

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTERE DE  
L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

*T H E S E*

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat d'Etat

En Physique Energétique

PAR

DJEZZAR MAHFOUD

THEME

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA CONVECTION  
NATURELLE, DANS DIFFERENTS ESPACES  
ANNULAIRES ELLIPTIQUES CONFOCAUX , SOUMIS  
A DIFFERENTES CONDITIONS DE CHAUFFAGE**

Dirigée par Mr. MICHEL DAGUENET

Professeur émérite à l'Université de Perpignan

Soutenue le : 24 septembre 2005

Devant le jury :

Président :	Mr	L. Bahi	Professeur	Université Mentouri Constantine
Co-Rapporteur :	Mr	M. Afrid	Professeur	Université Mentouri Constantine
Examineurs :	Mr	M. Belhamel	Professeur	CDER Alger
	Mr	B. Benyoucef	Professeur	Université de Tlemcen
	Mr	N. Chaabane Sari	Professeur	Université de Tlemcen
	Mme	A. Chaker	M.C	Université Mentouri Constantine

**A** la mémoire de mes parents.

**A** la mémoire de ma nièce, Imane,  
qu'elle repose en paix à côté de ses grands parents.

**A** mon épouse, qui sans sa grande patience,  
ce travail n'aurait pas pu se concrétiser.

**A** mes enfants chéris, Mohamed et Lyna Yasmine.

**A** tous les membres de ma famille, grands et petits.

**A** tous mes amis.

## AVANT-PROPOS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur MICHEL DAGUENET, Directeur du laboratoire de Thermodynamique et Energétique de l'Université de Perpignan qui, en m'accueillant dans son laboratoire, durant mes stages de recherches, pour diriger mes travaux de Thèse, n'a cessé de me prodiguer ses conseils et de me faire confiance. Sous sa direction, j'ai pu bénéficier de ses connaissances et de son expérience et apprécier ses qualités humaines.

Monsieur Afrid Mohamed, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, a bien voulu, suivre mon travail, et m'orienter, malgré ses nombreuses occupations, qu'il trouve ici, l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Je remercie aussi Monsieur Bahi Lakhdar, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine qui a bien voulu présider mon jury de thèse.

Messieurs Belhamel Maïouf Professeur au CDER Alger, Benyoucef Boumédiene et Chaâbane Sari Nasreddine Professeurs à l'Université de Tlemcen, et Madame Chaker Abla, Maître de Conférences à l'Université Mentouri de Constantine, m'ont fait l'honneur d'examiner ce mémoire et de participer à mon jury de Thèse, malgré leurs nombreuses occupations, je leur adresse mes sincères remerciements.

Je remercie cordialement les membres du laboratoire de Thermodynamique et Energétique de l'Université de Perpignan qui, durant mon travail, m'ont témoigné leur sympathie et m'ont encouragé, ainsi que tous mes collègues du département de Physique de l'Université Mentouri de Constantine qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## Nomenclature

### Lettres latines :

$A_1, A_2$	grands axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m)
$a$	constante définie dans le système de coordonnées elliptiques, (distance aux pôles)
$B_1, B_2$	petits axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m)
$c_p$	chaleur massique à pression constante. ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )
$e_1$	excentricité de l'ellipse interne. $e_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 - B_1^2}}{A_1}$
$e_2$	excentricité de l'ellipse externe. $e_2 = \frac{\sqrt{A_2^2 - B_2^2}}{A_2}$
$\vec{g}$	accélération de la pesanteur. ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
$Gr$	nombre de Grashof défini par $Gr = \frac{g\beta a^3}{\nu^2} \Delta T$ .
$Gr_m$	nombre de Grashof modifié défini par $Gr_m = \frac{g\beta a^4}{\lambda \nu^2} q$ .
$h$	coefficient métrique défini dans la relation 1.15.
$Nu$	nombre de Nusselt local.
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen.
$P$	tenseur des contraintes.
$P$	pression au sein du fluide. (at)
$Pr$	nombre de Prandtl défini par $Pr = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}$ .
$q$	densité de flux de chaleur. ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )
$S_\Phi$	Terme de source figurant dans l'équation 2.1.
$T$	température du fluide. (K)
$T_1$	température du cylindre elliptique intérieur. (K)
$T_2$	température du cylindre elliptique extérieur. (K)
$T_d$	écart de température $T_d = T - T_2$ . (K)

$\Delta T$	écart de température $\Delta T = T_1 - T_2$ . (K)
t	temps. (s)
$V_\eta, V_\theta$	composantes de la vitesse suivant $\eta$ et $\theta$ . ( $m \cdot s^{-1}$ )
$\vec{V}$	vecteur vitesse. ( $m \cdot s^{-1}$ )
x,y,z	coordonnées cartésiennes. (m)

### Lettres grecques :

$\alpha$	angle d'inclinaison. ( $^\circ$ )
$\beta$	coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\Gamma_\phi$	coefficient de diffusion figurant dans l'équation 2.1.
$\lambda$	conductivité thermique du fluide. ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ )
$\nu$	viscosité cinématique. ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\rho$	masse volumique du fluide. ( $kg \cdot m^{-3}$ )
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses.
$\eta, \theta, z$	coordonnées elliptiques.
$\psi$	fonction de courant. ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )
$\phi$	fonction générale figurant dans l'équation 2.1.

### Exposants

\* paramètres adimensionnels.

### Indices

i	intérieur.
e	extérieur.
$\eta$	Suivant la coordonnée $\eta$
$\theta$	Suivant la coordonnée $\theta$

# SOMMAIRE

DEDICACES	
AVANT-PROPOS	
NOMENCLATURE	
SOMMAIRE	
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 - ANALYSE THEORIQUE	4
1.1 Description du problème	4
1.2 Hypothèses simplificatrices	5
1.3 Equations relatives à l'écoulement	5
1.3.1 Formulation vectorielle du problème	6
1.3.2 Formulation indicielle	6
1.3.3 Formulation des équations dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées elliptiques)	7
1.3.4 Formulation des conditions aux limites	10
1.4 Adimensionnalisation	10
1.4.1 Equations adimensionnelles	11
1.4.2 Formulation des conditions aux limites adimensionnelle	12
1.5 Coefficients d'échange de la chaleur	13
1.5.1 Valeur locale du nombre de Nusselt	13
1.5.2 Nombre de Nusselt moyen	13
CHAPITRE 2 - FORMULATION NUMERIQUE	14
2.1 Introduction.	14
2.2 Méthode de résolution numérique	14
2.2.1 Volume élémentaire d'intégration	15
2.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle	16
2.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$	20

2.5	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\theta$	23
2.6	Discrétisation de l'équation de l'énergie :	25
2.7	Discrétisation des conditions aux limites :	26
2.8	Equation de discrétisation de la pression	27
2.9	L'algorithme SIMPLER	28
2.10	Méthode de résolution	29
2.11	Contrôle de la convergence	29
	CHAPITRE 3 - RESULTATS NUMERIQUES	30
3.1	Introduction	30
3.2	Maillage	30
3.3	Comparaison de résultats issus de ce code de calcul avec des résultats de la littérature	31
3.4	Cas de la paroi interne isotherme - Première Partie	32
3.4.1	Influence du nombre de Grashof	32
3.4.1.1	Nombre de Nusselt local	40
3.4.1.2	Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local – isothermes et isocourants.	40
3.4.1.3	Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique intérieur	42
3.4.1.4	Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique extérieur	43
3.4.1.5	Nombre de Nusselt moyen	43
3.4.2	Effet de la variation de l'angle d'inclinaison $\alpha$ .	44
3.4.2.1	Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha$ est nul.	44
3.4.2.2	Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha \neq 0^\circ$ et $\alpha \neq 90^\circ$	45
3.4.2.3	Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha = 90^\circ$	45
3.4.2.4	Nombre de Nusselt local et moyen	50
3.4.3	Influence de l'excentricité du cylindre elliptique interne.	52
3.4.3.1	Nombre de Nusselt local	56
3.5	Cas de la paroi interne isotherme soumise à une densité de flux de	56

	chaleur constante - Deuxième Partie	
3.5.1	Influence du nombre de Grashof modifié	56
3.5.2	Variation de la température adimensionnelle sur la paroi	58
3.5.3	Influence de l'angle d'inclinaison $\alpha$	58
3.6	Cas d'un chauffage mixte pour la paroi interne – Troisième partie	60
	CONCLUSION	62
	ANNEXES	
	ANNEXE 1 : EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	64
	ANNEXE 2 : COORDONNEES ELLIPTIQUES	81
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	88

## Introduction

La convection naturelle dans des enceintes fermées a fait l'objet de multiples travaux, étant donné son implication dans nombre de phénomènes naturels et de processus industriels. On peut classer les références suivant leur caractère expérimental [1-16], théorique [17,18] ou numérique [5, 8, 9, 19-21, 16]. Dans ce dernier cas, les équations résolues sont stationnaires [8, 9, 11-14, 22-24] ou instationnaires [2-5, 13, 17, 21, 32-39] et l'espace bidimensionnel [2, 4, 8-14, 16, 21, 23-36, 38-44] ou tridimensionnel [14, 40, 45]. Les méthodes de résolution font appel aux différences finies [4,12, 17, 22, 23, 32-36, 38, 39, 42-44], aux volumes finis [28, 30] ou aux éléments finis [39-52]. La géométrie des enceintes, très variée, est parallélépipédique [1-3, 32-36, 40,41,70], cylindrique [4, 17, 37, 71, 72], sphérique [5], ellipsoïdale [73] ou bien encore se présente sous forme d'anneaux cylindriques [7, 8, 12, 13, 15, 18, 19, 22, 38, 43, 72-78], sphériques [6, 9, 10, 15, 20, 38, 43, 48, 74-80] et elliptiques [24-31]. On trouve aussi des enceintes en forme de calotte [88], de lunule [89] ou de secteurs annulaires cylindriques [90]. Des corrélations donnant les nombres de Nusselt ou de Sherwood sont parfois proposées [18].

L'exploration des "routes vers le chaos", récemment, a donc renforcé l'intérêt de la convection naturelle dans les enceintes fermées aux grandes valeurs du nombre de Grashof (ou de Rayleigh) et dans beaucoup de travaux, les auteurs s'intéressent à la structure de l'écoulement : monocellulaire ou multicellulaire [90-100]. Dans cette optique, la "capture" des écoulements multicellulaires est souvent un objectif. Si l'enceinte oppose au mouvement du fluide des rétrécissements suffisamment prononcés, même aux faibles valeurs du nombre de Grashof, il est souvent possible d'observer des écoulements multicellulaires. Dans ce cas, une augmentation de ce nombre, c'est-à-dire une intensification de la convection naturelle, doit pouvoir entraîner, selon la géométrie des parois et la viscosité du fluide, la création de tourbillons.

Dans la simulation numérique de la convection naturelle dans des espaces annulaires elliptiques, les méthodes des différences finies, volumes finis et les éléments finis sont souvent employées avec la formulation vorticité-fonction de

courant. Par exemple, les travaux [4, 12, 17, 22, 23, 32-36, 38, 39, 42-44] ont été conduits par la méthode des différences finies et [39-68] ont utilisé la méthode des éléments finis, cependant [28, 30] ont employé la méthode des volumes finis, et dans [29] le transfert de la chaleur par convection naturelle a été simulé en utilisant la méthode de la quadrature différentielle (DQ).

Dans ce travail nous utilisons un nouveau code de calcul aux volumes finis [61-63] qui emploie les coordonnées elliptiques et les fonctions primitives (la formulation vitesse-pression), associé au traditionnel algorithme SIMPLER [61, 63], afin de résoudre les équations gouvernant la convection naturelle dans notre espace annulaire elliptique.

En introduction générale nous présentons une étude bibliographique.

Dans le premier chapitre, nous décrivons le problème, précisons les hypothèses simplificatrices, formulons les équations à résoudre et présentons une analyse théorique utilisant les coordonnées elliptiques bien adaptées à la géométrie du système.

Le deuxième chapitre est consacré à l'exposé de la méthode numérique de résolution choisie et la discrétisation des équations.

Les résultats des calculs sont rassemblés dans le troisième chapitre. Nous déterminons les distributions de la température et de la fonction de courant dans le fluide supposé newtonien, dont nous fixons le nombre de Prandtl à 0.7 (cas de l'air), mais nous faisons varier le nombre de Grashof (Rayleigh). Nous voulons donc répondre à la question évoquée précédemment, à savoir : L'intensification de la convection peut-elle influencer sur le nombre de tourbillons ? Selon la géométrie de notre système, et les conditions thermiques pariétales. C'est à dire faire apparaître ou disparaître des tourbillons en agissant sur la géométrie ou les conditions thermiques pariétales de l'enceinte. Pour cela, nous considérons une enceinte annulaire délimitée par les parois de deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux: selon la valeur de l'excentricité du cylindre elliptique intérieur ou bien l'inclinaison des deux cylindres elliptiques d'un angle  $\alpha$  donné par rapport à la

verticale, un tel système permet, en effet, d'obtenir un très grand nombre de configurations.

Pour chacune de ces configurations dont certaines présentent un intérêt pratique (Stockage, Isolation, Energétique solaire), nous calculons d'abord les nombres de Nusselt locaux, dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des lignes de courant, nous déterminons aussi les nombres de Nusselt moyens sur les parois et nous étudions leurs variations en fonction des paramètres, notamment en fonction du nombre de Grashof (Rayleigh).

Pour ne pas alourdir le texte, nous renvoyons en annexes la formulation des équations de base de la mécanique des fluides en variables primitives dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales et des compléments de mathématique.

# Chapitre 1

## Analyse théorique

### 1.1 Description du problème

Considérons un espace annulaire, rempli d'un fluide newtonien en l'occurrence de l'air, situé entre deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux. La figure 1.1 représente une section droite du système.

Pour le premier cas de chauffage, les deux parois interne et externe sont isothermes maintenues respectivement aux températures  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$ .

Pour le deuxième cas de chauffage, la paroi externe étant maintenue toujours isotherme à la température  $T_2$ , la paroi interne est traversée par une densité de flux de chaleur constante  $q$ .

Pour le troisième cas de chauffage, la paroi externe étant maintenue toujours isotherme à la température  $T_2$  et la paroi interne sera chauffée différemment en deux parties, sa moitié supérieure quand l'inclinaison du système est nulle, est maintenue toujours isotherme à la température  $T_1$  et la moitié inférieure est traversée par une densité de flux de chaleur constante  $q$ .

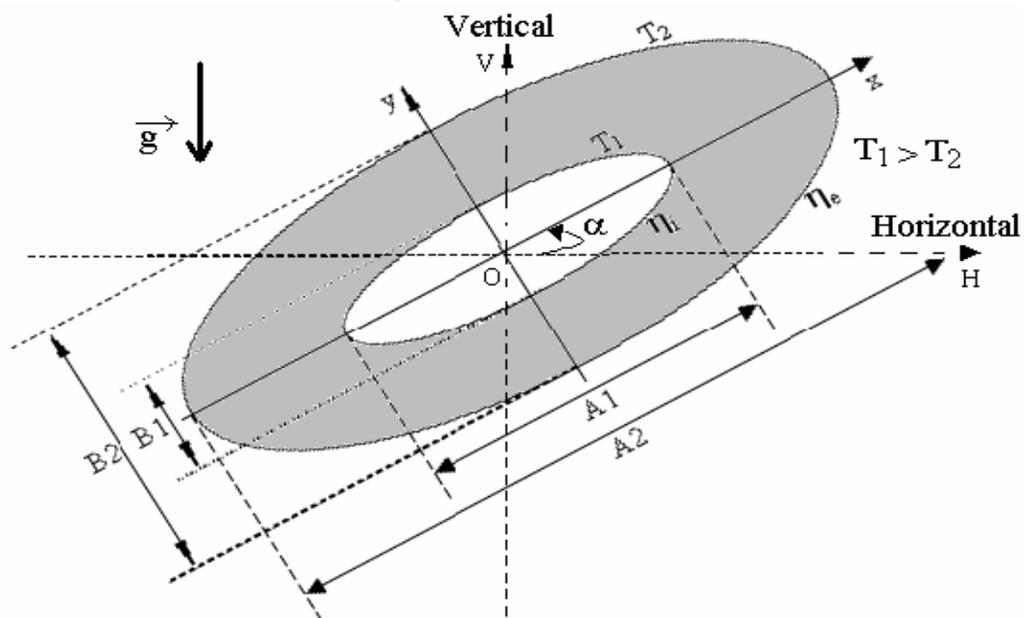


Fig. 1.1 Section droite du système

Dans les trois cas, il se produit, dans l'enceinte une convection naturelle que nous nous proposons d'étudier numériquement.

## 1.2 Hypothèses simplificatrices

En premier lieu, nous considérons **un écoulement de fluide incompressible**, à propriétés physiques constantes et par ailleurs nous supposons être dans le cadre de **l'approximation de Boussinesq**. Celle-ci consiste à considérer les variations de la masse volumique  $\rho$  négligeables au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec la température, supposées linéaires, engendrent la convection naturelle. Ces variations sont alors traduites par une équation d'état qui relie la masse volumique à la température.

L'équation d'état est donc :

$$\rho = \rho(P, T) = \rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1.1)$$

où :  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique (constant).

$\rho_0$  est la masse volumique de référence (constante).

$T_0$  est la température de référence (constante) associée à  $\rho_0$ .

Au niveau de tous les autres termes, la masse volumique est constante et égale à  $\rho_0$ .

La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligeables dans l'équation de la chaleur, le rayonnement n'est pas pris en considération (les propriétés émissives des deux parois étant négligées).

Nous admettons que le problème est bidimensionnel, permanent et laminaire.

## 1.3 Equations relatives à l'écoulement

Les relations nécessaires pour prédire l'évolution d'un écoulement monophasique au sein d'une géométrie donnée sont déduites des principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les variables qui en découlent dans le cas le plus général sont : les trois composantes de la vitesse  $V_i$ , la pression  $P$  et la température  $T$  du fluide. Ces variables sont toutes fonctions des coordonnées de l'espace et du temps ( $\Phi(x_i, t)$ ).

Pour ne pas alourdir le texte les détails sur les différentes étapes de constitution de ces équations sont exposés dans l'annexe 1.

### 1.3.1 Formulation vectorielle

- Equation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1.2)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \operatorname{grad}) \vec{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (1.3)$$

- Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \operatorname{grad}) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T \quad (1.4)$$

avec :

- $\rho, \lambda$  : masse volumique et conductivité thermique du fluide.
- $c_p$  : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.
- $P$  : tenseur des contraintes.
- $\vec{V}, \vec{g}$  : vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.

### 1.3.2 Formulation indicielle

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (1.5)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i \quad (1.6)$$

- Equation de la température:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (1.7)$$

avec :

$P$  : pression du fluide.

$\tau_{ij}$  : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

### 1.3.3 Formulation des équations dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (coordonnées elliptiques)

Dans ce qui précède, nous avons présenté les équations fondamentales d'une part sous forme vectorielle et d'autre part sous forme indicelle en coordonnées cartésiennes. Pour certains problèmes, l'usage d'un système de coordonnées quelconque non cartésien peut être d'un grand intérêt, pour calculer des écoulements autour de géométries complexes ou particulières. (nous avons présenté la formulation détaillée en annexe 1)

Il est commode donc de définir un référentiel tel que les limites du système se traduisent par des valeurs constantes des coordonnées. Les coordonnées dites "elliptiques"  $(\eta, \theta)$  [64,65] permettent, précisément dans notre cas d'obtenir ce résultat. La paroi du cylindre elliptique extérieur est représentée par  $\eta = \eta_2 = \text{constant}$ , celle du cylindre elliptique intérieur par  $\eta = \eta_1 = \text{constant}$ .

Dans le système de coordonnées  $(\eta, \theta, z)$ , les surfaces  $\eta = \text{constante}$  sont des cylindres elliptiques, les surfaces  $\theta = \text{constante}$  sont des cylindres hyperboliques et les surfaces  $z = \text{constante}$  sont des plans parallèles. Comme l'illustre la figure 1.2.

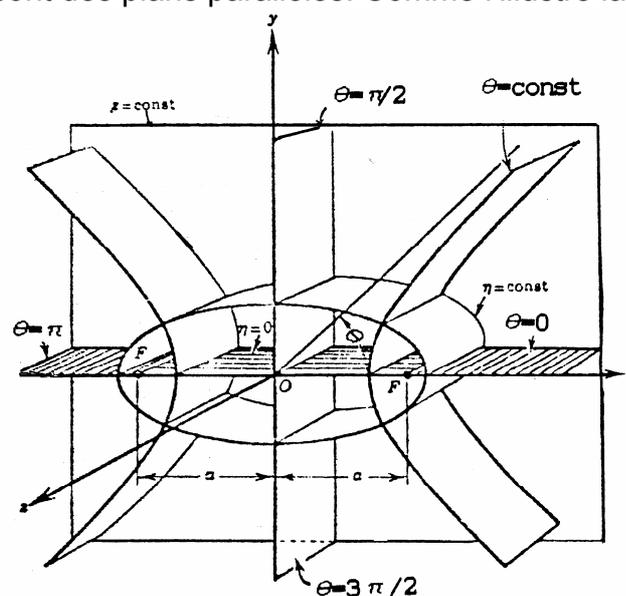


Fig. 1.2: Schéma des coordonnées elliptiques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} x &= a.ch\eta.\cos\theta \\ y &= a.sh\eta.\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Les équations (1.2), (1.3) et (1.4) s'écrivent respectivement avec la convention de sommation sur les indices répétés comme suit :

- Equation de continuité :

L'équation de continuité s'écrit, en coordonnées curvilignes:

$$\frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \frac{\partial}{\partial \chi_s} \left( \frac{h_\eta h_\theta h_z}{h_s} \rho V_s \right) = 0 \quad (1.9)$$

ou, sous forme développée :

$$\frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\theta h_z \rho V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\eta h_z \rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\eta h_\theta \rho V_z) \right] = 0 \quad (1.10)$$

- Equations du mouvement :

Les équations de la quantité de mouvement, en l'absence de forces massiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial V_\ell}{\partial t} + \left( \frac{V_s}{h_s} \frac{\partial V_\ell}{\partial \chi_s} + \frac{V_s}{h_s} \frac{V_\ell}{h_\ell} \frac{\partial h_\ell}{\partial \chi_s} - \frac{(V_s)^2}{h_s h_\ell} \frac{\partial h_s}{\partial \chi_\ell} \right) \right] \mathbf{i}_\ell \\ = - \frac{1}{h_\ell} \frac{\partial P}{\partial \chi_\ell} \mathbf{i}_\ell + \left[ \frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \chi_s} \left( \frac{h_\eta h_\theta h_z}{h_s} \tau_{s,\ell} \right) \right\} + \frac{\tau_{s,\ell}}{h_s h_\ell} \frac{\partial h_\ell}{\partial \chi_s} - \frac{\tau_{s,s}}{h_\ell h_s} \frac{\partial h_s}{\partial \chi_\ell} \right] \mathbf{i}_\ell \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le vecteur accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  s'écrit dans le nouveau système de coordonnées  $(\eta, \theta, z)$  comme suit :

$$\vec{g} = -g_\eta \vec{e}_\eta - g_\theta \vec{e}_\theta$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} g_\eta &= g \frac{a(sh\eta \cos\theta \sin\alpha + ch\eta \sin\theta \cos\alpha)}{h} \\ g_\theta &= g \frac{a(sh\eta \cos\theta \cos\alpha - ch\eta \sin\theta \sin\alpha)}{h} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

- Equation de la température :

L'équation de température s'écrit, en coordonnées curvilignes:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p T) + \frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi_s} \left( \frac{h_\eta h_\theta h_z}{h_s} \rho C_p T V_s \right) \right] = \frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi_s} \left( \frac{h_\eta h_\theta h_z}{h_s} \lambda \frac{\partial T}{\partial \chi_s} \right) \right] \quad (1.13)$$

ou, sous forme développée :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\theta h_z \rho c_p T V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_\eta h_z \rho c_p T V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\eta h_\theta \rho c_p T V_z) \right] \\ & = \frac{1}{h_\eta h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\theta h_z \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h_\eta h_z \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h_\eta h_\theta \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec :

$\eta, \theta, z$  : coordonnées curvilignes.

$h_\eta, h_\theta, h_z$  : coefficients métriques, en coordonnées curvilignes, ils sont donnés par les relations (1.15).

$h_\ell, h_s$  : sommations sur les nouveaux coefficients métriques.

$\chi_s$  : sommation pour les nouvelles coordonnées, dans le nouveau référentiel.

$V_\eta, V_\theta, V_z$  : nouvelles composantes du vecteur vitesse dans le nouveau référentiel.

$V_\ell, V_s$  : sommation pour les nouvelles composantes du vecteur vitesse.

$i_\ell$  : sommation pour les vecteurs unitaires du nouveau référentiel.

$\tau_{s,s}, \tau_{s,\ell}$  : sommation pour le tenseur des contraintes visqueuses.

$$\left. \begin{aligned} h_\eta &= h_\theta = h = a \sqrt{sh^2 \eta + \sin^2 \theta} \\ h_z &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Nous aurons donc après les simplifications nécessaires, le système d'équations suivant :

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta) \right] = 0 \quad (1.16)$$

- Projection de l'équation du mouvement suivant l'axe des  $\eta$  :

$$\begin{aligned} & \rho_0 \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{\rho_0}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\eta V_\theta) \right] = - \frac{1}{h} \frac{\partial P_H}{\partial \eta} + \rho_0 g_\eta - \rho g_\eta + \\ & \left( \frac{2}{h^2} \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\theta}{h} \right) \right] \right) \\ & \left( + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\theta}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_\eta}{h} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\eta}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{h^2} V_\theta^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{h^2} V_\eta V_\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.17)$$

- Projection de l'équation du mouvement suivant l'axe des  $\theta$  :

$$\rho_0 \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{\rho_0}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h V_\theta V_\theta) \right] = -\frac{1}{h} \frac{\partial P_H}{\partial \theta} + \rho_0 g_\theta - \rho g_\theta +$$

$$v \left( \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \eta^2} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \frac{2}{h^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ h \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_\eta}{h} \right) \right] \right] \\ & + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\theta}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_\eta}{h} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{2}{h^2} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{aligned} \right) \quad (1.18)$$

$$+ \frac{1}{h^2} V_\eta^2 \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{h^2} V_\eta V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta}$$

- Equation de la température :

L'équation de température s'écrit, en coordonnées curvilignes:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h T V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h T V_\theta) \right] = \frac{1}{h^2} \frac{\lambda}{\rho C_p} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.19)$$

### 1.3.4 Formulation des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- pour la paroi externe :  $V_\eta = V_\theta = 0$  et  $T = T_2$  (1.20)

- pour la paroi interne :  $V_\eta = V_\theta = 0$

Cas I : La paroi est isotherme  $T = T_1$

Cas II : La paroi est soumise à une densité de flux de chaleur constante

$$q_{\text{constnt}} = -\lambda \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_i} \quad (1.21)$$

## 1.4 Adimensionalisation

L'adimensionalisation a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats.

Posons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$h^* = \frac{h}{a} = (sh^2\eta + \sin^2\theta)^{1/2}, \quad V_\eta^* = \frac{V_\eta}{\left(\frac{v}{a}\right)}, \quad V_\theta^* = \frac{V_\theta}{\left(\frac{v}{a}\right)}, \quad P^* = \frac{P_H - P_0}{\rho_0 \left(\frac{v^2}{a^2}\right)} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\left(\frac{a^2}{v}\right)}$$

avec :

$a$  : Longueur caractéristique, choisie arbitrairement. (c'est la distance focale, figurant dans les relations (1.8)).

$v/a$  : Vitesse caractéristique.

$a^2/v$  : Temps caractéristique.

La température adimensionnelle pour la paroi interne est donnée selon la condition pariétale thermique imposée:

- Cas I « paroi isotherme » :

$$T^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ donc le nombre de Grashof est : } Gr = \frac{g\beta a^3}{\nu^2} \Delta T$$

- Cas II « densité de flux de chaleur constante  $q$  » :

$$T^* = \frac{\lambda}{qa} (T - T_2) \text{ et donc le nombre de Grashof modifié est : } Gr_m = \frac{g\beta a^4}{\lambda \nu^2} q$$

Introduisons aussi le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}$

### 1.4.1 Equations adimensionnelles

En portant les quantités adimensionnelles définies précédemment dans les équations (1.16), (1.17), (1.18) et (1.19), on obtient :

$$\text{à } t^*=0 \text{ on a : } V_\eta^* = V_\theta^* = T^* = 0$$

pour  $t^*>0$ , on a :

- Equation de continuité:

$$\frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h^* V_\eta^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V_\theta^*) \right] = 0 \quad (1.22)$$

- Projection de l'équation du mouvement suivant l'axe des  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h^* V_\eta^* V_\eta^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V_\eta^* V_\theta^*) \right] &= -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + Gr T^* \frac{(\text{sh}\eta \cos\theta \sin\alpha + \text{ch}\eta \sin\theta \cos\alpha)}{h^*} \\ + \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial^2 V_\eta^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 V_\eta^*}{\partial \theta^2} - \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_\eta^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_\theta^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\theta^*}{h^*} \right) \right] & \quad (1.23) \\ + \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\theta^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) \right] \frac{\partial h^*}{\partial \theta} - \frac{2}{h^{*2}} \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_\eta^*}{h^{*2}} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right] \frac{\partial h^*}{\partial \eta} + \frac{1}{h^{*2}} V_\theta^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{1}{h^{*2}} V_\eta^* V_\theta^* \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \end{aligned}$$

- Projection de l'équation du mouvement suivant l'axe des  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^*{}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h^* V_{\eta}^* V_{\theta}^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V_{\theta}^* V_{\theta}^*) \right] &= -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + Gr T^* \frac{(\text{sh} \eta \cos \theta \cos \alpha - \text{ch} \eta \sin \theta \sin \alpha)}{h^*} \\ + \frac{1}{h^*{}^2} \frac{\partial^2 V_{\theta}^*}{\partial \eta^2} + \frac{2}{h^*{}^2} \frac{\partial^2 V_{\theta}^*}{\partial \theta^2} - \frac{1}{h^*{}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_{\theta}^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right] + \frac{2}{h^*{}^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{h^*{}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \right) \right] & \quad (1.24) \\ + \frac{1}{h^*{}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_{\theta}^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \right) \right] \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{2}{h^*{}^2} \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_{\eta}^*}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}^*}{h^*{}^2} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \right] \frac{\partial h^*}{\partial \theta} + \frac{1}{h^*{}^2} V_{\eta}^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} - \frac{1}{h^*{}^2} V_{\eta}^* V_{\theta}^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \end{aligned}$$

- Equation de la température :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h^* V_{\eta}^* T^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V_{\theta}^* T^*) \right] = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.25)$$

#### 1.4.2 Formulation des conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions aux limites adimensionnelles sont les suivantes :

- Conditions sur la paroi du cylindre elliptique intérieur ( $\eta = \eta_i = \text{constant}$ ):

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = 0 \quad (1.26.a)$$

- Cas I :  $T_1^* = 1$  (1.26.b)

- Cas II : Le gradient de température sur cette paroi peut être déterminé à partir de la définition de la température adimensionnelle, de la façon suivante :

$$\left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta = \eta_i} = \frac{q}{\lambda} \frac{1}{h^*} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \quad (1.26.c)$$

En introduisant l'équation (1.26.c) dans l'équation (1.21), il vient :

$$\left. \frac{1}{h^*} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta = \eta_i} = -1 \quad (1.26.d)$$

- Conditions sur la paroi du cylindre elliptique extérieur ( $\eta = \eta_e = \text{constant}$ ):

$$V_{\eta}^* = V_{\theta}^* = 0 \quad (1.27.a)$$

$$T_2^* = 0 \quad (1.27.b)$$

En voulant évaluer les valeurs de la fonction de courant, nous utilisons les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} V_{\eta}^* &= \frac{1}{h^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} \\ V_{\theta}^* &= -\frac{1}{h^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

## 1.5 Coefficients d'échange de la chaleur

### 1.5.1 Valeur locale du nombre de Nusselt

La définition générale du nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{qa}{\lambda \Delta T} \quad (1.29)$$

q : densité du flux de la chaleur à travers la paroi de l'enceinte.

$\Delta T$  : écart de température  $T_1 - T_2$ .

Soit :

$$q = -\lambda \left. \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta = \text{cste}}$$

et en utilisant les définitions des températures adimensionnelles dans les deux conditions pariétales thermiques, il vient :

$$\text{- Cas I :} \quad Nu = - \left. \frac{1}{h^*} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta = \text{cste}} \quad (1.30)$$

$$\text{- Cas II :} \quad Nu = - \left. \frac{1}{h^* T^*(\eta_i, \theta)} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right|_{\eta = \text{cste}} \quad (1.31)$$

### 1.5.2 Nombre de Nusselt moyen

Le nombre de Nusselt moyen s'exprime à partir de la relation suivante :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu d\theta \quad (1.32)$$

# Chapitre 2

## Formulation Numérique

### 2.1 Introduction

L'examen du système différentiel établi dans le chapitre précédent montre que trois paramètres influencent le profil de notre écoulement dans l'espace annulaire, en maintenant le nombre de Prandtl constant, ce sont :

- L'angle d'inclinaison  $\alpha$ .
- Le nombre de Grashof Gr.
- L'excentricité du cylindre elliptique intérieur  $e_1$ , (cf. annexe 2).

### 2.2 Méthode de résolution numérique

La forme finale du modèle mathématique est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui ne peuvent être résolues analytiquement. Dans notre étude, on considère une solution numérique par la méthode des volumes finis. Cette méthode est très utilisée dans la solution numérique des problèmes de transferts, elle est bien exposée par S.V.PATANKAR [61] et E.SAATADJIAN [63].

La figure 2.1 représente le domaine physique et le domaine de calcul.

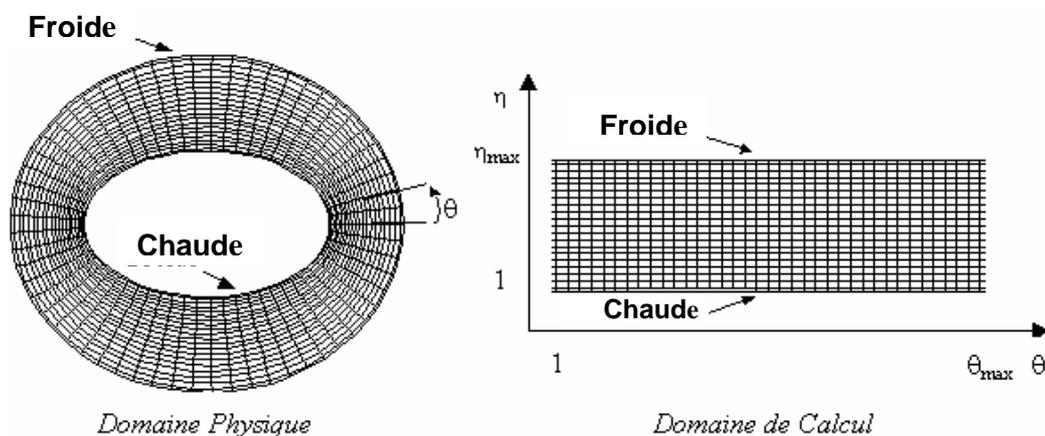


Fig. 2.1. Domaine physique et domaine de calcul

**2.2.1 Volume élémentaire d'intégration**

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $\eta$  et  $\theta$  en un ensemble de volumes élémentaires ou « volumes de contrôle » égaux à «  $h^*2.\Delta\eta.\Delta\theta.1$  ». (Le problème étant bidimensionnel, on prend l'unité dans la direction  $z$  comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point P et ses faces latérales « est », « ouest », « nord » et « sud », sont désignées respectivement, par les lettres e, w, n et s. Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points E, W, N et S. Les variables scalaires (pressions, températures) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis, alors que les composantes des vitesses sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis [61]. Les équations de transfert des variables scalaires sont intégrées dans le volume fini typique, cependant celles des composantes de la vitesse sont intégrées dans des volumes finis décalés [61]. Celui de la composante de la vitesse suivant  $\theta$  est décalé dans le sens positif de la coordonnée  $\theta$  et celui de la composante suivant  $\eta$  est décalé dans le sens positif de la coordonnée  $\eta$ . Il est bien connu que ce décalage est nécessaire pour éviter certaines instabilités numériques [61].

La figure 2.2 représente un volume-fini typique et son voisinage dans un domaine de calcul.

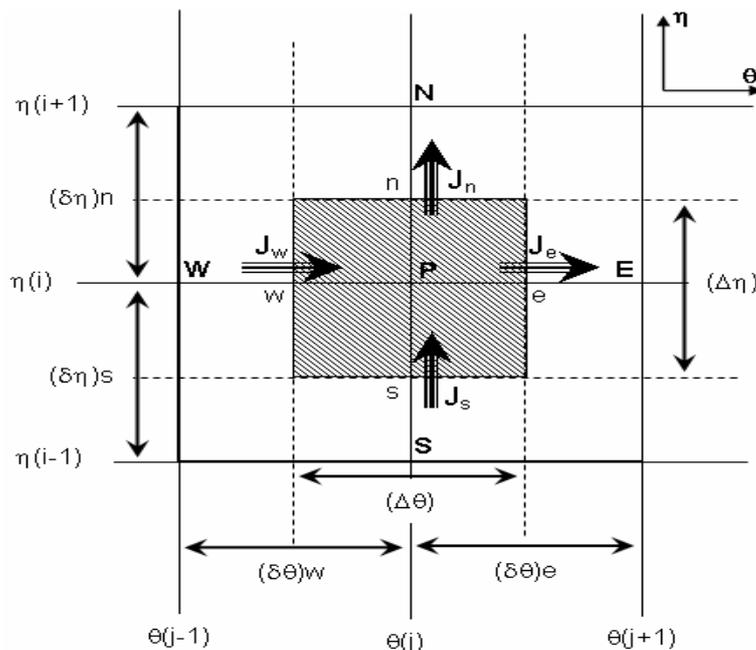


Fig. 2.2. Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage dans le domaine de calcul.

**2.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable  $\phi$  dans le volume de contrôle**

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, on considère l'équation de transfert sous sa forme générale :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} (h^* V_{\eta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V_{\theta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) = S_{\phi} \quad (2.1)$$

Les sources et les coefficients de diffusion sont spécifiés dans le tableau 2.1

variable $\Phi_P$	Source $S_{\Phi} = S_0 + S_P \Phi_P$	Coefficient $\Gamma_{\Phi}$	
$V_{\eta}^*$	$-\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + GrT^* \frac{(sh\eta \cos \theta \sin \alpha + ch\eta \sin \theta \cos \alpha)}{h^*} - \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_{\eta}^* \partial h^*}{h^* \partial \theta} \right]$ $+ \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_{\theta}^* \partial h^*}{h^* \partial \theta} \right] + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_{\theta}^*}{h^*} \right) \right] + \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_{\theta}^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \right) \right] \frac{\partial h^*}{\partial \theta}$ $-\frac{2}{h^{*2}} \left( \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_{\theta}^*}{\partial \theta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \underbrace{\frac{2}{h^{*2}} \left( \frac{V_{\eta}^* \partial h^*}{h^{*2} \partial \eta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \eta}}_{S_P \Phi_P} + \frac{1}{h^{*2}} V_{\theta}^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{1}{h^{*2}} V_{\eta}^* V_{\theta}^* \frac{\partial h^*}{\partial \theta}$	$\Gamma_{\Phi_{\eta}}$	2
		$\Gamma_{\Phi_{\theta}}$	1
$V_{\theta}^*$	$-\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} + GrT^* \frac{(sh\eta \cos \theta \cos \alpha - ch\eta \sin \theta \sin \alpha)}{h^*} - \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{V_{\theta}^* \partial h^*}{h^* \partial \eta} \right]$ $+ \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{V_{\eta}^* \partial h^*}{h^* \partial \eta} \right] + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \right) \right] + \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_{\theta}^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{V_{\eta}^*}{h^*} \right) \right] \frac{\partial h^*}{\partial \eta}$ $-\frac{2}{h^{*2}} \left( \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_{\eta}^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \theta} - \underbrace{\frac{2}{h^{*2}} \left( \frac{V_{\theta}^* \partial h^*}{h^{*2} \partial \theta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \theta}}_{S_P \Phi_P} + \frac{1}{h^{*2}} V_{\eta}^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \theta} - \frac{1}{h^{*2}} V_{\eta}^* V_{\theta}^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta}$	$\Gamma_{\Phi_{\eta}}$	1
		$\Gamma_{\Phi_{\theta}}$	2
$T^*$	0	$\frac{1}{P_r}$	

Tableau 2.1. Les sources et les coefficients de diffusion des variables  $\Phi$

L'équation de discrétisation d'une variable  $\Phi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique (pour les  $\Phi$  scalaires) ou un volume fini décalé (pour les  $\Phi$  associées aux composantes de la vitesse). Ci-après, on présente un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\Phi$ .

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{w,s} \int_{t^*}^{e,n,t^*+\Delta t^*} \frac{\partial \Phi}{\partial t^*} h^{*2} d\eta d\theta dt^*}_{1} + \underbrace{\int_{w,s} \int_{t^*}^{e,n,t^*+\Delta t^*} \left[ \frac{\partial(h^* V_\eta \Phi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h^* V_\theta \Phi)}{\partial \theta} \right] d\eta d\theta dt^*}_{2} = \\
 & \underbrace{\int_{w,s} \int_{t^*}^{e,n,t^*+\Delta t^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] d\eta d\theta dt^*}_{3} + \underbrace{\int_{w,s} \int_{t^*}^{e,n,t^*+\Delta t^*} S_\Phi d\eta d\theta dt^*}_{4}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les termes 1, 2, 3 et 4 de l'équation (2.2) représentent les intégrales triples dans le volume fini (entre les faces w-e, s-n et  $t^*$  et  $t^*+\Delta t^*$ ), des termes de la variation temporelle, de la convection, de la diffusion et de la source de  $\Phi$ . On utilise une discrétisation temporelle totalement implicite pour les  $\Phi$  scalaires et semi-implicite pour les vitesses (à cause des équations de transfert non linéaires). Pour la discrétisation spatiale, on utilise le schéma de la loi de puissance (Power-Law) pour approcher les variations de  $\Phi$  entre les points du maillage [61]. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, [61].

Posons :

$$\left. \begin{aligned}
 J_\eta &= \left( h^* V_\eta^* \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \\
 J_\theta &= \left( h^* V_\theta^* \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

où  $J_\eta$  et  $J_\theta$  sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portant ces valeurs dans l'équation (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} = S_\Phi \tag{2.4}$$

L'intégration de l'équation (2.4) dans le volume de contrôle de la figure 2.2 donne :

$$\frac{(\Phi_P^{t^*} - \Phi_P^0) h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta}{\Delta t^*} + J_n - J_s + J_e - J_w = \bar{S}_\Phi \cdot \Delta V \tag{2.5}$$

$J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle.

$\bar{S}_\Phi$  est la valeur moyenne de  $S_\Phi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\Phi_P$  (au noeud P) et se mettre sous la forme:

$$\bar{S}_\Phi = S_0 + S_P \cdot \Phi_P \quad (2.6)$$

avec :  $S_P < 0$ .

Par suite l'équation (2.5) devient :

$$\frac{(\Phi_P^{t^*} - \Phi_P^0) h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta}{\Delta t^*} + J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_P \cdot \Phi_P) \cdot \Delta V \quad (2.7)$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (1.20) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (2.8)$$

où  $F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$ , sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (h^* V_\eta^*)_n \cdot \Delta \theta \\ F_s &= (h^* V_\eta^*)_s \cdot \Delta \theta \\ F_e &= (h^* V_\theta^*)_e \cdot \Delta \eta \\ F_w &= (h^* V_\theta^*)_w \cdot \Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Nous poserons dans ce qui suit  $\Phi_P^{t^*} = \Phi_P$  .

En multipliant l'équation (2.8) par la fonction  $\Phi_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (2.7), il vient :

$$\begin{aligned} & (\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta}{\Delta t^*} + (J_n - F_n \cdot \Phi_P) - (J_s - F_s \cdot \Phi_P) \\ & + (J_e - F_e \cdot \Phi_P) - (J_w - F_w \cdot \Phi_P) = (S_0 + S_P \cdot \Phi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (2.10)$$

D'après S.V.PATANKAR [61], on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (2.10) de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} J_n - F_n \cdot \Phi_P &= a_N (\Phi_P - \Phi_N) \\ J_s - F_s \cdot \Phi_P &= a_S (\Phi_S - \Phi_P) \\ J_e - F_e \cdot \Phi_P &= a_E (\Phi_P - \Phi_E) \\ J_w - F_w \cdot \Phi_P &= a_W (\Phi_W - \Phi_P) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned} & (\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta}{\Delta t^*} + a_N (\Phi_P - \Phi_N) - a_S (\Phi_S - \Phi_P) \\ & + a_E (\Phi_P - \Phi_E) - a_W (\Phi_W - \Phi_P) = (S_0 + S_P \cdot \Phi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_P \Phi_P = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + b \quad (2.13)$$

avec :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_P h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta \quad (2.14)$$

$$a_P^0 = \frac{h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta}{\Delta t^*} \quad (2.15)$$

$$b = S_0 h_P^{*2} \Delta \eta_P \Delta \theta + a_P^0 \Phi_P^0 \quad (2.16)$$

On introduit maintenant la fonction  $A(|P|)$  du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law), d'après PATANKAR [61], elle est donnée par ;

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0.1 |P|)^5 \right\|$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de l'équation algébrique (2.13) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= D_n A(|P_n|) + \left\| -F_n, 0 \right\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \left\| F_s, 0 \right\| \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \left\| -F_e, 0 \right\| \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \left\| F_w, 0 \right\| \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Dans les relations (2.17), les grandeurs  $D_n$ ,  $D_s$ ,  $D_e$  et  $D_w$  sont les termes diffusifs, et  $P_n$ ,  $P_s$ ,  $P_e$  et  $P_w$  sont donc, les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\Gamma_\Phi)_n \cdot \Delta \theta}{(\delta \eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\Gamma_\Phi)_s \cdot \Delta \theta}{(\delta \eta)_s} \\ D_e &= \frac{(\Gamma_\Phi)_e \cdot \Delta \eta}{(\delta \theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\Gamma_\Phi)_w \cdot \Delta \eta}{(\delta \theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (2.13) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_p$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$ , doit être égal à la somme des autres coefficients et  $S_p \Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toutes les variable dépendantes :  $\Phi$  est l'une de ces variables U, V, P et T. Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\Phi$  et la source  $S_\Phi$  sont définis dans le tableau 2.1. Cependant l'équation de discrétisation de la pression P est obtenue par une combinaison des équations de discrétisation des équations des quantités de mouvement et de l'équation de continuité [61].

#### 2.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$  est intégrée dans le volume de contrôle décalé dans la direction  $\eta$  (figure 2.4). Les dimensions du volume de contrôle décalé deviennent :  $\Delta V = h^2 \cdot (\delta\eta)_n \cdot (\Delta\theta)_p$  et ce décalage permet de situer les composantes des vitesses  $(V_\eta^*)_n$  et  $(V_\eta^*)_s$  aux centres de volumes de contrôle respectifs et adjacents.

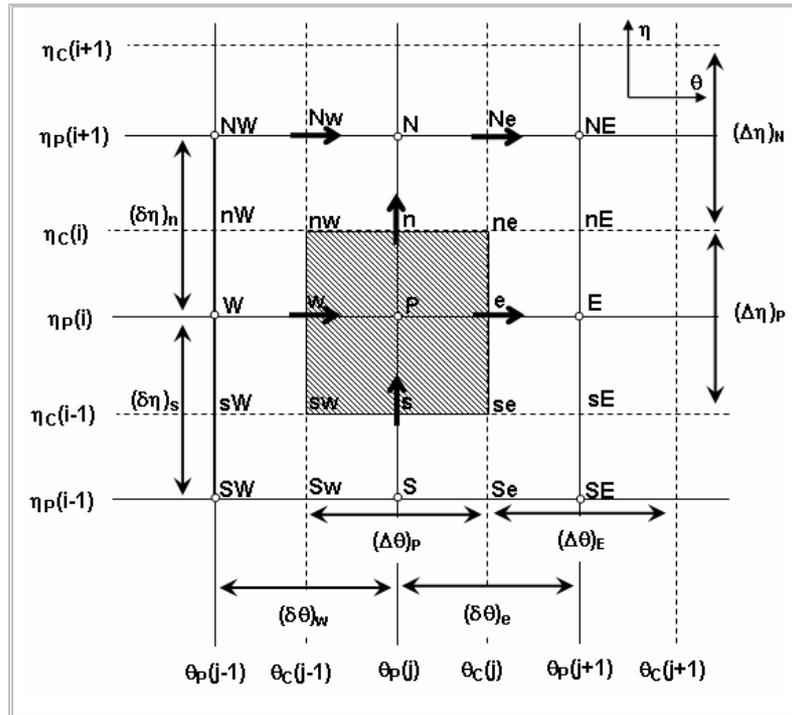


Fig. 2.3. Volume de contrôle avant le décalage dans la direction  $\eta$

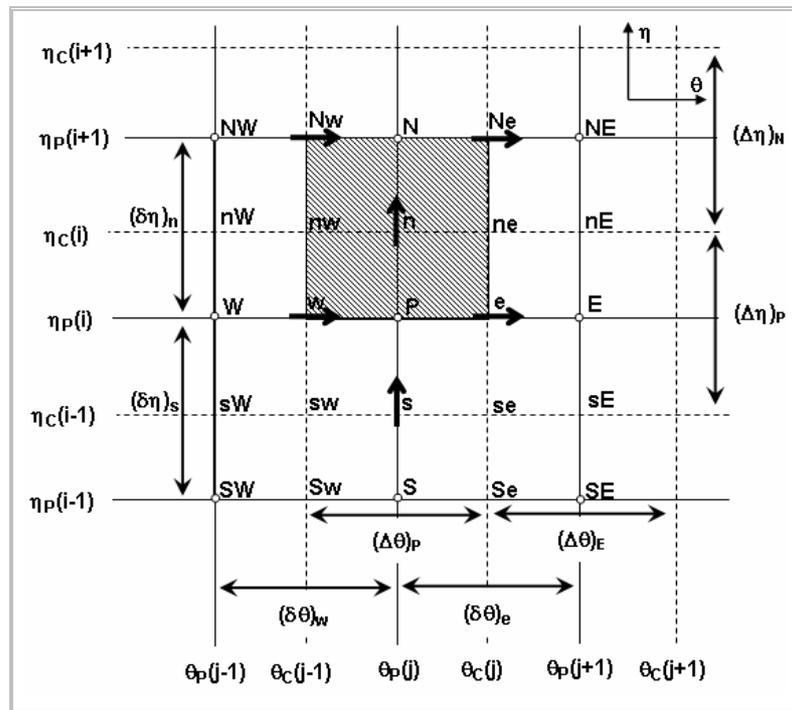


Fig. 2.4. Volume de contrôle après décalage dans la direction  $\eta$

La phase de discrétisation de l'équation de quantité de mouvement de  $V_\eta^*$  est similaire à celle de l'équation générale :

$$a_P(V_{\eta}^*)_P = a_N(V_{\eta}^*)_N + a_S(V_{\eta}^*)_S + a_E(V_{\eta}^*)_E + a_W(V_{\eta}^*)_W + S_{V_{\eta}^*} \quad (2.20)$$

Elle s'exprime par les termes diffusifs et convectifs :

où les termes diffusifs contenus dans les différents coefficients sont::

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{2(\Delta\theta)_P}{(\Delta\eta)_N} \\ D_s &= \frac{2(\Delta\theta)_P}{(\Delta\eta)_P} \\ D_e &= \frac{(\delta\eta)_n}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \frac{(\delta\eta)_n}{(\delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

et les termes convectifs sont :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \left( h_N^* \frac{(V_{\eta}^*)_N + (V_{\eta}^*)_P}{2} \right) \cdot (\Delta\theta)_P \\ F_s &= \left( h_P^* \frac{(V_{\eta}^*)_P + (V_{\eta}^*)_S}{2} \right) \cdot (\Delta\theta)_P \\ F_e &= \left( h_{ne}^* \frac{(V_{\theta}^*)_{Ne} + (V_{\theta}^*)_e}{2} \right) \cdot (\delta\eta)_n \\ F_w &= \left( h_{nw}^* \frac{(V_{\theta}^*)_{Nw} + (V_{\theta}^*)_w}{2} \right) \cdot (\delta\eta)_n \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Les nombres de Péclet sont :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Les coefficients de l'équation algébrique de  $V_{\eta}^*$  sont donnés dans les relations (2.17).

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{2}{h_n^{*2}} \left( \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \Big|_n \right)^2 \frac{(\delta\eta)_n (\Delta\theta)_P}{h_n^{*2}} + \frac{h_n^{*2} (\delta\eta)_n (\Delta\theta)_P}{\Delta t^*} \quad (2.24)$$

et le terme de source de cette équation est :

$$S_{V_{\eta}^*} = S_0 h_P^{*2} (\delta\eta)_n \Delta\theta_P + \frac{h_n^{*2} (\delta\eta)_n (\Delta\theta)_P}{\Delta t^*} (V_{\eta}^*)_n \quad (2.25)$$

Le terme  $S_0$  pour cette équation est spécifié dans le tableau 2.1.

### 2.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\theta$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\theta$  est intégrée dans le volume fini représenté par la figure 2.6, où il y a un décalage de maillage dans la direction  $\theta$ . Le volume de contrôle devient :  $\Delta V = h^2 \cdot (\Delta\eta)_p \cdot (\delta\theta)_e$ . En suivant les mêmes étapes de discrétisation que pour l'équation précédente on obtient l'équation algébrique suivante:

$$a_P (V_{\theta}^*)_P = a_N (V_{\theta}^*)_N + a_S (V_{\theta}^*)_S + a_E (V_{\theta}^*)_E + a_W (V_{\theta}^*)_W + S_{V_{\theta}^*} \quad (2.26)$$

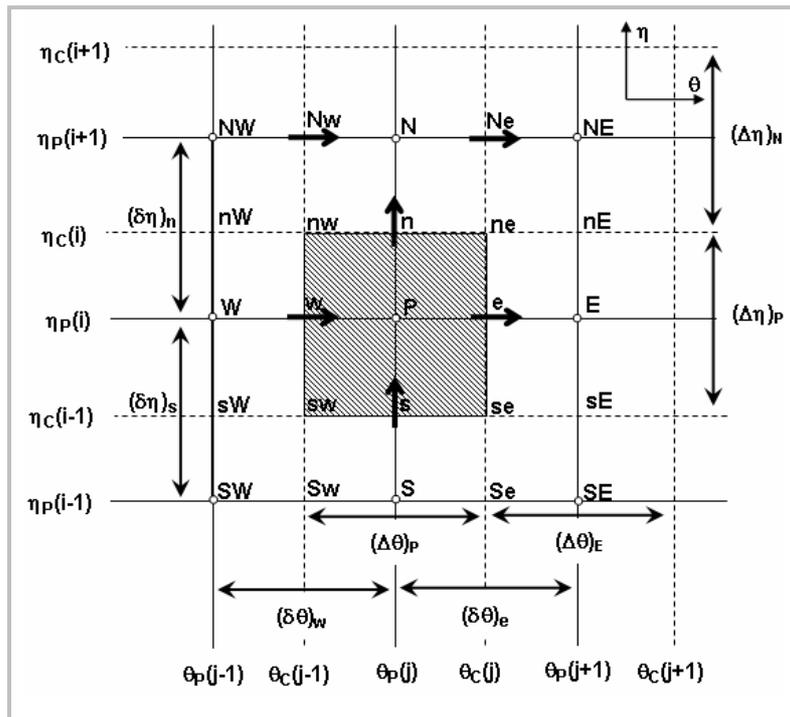
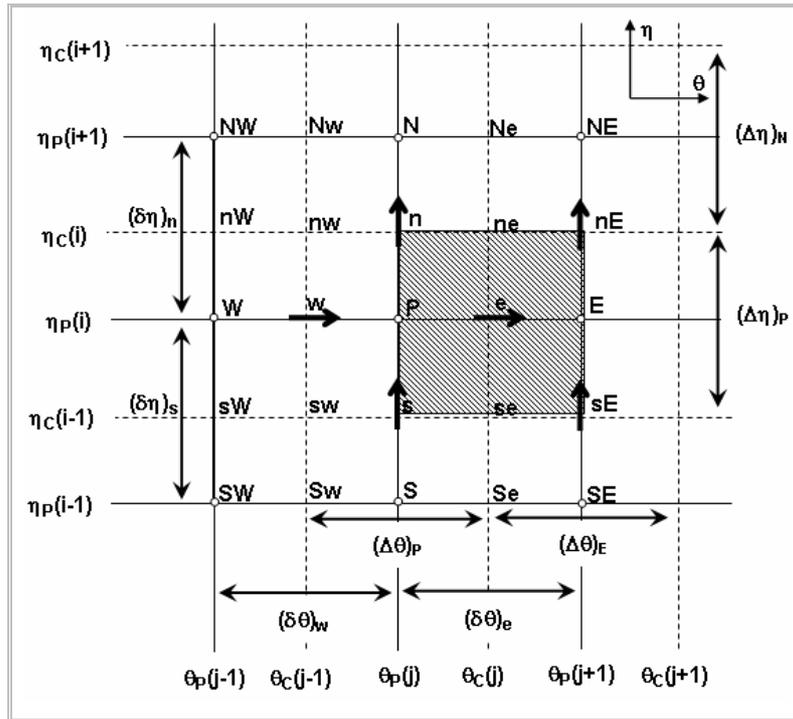


Fig. 2.5. Volume de contrôle avant le décalage dans la direction  $\theta$


 Fig. 2.6. Volume de contrôle après le décalage dans la direction  $\theta$ 

Comme précédemment, on définit les quantités de convection et de diffusion  $F$  et  $D$ .

Les termes diffusifs sont :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{(\delta\theta)_e}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \frac{(\delta\theta)_e}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \frac{2(\Delta\eta)_P}{(\Delta\theta)_E} \\ D_w &= \frac{2(\Delta\eta)_P}{(\Delta\theta)_P} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Et les termes convectifs sont :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \left( h_{ne}^* \frac{(V_\eta)_{ne}^* + (V_\eta)_n^*}{2} \right) \cdot (\delta\theta)_e \\ F_s &= \left( h_{se}^* \frac{(V_\eta)_{se}^* + (V_\eta)_s^*}{2} \right) \cdot (\delta\theta)_e \\ F_e &= \left( h_E^* \frac{(V_\theta)_E^* + (V_\theta)_P^*}{2} \right) \cdot (\Delta\eta)_P \\ F_w &= \left( h_P^* \frac{(V_\theta)_P^* + (V_\theta)_W^*}{2} \right) \cdot (\Delta\eta)_P \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Les nombres de Péclet sont :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Les coefficients de l'équation algébrique de  $V_\theta^*$  sont donnés dans les relations (2.17).

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{2}{h_e^{*2}} \left( \frac{\partial h^*}{\partial \theta} \Big|_e \right)^2 \frac{(\Delta\eta)_P (\delta\theta)_e}{h_e^{*2}} + \frac{h_e^{*2} (\Delta\eta)_P (\delta\theta)_e}{\Delta t^*} \quad (2.30)$$

et le terme de source de cette équation est :

$$S_{V_\theta^*} = S_0 h_e^{*2} (\Delta\eta)_P (\delta\theta)_e + \frac{h_n^{*2} (\Delta\eta)_P (\delta\theta)_e}{\Delta t^*} (V_\theta^*)_e \quad (2.31)$$

Le terme  $S_0$  pour cette équation est spécifié dans le tableau 2.1.

## 2.6 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de l'énergie est intégrée dans le volume fini typique de dimension  $h^2 \cdot (\Delta\eta)_P \cdot (\Delta\theta)_P$ . En suivant les même étapes de discrétisation on obtient l'équation algébrique suivante:

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W + S_T \quad (2.32)$$

Les termes de diffusion sont :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta\theta)_P}{(\delta\eta)_n} \\ D_s &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta\theta)_P}{(\delta\eta)_s} \\ D_e &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta\eta)_P}{(\delta\theta)_e} \\ D_w &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta\eta)_P}{(\Delta\theta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Les termes de convection sont :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= h_n^* \cdot (V_\eta^*)_n \cdot (\Delta\theta)_P \\ F_s &= h_s^* \cdot (V_\eta^*)_s \cdot (\Delta\theta)_P \\ F_e &= h_e^* \cdot (V_\theta^*)_e \cdot (\Delta\eta)_P \\ F_w &= h_w^* \cdot (V_\theta^*)_w \cdot (\Delta\eta)_P \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Les nombres de Péclet sont :

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Les coefficients de l'équation algébrique d'énergie sont donnés dans les relations (2.17).

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{h_P^{*2} (\Delta\eta)_P (\Delta\theta)_P}{\Delta t^*} \quad (2.36)$$

et le terme de source de cette équation est :

$$S_T = \frac{h_P^{*2} (\Delta\eta)_P (\Delta\theta)_P}{\Delta t^*} T_P \quad (2.37)$$

## 2.7 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites de notre problème sont aussi écrites sous la forme générale de l'équation de discrétisation.

Pour les points sur les parois:

- Les composantes de la vitesse  $V_\eta^*$  et  $V_\theta^*$  sont nulles :

Pour  $V_\eta^*$  :  $a_P=1$

$$a_E=a_W= a_N=a_S=0 \text{ et } S_{v_\eta^*} = 0$$

Pour  $V_\theta^*$  :  $a_P= 1$

$$a_E=a_W= a_N=a_S=0 \text{ et } S_{v_\theta^*} = 0$$

- La température sur la paroi externe :

$$a_P=1$$

$$a_E=a_W= a_N=a_S=0 \text{ et } S_T=0$$

- La température sur la paroi interne :

Cas I :  $a_P=1$

$$a_E=a_W= a_N=a_S=0 \text{ et } S_T=1$$

Cas II :  $a_P=1$

$$a_N=1$$

$$a_E=a_W= a_S=0 \text{ et } S_T = h_p^* (\delta\eta)_n$$

## 2.8 Equation de discrétisation de la pression

Cette équation est obtenue par une combinaison des équations de discrétisation de l'équation de continuité et des équations des quantités de mouvement [61], on obtient :

$$a_P P_P^* = a_N P_N^* + a_S P_S^* + a_E P_E^* + a_W P_W^* + b \quad (2.38)$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= d_n \cdot h_n^* \cdot (\Delta\theta)_P \\ a_S &= d_s \cdot h_s^* \cdot (\Delta\theta)_P \\ a_E &= d_e \cdot h_e^* \cdot (\Delta\eta)_P \\ a_W &= d_w \cdot h_w^* \cdot (\Delta\eta)_P \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (2.40)$$

$$b = \left( h_s^* \left( \hat{V}_\eta^* \right)_s - h_n^* \left( \hat{V}_\eta^* \right)_n \right) \cdot (\Delta\theta)_P + \left( h_w^* \left( \hat{V}_\theta^* \right)_w - h_e^* \left( \hat{V}_\theta^* \right)_e \right) \cdot (\Delta\eta)_P \quad (2.41)$$

$$\left. \begin{aligned} d_n &= \frac{h_n^* \cdot (\Delta\theta)_P}{a_P} \\ d_s &= \frac{h_s^* \cdot (\Delta\theta)_P}{a_P} \\ d_e &= \frac{h_e^* \cdot (\Delta\eta)_P}{a_P} \\ d_w &= \frac{h_w^* \cdot (\Delta\eta)_P}{a_P} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Les pseudo vitesses  $\hat{V}_\eta^*$  et  $\hat{V}_\theta^*$  sont les vitesses obtenues par la solution des équations des quantités de mouvement (les équations de Navier-Stokes) sans les termes de pression.

## 2.9 L'algorithme SIMPLER

Les systèmes des équations de discrétisation sont résolus séquentiellement suivant l'algorithme classique SIMPLER [61] :

- 1- On initialise toutes les variables dépendantes à un certain temps appelé  $t^*=0$ .
- 2- On incrémente le temps de  $\Delta t^*$ .
- 3- On calcule les coefficients des équations de discrétisation des quantités de mouvement et on détermine les pseudo vitesses.
- 4- On utilise les pseudo-vitesses dans la source de l'équation de discrétisation de la pression. La solution de cette équation donne une estimation de la pression  $(P^*)^\sim$ . ( $\sim$  fait référence à l'estimation).
- 5- La pression  $(P^*)^\sim$  est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement, qui sont ensuite résolues pour obtenir une estimation du champ de vitesse  $(V_\eta^*)^\sim$  et  $(V_\theta^*)^\sim$  ( $\sim$  fait référence à l'estimation).
- 6- Ce champ de vitesse est utilisé dans la source de l'équation de discrétisation de la pression. La solution de cette équation donne une correction de pression  $(P^*)'$ .
- 7- Le champ de vitesse est corrigé par la correction de pression.
- 8- Le champ de vitesse corrigé est utilisé dans l'équation de discrétisation de T qui est ensuite résolue pour obtenir le champ de cette variable.
- 9- On compare les valeurs des variables dépendantes avant et après incrémentation du temps: Si la différence entre ces valeurs est négligeable dans tout le domaine de calcul on arrête ce dernier; sinon on retourne à l'étape 2.

## 2.10 Méthode de résolution

Une fois les équations algébriques décrivant les variations des variables de l'écoulement dans le domaine de calcul sont établies, une méthode numérique de résolution est choisie en fonction du type de ces équations.

Considérons la notation indicielle, utilisée afin de faciliter la programmation des étapes de calcul. La forme de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport (2.13) sous la nouvelle notation est :

$$a_P(i,k)\Phi_{i,k} = a_N(i,k)\Phi_{i,k+1} + a_S(i,k)\Phi_{i,k-1} + a_E(i,k)\Phi_{i+1,k} + a_W(i,k)\Phi_{i-1,k} + b(i,k) \quad (2.43)$$

tels que :  $1 \leq i \leq il$  et  $1 \leq k \leq kl$

Les coefficients de cette équation sont fonction des variables de transport  $\Phi$ , une méthode de résolution itérative doit être utilisée à cause de la non linéarité.

Le système (2.43) est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{A\}[\Phi] = [b] \quad (2.44)$$

La matrice des coefficients  $\{A\}$  est une matrice à bande diagonale et la largeur de la bande dépend de la dimension de l'espace. Dans le cas bidimensionnel où la fonction du transport sur chaque nœud est liée aux valeurs de cette fonction sur les quatre nœuds adjacents, la matrice  $\{A\}$  est penta diagonale.

Le système (2.44) est transformé en un système tri-diagonal qui peut être résolu par l'algorithme de Thomas, (S.V.PATANKAR [61]), par la technique du balayage.

La méthode TDMA (Tri-diagonal-Matrix-Algorithm), (S.V.PATANKAR [61]), est utilisée après chaque balayage pour résoudre les systèmes d'équations correspondant aux variables  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $P^*$ ,  $(P^*)^{\sim}$  et  $T^*$ .

### **2.11 Contrôle de la convergence**

La convergence des calculs vers la solution exacte, est contrôlée par deux critères :

- La différence entre deux valeurs successives (au temps  $t^*$  et au temps  $t^* + \Delta t^*$ ) des variables d'écoulement, ne doit pas dépasser un certain seuil  $\xi$ .
- Cependant cette condition est insuffisante, car la différence dépend du pas de temps choisis. Un équilibre thermique doit être assuré entre les flux entrant et sortants. Cette condition est satisfaite lorsque les deux flux sont égaux.

# Chapitre 3

## Résultats

### 3.1 Introduction

Nous considérons quatre espaces annulaires elliptiques caractérisés par l'excentricité du tube elliptique intérieur ( $e_1=0.999$ ,  $e_1=0.9$ ,  $e_1=0.83$  pour  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.8$  pour  $e_2=0.25$ ). Le premier cas étant celui où le cylindre elliptique interne tend vers un plan et le dernier cas est celui où le cylindre elliptique externe tend vers un cylindre circulaire.

Dans notre étude, nous présentons trois conditions pariétales thermiques distinctes pour la paroi interne (en maintenant la paroi externe toujours isotherme à la température  $T_2$ ) :

- Première partie : la paroi interne est maintenue isotherme à la température  $T_1 > T_2$ .
- Deuxième partie : la paroi interne est soumise à une densité de flux de chaleur constante  $q$ .
- Troisième partie : la moitié supérieure de la paroi interne est maintenue isotherme à la température  $T_1 > T_2$  et la moitié inférieure est soumise à une densité de flux de chaleur constante  $q$ .

### 3.2 Maillage

Dans cette étude plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : ( $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ , et  $\alpha=0^\circ$ . Pour  $Gr=10^4$  et  $Gr=10^5$ ), pour voir leur effet sur les résultats, le tableau 2.1 nous montre donc, la variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant, en fonction du nombre de nœuds, et nous a permis de choisir le maillage 60x130.

	$\eta_{\max} \times \theta_{\max}$	10x10	10x20	20x40	30x60	40x80	50x100	60x130
<b>Gr = 10<sup>4</sup></b>	<b>NU<sub>moyen</sub></b>	5.256	5.254	5.254	5.254	5.254	5.253	5.253
	<b>Ψ<sub>max</sub></b>	0.923	0.954	0.866	0.861	0.858	0.858	0.858
<b>Gr = 10<sup>5</sup></b>	<b>NU<sub>moyen</sub></b>	5.497	6.131	6.354	6.224	6.225	6.225	6.225
	<b>Ψ<sub>max</sub></b>	10.549	11.159	15.036	15.084	15.142	15.145	15.145

Tableau 3.1 Variation du nombre de Nusselt moyen et de la valeur maximale de la fonction de courant en fonction du nombre de nœuds

### 3.3 Comparaison de résultats issus de ce code de calcul avec des résultats de la littérature

- ELSHAMY et al [30] ont considéré dans leur étude, un espace annulaire compris entre deux cylindres elliptiques, horizontaux et confocaux. Nous présentons dans la figure 3.1, les isocourants et les isothermes obtenues par ce code de calcul en utilisant les mêmes paramètres que ceux utilisés dans la référence [30]. En comparant, donc cette figure avec les figures 9 et 10 de la référence citée, nous remarquons que les résultats sont qualitativement similaires, ceci d'une part, d'autre part nous avons regroupé dans le tableau 3.2, les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les deux parois, issus de ce code de calcul avec ceux de la référence [30] et là aussi, nous remarquons que quantitativement nos résultats et les leurs sont en très bon accord.

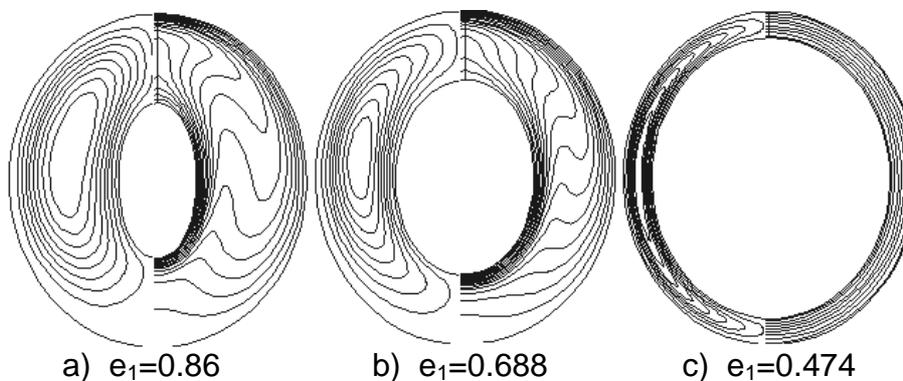


Fig. 3.1 Isocourants et isothermes pour  $Ra=10^4$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $e_2=0.4$

e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	α	Ra	Paroi interne		Paroi externe	
				Ref.[30]	nos calculs	Ref.[30]	nos calculs
0.688	0.4	90°	10 <sup>4</sup>	2.66	2.72	1.38	1.43
0.688	0.4	90°	10 <sup>5</sup>	4.94	4.78	2.51	2.52
0.86	0.4	90°	10 <sup>4</sup>	3.68	3.46	1.35	1.30
0.86	0.4	90°	4x10 <sup>4</sup>	5.34	4.70	1.93	1.77

Tableau 3.2 Comparaison du nombre de Nusselt moyen de la référence [30] avec nos résultats

### 3.4 Cas de la paroi interne isotherme (Première partie)

#### 3.4.1 Influence du nombre de Grashof

Les figures (3.2-3.16) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Grashof Gr quand  $\alpha=0^\circ$ .

Nous remarquons que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical fictif médian. Les figures (3.2-3.4), (3.6 et 3.7) et (3.11-3.16) montrent que le régime de l'écoulement est monocellulaire, du côté gauche du plan de symétrie, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique et du côté droit, il est de sens contraire (les particules du fluide se déplacent vers le haut sous l'action des forces de pesanteur le long de la paroi chaude interne puis descendent au voisinage de la paroi froide du cylindre elliptique extérieur).

Pour  $Gr=10^3$ , la convection laminaire est faible, les figures (3.2), (3.6) et (3.11) représentent les lignes de courant du fluide dont l'écoulement s'organise en deux cellules principales qui tournent très lentement dans des sens opposés.

Les isothermes sont des courbes fermées presque parallèles et concentriques qui épousent assez bien les profils des parois. Dans ce cas la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide.

On peut dire que l'essentiel des transferts thermiques se fait par conduction au niveau de la paroi chauffée, bien que les champs des vitesses soient différents de zéro. La convection est donc relativement faible, les valeurs de la fonction de courant qui sont données sur les figures sont très petites.

Les configurations géométriques ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ) et ( $e_1=0.83$  et  $e_2=0.75$ ) représentées respectivement sur les figures (3.7) et (3.12) pour  $Gr=10^4$  montrent que nous sommes toujours en régime pseudo-conductif, les transferts thermiques se font donc essentiellement par conduction, les valeurs de la fonction de courant figurants sur ces différentes figures sont toujours faibles, ce qui traduit donc une convection relativement faible.

Cependant pour  $Gr=10^4$ , les lignes isothermes de la figure (3.3) ( $e_1=0.999$  et  $e_2=0.75$ ) se transforment de manière symétrique par rapport à l'axe vertical et se modifient sensiblement, et les valeurs de la fonction de courant mentionnées sur la même figure augmentent aussi sensiblement, ce qui traduit une augmentation de la convection, mais qui reste relativement faible comme le montre l'allure des lignes isothermes.

Les configurations géométriques ( $e_1=0.999$  et  $e_2=0.75$ ) et ( $e_1=0.8$  et  $e_2=0.25$ ) représentées, respectivement par les figures (3.4) pour  $Gr=10^5$  et (3.15) pour  $Gr=10^3$  montrent que les lignes isothermes se modifient et finissent par adopter la forme d'un champignon. La distribution de la température est décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide. Le sens de la déformation des isothermes est conforme au sens de rotation des lignes de courant. En régime laminaire, on peut dire que, sous l'action du mouvement des particules qui décollent de la paroi chaude au niveau de l'axe de symétrie, les lignes isothermes se « voûtent » et s'éloignent de la paroi à cet endroit. Les valeurs des fonctions de courant augmentent ce qui signifie que la convection s'intensifie.

Les figures (3.2) et (3.3) de la configuration ( $e_1=0.999$  et  $e_2=0.75$ ) et qui correspondent respectivement à  $Gr=10^3$  et  $Gr=10^4$ , montrent qu'au niveau du plan fictif horizontal passant par le centre du système, le rétrécissement de l'espace libre favorise le transfert conductif entre les deux surfaces d'échange et fait apparaître au coeur des deux tourbillons principaux deux noeuds tournant dans le même sens que le tourbillon les englobant.

L'augmentation du nombre de Grashof intensifie la convection : les noeuds supérieurs se renforcent et commencent à se fondre alors avec ceux inférieurs comme l'illustre la figure (3.4) pour  $Gr=10^5$ .

Sur la figure (3.5) ( $e_1=0.999$  et  $e_2=0.75$ ) pour  $Gr \leq 2 \times 10^5$  et la figure (3.8) ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ) pour  $Gr \leq 7.5 \times 10^4$  l'augmentation du nombre de Grashof qui traduit une intensification de la convection naturelle, a permis l'apparition d'une bifurcation donnant naissance à deux cellules supplémentaires tournant dans le sens contraire des cellules voisines et les figures (3.9,3.10), pour respectivement,  $Gr \leq 10^5$  et  $Gr \leq 2 \times 10^5$  montrent que pour cette configuration ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ) nous avons deux bifurcations avec quatre cellules supplémentaires tournant chacune dans le sens contraire de sa cellule voisine. L'augmentation du nombre de Grashof, nous a permis donc de passer à un autre régime d'écoulement, qui est l'écoulement multicellulaire, avec l'apparition de ces bifurcations dans la partie supérieure de notre espace annulaire, qui est une zone d'instabilités aux grandes valeurs du nombre de Grashof.

Ces figures montrent aussi, que le fluide est pratiquement immobile, dans la partie basse de notre enceinte.

Les lignes isothermes se déforment et s'enfoncent là où il y a présence de deux tourbillons contra-rotatifs.

Notons aussi que les lignes isothermes, de toutes les figures citées plus haut, ont été tracées avec un  $\Delta T^*=0.1$ .

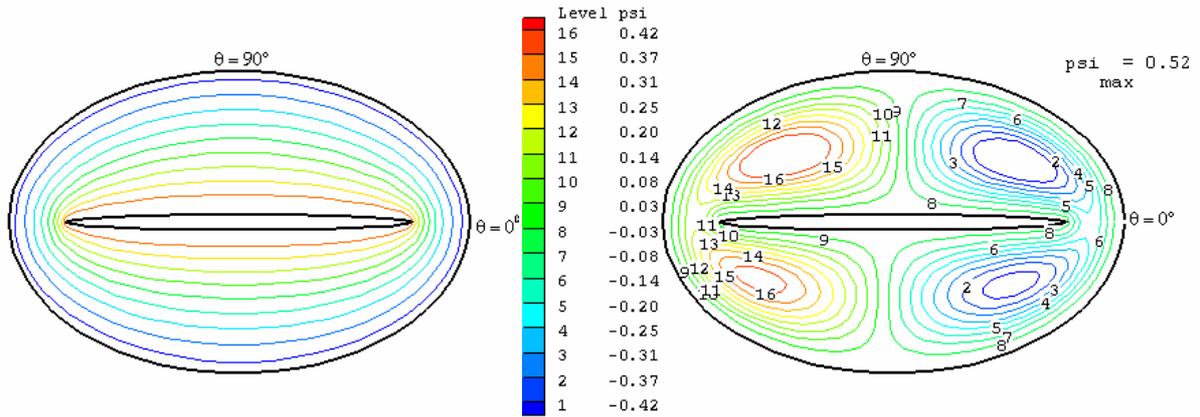


Fig. 3.2. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^3$

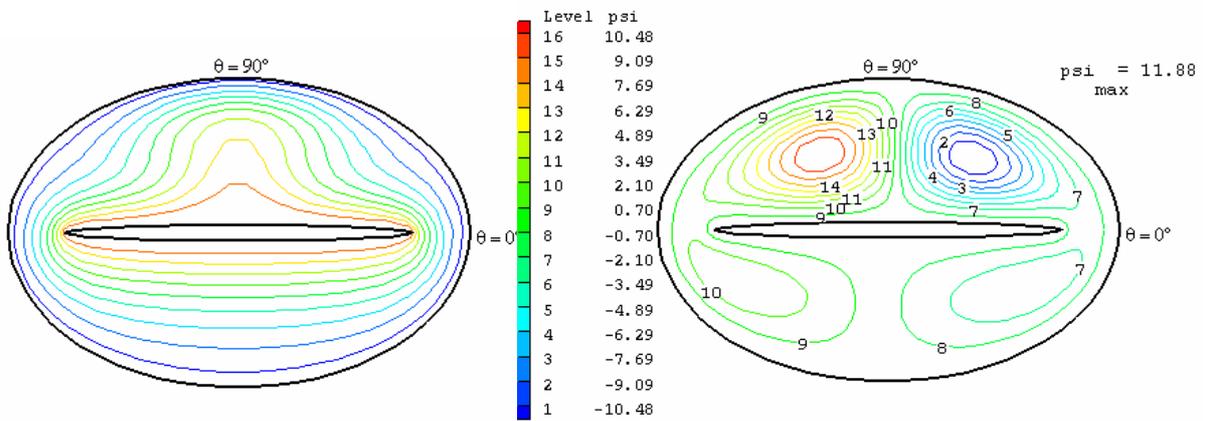


Fig. 3.3. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^4$

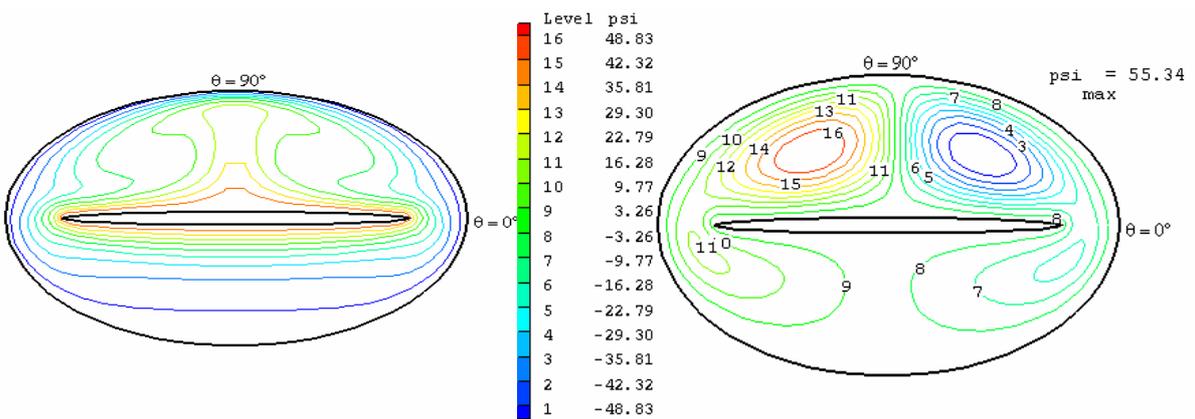


Fig. 3.4. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^5$

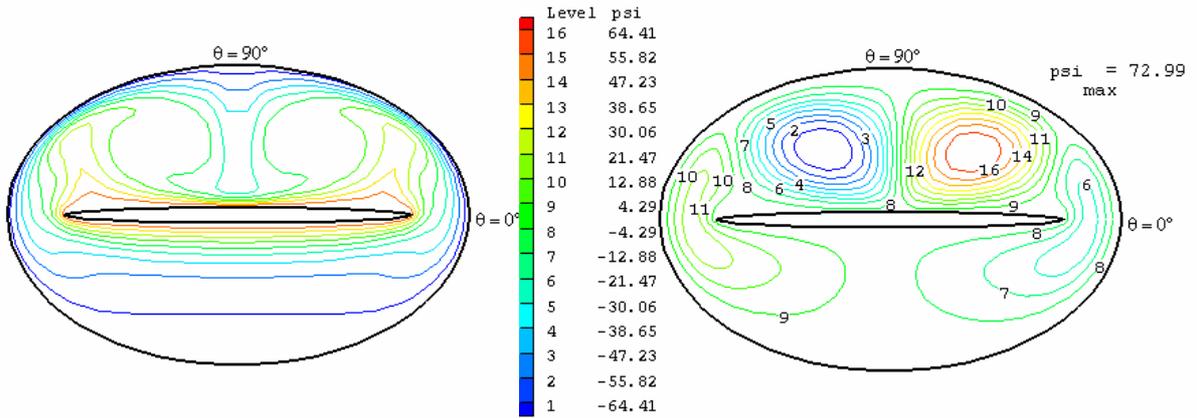


Fig. 3.5. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=2.10^5$

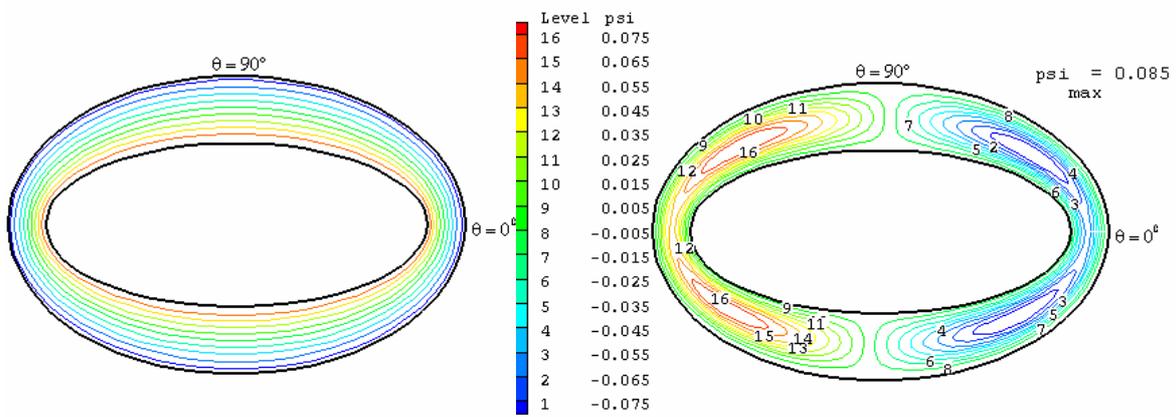


Fig. 3.6. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^3$

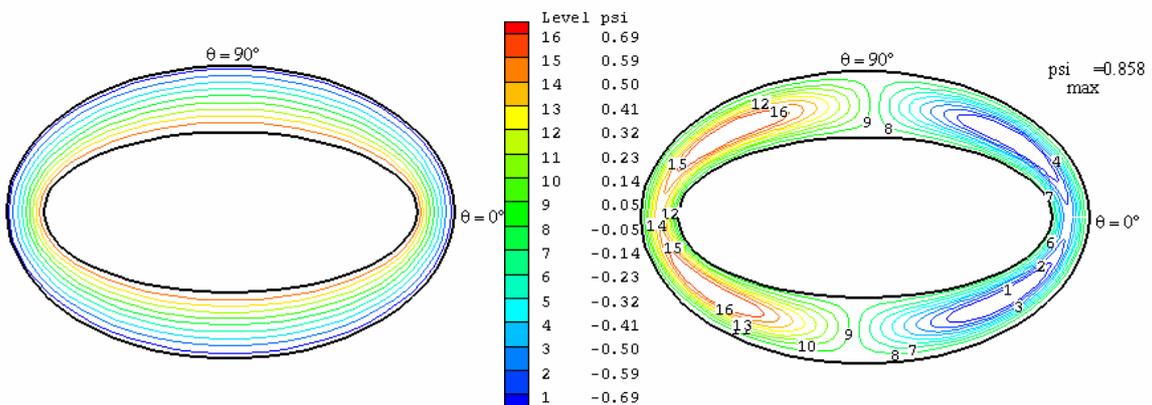


Fig. 3.7. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^4$

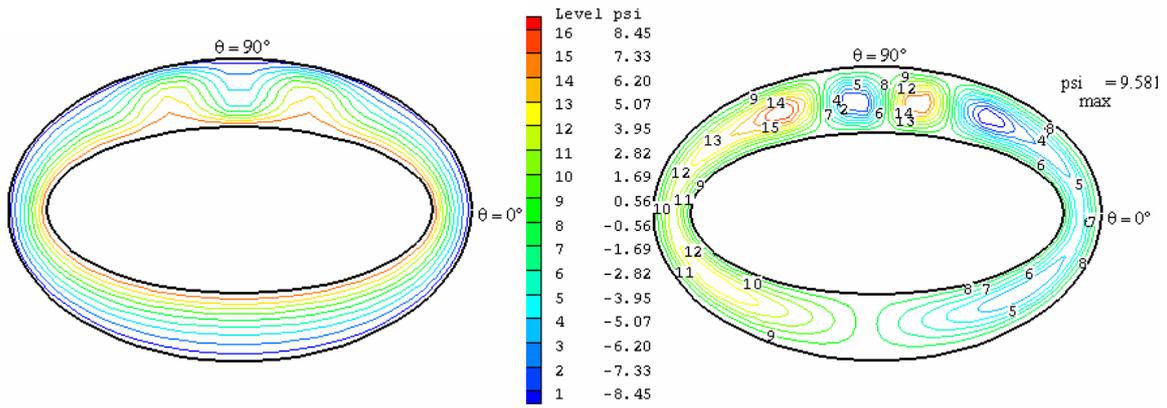


Fig. 3.8. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=7.5 \times 10^4$

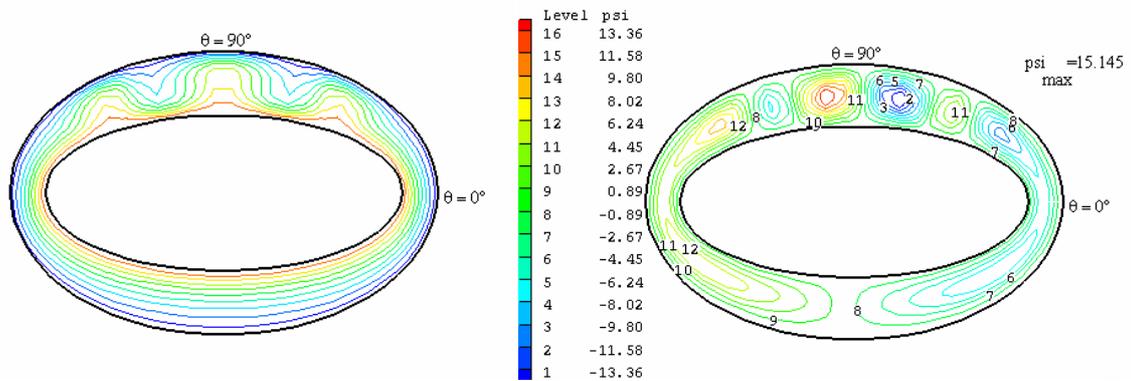


Fig. 3.9. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^5$

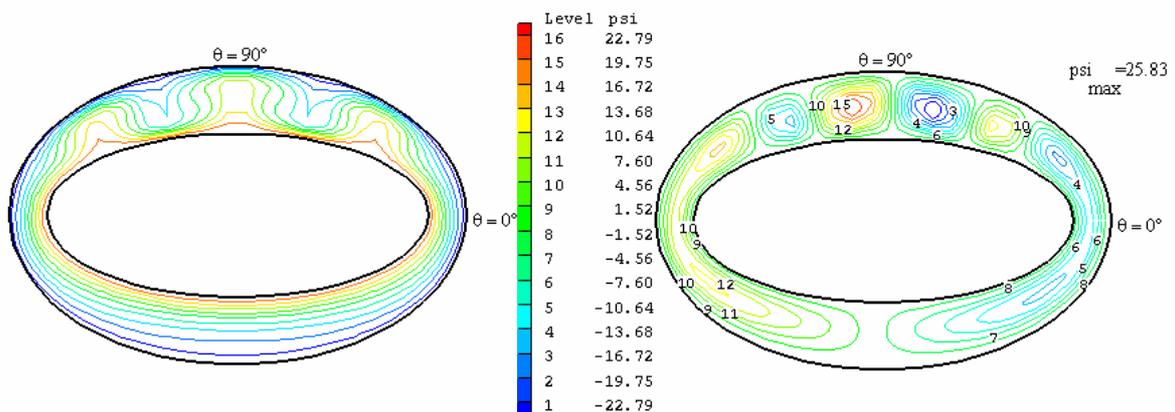


Fig. 3.10. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=2.10^5$

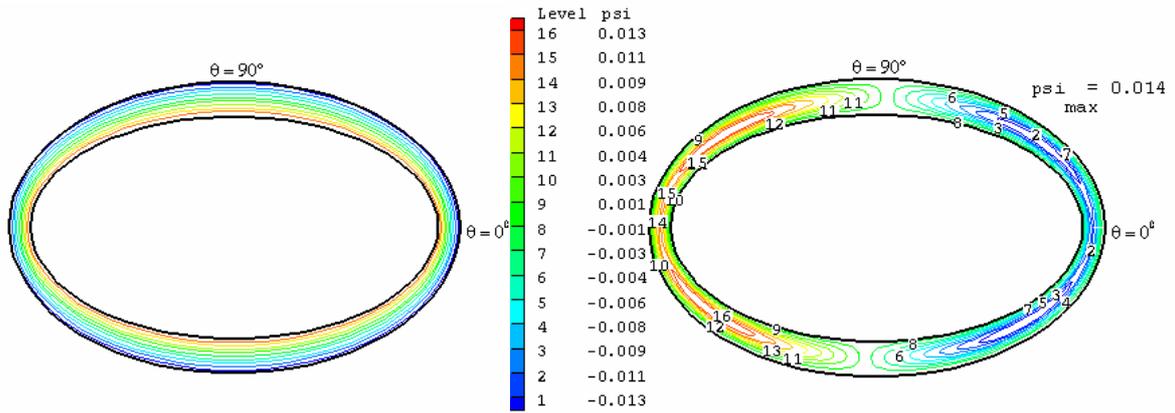


Fig. 3.11. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^3$

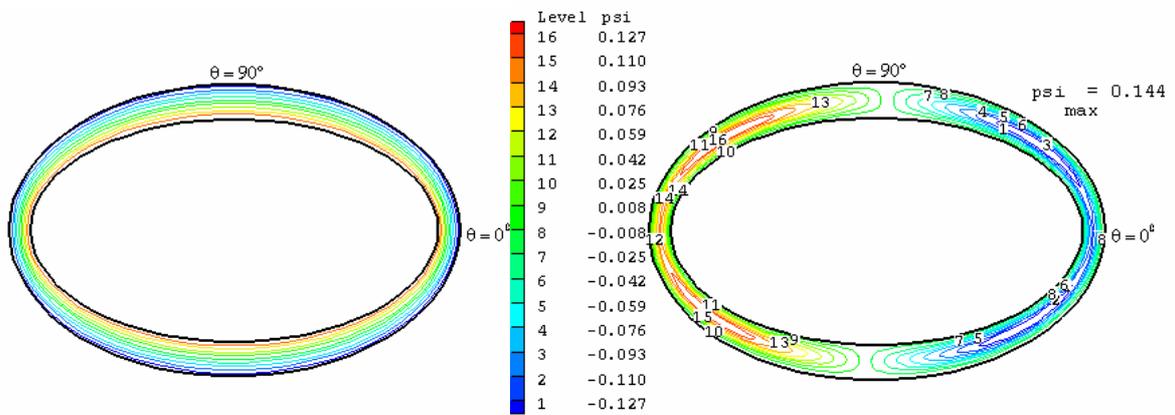


Fig. 3.12. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^4$

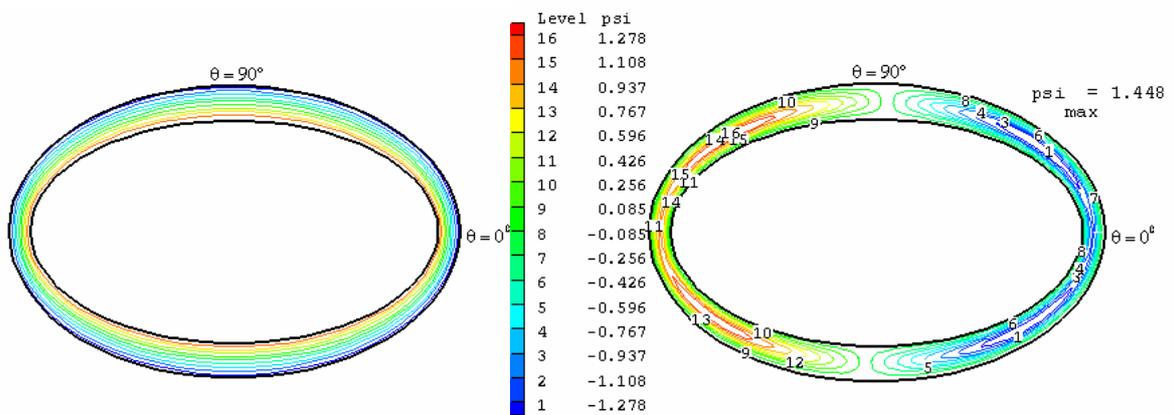


Fig. 3.13. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^5$

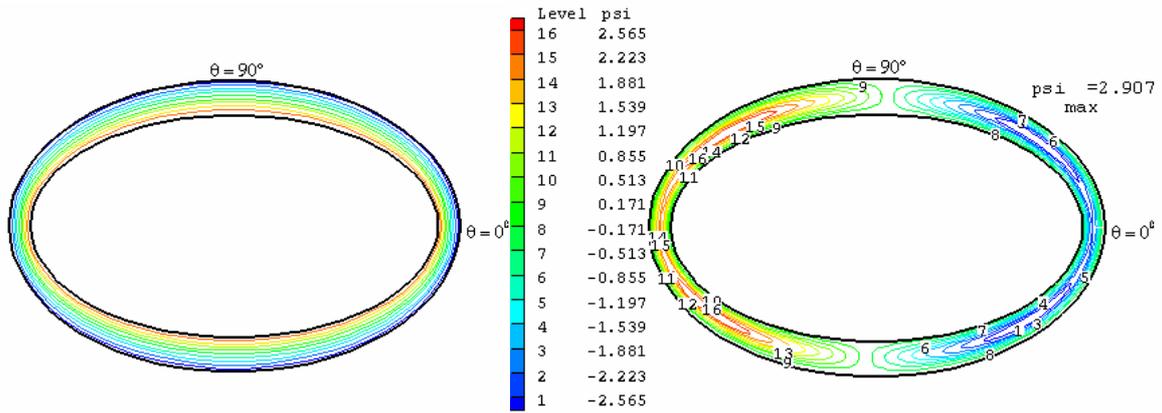


Fig. 3.14. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=2.10^5$

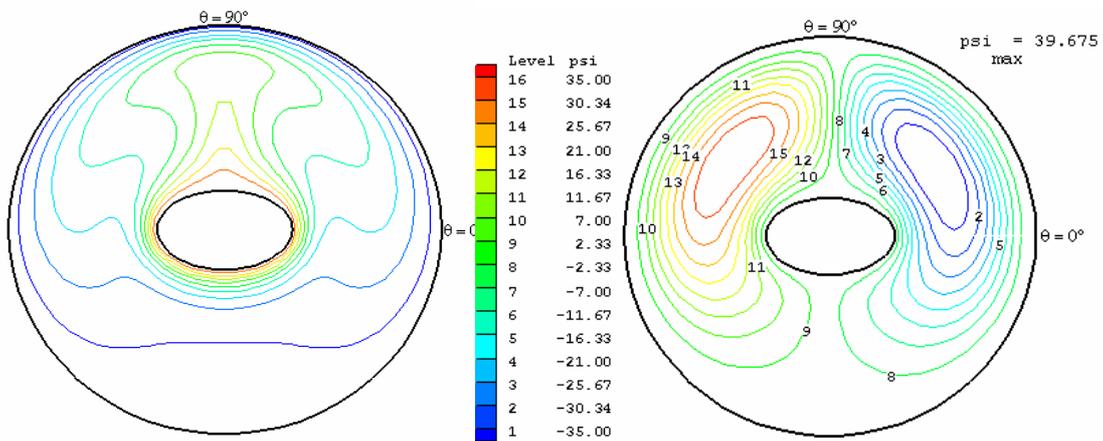


Fig. 3.15. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.8$ ,  $e_2=0.25$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^3$

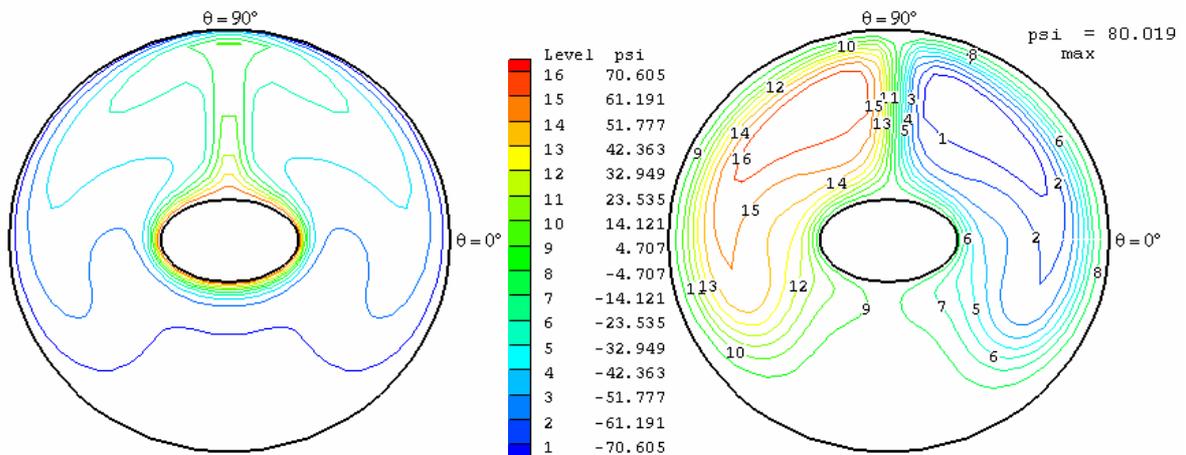


Fig. 3.16. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.8$ ,  $e_2=0.25$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr=10^4$

### **3.4.1.1 Nombre local de Nusselt**

Nous déterminons les nombres de Nusselt locaux dont les variations le long des parois sont étroitement liées aux distributions des isothermes et des isocourants, de sorte que, qualitativement, ces variations et ces distributions peuvent souvent se déduire les unes des autres. Par exemple, si l'on considère un point courant sur une paroi suivant une coordonnée, l'observation d'une diminution monotone du nombre de Nusselt local correspond à un écoulement dirigé suivant cette coordonnée; l'observation d'une augmentation correspond à un écoulement dirigé en sens opposé; un minimum traduit l'existence de deux tourbillons contra-rotatifs éloignant le fluide de la paroi ; un maximum traduit, au contraire, l'existence de deux tourbillons contra-rotatifs apportant du fluide vers la paroi ; un décrochement au cours d'une diminution traduit l'existence, à l'intérieur d'un tourbillon longeant la paroi suivant la coordonnée considérée, de deux tourbillons co-rotatifs; un décrochement au cours d'une augmentation traduit l'existence de deux tourbillons co-rotatifs, à l'intérieur d'un tourbillon longeant la paroi en sens contraire de la coordonnée envisagée.

### **3.4.1.2 Analogie entre la variation du nombre de Nusselt local - isothermes et isocourants**

Nous remarquons donc sur les figures 3.17 et 3.18 qui suivent que les variations du nombre de Nusselt local sur la paroi interne sont en conformité avec ce qui vient d'être cité plus haut. Ce qui nous permet donc de suivre l'évolution de notre écoulement dans notre espace annulaire.

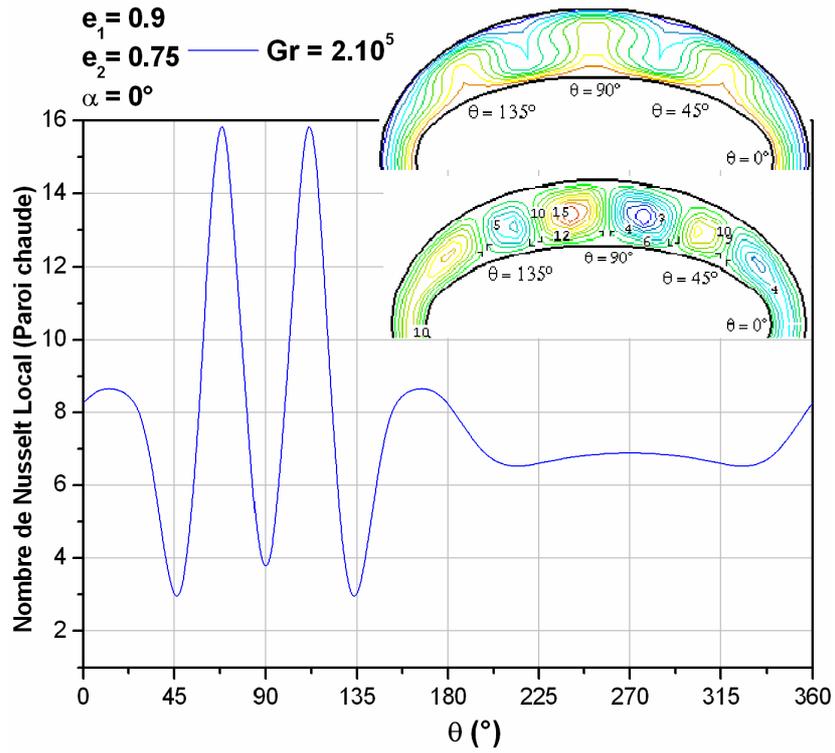


Fig. 3.17. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

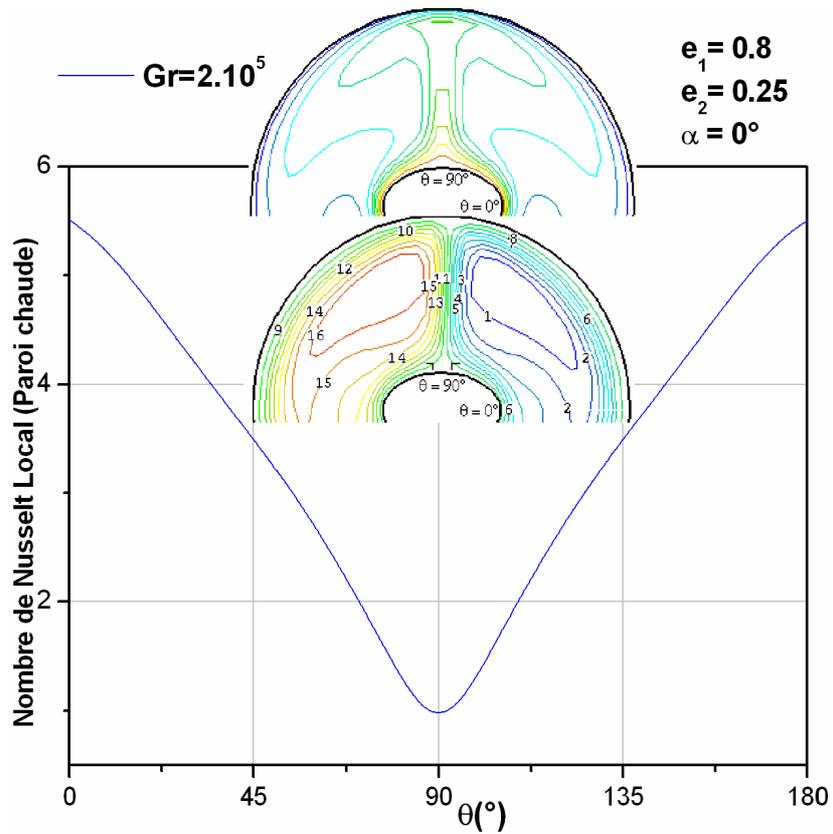


Fig. 3.18. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

### 3.4.1.3 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique intérieur

Les figures 3.19 et 3.20 illustrent la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique intérieur, et nous permettent de remarquer qu'avec l'augmentation du nombre de Grashof, la valeur du nombre de Nusselt local augmente, ce qui est évident.

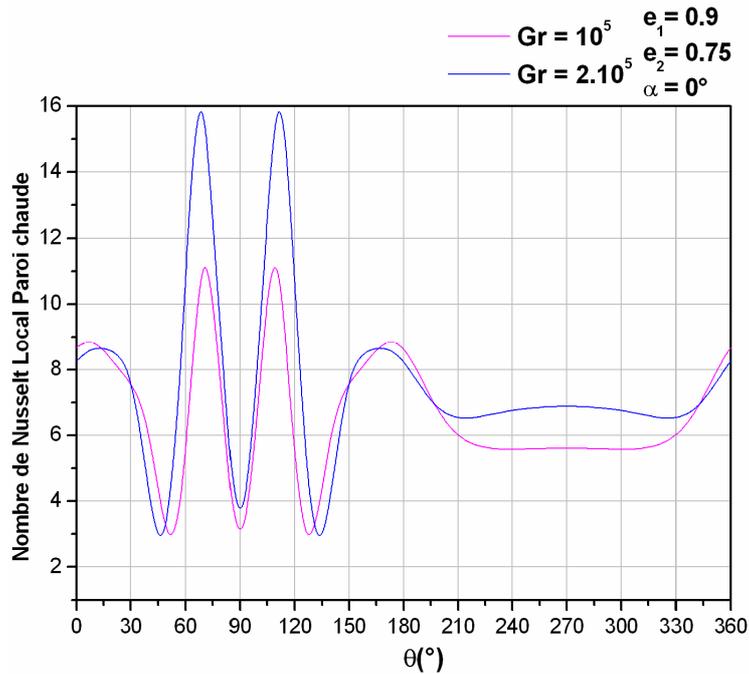


Fig. 3.19. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

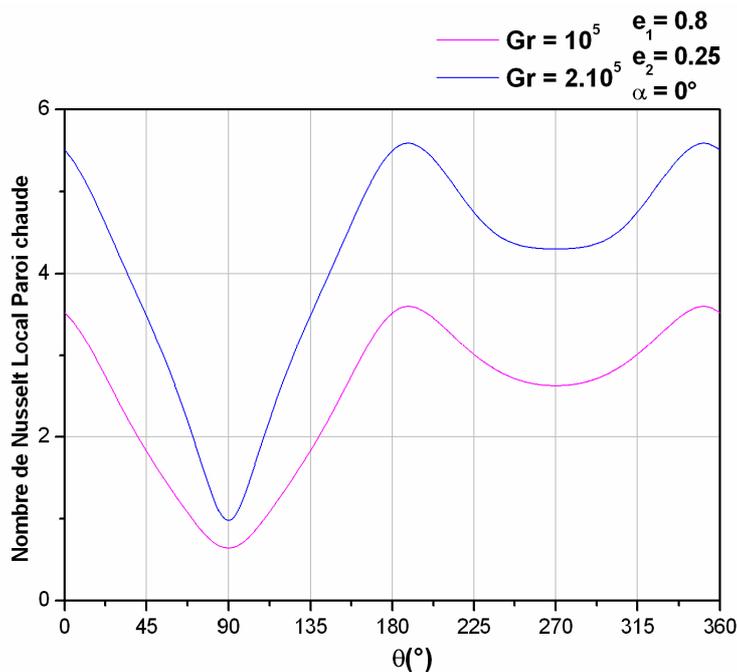


Fig. 3.20. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

### 3.4.1.4 Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi du cylindre elliptique extérieur

Examinons la figure 3.21 qui représente les courbes de variation des nombres de Nusselt locaux  $Nu_i$  et  $Nu_e$  le long des parois des cylindres intérieur et extérieur respectivement (pour  $\alpha=0^\circ$ ). On voit, par exemple sur cette figure, que  $Nu_e$  est maximum dans la région sommitale ( $\theta=90^\circ$ ) et minimum dans la partie basse de l'enceinte ( $\theta=270^\circ$ ) où le fluide est pratiquement immobile. Sur la paroi intérieure, les variations sont inversées : De telles oppositions se retrouvent quelle que soit la géométrie étudiée et s'expliquent si l'on connaît les répartitions des lignes isothermes et isocourants. Si le point de la paroi est situé juste entre deux tourbillons contra-rotatifs, le nombre de Nusselt local est minimum si le fluide s'éloigne de la paroi et, maximum, si le fluide arrive vers la paroi.

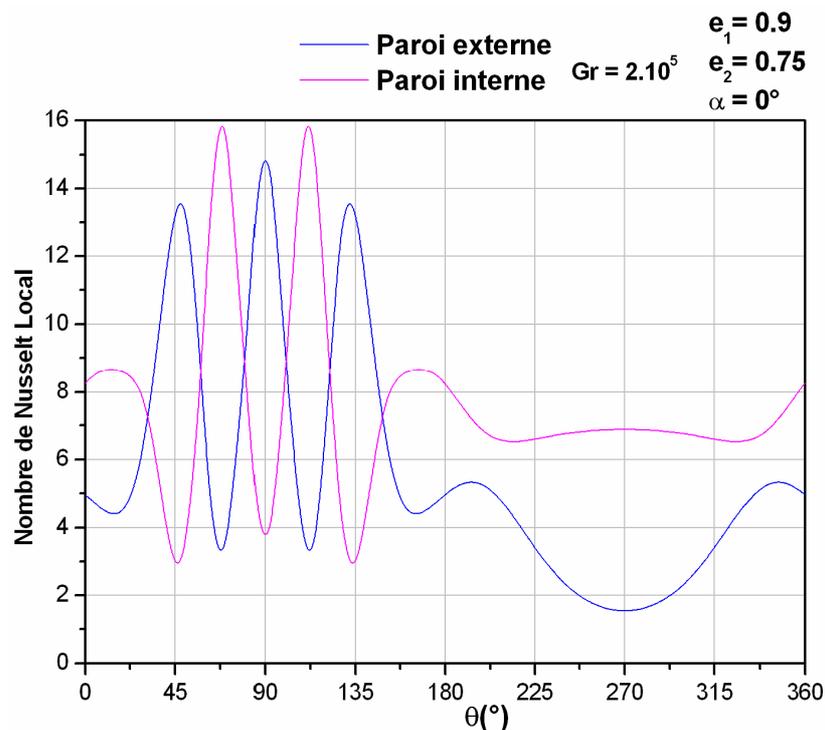


Fig. 3.21. Variation du nombre de Nusselt local sur les deux parois

### 3.4.1.5 Nombre de Nusselt moyen

La figure 3.22 montre que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent en augmentant la valeur du nombre de Grashof, pour les configurations considérées, ce qui est évident.



Fig. 3.22. Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne

### **3.4.2 Effet de la variation de l'angle d'inclinaison $\alpha$ :**

Dans cette partie, nous examinons donc l'effet de l'inclinaison du système par rapport à la verticale, l'angle  $\alpha$  est calculé à partir de l'horizontale dans le sens trigonométrique. Pour ce faire nous avons considéré pour la configuration géométrique ( $e_1=0.999$  et  $e_2=0.75$ ) quatre valeurs de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), pour la configuration géométrique ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ) nous avons pris 11 valeurs de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $38^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $42.5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $47.5^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ ) et pour les autres configurations géométriques nous avons pris trois valeurs de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ).

#### **3.4.2.1 Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha$ est nul :**

Dans ce cas, le plan vertical fictif médian est, en principe, un plan de symétrie pour les phénomènes de transferts. Par symétrie donc, et par rapport à ce plan vertical, selon la valeur du nombre de Grashof ou bien la configuration géométrique considérée, l'écoulement s'organise, toujours en deux cellules principales tournant dans des sens contraires, ou bien avec deux ou quatre cellules en plus, selon le cas considéré, comme l'illustrent bien les figures (3.2-3.16).

### **3.4.2.2 Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha \neq 0^\circ$ et $\alpha \neq 90^\circ$ ;**

En donnant à l'angle  $\alpha$  une valeur quelconque différente de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ , on détruit la symétrie du système par rapport au plan fictif vertical, on déplace la zone de rétrécissement de l'espace annulaire vers le haut pour la partie droite du système et vers le bas pour la partie gauche. La figure (3.23) pour  $\alpha=3^\circ$  et  $Gr=2 \times 10^5$  montre que le tourbillon de droite peut davantage se développer que son homologue dans la partie gauche et que la cellule de la partie droite inférieure se développe aussi davantage que son homologue dans la partie gauche. En augmentant toujours la valeur de l'angle de l'inclinaison pour arriver à  $\alpha=45^\circ$ , la figure (3.24) toujours pour  $Gr=2 \times 10^5$  montre qu'en se développant ces deux tourbillons occupent tout l'espace annulaire.

### **3.4.2.3 Cas où l'angle d'inclinaison $\alpha=90^\circ$ :**

Quand  $\alpha=90^\circ$ , le plan fictif vertical passant par le centre du système est à nouveau un plan de symétrie, mais cette fois, le rétrécissement est situé en haut de la cavité. Les figures (3.25) et (3.31) montrent la nette déformation des lignes isothermes par l'écoulement : tantôt un entraînement vers le haut dans le sens de l'écoulement proche de la paroi chaude, tantôt un entraînement vers le bas compatible avec le sens de l'écoulement près de la paroi froide, dans la région sommitale, ces lignes isothermes s'insèrent vers le haut, ceci est dû au décollement des particules qui s'éloignent de la paroi chaude au niveau du plan de symétrie, ce qui dénote donc, la présence de part et d'autre de ce dernier, de deux tourbillons contra-rotatifs emmenant le fluide de la paroi chaude vers la paroi froide. La température diminue de la paroi chaude inférieure vers la paroi froide supérieure.

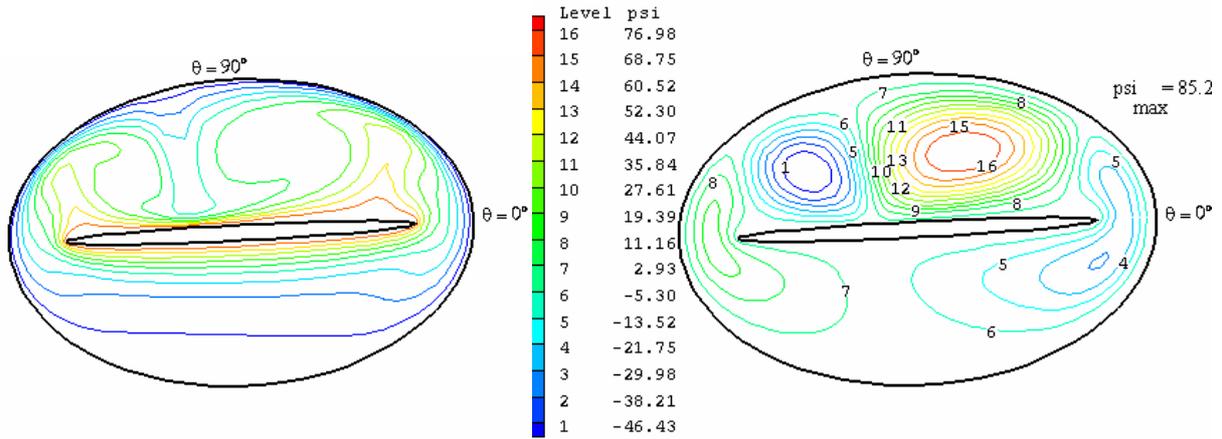


Fig. 3.23. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=2.10^5$  et  $\alpha=3^\circ$

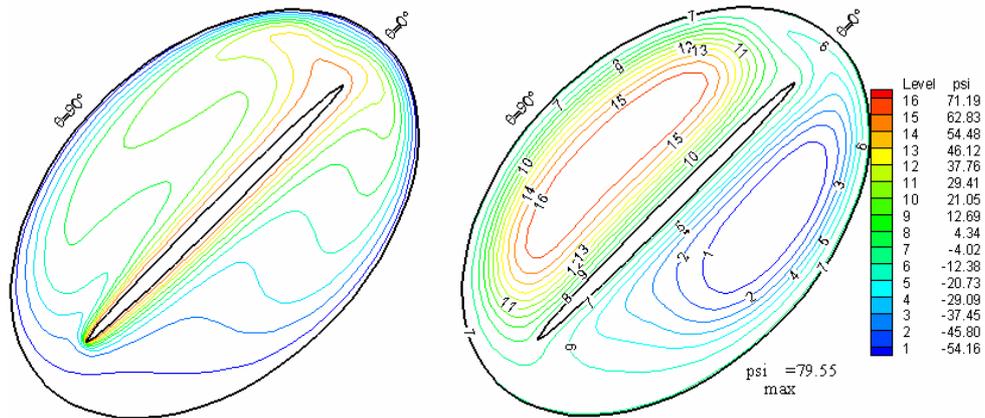


Fig. 3.24. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=2.10^5$  et  $\alpha=45^\circ$

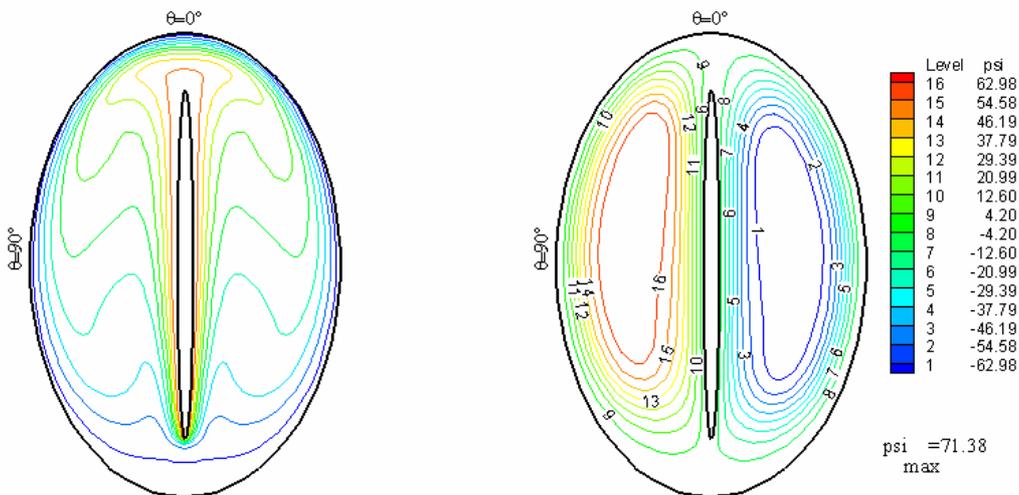


Fig. 3.25. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.999$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=2.10^5$  et  $\alpha=90^\circ$

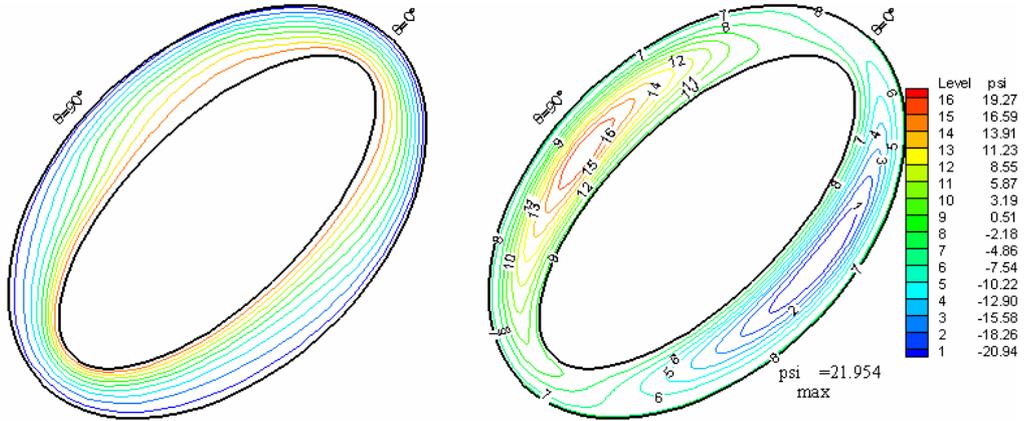


Fig. 3.26. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=10^5$  et  $\alpha=45^\circ$

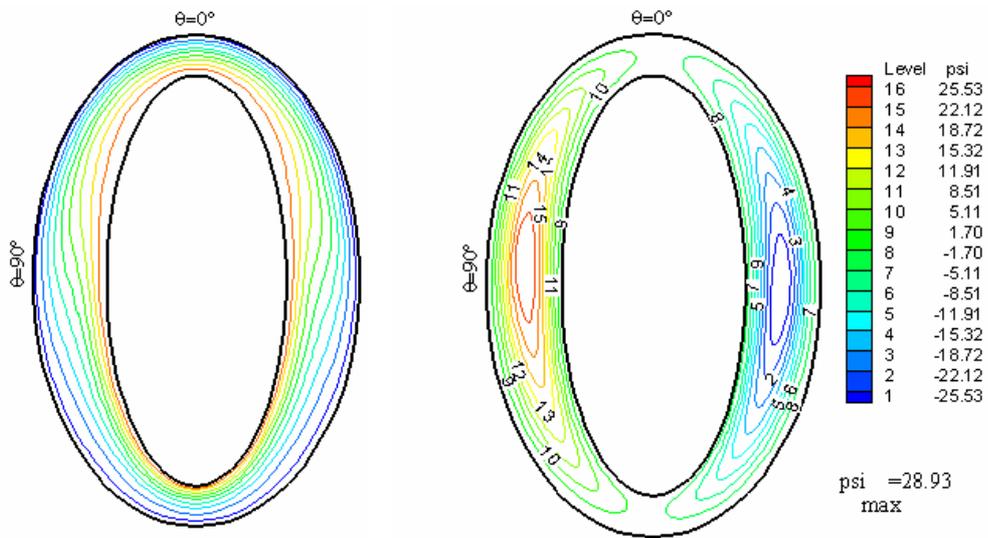


Fig. 3.27. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=10^5$  et  $\alpha=90^\circ$

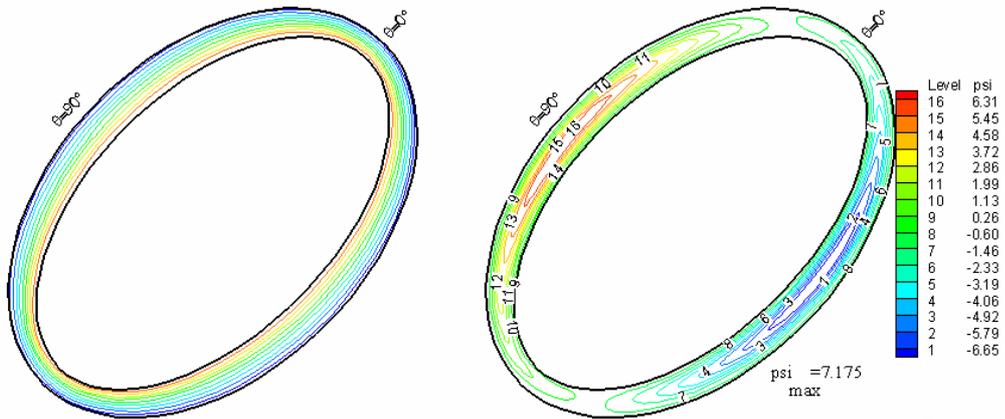


Fig. 3.28. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=2.10^5$  et  $\alpha=45^\circ$

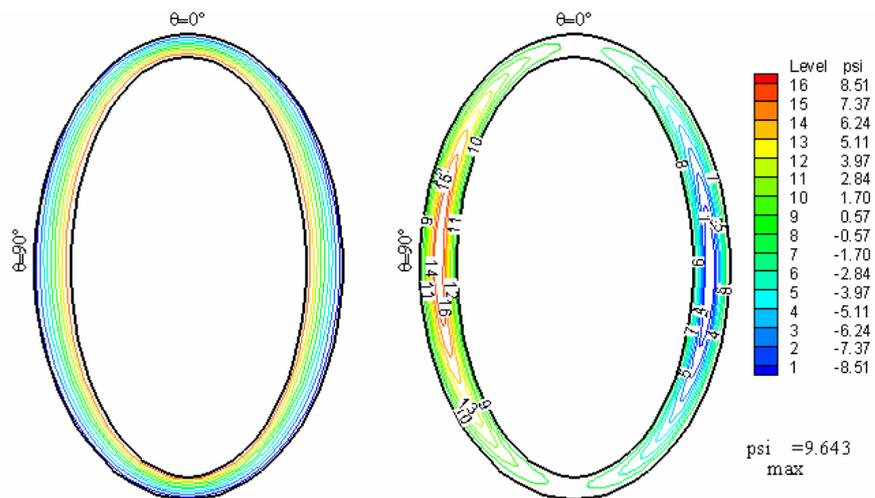


Fig. 3.29. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.83$ ,  $e_2=0.75$ ,  $Gr=2.10^5$  et  $\alpha=90^\circ$

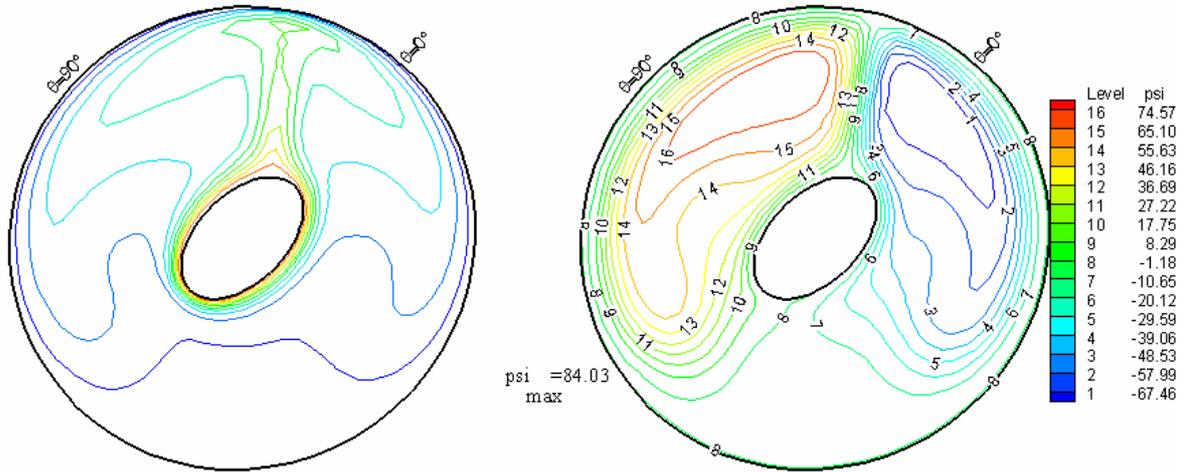


Fig. 3.30. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.8$ ,  $e_2=0.25$ ,  $Gr=10^4$  et  $\alpha=45^\circ$

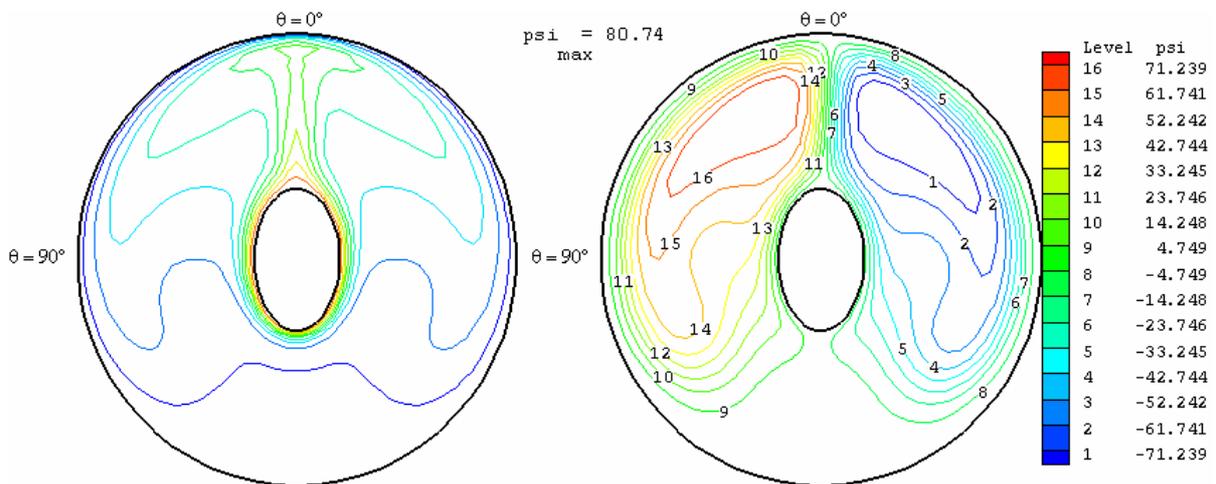


Fig. 3.31. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.8$ ,  $e_2=0.25$ ,  $Gr=10^4$  et  $\alpha=90^\circ$

### 3.4.2.4 Nombre de Nusselt local et moyen

La figure 3.32 qui illustre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude montre que pour  $\alpha=0^\circ$  le minimum du nombre de Nusselt local est atteint à la position angulaire  $\theta=90^\circ$ , ce qui est en accord avec la figure 3.16 qui montre que les deux tourbillons se rencontrent à cet endroit précis en éloignant le fluide de cette paroi. Pour  $\alpha=45^\circ$  le minimum du nombre de Nusselt local se déplace à la position angulaire  $\theta=30^\circ$ , ce qui est en accord aussi avec la figure 3.30 qui montre que pour cette inclinaison, les deux tourbillons se rencontrent à cette position angulaire en y éloignant du fluide de cette paroi. Enfin pour  $\alpha=90^\circ$  ce minimum est atteint à la position angulaire  $\theta=0^\circ$  et la figure 3.31 nous le confirme aussi.

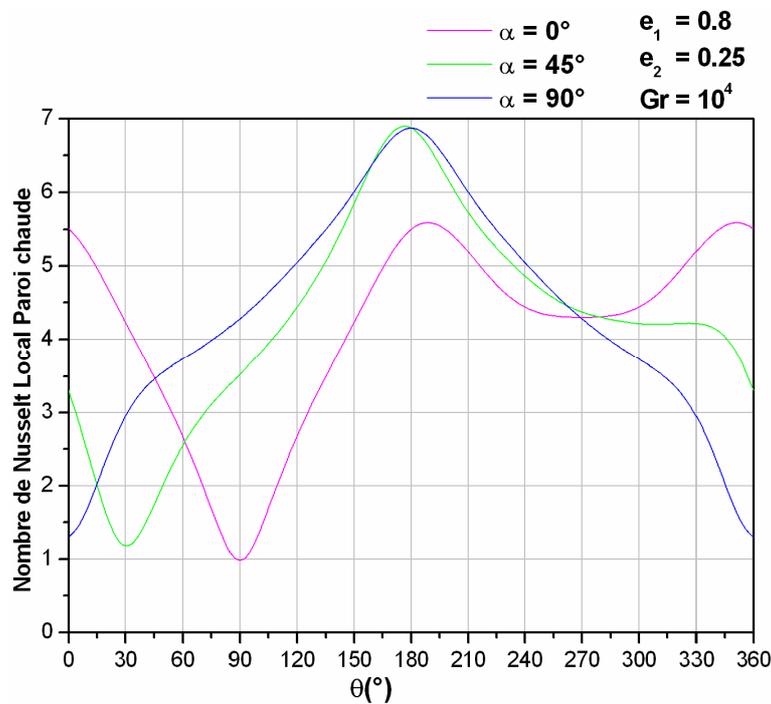


Fig. 3.32. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

Sur la figure 3.33 qui représente aussi les courbes de variations des nombres de Nusselt locaux  $Nu_i$  et  $Nu_e$  respectivement le long des parois des cylindres intérieur et extérieur (pour  $\alpha=90^\circ$ ), nous remarquons aussi que  $Nu_e$  est maximum dans la région sommitale ( $\theta=330^\circ - \theta=30^\circ$ ) et minimum dans la partie basse de l'enceinte ( $\theta=135^\circ - \theta=225^\circ$ ). Sur la paroi intérieure, les variations sont inversées.

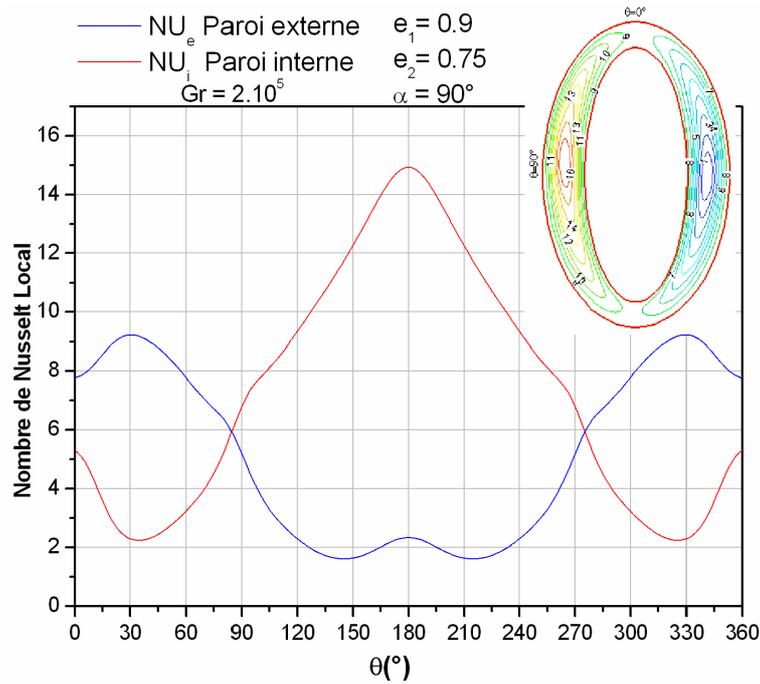


Fig. 3.33. Variation du nombre de Nusselt local sur les deux parois

La variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne en fonction du nombre de Grashof (figure 3.34) montre que l'angle est sans influence pour  $Gr < 10^4$ , ce qui nous met en accord avec ce qui précède (figures 3.6 et 3.7) que le transfert de chaleur est essentiellement conductif. Pour les plus grandes valeurs du nombre de Grashof,  $\alpha$  influe sur le transfert convectif et les changements de structures de l'écoulement se traduisent par des perturbations.

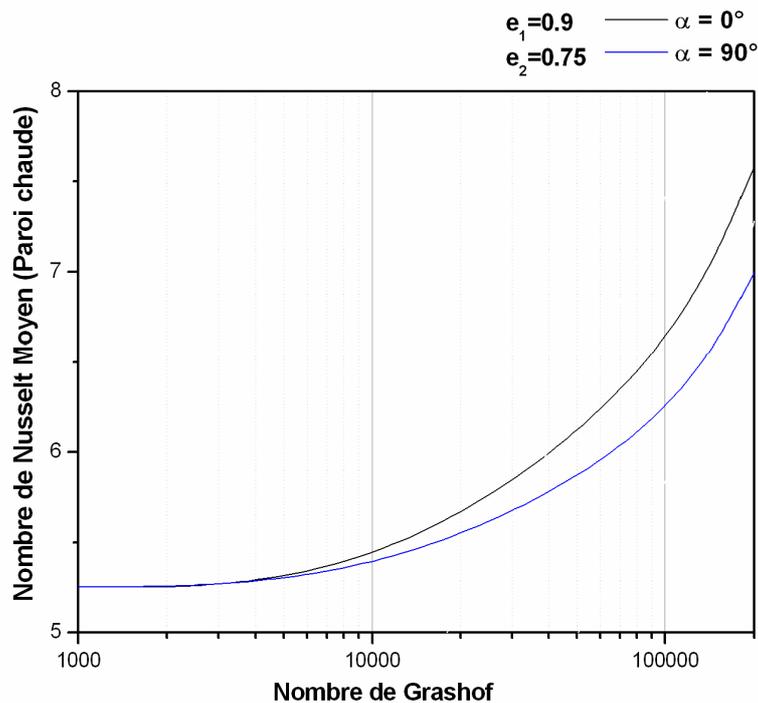


Fig. 3.34. Variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne

Le tableau 3.3 suivant regroupe les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur la paroi interne  $\overline{NU}_i$ , pour la configuration ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ), pour les différentes valeurs de  $\alpha$  considérées et pour un nombre de Grashof  $Gr=10^5$ .

$\alpha(^{\circ})$	0	25	30	38	40	42.5	45	47.5	50	60	90
$\overline{NU}_i$	6.23	6.18	6.15	5.90	5.88	5.82	5.80	5.83	5.85	5.94	6.06

Tableau 3.3 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de  $\alpha$  pour ( $e_1=0.9$  et  $e_2=0.75$ ) et  $Gr=10^5$

D'après ce tableau nous remarquons que les plus grandes valeurs du nombre de Nusselt moyen pour cette configuration sont obtenues pour les cas de la symétrie ( $\alpha=0^{\circ}$  et  $\alpha=90^{\circ}$ ) ce qui nous met en accord avec la figure 3.9 qui montre le passage à un autre régime d'écoulement et les isothermes de la figure 3.27 qui dénotent une convection dominante.

### 3.4.3 Influence de l'excentricité du cylindre elliptique interne $e_1$

En fixant la valeur de l'excentricité du tube elliptique externe  $e_2=0.75$  et en faisant varier celle du tube elliptique interne  $e_1$  pour un angle d'inclinaison  $\alpha$  nul et un nombre de Grashof donné nous avons ce qui suit :

Les figures (3.35, 3.38 et 3.41) pour les différentes valeurs du nombre de Grashof considérées montrent que quand  $e_1=0.83$  l'espace libre entre les deux surfaces d'échange est petit, il favorise donc le transfert conductif, mais avec l'augmentation de  $e_1$ , cet espace libre va s'élargir pour favoriser le transfert par convection qui reste relativement faible, en se referant aux lignes isothermes pour  $Gr=10^4$  de la figure 3.37, mais ce transfert par convection devient plus important pour  $Gr=10^5$  et  $Gr=2 \times 10^5$ , cas des figures 3.39-3.40 et 3.42-3.43.

L'augmentation de la valeur de l'excentricité interne  $e_1$ , entraîne donc une augmentation de l'espace libre entre les deux surfaces d'échange, ce qui se traduit par une intensification de la convection naturelle, par exemple pour un nombre de Grashof  $Gr=2 \times 10^5$ , la figure 3.41 ne montre aucune bifurcation pour  $e_1=0.83$ , la figure 3.43 montre une bifurcation pour  $e_1=0.999$ , alors que la figure 3.42 illustre l'existence de deux bifurcations ceci pour  $Gr \leq 2 \times 10^5$ .

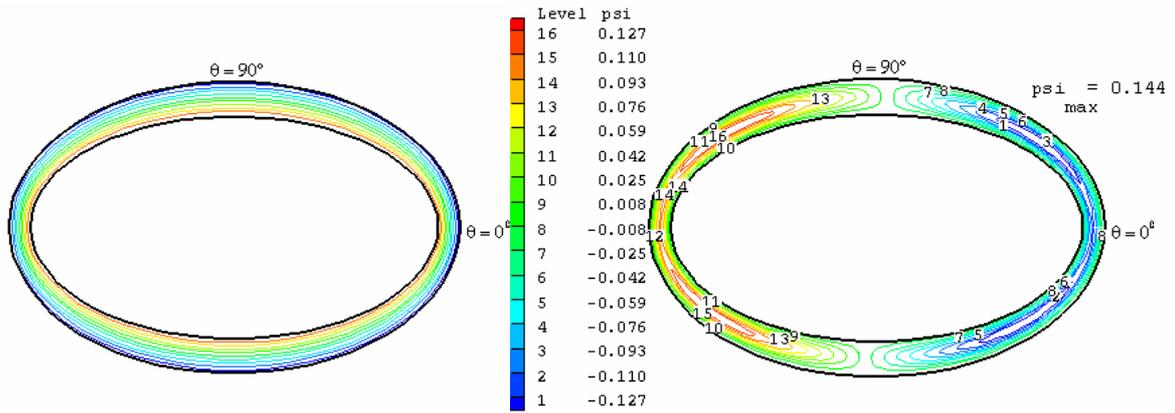


Fig. 3.35. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^4$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.83$

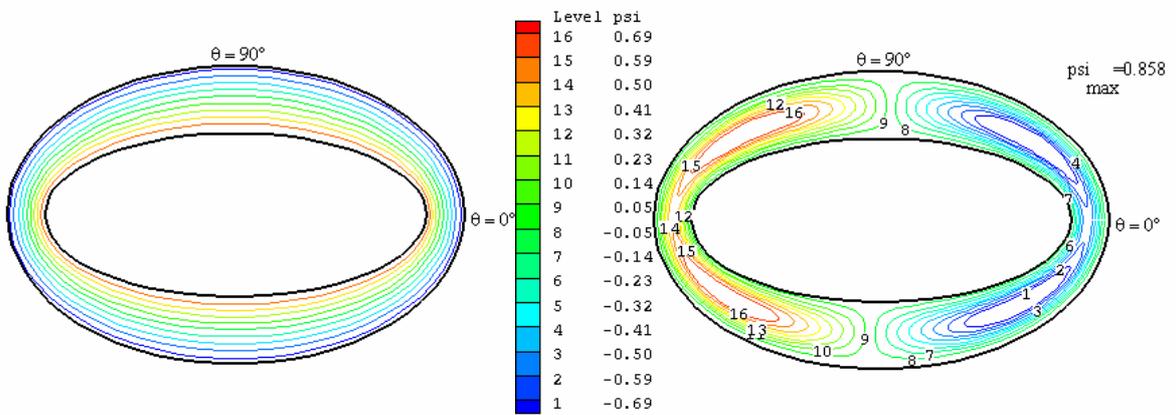


Fig. 3.36. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^4$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.9$

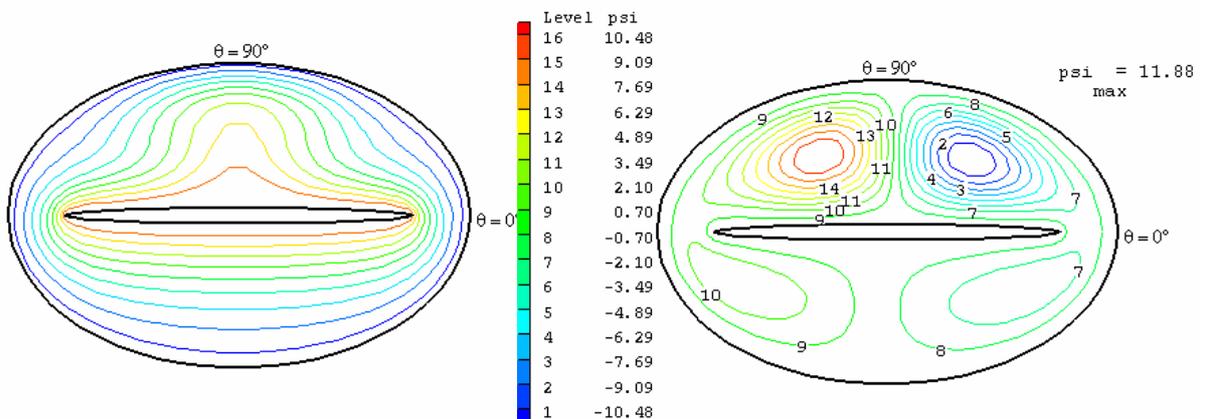


Fig. 3.37. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^4$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.999$

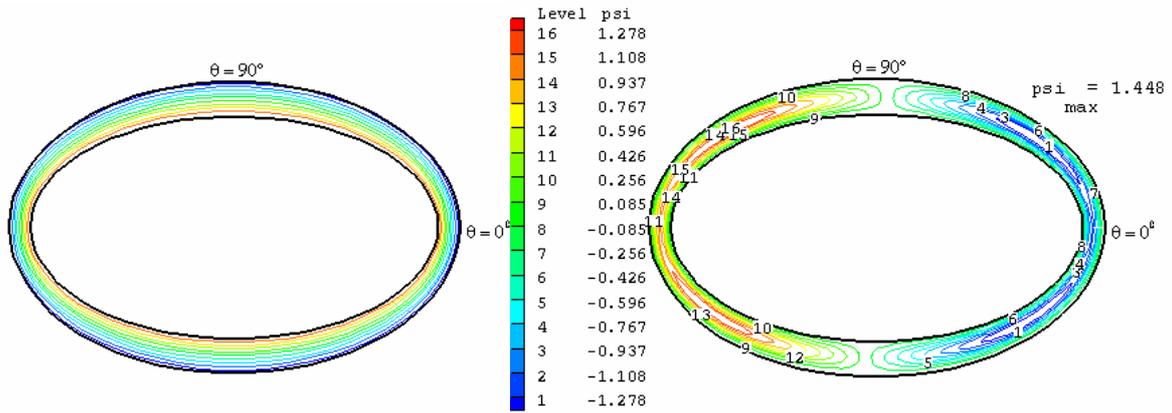


Fig. 3.38. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.83$

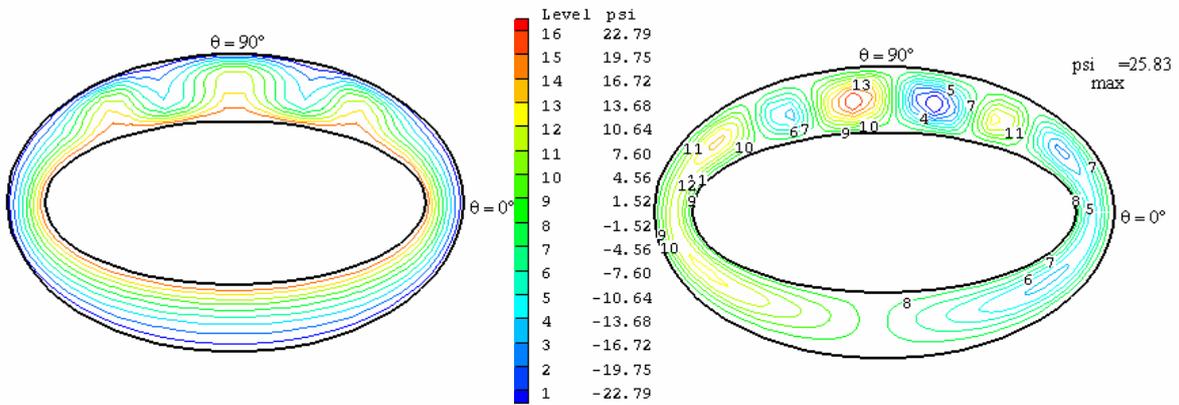


Fig. 3.39. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.9$

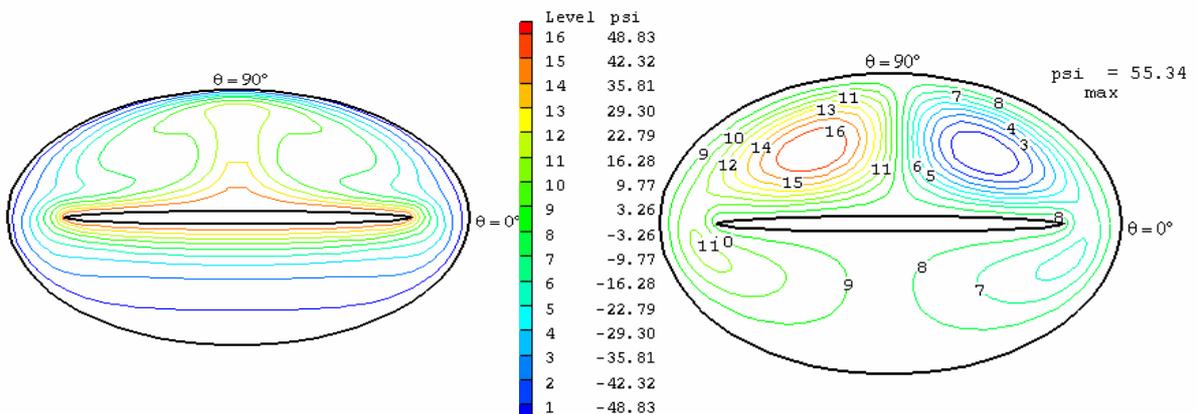


Fig. 3.40. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.999$

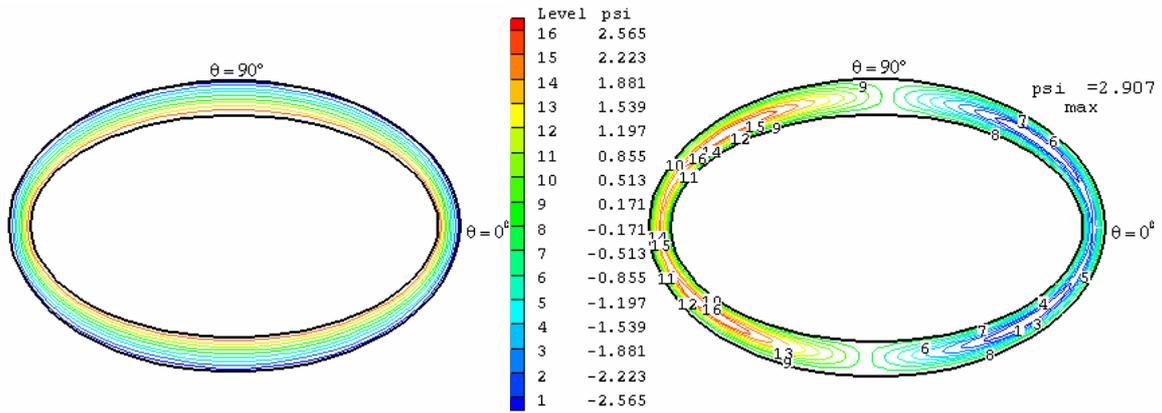


Fig. 3.41. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=2.10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.83$

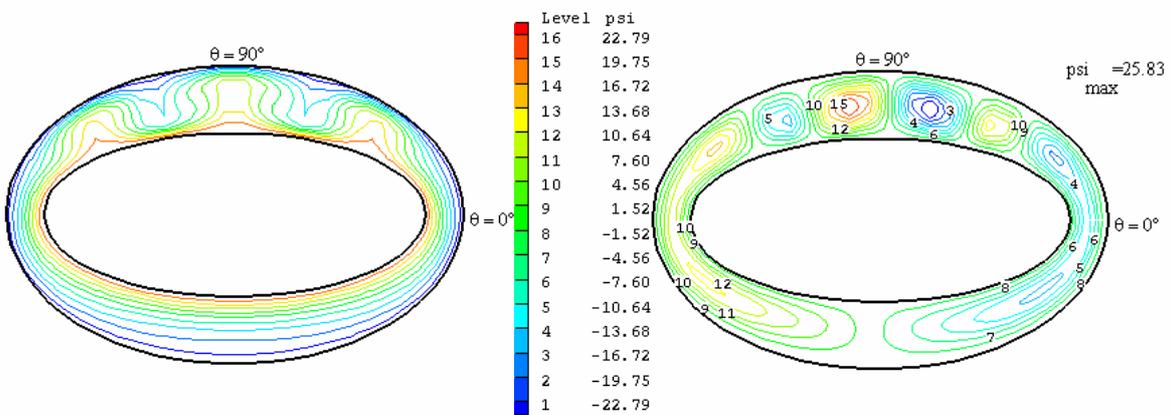


Fig. 3.42. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=2.10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.9$

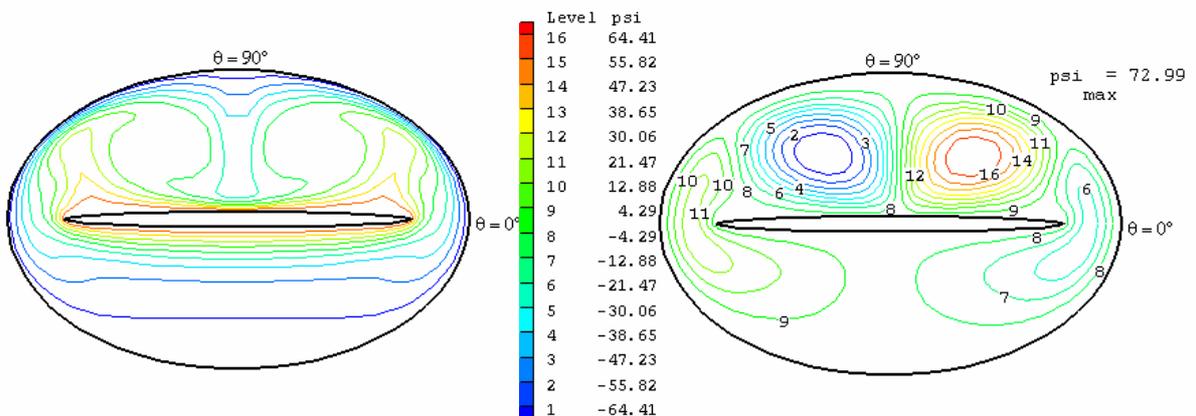


Fig. 3.43. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=2.10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.999$

### 3.4.3.1 Nombre de Nusselt local

La figure 3.44 illustre les variations des nombres de Nusselt locaux sur la paroi chaude, pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , nous pouvons donc remarquer sur cette figure que l'angle est sans effet sur les variations du nombre de Nusselt local sur cette paroi, ce qui dénote que pour cette configuration, c'est le régime conductif qui est favorisé puisque l'entrefer est petit et donc les parois sont très proches.

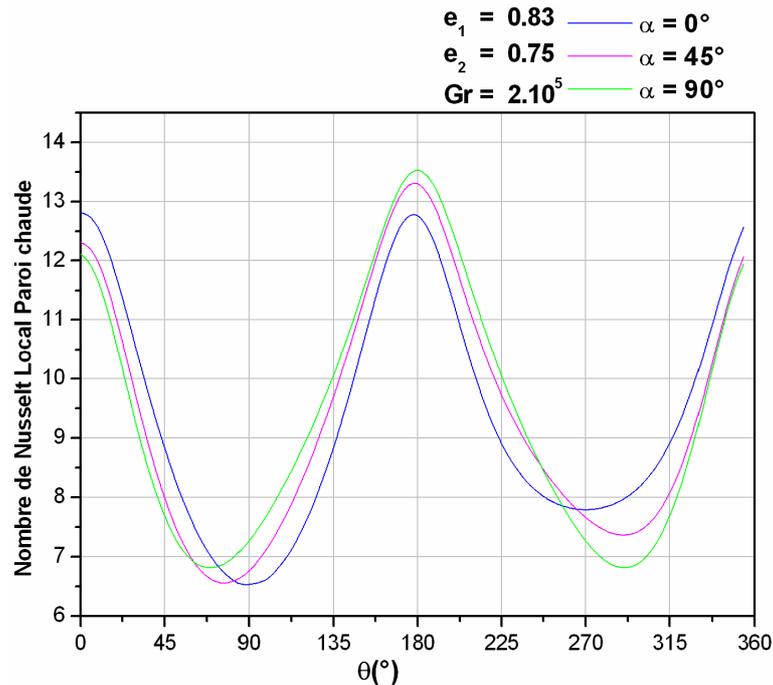


Fig. 3.44. Variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude

## 3.5 Cas de la paroi interne soumise à une densité de flux constante (Deuxième partie)

### 3.5.1 Influence du nombre de Grashof modifié

Les figures (3.45-3.47) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié  $Gr_m$  quand  $\alpha=0^\circ$ .

Nous remarquons là aussi, que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical fictif médian. Les figures (3.45) et (3.46) montrent que le régime de l'écoulement reste monocellulaire pour un nombre de Grashof modifié  $Gr_m=10^5$  et la figure (3.47) montre que le régime de l'écoulement devient multicellulaire pour  $Gr_m \leq 3.10^5$ .

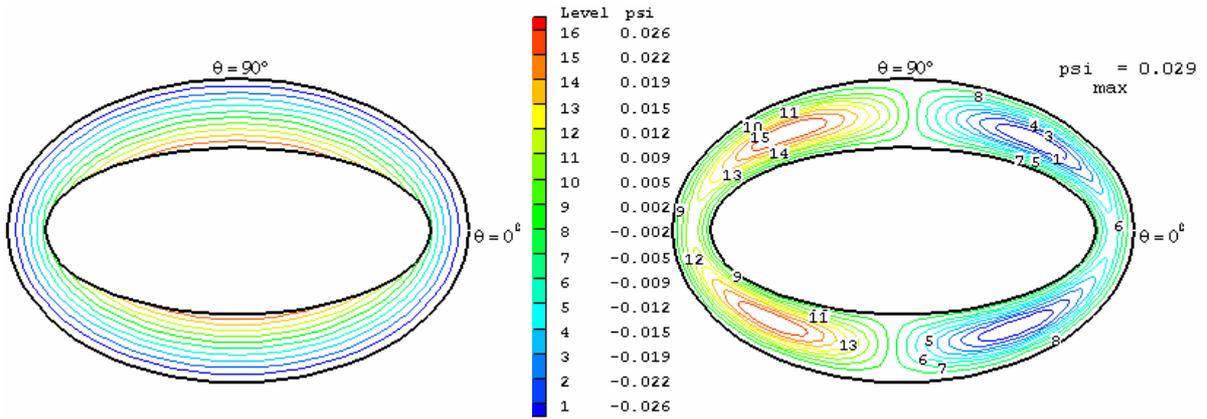


Fig. 3.45. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr_m=10^3$

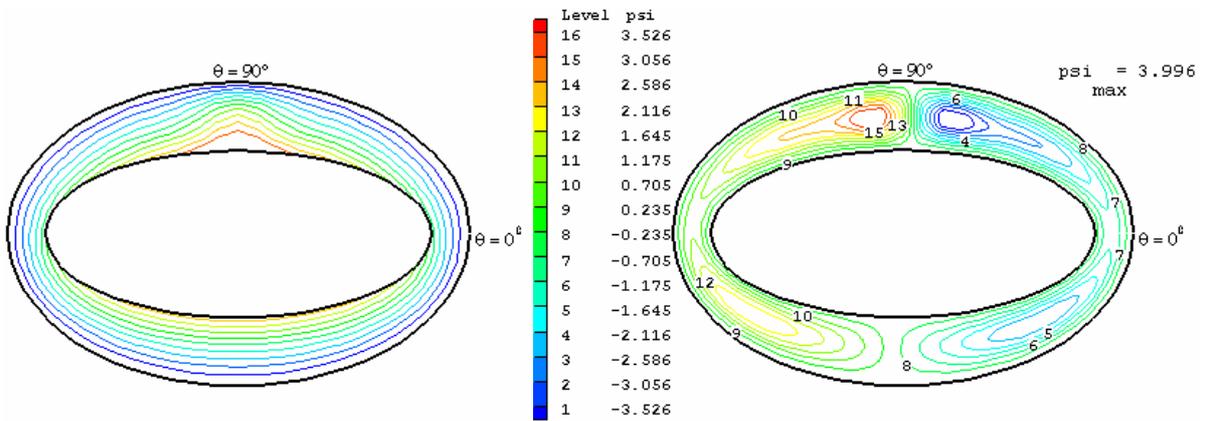


Fig. 3.46. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr_m=10^5$

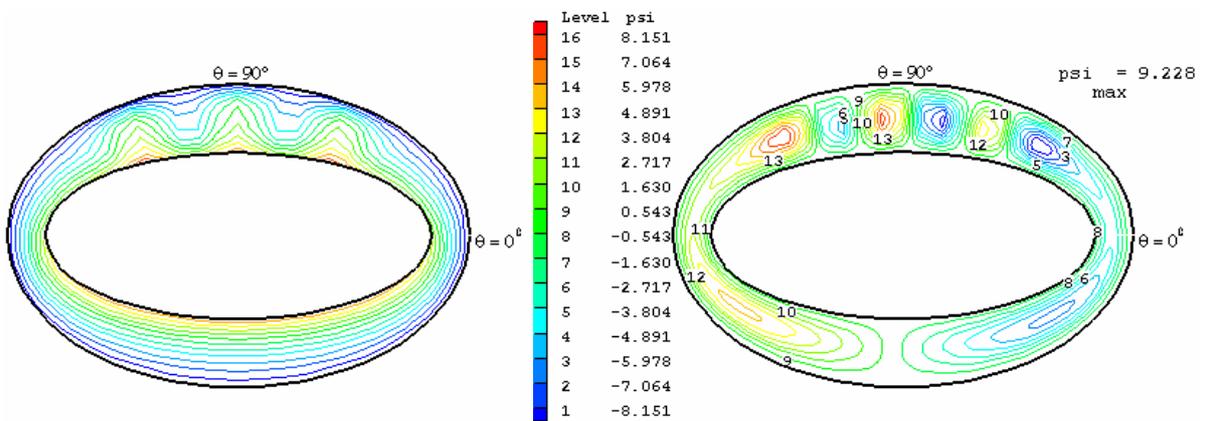


Fig. 3.47. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=0^\circ$  et  $Gr_m=3 \cdot 10^5$

### 3.5.2 Variation de la température adimensionnelle sur la paroi

Sur la figure 3.48, nous avons illustré la variation de la température adimensionnelle de la paroi en fonction de l'angle  $\theta$ . Le maximum de température se situe donc dans la partie supérieure de l'enceinte qui correspond pour ce cas à la position angulaire  $\theta=90^\circ$ .

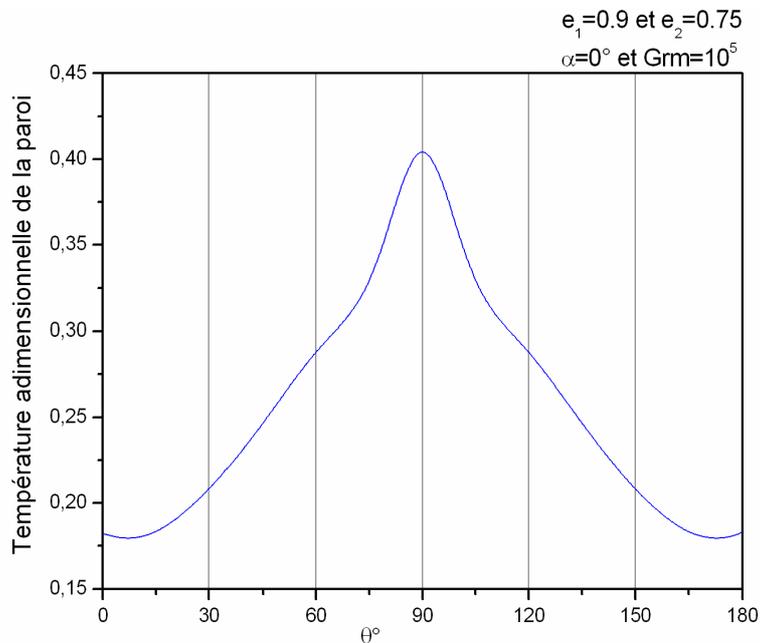


Fig. 3.48. Variation de la température adimensionnelle sur la paroi en fonction de l'angle  $\theta$

### 3.5.3 Influence de l'angle d'inclinaison $\alpha$

Pour cette configuration géométrique ( $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ) nous avons considéré trois valeurs de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ).

Pour  $\alpha=0^\circ$  et  $\alpha=90^\circ$  les figures (3.47) et (3.50) montrent que le plan vertical fictif médian est un plan de symétrie pour les phénomènes de transferts.

Dans le cas où l'angle d'inclinaison  $\alpha=45^\circ$  la symétrie du système par rapport au plan fictif vertical n'est plus conservée. L'écoulement s'organise en deux cellules principales tournant dans des sens opposés. Ces deux tourbillons occupent tout l'espace annulaire.

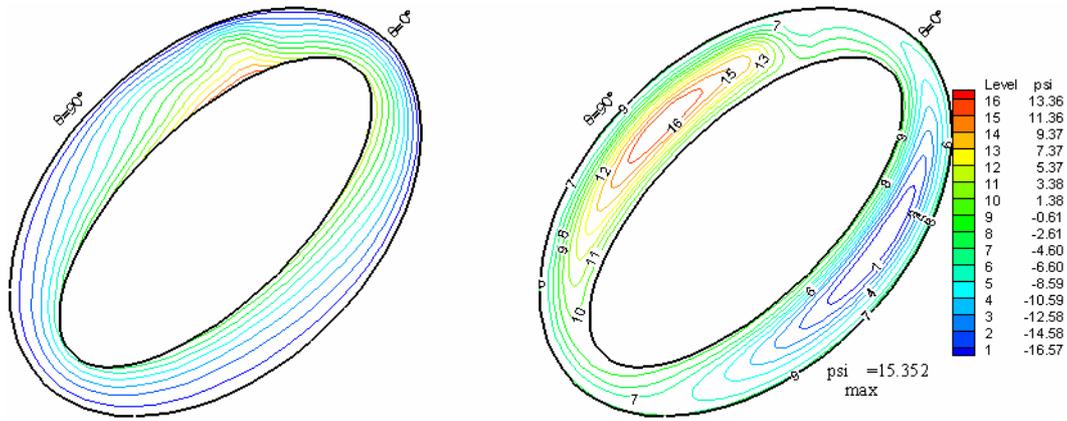


Fig. 3.49. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=45^\circ$  et  $Gr_m=3.10^5$

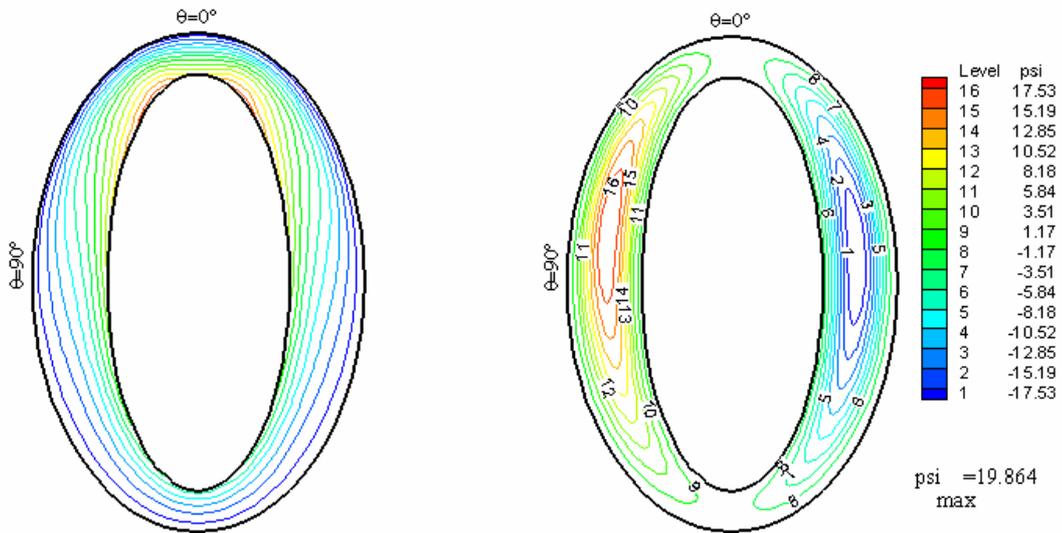


Fig. 3.50. Isothermes et lignes de courant pour  $e_1=0.9$ ,  $e_2=0.75$ ,  $\alpha=90^\circ$  et  $Gr_m=3.10^5$

### 3.6 Cas d'un chauffage mixte pour la paroi interne (Troisième partie)

En imposant une densité de flux de chaleur constante à la moitié inférieure du cylindre elliptique interne et en laissant sa moitié supérieure isotherme à la température  $T_1$ , les figures 3.51, 3.52, 3.53 et 3.54 montrent que la moitié inférieure de notre espace annulaire devient une zone quasi-statique. Nous remarquons aussi que cette troisième condition pariétale thermique influe aussi sur le régime d'écoulement qui pour  $Gr \leq 10^5$ , permet d'obtenir une bifurcation dans les figures 3.51 et 3.52 pour passer à un régime multicellulaire, alors que pour les figures 3.53 et 3.54 nous sommes toujours en présence d'un régime monocellulaire pour  $Gr=10^5$ .

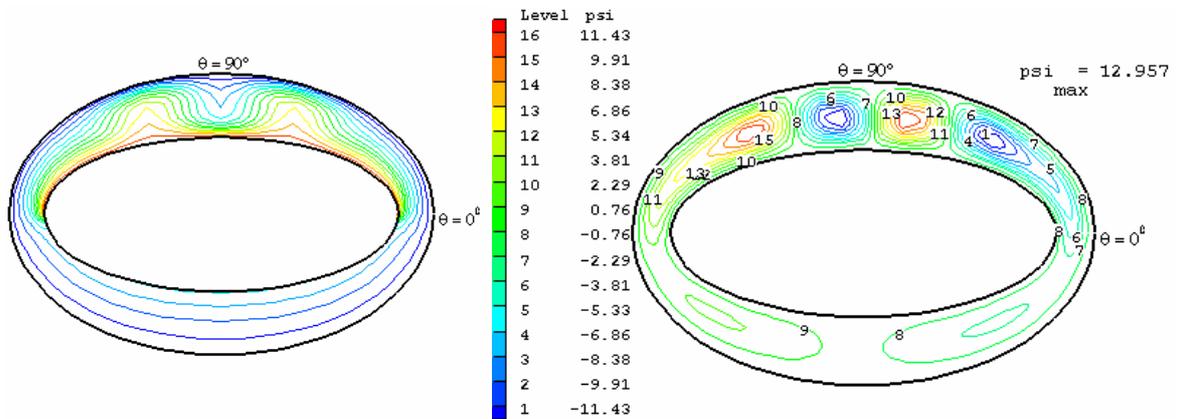


Fig. 3.51. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.9$

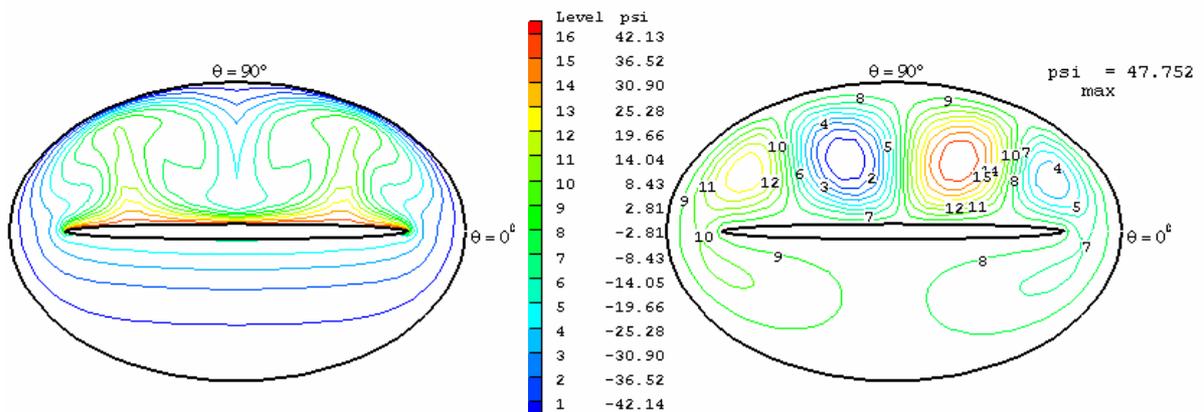


Fig. 3.52. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.999$

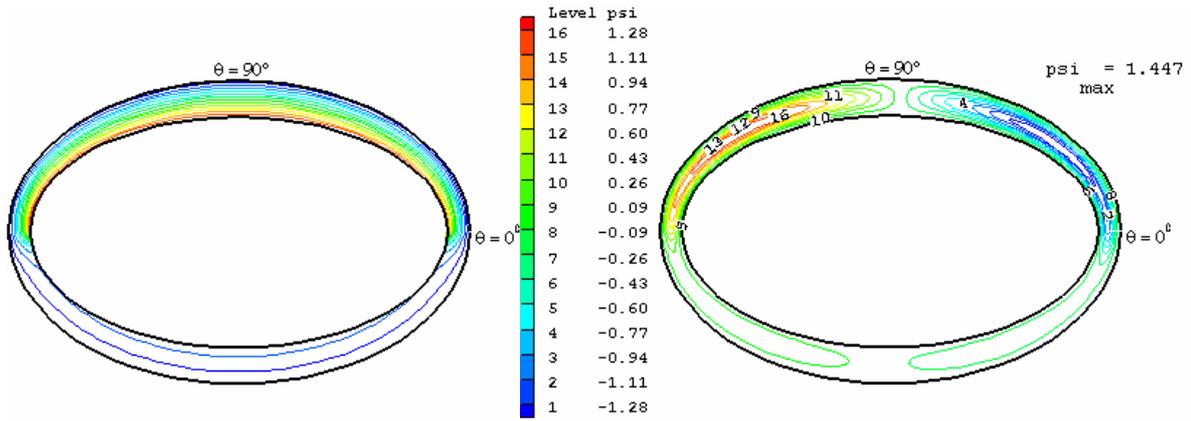


Fig. 3.53. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^5$ ,  $e_2=0.75$  et  $e_1=0.83$

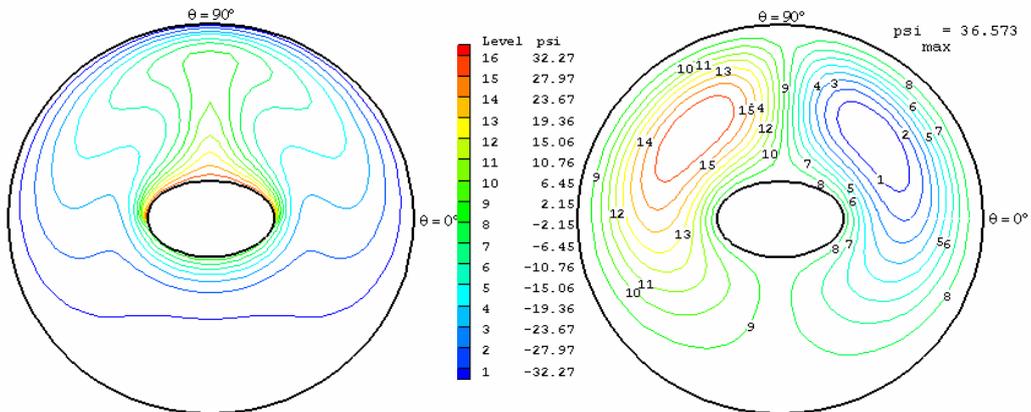


Fig. 3.54. Isothermes et lignes de courant pour  $\alpha=0^\circ$ ,  $Gr=10^3$ ,  $e_2=0.25$  et  $e_1=0.8$

## Conclusion

Les enceintes délimitées par deux cylindres elliptiques horizontaux sont particulièrement intéressantes car elles autorisent nombre de configurations et conduisent à des résultats originaux qui montrent notamment que :

Si l'enceinte oppose au mouvement du fluide des rétrécissements suffisamment prononcés, il est possible d'observer des écoulements multicellulaires même aux faibles valeurs du nombre de Rayleigh. Dans ce cas, l'augmentation de ce nombre, c'est-à-dire l'intensification de la convection naturelle, entraîne une augmentation des tourbillons.

Le code de calcul aux volumes finis, mis au point dans le cadre de ce travail, est conçu pour résoudre les équations de Boussinesq de la convection naturelle laminaire permanente bidimensionnelle dans des espaces annulaires, il semble donc fiable puisqu'il permet de retrouver qualitativement et quantitativement des résultats de la littérature, il est aussi souple puisqu'il permet d'étudier de nombreuses configurations géométriques. Il utilise des coordonnées elliptiques bien adaptées pour plusieurs de ces géométries, la formulation vitesse-pression et utilise l'algorithme SIMPLER pour résoudre le système matriciel.

Ce code est donc un bon outil d'investigation. Par exemple, pour certaines géométries, lorsque le nombre de Grashof est assez grand, il permet de déceler des écoulements multicellulaires. Il n'est pas sans intérêt du point de vue des moyens de calcul à mettre en oeuvre de pouvoir utiliser un code bidimensionnel permanent pour déceler des instabilités. L'étude des variations des nombres de Nusselt moyens en fonction du nombre de Grashof permet alors de construire des diagrammes de bifurcation. Celle des variations des nombres de Nusselt locaux le long des parois est instructive, en ce sens que ces variations, étant très sensibles à la structure de l'écoulement, permettent facilement de localiser la présence des divers tourbillons.

Via les différentes géométries considérées, on a vu que les instabilités sont les plus manifestes quand les conditions pariétales possèdent des éléments de symétrie eu égard à la direction verticale.

L'étude de la convection naturelle dans ces espaces annulaires mériterait d'être approfondie. Dans nos calculs, le nombre de Prandtl est fixé à 0.7 mais on sait que sa valeur joue beaucoup sur la structure de l'écoulement et qu'il serait intéressant de le faire varier. Il serait aussi intéressant de faire tendre la version actuelle de ce code de calcul à une version instationnaire tridimensionnelle utilisant des schémas de discrétisation du second ordre, par exemple ceux d'Adams-Bashforth.

# Annexe 1

## LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

### 1.1 Introduction

Dans cette annexe, nous rappellerons les grands principes conduisant aux équations fondamentales de la mécanique des fluides.

L'étude des phénomènes liés aux comportements des fluides conduit à l'élaboration des lois fondamentales. Ces lois sont axiomatiques, c'est à dire qu'elles ne dérivent pas d'un nombre plus restreint d'axiomes, mais sont justifiées par l'expérience.

Ces lois sont les suivantes

- Conservation de la masse
- Lois de comportement
- Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

Les équations décrivant ces lois seront écrites dans un formalisme différent selon que l'on s'intéresse :

- à l'aspect local des phénomènes, soit en un point fixe du continuum, soit en suivant un élément du fluide (formulation différentielle)
- à l'aspect global de ces phénomènes (formulation intégrale)

### 1.2 Equation de la conservation de la masse

Le principe de la conservation de la masse s'énonce :

**Principe:** La masse d'un système matériel est constante.

Considérons un système matériel de volume  $V_m(t)$  et caractérisé par une densité  $\rho(x,t)$ , la masse  $M$  contenue dans le système est donnée par :

$$M(t) = \int_{V_m(t)} \rho(x,t) dV \quad (1.2-1)$$

### 1.2.1 Conservation de la masse en variables d'Euler

#### 1.2.1.1 Formulation intégrale dans un volume matériel

La masse d'un système étant constante, la dérivée particulaire de (1.2-1) est donc nulle.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dt} \Big|_{x_0} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho \, dV \right] = 0 \quad (1.2.1-1)$$

L'application du théorème de Reynolds conduit à la formulation intégrale de la conservation de la masse en variables d'Euler:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho \, dV \right] = \int_{V_m(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (1.2.1-2)$$

ou, par le théorème de la divergence,

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho \, dV \right] = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{S_m(t)} \rho \, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.2.1-3)$$

#### 1.2.1.2 Formulation différentielle conservative et non conservative

Dans la suite, il sera fait état de la formulation conservative ou non conservative des équations différentielles fondamentales.

L'expression de la formulation conservative de l'équation différentielle de la masse, que l'on appelle aussi forme divergente de l'équation de conservation, a des propriétés telles que les coefficients des termes des dérivées sont, ou constants, ou, s'ils sont variables, leurs dérivées n'apparaissent nulle part dans l'équation. Ceci sera d'ailleurs valable pour les autres équations de conservation (quantité de mouvement, énergie).

D'une manière générale une équation différentielle qui représente un principe de conservation implique que l'on peut identifier un terme de divergence pour une grandeur physique dans cette équation. Cette formulation apparaît directement lors de la dérivation de la formulation intégrale conservative des équations fondamentales. En effet, le volume étant arbitraire, on déduit de la relation (1.2.1-2)

***la forme différentielle de la conservation de la masse en variable d'Euler:***

#### Formulation vectorielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2.1-4)$$

**Formulation indiciale**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho v^j) = 0. \tag{1.2.1-5}$$

On peut écrire (1.2.1-5), sous forme décomposée, dans un repère (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \tag{1.2.1-6}$$

**Une formulation non conservative** de cette équation peut s'écrire en développant toutes les dérivées:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.2.1-7}$$

Si on remarque que les quatre premiers termes de (1.2.1-7) représente la dérivée matérielle de  $\rho$ , cette équation peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.2.1-8}$$

**1.2.1.3 Commentaires sur les lois de conservations**

Plus généralement, et tout en se restreignant au cas monodimensionnel, les lois de conservation sont des systèmes d'équations différentielles partielles, généralement non linéaires et dépendantes du temps, et dont la structure est très simple :

$$\frac{\partial \mathbf{U}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x,t))}{\partial x} = 0 \tag{1.2.1-9}$$

**1.3 Equations de quantités de mouvement**

**1.3.1 Classification des forces extérieures**

Considérons un système matériel D de volume  $V_m(t)$  et de frontière  $S_m(t)$ . Les forces extérieures à considérer comprennent:

a) Des actions massiques

Elles proviennent du milieu extérieur à D et caractérisent les actions physiques auxquelles le milieu continu fluide est soumis : ce sont des actions à distance.

Soient,  $\mathbf{G}$  de telles actions:

$$\mathbf{G} = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV \quad (1.3.1-1)$$

Dans un souci de généralité, notons que si l'on tient compte d'actions électromagnétiques, on doit introduire un couple massique dans le cas de fluides polarisés.

Soient,  $\overline{\mathbf{G}}$  de telles actions :

$$\overline{\mathbf{G}} = \int_{V_m(t)} \rho \overline{\mathbf{g}} dV \quad (1.3.1-2)$$

### b) Des actions de surfaces

La frontière  $S_m(t)$  est en contact avec l'extérieur de  $D$ , d'où en général des actions mécaniques. Ces actions sont de l'ordre de  $dS$  (principe des contraintes)

Soient  $\mathbf{T}$  de telles actions:

$$\mathbf{T} = \int_{S_m(t)} \mathbf{t} dS \quad (1.3.1-3)$$

Il peut aussi arriver que certaines forces soient à l'origine de couples de l'ordre de  $dS$ .

Soient  $\overline{\mathbf{\Theta}}$  de telles actions :

$$\overline{\mathbf{\Theta}} = \int_{S_m(t)} \overline{\mathbf{\theta}} dS \quad (1.3.1-4)$$

## 1.3.2 Le principe des contraintes

**Principe :** On postule que l'action de l'extérieur du domaine  $D$  sur  $D$  peut à tout instant être représentée par une distribution superficielle de forces sur la frontière  $S_m(t)$  de  $D$ .

Ce principe s'appelle **le principe des contraintes**.

Or, une force telle que  $\mathbf{T}$  est un vecteur, que l'on peut écrire dans un repère euclidien :

$$\mathbf{T} = T^\alpha \mathbf{e}^\alpha \quad (1.3.2-1)$$

On peut noter  $\mathbf{n} = n_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  étant le vecteur unitaire normal à  $dS$ . Par suite, on a:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{t} dS = \mathbf{P} n dS \quad (1.3.2-2)$$

où **le tenseur  $\mathbf{P}$  est appelé tenseur des contraintes**.

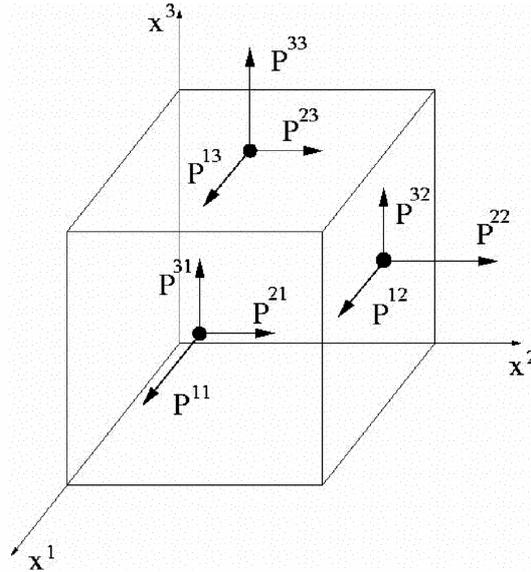


Figure 1.3.2-1 : Répartition des contraintes sur un cube  $dx^1 dx^2 dx^3$

La Figure 1.3.2-1 montre alors sur chaque face  $dS_\alpha$ , les trois composantes  $P^{ij}$  du tenseur  $\mathbf{P}$

### 1.3.3 Equations générales du mouvement

#### 1.3.3.1 Cas d'un système matériel

##### 1.3.3.1.1 Quantité de mouvement

La loi fondamentale du mouvement s'écrit en tenant compte des diverses forces extérieures :

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV \right] = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{S_m(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad (1.3.3-1a)$$

$$= \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_m(t)} \mathbf{t} dS = \int_{V_m(t)} (\rho \mathbf{g}) dV + \int_{S_m(t)} \mathbf{P} \mathbf{n} dS$$

ou sous forme indicielle :

$$F^i = \frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho v^i dV \right] = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) dV + \int_{S_m(t)} \rho v^i (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad (1.3.3-1b)$$

$$= \int_{V_m(t)} (\rho g^i) dV + \int_{S_m(t)} P^{ij} n_j dS. \quad (1.3.3-1c)$$

Cette équation peut s'écrire, en utilisant le théorème de la divergence, sous la forme classique différentielle conservative :

$$\frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \nabla_j (\rho v^j v^i) = \rho g^i + \nabla_j P^{ij} \quad (1.3.3-1d)$$

et sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.3.3-1e)$$

On peut soustraire de (1.3.3-1d) les termes nuls (par la continuité):

$$v^i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho v^j) \right) = 0 \quad i=1,2,3$$

pour obtenir la forme non conservative de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{Dv^i}{Dt} = \rho g^i + \nabla_j P^{ij} \quad (1.3.3-1f)$$

### 1.3.3.1.2 Moment cinétique

La conservation du moment cinétique d'un système veut dire que :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} + \rho \bar{\mathbf{g}}) dV + \int_{S_m(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \bar{\boldsymbol{\theta}}) dS$$

et en utilisant le théorème de Reynolds et l'équation de continuité (1.2.1-8), il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V_m(t)} \left( \mathbf{x} \times \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{v}) + \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV = \int_{V_m(t)} \left( \mathbf{x} \times \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV$$

Par conséquent, on peut écrire,

$$\int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{g} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}) + \rho \bar{\mathbf{g}}) dV + \int_{S_m(t)} ((\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \bar{\boldsymbol{\theta}}) dS) = 0 \quad (1.3.3-2)$$

ou sous forme indicelle, désignant par  $\bar{\theta}^{jk}$  les composantes du tenseur antisymétrique adjoint à  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  :

$$\int_{V_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j (\rho g^k - \rho \frac{Dv^k}{Dt}) + \frac{1}{2} \rho \bar{g}^{jk} \right) dV + \int_{S_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j P^{kl} n_l + \frac{1}{2} \bar{\theta}^{jk} \right) dS = 0 \quad (1.3.3-3)$$

Appliquons le théorème de la divergence à l'intégrale de surface avec  $\bar{\theta}^{jk} = \bar{\theta}^{jk} n_l$  :

$$\int_{S_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j P^{kl} n_l + \frac{1}{2} \bar{\theta}^{jk} \right) dS = \int_{V_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j \frac{\partial P^{kl}}{\partial x^l} + \delta_h^j P^{kh} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\theta}^{jkl}}{\partial x^l} \right) dV \quad (1.3.3-4)$$

d'où finalement :

$$\int_{V_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j \left( \rho g^k - \rho \frac{Dv^k}{Dt} \right) + \frac{1}{2} \rho \bar{g}^{jk} \right) dV + \int_{V_m(t)} \varepsilon_{ijk} \left( x^j \frac{\partial P^{kl}}{\partial x^l} + \delta_h^j P^{kh} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\theta}^{jkl}}{\partial x^l} \right) dV = 0 \quad (1.3.3-5)$$

or, le volume d'intégration étant quelconque, on en déduit avec (1.3.3-1f) :

$$P^{jk} - P^{kj} + \rho \bar{g}^{jk} + \frac{\partial \bar{\theta}^{jkl}}{\partial x^l} = 0 \quad (1.3.3-6)$$

Mais, dans pratiquement tous les problèmes de mécanique des fluides, on aura:

$$\bar{g}^{jk} = 0 \quad (\text{absence de couple de masse}) \quad (1.3.3-7)$$

$$\bar{\theta}^{jkl} = 0 \quad (\text{absence de couple surfacique}) \quad (1.3.3-8)$$

et l'on obtient le résultat très important suivant :

$$P^{jk} = P^{kj} \quad (1.3.3-9)$$

Ainsi, dans le cadre des hypothèses admises  $(\bar{g}^{jk} = 0, \bar{\theta}^{jkl} = 0)$ , **la symétrie du tenseur des contraintes est une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'équilibre du moment cinétique** sur toute portion  $S_m(t)$  en supposant vérifiée la première loi du mouvement.

### 1.3.3.1.3 Lois du mouvement

Des résultats précédents, nous en déduisons les lois du mouvement local pour un système matériel :

#### Sous forme non conservative

$$\rho \frac{Dv^j}{Dt} = \rho g^j + \nabla_j P^{ij} \quad (1.3.3-10a)$$

$$P^{ij} = P^{ji} \quad (1.3.3-10b)$$

#### Sous forme conservative:

$$\frac{\partial \rho v^j}{\partial t} + \nabla_j (\rho v^j v^j) = \rho g^j + \nabla_j P^{ij} \quad (1.3.3-11a)$$

$$P^{ij} = P^{ji} \quad (1.3.3-11b)$$

## 1.4 Loi de comportement d'un fluide newtonien

Le système d'équations (1.3.3-10) avec l'équation de continuité (1.2.1-8) est insuffisant pour déterminer un mouvement.

A côté des six composantes  $P^{ij}$  du tenseur  $\mathbf{P}$  figurent les trois composantes de la vitesse et la pression. On a donc quatre équations pour 10 inconnues. La seule mécanique laisse donc indéterminée le champ des contraintes. On conçoit qu'il soit nécessaire de leur adjoindre d'autres équations, dépendant de la matière constituant le milieu et précisant la manière dont elle réagit aux actions mécaniques. Ces équations constituent les lois de comportement et caractérisent un milieu d'un type déterminé.

#### 1.4.1 Loi de comportement

Les équations de comportement ou lois de déformation doivent vérifier :

##### a) L'invariance tensorielle

Pour que les grandeurs physiques soient indépendantes du choix du référentiel, on devra les représenter par des tenseurs.

La relation de comportement doit être une fonction qui, elle aussi, doit être indépendante du repère et représentable si l'application est linéaire à l'aide de tenseurs.

##### b) Principe d'isotropie

Les relations doivent être compatibles avec les symétries de la matière. En particulier, le maximum de symétrie se présente lorsque la matière est isotrope.

Il y a isotropie si les coordonnées des fonctions conservent des expressions inchangées dans n'importe quelle transformation orthogonale.

##### c) Principe d'objectivité

Les équations de comportement doivent être indépendantes du mouvement de l'observateur, en d'autres termes, elles doivent rester les mêmes pour deux observateurs mobiles l'un par rapport à l'autre.

Or on dispose de deux tenseurs fondamentaux :

• l'un de composante  $D^{ij}$ , d'origine cinématique, le tenseur des vitesses de déformation  $D$ :

$$D^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \quad (1.4.1-1)$$

- l'autre de composantes  $P^{ij}$ , d'origine dynamique, le tenseur P des contraintes.

Pour exprimer les propriétés macroscopiques de la matière déformable, on va chercher à relier les deux tenseurs P et D. Cette recherche sortant du cadre de ce cours, nous admettrons que ces relations font apparaître non seulement les tenseurs P et D, mais aussi leur taux de variation temporel à divers ordres.

La manière dont interviennent ces grandeurs est très variable. Dans certains cas, on prend seulement les valeurs actuelles, dans d'autres cas, il faut tenir compte de l'histoire des phénomènes.

Enfin, les déformations s'accompagnent souvent de variations thermiques et, inversement, l'arrivée de flux de chaleur peut entraîner des déformations et des contraintes considérables, par suite la thermodynamique devra intervenir.

Ici, nous ne considérerons que le cas où la loi de comportement est une relation linéaire entre P et D. Dans ce cas, on dira que *le fluide est newtonien*.

$$P = F_{\text{linéaire}}(D, \rho, T) \quad (1.4.1-2)$$

où T est la température

### 1.4.2 Fluides newtoniens et équations de Navier-Stokes

La loi de transformation d'un fluide newtonien étant linéaire, on doit avoir entre les tenseurs de composantes  $P^{ij}$  et  $D^{ij}$  la relation suivante :

$$P^{ij} = A^{ij} + B^{ijkl} D_{kl} \quad (1.4.2-1)$$

où les tenseurs A et B doivent être des fonctions de la masse volumique et de la température.

Le tenseur B a 81 composantes. Or, heureusement, des arguments sur la symétrie et l'isotropie permettent de réduire ce nombre à 2!

#### a) Le tenseur P est symétrique ainsi que D

Par suite, B de même que A, le sont aussi, cela implique :

$$\bullet B^{ijkl} = B^{jikl} = B^{ijlk} = B^{jilk} \quad (1.4.2-2)$$

$$\bullet A^{ij} = A^{ji} \quad (1.4.2-3)$$

b) Le fluide est isotrope

Dans ces conditions, on démontre en calcul tensoriel que :

$$B^{ijkl} = \xi \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu' \delta^{ik} \delta^{jl} + \mu'' \delta^{il} \delta^{jk} \quad (1.4.2-4)$$

$$A^{ij} = \alpha \delta^{ij} \quad (1.4.2-5)$$

Par suite, on a:

$$P^{ij} = \alpha \delta^{ij} + (\xi \delta^{ij} \delta^{kl} D_{kl} + \mu' \delta^{ik} \delta^{jl} D_{kl} + \mu'' \delta^{il} \delta^{jk} D_{kl}), \quad (1.4.2-6)$$

d'où, après multiplication contractée des différents termes :

$$P^{ij} = \alpha \delta^{ij} + \xi \delta^{ij} D_{kk} + (\mu' + \mu'') D^{ij} \quad (1.4.2-7)$$

On pose :  $2\mu = \mu' + \mu''$

On obtient alors la loi de comportement d'un fluide newtonien, traduite dans un repère cartésien :

$$P^{ij} = \alpha \delta^{ij} + \xi \delta^{ij} D_{kk} + 2\mu D^{ij} \quad (1.4.2-8)$$

Considérons maintenant un fluide en équilibre. En l'absence de déformation, les composantes  $D^{ij}$  sont nulles. On a:

$$P^{ij} = \alpha \delta^{ij} \quad (1.4.2-9)$$

où  $\alpha$  est un scalaire positif ou négatif. Introduisons les composantes  $n_k$  du vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  normal à la surface où agissent les contraintes  $P^{ij}$ .

Or, d'après (1.3.2-2):

$$d\mathbf{T} = \mathbf{t} dS = \mathbf{P}\mathbf{n} dS. \quad (1.4.2-10)$$

La force surfacique a donc pour expression, avec (1.4.2-9), après changement d'indice muet:

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{n} = \alpha \mathbf{I}\mathbf{n} = \alpha \mathbf{n} \quad (1.4.2-11)$$

Si  $\alpha$  est positif, cela impliquerait que le fluide serait capable de résister à des contraintes de traction. Or, l'expérience montre que, sauf rares exceptions (cavitation), un fluide au repos ne peut subir que des compressions. On posera donc systématiquement :

$$\alpha = -p$$

Par définition, p est la pression hydrostatique du fluide au point considéré. Par suite (1.4.2-9) s'écrit :

$$P^{ij} = -p \delta^{ij} \quad (1.4.2-12)$$

et l'on vérifie bien que la pression est une force surfacique agissant normalement à la surface puisque avec (1.4.2-12) :

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} \quad (1.4.2-13)$$

Dans le cas d'un fluide en mouvement, il est d'usage d'écrire P sous la forme suivante, en introduisant le tenseur unité I et le tenseur  $\tau$ , dit déviateur:

$$P = -pI + \tau \quad (1.4.2-14)$$

ou sous forme indicielle :

$$P^{ij} = -p\delta^{ij} + \tau^{ij} \quad (1.4.2-15)$$

avec :

$$\tau^{ij} = \xi \delta^{ij} D^{kk} + 2\mu D^{ij} \quad (1.4.2-16)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, puisque :

$$D^{ii} = 0 \quad (1.4.2-17)$$

on obtient :

$$\frac{1}{3} P^{ii} = -p \quad (1.4.2-18)$$

Par conséquent, on obtiendra les équations dites de Navier-Stokes écrites par exemple sous leurs formes conservatives, dans un référentiel fixe, à partir de (1.3.3-10a) :

$$\rho \left[ \frac{\partial v^i}{\partial t} + \nabla_j (v^j v^i) \right] = \rho g^i - \nabla_j p \delta^{ij} + \nabla_j (\mu \nabla_j v^i) \quad (1.4.2-19a)$$

Ou sous forme vectorielle:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla (\mu \nabla \mathbf{v}) \quad (1.4.2-19b)$$

et, si t est indépendant de x :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.4.2-19c)$$

## 1.5 Conservation de l'énergie

### 1.5.1 Introduction

La masse volumique, la viscosité dynamique et la température intervenant dans l'expression de la loi de comportement, celle-ci doit être compatible avec les lois de la thermodynamique. En ajoutant aux équations dynamiques, à l'équation de continuité et aux lois de comportement le principe de conservation de l'énergie et les lois de comportement de la chaleur (on suppose qu'il n'y a pas de réactions chimiques), on obtient un système d'équations bouclé qui permet de déterminer l'évolution du fluide (on ne tient pas compte à ce niveau des phénomènes turbulents).

### 1.5.2 Le premier principe de la thermodynamique

Le premier principe ou principe de la conservation de l'énergie conduit à la définition d'une fonction "e", l'énergie interne massique. Pour un système en mouvement, il faut tenir compte de l'énergie cinétique des particules fluides et l'on introduira la grandeur E, énergie interne totale, somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique d'un système matériel.

D'autre part, on ne considérera que les systèmes qui échangent de l'énergie sous forme de chaleur et de travail. Dans ces conditions, le principe de la conservation de l'énergie peut s'énoncer sous la forme suivante :

**Principe:** *Le taux de variation temporel de l'énergie interne totale d'un système matériel est égal à la somme des puissances dues:*

- *aux travaux des contraintes agissant à la frontière  $S_m(t)$  du système*
- *au flux de chaleur  $q$  et au rayonnement "r"*
- *aux forces massiques (gravitationnelles en général)*

### 1.5.3 Cas d'un système matériel

Si on définit l'énergie interne totale E d'un système matériel de volume  $V_m(t)$  limité par une surface  $S_m(t)$  par :

$$E = \int_{V_m(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \quad (1.5.3-1)$$

et si on applique les mêmes raisonnements que pour le cas de la conservation de la quantité de mouvement, le premier principe de la thermodynamique s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_{V_m(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dV \right] &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} [\rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)] dV + \int_{S_m(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) v_i n_i dS \\ &= \int_{V_m(t)} (\rho g^i v_i) dV + \int_{S_m(t)} P^{ij} v_j n_i dS - \int_{S_m(t)} q^j n_j dS + \int_{V_m(t)} r dV \end{aligned} \quad (1.5.3-2)$$

L'utilisation du théorème de la divergence conduit comme dans les cas précédents à la formulation différentielle sous forme conservative de l'équation d'énergie (valable pour un référentiel fixe) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)] + \nabla_j [\rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) v^j] = \rho g^i v_i + \nabla_i [P^{ij} v_j] - \nabla_j q^j + r \quad (1.5.3-2a)$$

ou sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)] + \nabla \cdot [\rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot [P \mathbf{v}] - \nabla \cdot \mathbf{q} + r \quad (1.5.3-2b)$$

On peut retrancher le terme nul (par la continuité) :

$$\left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho v^j) \right) = 0 \quad (1.5.3-3)$$

et obtenir une formulation non conservative de l'équation de la conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right] = \rho g^i v_i + \nabla_j [P^{ij} v^j] - \nabla_j q^j + r \quad (1.5.3-4)$$

### 1.5.3.1 L'équation de l'énergie mécanique

Le développement qui va suivre ne fait appel à aucun principe supplémentaire. Il découle uniquement de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement. Considérons l'équation (1.3.3-10a) :

$$\rho \frac{Dv^i}{Dt} = \rho g^i + \nabla_j P^{ij} \quad (1.5.3-5)$$

et multiplions scalairement les deux membres par  $v_i$ :

$$\rho v_i \frac{Dv^i}{Dt} = \rho v_i g^i + v_i \nabla_j P^{ij} \quad (1.5.3-6)$$

or :

$$v_i \nabla_j P^{ij} = \nabla_j (v_i P^{ij}) - P^{ij} \nabla_j v_i \quad (1.5.3-7)$$

et d'après la loi de comportement d'un fluide newtonien (1.4.2-15) :

$$P^{ij} = -p \delta^{ij} + \tau^{ij} \quad (1.5.3-8)$$

où  $\tau^{ij}$  est le tenseur de viscosité défini par (1.4.2-16), l'équation (1.5.3-6) s'écrit :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{v^2}{2} \right] = \rho v^i g^i + \nabla_j (v^j P^{ij}) - P^{ij} \nabla_j v^i \quad (1.5.3-9)$$

ou :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ \frac{v^2}{2} \right] = \rho v^i g^i + \nabla_j (v^j P^{ij}) + p \nabla_j v^j - \tau^{ij} \nabla_j v^i \quad (1.5.3-10)$$

Cette équation représente le bilan de l'énergie mécanique et **ne doit pas être confondue avec l'équation de la conservation de l'énergie totale.**

### 1.5.3.2 L'équation de l'énergie thermique

Considérons maintenant l'équation de conservation de l'énergie totale sous la forme suivante (1.5.3-4) :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left[ e + \frac{1}{2} v^2 \right] = \rho g^i v_i + \nabla_j [P^{ij} v_i] - \nabla_j q^j + r \quad (1.5.3-11)$$

en soustrayant (1.5.3-10) de (1.5.3-11), il vient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla_j v^j + \tau^{ij} \nabla_j v_i - \nabla_j q^j + r \quad (1.5.3-12)$$

**Cette équation a la forme générale de l'équation de l'énergie thermique.**

Il faut cependant se souvenir que l'équation de l'énergie mécanique est dérivée des lois de la mécanique, et que par conséquent, l'équation de la conservation de l'énergie cinétique et l'équation de l'énergie thermique sont distinctes.

### Deux cas particuliers

i) Considérons le cas très souvent étudié, d'un fluide incompressible, non visqueux et adiabate (pas de transfert de chaleur, ni de rayonnement) alors (1.5.3-12) se réduit à :

$$\frac{De}{Dt} = 0 \quad (1.5.3-12)$$

et l'on constate, après suppression des termes correspondants aux hypothèses, que l'équation de l'énergie totale (1.5.3-11) et l'équation de l'énergie mécanique (1.5.3-10) sont identiques.

Or, comme l'équation de l'énergie mécanique est déduite des équations de conservation du mouvement, **on en déduit que pour un fluide incompressible, non visqueux et adiabate, il est inutile de faire appel à l'équation de la conservation de l'énergie. Pour résoudre des problèmes vérifiant ces hypothèses, seules sont nécessaires l'équation de continuité et les équations de la quantité de mouvement.**

ii) Pour un fluide incompressible dans l'absence de rayonnement, l'équation de l'énergie peut être exprimée en fonction de la température T sous la forme :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

où  $C_p$  note la capacité calorifique et  $k$  est la diffusivité thermique. Donc, pour les écoulements isothermes on n'a pas besoin de l'équation d'énergie.

## **1.6 Equations fondamentales dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales**

Dans ce qui précède, on a présenté les équations fondamentales d'une part sous forme vectorielle et d'autre part sous forme indicelle en coordonnées cartésiennes. Pour certains problèmes, l'usage d'un système de coordonnées quelconque non cartésien peut être d'un grand intérêt, pour calculer des écoulements autour de géométries complexes ou particulières.

### **1.6.1 Préliminaire**

Dans de nombreuses applications, il peut être pratique de formuler les équations de la mécanique des fluides dans un repère curviligne orthogonal, tout particulièrement dans le cas de l'étude des couches limites.

Soit donc, un système de coordonnées cartésien  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et un nouveau repère curviligne orthogonal  $y^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), dont l'origine est un point P de coordonnées  $x_p^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et soient  $e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), les vecteurs unités associés.

On rappelle que les coordonnées cartésiennes sont reliées aux coordonnées curvilignes par les relations :

$$x^i = x^i(y^\alpha) \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.6.1-1)$$

et que si le jacobien de la transformation n'est pas nul, on a aussi :

$$y^\alpha = y^\alpha(x^i) \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.6.1-2)$$

L'élément de longueur  $ds$  exprimé dans le référentiel cartésien s'écrit :

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds^2 = dx^i dx^j \delta_{ij} \quad (1.6.1-3)$$

Dans le nouveau référentiel, on obtiendra :

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^3} dy^3 = h_1 dy^1 \mathbf{e}^1 + h_2 dy^2 \mathbf{e}^2 + h_3 dy^3 \mathbf{e}^3$$

et donc :

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds^2 = h_1^2 (dy^1)^2 + h_2^2 (dy^2)^2 + h_3^2 (dy^3)^2 \quad (1.6.1-4)$$

où par définition :

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left( \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \right)^2 \\ h_2^2 &= \left( \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial y^2} \right)^2 \\ h_3^2 &= \left( \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.6.1-5)$$

### 1.6.2 L'équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit, en coordonnées curvilignes :

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left[ \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\alpha} \rho v^\alpha \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.6.2-1)$$

ou, sous forme développée :

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} (h_2 h_3 \rho v^1) + \frac{\partial}{\partial y^2} (h_1 h_3 \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y^3} (h_1 h_2 \rho v^3) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.6.2-2)$$

### 1.6.3 Les équations de la quantité de mouvement

Les équations de la quantité de mouvement, en l'absence de forces massiques s'écrivent sous forme non-conservative vectorielle :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.6.3-1)$$

ou, sous forme indicielle :

$$\rho \left( \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^k \nabla_k v^j \right) = \nabla_k ( -p \delta^{ik} + \tau^{ik} ) \quad (1.6.3-2)$$

Les équations de la quantité de mouvement, exprimées dans un repère curviligne orthogonal avec les composantes physiques des grandeurs, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial v^\beta}{\partial t} + \left( \frac{v^\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial y^\alpha} + \frac{v^\alpha v^\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial y^\alpha} - \frac{(v^\alpha)^2}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial y^\beta} \right) \right] i_\beta \\ = - \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial p}{\partial y^\beta} i_\beta + \left[ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\alpha} \tau^{\alpha, \beta} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\tau^{\alpha, \beta}}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial y^\alpha} - \frac{\tau^{\alpha, \alpha}}{h_\beta h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial y^\beta} \right] i_\beta \end{aligned} \quad (1.6.3-3)$$

# ANNEXE 2

## COORDONNEES ELLIPTIQUES

### 2.1 Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure 2.1, nous observons dans le plan (XY) un groupe d'ellipses et un groupe de paraboles :

- Les ellipses définies par  $u = \text{constant}$ , dont le grand axe est confondu avec l'axe (X).
- Les paraboles définies par  $v = \text{constant}$ .

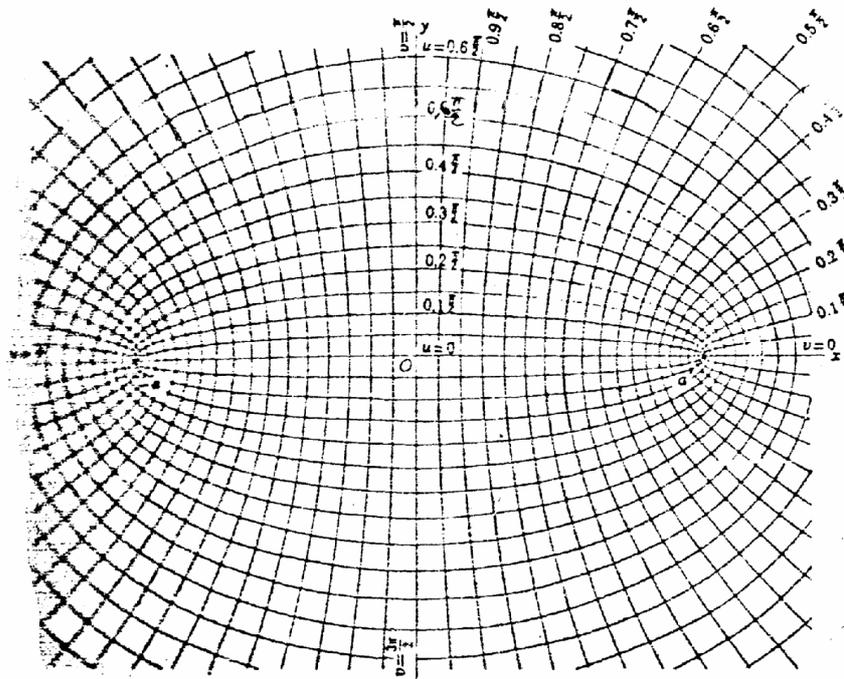


Fig. 2.1 Représentation schématique des coordonnées elliptiques.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ y &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

Soit :

$$z = a \operatorname{chw} \quad (2.2)$$

avec :

$$z = x + i y \quad \text{et} \quad w = \eta + i \theta$$

nous avons :

$$\operatorname{chw} = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{e^{\eta} e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

en développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{chw} = \cos\theta \operatorname{ch}\eta + i \sin\theta \operatorname{sh}\eta \quad (2.3)$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (1.2). Il vient :

$$z = x + i y = a \operatorname{chw} = a(\cos\theta \operatorname{ch}\eta + i \sin\theta \operatorname{sh}\eta) \quad (2.4)$$

L'identification de la partie réelle à  $x$  et de la partie imaginaire à  $y$  donne :

$$x = a \cos\theta \operatorname{ch}\eta$$

$$y = a \sin\theta \operatorname{sh}\eta$$

## 2.2 Démonstration géométrique

A partir du système (2.1), on a :

$$\cos\theta = \frac{x}{a \operatorname{ch}\eta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{a \operatorname{sh}\eta}$$

soit :

$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2\eta} \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2\eta}$$

comme :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

on en déduit :

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2\eta} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2\eta} = 1 \quad (2.5)$$

on pose :

$$\left. \begin{aligned} A &= a \operatorname{ch}\eta \\ B &= a \operatorname{sh}\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

et comme :

$$\operatorname{ch}\eta > \operatorname{sh}\eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

on se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipses de grand axe  $A = a \cdot \operatorname{ch}\eta$  et de petit axe  $B = a \cdot \operatorname{sh}\eta$

L'équation (1.5) sera donc de la forme :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (2.7)$$

### 2.3 Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $(ds)^2$  est égal à :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire, dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (du_1)^2 + h_2 (du_2)^2$$

où :

$u_1$  et  $u_2$  sont des coordonnées curvilignes, les quantités  $h_1$  et  $h_2$ , les coefficients métriques qui sont fonction, en général, des coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a  $h_x = h_y = 1$  et en coordonnées elliptiques :

$$h_\eta = h_\theta = a (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2} \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (2.1) et les définitions suivantes :

$$h^2_\eta = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$h^2_\theta = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \quad (2.9)$$

$$h^2_z = \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 \quad (2.10)$$

Par suite on obtient :

$$h^2_\eta = h^2_\theta = a^2 (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) \quad (2.11)$$

$$h^2_z = 1 \quad (2.12)$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc.

$$\vec{\text{grad}} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{a}_3$$

avec :

$h_1, h_2, h_3$  : coefficients métriques.

$x_1, x_2, x_3$  : coordonnées curvilignes.

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right\}$$

avec :

$V_1, V_2, V_3$  : composantes de la vitesse suivant  $x_1, x_2, x_3$

$$h_4 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$$

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 \cdot V_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 \cdot V_2) \right] \vec{a}_1 + \right.$$

$$h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 \cdot V_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 \cdot V_3) \right] \vec{a}_2 + h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \cdot V_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 \cdot V_1) \right] \vec{a}_3 \left. \right\}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_4} \left[ \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \right)}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \right)}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \right. \\ \left. \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \right)}{\partial x_3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right]$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} h_1 = h\eta \\ h_2 = h\theta \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad h\eta = h\theta = h$$

et nous avons aussi :

$$\begin{cases} x_1 = \eta \\ x_2 = \theta \\ x_3 = z \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = V\eta \\ V_2 = V\theta \\ V_3 = Vz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_z \end{cases} \quad \text{vecteurs unitaires suivant } \eta, \theta \text{ et } z.$$

ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes :

$$\vec{\text{grad}} \phi = \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \right] + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{a}_z \quad (2.13)$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{V} &= \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right] \vec{a}_\eta + \left[ \frac{\partial V_\eta}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right] \vec{a}_\theta \\ &+ \left[ h \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial V_\eta}{\partial \theta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \vec{a}_z . \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.16)$$

### 2.3.1 Exemple

Cas de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux (fig.2.2).

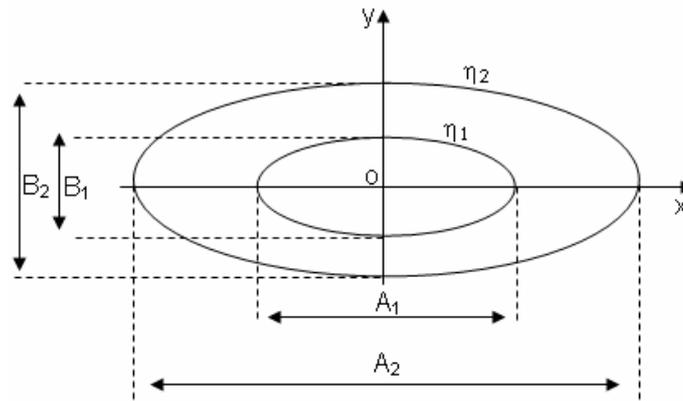


Fig. 2.2 Représentation schématique de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux.

Les relations (2.6) nous donnent :

$$\frac{A}{B} = \coth \eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (2.17)$$

on en déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A + B}{A - B} \quad (2.18)$$

soit encore :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A + B}{A - B} \right) \quad (2.19)$$

nous aurons donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \right) \quad (2.19.a)$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_2 + B_2}{A_2 - B_2} \right) \quad (2.19.b)$$

### 2.3.2 Excentricité de l'ellipse

L'excentricité d'une ellipse est donnée par :

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad (2.20)$$

avec :  $0 < e < 1$

et A et B sont respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse. D'autre part la relation (2.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{sh}^2 \eta} \quad (2.21)$$

comme :

$$\text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1$$

on en déduit :

$$\text{ch}^2 \eta - 1 = \text{sh}^2 \eta \quad (2.22)$$

en remplaçant (2.22) dans (2.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{ch}^2 \eta - 1}$$

d'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

soit encore :

$$\frac{1}{\text{ch} \eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

on obtient donc :

$$e = \frac{1}{\text{ch} \eta} \quad (2.23)$$

on aura donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$e_1 = \frac{1}{\text{ch} \eta_1} \quad (2.23.a)$$

et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$e_2 = \frac{1}{\text{ch} \eta_2} \quad (2.23.b)$$

les relations (2.21), (2.22) et. (2.23) donnent :

$$\text{th}^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - e^2$$

on aura donc :

$$\text{th} \eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1}$$

ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(\text{th} \eta + 1)}{\text{th} \eta - 1}$$

qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right] \quad (2.23.c)$$

### 2.3.3 Remarque

Soit donc :

$$e = \frac{1}{\text{ch} \eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$$

Pour :

$A=B$  on a  $e=0$

c'est , dire  $\eta$  devient infini, on se ramène donc au cas d'un cercle.

Et pour :

$B=0$  on a  $e=1$

c'est dire  $\eta=0$ , on se ramène donc au cas d'un plan. Ce qui nous amène étudier deux cas particuliers :

- 1- Cas d'un cylindre entourant une ellipse.
- 2- Cas d'une ellipse entourant un plan.

## Références Bibliographiques

- [1] **Arnold (J.N.), Catton (I.) and Edwards (D.K.)**, *Experimental investigation of natural convection in inclined rectangular regions of differing aspect ratios*, ASME J. Heat Transfer, Vol.98, P.67-71 (1976).
- [2] **Linthorst (S.J.M.), Schinkel (W.M.M.) and Hoogendoorn (C.J.)**, *Flow structure with natural convection in inclined air-filled enclosures*, ASME J. Heat Transfer, Vol.103, P.535-539 (1981).
- [3] **Yewell (R.), Poulikakos (D.) and Bejan (A.)**, *Transient natural convection experiments in shallow enclosures*, J. Heat Transfer, Vol.104. P.533-538 (1982).
- [4] **Kee (R.J.), Landram (C. S.) and Miles (J.C.)**, *Natural convection of a heat-generating fluid within closed vertical cylinders and spheres*, J. Heat Transfer, Vol.98, P.55-61 (1976).
- [5] **Yoshihiro Mochimaru**, *Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity*, Heat Transfer. Japanese Research, Vol. 18, N°4, P.9-19 (1989).
- [6] **Bishop (E. H.), Kolfiat (R. S.), Mack (L. R.) and Scanlan (J.A.)**, *Convective heat transfer between concentric spheres*, Heat Transfer and Fluid Mechanics institute Proceedings of the 1964, P.69-80, Stanford University Press, Stanford (1964).
- [7] **Bishop (E.H.) and Carley (C.T.)**, *Photographic studies of natural convection between concentric cylinders*, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute Proceedings of the 1966. P.63-78, Stanford University Press, Stanford (1966).
- [8] **Mack (L.R.) and Bishop (E. H.)**, *Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., XXI, Pt. 2, P.223-241 (1968).
- [9] **Mack (L.R.) and Hardee (H.)**, *Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.11, P.387-396 (1968).
- [10] **Weber (N.), Powe (R. E.), Bishop (E.H.) and Scanlan (J.A.)**, *Heat transfer by natural convection between vertically eccentric spheres*, J. Heat Transfer, Vol.95. P.47-52 (1973).
- [11] **Yin (S.H.), Powe (R.E.), Scanlan (J.A.) and Bishop (E.H.)**, *Natural convection flow patterns in spherical annuli*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.16, P.1785-1795 (1973).

- [12] **Kuehn (T.H.) and Goldstein (J.)**, *An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders*, J. Fluid. Mech, Vol.74, 4, P.695-719 (1976).
- [13] **Kuehn (T.H.) and Goldstein (J.)**, *An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli*, ASME J. Heat Transfer. Vol.100. P.635-640 (1978).
- [14] **Powe (R.E.), Warrington (R.O.) and Scanlan (J.A.)**, *Natural convective flow between a body and its spherical enclosure*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.23, P.1337-1350 (1980).
- [15] **Naylor (D.), Badr (H.M.) and Tarasuk (J.D.)**, *Experimental and numerical study of natural convection between two eccentric tubes*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.32. P.171-181 (1989).
- [16] **Charrier-Mojtabi (M.C.), Mojtabi (A.), Azaiez (M.) and Labrosse (G.)**, *Numerical and experimental study of multi cellular free convection flows in an annular porous layer*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.34, ?12. P.3061-3074 (1991).
- [17] **Lee (J.H.), Park (W.H.) and Daguinet (M.)**, *Theoretical study of the natural convection flows in a partially filled vertical cylinder subjected to a constant wall temperature*, 2<sup>nd</sup> ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, Mars 22-27, Honolulu, Hawaii, P. 1-6 (1984).
- [18] **Kuehn (T.H.) and Goldstein (J.)**, *Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders*, Int J. Heat Mass Transfer, Vol.19, P.1127-1134, (1976).
- [19] **Powe (R.E.), Carley (C.T.) and Carruth (S.L.)**, *A numerical solution for natural convection in cylindrical annuli H*, ASME J. Heat Transfer, Vol.92. P.210-220 (1971).
- [20] **Singh (S.N.) and Chen (J.)**, *Numerical solution for free convection between concentric spheres at moderate Grashof numbers*, Numer. Heat Transfer, Vol.3, P.441-459 (1980).
- [21] **Gardner (D. R.), Douglass (R. W.) and Trogdon (S.A.)**, *Linear stability of natural convection in spherical annuli*, J. Fluid Mech., Vol.221, P.105-129 (1990).
- [22] **Abbott (M.R.)**, *A numerical method for solving the equations of natural convection in a narrow concentric cylindrical annulus with a horizontal axis*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol.XVII, Pt.4, P.471-481 (1964).
- [23] **Kumar (R.)**, *Study of natural convection in horizontal annuli*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.31, P.1137-1148 (1988).

- [24] Guj, G., and Stella, F., *Natural convection in horizontal eccentric annuli: numerical study*, Numer. Heat. Trans., A 27, pp. 89-105 (1995).
- [25] Lee, J. H., and Lee T. S., *Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptical cylinders*, Int. J. Heat. Mass. Trans., 24, pp. 1739-1742. (1981).
- [26] Schreiber, W. C., and SINGH S. N., *Natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders*, Int. J. Heat. Mass. Trans., 28, pp. 807-822. (1985).
- [27] Chmaissem, W., Suh, S. J., and Dagueuet, M., *Numerical study of the Boussinesq model of natural convection in an annular space: having an horizontal axis bounded by circular and elliptical isothermal cylinders*, App. Therm. Engin., 22, pp. 1013-1025. (2002).
- [28] Cheng, C. H., and Chao, C.C., *Numerical prediction of the buoyancy-driven flow in the annulus between horizontal eccentric elliptical cylinders*, Num. Heat. Trans. A 30, pp.283-303. (1996).
- [29] Zhu, Y. D., Shu, C., Qiu, J., and Tani, J., *Numerical Simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method*, Int. J. Heat. Mass. Trans., 47, pp. 797-808. ( 2004)
- [30] Elshamy (M.M.), Ozisik (M.N.) and Coulter (J.P.), *Correlation for laminar natural convection between con focal horizontal elliptical cylinders*, Numer. Heat Transfer, Part A. Vol.18, P.95-112 (1990).
- [31] Guj, G., and Stella, F., *Vorticity-Velocity formulation in the computation of flows in multiconnected domains*, Int. J. Numer. Meth. Fluids., 9, pp.1285-1298. (1989).
- [32] Wilkes (J.O.) and Churchill (S.W.), *The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure*, A.I.Ch.E. J., Vol.12. N°.1. P.161-166 (1966).
- [33] Samuels (M.R.) and Churchill (S.W.), *Stability of a fluid in a rectangular region heated from below*, A.I.Ch.E.J., Vol.13, N°.1, P.77-85 (1967).
- [34] Ozoe (H.), Yamamoto (K.), Sayama (H.) and Churchill (S.W.), *Natural circulation in an inclined rectangular channel heated on one side and cooled on the opposing side*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 17, P.1209-1217 (1974).
- [35] Küblbeck (K.), Merker (G.P.) and Straub (J.), *Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.23, P.203-217 (1980).
- [36] Patterson (J.) and Imberger (J.), *Unsteady natural convection in a rectangular cavity*, J. Fluid. Mech, Vol.100, part 1, P.65-86 (1980).

- [37] **Akins (R. G.) and Lin (Y.S.)**, *Transient behaviour of natural convection inside a vertical cylinder*, Chem. Eng. Commun., Vol.43. P.69-83 (1986).
- [38] **Projahn (U.), Reiger (H.) and Béer (H.)**, *Numerical analysis of laminar convection between concentric and eccentric cylinders*, Numer. Heat Transfer. Vol.4. P.131-146 (1981).
- [39] **Roy (S.K.) and Sengupta (S.)**, *A numerical study of natural heat transfer in a vertically eccentric spherical annulus*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 15. ?5. P.615-626 (1988).
- [40] **Mallinson (G.D.) and De Vahl Davis (G.)**, *Three-dimensional natural convection in a box: A numerical study*, J. Fluid. Mech, Vol. 8 3, part 1. P.1-31 (1977).
- [41] **Roux (B.), Grondin (J. C.), Bontoux (P.) and Gilly (B.)**, *On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity*, Numer. Heat Transfer, Vol.1, P.331-349 (1978).
- [42] **Caltagirone (J.-P.), Combarous (M.) and Mojtabi (A.)**, *Natural convection between two concentric spheres : transition toward a multicellular flow*, Numer. Heat Transfer, Vol.3, P.107-114 (1980).
- [43] **Projahn (U.) and Beer (H.)**, *Prandtl number effects on natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli*, Wärme-und Stoffübertragung, Vol.19, P.249-254 (1985).
- [44] **Garg (V.K.)**, *Natural convection between concentric spheres*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.35. P. 1935-1945 (1992).
- [45] **Ozoe (H.), Fujii (K.), Shibata (T.) and Churchill (S.W.)**, *Three-dimensional numerical analysis of natural convection in a spherical annuli*, Numer. Heat Transfer, Vol.8, P.383-406 (1985).
- [46] **Oden (J.T.), Zienkewicz (O.C.), Gallagher (R.H.) and Taylor (C.)**, *Finite Elements methods in flow problems*, Proc. 1st Symp. Swansea (1974), University of Alabama Press, Huntsville (1974).
- [47] **Zienkewicz (O.C.), Gallagher (R.H.) and Hood (P.)**, *Newtonian and non Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solutions*, 2nd conf. Mathematics of Finite elements and Applications, Brunel University (1975).

- [48] **Christie (I.), Griffiths (D.F.), Mitchell (A.R.) and Zienkewicz (O.C.),** *Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.10, P.1389-1396 (1976).
- [49] **Margherite Ligne (S.),** I.C.A.A.D. 2nd Int. Symp. Finite Element Meth. In Flow Problems, Italy (1976).
- [50] **Heinrich (J.C.), Huyakorn (P.S.), Zienkewicz (O.C.) and Mitchell (A.R.),** *An "Upwind" finite element scheme for two dimensional convection-transport equation*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.11. P.131-143 (1976).
- [51] **Connor (J.J.) and Brebbia (C.A.),** *Finite Element Techniques For Fluid Flow*, Newnes-Butterworths, London (1976).
- [52] **Heinrich (J.C.) and Zienkewicz (O.C.),** *Quadratique finite element schemes for two dimensional convective-transport problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.11, P.1831-1844 (1977).
- [53] **Tabata (M.),** *A finite element approximation corresponding to the Upwind finite differencing*, Memoirs of numerical Mathematics, Vol.1, P.47-63 (1977).
- [54] **Chung (T.J.),** *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill. New York (1978).
- [55] **Ciarlet (P.G.),** *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, New York (1978).
- [56] **Hugues (T.J.R.),** *A simple scheme for developing "Upwind" finite elements*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.12, P.1359-1365 (1978).
- [57] **Van Veldhuizen (M.),** *Higher order methods for a singularly perturbed problem*, Num. Math., Vol.30, P.267-279 (1978).
- [58] **Hugues (T.J.), Liu (W.K.) and Brooks (A.),** *Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation*, J.Comp.Phys., Vol.30, P.1-60 (1979).
- [59] **Marechal (J.),** *Une méthode d'éléments finis pour le calcul d'écoulements compressibles autour d'un profil donné*, Doctorat de Spécialité, Rennes I (1979).
- [60] **Raviart (P.A.) et Thomas (J.M.),** *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris (1983).
- [61] **Patankar, (S.V.),** *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New York,. (1980)
- [62] **Nogotov, (E.F.),** *Applications of Numerical Heat Transfer*, McGraw-Hill book company, New York, (1978)

- [63] **Saatdjian, (E.)**, *Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques*, Polytechnica, Paris. (1998)
- [64] **Moon, (P.) and Spencer, (E.)**, *Field theory Handbook*, Springer, P. 349, Berlin (1971)
- [65] **Moon, (P.) and Spencer, (E.)**, *Field theory Engineers*, D. VAN. Nostrand company, LTD, Toronto, P.356, Canada (1961).
- [66] **Salmun (H.)**, *Convection patterns in a triangular domain*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.38. ?2. P.351-362 (1995).
- [67] **Salmun (H.)**, *The stability of a single-cell steady state solution in a triangular enclosure*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.38, ?2, P.362-369 (1995).
- [68] **Lakhal (E.K.), Bilgen (E.) and Vasseur (P.)**, *Natural convection and conduction in inclined enclosures bounded by a wall with honeycomb structure*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.38, ?8, P.1397-1407 (1995).
- [69] **Guermond (J.-L.) and Quartapelle (L.)**, *Unconditionally stable finite-element method for the unsteady Navier-Stokes equations*, Proceedings of the 9<sup>th</sup> international conference on finite elements in fluids, Venetia. P.367-376, Italy (1995).
- [70] **Vasseur (P.), Robillard (L.) and Anochiravani (I.)**, *Natural convection in a shallow porous cavity heated from the side with a uniform heat flux*, Chem. Eng. Commun., Vol.46, P.129-146 (1986).
- [71] **Hyun (J.M.)**, *Transient process of thermally stratifying an initially homogeneous fluid in an enclosure*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.27. P.1936-1938 (1984).
- [72] **Lin (Y.S.) and Akins (R.G.)**, *Thermal description of pseudo steady-state natural convection inside a vertical cylinder*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.29. 2, P.301-307 (1986).
- [73] **Najoua (S.)**, *Etude numérique de la convection dans un ellipsoïde de révolution de grand axe vertical et dans un cylindre horizontal de section elliptique*. Thèse de Doctorat, Université de Perpignan (1996).
- [74] **Liu (C.Y.), Mueller (W.K.) and Landis (F.)**, *Natural convection heat transfer in long horizontal cylindrical annuli*, International Developments in Heat Transfer, part.5, P.976-984 (1961).
- [75] **Crawford (L.) and Lemlich (R.)**, *Natural convection in horizontal concentric cylindrical annuli*, I. and E.C. Fundamentals. Vol.4, P.260-264 (1962).

- [76] **Grigull (U.) and Hauf (W.),** *Natural convection in horizontal cylindrical annuli*, Proc. third International Heat Transfer conference, Vol.2. P.182-195, (1966).
- [77] **Powe (R.E.), Carley (C.T.) and Bishop (E.H.),** *Free convective flow patterns in cylindrical annuli*, J. Heat Transfer, Vol.91, P.310-314 (1969).
- [78] **Kuehn (T.H.) and Goldstein (J.),** *A parametric study of Prandtl number and diameter ratio effects on natural convection heat transfer in horizontal cylindrical annuli*, ASME J. Heat Transfer, Vol.102, P.768-770 (1980).
- [79] **Prusa (J.) and Yao (L.S.),** *Natural convective heat transfer between eccentric horizontal cylinders*, ASME J. Heat Transfer, Vol. 105, P.108-116 (1983).
- [80] **Bau (H. H.),** *Low Rayleigh number thermal convection in a saturated porous medium bounded by two horizontal, eccentric cylinders*, J. Heat Hransfer. Vol.106, P.166-175 (1984).
- [81] **Fujii (T.), Honda (T.) and Fujii (M.),** *A numerical analysis of low confection isothermal sphere : Finite-difference solution of thé full Navier-Stokes and energy between concentric spheres*, Numer. Heat Transfer. Vol.7, P.103-111 (1984).
- [82] **Rao (Y.F.). Miki (Y.), Fukuda (F.). Takata (Y) and Hasegawa (S.),** *Flow patterns of natural confection m horizontal cylindrical annuli*, Int J. Heat Mass Transfer, Vol.28. P.705-714 (1985).
- [83] **Fant (D.B.), Prusa (J.) and Rothmayer (A.P.),** *Unsteady multicellular natural confection in a narrow horizontal cylindrical annulus*, ASME J. Heat Transfer, Vol.112, P.379-387 (1989).
- [84] **Bishop (E. H.), Kolfiat (R. S.), Mack (L. R.) and Scanlan (J.A.),** *Photographic studies of convection patterns between concentric sphères*, Soc. Photo. Opt. Instrum. Eng. J., Vol.3, P.47-49 (1964-1965).
- [85] **Scanlan (J.A.), Bishop (E.H.) and Powe (R. E.),** *Natural convection heat transfer between concentric spheres*, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol.13, P.1857-1872 (1970).
- [86] **Singh (S.N.) and Elliott (J.M.),** *Natural convection between concentric spheres in a slightly-thermally stratified medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.24. P.395-406 (1981).
- [87] **Mojtabi (A.) and Catalgirone (J.P.),** *Natural convection between two concentric spheres for high Prandtl number*, Proceedings of Seventh International Heat Transfer Conference Munchen, Vol.2, P.245-249 (1982).

- [88] **Sarr (J.)**, *Contribution à l'étude de la convection naturelle dans une enceinte fermée limitée par deux cylindres concentriques horizontaux et deux plans diamétraux*, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan (1993).
- [89] **Doumbia (A.)**, *Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique dans un fluide newtonien situé dans l'espace d'intersection de deux cylindres horizontaux*, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan (1992).
- [90] **Kassem (T.)**, *Contribution à l'étude de la convection naturelle entre deux cylindres excentrés horizontaux*, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne (1989).
- [91] **Tazi Charki (M.N.)**, *Etude numérique de la convection naturelle thermique permanente bidimensionnelle dans un espace annulaire compris entre deux sphères ou deux cylindres*, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Fes (1996).
- [92] **Dubois (M.) and Berge (P.)**, *Experimental study of the velocity field in Rayleigh-Bénard convection*, J. Fluid Mech., Vol.85, Part 4, P.641-653 (1978).
- [93] **Dubois (M.) and Berge (P.)**, *Experimental evidence for the oscillators in a convective biperiodic regime*, Physics letters. Vol.76A, ?1. P. 53-56 (1980).
- [94] **Dubois (M.) and Berge (P.)**, *Instabilités de couche limite dans un fluide en convection. Evolution vers la turbulence*, J. Physique, 42, P. 167-174 (1981).
- [95] **Martinet (B.)**, *Convection de Rayleigh Bénard dans l'air pour des cavités à grands facteurs d'aspect*. Thèse de Doctorat, Université de Provence (1983).
- [96] **Catton (I.)**, *Natural convection in horizontally unbounded plane layers*, Natural convection Fundamentals and applications, C.Kakaç, W.Aung et R.Viskanta, P.97-133, Springer-Verlag, Washington (1985).
- [97] **Kulacki (I.), Richards (D.E.)**, *Natural convection in plane layers and cavities with volumetric energy sources*, Natural convection Fundamentals and applications, C.Kakaç, W.Aung et R.Viskanta,,P.179-255, Springer-Verlag, Washington (1985).
- [98] **Djezzar (M.), Dagenet (M.)**, *Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts*. 1<sup>ST</sup> International Conference on Thermal Engineering Theory and Applications. Beïrut-Lebanon, du 31 Mai au 04 Juin 2004.
- [99] **Djezzar (M.), Chaker (A.), and Dagenet (M.)**, *Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts. Influence of internal eccentricity*. Revue des Energies Renouvelables, Volume 8, Numéro 1, Juin 2005.

**Title: Contribution to the study of the natural convection, in various confocal elliptic annular spaces, with various conditions of heating.**

**Summary:** The author proposes in this work the numerical study of the laminar thermal and natural convection, in the case of permanent and bidimensional flow, in an annular space between two confocal elliptic cylinders. This latter is oriented at an arbitrary angle  $\alpha$  with respect to the gravity force and filled with a Newtonian fluid. The Prandtl number is fixed at 0.7 (case of the air) but the number Grashof varies. The flow is modelled by the partial differential equations: the continuity and the momentum equations are expressed in elliptic coordinates with the velocity-pressure formulation. For the conditions of heating, he supposes in a first case the two walls of annular space isothermal,  $T_1$  for the internal wall and  $T_2$  for the external wall, with  $T_1 > T_2$ . In a second case, the external wall being maintained always isothermal at the temperature  $T_2$ , the internal wall is crossed by a constant flux density of heat. In a third case, the external wall being maintained always isothermal at the temperature  $T_2$ , the internal wall will be heated differently in two parts, its higher half when the slope of the system is null, is maintained isothermal at the temperature  $T_1$  and the lower half is crossed by a constant flux density of heat. A new calculation code was developed, this last uses finite volumes, for the discretization of equations, the algorithm SIMPLER for the sequential solution of the system of equations of discretization and the iterative numerical solution of the algebraic system of equations is that of sweeping implying the tridiagonal algorithms of Thomas and cyclic. In order to show the reliability of this code, the author compares results obtained from this last with other similar results existing in literature. This code then proves to be a good tool of investigation. For example, for certain geometries, it allows to detect multicellular flows when the Grashof number increases. For the first condition of heating, bifurcations are thus observed as well as that for the second and for the third condition of heating. The study of the variations of the local Nusselt numbers along the walls allows the author to localise the presence of the various vortexes. Instabilities are most manifest when the parietal conditions have elements of symmetry having regard to the vertical direction. The annular spaces delimited by two elliptic confocal cylinders are particularly interesting because they authorize a number of configurations.

**Key words:** natural convection, Boussinesq equations, annular space, elliptic cylinders, velocity-pressure formulation.

**Titre : Contribution à l'étude de la convection naturelle, dans différents espaces annulaires, elliptiques confocaux, soumis à différentes conditions de chauffage.**

**Résumé :** L'auteur propose dans ce travail l'étude numérique du phénomène de la convection naturelle dans un espace annulaire, délimité par deux tubes elliptiques horizontaux et confocaux, orienté selon un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. Cet espace annulaire est parcouru par un fluide newtonien et incompressible, en régime laminaire et permanent. Le nombre de Prandtl est fixé à 0,7 (cas de l'air) mais le nombre de Grashof varie. L'écoulement est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles : les équations de continuité et des quantités de mouvement sont exprimées dans le système de coordonnées dites "elliptiques" avec la formulation en fonctions primitives (vitesse-pressure). Pour les conditions de chauffage, il suppose dans un premier cas les deux parois de l'espace annulaire isothermes,  $T_1$  pour la paroi interne et  $T_2$  pour la paroi externe, avec  $T_1 > T_2$ . Dans un deuxième cas, la paroi externe étant maintenue toujours isotherme à la température  $T_2$ , la paroi interne sera soumise à une densité de flux de chaleur constante. Dans un troisième cas, la paroi externe étant toujours maintenue isotherme à la température  $T_2$ , la paroi interne sera chauffée différemment en deux parties, sa moitié supérieure quand l'inclinaison du système est nulle, est isotherme à la température  $T_1$  et la moitié inférieure est traversée par une densité de flux de chaleur constante. Un nouveau code de calcul a été mis au point, ce dernier utilise les volumes finis, pour la discrétisation des équations, l'algorithme SIMPLER pour donner la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation et la solution numérique itérative des systèmes d'équations algébriques est celle du balayage impliquant les algorithmes tridiagonaux de Thomas et cyclique. Afin de montrer la fiabilité de ce code, l'auteur compare des résultats issus de ce dernier avec d'autres résultats similaires existant dans la littérature. Ce code se révèle alors être un bon outil d'investigation. Par exemple, pour certaines géométries, lorsque le nombre de Grashof augmente, il permet de déceler des écoulements multicellulaires, pour les trois conditions thermiques pariétales, des bifurcations sont donc observées. L'étude des variations des nombres de Nusselt locaux le long des parois permet à l'auteur de localiser la présence des divers tourbillons. Les instabilités sont les plus manifestes quand les conditions pariétales possèdent des éléments de symétrie eu égard à la direction verticale. Les espaces annulaires délimitées par deux cylindres elliptiques confocaux sont particulièrement intéressants car ils autorisent nombre de configurations.

**Mots-clés :** convection naturelle, équations de Boussinesq, espaces annulaires, cylindres elliptiques, Formulation vitesse-pressure.