 et 5 : Ce que nous prenons comme définitions (4) et (5) correspondent respectivement aux définitions (1) et (2) sans l'opérateur K .

Les deux modèles ne sont pas équivalent sauf dans les conditions suivantes

$$QQ^\dagger Q = QH \quad (3.2.32)$$

$$Q^2Q^\dagger + Q^\dagger Q^2 = QH \quad (3.2.33)$$

Donc, les relations (3.2.32) et (3.2.33) représentent une nouvelle définition non triviale d'un système parasupersymétrique de mécanique quantique à l'ordre $P = 2$.

3.3 La parasupersymétrie à l'ordre P quelconque

3.3.1 Le modèle de Khare

Le modèle de Rubakov-Spiridnov est une symétrie entre un boson et un prafermion de l'ordre $P = 2$ et Khare [35] a généralisé la parasupersymétrie de Rubakov-Spiridnov à l'ordre

quelconque $P \geq 1$ sous la forme suivante

$$Q^P Q^\dagger + Q^{P-1} Q^\dagger Q + \dots + Q^\dagger Q^P = 2P Q^{P-1} H \quad (3.3.1)$$

$$Q^{P+1} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.3.3)$$

Cette définition pour $P = 1$ et $P = 2$ se réduit à l'algèbre de supersymétrie et la parasupersymétrie de Rubakov-Spiridnov respectivement. De plus, les relations (3.3.1-3) décrivent l'algèbre unitaire de parasupersymétrie à l'ordre P quelconque, puisque Q^\dagger est le conjugué de la parasupercharge Q . Il est évident que les relations (3.3.1-3) restent satisfaites sous l'échange de Q par Q^\dagger dans ces relations. Nous pouvons aussi définir les cinq définitions précédente à l'ordre quelconque P .

3.3.2 Le modèle de Chenaghlou et Fakhri

En 2002, le modèle de Beckers-Debergh est généralisé à l'ordre P quelconque par A. Chenaghlou et H. Fakhri [77], l'algèbre de parasupersymétrie est décrit en termes des parasupercharge Q , Q^\dagger et le Hamiltonian H à l'ordre P sous la forme suivante

$$\underbrace{[Q, [Q, \dots, [Q, [Q^\dagger, Q]] \dots]]}_{(P-1) \text{ fois}} = 2(-1)^P Q^{P-1} H \quad (3.3.4)$$

$$\underbrace{[Q^\dagger, [Q^\dagger, \dots, [Q^\dagger, [Q, Q^\dagger]] \dots]]}_{(P-1) \text{ fois}} = 2(-1)^P (Q^\dagger)^{P-1} H \quad (3.3.5)$$

$$Q^{P+1} = (Q^\dagger)^{P+1} = 0 \quad (3.3.6)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.3.7)$$

Comme le cas $P = 2$, il est clair aussi que les deux modèles ne sont pas équivalents à l'ordre P . Nous pouvons aussi déterminer les conditions dans lesquelles les deux modèles seront équivalents.

Nous pouvons écrire le modèle de Chenaghlou-Fakhri dans d'autre expression pour les deux cas $P = 2K, 2K + 1$ sous la forme suivante

Le cas $P = 2K$ (P pair)

$$Q^{P+1} = (Q^\dagger)^{P+1} = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\underbrace{-C_P^P Q^P Q^\dagger + C_P^{P-1} Q^{P-1} Q^\dagger Q - \dots + C_P^1 Q Q^\dagger Q^{P-1} - C_P^0 Q^\dagger Q^P}_{(P+1) \text{ termes}} = 2Q^{P-1}H \quad (3.3.9)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.3.10)$$

avec

$$C_P^n = \frac{P!}{n!(P-n)!}, \text{ avec } n = 0, 1, \dots, P$$

Pour arriver à l'équivalence entre les deux modèles à l'ordre P quelconque, il est nécessaire d'ajouter les deux conditions suivantes

$$Q^{P-1}Q^\dagger Q + \frac{1}{2!}(2-P)Q^{P-2}Q^\dagger Q^2 \dots + QQ^\dagger Q^{P-1} = 2Q^{P-1}H \quad (3.3.11)$$

$$2(P-1)Q^{P-1}H = 2Q^P Q^\dagger + (1-P)Q^{P-1}Q^\dagger Q + \left(1 + \frac{P(P-1)}{2}\right)Q^{P-2}Q^\dagger Q^2 + \dots + (1-P)QQ^\dagger Q^{P-1} + 2Q^\dagger Q^P \quad (3.3.12)$$

Ceci représente aussi la généralisation des équations (3.2.32) et (3.2.33) à l'ordre $P = 2K$.

Le cas $P = 2K + 1$ (P impair)

$$Q^{P+1} = (Q^\dagger)^{P+1} = 0 \quad (3.3.13)$$

$$\underbrace{-C_P^P Q^P Q^\dagger + C_P^{P-1} Q^{P-1} Q^\dagger Q - \dots - C_P^1 Q Q^\dagger Q^{P-1} + C_P^0 Q^\dagger Q^P}_{(P+1) \text{ termes}} = -2Q^{P-1}H \quad (3.3.14)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.3.15)$$

Dans ce cas, les conditions d'équivalences entre les deux modèles deviennent

$$2(P-1)Q^{P-1}H = (P+1)Q^{P-1}Q^\dagger Q + \left(1 - \frac{P(P-1)}{2!}\right)Q^{P-2}Q^\dagger Q^2 \quad (3.3.16)$$

$$+ \dots + (1-P)QQ^\dagger Q^{P-1} + 2Q^\dagger Q^P \quad (3.3.17)$$

$$2(P+1)Q^{P-1}H = 2Q^P Q^\dagger + (1-P)Q^{P-1}Q^\dagger Q + \left(1 + \frac{P(P-1)}{2!}\right)Q^{P-2}Q^\dagger Q^2 \quad (3.3.18)$$

$$+ \dots + (1+P)QQ^\dagger Q^{P-1} \quad (3.3.19)$$

ceci représente aussi la généralisation des équations (3.2.32) et (3.2.33) à l'ordre $P = 2K + 1$.

Nous prenons comme exemple les deux cas $P = 2, 3$. Pour $P = 2$, il est clair que les relations (3.3.11-13) deviennent

$$QQ^\dagger Q + QQ^\dagger Q = 2QH \quad (3.3.20)$$

$$2Q^2Q^\dagger - QQ^\dagger Q + 2Q^\dagger Q^2 + 2Q^2Q^\dagger - QQ^\dagger Q + 2Q^\dagger Q^2 = 2QH \quad (3.3.21)$$

Nous pouvons aussi écrire

$$QQ^\dagger Q = QH \quad (3.3.22)$$

$$Q^2Q^\dagger + Q^\dagger Q^2 = QH \quad (3.3.23)$$

qui représentent les mêmes relations (3.2.32) et (3.2.33).

Pour le cas $P = 3$, l'algèbre de parasupersymétrie (3.3.14-16) devient

$$Q^4 = Q^{+4} = 0 \quad (3.3.24)$$

$$-Q^3Q^\dagger + 3Q^2Q^\dagger Q - 3QQ^\dagger Q^2 + Q^\dagger Q^3 = -2Q^2H \quad (3.3.25)$$

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0 \quad (3.3.26)$$

et les relations (3.3.17) et (3.3.18) deviennent

$$4Q^2Q^\dagger Q - 2QQ^\dagger Q^2 + 2Q^\dagger Q^3 + 4Q^2Q^\dagger Q - 2QQ^\dagger Q^2 + 2Q^\dagger Q^3 = 4Q^2H$$

$$2Q^3Q^\dagger - 2Q^2Q^\dagger Q + 4QQ^\dagger Q^2 + 2Q^3Q^\dagger - 2Q^2Q^\dagger Q + 4QQ^\dagger Q^2 = 8Q^2H$$

Nous pouvons écrire

$$2Q^2Q^\dagger Q - QQ^\dagger Q^2 + Q^\dagger Q^3 = Q^2H \quad (3.3.27)$$

$$Q^3Q^\dagger - Q^2Q^\dagger Q + 2QQ^\dagger Q^2 = 2Q^2H \quad (3.3.28)$$

Ces relations représentent la condition d'équivalence entre les deux modèles de parasupersymétries à l'ordre $P = 3$.

3.3.3 L'équivalence

Jusqu'à maintenant, nous avons données les modèles de la mécanique quantique parasupersymétrique à l'ordre $P = 2$ (modèle de Rubakov-Spiridnov et Beckers-Debergh), et comme nous avons aussi données les différentes définitions de N parasupercharges pour les

deux modèles (par exemple $N = 1, 2$). Ces deux modèles (modèle de Rubackov-Spiridnov et Beckers-Debergh) sont généralisées à l'ordre P quelconque par Khare et Chenaghlou-Fakhri respectivement. Nous avons aussi déterminée la condition générale pour obtenir l'équivalence entre les deux modèles (modèle de Khare et Chenaghlou-Fakhri). Dans le cas ordinaire de supersymétrie de mécanique quantique, nous avons vu que les différentes définitions de $N = 1, 2$ sont équivalentes. Maintenant, la même question se pose, est-ce que c'est possible de réaliser cette équivalence dans la parasupersymétrie de mécanique quantique à l'ordre $P = 2$. Nous prenons comme exemple le modèle de Rubackov-Spiridonov, il est clair que les définitions (1) et (2) sont équivalentes par le changement de variables

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2) \text{ et } Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2) \quad (3.3.29)$$

par ce changement, nous trouvons aussi l'équivalence entre les définitions (4) et (5). Pour faire l'équivalence entre les définitions (3) et (2) et puis (5) et (2), il est nécessaire de montrer l'existence de l'opérateur de Parité K , comme nous avons vu dans le cas de supersymétrie ordinaire, ceci est réalisé par la condition suivante

$$\text{Ker}Q_1 = \text{Ker}Q_2 = \text{Ker}H \quad (3.3.30)$$

Par contre, dans la parasupersymétrie de mécanique quantique, cette condition n'est pas applicable à cause de la complexité des relations entre les opérateurs Q_1, Q_2 et H . Effectivement, d'après la relation (3.2.6), nous pouvons écrire

$$\text{Ker}Q_1^3 = 2\text{Ker}(Q_1H) \quad (3.3.31)$$

Mathématiquement, cela n'implique pas que

$$\text{Ker}Q_1 = \text{Ker}H \quad (3.3.32)$$

Donc, en général, les définitions (4) et (1) et puis (5) et (2) ne sont pas équivalentes au niveau de la parasupersymétrie de mécanique quantique à l'ordre $P \succ 1$ quelconque. De plus, l'équivalence entre les définitions (1) et (3) n'est aussi pas réalisable dans le cadre de la parasupersymétrie à cause du fait que nous ne pouvons pas construire une deuxième parasupercharge en termes de la première parasupercharge et de l'opérateur K .

Nous concluons que, les différentes définitions de la parasupersymétrie (modèle Rubackov-Spiridnov) ne sont pas équivalentes à la différence du cas ordinaire de supersymétrie, cela revient toujours à la complexité de l'algèbre parasupersymétrique à l'ordre $P \succ 1$.

3.4 Représentation matricielle d'un système parasu- persymétrique à l'ordre P

Nous prenons comme exemple le modèle Rubackov-Spiridnov de la définition 1. Alors, d'après [35], les parasupercharges Q et Q^\dagger peuvent être données par la représentation matricielle suivante

$$Q_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{d}{dx} + W_i(x) \right] \delta_{i+1,j} \quad i, j = 1, 2 \quad (3.4.1)$$

Nous pouvons écrire

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & A_2^\dagger \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

et aussi

$$(Q^\dagger)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{d}{dx} + W_i(x) \right] \delta_{i,j+1} \quad i, j = 1, 2 \quad (3.4.3)$$

Avec

$$A_i^\pm = W_i(x) \pm \frac{d}{dx} \quad (3.4.4)$$

Ici les parasupercharges Q et Q^\dagger sont définis en termes des superpotentiels $W_1(x)$ et $W_2(x)$.

Les relations (3.2.1) et (3.2.2) nous conduisent à déduire les expressions de H_r

$$H_r = \text{diag}(H_1, H_2, H_3) \quad (3.4.5)$$

H_1 , H_2 et H_3 sont données en termes de A_i^\pm par

$$A_1^- H_1 = \frac{1}{4} \left(A_1^- A_1^\dagger + A_2^- A_2^\dagger \right) A_1^- \quad (3.4.6)$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \left(A_1^- A_1^\dagger + A_2^- A_2^\dagger \right) \quad (3.4.7)$$

$$A_2^\dagger H_1 = \frac{1}{4} \left(A_1^- A_1^\dagger + A_2^- A_2^\dagger \right) A_2^- \quad (3.4.8)$$

Pour résoudre ces équations, nous allons poser les contraintes suivantes

$$A_1^- A_1^\dagger = A_2^\dagger A_2^- + c \quad (3.4.9)$$

Où c est une constante.

Cependant, les composantes de H_r peuvent être données par leurs expressions indépendamment de c par

$$H_1 = \frac{1}{4} \left(-2 \frac{d^2}{dx^2} + W_1^2 + W_2^2 + 3W_1' + W_2' \right) \quad (3.4.10)$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \left(-2 \frac{d^2}{dx^2} + W_1^2 + W_2^2 - W_1' + W_2' \right) \quad (3.4.11)$$

$$H_3 = \frac{1}{4} \left(-2 \frac{d^2}{dx^2} + W_1^2 + W_2^2 - W_1' - 3W_2' \right) \quad (3.4.12)$$

la contrainte (3.4.9) devient

$$W_2^2 - W_1^2 + W_1' + W_2' + c = 0 \quad (3.4.13)$$

Maintenant, la représentation matricielle des parasuperscharges à l'ordre P quelconque (modèle de Khare) est donnée par la matrice $(P+1) \times (P+1)$

$$(Q)_{\alpha\beta} = (p - iW_\beta) \delta_{\alpha,\beta+1}; (Q^\dagger)_{\alpha\beta} = (p + iW_\beta) \delta_{\alpha,\beta+1}$$

avec $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, (P+1)$, il est clair que Q et Q^\dagger satisfont les relations suivantes

$$Q^{(P+1)} = (Q^\dagger)^{(P+1)} = 0$$

De plus, le Hamiltonien est donné par

$$(H)_{\alpha\beta} = H_\alpha \delta_{\alpha\beta}$$

Où

$$H_\alpha = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(W_\alpha^2 - W_\alpha') + \frac{1}{2}C_\alpha$$

$$H_{P+1} = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(W_P^2 - W_P') + \frac{1}{2}C_P$$

commutent avec les parasuperscharges Q et Q^\dagger , ceci nous conduit aux relations suivantes ($s = 2, 3, \dots, P$)

$$W_{s-1}^2 + W_{s-1}' + C_{s-1} = W_s^2 - W_s' + C_s$$

Ici C_1, C_2, \dots, C_P sont des constantes arbitraires avec la dimension d'énergie.

Il est clair que, pour $P = 2$, nous trouvons le modèle de Rubackov-Spiridonov.

Conclusion

Nous concluons que les différentes définitions de parasupersymétrie de mécanique quantique ne sont pas équivalentes, ceci est dû au fait que la parasuperalgèbre vérifie des relations

trilinéaires. Nous avons aussi trouvé la condition générale pour avoir l'équivalence entre les deux modèles Khare et Fakhri à l'ordre P . Il est clair que, dans la représentation de la supersymétrie, nous utilisons uniquement un seul potentiel par contre la parasupersymétrie est décrit par P superpotentiels W_P .

Le chapitre suivant sera consacré à la généralisation de la supersymétrie en théorie des champs dans le formalisme paraquantique il s'agit en particulier de présenter l'extension paraquantique du modèle le plus simple de supersymétrie, le modèle de Wess-Zumino.

Chapitre 4

Modèle Bosons-(P=2) Parafermion de Wess-Zumino

Dans ce chapitre, nous allons construire le modèle parasupersymétrique de Wess-Zumino à l'ordre $P = 2$ [78]. Nous décrirons le Lagrangien du système en termes de deux champs bosoniques et un champ parafermionique à l'ordre $P = 2$. Nous construirons l'algèbre parasupersymétrique et enfin nous déterminerons les propriétés les plus importantes comme la fermeture de l'algèbre et dériverons les transformations infinitésimales à partir de la paraspercharge Q .

4.1 Le Lagrangian du système

Dans le cas ordinaire, la construction du modèle de Wess-Zumino est représenté par un champ fermionique de Majorana avec deux champs scalaires qui ont la même masse m (un scalaire et un pseudoscalaire) ou par un champ de Majorana de spin $\frac{1}{2}$ et un champ vectoriel de spin 1, mais ce dernier définit aussi la superQED. Comme nous avons vu au chapitre 2 que, ce modèle est basé sur la condition de l'égalité entre le degré de liberté des champs parafermioniques et le degré de liberté des champs bosoniques. Nous pouvons décrire le modèle de Wess-Zumino par un parachamp fermionique de Majorana $\Psi_\alpha(x)$ à l'ordre $P = 2$ avec deux champs scalaires de spin 0 (un scalaire A , l'autre un champ pseudoscalaire B). Le cas discuté ici est le cas **on shell** c.à.d. avec les équations du mouvement des champs $\Psi(x)$, A et B suivantes

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi(x) = 0 \tag{4.1.1}$$

$$(\square + m^2)A = (\square + m^2)B = 0 \tag{4.1.2}$$

Le Lagrangien du système est alors décrit par

$$\mathcal{L} = \frac{i}{4} [\bar{\Psi}, (\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \quad (4.1.3)$$

$\Psi_\alpha(x)$ vérifie des relations trilineaires à l'ordre $P = 2$

$$\langle \Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y), \Psi_k(z) \rangle = 2\delta(x-y) \delta_{ij} \Psi_k(z) + 2\delta(y-z) \delta_{jk} \Psi_i(x) \quad (4.1.4)$$

$$\langle \Psi_i(x), \Psi_j(y), \bar{\Psi}_k(z) \rangle = 2\delta(y-z) \delta_{jk} \Psi_i(x) \quad (4.1.5)$$

$$\langle \Psi_i(x), \Psi_j(y), \Psi_k(z) \rangle = 0 \quad (4.1.6)$$

avec la notation $\langle a, b, c \rangle = abc + cba$

les champs ordinaires A et B vérifient les relations ci après

$$\begin{aligned} [A(x, t), \pi(y, t)] &= i\delta(x-y) \\ [\pi(x, t), \pi(y, t)] &= [A(x, t), A(y, t)] = 0 \\ [B(x, t), \pi'(y, t)] &= i\delta(x-y) \\ [\pi'(x, t), \pi'(y, t)] &= [B(x, t), B(y, t)] = 0 \end{aligned}$$

où

$$\pi(x, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A(x, t))}, \pi'(x, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 B(x, t))}$$

De plus, le parafermion $\Psi_\alpha(x)$ et les champs bosoniques A et B commutent entre eux

$$[A, \Psi] = [B, \Psi] = [A, B] = 0$$

Maintenant, le développement de ce travail nécessite l'utilisation des expansions des fonctions d'ondes des champs de Majorana $\Psi_i(x)$, A et B qui sont données par

$$\Psi^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{\omega_p} \right)^{1/2} \{ d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{ipx} \} \quad (4.1.7)$$

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (4.1.8)$$

$$B(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} \{ b(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (4.1.9)$$

En termes des modes, les relations (5.1.4-6) sont décrites par

$$\begin{aligned}
\langle d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}', r) \rangle &= 2\delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ls} d(\vec{p}', r) + 2\delta(\vec{p}' - \vec{k}) \delta_{lr} d(\vec{p}, s) \\
\langle d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}', r) \rangle &= 2\delta(\vec{p}' - \vec{k}) \delta_{lr} d^+(\vec{p}, s) \\
\langle d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}', r) \rangle &= 0 \\
[a(\vec{p}), a^+(\vec{k})] &= \delta(\vec{p} - \vec{k}), [b(\vec{p}), b^+(\vec{k})] = \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\
[a(\vec{p}), a(\vec{k})] &= [b(\vec{p}), b(\vec{k})] = [a(\vec{p}), b(\vec{k})] \\
&= [a(\vec{p}), d^+(\vec{k}, l)] = [b(\vec{p}), d^+(\vec{k}, l)] = 0
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

4.2 La parasupercharge Q_a

Maintenant, nous traitons les transformations des champs A , B et le parachamp $\Psi(x)$, qui sont des transformations parasupersymétriques de la théorie définie par (4.2.3-6). Considérons alors l'action suivante

$$S = \int \left\{ \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \right\} d^3x \tag{4.2.1}$$

à l'invariance du Lagrangien par une transformation continue donnée correspond une grandeur conservée déterminée. Ici cette grandeur représente la densité du courant qui est donnée par l'invariance de ce Lagrangien

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \tag{4.2.2}$$

Où V^μ représente la densité du courant conservée. Comme dans le modèle supersymétrique de Wess-Zumino, nous considérons les variations suivantes qui transforment les parafermions et les bonons entre eux

$$\delta \Psi = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma^5 B)\varepsilon \tag{4.2.3}$$

$$\delta \bar{\Psi} = \bar{\varepsilon}(A - i\gamma^5 B)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \tag{4.2.4}$$

$$\delta A = \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}, \Psi] \tag{4.2.5}$$

$$\delta B = \frac{-i}{2} [\bar{\varepsilon}, \gamma^5 \Psi] \tag{4.2.6}$$

en gardant bien de symétriser les produit $\bar{\varepsilon}\Psi$

où ε est un spineur de Majorana constant. Il est important de noter ici que, par analogie au cas ordinaire supersymétrique dans lequel ε est juste anticommutable comme Ψ , ici, on

est forcé de prendre les composantes ε^α comme des paragrassmanns qui vérifient l'algèbre (particulière à l'ordre $P = 2$) suivante

$$\varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c + \varepsilon_c \varepsilon_b \varepsilon_a = 0 \quad (4.2.7)$$

Notons que ceci implique $(\varepsilon^\alpha)^3 = 0$. Alors, les composantes ε^α ont alors des relations de commutations non triviales avec le parachamp Ψ^α

$$[[\bar{\varepsilon}_a, \Psi_i(x)], \bar{\Psi}_j(y)] = 2\bar{\varepsilon}_a \delta_{ij} \delta(x-y) \quad (4.2.8)$$

$$[[\bar{\varepsilon}_a, \Psi_i(x)], \Psi_j(y)] = 0 \quad (4.2.9)$$

$$[[\bar{\varepsilon}_a, \Psi_i(x)], \varepsilon_b] = 0 \quad (4.2.10)$$

et par analogie au cas ordinaire, nous assumons qu'ils commutent avec A et B . Nous pouvons décrire les relations précédentes, comme suit

$$\begin{aligned} [[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l)] &= 2\bar{\varepsilon}_a \delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\ [[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l)] &= 0 \\ [[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], \varepsilon_b] &= 0 \\ [a(\vec{p}), \varepsilon_b] &= [b(\vec{p}), \varepsilon_b] = 0 \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Maintenant, la variation du Lagrangien en utilisant les transformations (4.2.3-6) et en tenant compte des équations du mouvement des champs, nous conduit à écrire

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu$$

où

$$V^\mu = \frac{1}{4} [\bar{\varepsilon}, \partial_\mu (A - i\gamma^5 B) \Psi] \quad (4.2.12)$$

Il est utile de définir le parasupercourant par la relation

$$J^\mu = V^\mu - \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta \phi_i \quad (4.2.13)$$

avec $\phi_i = A, B, \Psi$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta \phi_i &= \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu B} \delta B + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \Psi} \delta \Psi \\ &= \frac{1}{4} [\bar{\varepsilon}, \partial_\mu (A - i\gamma^5 B) \Psi] - \frac{i}{4} [\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (A - i\gamma^5 B), \varepsilon] \end{aligned}$$

ceci implique

$$J^\mu = \frac{i}{4} [\bar{\Psi}\gamma^\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(A - i\gamma^5 B), \varepsilon] \quad (4.2.14)$$

Maintenant, pour que l'extension du modèle de Wess-Zumino $P = 2$ soit une réalisation d'une théorie des champs de l'algèbre parasupersymétrique (4.2.16-23), le spineur de la parasupercharge définit par

$$Q_a = \int d^3x k_a^\circ \quad (4.2.15)$$

avec $k_a^\circ = \frac{i\lambda}{4} \bar{\Psi}\gamma^0(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(A - i\gamma^5 B)$

λ est un paramètre qui doit être déterminé de telle sorte que la parasupercharge doit vérifier des relations trilineaires de l'algèbre de Poincaré parasupersymétrique (dans le sens de Debergh et Becker)

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (4.2.16)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = 0 \quad (4.2.17)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (4.2.18)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_a] = -(\sigma_{\mu\nu}^4)_{ab} Q_b \quad (4.2.19)$$

$$[P_\mu, Q_a] = 0 \quad (4.2.20)$$

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 2Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu \quad (4.2.21)$$

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu \bar{Q}_c \quad (4.2.22)$$

$$\langle \bar{Q}_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = 0 \quad (4.2.23)$$

ou

$$\sigma_{\mu\nu}^4 = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

En particulier, nous devons montrer que la parasupercharge Q_a satisfait les relations trilineaires d'ordre $P = 2$ (4.2.21-23). Pour faire ceci, nous devons donner une représentation des parasupercharges (4.2.15) comme un opérateur linéaire agissant dans l'espace de Fock définit par un état fondamental satisfaisant

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0$$

et

$$d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) |0\rangle = 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) |0\rangle \quad (4.2.24)$$

$$d(\vec{p}, s) |0\rangle = 0 \quad (4.2.25)$$

qui fixe l'ordre de la paraquantification $P = 2$. Avec les mêmes étapes de calculs que celles de [82], nous pouvons obtenir les expressions suivantes pour Q_a et \bar{Q}_a

$$Q_a = i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_s \int d^3p \{C(\vec{p})d^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s) - D(\vec{p})d(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)\}_a \quad (4.2.26)$$

$$\bar{Q}_a = -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_s \int d^3p \{\bar{v}(\vec{p}, s)d(\vec{p}, s)D(\vec{p}) - \bar{u}(\vec{p}, s)d^+(\vec{p}, s)C(\vec{p})\}_a \quad (4.2.27)$$

où

$$C_{ab}(\vec{p}) = (a1_{ab} - i\gamma_{ab}^5 b) \quad (4.2.28)$$

$$D_{ab}(\vec{p}) = (a^+1_{ab} - i\gamma_{ab}^5 b^+) \quad (4.2.29)$$

4.2.1 Calcul de $\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle$

Maintenant, nous allons dériver la relation (4.2.21), en remplaçant les parasupercharges par leurs expressions, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Q_a \bar{Q}_b Q_c &= i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \\ &\quad \{C(\vec{p})d^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s) - D(\vec{p})d(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)\}_a \\ &\quad \{\bar{v}(\vec{k}, l)d(\vec{k}, l)D(\vec{k}) - \bar{u}(\vec{k}, l)d^+(\vec{k}, l)C(\vec{k})\}_b \\ &\quad \{C(\vec{p}')d^+(\vec{p}', r)v(\vec{p}', r) - D(\vec{p}')d(\vec{p}', r)u(\vec{p}', r)\}_c \end{aligned}$$

de sorte

$$\begin{aligned}
\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle &= i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \\
&\{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) \\
&D_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) - C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
&d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) - C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \\
&\bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) + C_{a\alpha}(\vec{p}) \\
&d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \\
&- D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \\
&v_\gamma(\vec{p}', r) + D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') \\
&d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) + D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) \\
&C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) - D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
&d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \} + (a \leftrightarrow c)
\end{aligned}$$

le regroupement des termes avec un signe positif dans F et un signe négatif dans D , permet décrire

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = F + D$$

où

$$\begin{aligned}
F &= i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) \\
&D_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) + C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) \\
&D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
&+ i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) \\
&C_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) + D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
&d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
&+ i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) \\
&C_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) + C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
&d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D = & -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p'l \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) + C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
& -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p'l \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) + C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
& -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p'l \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}l) d(\vec{p}l, r) u_\gamma(\vec{p}l, r) + D_{c\gamma}(\vec{p}l) d(\vec{p}l, r) u_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \}
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (4.1.10), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
F = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p'l \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) [D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) \\
& v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) + C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)] C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& + 2C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) [C_{c\gamma}(\vec{p}l) D_{\beta b}(\vec{k}) v_\gamma(\vec{p}l, r) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& + D_{c\gamma}(\vec{p}l) C_{\beta b}(\vec{k}) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}l, r)] \delta_{lr} \delta(\vec{p}l - \vec{k}) \} \\
& + [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)] \\
& [D_{\beta b}(\vec{k}), C_{a\alpha}(\vec{p})] C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& + C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) [C_{\beta b}(\vec{k}), D_{c\gamma}(\vec{p}l)] \\
& [d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}l, r) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}l, r) - d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)]
\end{aligned}$$

qui peut être décomposée en trois termes $F = F_1 + F_2 + R_1$

où

$$\begin{aligned}
F_1 = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p'l \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) [D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) \\
& v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) + C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)] C_{c\gamma}(\vec{p}l) d^+(\vec{p}l, r) v_\gamma(\vec{p}l, r) \\
& + 2C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) [C_{c\gamma}(\vec{p}l) D_{\beta b}(\vec{k}) v_\gamma(\vec{p}l, r) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& + D_{c\gamma}(\vec{p}l) C_{\beta b}(\vec{k}) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}l, r)] \delta_{lr} \delta(\vec{p}l - \vec{k}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)] \left[D_{\beta b}(\vec{k}), C_{a\alpha}(\vec{p}) \right] C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \\
& v_\gamma(\vec{p}', r) + C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \left[C_{\beta b}(\vec{k}), D_{c\gamma}(\vec{p}') \right] [d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}', r) \\
& \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}', r) - d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_1 = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \left[D_{c\gamma}(\vec{p}'), C_{a\alpha}(\vec{p}) \right] C_{\beta b}(\vec{k}) d(\vec{p}', r) \\
& d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}', r) \\
& + i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \left[C_{c\gamma}(\vec{p}'), D_{a\alpha}(\vec{p}) \right] C_{\beta b}(\vec{k}) d^+(\vec{p}', r) \\
& d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) v_\gamma(\vec{p}', r)
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des $u_\alpha(\vec{p}, s)$ et $v_\alpha(\vec{p}, s)$, F_1 peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
F_1 = & \frac{i}{16} \sum_r \int d^3p \int d^3p' \{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 \} p_\mu \gamma_{ab}^\mu \\
& C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) + \frac{i}{16} \sum_r \int d^3p \int d^3p' C_{a\alpha}(\vec{p}) \\
& d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 \}
\end{aligned}$$

Maintenant, les matrices 4×4 de $v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)$ et $u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)$ peuvent être développées en termes des matrices $1_{4 \times 4}$, γ^μ , $\gamma^\mu \gamma^5$, $\sigma^{\mu\nu}$ et γ^5 , (voir par exemple [82]), nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_2 = & \frac{i}{32} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) (m_\mu \gamma_{ab}^\mu + n_\mu (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}) \\
& - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) (m'_\mu \gamma_{ab}^\mu + n'_\mu (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \\
& + C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) [d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}', r) (m'_\mu \gamma_{ab}^\mu + n'_\mu (\gamma^\mu \gamma^5)_{cb}) \\
& - d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}', r) (m_\mu \gamma_{ab}^\mu + n_\mu (\gamma^\mu \gamma^5)_{cb})]
\end{aligned}$$

où

$$m_\mu = m'_\mu = \frac{1}{4}\bar{v}_a(\vec{p}, s)\gamma^\mu_{ab}v_b(\vec{p}, l) = \bar{u}_a(\vec{p}, l)\gamma^\mu_{ab}u_b(\vec{p}, s) = p_\mu\delta_{ls} \quad (4.2.30)$$

$$n_\mu = \frac{1}{4}\bar{v}_a(\vec{p}, s)(\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}v_b(\vec{p}, l) \quad (4.2.31)$$

$$n'_\mu = -\frac{1}{4}\bar{u}_a(\vec{p}, l)(\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}u_b(\vec{p}, s) \quad (4.2.32)$$

Maintenant, d'après les propriétés de symétrie entre les indices a et c , la contribution des termes proportionnels à $(\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}$ s'élimine. L'expression de F_2 devient

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{i}{32} \sum_{s,r} \int d^3p \int d^3p' [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, l)] p_\mu \gamma^\mu_{ab} C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \\ &\quad + \frac{i}{32} \sum_{s,r} \int d^3p \int d^3p' C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}', r)] p_\mu \gamma^\mu_{cb} \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + R_1 \\ &= \frac{i}{16} \sum_r \int d^3p \int d^3p' \{a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) + 1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)]\} p_\mu \gamma^\mu_{ab} C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \\ &\quad + \frac{i}{16} \sum_s \int d^3p \int d^3p' C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) p_\mu \gamma^\mu_{cb} \\ &\quad \left\{ a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) + 1 + \frac{1}{2} \sum_r [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}', r)] \right\} + R_1 \end{aligned}$$

de la même façon, l'expression de D devient

$$\begin{aligned} D &= -\frac{i}{16} \sum_r \int d^3p \int d^3p' \{a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) + 1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)]\} p_\mu \gamma^\mu_{ab} D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \\ &\quad - \frac{i}{16} \sum_s \int d^3p \int d^3p' D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) p_\mu \gamma^\mu_{cb} \\ &\quad \left\{ a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) + 1 + \frac{1}{2} \sum_r [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}', r)] \right\} + R_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R_2 &= -\frac{i}{4^3} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \left[D_{c\gamma}(\vec{p}'), C_{a\alpha}(\vec{p}) \right] D_{\beta b}(\vec{k}) d(\vec{p}', r) \\
&\quad d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) u_\gamma(\vec{p}', r) \\
&\quad -\frac{i}{4^3} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \left[C_{c\gamma}(\vec{p}'), D_{a\alpha}(\vec{p}) \right] D_{\beta b}(\vec{k}) d^+(\vec{p}', r) \\
&\quad d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) v_\gamma(\vec{p}', r)
\end{aligned}$$

de sorte

$$\begin{aligned}
\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle &= \int d^3p \frac{1}{4} \lambda^3 \{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 + \\
&\quad \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)] \} p_\mu \gamma_{ab}^\mu \\
&\quad \left\{ \frac{i}{4} \sum_r \int d^3p' \left[C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) - D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{i}{4} \sum_s \int d^3p \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) - D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
&\quad \left\{ \int \frac{1}{4} \lambda^3 d^3p' \left[a^+(\vec{p}') a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}') b(\vec{p}') + 1 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_r [d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r)] p_\mu \gamma_{cb}^\mu \right\} + R_1 + R_2 \tag{4.2.33}
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant les propriétés de symétrie, la contribution des termes proportionnels à $(\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}$ dans R disparaît, de sorte que

$$\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 \\
&= \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} C_{\beta b} u_\beta(\vec{k}, l) [d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \\
&\quad - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s)] - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} D_{\beta b} v_\beta(\vec{k}, l) \\
&\quad [d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) - d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s)]
\end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons montrer que le quadrivecteur d'impulsion P_μ prend la forme suivante (l'annexe B)

$$P_\mu = \int d^3p \left\{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 + \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)] \right\} p_\mu \tag{4.2.34}$$

la relation (4.2.21) peut être réécrite sous la forme

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = \frac{1}{4} \lambda^3 P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + \frac{1}{4} \lambda^3 Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu + R \tag{4.2.35}$$

Alors, si nous choisissons $\lambda = 2$, nous obtenons

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 2Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu + R \quad (4.2.36)$$

par un calcul direct, nous pouvons vérifier que

$$[Q_a, P_\mu] = 0 \quad (4.2.37)$$

Clairement, d'après les relations (4.2.36) et (4.2.37), R doit être aussi conservé, en effet, nous pouvons vérifier que (l'annexe E)

$$[R, P_\mu] = 0 \quad (4.2.38)$$

Maintenant, et comme dans le travail de [83], en général R n'est pas nul, l'algèbre de symétrie est compliquée par un choix analogue de l'état de vide (4.2.21) devient

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 2Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu \quad (4.2.39)$$

Dans l'espace de Fock, le correspondant de R est représenté par un opérateur nul.

Il est clair que, nous pouvons déduire le conjugué de cette algèbre (4.2.39) par

$$\langle \bar{Q}_a, Q_b, \bar{Q}_c \rangle = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu \bar{Q}_c + 2\bar{Q}_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu \quad (4.2.40)$$

4.2.2 Calcul de $\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle$

Dans ce cas, les expressions des termes F et D sont donnés par

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = F + D$$

où

$$\begin{aligned} F = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3 p \int d^3 k \int d^3 p' \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\ & d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) + D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) \\ & \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\ & + i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3 p \int d^3 k \int d^3 p' \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \\ & \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \bar{u}_\gamma(\vec{p}', r) + C_{c\gamma}(\vec{p}') \\ & d^+(\vec{p}', r) \bar{u}_\gamma(\vec{p}', r) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\ & + i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3 p \int d^3 k \int d^3 p' \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\ & d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) + D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \\ & \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D = & -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) + D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) \\
& \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
& -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) + D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) \\
& \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) d(\vec{k}, l) D_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
& -i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \sum_{s,r,l} \int d^3p \int d^3k \int d^3p' \{ D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
& d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \bar{u}_\gamma(\vec{p}', r) + C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \bar{u}_\gamma(\vec{p}', r) \\
& \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) d^+(\vec{k}, l) C_{\beta b}(\vec{k}) D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \}
\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes de calcul, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = & \int d^3p \frac{1}{4} \lambda^3 \{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 + \\
& \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)] \} p_\mu \gamma^\mu_{ab} \\
& \left\{ \frac{i}{4} \sum_r \int d^3p' \left[D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) \bar{v}_\gamma(\vec{p}', r) - C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) \bar{u}_\gamma(\vec{p}', r) \right] \right\} \\
& + \frac{i}{4} \sum_s \int d^3p \{ C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s) - D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s) \} \\
& \left\{ \int \frac{1}{4} \lambda^3 d^3p' \left[a^+(\vec{p}') a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}') b(\vec{p}') + 1 \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sum_r [d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r)] p_\mu (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} \right\} + R_1 + R_2
\end{aligned}$$

Le R devient

$$\begin{aligned}
R' = & R_1 + R_2 \\
= & \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu \gamma^\mu_{ac} C_{b\beta} \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) [d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \\
& - d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s)] - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu \gamma^\mu_{ac} D_{\beta b} \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
& [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) - d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s)]
\end{aligned}$$

nous trouvons alors l'algèbre suivante

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu \bar{Q}_c + 4Q_a P_\mu (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} + R' \quad (4.2.41)$$

De la même manière, nous obtenons l'autre relation suivante

$$\langle \bar{Q}_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle = 4P_\mu (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} \bar{Q}_a + 4P_\mu (c^{-1} \gamma^\mu)_{ab} \bar{Q}_c + R'' \quad (4.2.42)$$

avec

$$\begin{aligned} R'' &= R_1 + R_2 \\ &= -\sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu c^{-1})_{ac} C_{b\beta} \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) [d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \\ &\quad - d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s)] + \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu c^{-1})_{ac} D_{\beta b} \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\ &\quad \left[d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) - d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \right] \end{aligned}$$

Comme dans le cas de R , R' et R'' sont encore représentés par des opérateurs nuls dans l'espace de Fock.

4.3 Fermeture de la parasuperalgèbre des transformations

D'après l'algèbre parasupersymétrique, la parasupercharge vérifie des relations trilineaires décrite par des termes proportionnels à QQQ . Pour avoir la fermeture de cet algèbre, il est nécessaire d'appliquer les transformations infinitésimales trois fois répétées pour chaque champ. Effectivement, nous commençons par le champ bosonique A

4.3.1 Algèbre des transformations du champ bosonique A

En appliquant trois fois les transformations infinitésimales, nous obtenons

$$\delta_3 \delta_2 \delta_1 A = -\frac{i}{4} \gamma_{ab}^\mu [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^b] [\bar{\varepsilon}_3^c, \partial_\mu \Psi^c] + \frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab} \gamma_{c\alpha}^5 [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^b] [\bar{\varepsilon}_3^c, \partial_\mu \Psi^\alpha]$$

en utilisant les propriétés de paragrammann ε^α , nous trouvons

$$\delta_3 \delta_2 \delta_1 A = \partial_\mu \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^\alpha + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_{c\alpha}^5, \Psi^\alpha \right]$$

Nous pouvons écrire

$$\delta_3 \delta_2 \delta_1 A = \partial_\mu \delta_{-\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_c^{5\alpha}} A$$

finalemt, la fermeture de l'algèbre des transformations du champ bosonique A prend la forme suivante

$$\begin{aligned} & (\delta_3 \delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_3 \delta_2 + \delta_2 \delta_1 \delta_3) A \\ &= \partial_\mu \delta_{\bar{\zeta}^\mu} A \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\bar{\zeta}^\mu)^\alpha &= -\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^\alpha + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_c^{5\alpha} - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_2^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_3^b] \bar{\varepsilon}_1^\alpha \\ &+ \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_2^a (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}, \varepsilon_3^b] \bar{\varepsilon}_1^c \gamma_c^{5\alpha} - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_1^b] \bar{\varepsilon}_2^\alpha + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}, \varepsilon_1^b] \bar{\varepsilon}_2^c \gamma_c^{5\alpha} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

$(\bar{\zeta}^\mu)^\alpha$ représente le paramètre de la transformation en fonction des paragrassman $\bar{\varepsilon}_1^a, \bar{\varepsilon}_2^a$ et $\bar{\varepsilon}_3^a$.

De la même façon, nous trouvons la fermeture de l'algèbre des transformations du champ bosonique B avec le même paramètre de transformation $(\bar{\zeta}^\mu)^\alpha$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & (\delta_3 \delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_3 \delta_2 + \delta_2 \delta_1 \delta_3) B \\ &= \partial_\mu \delta_{\bar{\zeta}^\mu} B \end{aligned}$$

4.3.2 Algèbres des transformations du champ parafermionique $\Psi^a(x)$

En appliquant deux fois les transformations infinitésimales sur le champ parafermionique $\Psi(x)$, nous obtenons

$$\delta_2 \delta_1 \Psi^a(x) = - (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{a\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \Psi^\alpha] \varepsilon_1^b - \frac{1}{2} \gamma^5{}_{\sigma b} [\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^5{}_{\alpha\beta} \Psi^\beta] \varepsilon_1^b \right\}$$

En appliquant une fois encore la transformation infinitésimale sur le champ parafermionique $\Psi(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta_3 \delta_2 \delta_1 \Psi^a(x) &= \frac{1}{2} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{a\sigma} 1_{\sigma b} \left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, [(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(A - i\gamma^5 B)]_{\alpha\beta} \varepsilon_3^\beta \right] \varepsilon_1^b \\ &+ \frac{1}{2} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{a\sigma} \gamma^5{}_{\sigma b} [\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^5{}_{\alpha\beta} [(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(A - i\gamma^5 B)]_{\beta\rho} \varepsilon_3^\rho] \varepsilon_1^b \end{aligned}$$

En tenant compte des équations du mouvements des champs A et B , nous trouvons

$$\begin{aligned}\delta_3\delta_2\delta_1\Psi^a(x) &= \frac{1}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}1_{\sigma b}\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, [i\gamma^\nu\partial_\nu(A - i\gamma^5 B)]_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b \\ &\quad + \frac{1}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}\gamma^5_{\sigma b}\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^5_{\alpha\beta}[i\gamma^\nu\partial_\nu(A - i\gamma^5 B)]_{\beta\rho}\varepsilon_3^\rho\right]\varepsilon_1^b\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\delta_3\delta_2\delta_1\Psi^a(x) &= \frac{i}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}1_{\sigma b}\partial_\nu A\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b - \frac{1}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}1_{\sigma b}\partial_\nu B\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b \\ &\quad + \frac{i}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}\gamma^5_{\sigma b}\partial_\nu A\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^5_{\alpha\beta}\gamma^\nu_{\beta\rho}\varepsilon_3^\rho\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}\gamma^5_{\sigma b}\partial_\nu B\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, (\gamma^5\gamma^\nu\gamma^5)_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des matrices gamma, nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta_3\delta_2\delta_1\Psi^a(x) &= \frac{i}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}\partial_\nu(A1_{\sigma b} - i\gamma^5_{\sigma b}B)\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b \\ &\quad - \frac{i}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{a\sigma}\partial_\nu(A - i\gamma^5_{\sigma b}B)\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\gamma^5_{bc}\varepsilon_1^c\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\delta_3\delta_2\delta_1\Psi^a(x) = \partial_\nu\delta_{\frac{i}{2}[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta]\varepsilon_1^b - \frac{i}{2}[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\nu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta]\gamma^5_{bc}\varepsilon_1^c}\Psi^a(x)$$

finalemt, la fermeture de l'algèbre des transformations du champ parafermionique $\Psi^a(x)$ prend la forme suivante

$$\begin{aligned}(\delta_3\delta_2\delta_1 + \delta_1\delta_3\delta_2 + \delta_2\delta_1\delta_3)\Psi^a(x) \\ = \partial_\mu\delta_{\xi^\mu}\Psi^a(x)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\mu_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\varepsilon_1^b - \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_2^\alpha, \gamma^\mu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_3^\beta\right]\gamma^5_{bc}\varepsilon_1^c + \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_3^\alpha, \gamma^\mu_{\alpha\beta}\varepsilon_1^\beta\right]\varepsilon_2^b \\ &\quad - \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_3^\alpha, \gamma^\mu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_1^\beta\right]\gamma^5_{bc}\varepsilon_2^c + \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_1^\alpha, \gamma^\mu_{\alpha\beta}\varepsilon_2^\beta\right]\varepsilon_3^b - \frac{i}{2}\left[\bar{\varepsilon}_1^\alpha, \gamma^\mu\gamma^5_{\alpha\beta}\varepsilon_2^\beta\right]\gamma^5_{bc}\varepsilon_3^c\end{aligned}$$

4.4 Générateurs des transformations parasupersymétriques

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, nous pouvons construire les transformations supersymétriques en utilisant la relation (2.5.6). Maintenant, en théorie des champs

parasupersymétriques, nous pouvons aussi déduire les transformations en utilisant la généralisation de cette relation dans le formalisme paraquantique qui s'écrit sous la forme suivante

$$\delta\phi = i [[\bar{\varepsilon}, Q], \phi] \quad (4.4.1)$$

où ϕ représente les champs bosoniques $A(x)$, $B(x)$ ou le parachamp $\Psi(x)$.

4.4.1 Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}, Q], A]$

En remplaçant les expressions de A et Q en fonctions des opérateurs de créations et d'annihilations, nous trouvons

$$\begin{aligned} -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{i}{2} \sum_s \int d^3p \{ C_{ab}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) - D_{ab}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) \\ &\quad u_b(\vec{p}, s) \}], V^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} d^3k \{ a(\vec{k}) e^{ikx} + a^+(\vec{k}) e^{-ikx} \}] \\ -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{1}{4} \sum_s \int d^3p \{ p d^3 p \gamma^\alpha [a^\alpha(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s) - a_\alpha^+(\vec{p}) d(\vec{p}, s) \\ &\quad u(\vec{p}, s) \}], V^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} d^3k \{ a(\vec{k}) e^{ikx} + a^+(\vec{k}) e^{-ikx} \}] \end{aligned}$$

par intégration sur p , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] &= \frac{1}{2} \sum_s \int d^3p V^{-\frac{1}{2}} \int \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{1/2} d^3k \{ [\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s)] \\ &\quad [C_{ab}(\vec{p}), a^+(\vec{k})] e^{-ikx} - [\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s)] [D_{ab}(\vec{p}), a(\vec{k})] e^{ikx} \} \end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes

$$[C_{ab}(\vec{p}), a^+(\vec{k})] = \delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ab} \quad (4.4.2)$$

$$[D_{ab}(\vec{p}), a(\vec{k})] = -\delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ab} \quad (4.4.3)$$

par intégration aussi sur k , nous obtenons

$$\begin{aligned} -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] &= \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}_a, \sum_s \int \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} d^3p V^{-1/2} \\ &\quad \{ d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{ipx} \}] \\ -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] &= \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}_a, \Psi_a] = \delta A \end{aligned}$$

ceci représente la transformation de champ bosonique A .

4.4.2 Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B]$

En remplaçant les expressions des champs bosonique B et parasupercharge Q_a , nous trouvons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B] &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{i}{2} \sum_s \int d^3 p \{ C_{ab}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) - D_{ab}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) \\
&\quad u_b(\vec{p}, s) \}], V^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} d^3 k \{ b(\vec{k}) e^{ikx} + b^+(\vec{k}) e^{-ikx} \}] \\
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B] &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{1}{4} \sum_s \int d^3 \{ p d^3 p \gamma_{ab}^5 [b(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) - b^+(\vec{p}) d(\vec{p}, s) \\
&\quad u_b(\vec{p}, s) \}], V^{-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} d^3 k \{ b(\vec{k}) e^{ikx} + b^+(\vec{k}) e^{-ikx} \}]
\end{aligned}$$

de la même manière, en utilisant les relations

$$[C_{ab}(\vec{p}), b^+(\vec{k})] = -i \gamma_{ab}^5 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \quad (4.4.4)$$

$$[D_{ab}(\vec{p}), b(\vec{k})] = i \gamma_{ab}^5 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \quad (4.4.5)$$

et par intégration sur k et p , nous obtenons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B] &= \frac{-i}{2} [\bar{\varepsilon}_a, \sum_s \int \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} d^3 p V^{-1/2} \gamma_{ab}^5 \\
&\quad \{ d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{ipx} \}] \\
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B] &= \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}_a, \gamma_{ab}^5 \Psi_b] = \delta B
\end{aligned}$$

qui représente la transformation du champ bosonique B .

4.4.3 Calcul de $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b]$

Nous remplaçons les expressions du champ parafermionique Ψ_b et la parasupercharge par leurs expressions (4.2.26) et (4.1.7), nous trouvons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{i}{2} \sum_s \{ \int d^3 p C_{ac}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_c(\vec{p}, s) \\
&\quad - D_{ac}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_c(\vec{p}, s) \}], \sum_l \int \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{1/2} d^3 k V^{-1/2} \\
&\quad \{ d(\vec{k}, l) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} + d^+(\vec{k}, l) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \}]
\end{aligned}$$

nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= \frac{1}{2} V^{-1/2} \sum_{s,l} \int d^3 p \int \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{1/2} d^3 k \{ [\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l) \} \\
&C_{ac}(\vec{p}) v_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} + [\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l) \} \\
&C_{ac}(\vec{p}) v_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} - \\
&[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l) \} D_{ac}(\vec{p}) u_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} \\
&- [\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l) \} D_{ac}(\vec{p}) u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx}
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations (4.2.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= \frac{1}{2} V^{-1/2} \sum_{s,l} \int d^3 p \int d^3 k \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{1/2} \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\
&\bar{\varepsilon}_a C_{ac}(\vec{p}) v_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} - 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \bar{\varepsilon}_a \\
&D_{ac}(\vec{p}) u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \}
\end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes

$$\sum_s v_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s) = \left(\frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} G \right)_{cb} \quad (4.4.6)$$

$$\sum_s u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) = \left(\frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{2m} G \right)_{cb} \quad (4.4.7)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= V^{-1/2} \sum_s \int d^3 p (2\omega_p)^{-1/2} \{ \bar{\varepsilon}_a C_{ac}(\vec{p}) (pc)_{cb} e^{-ipx} \\
&- \bar{\varepsilon}_a D_{ac}(\vec{p}) (pc)_{cb} e^{ipx} \}
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la charge et en tenant compte de l'équation du mouvement de $\Psi(x)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= -i \gamma_{ba}^\mu \varepsilon_a \partial_\mu A + (\gamma^\mu \gamma^5)_{ba} \varepsilon_a \partial_\mu B \\
&= \delta \Psi_b
\end{aligned}$$

qui représente la transformation infinitésimale du champ parafermionique Ψ_b .

Conclusion

Nous avons construit le modèle parasupersymétrique en utilisant un parachamp fermionique à l'ordre $P = 2$ avec deux champs bosoniques A et B . L'invariance de cette symétrie

parasupersymétrique est exprimée par la parasuperalgèbre de Poincaré. Nous avons trouvé que la parasupercharge doit vérifier des relations trilineaires QQQ . Ceci nous conduit à définir une nouvelle fermeture dans laquelle la règle est réalisée par un produit trois fois répété des transformations $\delta\delta\delta$. Contrairement au cas ordinaire qui est exprimé par un produit deux fois répété des transformations $\delta\delta$.

Chapitre 5

Le Modèle ($P = 2$)

Parabosons-Parafermion de Wess-Zumino

Dans ce chapitre, nous allons construire le modèle de Wess-Zumino en termes de deux parachamps bosoniques et un parachamp fermionique au même ordre $P = 2$ [81]. Nous déterminerons les parasupercharges correspondantes à ce modèle et leur algèbre. Ensuite, nous vérifierons la fermeture de l'algèbre parasupersymétrique et enfin, nous déduirons les transformations infinitésimales en utilisant la parasupercharge Q_a .

5.1 Le Lagrangien du système

Dans ce chapitre, nous allons construire le modèle massif de Wess-Zumino en termes des parachamps fermioniques et bosoniques de même ordre $P = 2$. Ceci est décrit par un parafermion Ψ avec deux champs parabosoniques A et B . Le Lagrangien correspondant à ce modèle est donné par

$$L = \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{4} \{(\partial_\mu A), (\partial^\mu A)\} + \frac{1}{4} \{(\partial_\mu B), (\partial^\mu B)\} - \frac{1}{4} m^2 \{A, A\} - \frac{1}{4} m^2 \{B, B\} \quad (5.1.1)$$

tous les parachamps ont la même masse m . et $\bar{\Psi}(x) = \Psi^T \gamma^0$.

Dans ce cas, les parachamps bosoniques A et B et le parachamp fermionique $\Psi(x)$

satisfont les relations suivantes

$$\langle \varphi_i(\vec{x}, t) \bar{\varphi}_j(\vec{y}, t) \varphi_k(\vec{z}, t) \rangle = 2\delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ij} \varphi_k(\vec{z}, t) \quad (5.1.2)$$

$$\mp 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \delta_{jk} \varphi_i(\vec{x}, t) \quad (5.1.3)$$

$$\langle \varphi_i(\vec{x}, t) \varphi_j(\vec{y}, t) \bar{\varphi}_k(\vec{z}, t) \rangle = 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \delta_{jk} \varphi_i(\vec{x}, t) \quad (5.1.4)$$

$$\langle \varphi_i(\vec{x}, t) \varphi_j(\vec{y}, t) \varphi_k(\vec{z}, t) \rangle = 0 \quad (5.1.5)$$

La condition sur l'état du vide $|0\rangle$ est donnée par

$$\varphi_i(x, t) \varphi_j^+(y, t) |0\rangle = P \delta_{ij} \delta(x - y) |0\rangle \quad (5.1.6)$$

φ_i représentent les champs parafermioniques ou parabosoniques.

avec la notation $\langle a, b, c \rangle = abc \mp cba$. Les signes supérieur et inférieur dans (5.1.3) se réfèrent aux champs parabosoniques et parafermioniques respectivement.

Dans la théorie parasupersymétrique qui est décrite par des parachamps bosoniques et fermioniques ayant le même ordre P , en plus des équations (5.1.2-5) qui décrivent le même type de parachamps, il y a aussi des relations trilineaires entre les parachamps bosoniques et fermioniques. D'après Greenberg-Messiah [82], ces relations sont définies par deux structures de commutations qui sont complètement différentes, les deux structures sont dénommées, Relative supersymétrie parabosonique et Relative supersymétrie parafermionique.

a-Supersymétrie parabosonique relative

Dans cette structure, les relations de commutations entre les parachamps bosoniques $A(\vec{x}, t)$, $B(\vec{x}, t)$ et fermionique $\Psi(\vec{x}, t)$ sont données par

$$[\{\Psi(\vec{x}, t), A(\vec{y}, t)\}, \pi(\vec{z}, t)] = 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \Psi(\vec{x}, t) \quad (5.1.7)$$

$$[\{\Psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\}, A(\vec{z}, t)] = -2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \Psi(\vec{x}, t) \quad (5.1.8)$$

$$\{\{A(\vec{x}, t), \bar{\Psi}(\vec{y}, t)\}, \Psi(\vec{z}, t)\} = 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) A(\vec{x}, t) \quad (5.1.9)$$

$$\{\{A(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)\}, \bar{\Psi}(\vec{z}, t)\} = 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) A(\vec{x}, t) \quad (5.1.10)$$

$$[\{\Psi(\vec{x}, t), A(\vec{y}, t)\}, A(\vec{z}, t)] = 0 \quad (5.1.11)$$

$$[\{\Psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\}, \pi(\vec{z}, t)] = 0 \quad (5.1.12)$$

$$\{\{A(\vec{x}, t), \bar{\Psi}(\vec{y}, t)\}, \bar{\Psi}(\vec{z}, t)\} = 0 \quad (5.1.13)$$

$$\{\{A(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)\}, \Psi(\vec{z}, t)\} = 0 \quad (5.1.14)$$

et les mêmes relations pour $B(\vec{x}, t)$.

avec

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A(\vec{x}, t))} \quad (5.1.15)$$

b-Supersymétrie parafermionique relative

Les relations de commutations entre les parachamps bosoniques et fermioniques sont données par

$$\{\Psi(\vec{x}, t), [\bar{\Psi}(\vec{y}, t), A(\vec{z}, t)]\} = 2\delta(\vec{y} - \vec{x}) A(\vec{z}, t) \quad (5.1.16)$$

$$\{\bar{\Psi}(\vec{x}, t), [\Psi(\vec{y}, t), A(\vec{z}, t)]\} = 2\delta(\vec{y} - \vec{x}) A(\vec{z}, t) \quad (5.1.17)$$

$$[\pi(\vec{x}, t), [A(\vec{y}, t), \Psi(\vec{z}, t)]] = 2\delta(\vec{y} - \vec{x}) \Psi(\vec{z}, t) \quad (5.1.18)$$

$$[A(\vec{x}, t) [\pi(\vec{y}, t), \Psi(\vec{z}, t)]] = 2\delta(\vec{y} - \vec{x}) \Psi(\vec{z}, t) \quad (5.1.19)$$

$$[\pi(\vec{x}, t), [\pi(\vec{y}, t), \Psi(\vec{z}, t)]] = 0 \quad (5.1.20)$$

$$[A(\vec{x}, t) [A(\vec{y}, t), \Psi(\vec{z}, t)]] = 0 \quad (5.1.21)$$

$$\{\bar{\Psi}(\vec{x}, t), [\bar{\Psi}(\vec{y}, t), A(\vec{z}, t)]\} = 0 \quad (5.1.22)$$

$$\{\Psi(\vec{x}, t), [\Psi(\vec{y}, t), A(\vec{z}, t)]\} = 0 \quad (5.1.23)$$

avec les mêmes relations pour $B(\vec{x}, t)$ et les mêmes conditions sur l'état de vide $|0\rangle$ (5.1.6)

La différence entre les deux structures de commutations (5.1.7-14) et (5.1.16-23) est que, la première est décrite par une symétrie par rapport aux opérateurs parabosoniques et parafermioniques, alors que, la deuxième est décrite par une antisymétrie.

Nous rappelons que, les champs parabosoniques et parafermioniques ne commutent pas mais doivent vérifier des relations trilineaires du type (5.1.7-14) ou (5.1.16-23). Il est clair que, la supercharge vérifie des relations bilinéaires. Ceci implique que, le paramètre de transformation ε correspondant à la supercharge Q_a (les générateurs de transformations) doit vérifier des relations ordinaires c.à.d.

$$\varepsilon_a^2 = 0, \quad \varepsilon_a \varepsilon_b = -\varepsilon_b \varepsilon_a \quad (5.1.24)$$

donc, le paramètre de grassman ε va commuter avec les parabosons et anticommuter avec le parafermion $\Psi(x)$.

$$[\varepsilon_a, A] = [\varepsilon_a, B] = 0 \quad (5.1.25)$$

$$\{\varepsilon_a, \Psi_a\} = 0 \quad (5.1.26)$$

ceci nous conduit à poser les transformations sous la forme suivantes

$$\delta\Psi = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma_5 B)\varepsilon \quad (5.1.27)$$

$$\delta\bar{\Psi} = \bar{\varepsilon}(A - i\gamma_5 B)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \quad (5.1.28)$$

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\Psi \quad (5.1.29)$$

$$\delta B = -i\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi \quad (5.1.30)$$

Maintenant, à partir de ces transformations, nous pouvons calculer la supercharge qui s'exprime par l'invariance du Lagrangien comme suit

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{4} [\delta\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\delta\Psi] + \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\delta A), (\partial^\mu A)\} \\ &+ \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\delta B), (\partial^\mu B)\} - \frac{1}{2}m^2\{\delta A, A\} - \frac{1}{2}m^2\{\delta B, B\}\end{aligned}\quad (5.1.31)$$

En remplaçant les transformations par leurs expressions, nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{4} [\bar{\varepsilon} (A - i\gamma_5 B) (i\gamma^\nu\partial_\nu - m), (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi] \\ &- \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) (i\gamma^\nu\partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B) \varepsilon] + \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\bar{\varepsilon}\Psi), (\partial^\mu A)\} \\ &- \frac{i}{2}\{(\partial_\mu\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi), (\partial^\mu B)\} - \frac{1}{2}m^2\{\bar{\varepsilon}\Psi, A\} + \frac{i}{2}m^2\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, B\}\end{aligned}$$

En tenant compte des équations du mouvement de $\Psi(x)$, , nous trouvons

$$\delta\mathcal{L} = +\frac{1}{2}\{(\bar{\varepsilon}\partial_\mu\Psi), (\partial^\mu A)\} - \frac{i}{2}\{(\bar{\varepsilon}\partial_\mu\gamma_5\Psi), (\partial^\mu B)\}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\frac{1}{2}\{(\bar{\varepsilon}\Psi), (\partial^\mu A)\} - \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial^\mu B\} - \frac{1}{2}\{\bar{\varepsilon}\Psi, \partial_\mu\partial^\mu A\} + \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial_\mu\partial^\mu B\} \\ &+ \frac{1}{2}\{\bar{\varepsilon}\Psi, \partial_\mu\partial^\mu A\} - \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial_\mu\partial^\mu B\}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \left[\frac{1}{2}\{(\bar{\varepsilon}\Psi), (\partial^\mu A)\} - \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial^\mu B\} \right] \\ &= \partial_\mu V^\mu\end{aligned}$$

avec

$$V^\mu = \frac{1}{2}\{(\bar{\varepsilon}\Psi), (\partial^\mu A)\} - \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial^\mu B\}\quad (5.1.32)$$

On peut alors définir le supercourant par

$$J_\mu = V_\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i\quad (5.1.33)$$

Ici les ϕ_i représentent les champs parabosoniques A, B ou parafermionique $\Psi(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A}\delta A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu B}\delta B + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Psi}\delta\Psi \\ &= \frac{1}{2}\{(\bar{\varepsilon}\Psi), (\partial^\mu A)\} - \frac{i}{2}\{\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi, \partial^\mu B\} - \frac{i}{4} [\bar{\Psi}, \gamma^\mu (i\gamma^\nu\partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B) \varepsilon]\end{aligned}$$

le supercourant devient

$$J^\mu = \frac{i}{4} [\bar{\Psi}, \gamma^\mu (i\gamma^\nu \partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B) \varepsilon]$$

mais ε anticommute avec $\Psi(x)$, nous pouvons écrire

$$J^\mu = \frac{i}{4} \{\bar{\Psi}, \gamma^\mu (i\gamma^\nu \partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B)\} \varepsilon \quad (5.1.34)$$

nous pouvons aussi écrire le supercourant en terme de paraspineur de Majorana par

$$J^\mu = \frac{1}{\lambda} \bar{K}^\mu \varepsilon \quad (5.1.35)$$

avec

$$\bar{K}^\mu = \frac{i}{4} \{\bar{\Psi}, \gamma^\mu (i\gamma^\nu \partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B)\} \quad (5.1.36)$$

nous pouvons vérifier facilement que le paraspineur \bar{K}^μ est conservé.

Donc, la supercharge est donnée par

$$\bar{Q}_a = \int d^3x \bar{K}_a^o \quad (5.1.37)$$

avec

$$\bar{K}_a^o = \frac{i}{4} \{\bar{\Psi}, \gamma^o (i\gamma^\nu \partial_\nu + m) (A - i\gamma_5 B)\} \quad (5.1.38)$$

D'après l'expression de la supercharge (5.1.37), les relations entre les parafermions et les parabosons doivent vérifier les équations (5.1.7-14) que nous appelons relative supersymétrie parabosonique données par

$$[\{\Psi, A\}, \pi] = -[\{\Psi, \pi\}, A] = 2\Psi \quad (5.1.39)$$

$$\{\{A, \bar{\Psi}\}, \Psi\} = \{\{A, \Psi\}, \bar{\Psi}\} = 2A \quad (5.1.40)$$

$$\{\{\Psi, A\}, A\} = [\{\Psi, \pi\}, \pi] = \{\{A, \bar{\Psi}\}, \bar{\Psi}\} = \{\{A, \Psi\}, \Psi\} = 0 \quad (5.1.41)$$

et les mêmes relations pour B .

En utilisant les expressions des fonctions d'ondes des parachamps bosoniques et fermioniques (4.1.7-9), les relations (5.1.39-41) en termes des modes $d(\vec{p}, s)$, $d^+(\vec{p}, s)$, $a(\vec{p})$, $a^+(\vec{p})$ et $b(\vec{p})$, $b^+(\vec{p})$ deviennent

$$\left[\left\{ d(\vec{p}, s), a(\vec{p}') \right\}, a^+(\vec{k}) \right] = - \left[\left\{ d(\vec{p}, s), a^+(\vec{k}) \right\}, a(\vec{p}') \right] = 2\delta(\vec{p}' - \vec{k}) d(\vec{p}, s) \quad (5.1.42)$$

$$\left\{ \left\{ a(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s) \right\}, d(\vec{k}, l) \right\} = \left\{ \left\{ a(\vec{p}), d(\vec{k}, l) \right\}, d^+(\vec{p}, s) \right\} = 2\delta(\vec{p} - \vec{k}) a(\vec{p}) \quad (5.1.43)$$

$$\left[\left\{ d(\vec{p}, s), a^+(\vec{p}') \right\}, a^+(\vec{k}) \right] = \left[\left\{ d(\vec{p}, s), a(\vec{k}) \right\}, a(\vec{p}') \right] = 0 \quad (5.1.44)$$

$$\left\{ \left\{ a(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s) \right\}, d^+(\vec{k}, l) \right\} = \left\{ \left\{ a(\vec{p}), d(\vec{k}, l) \right\}, d(\vec{p}, s) \right\} = 0 \quad (5.1.45)$$

et la parasupercharge devient

$$Q_a = \frac{i}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\sum_s\int d^3p\{C_{a\alpha}(\vec{p}),d^+(\vec{p},s)\}v_\alpha(\vec{p},s)-\{D_{a\alpha}(\vec{p}),d(\vec{p},s)\}u_\alpha(\vec{p},s) \quad (5.1.46)$$

$$\bar{Q}_a = -\frac{i}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\sum_s\int d^3p\{\bar{v}(\vec{p},s)\{D_{a\alpha}(\vec{p}),d(\vec{p},s)\}-\bar{u}(\vec{p},s)\{C_{a\alpha}(\vec{p}),d^+(\vec{p},s)\}\} \quad (5.1.47)$$

$$C_{a\alpha}(\vec{p}) = (a-i\gamma^5b)_{a\alpha} \quad (5.1.48)$$

$$D_{a\alpha}(\vec{p}) = (a^+-i\gamma^5b^+)_{a\alpha} \quad (5.1.49)$$

5.2 Parasuperalgèbre des générateurs Q_a

Par analogie à la parasupersymétrie de la mécanique quantique, la supercharge du modèle parabosonique -parafermionique de Wess-Zumino est décrit par des relations bilinéaires. Pour calculer cette dernière, d'abord nous trouverons l'expression du quadrivecteur impulsion P_μ .

Le quadrivecteur impulsion P_μ est défini par

$$P_\mu = \int d^3x T_{0\mu} \quad (5.2.1)$$

où $T_{\nu\mu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion donné par

$$T_{\nu\mu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\nu}\right)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.2.2)$$

par un calcul direct, les expressions (l'annexe B) du quadrivecteur P_μ et l'énergie sont données par

$$P_\mu = \frac{1}{2}\int d^3p p_\mu 2\left[\frac{1}{2}\{a^+(\vec{p}),a(\vec{p})\}+\frac{1}{2}\{b^+(\vec{p}),b(\vec{p})\}\right] \quad (5.2.3)$$

$$+\sum_r [d^+(\vec{p},r),d(\vec{p},r)] \quad (5.2.4)$$

$$\text{et } P_o = H = \frac{1}{2}\int d^3p \omega_p \left[\frac{1}{2}\{a^+(\vec{p}),a(\vec{p})\}+\frac{1}{2}\{b^+(\vec{p}),b(\vec{p})\}\right] \quad (5.2.5)$$

$$+\sum_r [d^+(\vec{p},r),d(\vec{p},r)], \quad (5.2.6)$$

$$\text{avec } \omega_p = p_o \quad (5.2.7)$$

Passons alors au calcul du commutateur de la supercharge

calcul de $\{Q_a, \bar{Q}_b\}$

En remplaçant l'expression de la supercharge, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\{Q_a, \bar{Q}_b\} &= \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k'\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}v_\alpha(\vec{p}, s) \\
&\quad -\{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\}u_\alpha(\vec{p}, s), \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)\{d(\vec{k}, l), D_{\beta b}(\vec{k})\} \\
&\quad -\bar{u}_\beta(\vec{k}, l)\{d^+(\vec{k}, l), C_{\beta b}(\vec{k})\}\} \\
&= \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k\{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}v_\alpha(\vec{p}, s), \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
&\quad \{d(\vec{k}, l), D_{\beta b}(\vec{k})\}\} - \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k\{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\} \\
&\quad v_\alpha(\vec{p}, s), \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)\{d^+(\vec{k}, l), C_{\beta b}(\vec{k})\}\} - \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k \\
&\quad \{\{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\}u_\alpha(\vec{p}, s), \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)\{d(\vec{k}, l), D_{\beta b}(\vec{k})\}\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k\{\{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\} \\
&\quad u_\alpha(\vec{p}, s), \bar{u}_\beta(\vec{k}, l)\{d^+(\vec{k}, l), C_{\beta b}(\vec{k})\}\} \\
&= F_1 + F_2 + F_3 + F_4
\end{aligned}$$

Calcul de F_1

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k\{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}v_\alpha(\vec{p}, s), \\
&\quad \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)\{d(\vec{k}, l), D_{\beta b}(\vec{k})\}\} \\
&= \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k[\{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}, d(\vec{k}, l)\}v_\alpha(\vec{p}, s) \\
&\quad \bar{v}_\beta(\vec{k}, l)D_{\beta b}(\vec{k}) + d(\vec{k}, l)[D_{\beta b}(\vec{k}), \{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}]v_\alpha(\vec{p}, s)\bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
&\quad + \{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}, D_{\beta b}(\vec{k})\}d(\vec{k}, l)v_\alpha(\vec{p}, s)\bar{v}_\beta(\vec{k}, l) \\
&\quad + D_{\beta b}(\vec{k})\{\{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\}, d(\vec{k}, l)\}v_\alpha(\vec{p}, s)\bar{v}_\beta(\vec{k}, l)]
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (5.1.43-46), nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_1 = & \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k[\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}C_{a\alpha}(\vec{p})D_{\beta b}(\vec{k})v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l) \\
& -\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b}-\gamma_{a\alpha}^5\gamma_{\beta b}^5)d(\vec{k},l)d^+(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l) \\
& +d^+(\vec{p},s)d(\vec{k},l)(\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b}-\gamma_{a\alpha}^5\gamma_{\beta b}^5)\delta(\vec{p}-\vec{k})v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l) \\
& +\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}D_{\beta b}(\vec{k})C_{a\alpha}(\vec{p})v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l)]
\end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que, F_2 et F_3 sont nulles, F_4 est donné par

$$\begin{aligned}
F_4 = & \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k\{\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}D_{a\alpha}(\vec{p})C_{\beta b}(\vec{k})u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l) \\
& +\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha}-\gamma_{\beta b}^5\gamma_{a\alpha}^5)d^+(\vec{k},l)d(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l) \\
& -\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha}-\gamma_{\beta b}^5\gamma_{a\alpha}^5)d(\vec{p},s)d^+(\vec{k},l)u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l) \\
& +\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}C_{\beta b}(\vec{k})D_{a\alpha}(\vec{p})u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l)\}
\end{aligned}$$

En additionnant F_1 avec F_4 , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\{Q_a, \bar{Q}_b\} = & \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k[\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}C_{a\alpha}(\vec{p})D_{\beta b}(\vec{k})v_\alpha(\vec{p},s) \\
& \bar{v}_\beta(\vec{k},l)+\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}D_{\beta b}(\vec{k})C_{a\alpha}(\vec{p})v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l) \\
& +d^+(\vec{p},s)d(\vec{k},l)(\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b}-\gamma_{a\alpha}^5\gamma_{\beta b}^5)\delta(\vec{p}-\vec{k})v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l) \\
& -\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b}-\gamma_{a\alpha}^5\gamma_{\beta b}^5)d(\vec{k},l)d^+(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{k},l)] \\
& +\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{s,l}\int d^3p\int d^3k[\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}D_{a\alpha}(\vec{p})C_{\beta b}(\vec{k})u_\alpha(\vec{p},s) \\
& \bar{u}_\beta(\vec{k},l)+\delta(\vec{p}-\vec{k})\delta_{ls}C_{\beta b}(\vec{k})D_{a\alpha}(\vec{p})u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l) \\
& +\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha}-\gamma_{\beta b}^5\gamma_{a\alpha}^5)d^+(\vec{k},l)d(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l) \\
& -\delta(\vec{p}-\vec{k})(\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha}-\gamma_{\beta b}^5\gamma_{a\alpha}^5)d(\vec{p},s)d^+(\vec{k},l)u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{k},l)]
\end{aligned}$$

nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned}
\{Q_a, \bar{Q}_b\} &= \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{m}{2}\right) \sum_s \int d^3p [\{C_{a\alpha}(\vec{p}), D_{\beta b}(\vec{p})\} v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, s) \\
&+ \sum_l [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, l)] (\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b} - \gamma_{a\alpha}^5 \gamma_{\beta b}^5) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, l)] \\
&\frac{1}{2}\lambda \left(\frac{m}{2}\right) \sum_s \int d^3p [\{D_{a\alpha}(\vec{p}), C_{\beta b}(\vec{p})\} u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) \\
&+ \sum_l [d^+(\vec{p}, i), d(\vec{p}, s)] (\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha} - \gamma_{\beta b}^5 \gamma_{a\alpha}^5) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, l)]
\end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes [82]

$$(\delta_{a\alpha}\delta_{\beta b} - \gamma_{a\alpha}^5 \gamma_{\beta b}^5) v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, l) = \frac{p_\mu}{m} \gamma_{ab}^\mu \delta_{sl} - \bar{v}_\beta(\vec{p}, l) \gamma_\mu \gamma^5 v_\alpha(\vec{p}, s) (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab} \quad (5.2.8)$$

$$(\delta_{\beta b}\delta_{a\alpha} - \gamma_{\beta b}^5 \gamma_{a\alpha}^5) u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, l) = \frac{p_\mu}{m} \gamma_{ab}^\mu \delta_{sl} - \bar{u}_\beta(\vec{p}, l) \gamma_\mu \gamma^5 u_\alpha(\vec{p}, s) (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab} \quad (5.2.9)$$

$$\sum_s v_\alpha(\vec{p}, s) \bar{v}_\beta(\vec{p}, s) = \left(\frac{p+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad (5.2.10)$$

$$\sum_s u_\alpha(\vec{p}, s) \bar{u}_\beta(\vec{p}, s) = \left(\frac{-p+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad (5.2.11)$$

et par un calcul direct, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\{Q_a, \bar{Q}_b\} &= \frac{1}{2}\lambda \int d^3p \left\{ \frac{1}{2} \{a, a^+\} + \frac{1}{2} \{b, b^+\} + \sum_l [d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, l)] \right\} p_\mu \gamma_{ab}^\mu \\
&- \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{m}{2}\right) \int d^3p \sum_{l,s} [d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, s)] \bar{v}_\beta(\vec{p}, l) \gamma_\mu \gamma^5 v_\alpha(\vec{p}, s) (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab} \\
&- \frac{1}{2}\lambda \left(\frac{m}{2}\right) \int d^3p \sum_{l,s} [d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, s)] \bar{u}_\beta(\vec{p}, l) \gamma_\mu \gamma^5 u_\alpha(\vec{p}, s) (\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de conjugué de charge, nous trouvons que les deux derniers termes sont nuls

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = \frac{1}{2}\lambda \int d^3p \left\{ \frac{1}{2} \{a, a^+\} + \frac{1}{2} \{b, b^+\} + \sum_l [d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, l)] \right\} p_\mu \gamma_{ab}^\mu \quad (5.2.12)$$

Alors, nous concluons que l'anticommutateur entre Q_a et \bar{Q}_b est

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = \frac{1}{2}\lambda P_\mu \gamma_{ab}^\mu \quad (5.2.13)$$

dans ce cas, nous pouvons choisir $\lambda = 4$, nous obtenons

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu \quad (5.2.14)$$

Nous remarquons que la superalgèbre est la même que dans le cas ordinaire de la supersymétrie de Wess-Zumino.

5.3 Fermeture de la superalgèbre

La propriété la plus importante dans la supersymétrie est la fermeture de la superalgèbre dans laquelle les transformations infinitésimales sont dérivées à partir de la parasupercharge Q_a . D'après l'expression de la parasuperalgèbre (5.1.46), la fermeture de la supersymétrie parabosonique-parafermionique est la même que le cas ordinaire ($P = 1$). Nous prenons comme exemple la fermeture des transformations sur le parachamp $\Psi_a(x)$.

Donc, d'après la transformation du parachamp $\Psi_a(x)$, nous pouvons écrire

$$[\delta_1, \delta_2] \Psi_a = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (\bar{\varepsilon}_1 \Psi - \gamma^5 \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \Psi) \varepsilon_2 + (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (\bar{\varepsilon}_2 \Psi - \gamma^5 \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \Psi) \varepsilon_1$$

ε_1 et ε_2 sont les paramètres des transformations correspondant aux transformations infinitésimales δ_1 et δ_2 respectivement.

Nous avons vu que les paramètres de transformations anticommulent avec le parachamp $\Psi(x)$, nous pouvons donc utiliser le réarrangement de Fierz (l'annexe A) et en tenant compte de l'équation du mouvement du parachamp $\Psi(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] \Psi_a &= -i\gamma^\mu (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \partial_\mu \Psi(x) + i\gamma^\mu \gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \gamma^5 \partial_\mu \Psi(x) \\ &= -i\gamma^\mu \{ (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) - \gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \gamma^5 \} \partial_\mu \Psi(x) \end{aligned}$$

en utilisant les relations suivantes

$$(\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

alors

$$\gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \gamma^5 = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu}$$

et

$$(\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) - \gamma^5 (\varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1) \gamma^5 = -\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu$$

ceci nous conduit à la fermeture du parafermion $\Psi(x)$

$$[\delta_1, \delta_2] \Psi_a = -2i\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 \partial_\mu \Psi$$

de la même façon, nous trouvons la fermeture des parabosons A et B .

ceci signifie que la fermeture pour la supersymétrie parabosonique-parafermionique à la même structure que le cas ordinaire (supersymétrie fermionique-bosonique).

5.4 Générateurs de transformations infinitésimales

Maintenant, comme le cas bosonique-parafermionique du modèle de Wess-Zumino, nous allons refaire les mêmes étapes pour trouver les transformations infinitésimales à partir de la parasupercharge dans le cas parabosonique-parafermionique. Vu que la parasupercharge et le paramètre de transformation correspondant satisfont des relations bilinéaires, ceci nous conduit à décrire les transformations sous la forme suivante

$$\delta\phi = i [\bar{\varepsilon}^a Q_a, \phi] \quad (5.4.1)$$

Calcul de $\delta\Psi = i [\bar{\varepsilon}^a Q_a, \Psi]$

nous avons

$$\delta\Psi = i\bar{\varepsilon}^a \{Q_a, \Psi\} \quad (5.4.2)$$

En remplaçant les expressions du parachamp et la supercharge par leurs expressions, nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta\Psi = & i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_s \int d^3p \{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\} v_\alpha(\vec{p}, s) \right. \\ & - \{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\} u_\alpha(\vec{p}, s) \Big\}, \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} \left(d(\vec{k}, l) \right. \\ & \left. u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} + d^+(\vec{k}, l) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \right) \end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \delta\Psi = & i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \{ \{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\} \right. \\ & \left. d(\vec{k}, l) \} v_\alpha(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} \right. \\ & \left. \int d^3p \{ \{C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s)\} \right. \left. , d^+(\vec{k}, l) \} v_\alpha(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \right. \\ & - i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \right. \\ & \left. \{ \{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\} \right. \left. , d(\vec{k}, l) \} u_\alpha(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} \right. \\ & - i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \right. \\ & \left. \{ \{D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s)\} \right. \left. , d^+(\vec{k}, l) \} u_\alpha(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \right\} \end{aligned}$$

En tenant compte des relations (5.1.43-5.1.46), nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \right. \\ &\quad \delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ls} C_{a\alpha}(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} - i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{s,l} \int \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ls} D_{a\alpha}(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \right. \right.\end{aligned}$$

nous faisons l'intégration sur \vec{k} , $\delta\Psi$ devient

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} d^3p C_{a\alpha}(\vec{p}) v_\alpha(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s) e^{-ipx} \right. \\ &\quad \left. - i\bar{\varepsilon}^a \left\{ i \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} d^3p D_{a\alpha}(\vec{p}) u_\alpha(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) e^{ipx} \right. \right.\end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes

$$\sum_s v_\alpha(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s) = \left(\frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{2m} G\right)_{\alpha b} \quad (5.4.3)$$

$$\sum_s u_\alpha(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) = \left(\frac{p_\mu \gamma^\mu - m}{2m} G\right)_{\alpha b} \quad (5.4.4)$$

Par un calcul direct, $\delta\Psi$ devient

$$\delta\Psi = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma_5 B) \varepsilon$$

ceci représente la transformation du parachamp Ψ .

Calcul de $\delta A = i[\bar{\varepsilon}^a Q_a, A]$

En utilisant les expressions (5.1.8) et (5.1.47), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}i[\bar{\varepsilon}^a Q_a, A] &= -i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] \\ &= -i\bar{\varepsilon}^a \frac{i}{2} \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \int d^3k \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \\ &\quad \left\{ v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{-ikx} \left[C_{a\alpha}(\vec{p}), a(\vec{k}) \right] + v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ikx} \right. \\ &\quad \left[C_{a\alpha}(\vec{p}), a^+(\vec{k}) \right] - u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ikx} \left[D_{a\alpha}(\vec{p}), a(\vec{k}) \right] \right. \\ &\quad \left. - u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{ikx} \left[D_{a\alpha}(\vec{p}), a^+(\vec{k}) \right] \right\}\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions des relations (5.1.43-46), nous obtenons

$$\begin{aligned}i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] &= -i\bar{\varepsilon}^a \frac{i}{2} \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \int d^3k \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} d^3p \\ &\quad \left\{ v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ikx} \delta(\vec{p} - \vec{k}) + u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ikx} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right\}\end{aligned}$$

Par intégration sur \vec{k} , nous obtenons

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] = -i\bar{\varepsilon}^a \frac{i}{2} \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \left(\frac{1}{2\omega_p}\right)^{1/2} d^3p \{v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ipx} + u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ipx}\}$$

nous pouvons aussi écrire

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] = \frac{\bar{\varepsilon}^a}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} d^3p \{v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ipx} + u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ipx}\}$$

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] = \bar{\varepsilon}^a \Psi_a(x)$$

enfin

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, A] = \bar{\varepsilon}^a \Psi_a(x) = \delta A$$

Calcul de $\delta B = i[\bar{\varepsilon}^a Q_a, B]$

En remplaçant les expressions (5.1.47) et (4.1.9), nous obtenons

$$i[\bar{\varepsilon}^a Q_a, B] = -i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, B]$$

$$= -i\bar{\varepsilon}^a \frac{i}{2} \lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \int d^3k \left(\frac{1}{2\omega_k}\right)^{1/2} d^3p$$

$$\left\{ v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{-ikx} \left[C_{a\alpha}(\vec{p}), b(\vec{k}) \right] + v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ikx} \left[C_{a\alpha}(\vec{p}), b^+(\vec{k}) \right] - u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ikx} \left[D_{a\alpha}(\vec{p}), b(\vec{k}) \right] - u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{ikx} \left[D_{a\alpha}(\vec{p}), b^+(\vec{k}) \right] \right\}$$

De la même manière, par un calcul direct

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, B] = \frac{-\bar{\varepsilon}^a}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} d^3p \gamma_{a\alpha}^5 \{v_\alpha(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) e^{ipx} + u_\alpha(\vec{p}, s) d(\vec{p}, s) e^{-ipx}\}$$

$$i\bar{\varepsilon}^a [Q_a, B] = -\bar{\varepsilon}^a \gamma_{a\alpha}^5 \Psi_\alpha(x) = \delta B$$

Ceci représente la transformation du parachamp B.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons construit une nouvelle symétrie de Wess-Zumino dans le formalisme de la paraquantification. Cette symétrie est décrit par un parachamp fermionique et deux parachamps bosoniques A et B au même ordre $P = 2$. L'invariance de cette symétrie est donnée par la parasuperalgèbre de Poincaré. Dans ce modèle la parasupercharge doit vérifier des relations bilinéaires comme le cas ordinaire.

Chapitre 6

La Métrique Pseudo-Complexe de Robertson-Walker

Dans le dernier chapitre, nous présenterons les variables pseudo-complexe ainsi que la formulation pseudo-complexes de la relativité générale. Nous nous intéressons à la construction de la métrique de Robertson-Walker dans le cadre des variables pseudo-complexes [83]. Nous discuterons enfin les résultats obtenus.

6.1 Introduction

Auparavant plusieurs méthodes ont été proposées pour généraliser la relativité générale par l'extension des coordonnées espace-temps réelles aux domaines plus larges. En effet, Einstein lui-même [84, 85] et dans le but d'unifier l'électrodynamique avec la relativité générale, il étendu la relativité générale à la relativité générale complexe . Pour les articles les plus récents sur la relativité générale complexe, vous pouvez consultez [86, 87]. D'autres articles [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98] introduisent une accélération maximale liée a un paramètre de longueur minimale de la théorie, alors que [99, 100, 101, 102] traitent l'extension de la relativité générale en introduisant les coordonnées hyperboliques.

L'introduction d'une accélération maximale et l'utilisation des coordonnées hypercomplexes (un synonyme pour le para-complexe) sont très liées à ce qui était publié dans le travail [103] où, une extension pseudo-complexe de la relativité générale a été proposée. L'objectif principal était d'étudier l'analogue de la métrique de Schwarzschild et ses conséquences dans l'extension pseudo-complexe de la relativité générale, et sa possible vérification expérimentale. La relativité générale pseudo-complexe est formulée d'une manière différente

par rapport aux travaux [99, 100, 101, 102]. Etant donné que les nombres pseudo-complexes introduisent une base de diviseurs du zéro (voir section II), nous avons défini deux théories indépendantes de la relativité générale dans chaque composante de diviseur du zéro, qui ont été par la suite connectées. En ce qui concerne le carré de l'élément, il est similaire, mais pas égal à ce qui a été défini dans [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98]. Celui-ci contient un terme supplémentaire proportionnel à l'accélération multipliée par la vitesse. Comme il a été mentionné, la solution de Schwarzschild a été étudiée dans un nouveau formalisme. Le résultat le plus important dans [103] était : la description pseudo-complexe de l'extension du principe variationnel, ne contient aucune singularité, c'est à dire aucun trou noir. En plus, la nouvelle théorie [103] introduit automatiquement l'énergie noire, dont la densité dans le cas de Schwarzschild dépend de la distance radiale. En effet, la densité d'énergie noire augmente avec la distance radiale la plus petite, ceci conduit à l'effondrement d'une grande masse. L'augmentation de l'énergie noire en fonction de la distance radiale, dépend de certaines fonctions, qui sont très difficiles à déterminer. Dans ce chapitre, nous allons montrer que le même effet introduit une énergie noire dans le modèle de Robertson-Walker (RW) de l'univers [115, 116].

Cette théorie contient également une longueur minimale l , et son influence sur les solutions pourrait être importante pour une grande masse [110]. Dans ce travail, nous n'allons pas prendre en considération l . Si cette théorie est réalisée dans la nature, elle dépend aussi sur les prédictions qui peuvent être faites et leur vérification expérimentale.

Dans la section II un bref résumé sur la façon de définir les variables pseudo-complexes et leurs propriétés sera donné. Ceci est pour les lecteurs qui ne sont pas encore habitués à cette structure mathématique. Une présentation simple peut être également trouvée dans [116]. Dans la section III, nous formulerons l'extension de la métrique de Robertson-Walker. Dans la section IV, nous montrerons la résolution du modèle pseudo-complexe de Robertson-Walker. Finalement dans la section V, nous discuterons les résultats obtenus.

6.2 Les Variables Pseudo-Complexes

Nous donnons un bref résumé sur les variables pseudo-complexes pour comprendre les différentes étapes présentées dans ce chapitre. Les formules présentées ici peuvent être utilisés sans entrer dans les détails. Pour une meilleure compréhension, une introduction plus profonde des variables pseudo-complexes est donnée dans [111, 112].

Les variables pseudo-complexes sont connus sous le nom variables hyperboliques [99, 100], hypercomplexes [113] ou para-complexes [114]. Dans ce qui suit, nous continuons à utiliser

le terme de pseudo-complexe. Sachant que les variables pseudo-complexes sont définies par

$$X = x_1 + Ix_2 \quad ,$$

avec $I^2 = 1$. Ceci est similaire à la notation des variables complexes sauf que le comportement de I est différent. Une autre présentation peut être utilisé en introduisant les opérateurs

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm I) \tag{6.2.1}$$

avec

$$\sigma_{\pm}^2 = \sigma_{\pm} \quad , \quad \sigma_+ \sigma_- = 0 \quad .$$

Les σ_{\pm} forment une base appelée le diviseur de zéro. En termes mathématiques, le diviseur de zéro est définit par $\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}_+^0 \cup \mathbf{P}_-^0$, avec $\mathbf{P}_{\pm}^0 = \{X = \lambda \sigma_{\pm} | \lambda \in \mathbf{R}\}$. Cette base est utilisée pour réécrire les variables pseudo-complexes comme suit

$$X = X_+ \sigma_+ + X_- \sigma_- \quad ,$$

avec

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= x_1 \pm x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 &= \frac{1}{2}(X_+ + X_-) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}(X_+ - X_-) \quad . \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Le conjugué pseudo-complexe d'un variable pseudo-complexe est

$$X^* = x_1 - Ix_2 = X_+ \sigma_- + X_- \sigma_+ \quad .$$

Le carré de la norme d'une variable pseudo-complexe est donnée par

$$|X|^2 = XX^* = x_1^2 - x_2^2 = X_+ X_- \quad .$$

Ceci permet de définir une norme positive, négative ou nulle. Les variables avec une norme nulle sont les diviseurs du zéro c'est à dire, elles sont proportionnelle soit à σ_+ ou à σ_- . Il est très utile d'effectuer tous les calculs dans la base de diviseur du zéro σ_{\pm} . A cause du fait que $\sigma_+ \sigma_- = 0$, tous les calculs peuvent être réalisées indépendamment dans les deux secteurs.

Pour chaque composante de diviseur de zéro, la différentiation et la multiplication peuvent être calculées de la même manière que pour les variables réelles où complexes. Par exemple, nous avons la fonction $F(X)$ [112]

$$F(X) = F(X_+)\sigma_+ + F(X_-)\sigma_-$$

et le produit des deux fonctions $F(X)$ et $G(X)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} F(X)G(X) &= (F(X_+)\sigma_+ + F(X_-)\sigma_-)(G(X_+)\sigma_+ + G(X_-)\sigma_-) \\ &= F(X_+)G(X_+)\sigma_+ + F(X_-)G(X_-)\sigma_- \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

car $\sigma_+\sigma_- = 0$ et $\sigma_{\pm}^2 = \sigma_{\pm}$. Comme autre exemple, nous avons

$$\frac{F(X)}{G(X)} = \frac{F(X_+)}{G(X_+)}\sigma_+ + \frac{F(X_-)}{G(X_-)}\sigma_- \quad (6.2.4)$$

Cela peut être prouvé comme suit

$$\begin{aligned} \frac{F(X)}{G(X)} &= \frac{F(X_+)\sigma_+ + F(X_-)\sigma_-}{G(X_+)\sigma_+ + G(X_-)\sigma_-} \\ &= \frac{(F(X_+)\sigma_+ + F(X_-)\sigma_-)(G(X_+)\sigma_- + G(X_-)\sigma_+)}{(G(X_+)\sigma_+ + G(X_-)\sigma_-)(G(X_+)\sigma_- + G(X_-)\sigma_+)} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur par le conjugué pseudo-complexe de $G(X)$ en utilisant $\sigma_+^* = \sigma_-$. Avec $\sigma_+\sigma_- = 0$ et $\sigma_{\pm}^2 = \sigma_{\pm}$, la dernière expression peut être écrite comme suit

$$\frac{(F(X_+)G(X_-)\sigma_+ + F(X_-)G(X_+)\sigma_-)}{G(X_+)G(X_-)(\sigma_+ + \sigma_-)}$$

mais $\sigma_+ + \sigma_- = 1$, ce qui nous conduit à l'équation (6.2.4).

La différentiation de $F(X)$ est définie par

$$\frac{DF(X)}{DX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X},$$

avec D représente la différentielle infinitésimale de pseudo-complexe.

Enfin, nous reprenons certaines propriétés de l'espace de phase d'un pseudo-complexe de l'espace-temps à quatre dimensions. Il existe un ensemble de quatre coordonnées $X^\mu = X_+^\mu\sigma_+ + X_-^\mu\sigma_-$ et quatre vitesses $U^\mu = U_+^\mu\sigma_+ + U_-^\mu\sigma_-$. Considérons le mouvement d'un point massive, les coordonnées et les vitesses sont écrites par $X_\pm^\mu = (x^\mu \pm lu^\mu)$ et $U_\pm^\mu = (u^\mu \pm la^\mu)$, avec x^μ , $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ (τ comme le temps propre) et $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ sont appelées les coordonnées standards, les vitesses et les accélérations du point massive respectivement. En raison de la

division dans les composantes σ_{\pm} , il ya deux espaces de phase séparés. L'un est construit par le couple (X_+^{μ}, U_+^{μ}) et l'autre par (X_-^{μ}, U_-^{μ}) . Toutes les calculs sont effectuées de façon indépendante dans chaque sous-espace de l'espace de phase.

6.2.1 Relativité Générale Pseudo-Complexe

Nous pouvons essayer de formuler la relativité générale suivant les mêmes étapes, comme indiqué dans [116]. La différence importante est que la métrique est pseudo-complexe. Elle est définie par

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- \sigma_-$$

C'est une fonction des variables pseudo-complexe X_{\pm}^{λ} dans l'espace-temps, et donc aussi une fonction des coordonnées x^{μ} et des vitesses u^{μ} .

Le carré de l'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned} d^2 w &= g_{\mu\nu}(X) DX^{\mu} DX^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu}^+(X) DX_+^{\mu} DX_+^{\nu} \sigma_+ + g_{\mu\nu}^-(X) DX_-^{\mu} DX_-^{\nu} \sigma_- \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

La division dans la base de diviseur de zéro est similaire aux équations (6.2.3) et (6.2.4). En interchangeant les indices μ et ν dans (6.2.6) on arrive à

$$d^2 w = g_{\mu\nu}(X) DX^{\mu} DX^{\nu} = d^2 w = g_{\nu\mu}(X) DX^{\nu} DX^{\mu} \quad (6.2.7)$$

La comparaison de cette équation avec (6.2.6) exige que la métrique soit symétrique, c'est à dire

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (6.2.8)$$

Le fait que les deux secteurs σ_{\pm} sont linéairement indépendants signifie que nous pouvons formuler une théorie de la relativité générale dans chaque secteur σ_+ et σ_- . L'avantage de l'indépendance de formulation est dûe au fait que dans chaque secteur la relativité générale sera analogue à la formulation standard.

Par exemple, un déplacement parallèle d'un vecteur pseudo-complexe ζ^{μ} est donnée par

$$\begin{aligned} D\zeta^{\mu} &= \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} DX^{\nu} \zeta^{\lambda} \\ &= \Gamma_{\nu\lambda}^{+\mu} DX_+^{\nu} \zeta_+^{\lambda} \sigma_+ + \Gamma_{\nu\lambda}^{-\mu} DX_-^{\nu} \zeta_-^{\lambda} \sigma_- \\ &= d\xi_+^{\lambda} \sigma_+ + d\xi_-^{\lambda} \sigma_- \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

où DX^{ν} se réfère à la variation des coordonnées pseudo-complexes X^{ν} , et ζ^{μ} sont les composantes d'un vecteur qui est déplacé parallèlement. Les connexions $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ sont symétriques

par rapport à leurs indices inférieurs. Les mêmes arguments que dans [116] conduit maintenant aux symboles de Christoffel pseudo-complexes du deuxième type obtenus, à partir de la condition qui stipule que le carré de l'élément pseudo-complexe d^2w est nécessaire pour être invariant par les transformations des coordonnées. Les symboles de Christoffel pseudo-complexes du deuxième type sont donnés par

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = - \{ \lambda \}_{\nu \mu} = - \{ \lambda \}_{\nu \mu}^+ \sigma_+ - \{ \lambda \}_{\nu \mu}^- \sigma_- \quad (6.2.10)$$

qui peuvent être écrits en termes des symboles de Christoffel du premier type [116] comme suit

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\pm\lambda} = - \{ \lambda \}_{\nu \mu}^{\pm} = -g^{\lambda\alpha} [\nu\mu, \alpha]_{\pm} \quad (6.2.11)$$

Les symboles de Christoffel du premier type sont définis par

$$[\nu\mu, \alpha] = \frac{1}{2} \left(\frac{Dg_{\mu\alpha}}{DX^{\nu}} + \frac{Dg_{\nu\alpha}}{DX^{\mu}} - \frac{Dg_{\mu\nu}}{DX^{\alpha}} \right) \quad (6.2.12)$$

L'expression $\frac{Dg_{\mu\alpha}}{DX^{\nu}} = g_{\mu\alpha|\nu}$ représente la dérivé pseudo-complexe de $g_{\mu\alpha}$ par rapport à X^{ν} .

Le quadri-dérivé d'un vecteur contravariant est donnée par .

$$\begin{aligned} \xi_{\parallel\nu}^{\mu} &= \xi_{|\nu}^{\mu} + \{ \mu \}_{\nu \lambda} \xi^{\lambda} \\ &= \left(\xi_{+|\nu}^{\mu} + \{ \mu \}_{\nu \lambda}^+ \xi_+^{\lambda} \right) \sigma_+ + \left(\xi_{-|\nu}^{\mu} + \{ \mu \}_{\nu \lambda}^- \xi_-^{\lambda} \right) \sigma_- \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

où $\xi_{|\nu}^{\mu} = \frac{D\xi^{\mu}}{DX^{\nu}}$. Un point important est que dans cette nouvelle formulation des quadri-divergence de la métrique sera à nouveau zéro! Pour le montrer, on copie les arguments, comme indiqué en [116], chapitre 3. Nous avons

$$g_{\mu\nu|\lambda}^{\pm} - g_{\mu\alpha}^{\pm} \{ \alpha \}_{\nu \lambda}^{\pm} = [\mu\lambda, \nu]_{\pm} \quad (6.2.14)$$

où la propriété de symétrie de la métrique a été utilisée. L'équation (6.2.14) est prouvée par la substitution du symbole de Christoffel du deuxième type (6.2.11) et en utilisant la définition du symbole de Christoffel du première type (6.2.12).

En utilisant l'équation. (6.2.14), la divergence de $g_{\mu\nu}^{\pm}$ peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu|\lambda}^{\pm} &= g_{\mu\nu|\lambda}^{\pm} - \{ \alpha \}_{\nu \lambda}^{\pm} g_{\mu\alpha}^{\pm} - \{ \alpha \}_{\mu \lambda}^{\pm} g_{\alpha\nu}^{\pm} \\ &= [\mu\lambda, \nu]_{\pm} - g_{\alpha\nu}^{\pm} \{ \alpha \}_{\mu \lambda}^{\pm} \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

En utilisant la définition du symbole de Christoffel du deuxième type (voir ci-dessus), cette expression est identique à zéro. Alors, la quadri-divergence de la métrique pseudo-complexe est nulle

$$g_{\mu\nu|\lambda} = g_{\mu\nu|\lambda}^+ \sigma_+ + g_{\mu\nu|\lambda}^- \sigma_- = 0 \quad (6.2.16)$$

où de manière équivalente

$$g_{\mu\nu|\lambda}^{\pm} = 0 \quad (6.2.17)$$

où maintenant la dérivé est par rapport aux coordonnées X_{\pm}^{λ} .

Cela conduit aussi à deux types différents de quadri-dérivés, l'un pour la composante σ_+ et l'autre pour la composante σ_- .

6.2.2 Principe variationnel

Jusqu'à présent, il semble que nous avons uniquement une double formulation de la relativité générale, l'une pour la composante σ_+ et l'autre pour la composante σ_- . Maintenant, pour éviter ceci, nous avons besoin d'introduire une différence dans le traitement pseudo-complexe de la relativité générale. Ceci conduira à un principe variationnel modifié. Dans l'étape suivante, nous montrons comment sont liées les deux composantes du diviseur de zéro. Nous allons suivre une suggestion donnée dans [104, 105, 106, 107].

Nous avons l'action suivante

$$S = \int L d\tau \quad (6.2.18)$$

où L représente le Lagrangien

Le principe variationnel est maintenant modifié [105] comme suit

$$\delta S = \int \delta L d\tau \in P^0 \quad (6.2.19)$$

P^0 étant le diviseur de zéro (nombres seulement linéaire en σ_+ ou σ_- [105]). Un argument pour cette modification est que la branche de diviseurs de zéro est composée de nombres qui ont une norme nulle, en ce sens qu'elle représente une généralisation du zéro.

Supposons que nous exigerons que la variation de l'action soit exactement nulle, alors on obtient que $\delta S = \delta S_+ \sigma_+ + \delta S_- \sigma_- = 0$, ou $\delta S_{\pm} = 0$. En d'autres termes, on pourrait simplement obtenir une double formulation de la relativité générale. Cependant, il est nécessaire que la variation de l'action se situe dans la branche de diviseurs de zéro, alors les deux éléments sont liés. Ceci nous conduit à formuler une nouvelles modification de la relativité générale dans le formalisme pseudo-complexe.

La variations de l'action conduit à

$$\frac{D}{Ds} \left(\frac{DL}{DX^{\mu}} \right) - \frac{DL}{DX^{\mu}} \in P^0 \quad (6.2.20)$$

où s peut être le temps propre τ . Notons que cette équation doit être dans le diviseur de zéro, c'est à dire qu'elle est proportionnelle soit à $\xi_{\mu} \sigma_+$ ou $\xi_{\mu} \sigma_-$, où ξ_{μ} représente une fonction

complexe ou réelle. On peut considérer ξ_μ comme une liberté supplémentaire pour fixer les solutions des équations du mouvement.

Nous pouvons aussi utiliser l'élément de longueur, ce qui conduit à l'équation des géodésiques

$$\ddot{X}^\mu + \{\mu \nu \lambda\} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda \in P^0 \quad (6.2.21)$$

Par conséquent, en utilisant les variables pseudo-complexes, l'équation d'Einstein devient

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2} T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \in P^0 \quad (6.2.22)$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \nu \end{matrix} \right\}_{|\mu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

Alors l'équation d'Einstein est aussi modifié par le diviseur de zéro P^0 . $G_{\mu\nu}$ est le tenseur pseudo-complexe d'Einstein, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur pseudo complexe de Ricci, défini de la même manière que dans la relativité générale standard, avec la différence que maintenant il est pseudo-complexe. R est la courbure pseudo complexe de Riemann. $T_{\mu\nu}$ est le tenseur pseudo-complexe d'énergie-impulsion, k est la constante gravitationnelle et c est la vitesse de la lumière. Enfin, Λ est la constante cosmologique, cette constante est très importante pour l'interprétation de l'expansion de l'univers. Elle décrirait une force, encore hypothétique, qui accélérerait l'expansion de l'univers, appelée énergie noire. Dans ce travail, nous n'allons pas prendre cette constante, on verra pourquoi plus tard.

6.2.3 Quelques propriétés de la métrique

Dans cette section, nous discuterons quelques propriétés supplémentaires liées à la métrique. Dans la base de diviseur de zéro, la métrique est donnée par l'équation. (6.2.6). Le produit avec son inverse est donné par

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} &= g_+^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}^+ \sigma_+ + g_-^{\mu\nu} g_{\nu\lambda}^- \sigma_- \\ &= \delta_{\mu\lambda} (\sigma_+ + \sigma_-) = \delta_{\mu\lambda} \end{aligned}$$

En général, ce choix comporte deux métriques différentes dans les secteurs σ_\pm .

Les pseudo-réel $g_{\mu\nu}^R$ et pseudo-imaginaire $g_{\mu\nu}^I$ de la métrique sont liées à $g_{\mu\nu}^+$ et $g_{\mu\nu}^-$ par

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^R &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}^+ + g_{\mu\nu}^-) = g_{\mu\nu}^0 \\ g_{\mu\nu}^I &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-) = h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

où nous avons introduit une nouvelle notation en termes d'une métrique moyenne $g_{\mu\nu}^0$ et une métrique différence $h_{\mu\nu}$. Ceci conduit à

$$g_{\mu\nu}^{\pm} = g_{\mu\nu}^0 \pm h_{\mu\nu} \quad (6.2.25)$$

Les métriques $g_{\mu\nu}^{\pm}$ abaissent les index de X_{\pm}^{μ} et P_{\pm}^{μ} , alors que $g_{\pm}^{\mu\nu}$ élèvent celles de X_{μ}^{\pm} et P_{μ}^{\pm} , i.e,

$$\begin{aligned} X_{\mu}^{\pm} &= g_{\mu\nu}^{\pm} X_{\pm}^{\nu} \\ X_{\pm}^{\mu} &= g_{\pm}^{\mu\nu} X_{\nu}^{\pm} \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

$$\begin{aligned} x_{\mu} \pm l u_{\mu} &= g_{\mu\nu}^{\pm} (x^{\nu} \pm l u^{\nu}) \\ x^{\mu} \pm l u^{\mu} &= g_{\pm}^{\mu\nu} (x_{\nu} \pm l u_{\nu}) \end{aligned}$$

et de façon similaires pour $P_{\pm}^{\mu} = p^{\mu} \pm l f^{\mu}$ et $P_{\mu}^{\pm} = p_{\mu} \pm l f_{\mu}$, où p_{μ} est une quantité de mouvement et f^{μ} étant un objet avec les unités d'une force. A partir de ces équations, on peut écrire

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}^+ + g_{\mu\nu}^-) x^{\nu} + \frac{l}{2} (g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-) u^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu}^0 x^{\nu} + l h_{\mu\nu} u^{\nu} \end{aligned} \quad (6.2.27)$$

$$\begin{aligned} l u_{\mu} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-) x^{\nu} + \frac{l}{2} (g_{\mu\nu}^+ + g_{\mu\nu}^-) u^{\nu} \\ &= l g_{\mu\nu}^0 u^{\nu} + h_{\mu\nu} x^{\nu} \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Une propriété importante est que l'élévation et l'abaissement des indices peut être appliquée uniquement à travers la métrique dans le diviseur de zéro $g_{\mu\nu}^{\pm}$, c.à.d. les expressions individuelles, des coordonnées (x_{μ}, x^{μ}) et des vitesses (u_{μ}, u^{μ}) ne sont pas covariantes et contra-covariantes, sauf que dans la limite où l et $h_{\mu\nu}$ sont nuls, la métrique $g_{\mu\nu}^0$ ($g_0^{\mu\nu}$) abaisse (élève) les indices de l'espace-temps (x_{μ}, x^{μ}) et les indices de la vitesse (u_{μ}, u^{μ}) .

Le carré de l'élément de longueur est considéré comme une observable, donc, il est nécessaire qu'il soit pseudo-réel

$$(d^2 w)^* = d^2 w \quad (6.2.29)$$

D'après cette condition on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^+(X_+) D X_+^{\mu} D X_+^{\nu} \sigma_+ + g_{\mu\nu}^-(X_-) D X_-^{\mu} D X_-^{\nu} \sigma_- \\ = g_{\mu\nu}^+(X_+) D X_+^{\mu} D X_+^{\nu} \sigma_- + g_{\mu\nu}^-(X_-) D X_-^{\mu} D X_-^{\nu} \sigma_+ \end{aligned}$$

où

$$g_{\mu\nu}^+(X_+)DX_+^\mu DX_+^\nu = g_{\mu\nu}^-(X_-)DX_-^\mu DX_-^\nu$$

En exprimant les X_\pm^μ en fonctions de x^μ et u^μ , on trouve

$$h_{\mu\nu}(dx^\mu dx^\nu + l^2 du^\mu du^\nu) + l g_{\mu\nu}^0(dx^\mu du^\nu + du^\mu dx^\nu) = 0 \quad (6.2.30)$$

Ceci est une version généralisée pour "l'orthogonalité" de dx et du qui pour le cas particulier d'un espace-temps plat ($h_{\mu\nu} = 0$ et $g_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu}$), elle est donnée par la relation $dx^\mu du^\nu = 0$. (Nous utilisons la signature $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.)

Avec l'équation (6.2.30), d^2w devient

$$d^2w = g_{\mu\nu}^0(dx^\mu dx^\nu + l^2 du^\mu du^\nu) + l h_{\mu\nu}(dx^\mu du^\nu + du^\mu dx^\nu) \quad (6.2.31)$$

Maintenant, d'après l'équation (6.2.27-28), on trouve

$$\begin{aligned} l h_{\mu\nu} du^\nu &= dx_\mu - g_{\mu\nu}^0 dx^\nu \\ h_{\mu\nu} dx^\nu &= l du_\mu - l g_{\mu\nu}^0 du^\nu \end{aligned}$$

En remplaçant dans (6.2.30), on obtient

$$l(dx^\mu du_\mu + dx_\mu du^\mu) = 0 \quad (6.2.32)$$

Ceci est une nouvelle forme de la condition d'orthogonalité que nous connaissons en relativité générale.

Les mêmes étapes sont appliquées pour réécrire (6.2.31), en utilisant (6.2.27-28), on obtient

$$d^2w = dx_\mu dx^\mu + l^2 du_\mu du^\mu \quad (6.2.33)$$

Ceci est aussi une nouvelle forme du carré de l'élément parce que nous avons un terme supplémentaire qui est décrit en fonction de la vitesse u^μ et la longueur minimale l de la théorie.

$$d^2w = g_{\mu\nu}^{eff}(dx^\mu dx^\nu + l^2 du^\mu du^\nu) \quad (6.2.34)$$

où $g_{\mu\nu}^{eff}$ est la métrique efficace. Il est clair que, avec cette métrique, les expressions des coordonnées (x_μ, x^μ) et des vitesses (u_μ, u^μ) sont covariantes et contra-covariantes. La détermination de la métrique efficace est obtenue à l'aide des métriques moyenne $g_{\mu\nu}^0$ et différence $h_{\mu\nu}$. Dans ce chapitre nous allons prendre comme application la métrique de Robertson-Walker.

6.3 La métrique Pseudo-Complexe de Robertson-Walker

En 1925 Edwin Hubble établit que les galaxies s'éloignaient de la Terre à une vitesse proportionnelle à leur distance de notre planète c'est la loi de Hubble. Ceci signifie que l'univers est en expansion. En tenant compte du principe cosmologique de l'homogénéité et de l'isotropie de l'univers, la métrique qui décrit l'expansion de l'univers spatialement homogène et isotrope est la métrique de Robertson-Walker. Cette métrique est donnée par deux jeunes mathématiciens, Robertson et Walker, sous la forme suivante

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= (dX^0)^2 - e^{G(X^0, R)} (dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= (dX^0)^2 - e^{G(X^0, R)} d\Sigma^2 \quad , \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

où nous avons déjà utilisé les coordonnées pseudo-complexes. G est une fonction du temps et de la coordonnée radiale R . Comme cela va être montré, G peut être écrit comme la somme des fonctions $g(X^0)$ et $f(R)$, la première ne dépendant que du temps et la deuxième que de R , c'est à dire, $G(X^0, R) = g(X^0) + f(R)$. Le point de départ est le principe d'équivalence qui stipule que deux observateurs en deux points différents doivent observer le même phénomène physique. La seule différence peut être dans l'échelle utilisée par les deux observateurs.

6.3.1 Symboles de Christoffel

Précédemment, nous avons suivi les étapes dans le chapitre 12.3 du livre de Adler-Bazin-Schiffer [116]. Bien sûr, tout autre livre sur la relativité générale peut être consulté. Dans cette section, nous allons principalement répéter ces étapes, la différence est que les variables sont maintenant pseudo-complexes. Le lecteur verra que la formulation est identique à la relativité générale standard, à la différence de l'apparition de fonctions supplémentaires en raison de la modification du principe variationnel.

Dans le but de déduire les symboles de Christoffel, nous écrivons d'abord l'équation des géodésiques suivante

$$\delta \int \left[(\dot{X}^0)^2 - e^G \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right] ds \in \mathbf{P}^0 \quad , \quad (6.3.2)$$

s étant un paramètre de courbure. En plus, nous avons utilisé la nouvelle procédure variationnelle exigeant que la variation donne un certain nombre dans la base du diviseur de zéro.

Après modification, les équations du mouvement suivantes sont obtenues (un point se réfère à la dérivation par rapport à s , un prime indique la dérivée par rapport à \dot{X}^0 pour la fonction g tandis que pour la fonction f c'est une dérivée par rapport à R).

$$\begin{aligned}
\ddot{X}^0 + \frac{1}{2}g'e^G \left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) &= \xi_0\sigma_- \\
\ddot{R} + \frac{1}{2}f'\dot{R}^2 + g'\dot{X}^0\dot{R} \\
- \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) \left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) &= \xi_R\sigma_- \\
\ddot{\theta} + 2 \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) \dot{R}\dot{\theta} + g'\dot{X}^0\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 &= \xi_\theta\sigma_- \\
\ddot{\phi} + 2 \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) \dot{R}\dot{\phi} + g'\dot{X}^0\dot{\phi} + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta &= \xi_\phi\sigma_- \quad . \quad (6.3.3)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la convention que le côté droit de ces équations se trouve dans la base du diviseur de zéro qui est proportionnel à σ_- . Le choix proportionnel à σ_+ donnerait des résultats équivalents.

La comparaison avec l'équation du mouvement

$$\ddot{X}^\mu + \left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ \nu & \lambda \end{array} \right\} \dot{X}^\nu \dot{X}^\lambda \epsilon \mathcal{P}^0 \quad (6.3.4)$$

Nous donne les symboles de Christoffel non nuls (d'autres peuvent être déduits en utilisant les propriétés de symétrie des symboles de Christoffel)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}g'e^G \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}g'e^G R^2 \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}g'e^G R^2 \sin^2\theta \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}g' \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}f' \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} &= -R^2 \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} &= -R^2 \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) \sin^2\theta \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}g' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2}f' + \frac{1}{R} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \cot\theta \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

A partir de l'élément de longueur nous trouvons le déterminant de la métrique

$$\ln\sqrt{-g} = \frac{3}{2}g(X^0) + \frac{3}{2}f(R) + 2\ln R + \ln |\sin\theta| \quad .$$

En utilisant les symboles de Christoffel donnés dans (6.3.6), on trouve

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{|\mu} &= 0 \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 1 & 1 \end{array} \right\}_{|\mu} &= \frac{1}{2}e^G (g'' + g'^2) + \frac{1}{2}f'' \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 2 & 2 \end{array} \right\}_{|\mu} &= \left[\frac{1}{2}e^G (g'' + g'^2) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{R}f' + \frac{1}{R^2} \right) \right] R^2 \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 3 & 3 \end{array} \right\}_{|\mu} &= \left[\frac{1}{2}e^G (g'' + g'^2) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{R}f' \right) \right] R^2 \sin^2\theta \\
&\quad - \cos^2\theta \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Les relations suivantes sont aussi utiles

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 0 & \nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} & \nu \\ 0 & \mu \end{array} \right\} &= \frac{3}{4}g'^2 \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 1 & \nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} & \nu \\ 1 & \mu \end{array} \right\} &= \frac{1}{2}e^G g'^2 + \frac{3}{4}f'^2 + \frac{2}{R}f' + \frac{2}{R^2} \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 2 & \nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} & \nu \\ 2 & \mu \end{array} \right\} &= \left[\frac{1}{2}e^G g'^2 - \frac{1}{4}f'^2 - \frac{2}{R}f' \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{R^2} + \frac{1}{R^2}\cot^2\theta \right] R^2 \\
\left\{ \begin{array}{cc} & \mu \\ 3 & \nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} & \nu \\ 3 & \mu \end{array} \right\} &= \left[\frac{1}{2}e^G g'^2 - \frac{1}{2}f'^2 - \frac{2}{R}f' \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{R^2} + \frac{1}{R^2}\cot^2\theta \right] \\
&\quad \times R^2 \sin^2\theta \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Avec ceci, les composantes non nulles du tenseur de Ricci sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{00} &= \frac{3}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \\
\mathcal{R}_{11} &= f'' + \frac{1}{R}f' - e^G \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \right) \\
\mathcal{R}_{22} &= \left[\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}f'^2 + \frac{3}{2R}f' - e^G \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \right) \right] R^2 \\
\mathcal{R}_{33} &= \left[\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}f'^2 + \frac{3}{2R}f' - e^G \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \right) \right] \\
&\quad \times R^2 \sin^2 \theta \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Toutes les autres composantes sont nulles.

Les dernières équations ont été simplement copiées à partir de [116].

Pour obtenir les composantes du tenseur \mathcal{R}_{ν}^{μ} nous avons besoin de l'expression de la métrique et de son inverse. Nous avons

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^G R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^G R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{6.3.9}$$

et

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-G}}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{-G}}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \tag{6.3.10}$$

Avec ceci on obtient ($\mathcal{R}_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\rho} \mathcal{R}_{\mu\rho}$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0^0 &= \frac{3}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \\
\mathcal{R}_1^1 &= \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \right) - e^{-G} \left(f'' + \frac{f'}{R} \right) \\
\mathcal{R}_2^2 &= \mathcal{R}_3^3 = \left(\frac{1}{2}g'' + \frac{3}{4}g'^2 \right) \\
&\quad - e^{-G} \left(\frac{1}{2}f'' + \frac{1}{4}f'^2 + \frac{3f'}{2R} \right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

la courbure de Riemann pseudo-complexe est alors donné par

$$\mathcal{R} = 3(g'' + g'^2) - 2e^{-G} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2}{R}f' \right) \tag{6.3.12}$$

Dans ce cas les équations d'Einstein deviennent

$$\begin{aligned}
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}T_0^0 &= \left[e^{-G} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{R} \right) - \frac{3}{4}g'^2 \right] + \xi_0\sigma_- \\
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}T_1^1 &= \left[e^{-G} \left(\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{R} \right) - g'' - \frac{3}{4}g'^2 \right] + \xi_1\sigma_- \\
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}T_2^2 &= \left[e^{-G} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2R} \right) - g'' - \frac{3}{4}g'^2 \right] + \xi_2\sigma_- \\
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}T_3^3 &= \left[e^{-G} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2R} \right) - g'' - \frac{3}{4}g'^2 \right] + \xi_3\sigma_- \\
-\frac{8\pi\kappa}{c^2}T_\nu^\mu &= 0 \quad , \quad \mu \neq \nu \quad .
\end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Les fonctions ξ_μ apparaissent à cause du nouveaux principe variationnel. Dans [116] ces dernières apparaissent à la place de la constante cosmologique Λ . En principe, nous pouvons aussi ajouter cette constante. Toutefois, l'une des raisons pour ne pas le faire, est que les fonctions ξ_μ vont reproduire cet effet.

D'après les équation (6.3.13), on peut identifier ξ_k comme des contributions supplémentaires diagonale au tenseur impulsion-énergie fois σ_- . Transférer ξ_0 dans la première équation de (6.3.13) vers le côté gauche et factoriser $\frac{8\pi\kappa}{c^2}$, permet d'associer à ξ_0 la densité d'énergie comme suit

$$\rho_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi\kappa} \xi_0 \sigma_- \quad . \tag{6.3.14}$$

(Plus tard, lorsque nous projetterons cette équation sur la partie pseudo-réelle, ceci donnera une contribution à la densité d'énergie pseudo-réelle, associée à l'énergie noire. Ce fait sera bien utile pour comprendre les résultats qui seront obtenus plus loin.

6.4 Résolution des équations du mouvement

L'homogénéité de la répartition de la matière exige que

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 \tag{6.4.1}$$

le même argument peut être utilisé pour les fonctions ξ , on trouve

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 \tag{6.4.2}$$

Les ξ_k ($k = 1, 2, 3$) peuvent être des fonctions du temps.

En considérant la différence entre la deuxième et la troisième équation de (6.3.13), on obtient

$$f'' - \frac{1}{2}(f')^2 - \frac{f'}{R} = 0 \quad , \quad (6.4.3)$$

qui est la même équation que celle qui apparaît dans [116]. La solution est alors donnée par [116]

$$e^f = \frac{b^2}{\left[1 - \frac{ab}{4}R^2\right]^2} \quad (6.4.4)$$

où a et b sont des constantes. Finalement, le carré de l'élément prend la forme suivante ($|ab| = \frac{1}{R_0^2}$ [116])

$$d\omega^2 = (dX^0)^2 - e^{g(X^0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{kR^2}{4R_0^2}\right)^2} d\Sigma^2 \quad . \quad (6.4.5)$$

Elle est exactement de la même forme que celle de la relativité générale standard, à la différence que les coordonnées sont maintenant pseudo-complexes. Le paramètre k exprime la courbure spatiale et peut prendre trois valeurs $1, 0, -1$, caractérisant respectivement un espace courbe fermé (correspondant à une géométrie sphérique) un espace plat (correspondant à la géométrie euclidienne usuelle) et un espace courbe ouvert (correspondant à une géométrie hyperbolique), alors que R_0 est une constante, liée à a et b par $|ab| = 1/R_0^2$. La fonction $g(X^0)$ est encore indéterminée.

Nous allons maintenant utiliser les coordonnées co-mobile pseudo-complexes [116], c.à.d. $\dot{X}^0 = 1$ et $\dot{X}^1 = \dot{X}^2 = \dot{X}^3 = 0$ (où le point exprime à la dérivée par rapport au temps-propre). Le tenseur impulsion-énergie prend la forme

$$(T^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & -\frac{p}{c^2} & & \\ & & -\frac{p}{c^2} & \\ & & & -\frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \quad (6.4.6)$$

ρ est la densité de la matière et P est la pression. On considère ici que P et ρ sont des variables pseudo-réelles, alors qu'en général, elles peuvent être pseudo-complexes.

Les fonctions correspondantes dans l'élément de longueur prennent la forme (voir Eq. (13.3) de [116])

$$\begin{aligned}
e^{G(X^0, R)} &= \frac{\mathbf{R}(X^0)^2}{R_0^2 (1 + kR^2/(4R_0^2))^2} \\
e^{g(X^0)} &= \mathbf{R}(t)^2 \\
e^{f(R)} &= \frac{1}{R_0^2 (1 + kR^2/(4R_0^2))^2} \quad , \tag{6.4.7}
\end{aligned}$$

qui sont directement obtenues à partir de l'expression du carré de l'élément de longueur, avec certaines redéfinitions. R est un objet avec une unité de longueur et est interprété comme le rayon pseudo-complexe de l'univers. A partir de maintenant, nous remplaçons X^0 par sa partie pseudo-réelle ct . Par exemple $\mathbf{R}(X^0)$ sera écrit $\mathbf{R}(t)$. La dérivée par rapport à X^0 est transformée comme une dérivée par rapport à ct , c'est à dire, $\frac{d\mathbf{R}}{d(ct)} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\mathbf{R}'}{c}$.

D'après les équations du mouvement (6.3.13), en utilisant la condition d'homogénéité de symétrie (6.4.1) et (6.4.2) et la forme du tenseur impulsion-énergie (6.4.6), les équations du mouvement prennent la forme

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho &= -\xi_0 \sigma_- + \left[\frac{3k}{\mathbf{R}(t)^2} + \frac{3}{c^2} \frac{\mathbf{R}'(t)^2}{\mathbf{R}(t)^2} \right] \\
\frac{8\pi\kappa}{c^2} p &= \xi_1 \sigma_- - \left[\frac{k}{\mathbf{R}(t)^2} + \frac{\mathbf{R}'(t)^2}{c^2 \mathbf{R}(t)^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\mathbf{R}''(t)}{\mathbf{R}(t)} \right] \quad . \tag{6.4.8}
\end{aligned}$$

Les détails des étapes peuvent être copiés directement à partir de n'importe quel livre de la relativité générale, par exemple [116]. A cause des conditions de symétrie (6.4.1) et (6.4.2), au lieu de quatre équations nous avons uniquement deux équations. Le prime se réfère maintenant à la dérivée par rapport au temps t .

En supposant que la densité ρ et la pression p sont des grandeurs pseudo-réelles, la composante σ_- des équation (6.4.8) donnent

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{3k}{\mathbf{R}_-(t)^2} + \frac{3}{c^2} \frac{\mathbf{R}'_-(t)^2}{\mathbf{R}_-(t)^2} \\
\xi_1 &= \frac{k}{\mathbf{R}_-(t)^2} + \frac{\mathbf{R}'_-(t)^2}{c^2 \mathbf{R}_-(t)^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\mathbf{R}''_-(t)}{\mathbf{R}_-(t)} \quad . \tag{6.4.9}
\end{aligned}$$

Ici $\mathbf{R}_-(t)$ est la composante de σ_- du rayon de l'univers. Dans le but d'obtenir une interprétation pour les fonctions ξ_0 et ξ_1 , nous pouvons utiliser le résultat expérimental (\mathbf{R}_r est la composante pseudo-réelle de l'univers)

$$\frac{\mathbf{R}'_r}{\mathbf{R}_r} = H \quad \text{avec} \quad H' \ll 1 \quad , \tag{6.4.10}$$

où le prime se réfère à la dérivée par rapport au temps et H est la constante de Hubble. Parce que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_r + l \mathbf{R}_I$, \mathbf{R}_I étant la composante pseudo-imaginaire de \mathbf{R} , et l est le paramètre de longueur de la théorie, qui est extrêmement faible (voir [103]), on peut également supposer que $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_r$ et, par conséquent, $\mathbf{R}_{\pm} \approx \mathbf{R}_r$. Nous pouvons alors approximativement écrire

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}_r''}{\mathbf{R}_r} &= \frac{\mathbf{R}_r'' \mathbf{R}_r'}{\mathbf{R}_r' \mathbf{R}_r} = (\ln \mathbf{R}_r')' \frac{\mathbf{R}_r'}{\mathbf{R}_r} = [\ln(H \mathbf{R}_r)]' \frac{\mathbf{R}_r'}{\mathbf{R}_r} \\ &= [\ln H + \ln \mathbf{R}_r]' \frac{\mathbf{R}_r'}{\mathbf{R}_r} \\ &\approx \left(\frac{\mathbf{R}_r'}{\mathbf{R}_r} \right)^2 = H^2 \quad . \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

En utilisant (6.4.9) et $k = 0$, nous pouvons approximativement écrire les fonctions ξ_0 et ξ_1 comme

$$\xi_0 \approx \frac{3}{c^2} H^2 \approx \xi_1 \quad . \quad (6.4.12)$$

Comme nous allons le voir plus tard, ceci correspond exactement à la constante cosmologique. Ce serait un résultat exact, si H est constant tout au long de l'histoire de l'univers. Le fait que H varie lentement avec le temps, implique qu'il doit y avoir une dépendance avec le rayon de l'univers. Pour cela nous avons à résoudre exactement l'équation du mouvement. Comme nous allons aussi le voir plus tard, il est difficile d'obtenir la forme exacte de ξ_0 et ξ_1 mais nous pouvons introduire une paramétrisation appropriée.

Revenons maintenant à la résolution du modèle Pseudo-Complexe de Robertson-Walker :

A partir des équations (6.4.8), on peut montrer que

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\kappa}{c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) &= \frac{1}{2} (3\xi_1 - \xi_0) \sigma_- - \frac{3 \mathbf{R}''}{c^2 \mathbf{R}} \\ \frac{4\pi\kappa}{c^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) &= \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_0) \sigma_- + \frac{k}{\mathbf{R}^2} + \frac{\mathbf{R}'^2 - \mathbf{R} \mathbf{R}''}{c^2 \mathbf{R}^2} \quad . \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

En utilisant la relation

$$\frac{\mathbf{R} \mathbf{R}'' - \mathbf{R}'^2}{c^2 \mathbf{R}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R}'}{c^2 \mathbf{R}} \right) \quad ,$$

nous arrivons à l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R}'}{c^2 \mathbf{R}} \right) = \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_0) \sigma_- + \frac{k}{\mathbf{R}^2} - \frac{4\pi\kappa}{c^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (6.4.14)$$

La différenciation par rapport au temps de la première équation dans (6.4.8) donne

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d\xi_0}{dt} \sigma_- - \frac{6k}{\mathbf{R}^3} \mathbf{R}' + \frac{6}{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{R}'}{dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{R}'}{\mathbf{R}} \right) . \quad (6.4.15)$$

En substituant (6.4.14) dans (6.4.15) et en multipliant le résultat par $\frac{c^2}{8\pi\kappa} \mathbf{R}^3$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \frac{d\rho}{dt} &= \frac{c^2}{8\pi\kappa} \left[-\mathbf{R}_-^3 \frac{d\xi_0}{dt} + 3 \mathbf{R}_-^2 \mathbf{R}'_-(\xi_1 - \xi_0) \right] \sigma_- \\ &\quad - 3 \mathbf{R}^2 \mathbf{R}' \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

Notons que $3 \mathbf{R}^2 \mathbf{R}' = \frac{d\mathbf{R}^3}{dt}$. Déplaçons le dernier terme de cette équation dans le membre de gauche, on trouve

$$\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{R}^3) + \frac{p}{c^2} \frac{d\mathbf{R}^3}{dt} = \frac{c^2}{8\pi\kappa} \left[\frac{d\mathbf{R}_-^3}{dt} (\xi_1 - \xi_0) - \mathbf{R}_-^3 \frac{d\xi_0}{dt} \right] \sigma_- . \quad (6.4.17)$$

Dans un volume donné, et en identifiant la masse de l'univers par $M = \rho V$, ou V est un volume donné, la dernière équation peut être écrite sous la forme suivante

$$\frac{dM}{dt} + \frac{p}{c^2} \frac{dV}{dt} = \frac{c^2}{8\pi\kappa} \left[\frac{dV_-}{dt} (\xi_1 - \xi_0) - V_- \frac{d\xi_0}{dt} \right] \sigma_- . \quad (6.4.18)$$

C'est un bilan de l'énergie locale! Dans le but de garder la conservation de l'énergie locale, nous devons exiger que le membre de droite de cette équation est nulle. Ceci conduit à la condition suivante

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \frac{d(\ln R_-^3)}{dt} (\xi_1 - \xi_0) . \quad (6.4.19)$$

Toute solution pour ξ_0 et ξ_1 doit vérifier cette équation différentielle. L'indice négatif de V se réfère au fait que l'équation est dans la composante σ_- . la considération de $\xi_1 = \xi_0$ conduit à $\frac{d\xi_0}{dt} = 0$, ou $\xi_0 = \xi_1 = \Lambda = \text{const.}$ C'est à dire que, pour ce cas, on retrouve le modèle avec une constante cosmologique qui ne change pas avec le temps. Malheureusement, cette équation n'est pas suffisante pour résoudre l'équation pour ξ_0 et ξ_1 , il nous manque encore une condition. Après, on pourra utiliser l'équation (6.4.12) comme une approximation.

Quand $\xi_0 = \xi_1 = 0$, la première équation dans (6.4.13) est interprétée comme en relativité générale standard. Le côté gauche de cette équation est la somme de deux quantités positives, la densité et la pression. Par contre le coté droit est proportionnel à l'accélération \mathbf{R}'' du rayon

de l'univers \mathbf{R} multiplié par (-1) . Cette équation nous conduit à affirmer que l'accélération de \mathbf{R} doit être négative, c'est à dire, on obtient une décélération. Cependant, dans la description pseudo-complexe, il ya un terme supplémentaire $\frac{1}{2}(3\xi_1 - \xi_0)\sigma_-$, qui peut être positif.

Voyons si nous pouvons aussi obtenir une accélération, c'est à dire $\mathbf{R}'' > 0$ dans la description de la relativité générale pseudo-complexe.

Dans l'équation (6.4.17), En utilisant la projection suivant le secteur σ_+ , et après la séparation des variables, on obtient

$$\frac{d\rho}{3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)} + \frac{d\mathbf{R}}{\mathbf{R}} = 0 \quad . \quad (6.4.20)$$

Maintenant, nous devons faire une hypothèse sur l'équation d'état ! Ceci est une partie délicate et les résultats peuvent changer à partir de l'équation d'état que nous prenons. Les hypothèses de base sont i) la répartition de la masse dans l'univers peut être traité comme un gaz parfait, de poussière ou de rayonnement. L'équation d'état est

$$p = \alpha\rho \quad , \quad (6.4.21)$$

où ρ est la densité d'énergie et α est nulle pour un modèle de la poussière, $\alpha = (2/3)$ pour un gaz idéal et $\alpha = (1/3)$ pour un gaz parfait relativiste (rayonnement).

Avec ceci, (6.4.20) peut être résolue avec la solution

$$\rho = \rho_0 R^{-3(1+\frac{\alpha}{c^2})} \quad , \quad (6.4.22)$$

où ρ_0 est une constante d'intégration pseudo-complexe avec des unités de densité.

Ce résultat est substitué dans la première équation de (6.4.13), on obtient

$$\mathbf{R}'' = \frac{c^2}{6}(3\xi_1 - \xi_0)R\sigma_- - \frac{4\pi\kappa}{3}\left(1 + \frac{3\alpha}{c^2}\right)\rho_0 \mathbf{R}^{-(2+\frac{3\alpha}{c^2})} \quad . \quad (6.4.23)$$

Nous aurons également besoin de la relation

$$\begin{aligned} \frac{d\ln V_-}{dt} &= \frac{1}{V_-} \frac{dV_-}{dt} = \frac{1}{\mathbf{R}_-^3} \frac{d}{dt} \mathbf{R}_-^3 = \frac{3 \mathbf{R}'_-}{\mathbf{R}_-} \\ &= \frac{d\ln \mathbf{R}_-^3}{dt} \quad . \end{aligned} \quad (6.4.24)$$

Maintenant, nous utilisons le premier résultat qui donne ξ_1 approximativement égal à ξ_0 (Eq. (6.4.12)), nous pouvons alors supposer la relation suivante :

$$\xi_1 = \beta \xi_0 \quad , \quad (6.4.25)$$

où β est un paramètre supplémentaire de la théorie, décrivant la déviation d'un paramètre constant H . Le β sera plus tard liées aux quantités observables, comme la constante de Hubble et le paramètre de décélération. L'équation (6.4.25) donne la condition manquante par l'introduction d'un paramètre supplémentaire. Une autre possibilité est d'utiliser l'approche de ξ_0 en termes de ratio ($\mathbf{R}'_r / \mathbf{R}_r$), ce qui donne $\xi_0 = (3/c^2)H$, et l'utilisation des observations expérimentales pour H .

En utilisant (6.4.19), nous obtenons l'équation différentielle satisfaite par ξ_0

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{dt} &= (\beta - 1) \frac{d(\ln \mathbf{R}_-^3)}{dt} \xi_0 \\ &= \frac{d(\ln \mathbf{R}_-^{3(\beta-1)})}{dt} \xi_0 \quad , \end{aligned} \quad (6.4.26)$$

avec la solution

$$\xi_0 = \Lambda \mathbf{R}_-^{3(\beta-1)} \quad . \quad (6.4.27)$$

Cette solution nous donne encore deux paramètres indéterminée Λ et β . Pour cela il existe de nombreux scénarios différents :

i) $\beta = 1$: Alors $\xi_1 = \xi_0 = \Lambda$ est constant.

ii) $\beta \neq 0$: Cela conduira (voir plus loin) à des systèmes décélérés et accélérée dépendants de la valeur de β . Par ailleurs, l'accélération en fonction du rayon de l'univers (qui peuvent être corrélés au temps de l'évolution) dépend de β et Λ .

La partie réelle de (6.4.23) est obtenue par $R_r'' = \frac{1}{2} (R_+'' + R_-'')$. Parce que la longueur minimale l est extrêmement faible, on peut supposer que $\mathbf{R}_+ \approx \mathbf{R}_- \approx \mathbf{R}_r$. On suppose aussi que les paramètres α et ρ_0 sont des pseudo-réels, c'est à dire $\alpha_+ \approx \alpha_- = \alpha$ et $\rho_0 = \rho_{0-} = \rho_{0+}$. En utilisant aussi (6.4.25) et (6.4.27) on peut alors donner la forme finale de l'équation du mouvement pour le rayon de l'univers

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_r'' &= \frac{c^2}{12} (3\beta - 1) \Lambda \mathbf{R}_r^{3(\beta-1)+1} \\ &\quad - \frac{4\pi\kappa}{3} \left(1 + \frac{3\alpha}{c^2}\right) \rho_0 \mathbf{R}_r^{-3(1+\frac{\alpha}{c^2})+1} \quad . \end{aligned} \quad (6.4.28)$$

Le premier terme vient des fonctions ξ .

6.5 Conséquences

Dans cette section, nous discuterons les conséquences les plus importantes de l'équation (6.4.28).

Lorsque $\beta = 1$ (constante cosmologique), le signe du premier terme de (6.4.28) est positif et contribue à l'accélération de l'univers. Il est clair que l'accélération augmente avec le rayon de l'univers. En général, quand $\beta > (1/3)$ l'accélération est positive, elle est négative (décélération) pour $\beta < (1/3)$. Pour $\beta = (1/3)$ pas d'accélération ou décélération supplémentaire. Le dernier terme dans (6.4.28) est toujours négatif, c'est à dire qu'il représente une contribution de la décélération de l'univers. Ce comportement est lié aussi au rayon d'univers \mathbf{R}_r comme il est également déterminé par la valeur β . Alors, pour $\beta > (1/3)$, l'accélération augmente avec \mathbf{R}_r et l'inverse pour $\beta < (1/3)$ l'accélération diminue avec \mathbf{R}_r .

La solution (6.4.28) donne différents scénarios possibles.

$$\mathbf{R}_r'' = \frac{c^2}{12}(3\beta - 1)\Lambda \mathbf{R}_r^{3(\beta-1)+1} - \frac{4\pi\kappa}{3}\left(1 + \frac{3\alpha}{c^2}\right)\rho_0 \mathbf{R}_r^{-3(1+\frac{\alpha}{c^2})+1} . \quad (6.5.1)$$

Pour $\Lambda = 0$ ($\xi_1 = \xi_0 = 0$), cette équation se réduit à celle de [116].

Maintenant nous allons étudier les valeurs particulières de β . Pour cela, nous définissons

$$\tilde{\Lambda} = \frac{c^2}{16\pi\kappa} \frac{\Lambda}{\rho_0} . \quad (6.5.2)$$

Notons qu'à partir de (6.3.14), le paramètre Λ est proportionnel à ρ_Λ avec le même facteur de proportionnalité. Ici ρ_0 est la masse volumique de l'univers. Les deux densités sont du même ordre, ce qui implique que $\tilde{\Lambda}$ est de l'ordre de 1.

Nous pouvons maintenant réécrire (6.5.1) sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_r'' &= \frac{\mathbf{R}_r''}{\left(\frac{4\pi\kappa}{3}\right)\rho_0} \\ &= \tilde{\Lambda}(3\beta - 1) \mathbf{R}_r^{3(\beta-1)+1} - \left(1 + \frac{\alpha}{c^2}\right) \mathbf{R}_r^{-3(1+\frac{\alpha}{c^2})+1} \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Dans ce qui suit, nous discuterons le cas des poussières d'univers, c'est-à-dire $\alpha = 0$ (Pour le cas d'un gaz parfait relativiste $\alpha = (1/3)$, les résultats montrent les mêmes caractéristiques). Nous prendrons les différentes valeurs de β , nous obtenons

a) $\beta = 1$: ($\xi_1 = \xi_0 = \Lambda$)

$$\tilde{\mathbf{R}}_r'' = 2\tilde{\Lambda} \mathbf{R}_r - \mathbf{R}_r^{-2} \quad (6.5.4)$$

L'univers est accéléré par la première contribution et ralenti par la seconde. Pour les petites valeurs de \mathbf{R}_r l'univers est ralenti. Pour les grandes valeurs de \mathbf{R}_r , l'univers est accéléré. Le point tournant est à

$$\mathbf{R}_r \approx 0.79/\tilde{\Lambda}^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (6.5.5)$$

Si l'on fixe le rayon d'aujourd'hui à $\mathbf{R}_0 = 1$, le résultat implique que, pour $\tilde{\Lambda} = 1$, le point d'équilibre se trouvait à 0.79 de son rayon actuel \mathbf{R}_0 . Ce cas correspond à une constante cosmologique Λ .

b) $\beta = \frac{4}{3}$:

$$\tilde{\mathbf{R}}_r'' = 3\tilde{\Lambda} \mathbf{R}_r^2 - \mathbf{R}_r^{-2} \quad . \quad (6.5.6)$$

Dans ce cas, l'accélération augmente avec le premier terme qui inclut la constante cosmologique. La fonction ξ_0 (6.4.27) est alors donnée par $\Lambda \mathbf{R}_-$, c'est à dire la densité d'énergie noire représentée par ξ_0 augmente avec le rayon de l'univers . Cela ressemble au big rip-off, qui est discuté dans la littérature. Le point tournant est à

$$\mathbf{R}_r = 1/(3\tilde{\Lambda})^{\frac{1}{4}} \quad . \quad (6.5.7)$$

Pour $\tilde{\Lambda} = 1$, le point tournant est atteint lorsque le rayon de l'univers est de 1 / 3 de son rayon actuel, donc, plus tôt que dans le cas a).

c) $\beta = \frac{1}{2}$: Rappelons que $\alpha = 0$ (univers de poussière), à partir de (6.5.3), nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{R}}_r'' = \frac{1}{2}\tilde{\Lambda} \mathbf{R}_r^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{R}_r^{-2} \quad . \quad (6.5.8)$$

Dans cette situation, l'énergie noire se comporte comme (6.4.27) $\rho_0 = \frac{\Lambda}{\mathbf{R}_r^{3/2}}$, c'est à dire, la densité de l'énergie noire diminue avec le rayon (le temps) de l'univers.

Il s'agit vraiment d'une nouvelle solution ! L'accélération et la décélération sont liées avec la taille de l'univers. Pour le petit \mathbf{R}_r , l'univers est ralenti, tandis que pour \mathbf{R}_r suffisamment grands, l'univers est accéléré ! Le point tournant se situe à

$$\mathbf{R}_r \approx 2^{\frac{2}{3}}/\tilde{\Lambda}^{\frac{2}{3}} \quad , \quad (6.5.9)$$

pour $\tilde{\Lambda} = 1$ ce point d'équilibre se trouvera à $2^{\frac{2}{3}} \approx 1.59$ fois de son rayon actuel. Bien sûr, cela peut être changé en utilisant différentes valeurs de $\tilde{\Lambda}$. Pour $\tilde{\Lambda} = 3$, le point d'équilibre se situe à 76 pour cent du rayon de l'univers. Ce cas est représenté sur la figure 1. L'univers commence à être accéléré après avoir atteint $\mathbf{R}_r = 0.76$ (unités de \mathbf{R}_{r0}). Continue son augmentation jusqu'à atteindre son maximum au voisinage de $\mathbf{R}_r \approx 1.9$, près de deux fois le rayon réel de l'univers, après, l'accélération est en baisse, pour atteindre asymptotiquement le zéro. Cet univers ne s'écroulera jamais, mais parviendra asymptotiquement à un état non accéléré.

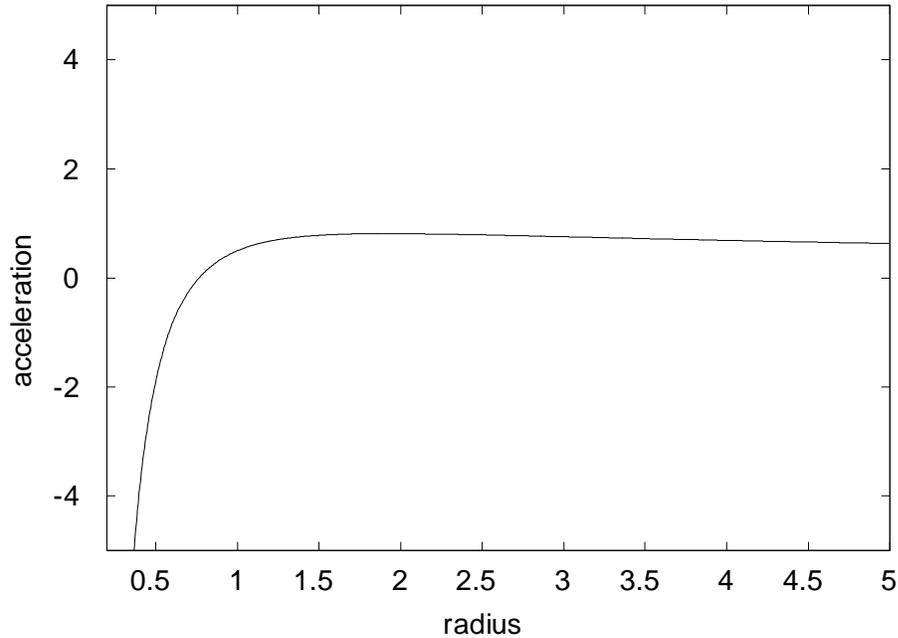


FIG. 6.1 – La dépendance de l'accélération en fonction du rayon de l'univers \mathbf{R}_r , pour $\beta = \frac{1}{2}$. Dans cette figure, $\tilde{\Lambda} = 3$. La question est alors : Où sommes nous maintenant ? Avant ou après le maximum ?

d) $\beta = \frac{2}{3}$: rappelons que $\alpha = 0$ (univers de la poussière)! Alors, à partir de (6.5.3) on obtient

$$\tilde{\mathbf{R}}_r'' = \tilde{\Lambda} - \mathbf{R}_r^{-2} \quad . \quad (6.5.10)$$

Ceci est aussi une nouvelle solution. Le point d'équilibre est à

$$\mathbf{R}_r \approx 1/\sqrt{\tilde{\Lambda}} \quad . \quad (6.5.11)$$

Cette solution est également particulière en ce sens que l'accélération de l'univers asymptotique est constante ($\mathbf{R}_r'' = \tilde{\Lambda}$). L'utilisation de (6.4.27) conduit à la dépendance de l'énergie noire $\rho_0 = \Lambda/\mathbf{R}_r$ avec le rayon de l'univers, c'est à dire, elle diminue également avec le rayon (le temps) de l'univers.

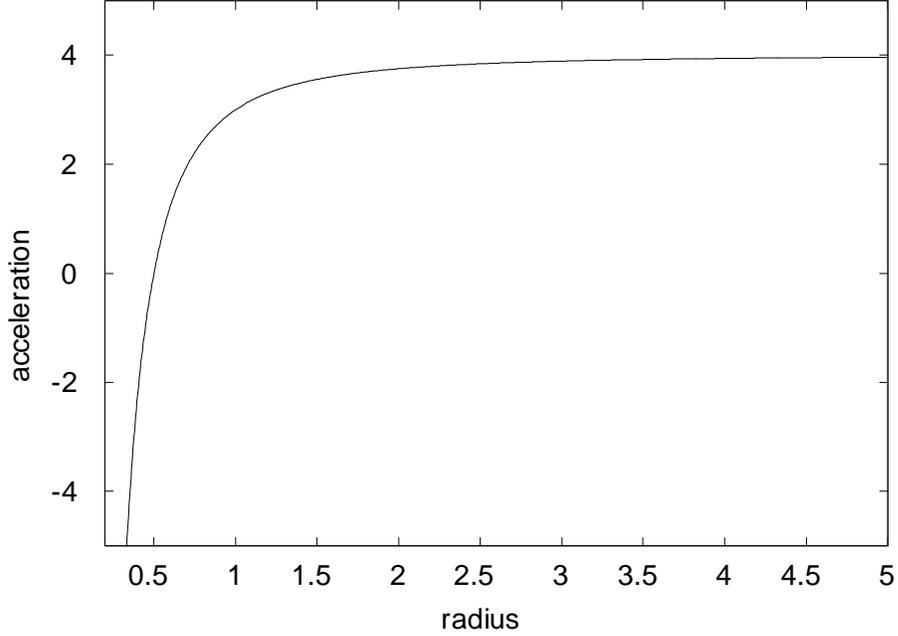


FIG. 6.2 – La dépendance de l'accélération en fonction du rayon de l'univers \mathbf{R}_r , pour $\beta = \frac{2}{3}$. Dans cette figure, $\tilde{\Lambda} = 4$.

La nouvelle partie ici est que d'autres solutions que celles standards existent :

- i) Il existe la possibilité d'une accélération asymptotique constante.
- ii) Dans une autre solution, l'expansion de l'univers, après sa période de décélération, s'accélère. Les accélérations atteignent un maximum et s'évanouissent asymptotiquement.
- iii) Dans tous les cas, l'univers est d'abord ralenti et après une période dite de «point d'équilibre», il commence à accélérer.
- iv) Bien sûr, toutes les solutions standards sont obtenues (constante cosmologique et rip-off).

Dans le but de calculer numériquement les conséquences observables, nous avons à connaître la forme exacte des fonctions ξ_k , qu'il nous a été impossible de déduire des premiers principes. Une possibilité est d'utiliser la distribution calculée de l'énergie noire, comme par exemple ça a été fait dans [109]. Une alternative est d'utiliser la paramétrisation donnée dans (6.4.25).

Ceci implique l'utilisation d'un paramètre supplémentaire (β). Il est équivalent à des considérations connues dans la littérature [115]. L'accélération de chaque solution est une conséquence des fonctions ξ_k . Elles représentent les contributions au tenseur impulsion-énergie, ce qui équivaut à l'énergie noire. Dans le modèle considéré, cette énergie noire est en général pas une constante, mais varie avec le temps, c'est à dire, avec le rayon de l'univers.

Conclusion

Nous avons appliqué le formalisme pseudo-complexe pour étendre le modèle de Robertson-Walker de l'univers au modèle Pseudo-Complexe de Robertson-Walker. Les résultats les plus importants sont

- 1) Le modèle automatiquement introduit une contribution qui est égale à l'énergie noire comme la constante cosmologique qui dépendent du rayon de l'univers.
- 2) Nous avons également obtenu plusieurs évolutions possibles de l'univers. Outre la solution d'une densité constante de l'énergie noire et le scénario rip-off, nous avons également obtenu des solutions où l'accélération du temps infini tend vers zéro ou une valeur constante (voir fig. 6.1 et 6.2).

Chapitre 7

Conclusion Générale et Perspectives

Le propos de cette thèse traite 2 extensions de certains modèles. La première est l'extension paraquantique de certains modèles supersymétriques aussi bien en mécanique quantique qu'en théorie des champs ; la deuxième est l'extension pseudo-complexe de la relativité générale. En mécanique quantique, différentes définitions de systèmes quantiques $N = 1$ et $N = 2$ supersymétriques sont proposées dans la littérature où il est prouvé qu'elles sont toutes équivalentes, la parasupersymétrie est construite par deux modèles différents, le modèle de Rubakov-Spiridonov et le modèle de Beckers-Debergh à l'ordre $P = 2$. Par la suite ces modèles sont généralisés à l'ordre P par Khare et Fakhri respectivement. Par rapport à cette question, 2 résultats essentiels ont été obtenus :

→ A la différence du cas ordinaire, les différentes définitions du modèle de Rubakov-Spiridonov pour $N = 1$ et $N = 2$ parasupersymétriques ne sont plus équivalentes. Ceci revient à la structure de la parasuperalgèbre qui vérifie des relations trilineaires.

→ Les modèles de Khare et Fakhri (à l'ordre P) sont équivalents sous réserve de certaines conditions établies.

Concernant l'extension paraquantique en théorie des champs, la plus simple extension paraquantique des 2 modèles de Wess-Zumino a été étudiée, les résultats essentiels obtenus sont :

→ Comme système bosonique-parafermionique, le premier modèle correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré parasupersymétrique où les parasupercharges satisfont des relations de commutation trilineaires dictées par ce type de système. La fermeture de l'algèbre se distingue par la règle du produit cubique pour les éléments fermioniques qui est bien la traduction de la parasuperalgèbre à l'ordre $P = 2$. A la différence du cas ordinaire bilinéaire, ce résultat implique que l'application de transformations trois fois

répétée sur un champ donne une translation sur le transformé du champ. Cette fermeture est renforcée par la vérification que les parasupercharges sont effectivement des générateurs de ces transformations. Notons cependant que dans ce cas, aucun no-go-théorème associé à ce type de système n'a été considéré.

→ Comme système parabosonique-parafermionique, le deuxième modèle correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré supersymétrique pour laquelle les parasupercharges satisfont des relations de commutation bilinéaires ordinaires traduisant ainsi le no-go-théorème, et bien sûr comme conséquence, la fermeture de l'algèbre des transformations est établie par la règle du produit bilinéaire pour les éléments fermioniques.

Enfin, le dernier point traité dans cette thèse, et dans un tout autre domaine, est l'étude des conséquences de l'extension pseudo-complexe de la relativité générale à travers celle de la métrique de Robertson-Walker. Une contribution au tenseur moment-énergie apparaît (à travers les fonctions ξ_k) et correspond à l'énergie noire pouvant varier avec le rayon de l'univers (donc avec le temps).

Les fonctions ξ_k pourraient avoir une origine plus profonde microscopique, que nous n'avons pas explorée ici. Probablement, seule une telle compréhension plus profonde microscopique fixera la dépendance de ξ_k avec le rayon de l'univers (voir par exemple [109]). Néanmoins, le tableau classique présenté dans le chapitre 6 éclaire et simplifie la description des différents scénarios d'évolution possibles de l'univers.

Nous n'avons pas encore étudié le rôle du paramètre de longueur minimale l , qui figure également dans la formulation pseudo-complexe. En théorie du champ, son rôle est de rendre la théorie régularisée [105]. Nous soupçonnons que cela est aussi le cas dans la formulation pseudo-complexe de la relativité générale et pourrait donner une indication sur la façon de quantifier cette théorie. Dans une publication à venir nous avons l'intention d'étudier le rôle de la longueur minimale l .

Enfin nous avons vu que la modification du principe variationnel $\delta S \in \mathbf{P}^0$ a des conséquences importantes ; comme l'apparition de l'énergie noire. Il fournit également une description simple des effets de l'énergie noire, obtenue au moyen de calculs numériques, comme par exemple dans [109]. Ces caractéristiques sont une allusion au fait que le principe variationnel doit probablement être modifié comme proposé.

Annexe A

Relations utiles

On utilise le tenseur métrique, avec la convention suivante

$$[\eta_{ab}] = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (\text{A.0.1})$$

et son inverse, défini par

$$\eta_{ac}\eta^{cb} = \delta_a^b$$

Le tenseur totalement antisymétrique ε_{abcd} est normalisé tel que

$$\varepsilon_{0123} = +1, \varepsilon^{0123} = -1 \quad (\text{A.0.2})$$

On définit le tenseur totalement antisymétrique à deux dimensions

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} \quad (\text{A.0.3})$$

avec la convention : $\epsilon_{12} = \epsilon^{12} = +1$. Ce tenseur joue en quelque sorte le rôle d'une métrique pour les indices des spineurs de $SL(2, C)$, comme on le montrera ultérieurement. Avec cette définition, on a les égalités suivantes

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta} = -\delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha\delta_\gamma^\beta \quad (\text{A.0.4})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (\text{A.0.5})$$

On a les mêmes définitions et identités pour le tenseur avec les indices pointés, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$.

Les spineurs de Weyl contiennent deux variables de Grassmann (anticommutantes) ψ_1, ψ_2 .

Pour de telles variables, on a

$$\psi_1 \psi_1 = 0, \psi_2 \psi_2 = 0$$

$$\psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1$$

ce qui s'écrit de manière formelle

$$\psi_\alpha \psi_\beta = -\psi_\beta \psi_\alpha, \psi_\alpha \psi_\alpha = 0 \quad (\text{A.0.6})$$

Le tenseur ϵ monte et descend les indices des spineurs. Pour un spineur à deux composantes ψ_α , cette propriété s'écrit

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta \quad (\text{A.0.7})$$

Les matrices de Pauli sont définies par

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.8})$$

Dans la base de Weyl (ou représentation chirale), les matrices de Dirac sont données par

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.9})$$

D'après les relations (A.0.8) et (A.0.9), on a une algèbre de Clifford pour les matrices de Dirac

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = -2\eta^{mn} \quad (\text{A.0.10})$$

Il est plus aisé en général de travailler avec des matrices de Dirac qu'avec celles de Pauli, utilisées dans le formalisme des spineurs de Weyl.

un spineur de Majorana Ψ_M est constitué d'un spineur de Weyl χ_α et de son conjugué hermétique $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_M = \left(\chi_\alpha \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \right) \quad (\text{A.0.11})$$

un spineur de Dirac Ψ_D est lui, constitué de deux spineurs de Weyl ψ_α différents et $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \bar{\Psi}_D = \left(\chi_\alpha \quad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \right) \quad (\text{A.0.12})$$

On a utilisé la définition suivante pour la conjugaison complexe des bispineurs

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0 \quad (\text{A.0.13})$$

Il est aussi utile de connaître certaines formules; soient

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.14})$$

Réarrangement de Fierz

La formule de réarrangement de Fierz est basée sur un théorème des matrices de Dirac. Il ya 16 matrices formant une algèbre de Clifford (A.0.10)

$$\gamma^A = \left\{ 1, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], i\gamma^5 \right\} \quad (\text{A.0.15})$$

Les inverse de ces matrices sont données par

$$\gamma_A = \{1, \gamma_\mu, -\gamma_\mu \gamma_5, \Sigma_{\mu\nu}, -i\gamma^5\} \quad (\text{A.0.16})$$

la relation entre ces matrices γ^A et leurs inverses γ_A est donnée par

$$\sum_{A=1}^{16} (\gamma_A)_{im} (\gamma^A)_{nl} = 4\delta_{mn}\delta_{il} \quad (\text{A.0.17})$$

C'est la clé sur laquelle sont basées les formules de Fierz. En multipliant l'équation (A.0.17) par $\chi_n \psi_l$ ou χ_n et ψ_l sont deux champs spinoriels (deux variables de grassmann), nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^{16} (\gamma_A)_{im} (\chi_n \gamma_{nl}^A \psi_l) &= 4\delta_{mn}\delta_{il}\chi_n \psi_l \\ &= 4\chi_m \psi_i \end{aligned} \quad (\text{A.0.18})$$

la quantité entre parenthèses est un nombre que nous noterons $(\chi^T \gamma^A \psi)$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^{16} (\chi^T \gamma^A \psi) \psi_{Aim} &= -4\psi_i \chi_m \\ &= -4 (\psi \chi^T)_{im} \end{aligned} \quad (\text{A.0.19})$$

On peut alors écrire

$$(\psi \chi^T) = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\chi^T \gamma^A \psi) \gamma_A \quad (\text{A.0.20})$$

Maintenant on peut prendre $\psi = \varepsilon_2$, $\chi^T = \bar{\varepsilon}_1$ et en utilisant les relations (A.0.20) et (A.0.16), nous trouvons

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \bar{\varepsilon}_1 &= -\frac{1}{4} [\bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 \gamma_\mu \gamma^5 + 2\bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \Sigma_{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2 \gamma^5] \end{aligned} \quad (\text{A.0.21})$$

Cette équation est le réarrangement de Fierz

De la même façon, on peut déduire les relations suivantes

$$\begin{aligned}
M &= \gamma^0 \gamma^\mu C \gamma^{0T} = M^T, \quad \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \varepsilon_2 \\
M &= \gamma^0 C \gamma^{0T} = -M^T, \quad \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 \\
M &= \gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} C \gamma^{0T} = M^T, \quad \bar{\varepsilon}_2 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \Sigma^{\mu\nu} \varepsilon_2 \\
M &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 C \gamma^{0T} = -M^T, \quad \bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \varepsilon_2 \\
M &= \gamma^0 \gamma^5 C \gamma^{0T} = -M^T, \quad \bar{\varepsilon}_2 \gamma^5 \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \gamma^5 \varepsilon_2
\end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont les spineurs de Majorana et C est le conjugué de charge.

Annexe B

Calcul de P_μ

Le quadrivecteur P_μ du modèle de Wess-Zumino boson-parafermion est défini par

$$P_\mu = \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x_0} \right)} \frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial B(x)}{\partial x_0} \right)} \frac{\partial B(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_0} \right)} \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_\mu} \right\} \quad (\text{B.0.1})$$

nous pouvons écrire

$$P_\mu = \int d^3x \left\{ \frac{\partial A(x)}{\partial x_0} \frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial B(x)}{\partial x_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x_\mu} + \frac{i}{4} \left[\bar{\Psi}(x) \gamma^0, \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_\mu} \right] \right\} \quad (\text{B.0.2})$$

En utilisant les expressions des champs $A(x)$, $B(x)$ et $\Psi(x)$ en termes des modes (4.1.7-9), nous trouvons

$$\Psi^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{\omega_p} \right)^{1/2} \{ d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{ipx} \} \quad (\text{B.0.3})$$

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} \{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (\text{B.0.4})$$

$$B(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p} \right)^{1/2} \{ b(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx} \} \quad (\text{B.0.5})$$

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3x \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \{-a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \\
&\quad \frac{(-i)}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ a\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) e^{-ikx} - a^+\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) e^{ikx} \right\} \\
&+ \int d^3x \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \{-b(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \\
&\quad \frac{(-i)}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} \left\{ b\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) e^{-ikx} - b^+\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) e^{ikx} \right\} \\
&+ \frac{i}{4} \int d^3x \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int d^3p \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} \frac{(-i)}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3k \left(\frac{m}{\omega_k}\right)^{1/2} k_\mu \\
&\quad \left[\{ d^+(\vec{p}, r) \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 e^{ipx} + d(\vec{p}, r) \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 e^{-ipx} \}, \right. \\
&\quad \left. \left\{ d\left(\frac{\vec{k}}{k}, s\right) u\left(\frac{\vec{k}}{k}, s\right) e^{-ikx} - d^+\left(\frac{\vec{k}}{k}, s\right) v\left(\frac{\vec{k}}{k}, s\right) e^{ikx} \right\} \right]
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} - a(\vec{p}) a(\vec{k}) e^{-i(p+k)x} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a(\vec{p}) a^+(\vec{k}) e^{-i(p-k)x} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a^+(\vec{p}) a(\vec{k}) e^{i(p-k)x} \\
&- \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a^+(\vec{p}) a^+(\vec{k}) e^{i(p+k)x} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} - b(\vec{p}) b(\vec{k}) e^{-i(p+k)x} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b(\vec{p}) b^+(\vec{k}) e^{-i(p-k)x} \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b^+(\vec{p}) b(\vec{k}) e^{i(p-k)x} \\
&- \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b^+(\vec{p}) b^+(\vec{k}) e^{i(p+k)x} \\
&+ \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
&\left\{ \left[d^+(\vec{p}, r), d(\vec{k}, s) \right] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{k}, s) e^{i(p-k)x} \right\} \\
&+ \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
&\left\{ \left[d^+(\vec{p}, r), d^+(\vec{k}, s) \right] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{k}, s) e^{i(p+k)x} \right\} \\
&+ \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
&\left\{ \left[d(\vec{p}, r), d(\vec{k}, s) \right] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{k}, s) e^{-i(p+k)x} \right\} \\
&- \frac{i}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{r,s} \int d^3x \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
&\left\{ \left[d(\vec{p}, r), d^+(\vec{k}, s) \right] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{k}, s) e^{-i(p-k)x} \right\}
\end{aligned}$$

Par intégration sur x , nous trouvons

$$\begin{aligned}
P_\mu = & \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} - a(\vec{p}) a(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{-i2\omega_p t} \\
& + \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a(\vec{p}) a^+(\vec{k}) \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\
& + \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a^+(\vec{p}) a(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) \\
& \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} a^+(\vec{p}) a^+(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{i2\omega_p t} \\
& - \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b(\vec{p}) b(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{-i2\omega_p t} \\
& \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b(\vec{p}) b^+(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) \\
& + \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b^+(\vec{p}) b(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) \\
& - \int d^3p \int d^3k \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^{1/2} \frac{k_\mu}{(2\omega_k)^{1/2}} b^+(\vec{p}) b^+(\vec{k}) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{i2\omega_p t} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
& \left\{ \left[d^+(\vec{p}, r), d(\vec{k}, s) \right] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{k}, s) \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
& \left\{ \left[d^+(\vec{p}, r), d^+(\vec{k}, s) \right] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{k}, s) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{i2\omega_p t} \right\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
& \left\{ \left[d(\vec{p}, r), d(\vec{k}, s) \right] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{k}, s) \delta(\vec{p} + \vec{k}) e^{-i2\omega_p t} \right\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3p \int d^3k \frac{m}{(\omega_k \omega_p)^{1/2}} k_\mu \\
& \left\{ \left[d(\vec{p}, r), d^+(\vec{k}, s) \right] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{k}, s) \delta(\vec{p} + \vec{k}) \right\}
\end{aligned}$$

Par intégration encore sur k , nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3 p \frac{p_\mu}{2} \{ a(\vec{p}) a^+(\vec{p}) + a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) \} \\
&+ \int d^3 p \frac{p_\mu}{2} \{ a(\vec{p}) a(-\vec{p}) e^{-i2\omega_p t} + a^+(\vec{p}) a^+(-\vec{p}) e^{i2\omega_p t} \} \\
&+ \int d^3 p \frac{p_\mu}{2} \{ b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + b(\vec{p}) b(-\vec{p}) e^{-i2\omega_p t} + b^+(\vec{p}) b^+(-\vec{p}) e^{i2\omega_p t} \} \\
&+ \frac{i}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu \{ [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}, s)] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{p}, s) \} \\
&- \frac{i}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu [d(\vec{p}, r), d^+(\vec{p}, s)] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{p}, s) \\
&- \frac{i}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu \{ - [d^+(\vec{p}, r), d^+(-\vec{p}, s)] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(-\vec{p}, s) e^{i2\omega_p t} \} \\
&+ \frac{i}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu \{ [d(\vec{p}, r), d(-\vec{p}, s)] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(-\vec{p}, s) e^{-i2\omega_p t} \}
\end{aligned}$$

tout les termes qui dépendent du temps sont nulle [79], nous trouvons

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3 p \frac{p_\mu}{2} \{ a(\vec{p}) a^+(\vec{p}) + a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b(\vec{p}) b^+(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) \} \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu \{ [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}, s)] \bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{p}, s) \} \\
&- \frac{1}{4} \sum_{r,s} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} p_\mu [d(\vec{p}, r), d^+(\vec{p}, s)] \bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{p}, s)
\end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes

$$\bar{u}(\vec{p}, r) \gamma^0 u(\vec{p}, s) = \frac{p_0}{m} \delta_{rs} = \frac{\omega_p}{m} \delta_{rs} \quad (\text{B.0.6})$$

$$\bar{v}(\vec{p}, r) \gamma^0 v(\vec{p}, s) = \frac{p_0}{m} \delta_{rs} = \frac{\omega_p}{m} \delta_{rs} \quad (\text{B.0.7})$$

et en tenant compte des relations de commutations des opérateurs, nous trouvons

$$P_\mu = \int d^3 p p_\mu \left\{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) + b^+(\vec{p}) b(\vec{p}) + 1 + \frac{1}{2} \sum_r p_\mu [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}, r)] \right\} \quad (\text{B.0.8})$$

Ceci représente l'expression du quadrivecteur impulsion pour le modèle boson-parafermion

De la même manière, nous trouvons l'expression du quadrivecteur impulsion pour le modèle paraboson-parafermion

$$P_\mu = \int d^3 p p_\mu \left\{ \{ a^+(\vec{p}), a(\vec{p}) \} + \{ b^+(\vec{p}), b(\vec{p}) \} + \frac{1}{2} \sum_r p_\mu [d^+(\vec{p}, r), d(\vec{p}, r)] \right\} \quad (\text{B.0.9})$$

Annexe C

Calcul de commutateur $[P_\mu, P_\nu]$

En utilisant l'expression du quadrivecteur impulsion pour le modèle de Wess-Zumino décrit en termes de bosons et de parafermions, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] = & \int \int d^3p d^3k p_\mu k_\nu \left\{ \left[a^+(\vec{p})a(\vec{p}), a^+(\vec{k})a(\vec{k}) \right] + \left[b^+(\vec{p})b(\vec{p}), b^+(\vec{k})b(\vec{k}) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} \sum_{s,l} \left[\left[d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s) \right], \left[d^+(\vec{k}, l), d(\vec{k}, l) \right] \right] \right\} \quad (\text{C.0.1})
 \end{aligned}$$

en tenant compte des relations de commutations entre les opérateurs de créations et d'annihilations, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] = & \int \int d^3p d^3k p_\mu k_\nu \left\{ \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \delta(\vec{p} - \vec{k}) + \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right. \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{s,l} \left[d^+(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{k}, l), d(\vec{k}, l) \right] \right] d(\vec{p}, s) \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{s,l} d^+(\vec{p}, s) \left[d(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{k}, l), d(\vec{k}, l) \right] \right] \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{s,l} d(\vec{p}, s) \left[d^+(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{k}, l), d(\vec{k}, l) \right] \right] \\
 & \left. - \frac{1}{4} \sum_{s,l} \left[d(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{k}, l), d(\vec{k}, l) \right] \right] d^+(\vec{p}, s) \right\}
 \end{aligned}$$

en remplaçant les expressions des relations trilinéaires (4.1.10) , on obtient

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] = & \int \int d^3p d^3k p_\mu k_\nu \left\{ \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \delta(\vec{p} - \vec{k}) + \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right. \\
& \int \int d^3p d^3k p_\mu k_\nu \frac{1}{4} \sum_{s,l} \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) + \\
& 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) \} \\
& - \int \int d^3p d^3k p_\mu k_\nu \frac{1}{4} \sum_{s,l} \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) \\
& \left. + 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \}
\end{aligned}$$

On fait l'intégral sur k , nous obtenons

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{C.0.2}$$

De la même manière, nous pouvons montrer aussi que ceci est valable pour le modèle de Wess-Zumino paraboson-parafermion.

Annexe D

Calcul du commutateur $[P_\mu, Q_a]$

En utilisant les expressions de la supercharge et de l'opérateur impulsion pour le modèle boson-parafermion, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
[P_\mu, Q_a] = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_{s,l} \int d^3k \int d^3p p_\mu \left\{ v_b(\vec{k}, s) d^+(\vec{k}, s) \left[a^+(\vec{p}) a(\vec{p}), C_{ab}(\vec{k}) \right] \right. \\
& - u_b(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \left[a^+(\vec{p}) a(\vec{p}), D_{ab}(\vec{k}) \right] + v_b(\vec{k}, s) d^+(\vec{k}, s) \\
& \left[b^+(\vec{p}) b(\vec{p}), C_{ab}(\vec{k}) \right] - u_b(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) \left[b^+(\vec{p}) b(\vec{p}), D_{ab}(\vec{k}) \right] \\
& + \frac{1}{2} v_b(\vec{k}, s) C_{ab}(\vec{k}) \left[[d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, l)], d^+(\vec{k}, s) \right] \\
& \left. - \frac{1}{2} u_b(\vec{k}, s) D_{ab}(\vec{k}) \left[[d^+(\vec{p}, l), d(\vec{p}, l)], d(\vec{k}, s) \right] \right\} \quad (\text{D.0.1})
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations de commutations, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[P_\mu, Q_a] = & i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_{s,l} \int d^3k \int d^3p p_\mu \left\{ -v_b(\vec{k}, s) d^+(\vec{k}, s) a(\vec{p}) 1_{ab} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right. \\
& - u_b(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) a^+(\vec{p}) 1_{ab} \delta(\vec{p} - \vec{k}) + i v_b(\vec{k}, s) d^+(\vec{k}, s) b(\vec{p}) \gamma_{ab}^5 \\
& \delta(\vec{p} - \vec{k}) + i u_b(\vec{k}, s) d(\vec{k}, s) b^+(\vec{p}) \gamma_{ab}^5 \delta(\vec{p} - \vec{k}) + v_b(\vec{k}, s) C_{ab}(\vec{k}) \\
& \left. d^+(\vec{p}, l) \delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) + u_b(\vec{k}, s) D_{ab}(\vec{k}) d(\vec{p}, l) \delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \right\} \quad (\text{D.0.2})
\end{aligned}$$

Par un calcul direct, nous trouvons

$$[P_\mu, Q_a] = 0 \quad (\text{D.0.3})$$

Annexe E

Calcul du commutateur $[R, P_\mu]$

En remplaçant les opérateurs R et P_μ par leurs expressions, nous trouvons

$$\begin{aligned}
[R, P_\mu] = & \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu \int d^3p' p'_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} u_\beta(\vec{k}, l) \\
& \left\{ \left[C_{\beta b}(\vec{k}), a^+(\vec{p}')a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}')b(\vec{p}') \right] d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \right. \\
& - \left[C_{\beta b}(\vec{k}), a^+(\vec{p}')a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}')b(\vec{p}') \right] d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \\
& + \frac{C_{\beta b}(\vec{k})}{2} \sum_r \left[d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r) \right] \right] \\
& \left. - \frac{C_{\beta b}(\vec{k})}{2} \sum_r \left[d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r) \right] \right] \right\} \\
& - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} v_\beta(\vec{k}, l) \int d^3p' p'_\mu \left\{ d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \right. \\
& \left[D_{\beta b}(\vec{k}), a^+(\vec{p}')a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}')b(\vec{p}') \right] - d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \\
& \left[D_{\beta b}(\vec{k}), a^+(\vec{p}')a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}')b(\vec{p}') \right] \\
& + \frac{D_{\beta b}(\vec{k})}{2} \sum_r \left[d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r) \right] \right] \\
& \left. - \frac{D_{\beta b}(\vec{k})}{2} \sum_r \left[d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s), \left[d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r) \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

En tenant compte des relations de commutation entre les différents opérateurs de créa-

tions et d'annihilations, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[R, P_\mu] &= \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu \int d^3 p' p'_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} u_\beta(\vec{k}, l) \\
&\quad \left\{ C_{\beta b}(\vec{p}') \delta(\vec{k} - \vec{p}') [d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s)] \right. \\
&\quad + C_{\beta b}(\vec{k}) \sum_r [d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}', s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\
&\quad - d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}', r) d(\vec{p}, s) \delta_{rl} \delta(\vec{k} - \vec{p}') - d^+(\vec{p}', r) d^+(\vec{k}, l) \\
&\quad d(\vec{p}, s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}')] - C_{\beta b}(\vec{k}) \sum_r [d(\vec{p}', r) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\
&\quad - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}', r) d^+(\vec{p}, s) \delta_{rl} \delta(\vec{k} - \vec{p}') - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{p}', r) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}')] \left. \right\} \\
&\quad - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} v_\beta(\vec{k}, l) \int d^3 p' p'_\mu \\
&\quad \left\{ D_{\beta b}(\vec{p}') \delta(\vec{k} - \vec{p}') [-d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) + d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s)] \right. \\
&\quad + D_{\beta b}(\vec{k}) \sum_r [-d(\vec{p}', r) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\
&\quad - d(\vec{p}, s) d(\vec{p}', r) d^+(\vec{p}, s) \delta_{rl} \delta(\vec{k} - \vec{p}') + d(\vec{p}, r) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}', r) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}')] \\
&\quad - D_{\beta b}(\vec{k}) \sum_r [-d^+(\vec{p}', r) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \\
&\quad + d^+(\vec{p}, s) d(\vec{p}', r) d(\vec{p}, s) \delta_{rl} \delta(\vec{k} - \vec{p}') + d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}', s) \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{p}')] \left. \right\}
\end{aligned}$$

effectivement, par un calcul direct, nous trouvons

$$[R, P_\mu] = 0 \tag{E.0.1}$$

De la même façon, nous trouvons

$$[R', P_\mu] = [R'', P_\mu] = 0 \tag{E.0.2}$$

Bibliographie

- [1] The Free Encyclopedia Wikipedia. Supersymmetry; Quantum Field Theory. <http://en.wikipedia.org/wiki>, 2007.
- [2] M. Rausch de Traubenberg, J. Phys. Conf. Ser.175 :012003, 2009.
- [3] R. Campoamor-Stursberg and M. Rausch de Traubenberg, J. Phys. A42 :495202,2009.
- [4] G. Moulataka, Michel Rausch de Traubenberg and A. Tanasa. Jul 2004. 13pp. Contributed to 11th International Conference on Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-11), Prague, Czech Republic, 21-24 Jun 2004.
- [5] G. Moulataka, M. Rausch de Traubenberg and A. Tanasa. Int. J. Mod. Phys. A20 : 5779-5806, 2005.
- [6] Toshiaki Tanaka. Annals Phys.322 :2682-2702, 2007.
- [7] Toshiaki Tanaka. Annals Phys.322 :2350-2373, 2007.
- [8] Michel Rausch de Traubenberg. Phys. Atom.Nucl. 71 :1102-1108, 2008.
- [9] N. Mohammedi, G. Moulataka and M. Rausch de Traubenberg. Int. J. Mod. Phys. A19 : 5585-5608, 2004.
- [10] M. Rausch de Traubenberg, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine 2004, Vol. 50, Part 2, 578–585.
- [11] Adrian Tanasa, Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications Vol. 2 (2006), Paper 056, 23 pages.
- [12] N. Fleury, Michel Rausch de Traubenberg. Mod. Phys. Lett. A11 : 899-914,1996.
- [13] E.P.Wigner, Phys. Rev. 77, (1950).
- [14] H.S Green. Phys. Rev. 90, 270 (1953).
- [15] Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics* (in Japanese), So-ryushiron Kenkyu (Kyoto) 55, special issue (1977).
- [16] Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.

- [17] O.W. Greenberg and A. K. Mishra, Path Integrals for for Parastatistics. Phys.Rev.D70 : 125013,2004.
- [18] Alexios P. Polychronakos. Path Integrals and Parastatistics. Nucl.Phys.B474 :529-539, 1996.
- [19] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [20] J. Wess and B. Zumino. A Lagrangian model invariant under supergauge transformations. Phys. Lett., 49B :52–54, 1974.
- [21] J. Wess and B. Zumino. Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. Nucl. Phys., B78 :1, 1974.
- [22] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. Nucl. Phys., B70 :39, 1974.
- [23] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the matrix. Nucl Phys, B88 : 257-274, 1975.
- [24] S. Weinberg. The Quantum Theory of Fields : Volume I : Foundations. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 2nd edition 1996.
- [25] P. Fayet. Higgs model and supersymmetry. Nuovo Cim, A31, 626, 1976.Introduction to supersymmetric theories of particules
- [26] E. P. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. Ann. Math. 40 : 149-204, 1939.
- [27] S. Ferrara, C. A. Savoy, and B. Zumino. General massive multiplets in extended supersymmetry. Phys. Lett, 100B : 393-398, 1981.
- [28] D. Z. Freedman. Irreducible representations of supersymmetry. In M. Lévy and S. Deser, editors, Recent developments in gravitation-Cargès 1978, pages 549-561. NATO Advanced Study Institute Series B44, Plenum Press, 1979.
- [29] A. Salam and J. Strathdee. Supersymmetry and nonabelian gauges. Phys. Lett, 51B : 499-505, 1974.
- [30] H. Nicolai, Supersymmetry and spin systems, J. Phys. A9 : 1497-1506, 1976.
- [31] E. Witten, Dynamical Breaking Supersymmetry, Nucl. Phys. B188, 513-554, 1981.
- [32] L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod Phys. 23 (1951) 21.
- [33] L. Gendenshtein, JETP Lett. 38, 356, 1983.
- [34] Monique Combescure, François Gieres and Maurice Kibler, Are N=1 and N=2 Supersymmetric Quantum Mechanics Equivalent?. J. Phys. A. Gen37 (2004) 10385-10396.

- [35] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme. Supersymmetry and Quantum Mechanics. Phys.Rept.251 :267-385,1995.
- [36] R. Haymaker and A. R. P. Rau. Am. Jour. Mod. Phys. A5 (1990) 1383.
- [37] A. Khare, A.K. Mishra and G. Rajasekaran. Mod. Phys. Lett. A8 : 107-113,1993.
- [38] C. Quesne and N. Vansteenkiste. Published in Phys.Lett.A240 :21-28,1998. quant-ph/9802066.
- [39] B. Bagchi, S. Mallik and C. Quesne. Int.J.Mod.Phys.A17 :51-72,2002. arXiv :quant-ph/0106021v1 5 Jun 2001.
- [40] Arthur Sergeev. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics 1997, V.2, 331–335. hep-th/0212309v1.
- [41] Toshiaki Tanaka, Annals Phys.322 :2682-2702,2007. hep-th/0612263.
- [42] O.W. Greenberg , Acta Phys. Hung. A19 : 353-364, 2004. hep-ph/0212174
- [43] Toshiaki Tanaka. Mod.Phys. Lett. A22 : 2191-2200, 2007. arXiv :hep-th/0611008v2.
- [44] Toshiaki Tanaka. Annals Phys.322 :2350-2373, 2007. hep-th/0610311
- [45] S. Okubo. J.Math.Phys.35 :2785-2803,1994. hep-th/9312180.
- [46] S. Okubo. Presented at 15th Annual MRST (Montreal-Rochester-Syracuse-Toronto) Meeting on High Energy Physics. In Syracuse 1993, Proceedings, New directions in the application of symmetry principles to elementary particle physics, 200-213. arXiv :hep-th/9306160v1.
- [47] Boris F. Samsonov. Modern Physics Letters A, Vol.11, No. 26 (1996) 2095-2104, quant-ph/9611019.
- [48] S. Meljanac, M.Milekovic and Ante Perica. Phys. Lett. A215 : 135-140,1996. arXiv :hep-th/9701084v1.
- [49] T.D. Palev, Submitted to Comm.Math.Phys.arXiv :q-alg/9709003v2.
- [50] M.A. Jafarizadeh and S.K. Moayedi, J. Math.Phys. 40 : 4274-4289,1999. arXiv :hep-th/9904166v1.
- [51] M.A. Jafarizadeh, H. Fakhri, S.K. Moayedi, (Tabriz U. & IPM, Tehran) . 1999. 6pp. Phys.Rev.D60 :084026,1999.
- [52] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov and L. Vinet, Phys. Lett. B272 : 297-304, 1991.
- [53] Alexander A. Andrianov, Mikhail V. Ioffe, Phys.Lett.B255 :543-548,1991.

- [54] A. B. Govorkov, Nucl. Phys. B365 : 381-403, 1991.
- [55] Ignatios Antoniadis and Constantin Bachas. Nucl.Phys.B278 :343,1986.
- [56] A. B. Govorkov. Theor. Math. Phys.85 : 1167-1176, 1991, Teor. Mat. Fiz. 85 : 222-236, 1990.
- [57] A.B. Govorkov. Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra 14 :1229-1272,1983.
- [58] A.B. Govorkov. JINR-E2-82-470, Jun 1982. 10pp. In Sukhumi 1982, Proceedings, Quarks-82, 20-28 and Dubna Jinr - 82-470 (82,REC.SEP.) 10p.
- [59] A.B. Govorkov. Theor.Math.Phys.54 :234,1983, Teor.Mat.Fiz.54 :361-371,1983.
- [60] R. Y. Levine and Y. Tomozawa. Phys.Lett.B128 :189-193,1983.
- [61] R.Y. Levine and Y. Tomozawa. Annals Phys.149 :457,1983.
- [62] R.Y. Levine and Y. Tomozawa. J. Math. Phys.24 : 1603,1983.
- [63] Peter G. O. Freund. Phys. Rev. D13 : 2322,1976.
- [64] V. A. Rubackov and V. P. Spiridnov. Parasupersymmetric Quantum Mechanics, Modern Physics Letters A3, 1337-1347, 1988.
- [65] J. Beckers and N. Debergh. Parastatistics, Supersymmetry and Parasupercoherent States, J. Math Phys. 31 (6), June 1990.
- [66] M. Daoud and M. R. Kibler. J.Math.Phys.47 :122108,2006.arXiv :quant-ph/0609017v3.
- [67] A. K. Mishra and G. Rajasekaran. AIP Conf.Proc.545 :169-175, 2004.
- [68] A.K. Mishra and G. Rajasekaran. Mod.Phys.Lett.A7 :3425-3437,1992, Erratum-ibid. A11 : 1031, 1996.
- [69] K. Aghababaei Samania and A. Mostafazadehb. Nucl.Phys.Proc.Suppl.104 :251-253,2002. arXiv :hep-th/0105013v
- [70] A. Mostafazadehb. J.Phys.A34 :8601-8609,2001. e-Print : math-ph/0110013 arXiv :math-ph/0110013v
- [71] C. Quesne, N. Vansteenkiste. Mod. Phys. Lett. A17 :839-850, 2002. arXiv :math-ph/0203036v2
- [72] C. Quesne, N. Vansteenkiste. Int.J.Mod.Phys.A18 :271-292,2003. math-ph/0203035.
- [73] A. Mostafazadehb. Physical and mathematical aspects of symmetries 459-462. arXiv :hep-th/0303094v1.
- [74] Keivan Aghababaei Samani. To appear in Rep. Math. Phys. arXiv :quant-ph/0307077v1.

- [75] A. Algin and M. Arik, *Eur. Phys. J. C* **19**, 583–586 (2001).
- [76] Ali Mustaphazadeh. *J.Phys.A34* :8601-8609, 2001.
- [77] A. Chenaghloou and H. Fakhri. *Int. J. Mod.Phys. A18* :939-956, 2003.
- [78] L. Maghlaoui and N. Belaloui. *EJTP* **125**, 2008.
- [79] H. J. W. Muller-Kirsten, *Supersymmetry : An Introduction with Conceptual and Computational Details*, World Scientific Publishing, 1987.
- [80] R. Floreanini and L. Vinet : Pararupersymmetry in quantum mechanics and field theory, *Phys. Rev. D* **44**, 3851(1991).
- [81] L. Maghlaoui and N. Belaloui. Paraquantum extension of the Wess-Zumino model. *AIP Conf.Proc.957* :233-236, 2007.
- [82] O. W. Grennberg and A. M. L. Messiah. *Phys. Rev. B* **138**, 1155 (1965).
- [83] P. Hess, L. Maghlaoui and W. Greiner, *Classical and quantum gravity*, 2010
- [84] A. Einstein, *Ann. Math.* **46**, 578 (1945).
- [85] A. Einstein, *Rev. Mod. Phys.* **20**. 35 (1948).
- [86] C. Mantz and T. Prokopec, arXiv :gr-qc|0804.0213v1, 2008.
- [87] D. Lovelook, *Annali di Matematica Pura* **83**, No. 1 (1969), 43.
- [88] E. R. Caianiello, *Nuovo Cim. Lett.* **32**, 65 (1981).
- [89] H. E. Brandt, *Found. Phys. Lett.* **2**, 39 (1989).
- [90] H. E. Brandt, *Found. Phys. Lett.* **4**, 523 (1989).
- [91] H. E. Brandt, *Found. Phys. Lett.* **6**, 245 (1993).
- [92] R. G. Beil, *Found. Phys.* **33**, 1107 (2003).
- [93] R. G. Beil, *Int. J. Theor. Phys.* **26**, 189 (1987).
- [94] R. G. Beil, *Int. J. Theor. Phys.* **28**, 659 (1989).
- [95] R. G. Beil, *Int. J. Theor. Phys.* **31**, 1025 (1992).
- [96] J. W. Moffat, *Phys. Rev. D* **19**, 3554 (1979).
- [97] G. Kunstatter, J. W. Moffat and J. Malzan, *J. Math. Phys.* **24**, 886 (1983).
- [98] G. Kunstatter and R. Yates, *J. Phys. A* **14**, 847 (1981).
- [99] A. Crumeyrolle, *Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 4^e série, **26**, 105 (1962).
- [100] A. Crumeyrolle, *Riv. Mat. Univ. Parma* (2) **5**, 85 (1964).
- [101] R.-L. Clerc, *Ann. de L'I.H.P. Section A* **12**, No. 4, 343 (1970).

- [102] R.-L. Clerc, *Ann. de L'I.H.P. Section A* **17**, No. 3, 227 (1972).
- [103] P. O.Hess and W. Greiner, *Int. J. Mod. Phys. E* **18** (2009), 51.
- [104] P. O. Hess and W. Greiner, *J. Phys. G* **34**, 2091 (2007).
- [105] P. O. Hess and W. Greiner, *Int. J. Mod. Phys. E* **16**, 1643 (2007).
- [106] F. P. Schuller, Ph.D. thesis, University of Cambridge (2003).
- [107] F. P. Schuller, M. N. R. Wohlfarth and T. W. Grimm, *Class. Quant. Grav.* **20**, 4269 (2003).
- [108] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman Company, San Francisco, 1973)
- [109] J. A. González and F. S. Guzmán, *Phys. Rev. D* **79** (2009), 121501.
- [110] A. Feoli, G. Lambiase, G. Papini and G. Scarpetta, *Phys. Lett A* **263** (1999), 147.
- [111] P. O. Hess and W. Greiner, *JPG* (2007).
- [112] P. O. Hess and W. Greiner, *Int. J. Mod. Phys. E* (2007).
- [113] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebra*, (Springer, Heidelberg,1989).
- [114] V. Cruceanu, P. Fortuny and P. M. Gadea, *Rocky Mountain J. of Math.* **26**, 83 (1996).
- [115] P. J. E. Peebles, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003), 559.
- [116] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, (McGraw Hill, New York, 1975).

ملخص

الغرض من هذه الرسالة هو

من ناحية ، دراسة نماذج فائق التناظر في الكم المعمم ، النتائج الرئيسية التي تم الحصول -
عليها هي
خلافًا للحالة العادية ، التعاريف المختلفة للنموذج ريباكوف – سبيغيدنوف لفائق التناظر
المعمم من $N=1$ و $N=2$ ليست متكافئة نهائيًا غير أن للنماذج كار وفاخري
أجل

برتبة P تخضع لشروط معينة)
النموذج bosonique-parafermionique لواس – زمينو يناظر تحقيق نظرية مجال
الجبر بوانكرية المعممة . إغلاق الجبر يتميز بقاعدة الضرب المكعبة من أجل العناصر
fermionique والتي هي ترجمة الجبر المعمم برتبة $P = 2$ التطبيق المكرر ثلاث مرات .
على مجال يعطي تحويل على المجال المحول . لاحظ مع ذلك ، أنه في هذه الحالة لم يتم
النظر إلى No-go-theorem. الموافق لهذا النوع من النظام
النموذج parabosonique-parafermionique لواس-زيمينو يمثل تحقيق في مجال
نظرية الجبر العادي فائق بونكرية ، و هذا ما يوافق No-go-theorem .

من ناحية أخرى ، دراسة النتائج المترتبة على تمديد شبه معقدة في النسبية العامة من خلال -
ليروبرتسون وولكر مترية يؤدي ذلك إلى الإسهام في تنسور الطاقة – زمن ، ويتوافق مع
الطاقة المظلمة قد تختلف مع نصف قطر الكون

كلمات المفتاحية : فائق التناظر ، الكم المعمم ، النسبية العامة ، شبه المعقدة

Résumé

L'objet de cette thèse est

D'une part, l'étude de modèles supersymétriques dans le formalisme de la paraquantification. Les résultats essentiels obtenus sont

A la différence du cas ordinaire, les différentes définitions du modèle de Rubakov- Spiridonov pour $N=1$ et $N=2$ parasupersymétrique ne sont plus équivalentes alors que Les modèles de Khare et Fahkri (à l'ordre P) le sont, sous réserve de certaines conditions

Le modèle bosonique-parafermionique de Wess-Zumino correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré parasupersymétrique. La fermeture de l'algèbre se distingue par la règle du produit cubique pour les éléments fermioniques qui est bien la traduction de la parasuperalgèbre à l'ordre $P=2$. L'application trois fois répétée de transformations sur un champ donne une translation sur le transformé du champ. Notons cependant que dans ce cas, aucun no-go-theorem associé à ce type de système n'a été considéré

Le modèle parabosonique-parafermionique de Wess-Zumino - correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré supersymétrique ordinaire traduisant ainsi le no-go-theorem

D'autre part, l'étude des conséquences de l'extension pseudo-complexe de la relativité générale à travers celle de la métrique de Robertson-Walker. Elle se traduit par une contribution au tenseur moment-énergie et correspond à l'énergie noire pouvant varier avec le rayon de l'univers

Mots clés: supersymétrie, paraquantification, relativité générale pseudo-complexe

Abstract

The purpose of this thesis is

In one hand, the study of supersymmetric models in the formalism of the paraquantization. Essential results are obtained

Unlike the ordinary case, the different $N=1$, $N=2$ parasupersymmetric definitions of the Rubakov- Spiridonov models are not equivalent while the Khare and Fahkri are so in some conditions

A bosonic-parafermionic Wess-Zumino model forms a field theoretical realization of a parasupersymmetric Poincaré algebra. The distinctive feature of the closure of the algebra is the occurrence of a cubic product rule for the fermionic elements, which is the translating of the $P=2$ parasupersymmetric algebra. The three times repeated applications of the transformations on a field gives rise to a translation of the transformed field. Furthermore, notice here that, no no-go-theorem associated to such systems has been considered

A parabosonic-parafermionic Wess-Zumino model forms a field theoretical realization of an ordinary supersymmetric Poincaré algebra

In the other hand, the study of the pseudo-complex extension of general relativity throw the Robertson-Walker metric. This extension gives a contribution to the energy-momentum tensor which correspond to the black energy and which can vary with the radius of the universe

Keywords : supersymmetry, paraquantization, pseudo-complex general relativity

Paraquantum extension of the Wess-Zumino model¹

L. Maghlaoui^{*,†} and N. Belaloui[†]

^{*}*Université M'hamed Bouguerra, Faculté des Sciences, Département de Physique, Boumerdès, Algeria*

[†]*LPMPs, Faculté des Sciences Exactes, Département de Physique, Université Mentouri Constantine, Algeria*

Abstract. A most simple paraextension of the Wess-Zumino model is investigated. As a parabosons-parafermions system, this model forms a field theoretical realization of a supersymmetric Poincaré algebra (SPA), where, the parasupercharges satisfy the bilinear commutations relations dictated by these types of systems. The closure of the transformations algebra is established with a bilinear product rule for the fermionic elements. Finally, we verify that these parasupercharges are really the generators of the (para)supersymmetric transformations.

Keywords: Supersymmetry, Parastatistics, Poincaré algebra

PACS: 11.30.Pb, 05.30.Pr, 11.60.Jv

INTRODUCTION

Generalized statistics and supersymmetry are two main interests of theoretical physics in recent years. They may be unified in what is called parasupersymmetry, which is a symmetry between bosons and parafermions. The parasupersymmetry structure will depend on the number P (the order of the paraquantization) of parafermions that can occupy the same state. Recently [1], a most immediate field theoretical realization of the parasupersymmetric Poincaré algebra (PSPA), bosons-parafermions extension of the Wess-Zumino (W-Z) model, without the context of the parasuperspace is investigated. Following the same procedure in [2] , we demonstrated by explicite calculation that the spinor parasupercharges Q of the theory, considered as linear operators in the Fock space, satisfy the cubic (PSPA): $QQQ \sim P_\mu$, where P_μ is the energy-impulsion quadrivector. The distinctive feature of the closure of the transformations is, like in [3], the occurrence of a trilinear product rule for the fermionic elements which is the translating of the $P = 2$ parasupersymmetric algebra (PSA). Unlike the ordinary bilinear case, this result imply that the three times repeated applications of the transformations on a field gives rise to a translation of the transformed field. This closure is reinforced by the verification that these parasupercharges are the effective generators of these transformations. The aim of this work is to investigate the parabosons-parafermions extension of the W-Z model. Despite that the parafields satisfy trilinear commutation relations, we show that this model form a field theoretical realisation of an ordinary (SPA), where,

¹ This work is supported by the Algerian Ministry of the Higher Education and Scientific Research under contract No.D1602/04/04.

as parabosons-parafermions systems, the parasupercharges satisfy the bilinear commutation relations: $QQ \sim P_\mu$ dictated by these types of systems. we verify the closure of the algebra and that the parasupercharges are the generators of the transformations constructed.

THE MODEL

Introducing (para)supersymmetry in the context of a simple four dimensional massive and free field theory : paraquantum version of the W-Z model, let us assume that the model possess one parafermion Ψ^α of order $P = 2$ which is a Majorana spinor, on shell, that is $(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi = 0$. Let us assume that the two degrees of freedom of the parafermion Ψ^α impose the introduction of two parabosonic degrees of freedom in order to form a realization of (para)supersymmetry. We introduce then one real scalar parafield A and one real pseudoscalar parafield B subject to $(\square + m^2)A = (\square + m^2)B = 0$. Here we assume that the mass dimension of the parafermion Ψ is, like in the ordinary case, always $3/2$ and of course the parafields A and B have the dimension 1. With an adequate symmetrization of the parafermionic and the parabosonic fields, the lagrangian density describing this simple system is given by

$$L = \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{4} \{(\partial_\mu A), (\partial^\mu A)\} + \frac{1}{4} \{(\partial_\mu B), (\partial^\mu B)\} - \frac{1}{4} m^2 \{A, A\} - \frac{1}{4} m^2 \{B, B\} \quad (1)$$

where all the parafields have the same mass m and $\bar{\Psi} = \Psi^T \gamma^0$. The plane wave expansions of the Majorana Ψ and the A and B parafields are given by :

$$\Psi^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3 p \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} (d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{ipx}) \quad (2)$$

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \left(\frac{1}{2\omega_p}\right)^{1/2} \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (3)$$

$$B(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \left(\frac{1}{2\omega_p}\right)^{1/2} \{b(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (4)$$

with the usual relations :

$$\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}, (\not{p} - m)u(\vec{p}, s) = (\not{p} + m)v(\vec{p}, s) = 0$$

The simplest (para)supersymmetry $P = 2$ theory dealing with para-bosonic and para-fermionic fields, having the same order as required when we want to ensure the validity of the mixed trilinear relations, is concerned with a pair of parafields characterized by well-defined structure relations which are distributed in two nonequivalent ways leading to the so-called relative para-Bose and relative para-Fermi sets after Greenberg-Messiah [4]. Let us adopt the first way :

$$\begin{aligned}
\left[\left\{ d(\vec{p}, s), a(\vec{p}') \right\}, a^+(\vec{k}) \right] &= 2\delta(\vec{p}' - \vec{k}) d(\vec{p}, s) \\
\left[\left\{ d(\vec{p}, s), a^+(\vec{k}) \right\}, a(\vec{p}') \right] &= -2\delta(\vec{p}' - \vec{k}) d(\vec{p}, s) \\
\left\{ \left\{ a(\vec{p}'), d^+(\vec{p}, s) \right\}, d(\vec{k}, l) \right\} &= 2\delta(\vec{p} - \vec{k}) a(\vec{p}') \\
\left\{ \left\{ a(\vec{p}'), d(\vec{k}, l) \right\}, d^+(\vec{p}, s) \right\} &= 2\delta(\vec{p} - \vec{k}) a(\vec{p}') \\
\left[\left\{ d(\vec{p}, s), a^+(\vec{p}') \right\}, a^+(\vec{k}) \right] &= \left[\left\{ d(\vec{p}, s), a(\vec{k}) \right\}, a(\vec{p}') \right] = 0 \\
\left\{ \left\{ a(\vec{p}'), d^+(\vec{p}, s) \right\}, d^+(\vec{k}, l) \right\} &= \left\{ \left\{ a(\vec{p}'), d(\vec{k}, l) \right\}, d(\vec{p}, s) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

It is clear that, in this case, the parasupercharge Q_a must check bilinear relations. This implies that the corresponding transformation parameter ε must check the ordinary Grassmann parameter relations and satisfy:

$$[\varepsilon_a, A] = [\varepsilon_a, B] = \{\varepsilon_a, \Psi_a\} = 0 \tag{6}$$

this leads us to the following transformations

$$\begin{aligned}
\delta\Psi &= -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma_5 B) \varepsilon \\
\delta\bar{\Psi} &= \bar{\varepsilon}(A - i\gamma_5 B)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \\
\delta A &= \bar{\varepsilon}\Psi, \delta B = -i\bar{\varepsilon}\gamma_5\Psi
\end{aligned} \tag{7}$$

Then, from the zero component of the (para)supersymmetry conserved Noether current density, one calculates the supercharge and obtains :

$$\begin{aligned}
Q_a &= \frac{i}{2}\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_s \int d^3p \left[\left\{ C_{a\alpha}(\vec{p}), d^+(\vec{p}, s) \right\} v_\alpha(\vec{p}, s) \right. \\
&\quad \left. - \left\{ D_{a\alpha}(\vec{p}), d(\vec{p}, s) \right\} u_\alpha(\vec{p}, s) \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

where

$$C_{a\alpha}(\vec{p}) = (a - i\gamma^5 b)_{a\alpha} \text{ and } D_{a\alpha}(\vec{p}) = (a^+ - i\gamma^5 b^+)_{a\alpha}$$

SUPERALGEBRA

In analogy with the parasupersymmetry of quantum mechanics, it is easy to see that the parasupercharge of a parabosons - parafermions W-Z model satisfy bilinear commutations relations. Indeed, by using the trilinear commutation relations (5) and choosing $\lambda = 2$, one obtains the algebra corresponding to the ordinary case of the W-Z model:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2P_\mu \gamma_{ab}^\mu \tag{9}$$

CLOSURE AND (PARA)SUPERSYMMETRY TRANSFORMATIONS

For the closure, it is clear here that, unlike the first model [1], the infinitesimal transformations close onto an algebra that involves bilinear ordinary relations. Indeed, since the parameters of the transformations even anticommute between them, therefore one can use the usual relations between the γ matrices and these parameters in addition to the equations of the parafield Ψ to obtain:

$$[\delta_1, \delta_2] \Psi_a = -2i(\bar{\varepsilon}_2 \gamma^\mu \varepsilon_1) \partial_\mu \Psi \quad (10)$$

Here, ε_1 and ε_2 are the parameters corresponding to the infinitesimal transformations δ_1 and δ_2 respectively. This describes a paraboson-parafermion supersymmetry analogue to the ordinary case ($P = 1$). In the same way, one finds the closure on the parabosons A and B .

Now, as in the first model [1], one can explicitly verify that the parasupercharges (8) are really the generators of the transformations. ε being an ordinary Grassmann parameter, and according to the precedent result, one can describe the transformations in the following way, where, by the use of (2), (5), (8), one can for example obtain the result :

$$\delta \Psi = i\bar{\varepsilon}^a \{Q_a, \Psi\} = - (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (A - i\gamma_5 B) \varepsilon \quad (11)$$

which represents the transformation of the parafield Ψ . In the same way, one finds the transformations of the parabosonic fields A and B .

CONCLUSION

In this work, we have investigated the most simple paraextension of the W-Z model. As a parabosons-parafermions system, this model forms a field theoretical realization of a SPA, where, the parasupercharges satisfy the bilinear commutations relations dictated by these types of systems. In supersymmetry theories, the extensions of the Poincaré algebra are obtained from a "square root" of the transformations, $QQ \sim P_\mu$. In [1, 3], new algebra are obtained from yet higher order roots "cubic roots" $QQQ \sim P_\mu$. On the other hand, this model is completely described by parafields of the same order $P = 2$. The results obtained confirm that the parabosons-parafermions supersymmetry of an arbitrary order P is equivalent to the ordinary supersymmetry.

REFERENCES

1. L. Maghlaoui and N. Belaloui: Bosons-Parafermions Wess-Zumino Model, non published.
2. H. J. W. Muller-Kirsten, Supersymmetry: An Introduction with Conceptual and Computational Details, World Scientific Publishing, 1987.
3. R. Floreanini and L. Vinet: Pararupersymmetry in quantum mechanics and field theory, Phys. Rev. D 44, 3851(1991).
4. O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah. Phys. Rev. B 138, 1155 (1965).

Bosons-Parafermions Wess-Zumino Model*

L. Maghlaoui¹ and N. Belaloui^{2†}

¹*Université M'hamed Bouguerra, Faculté des Sciences,
Département de Physique, Boumerdès, Algeria*

²*LPMPs, Faculté des Sciences Exactes,
Département de Physique,
Université Mentouri Constantine, Algeria*

Received 6 February 2008, Accepted 10 March 2008, Published 27 March 2008

Abstract: A Wess-Zumino model in terms of bosons and parafermions of order $p = 2$ is investigated. We show that the parasupercharges associated to the parasupersymmetric transformations satisfy the $p = 2$ trilinear relations. The closure of the transformations algebra is established with a trilinear product rule for the fermionic elements. Finally, we verify that these parasupercharges are really the generators of the parasupersymmetric transformations.

© Electronic Journal of Theoretical Physics. All rights reserved.

Keywords: Supersymmetry; Parastatistics; Poincaré Algebra

PACS (2006): 11.30.Pb; 12.60.Jv; 05.30.Pr; 12.60.Jv

1. Introduction

Generalized statistics first was proposed by H. S. Green in 1953 [1]. Known nowadays as paraquantization, it leads to two families of generalized statistics (parabose and parafermi statistics which include the ordinary bose and fermi statistics as particular cases) which are collectively called parastatistics [2].

A fundamental question is faced respect to a spin statistics theorem which assert that integer-spin fields can not be quantized with the help of anticommutators and half-integer-spin fields can not be quantized with the help of commutators [3, 4, 5]. In the literature, A. B. Gorokov [6] published a very nice review article of a generalized statistics which consist on a modern review of different aspects of generalized statistics and first of all the paraboson and parafermion systems. Indeed, as is mentioned in [6], all particles

* This work is supported by the Algerian Ministry of the Higher Education and Scientific Research under contract No. D2501/11/0 5.

† n_belaloui@yahoo.fr

which we consider to be elementary obey either bose or fermi statistics. This concerns both particles which are directly observable in our laboratories and those which can not. The reason expected for this general law of nature is hidden in deep properties of matter itself: identity and repeatability. The main idea of A. B. Govorkov [6] consist to adopt the fact that the invariance of the density matrix with respect to the permutation of all variables of identical particles as the starting definition of indistinguishability of the particles. Previously, some authors, Pauli [7], Dirac[8] and others have always underscored the possibility of describing the statistics of identical particles not only by means of symmetric and antisymmetric representations but also by multidimensional representations of the group of permutation of the coordinates and spin variables of particles, even it was proved [9] that it is impossible to establish commutation relations for operators corresponding to multidimensional representations of permutation groups. Afterwards, a theorem [10] came to reinforce the foregoing about the fact that the statistics of identical particles can be parafermi or parabose statistics. As a result of the starting definition of indistinguishability of the particles, the particles creation and annihilation operators obey to trilinear commutation relations. One principal result of this is the following [6]: Finite order parabose and parafermi statistics allow to put a definite number of particles in an antisymmetric state and a symmetric state, respectively, not exceeding a fixed number p , the so-called order of the paraquantization.

The physics of elementary particles is based on two main symmetries: Poincaré and internal symmetries. A symmetry different from all of these was brought to the attention of the particles physics community by Wess and Zumino, and goes by the name of supersymmetry, the Wess-Zumino [11, 12] model has allowed anticommutation relations of the generators of supersymmetry which transform bosons into fermions and vice versa.

Generalized statistics and supersymmetry may be unified in what is called parasupersymmetry, which is a symmetry between bosons and parafermions. The parasupersymmetry structure will of course depend on the number p of parafermions that can occupy the same state. The paraextension of the Wess-Zumino model in the formalism of the superspace is developed in [13], the aim of this work is to investigate the most immediate field theoretical realization of the parasuperPoincaré algebra without the context of the parasuperspace. Following the same procedure in [14], we demonstrate by explicit calculation that the spinor parasupercharges of the theory considered as linear operators in the Fock space satisfy the parasuperPoincaré algebra. We study the closure of the transformations algebra and verify that the parasupercharges constructed are the generators of the parasupersymmetry transformations considered.

2. The Model

Introducing parasupersymmetry in the context of a simple four dimensional massive and free field theory : paraquantum version of the Wess-Zumino model, let us assume that the model possess one parafermion Ψ^α of order $p = 2$ which is a Majorana spinor, on shell, that is $(i\partial_\mu\gamma^\mu\Psi - m) = 0$. Let us assume that the two degrees of freedom of

the parafermion Ψ^α impose the introduction of two bosonic degrees of freedom in order to form a realization of parasupersymmetry. We introduce then one ordinary real scalar field A and one ordinary real pseudoscalar field B subject to $(\square + m^2)A = (\square + m^2)B = 0$. Here we assume that the mass dimension of the parafermion Ψ is, like in the ordinary case, always $3/2$ and of course the ordinary fields A and B have the dimension 1. With an adequate symmetrization of the parafermionic field, the lagrangian density describing this simple system is given by :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \quad (1)$$

where all the fields have the same mass m . and $\bar{\Psi} = \Psi^T \gamma^0$. The basic commutation relations for the $p = 2$ parafermionic fields (at fixed time) are

$$\langle \Psi_i(\vec{x}, t) \bar{\Psi}_j(\vec{y}, t) \Psi_k(\vec{z}, t) \rangle = 2\delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ij} \Psi_k(\vec{z}, t) + 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \delta_{jk} \Psi_i(\vec{x}, t) \quad (2)$$

$$\langle \Psi_i(\vec{x}, t) \Psi_j(\vec{y}, t) \bar{\Psi}_k(\vec{z}, t) \rangle = 2\delta(\vec{y} - \vec{z}) \delta_{jk} \Psi_i(\vec{x}, t) \quad (3)$$

$$\langle \Psi_i(\vec{x}, t) \Psi_j(\vec{y}, t) \Psi_k(\vec{z}, t) \rangle = 0 \quad (4)$$

with the notation $\langle abc \rangle = abc + cba$. Those for the ordinary fields A and B are

$$[A(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (5)$$

$$[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = [A(\vec{x}, t), A(\vec{y}, t)] = 0 \quad (6)$$

$$[B(\vec{x}, t), \pi'(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7)$$

$$[\pi'(\vec{x}, t), \pi'(\vec{y}, t)] = [B(\vec{x}, t), B(\vec{y}, t)] = 0 \quad (8)$$

where

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A(\vec{x}, t))}, \pi'(\vec{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 B(\vec{x}, t))}$$

Furthermore, bosonic and parafermionic fields are taken to commute among themselves

$$[\Psi_i, A] = [\Psi_i, B] = [A, B] = 0$$

Now, the later development of this work necessitates the plane wave expansions of the Majorana parafield Ψ^α and the ordinary fields A and B which are given by

$$\Psi^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{\omega_p}\right)^{1/2} (d(\vec{p}, s) u_a(\vec{p}, s) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, s) v_a(\vec{p}, s) e^{ipx}) \quad (9)$$

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p}\right)^{1/2} \{a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (10)$$

$$B(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{1}{2\omega_p}\right)^{1/2} \{b(\vec{p}) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}) e^{ipx}\} \quad (11)$$

with the usual notations:

$$\begin{aligned}\omega_p &= (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \\ (\not{p} - m)u(\vec{p}, s) &= 0 \\ (\not{p} + m)v(\vec{p}, s) &= 0\end{aligned}$$

and where, in terms of the modes, the relations (2 – 8) are rewritten in the following forms:

$$\begin{aligned}\langle d(\vec{p}, s)d^+(\vec{k}, l)d(\vec{p}', r) \rangle &= 2\delta(\vec{p} - \vec{k})\delta_{ls}d(\vec{p}', r) \\ &\quad + 2\delta(\vec{p}' - \vec{k})\delta_{lr}d(\vec{p}, s)\end{aligned}\tag{12}$$

$$\langle d^+(\vec{p}, s)d^+(\vec{k}, l)d(\vec{p}', r) \rangle = 2\delta(\vec{p}' - \vec{k})\delta_{lr}d^+(\vec{p}, s)\tag{13}$$

$$\langle d(\vec{p}, s)d(\vec{k}, l)d(\vec{p}', r) \rangle = 0\tag{14}$$

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{k})] = [b(\vec{p}), b^+(\vec{k})] = \delta(\vec{p} - \vec{k})\tag{15}$$

$$\begin{aligned}[a(\vec{p}), a(\vec{k})] \\ &= [b(\vec{p}), b(\vec{k})] = [a(\vec{p}), d^+(\vec{k}, l)] \\ &= [a(\vec{p}), b(\vec{k})] = [b(\vec{p}), d^+(\vec{k}, l)] = 0\end{aligned}\tag{16}$$

3. Parasupersymmetry

3.1 Parasupersymmetric Transformations

We now investigate continuous transformations of the fields A , B and the parafield Ψ^α , which will be the parasupersymmetric transformations of the theory defined by (1). We are then led to verify that the action

$$\begin{aligned}S &= \int \left\{ \frac{1}{4} [\bar{\Psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi] + \frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} m^2 A^2 - \frac{1}{2} m^2 B^2 \right\} d^4x\end{aligned}\tag{17}$$

is left invariant. To do this, it suffices that, under these transformations, the free lagrangian density changes by a total derivative

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu\tag{18}$$

where J^μ is a conserved Noether parasupersymmetric current density. As in the ordinary Wess-Zumino model, let us consider the following variations which transform

parafermions and bosons into each other

$$\delta\Psi = (-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(A - i\gamma^5 B)\varepsilon \quad (19)$$

$$\delta\bar{\Psi} = \bar{\varepsilon}(A - i\gamma^5 B)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \quad (20)$$

$$\delta A = \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}, \Psi] \quad (21)$$

$$\delta B = \frac{-i}{2} [\bar{\varepsilon}, \gamma^5\Psi] \quad (22)$$

which are rewritten with an appropriate symmetrization of the product $\bar{\varepsilon}\Psi$ and where ε is a constant Majorana spinor. It is important to notice here that, by analogy with the ordinary supersymmetric case for which ε^α is anticommuting just like Ψ^α , here, we have to take the components ε^α as paraGrassmann which obey the algebra (specific to the order $p = 2$)

$$\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta\varepsilon^\gamma + \varepsilon^\gamma\varepsilon^\beta\varepsilon^\alpha = 0 \quad (23)$$

Note that this implies $(\varepsilon^\alpha)^3 = 0$. the components ε^α are then assumed to have non trivial commutations relations with the parafields Ψ^α

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, \Psi_i(\vec{x}, t)], \bar{\Psi}_j(\vec{y}, t)] = 2\bar{\varepsilon}^\alpha\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (24)$$

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, \Psi_i(\vec{x}, t)], \Psi_j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (25)$$

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, \Psi_i(\vec{x}, t)], \varepsilon^\beta] = 0 \quad (26)$$

and by analogy to the ordinary case, they are assumed to commute with A and B . One can rewrite the precedent relations as follows:

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, d(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l)] = 2\bar{\varepsilon}^\alpha\delta_{ls}\delta(\vec{p} - \vec{k}) \quad (27)$$

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, d(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l)] = 0 \quad (28)$$

$$[[\bar{\varepsilon}^\alpha, d(\vec{p}, s)], \varepsilon^\beta] = 0 \quad (29)$$

$$[a(\vec{p}), \varepsilon^\alpha] = [b(\vec{p}), \varepsilon^\alpha] = 0 \quad (30)$$

Let us now proceed to the evaluation of the Noether current J^μ . Computing the variation of the lagrangian by the use of the transformations(19 – 22) and the equations of motion of the fields, one can write

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \quad (31)$$

where

$$V^\mu = \frac{1}{4} [\bar{\varepsilon}, \partial^\mu (A - i\gamma^5 B) \Psi] \quad (32)$$

The conserved parasupercurrent J^μ is given by the relation

$$J^\mu = V^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\delta\phi_i \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta \phi_i \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A} \delta A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu B} \delta B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \delta \Psi \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\varepsilon}, \partial_\mu (A - i\gamma^5 B) \Psi] \\
&\quad - \frac{i}{4} [\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma^5 B), \varepsilon]
\end{aligned} \tag{34}$$

so that

$$J^\mu = \frac{i}{4} [\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(A - i\gamma^5 B), \varepsilon] \tag{35}$$

which can be noted as

$$J^\mu = \frac{1}{\lambda} [\bar{k}, \varepsilon]$$

where λ is a real constant which has to be determined.

3.2 Parasupersymmetric Algebra

Now, if this $p = 2$ extension of the Wess-Zumino model is a field theoretical realization of the parasupersymmetric algebra, the spinor parasupercharge

$$Q_a = \int d^3 \vec{x} k_a^o \tag{36}$$

must satisfy the commutation relations and the trilinear relations of a parasupersymmetric Poincaré algebra (in the sense of Debergh and Becker)

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{37}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = 0 \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i (\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}) \\
&\quad - i (-\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{39}$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_a] = -(\sigma_{\mu\nu}^4)_{ab} Q_b \tag{40}$$

$$[P_\mu, Q_a] = 0 \tag{41}$$

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 4Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle &= 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu \bar{Q}_c \\
&\quad + 4Q_a (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} P_\mu
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{Q}_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle &= 4\bar{Q}_a (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} P_\mu \\
&\quad + 4(c^{-1} \gamma^\mu)_{ab} P_\mu \bar{Q}_c
\end{aligned} \tag{44}$$

where

$$\sigma_{\mu\nu}^4 = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

and c is the charge conjugation matrix. In particular, let us show that the Q_a satisfy the $p = 2$ trilinear relation (42). To do this, we have to give a representation of the para-supercharges (36) as a linear operator acting on a Fock space defined by a fundamental state $|0\rangle$ satisfying

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0 \quad (45)$$

and

$$d(\vec{p}, s)d^+(\vec{k}, l)|0\rangle = 2\delta_{ls}\delta(\vec{p} - k)|0\rangle \quad (46)$$

$$d(\vec{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (47)$$

which fixes the order of the paraquantization $p = 2$. With the same calculation stapes as in [14] one can obtain these expressions for Q_a and \bar{Q}_a

$$Q_a = \frac{i\lambda}{2^{1/2}}m^{1/2}\sum_s \int d^3p(\{C(\vec{p})d^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s)\}_a - \{D(\vec{p})d(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)\}_a) \quad (48)$$

$$\bar{Q}_a = -\frac{i\lambda}{2^{1/2}}m^{1/2}\sum_s \int d^3p(\{\bar{v}(\vec{p}, s)d(\vec{p}, s)D(\vec{p})\}_a - \{\bar{u}(\vec{p}, s)d^+(\vec{p}, s)C(\vec{p})\}_a) \quad (49)$$

where

$$C(\vec{p}) = (a - i\gamma^5 b)$$

$$D(\vec{p}) = (a^+ - i\gamma^5 b^+)$$

By the use of the same steps of calculus in [14] in the context of the paraquantization by the use of the relations, one can show that (12-16):

$$\begin{aligned}
& \langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle \\
&= \int d^3p \frac{\lambda^2}{2} (\{a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p})\} \\
&+ \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)] \right\}) p_\mu \gamma_{ab}^\mu \\
&\left(\left\{ i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_r \int d^3p' C_{c\gamma}(\vec{p}') d^+(\vec{p}', r) v_\gamma(\vec{p}', r) \right\} \right. \\
&- \left. \left\{ i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_r \int d^3p' D_{c\gamma}(\vec{p}') d(\vec{p}', r) u_\gamma(\vec{p}', r) \right\} \right) \\
&+ i\lambda \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \sum_s \int d^3p (\{C_{a\alpha}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_\alpha(\vec{p}, s)\} \\
&- \{D_{a\alpha}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_\alpha(\vec{p}, s)\}) \\
&(\{ \int \frac{\lambda^2}{2} d^3p' [a^+(\vec{p}')a(\vec{p}') + b^+(\vec{p}')b(\vec{p}') + 1] \} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_r [d^+(\vec{p}', r), d(\vec{p}', r)] p_\mu \gamma_{cb}^\mu \right\}) \\
&+ R_1
\end{aligned} \tag{50}$$

where, again by the use of the symmetry properties, the contribution of the terms proportional to $(\gamma^\mu \gamma^5)_{ab}$ in R_1 vanishes so that:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} C_{\beta b} \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\
&[d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) - d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) \\
&d^+(\vec{p}, s)] - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3p \int d^3k p_\mu (\gamma^\mu c)_{ac} \\
&D_{\beta b} \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) [d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) \\
&- d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s)]
\end{aligned}$$

In the other hand, one can prove that the energy momentum takes the form

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3p (\{a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + b^+(\vec{p})b(\vec{p}) + 1\} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_s [d^+(\vec{p}, s), d(\vec{p}, s)] \right\}) p_\mu
\end{aligned}$$

so that, the relation (50) can be rewritten in the form

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = \frac{1}{2} \lambda^2 P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + \frac{1}{2} \lambda^2 Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu + R_1$$

Thus if we choose $\lambda = (2)^{3/2}$, we obtain

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 4Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu + R_1 \quad (51)$$

a straightforward calculation permits to verify that

$$[Q_a, P_\mu] = 0 \quad (52)$$

Clearly, from the relations (51), (52), R_1 must also be conserved, in fact, one can verify that

$$[R_1, P_\mu] = 0$$

Now, and like in the work of [15], since in general R_1 is non zero, the parasupersymmetric algebra (51) is complicated. A choice of a vacuum state analogous to (42) would reduce it to

$$\langle Q_a, \bar{Q}_b, Q_c \rangle = 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu Q_c + 4Q_a P_\mu \gamma_{cb}^\mu$$

since in the corresponding Fock space, R_1 is represented by the null operator.

Now, in the same way, one obtain

$$\begin{aligned} \langle Q_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle &= 4P_\mu \gamma_{ab}^\mu \bar{Q}_c + 4Q_a (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} P_\mu + R_2 \\ \langle \bar{Q}_a, \bar{Q}_b, \bar{Q}_c \rangle &= 4\bar{Q}_a (c^{-1} \gamma^\mu)_{bc} P_\mu + 4(c^{-1} \gamma^\mu)_{ab} P_\mu \bar{Q}_c + R_3 \end{aligned}$$

Where

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu)_{ac} C_{\beta b} \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\ &[d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) - d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) \\ &d(\vec{p}, s)] - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu)_{ac} \\ &D_{\beta b} \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \\ &- d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s)] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_3 &= - \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu c^{-1})_{ac} C_{\beta b} \bar{u}_\beta(\vec{k}, l) \\ &[d(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s) - d^+(\vec{p}, s) d^+(\vec{k}, l) \\ &d(\vec{p}, s)] + \sum_{ls} \frac{i}{16} \lambda^3 \int d^3 p \int d^3 k p_\mu (\gamma^\mu c^{-1})_{ac} \\ &D_{\beta b} \bar{v}_\beta(\vec{k}, l) [d^+(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d(\vec{p}, s) \\ &- d(\vec{p}, s) d(\vec{k}, l) d^+(\vec{p}, s)] \end{aligned}$$

Which, as in the case of R_1 , are again represented by the null operators in the Fock space.

4. Closure

Notice that, to the trilinear nature of the parasupercharge algebra (42 – 44) correspond the fact that the infinitesimal transformations(19 – 22) must close onto an algebra that involves trilinear relations. Indeed, let us calculate the term

$$\begin{aligned}\delta_3\delta_2\delta_1A &= -\frac{i}{4}\gamma_{ab}^\mu [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^b] [\bar{\varepsilon}_3^c, \partial_\mu \Psi^c] \\ &+ \frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^5)_{ab} \gamma_{c\alpha}^5 [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^b] [\bar{\varepsilon}_3^c, \partial_\mu \Psi^\alpha]\end{aligned}$$

using the properties of the paraGrassmann ε^α one finds:

$$\begin{aligned}\delta_3\delta_2\delta_1A &= \partial_\mu \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c, \Psi^\alpha \right] \right. \\ &+ \left. \left[\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_{c\alpha}^5, \Psi^\alpha \right] \right) \\ &\partial_\mu \frac{1}{2} \left(\left[\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^a] \bar{\varepsilon}_3^b \gamma_{b\alpha}^\mu, \Psi^\alpha \right] \right. \\ &- \left. \left[\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c (\gamma^5\gamma^\mu)_{c\alpha}, \Psi^\alpha \right] \right)\end{aligned}$$

which can be rewritten as

$$\delta_3\delta_2\delta_1A = \partial_\mu \delta_{\bar{\theta}} A$$

where the subscript $\bar{\theta}$ of the transformation δ is given by

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= -\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_{c\alpha}^5 \\ &+ \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^a] \bar{\varepsilon}_3^b \gamma_{b\alpha}^\mu - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c (\gamma^5\gamma^\mu)_{c\alpha}\end{aligned}$$

Finally, the closure of the transformations algebra takes the form

$$(\delta_3\delta_2\delta_1 + \delta_1\delta_3\delta_2 + \delta_2\delta_1\delta_3)A = \partial_\mu \delta_{\bar{\zeta}^\mu} A \quad (53)$$

where

$$\begin{aligned}(\bar{\zeta}^\mu)^\alpha &= -\frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c \gamma_c^{5\alpha} \\ &- \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_2^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_3^b] \bar{\varepsilon}_1^c + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_2^a (\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_3^b] \bar{\varepsilon}_1^c \gamma_c^{5\alpha} \\ &- \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a \gamma_{ab}^\mu, \varepsilon_1^b] \bar{\varepsilon}_2^c + \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a (\gamma^\mu\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_1^b] \bar{\varepsilon}_2^c \gamma_c^{5\alpha} \\ &+ \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a, \varepsilon_2^a] \bar{\varepsilon}_3^b \gamma_{b\alpha}^\mu - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_1^a (\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_3^c (\gamma^5\gamma^\mu)_{c\alpha} \\ &+ \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a, \varepsilon_1^a] \bar{\varepsilon}_2^b \gamma_{b\alpha}^\mu - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a (\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_1^b] \bar{\varepsilon}_2^c (\gamma^5\gamma^\mu)_{c\alpha} \\ &+ \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a, \varepsilon_2^a] \bar{\varepsilon}_1^b \gamma_{b\alpha}^\mu - \frac{i}{2} [\bar{\varepsilon}_3^a (\gamma^5)_{ab}, \varepsilon_2^b] \bar{\varepsilon}_1^c (\gamma^5\gamma^\mu)_{c\alpha}\end{aligned}$$

Analogous relations for B and Ψ^α with the same parameter $\bar{\zeta}$ are derived. One can see that the algebra (42 – 44) is nothing other than the Hamiltonian rewriting of (53). Their distinctive feature is the occurrence of a trilinear product rule for the fermionic elements which is the translating of a $p = 2$ parasuperalgebra.

5. Generators of the Parasupersymmetric Transformations

Now that the required transformations are derived, one is tempted to seek whether the spinor parasupercharge Q_a defined by (48) gives the correct parasupersymmetric transformations (19 – 22) of the fields $A(x)$, $B(x)$ and $\Psi^\alpha(x)$. Indeed, it is easy to check that Q_a generates (19 – 22) through the relation :

$$\delta\phi = i [[\bar{\varepsilon}, Q], \phi]$$

where ϕ stands for the fields $A(x)$, $B(x)$ or the parafield $\Psi^\alpha(x)$.

a- Calculation of $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A]$

By inserting into the trilinear commutator the Fourier expansions obtained earlier for the relevant quantities, one can write :

$$\begin{aligned} & -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] \\ &= -i [[\bar{\varepsilon}_a, \frac{i}{2} \sum_s \int d^3p \{ C_{ab}(\vec{p}) d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) \} \\ & \quad - \{ D_{ab}(\vec{p}) d(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s) \}]] \\ & \quad , \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} d^3k \{ a(\vec{k}) e^{ikx} + a^+(\vec{k}) e^{-ikx} \}] \end{aligned}$$

which is simplified as follows

$$\begin{aligned} & -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] \\ &= \frac{1}{2} \sum_s \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(\frac{1}{2\omega_k} \right)^{1/2} d^3k \\ & \quad ([\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s)] [C_{ab}(\vec{p}), a^+(\vec{k})] e^{-ikx} \\ & \quad - [\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s)] [D_{ab}(\vec{p}), a(\vec{k})] e^{ikx}) \end{aligned}$$

by the use of

$$\begin{aligned} [C_{ab}(\vec{p}), a^+(\vec{k})] &= \delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ab} \\ [D_{ab}(\vec{p}), a(\vec{k})] &= -\delta(\vec{p} - \vec{k}) \delta_{ab} \end{aligned}$$

and, working out the integral over k one finds

$$-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], A] = \frac{1}{2} [\bar{\varepsilon}_a, \Psi_a] = \delta A$$

in the same way, the use of the relations

$$\begin{aligned} [C_{ab}(\vec{p}), b^+(\vec{k})] &= -i\gamma_{ab}^5 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\ [D_{ab}(\vec{p}), b(\vec{k})] &= i\gamma_{ab}^5 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \end{aligned}$$

leads to :

$$-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], B] = \delta B$$

b-Calculation of $-i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b]$

One can write:

$$\begin{aligned}
 & -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] = \\
 & \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int d^3p \int \left(\frac{m}{2\omega_k} \right)^{1/2} d^3k \\
 & \{ [[\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l)] C_{ac}(\vec{p}) v_c(\vec{p}, s) \\
 & u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} + [[\bar{\varepsilon}_a, d^+(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l)] C_{ac}(\vec{p}) \\
 & v_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} - [[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d(\vec{k}, l)] \\
 & D_{ac}(\vec{p}) u_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} \\
 & - [[\bar{\varepsilon}_a, d(\vec{p}, s)], d^+(\vec{k}, l)] D_{ac}(\vec{p}) \\
 & u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \}
 \end{aligned}$$

Using (27) and (28), one finds

$$\begin{aligned}
 -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s,l} \int d^3p \int d^3k \left(\frac{m}{2\omega_k} \right)^{1/2} \\
 & \{ 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \bar{\varepsilon}_a C_{ac}(\vec{p}) v_c(\vec{p}, s) \\
 & u_b(\vec{k}, l) e^{-ikx} - 2\delta_{ls} \delta(\vec{p} - \vec{k}) \bar{\varepsilon}_a \\
 & D_{ac}(\vec{p}) u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{k}, l) e^{ikx} \}
 \end{aligned}$$

the relations

$$\begin{aligned}
 \sum_s u_c(\vec{p}, s) v_b(\vec{p}, s) &= \left(\frac{\not{p} + m}{2m} c \right)_{cb} \\
 \sum_s v_c(\vec{p}, s) u_b(\vec{p}, s) &= \left(\frac{\not{p} - m}{2m} c \right)_{cb}
 \end{aligned}$$

lead to

$$\begin{aligned}
 -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \{ \bar{\varepsilon}_a C_{ac}(\vec{p}) \left(\frac{\not{p} + m}{2m} c \right)_{cb} \\
 & e^{-ipx} - \bar{\varepsilon}_a D_{ac}(\vec{p}) \left(\frac{\not{p} - m}{2m} c \right)_{cb} e^{ipx} \}
 \end{aligned}$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned}
 -i [[\bar{\varepsilon}_a, Q_a], \Psi_b] &= -i \gamma_{ba}^\mu \varepsilon_a \partial_\mu A + (\gamma^\mu \gamma^5)_{ba} \varepsilon_a \partial_\mu B \\
 &= \delta \Psi_b
 \end{aligned}$$

Conclusion

In this work, we have investigated the most simple paraextension of the Wess-Zumino model outside the parasuperspace formalism. This model forms a field theoretical realization of the parasuperPoincaré algebra, where, as a bosons-parafermions system, the

parasupercharges of this model satisfy the trilinear commutations relations dictated by these types of systems.

The distinctive feature of the closure is the occurrence of a trilinear product rule for the fermionic elements which is the translating of the $p = 2$ parasuperalgebra. Unlike the ordinary bilinear case, this result imply that the three times repeated applications of the transformations on a field gives rise to a translation of the transformed field. This closure is reinforced by the verification that these parasupercharges are the effective generators of these transformations.

References

- [1] H. S. Green, A Generalized Method of Field Quantization, *Phys. Rev.* **90**, 270, (1953).
- [2] Y. Ohnuki, S. Kamefichi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, Springer-Verlag, New York, (1982).
- [3] A. B. Govorkov, *Teor. Matem. Fiz.*, **85**, 222, (1990).
- [4] N. Burgoyne, *Nuovo Cimento*, **8**, 604 ,(1958).
- [5] G. Luder and B. Zumino, *Phys. Rev.*, **110**, 1450, (1958).
- [6] A. B. Govorkov. *Phys. Part. Nucl.*, **24** (5), September-October, (1993).
- [7] W. Pauli, *Wave Mechanics*, MIT Press, Cambridge, MA, (1973).
- [8] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, N. Y., Oxford, (1987).
- [9] S. Kamefuchi and Y. Takahashi, *Nucl. Phys.*, **36**, 177, (1962).
- [10] J. B. Hartle and J. R. Taylor, *Phys. Rev.*, **178**,2043, (1969), J. B. Hartle, R. H. Stolt and J. B. Taylor, *Phys. Rev.*, **D2**, 1759, (1970), R. H. Stolt and J. R. Taylor, *Nucl. Phys. B.*, **19**, 1 (1970); *Nuovo Cimento A* **5**, 185, (1971).
- [11] J. Wess and B. Zumino, Supergauge Transformations in Four Dimensions, *Nucl. Phys.*, **B70**, 39, (1974).
- [12] J. Wess and B. Zumino, A Lagrangian Model Invariant under Supergauge Transformations, *Phys. Lett.*, **49B**, 52, (1974).
- [13] J. Beckers and N. Debergh, Poincaré Invariance and Quantum Parasuperfields, *In. J. of Mod. Phys. A*, **8**, No. 28 (1993) 5041-5061, A. G. Nikitin and A. V. Galkin, *Nucl. Phys. B.* **102**, 322-327, (2001).
- [14] H. J. W. Muller-Kirsten, *Supersymmetry: An Introduction with Conceptual and Computational Details*, World Scientific Publishing, (1987).
- [15] R. Floreanini and L. Vinet: Pararupersymmetry in quantum mechanics and field theory, *Phys. Rev. D*, **44**, 3851, (1991).

Résumé

L'objet de cette thèse est

D'une part, l'étude de modèles supersymétriques dans le formalisme de la paraquantification. Les résultats essentiels obtenus sont

A la différence du cas ordinaire, les différentes définitions du modèle de Rubakov- Spiridonov pour $N=1$ et $N=2$ parasupersymétrique ne sont plus équivalentes alors que Les modèles de Khare et Fahkri (à l'ordre P) le sont, sous réserve de certaines conditions

Le modèle bosonique-parafermionique de Wess-Zumino correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré parasupersymétrique. La fermeture de l'algèbre se distingue par la règle du produit cubique pour les éléments fermioniques qui est bien la traduction de la parasuperalgèbre à l'ordre $P=2$. L'application trois fois répétée de transformations sur un champ donne une translation sur le transformé du champ. Notons cependant que dans ce cas, aucun no-go-theorem associé à ce type de système n'a été considéré

Le modèle parabosonique-parafermionique de Wess-Zumino - correspond à une réalisation en théorie de champ de l'algèbre de Poincaré supersymétrique ordinaire traduisant ainsi le no-go-theorem

D'autre part, l'étude des conséquences de l'extension pseudo-complexe de la relativité générale à travers celle de la métrique de Robertson-Walker. Elle se traduit par une contribution au tenseur moment-énergie et correspond à l'énergie noire pouvant varier avec le rayon de l'univers

Mots clés: supersymétrie, paraquantification, relativité générale pseudo-complexe