

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre
Série.....

**THESE DE DOCTORAT D'ETAT
EN PHYSIQUE**

Option : Physique Théorique

Intitulée :

**Théorie de jauge quantique dans l'approche de la théorie de
déformation**

**Par
BOUDINE Azeddine**

Soutenu le : 02 / 07 / 2005

Devant le jury composé de :

Président :	J. MIMOUNI	Prof. Université Mentouri Constantine
Rapporteur :	N. MEBARKI	Prof. Université Mentouri Constantine
Examineurs :	A. BOULDJEDRI	Prof. Université Hadj-Lakhdar Batna
	N. BELALOUI	M.C. Université Mentouri Constantine
	A. BOUNAMES	M.C. Université de Jijel
	T. BOUDJEDAA	M.C. Université de Jijel

A Mes Parents ..

Remerciements

Je remercie Monsieur MIMOUNI Jamal Professeur l'université de Mentouri de Constantine d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur BOULDJEDRI Abelhamid Professeur à l'université de Hadj Lakhdar de Batna qui m'a fait l'honneur de participer à mon jury.

Je remercie vivement Mr BELALOUI Nadir Maître de conférence à l'université de Mentouri Constantine d'avoir accepté de juger mon travail.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur BOUDJEDAA Tahar Maître de conférence à l'université de Jijel pour son accord pour participer au jury de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur BOUNAMES Abelhafid Maître de conférence à l'université de Jijel d'avoir accepté de participer au jury de thèse.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur MEBARKI Nouredine d'être mon directeur de thèse et qui a su me proposer un sujet de thèse passionnant, où les connaissances devaient être tout autant.

J'adresse mes remerciements à Monsieur PROVOST Jean-Pierre Professeur à l'université de Sofia-Antipolis de Nice qui m'a bien accueilli au sein de son laboratoire.

Mes remerciements vont aux membres du laboratoire qui m'ont soutenu lors de la réalisation de ma thèse.

Enfin j'adresse m'a gratitude à tout les membres du département de Physique.

Contents

1	introduction	3
1.0.1	Quantification de Weyl et son développement	4
1.0.2	Théories de Cohomologie et la déformation	7
1.0.3	Quantum groups	7
1.1	Structures de Hopf des groupes de Lie et algèbre de Lie ordinaires	8
1.1.1	Groupes quantiques. L'exemple de $GL_q(2)$	12
1.1.2	Calcul différentiel dans les groupes quantiques	17
2	L'Oscillateur Harmonique Généralisé q-déformé	29
2.0.3	Oscillateur harmonique q -déformé	29
2.0.4	Description en Coordonnée de l'oscillateur harmonique q -déformé	32
2.0.5	L'espace d'Hilbert associé	35
2.1	Oscillateur harmonique généralisé q -déformé	37
2.1.1	La phase de Berry	43
3	No-ghost theorem pour une corde bosonique ouverte q-déformée	49
3.1	Introduction:	49
3.2	Les cordes bosoniques classiques:	50
3.2.1	L'action de Polyakov et les equations de mouvement:	50
3.2.2	Les symétries de l'action de Polyakov:	51
3.2.3	L'action de Polyakov dans la jauge conforme:	52

3.2.4	Le développement en modes normaux:	55
3.3	La quantification canonique de la corde bosonique ouverte:	57
3.4	Les cordes bosonique ouvertes q-déformées:	59
3.4.1	Théorème No-Ghost	60
3.4.2	Conclusion:	68
4	Relation entre paraquantification et q-déformation	69
4.1	Introduction	69
4.1.1	Paraquantification	70
4.1.2	Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs	73
4.2	Formalisme	74
4.3	Conclusion	80
5	Oscillateur nonlinéaire amorti et l'hamiltonien d'un oscillateur non-	
	linéaire généralisé	81
5.1	INTRODUCTION	81
5.1.1	L'ANGLE DE HANNAY	81
5.2	Formalisme	85
5.2.1	Oscillateur quartique généralisé	87
5.2.2	L'oscillateur quartique amorti	93
5.3	ANNEXE I	101
5.4	ANNEXE II	105

Chapter 1

introduction

Dans cette section nous allons présenter brièvement les bases qui étaient nécessaires à la théorie de déformation quantique pour se développer, même si d'un point de vue abstrait on pourrait l'avoir imaginée sur la base de la mécanique classique hamiltonienne. La philosophie soulignant le rôle des déformations dans la physique a été régulièrement proposée par plusieurs physiciens en particulier Flato depuis plus de 30 ans et il l'a exprimée par la suite lui même dans[1] (voir également[3, 2]). En bref, le passage d'une théorie physique à une autre, plus raffiné, peut être compris (et pourrait même avoir été prédit) en utilisant ce que les mathématiciens appellent la théorie de déformation. Par exemple on passe de la physique newtonienne vers la relativité spéciale en déformant le groupe d'invariance (le groupe de Galilée $SO(3) \cdot \mathbb{R}^3$) au groupe $SO(3, 1) \cdot \mathbb{R}^4$ de Poincaré avec le paramètre de déformation c^{-1} , où c est la vitesse de la lumière. Il y a beaucoup d'autres exemples parmi lesquels la quantification est peut-être la plus séminale.

En fait il semble que l'idée que la mécanique quantique n'est qu'un certain genre de mécanique classique déformée a été, presque dès le début de la théorie quantique, "dans l'esprit de beaucoup de physiciens". Ceci est justifié par la notion de la limite classique et également plus par l'approximation semi-classique de presque toutes les théories, une bonne présentation est donnée dans [5]. Mais l'idée est demeurée cachée " dans les esprits " pendant longtemps, en particulier dû à l'apparent insurmontable " saut quantique "

lié à la nature des observables et probablement aussi parce que la notion mathématique de la déformation et les cohomologies appropriés n'étaient pas, à l'époque, disponibles. Une longue maturation était nécessaire et qui a par la suite donné naissance à la véritable théorie de déformation quantique il y a environ 20 ans[6]. Il est possible d'imaginer intellectuellement de nouvelles théories physiques en déformant celles existantes . Même si le concept mathématique associé à une théorie existante est mathématiquement rigide, il peut être possible de trouver un contexte plus large dans lequel les déformations non triviales existent. Par exemple le groupe de Poincaré peut être déformé (rigide dans la catégorie des groupes de Lie) au groupe anti De Sitter $SO(3,2)$ très populaire, bien qu'il avait été étudié intensivement il y a environ 25-30 ans par [7] et ayant pour résultat en particulier une formulation de la QED avec des photons dynamiquement composés de deux singletons [10] dans l'espace AdS. Comme il est bien connu, ils existent des déformations des algèbres de Hopf associées à un groupe de Lie simple (ceux sont les "groupes quantiques " [9], qui sont en fait un exemple de la déformation quantique[8], et ont été intensivement étudiés et appliqués à la physique). Néanmoins de telles constructions 'intellectuelles', même si elles sont de belles théories mathématiques, ont besoin d'être confrontées d'une façon ou d'une autre avec la réalité physique afin qu'elles puissent être sérieusement acceptées dans la physique. Ainsi certaines intuitions physique sont toujours nécessaires lors de l'utilisation de la théorie de déformation dans la physique.

Après ce bref historique nous allons commencer à introduire quelques notions sur les procédures de déformation (quantification) du point de vue formalisme mathématique en particulier les groupes quantiques ou structures de Hofp, mais avant rappelant quelques concepts sur le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique.

1.0.1 Quantification de Weyl et son développement

Pour quelqu'un qui est familier avec la mécanique classique et la mécanique quantique, ce que nous appelons ici la " déformation quantique " est liée à la procédure de quantification de Hermann Weyl. Dans cette procédure, à certaines fonctions $u(p, q)$ dépendantes

certaines variables classiques sur de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2\ell}$ (avec $p, q \in \mathbb{R}^\ell$), on peut associer un opérateur (l'observable quantique correspondant) $\Omega(u)$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ en suivant prescription générale suivante:

$$u \mapsto \Omega_w(u) = \int_{\mathbb{R}^{2\ell}} \tilde{u}(\xi, \eta) \exp(i(P.\xi + Q.\eta)/\hbar) w(\xi, \eta) d^\ell \xi d^\ell \eta \quad (1.1)$$

où \tilde{u} est la transformée de Fourier inverse de u , P_α et Q_α sont des opérateurs qui satisfont les relations canoniques de commutation $[P_\alpha, Q_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \ell$), w est une fonction de poids et l'intégrale est prise dans la topologie faible des opérateur. Ce qu'on appelle aujourd'hui en quantification produit ou ordre normal correspond à choisir le poids égal à $w(\xi, \eta) = \exp(-\frac{1}{4}(\xi^2 \pm \eta^2))$, ordre standard (le cas des opérateurs pseudodifférentiels habituels dans les mathématiques) correspond à $w(\xi, \eta) = \exp(-\frac{i}{2}\xi\eta)$ et l'ordre original de Weyl (symétrique) à $w = 1$. Une formule d'inversion a été trouvée peu après par Eugene Wigner et a permis de relier un opérateur à ce que les mathématiciens appellent formule classe de trace. Par exemple Ω_1 définit un isomorphisme de l'espace de Hilbert entre $L^2(\mathbb{R}^{2\ell})$ et les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ avec l'inverse donné par

$$u = (2\pi\hbar)^{-\ell} \text{Tr}[\Omega_1(u) \exp((\xi.P + \eta.Q)/i\hbar)] \quad (1.2)$$

et si $\Omega_1(u)$ est une classe de trace on a $\text{Tr}(\Omega_1(u)) = (2\pi\hbar)^{-\ell} \int u \omega^\ell$ où ω^ℓ est le volume (symplectique) dx sur $\mathbb{R}^{2\ell}$. De nombreux développements ont été réalisés selon les méthodes de l'espace de phase, dont beaucoup peuvent être trouvées décrites dans [19]. L'intérêt particulier était de trouver une interprétation à la fonction classique u , symbole de l'opérateur quantique $\Omega_1(u)$; c'était le problème qui a été posé par Blackett à son étudiant Moyal. L'idée naïve était de l'interpréter comme une densité de probabilité mais naturellement elle a été rejetée (parce que il n'y aucune raison pour que u soit positif), mais en recherchant une expression directe pour le symbole de commutation quantique, Moyal trouva ce qu'on appelle aujourd'hui les crochets de Moyal

$$M(u, v) = \nu^{-1} \sinh(\nu P)(u, v) = P(u, v) + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} P^{2r+1}(u, v) \quad (1.3)$$

où $2\nu = i\hbar$, $P^r(u, v) = \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_r j_r} (\partial_{i_1 \dots i_r} u)(\partial_{j_1 \dots j_r} v)$ est la $r^{\text{ième}}$ puissance de ($r \geq 1$) de l'opérateur bidifférentiel crochet de Poisson P , $i_k, j_k = 1, \dots, 2\ell$, $k = 1, \dots, r$ et $(\Lambda^{i_k j_k}) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Pour fixer les idées nous pouvons assumer ici que $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^{2\ell})$ et la somme est prise comme série formelle (la définition et la convergence pour différentes familles des fonctions u et v ont été également étudiés dans [6]). Une formule semblable pour le symbole d'un produit $\Omega_1(u)\Omega_1(v)$ avait été trouvé un peu plus tôt et maintenant elle est écrite en tant que produit star de Moyal:

$$u *_M v = \exp(\nu P)(u, v) = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r P^r(u, v). \quad (1.4)$$

Plusieurs formules intégrales pour le produit star ont été présentées et l'image de Wigner de diverses familles des opérateurs (y compris les opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^\ell)$) ont été étudiées, puis après la théorie de déformation quantique a connu son développement [11][12]. Une adaptation suivant l'ordre de Weyl de la notion mathématique des opérateurs pseudodifférential (ordonnés les opérateurs différentiels suivant, "q les premiers , puis p ") a été faite dans [13]. Partant de la théorie des champs, où l'ordre (de Wick) normal est essentielle (le rôle de q et p en haut est joué dans ce cas par $q \pm ip$), Berezin [18] développa vers les années 70 une étude étendue de ce qu'il a appelé " quantification ", basée sur le principe de correspondance et les symboles de Wick. Elle est essentiellement basée sur les manifolds de Kähler et liée aux opérateurs pseudodifférentiels dans le domaine complexe [20]. Toutefois dans sa théorie, comme dans les études de divers ordres[19], les concepts importants de la déformation et de la formulation autonome de la mécanique quantique en général dans l'espace de phase sont absents.

1.0.2 Théories de Cohomologie et la déformation

I.E. Segal [26] et (indépendamment) peu après Wigner et Inonü [23, 25] ont introduit dans la fin des années 50 un genre d'inversion [22] à la notion mathématique de la déformation des groupes de Lie et ses algèbres, notion qui a été précisément définie seulement en 1964 par Murray Gerstenhaber [21]. Cette inversion est appelée contraction et les exemples typiques (mentionnés au début de cette section) sont le passage de De Sitter aux groupes de Poincaré (en prenant la limite de la courbure nulle dans l'espace-temps) ou de Poincaré à Galilée en prenant $c^{-1} \rightarrow 0$). Intuitivement parlant une contraction est effectuée en négligeant dans les symétries, à un certain niveau de réalité physique, une constante (comme le c^{-1}) qui a un impact négligeable à ce niveau mais des effets significatifs au plus haut " raffiné " niveau. Noter que ceci peut être réalisé mathématiquement dans la plupart des cas [25] est plus général dans [24] mais les deux ont pour inversion la déformation de Gerstenhaber. La notion des déformation des algèbres, qui peuvent être considérés comme résultats de la notion (présentée quelques années auparavant) des déformations des structures analytiques complexes, a donné naissance à une théorie mathématique complète et bien définie.

Il s'avère également que de nouvelles déformations ont été introduites et qui sont bien plus générales que celles présentées par Gerstenhaber, elles ont été présentées (voir [17] et [2]) dans le but de quantifier la mécanique de Nambu. Il reste toujours l'inversion de certaines procédures de contraction, appliquées (comme le cas de la déformation quantique, où l'algèbre est celle des observables classiques et le paramètre est la constante de Planck) aux algèbres qui n'ont pas de symétrie géométrique. Et qui laisse la porte grande ouverte à d'autre procédure mathématique le soin de la découverte.

1.0.3 Quantum groups

Autour des années 1980 Kulish et Reshetikhin [15], pour des raisons liés à l'étude de la diffusion inverse et aux modèles à deux dimensions, ont découvert une modification étrange de $sl(2)$ une algèbre de Lie, où la relation de commutation des deux générateurs

nilpotent devient un sinus du générateur semi-simple au lieu d'être son multiple . Ceci exige en fait la satisfaction de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La théorie a été développée dans la première moitié des années 80 par l'école de Léninegrad de L. Faddeev [4], systématisée par V. Drinfeld qui a développé le contexte algébrique de Hopf et inventé le terme "quantum group" (les groupes quantique) [9] et du point de vue de Jimbo on l'appelle algèbre d'enveloppante[16]. Peu après, Woronowicz [14] a réalisé ces modèles dans le contexte de la géométrie non commutative d'Alain Connes par les pseudogroupes de matrice, avec des coefficients (satisfaisant quelques relations) dans l'algèbre C^* . Un exemple typique de telles algèbres de Hopf est le groupe de Poisson Lie, un groupe de Lie G avec une structure de Poisson compatible i.e. crochet de Poisson P sur $N = C^\infty(G)$, considéré comme bialgèbre avec le coproduit défini par $\Delta u(g, g') = u(gg')$, $g, g' \in G$, satisfait $\Delta P(u, v) = P(\Delta u, \Delta v)$, $u, v \in N$.

1.1 Structures de Hopf des groupes de Lie et algèbre de Lie ordinaires

Nous commençons par considérer $Fun(G)$, l'ensemble des fonctions différentiables d'un groupe de Lie G sur les nombres complexes C . $Fun(G)$ est une algèbre avec la somme et le produit définient comme d'habitude par $(f + h)(g) = f(g) + h(g)$, $(f \cdot h)(g) = f(g)h(g)$,

$(\lambda f)(g) = \lambda f(g)$, pour $f, h \in Fun(G)$, $g \in G$, $\lambda \in C$. L'unité de cette algèbre est I , définie par $I(g) = 1$, $\forall g \in G$.

Utilisons la structure du groupe de g , nous pouvons introduire sur $Fun(G)$ trois autres applications linéaires, le co-produit Δ , la co-unité ε et le co-inverse (ou antipode) κ :

$$\Delta(f)(g, g') \equiv f(gg'), \quad \Delta : Fun(G) \rightarrow Fun(G) \otimes Fun(G) \quad (1.5)$$

$$\varepsilon(f) \equiv f(e), \quad \varepsilon : Fun(G) \rightarrow C \quad (1.6)$$

$$(\kappa f)(g) \equiv f(g^{-1}), \quad \kappa : Fun(G) \rightarrow Fun(G) \quad (1.7)$$

où e est l'unité de G . Il n'est pas difficile de vérifier les propriétés suivantes des co-structures:

$$(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta \quad (\text{co-associativité de } \Delta) \quad (1.8)$$

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(a) = (\varepsilon \otimes id)\Delta(a) = a \quad (1.9)$$

$$m(\kappa \otimes id)\Delta(a) = m(id \otimes \kappa)\Delta(a) = \varepsilon(a)I \quad (1.10)$$

et

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \Delta(I) = I \otimes I \quad (1.11)$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \quad \varepsilon(I) = 1 \quad (1.12)$$

$$\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a), \quad \kappa(I) = I \quad (1.13)$$

où $a, b \in A = Fun(G)$ et m est la fonction multiplication $m(a \otimes b) \equiv ab$. Le produit dans $\Delta(a)\Delta(b)$ est le produit dans $A \otimes A$:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ab \otimes cd.$$

En général un co-produit peut être développé sur $A \otimes A$ comme :

$$\Delta(a) = \sum_i a_1^i \otimes a_2^i \equiv a_1 \otimes a_2 \quad (1.14)$$

où $a_1^i, a_2^i \in A$ et $a_1 \otimes a_2$ est une notation réduite que nous utiliserons souvent par la suite. Par exemple pour $A = Fun(G)$ nous avons :

$$\Delta(f)(g, g') = (f_1 \otimes f_2)(g, g') = f_1(g)f_2(g') = f(gg') \quad (1.15)$$

En utilisant (1.15), la démonstration de (1.8)-(1.10) est immédiate.

Une algèbre A munie des homomorphismes $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\varepsilon : A \rightarrow C$, de

l'antimorphisme $\kappa : A \rightarrow A$ et qui satisfait les propriétés (1.8)-(1.13) est une *algèbre de Hopf*

Ainsi $Fun(G)$ est une algèbre de Hopf¹. Notons que les propriétés (1.8)-(1.13) impliquent les relations:

$$\Delta(\kappa(a)) = \kappa(a_2) \otimes \kappa(a_1) \quad (1.16)$$

$$\varepsilon(\kappa(a)) = \varepsilon(a) \quad (1.17)$$

Considérant maintenant l'algèbre A des polynômes dans les éléments de matrices T_b^a de la représentation fondamentale de G . L'algèbre A est dite librement générée par T_b^a .

Il est clair que $A \subset Fun(G)$, puisque se sont des fonctions sur G . En fait chaque fonction sur G peut être exprimée comme un polynôme en T_b^a (la raison est que les éléments de matrice de toutes les représentations irréductibles de G forment une base complète de $Fun(G)$, et ces éléments de matrice peuvent être construits hors des produits appropriés de $T_b^a(g)$), de sorte que $A = Fun(G)$. Le groupe (manifold) G peut être complètement caractérisée par $Fun(G)$, les co-structures sur Fun portant l'information sur la structure du groupe de G . Ainsi un groupe de Lie classique peut être "défini" comme algèbre A librement générée par des éléments de matrice (commutants) T_b^a de la représentation fondamentale de G , considérées comme des fonctions sur G . Cette définition admet des généralisations non commutatives, c.-à-d. les groupes quantiques.

En utilisant les éléments T_b^a nous pouvons écrire une formule explicite pour l'expansion (1.14) ou (1.15): en effet (1.5) devient

$$\Delta(T_b^a)(g, g') = T_b^a(gg') = T_c^a(g)T_b^c(g') \quad (1.18)$$

¹Pour être précis, est une algèbre de Hopf alors que $Fun(G \times G)$ peut être identifier avec $Fun(G) \otimes Fun(G)$, ainsi et seulement alors on peut définir un coproduit dans(1.5). Ceci est possible pour un G compact.

puisque T est une représentation de matrice de G . Par conséquent :

$$\Delta(T_b^a) = T_c^a \otimes T_b^c. \quad (1.19)$$

D'ailleurs, en utilisant (1.6) et (1.7), on trouve :

$$\varepsilon(T_b^a) = \delta_b^a \quad (1.20)$$

$$\kappa(T_b^a) = (T^{-1})_b^a. \quad (1.21)$$

Ainsi l'algèbre $A = Fun(G)$ des polynômes dans les éléments T_b^a est une algèbre de Hopf avec des co-structures définies par (1.19)-(1.21) and (1.11)-(1.13).

Un autre exemple d'algèbre de Hopf est donné par n'importe quelle algèbre de Lie ordinaire, ou plus précisément par l'algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie, c.-à-d. l'algèbre (avec unité I) des polynômes dont les générateurs T_i modulo les relations de commutation:

$$[T_i, T_j] = C_{ij}T_k$$

Ici on définit la co-structure comme suit:

$$\Delta(T_i) = T_i \otimes I + I \otimes T_i \quad \Delta(I) = I \otimes I \quad (1.22)$$

$$\varepsilon(T_i) = 0 \quad \varepsilon(I) = 1 \quad (1.23)$$

$$\kappa(T_i) = -T_i \quad \kappa(I) = I \quad (1.24)$$

Le lecteur peut vérifier que (1.8)-(1.10) sont satisfaites

En général le dual d'une algèbre de Hopf (de dimension finie) A est une algèbre de Hopf A' , dont les structures et les co-structures sont données, respectivement, par les

co-structures et les structures de A , c-à-d:

$$\chi_1 \chi_2(a) \equiv (\chi_1 \otimes \chi_2) \Delta(a), \quad \chi_1, \chi_2 \in A' \quad (1.25)$$

$$I'(a) \equiv \varepsilon(a) \quad I' = \text{unité de } A' \quad (1.26)$$

et

$$\Delta'(\chi)(a \otimes b) \equiv \chi(ab) \quad (1.27)$$

$$\varepsilon'(\chi) \equiv \chi(I) \quad (1.28)$$

$$\kappa'(\chi)(a) \equiv \chi(\kappa(a)) \quad (1.29)$$

1.1.1 Groupes quantiques. L'exemple de $GL_q(2)$

Les groupes quantiques sont introduits comme des déformations non commutatives de l'algèbre $A = Fun(G)$ de la section précédente [plus précisément comme les algèbres de Hopf non commutatives obtenues par des déformations continues de l'algèbre de Hopf $A = Fun(G)$]. Dans ce qui suit nous allons considérer des groupes quantiques définis comme des algèbres associatives A librement générées par les éléments de matrices non-commutatives T^a_b et qui satisfont les relations

$$R^{ab} \quad {}_{ef} T^e_c T^f_d = T^b_f T^a_e R^{ef} \quad {}_{cd} \quad (1.30)$$

et quelques autres conditions dépendant de quel groupe classique nous sommes entrainé de déformer. La matrice R contrôle la non-commutativité du T^a_b , et ses éléments dépendent continuellement d'un paramètre q (en général complexe), ou probalement un ensemble de paramètre. Pour $q \rightarrow 1$, dite "limite classique", nous devons avoir

$$R^{ab} \quad {}_{cd} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \delta^a_c \delta^b_d \quad (1.31)$$

c-à-d les éléments de matrice T^a_e commutent pour $q = 1$, et on retrouve l'espace

ordinaire $Fun(G)$.

L'associativité de A implique une condition de consistance sur la matrice R , i.e. l'équation de Yang–Baxter quantique

$$R^{a_1 b_1}_{a_2 b_2} R^{a_2 c_1}_{a_3 c_2} R^{b_2 c_2}_{b_3 c_3} = R^{b_1 c_1}_{b_2 c_2} R^{a_1 c_2}_{a_2 c_3} R^{a_2 b_2}_{a_3 b_3} \quad (1.32)$$

Pour une simplicité d'écriture les équations sont mises sous la forme “ RTT ” (1.30) et l'équation de Yang–Baxter quantique et la relations de consistance deviennent comme suit:

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12} \quad (1.33)$$

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (1.34)$$

où les indices inférieurs 1, 2 et 3 se réfèrent aux différents couples d'indice. Ainsi T_1 indique la matrice T^a_b , $T_1 T_1$ indiquent $T^a_c T^c_b$, $R_{12} T_2$ indiquent $R^{ab}_{cd} T^d_e$ et ainsi de suite, et les indices inférieurs répétés signifient la multiplication de matrices. L'équation de Yang–Baxter quantique (1.34) est une condition suffisante pour la consistance de équation RTT (1.33). En effet le produit de trois éléments différents T^a_b , T^c_d et T^e_f , indiqué par $T_1 T_2 T_3$, peut être réordonné par deux chemins

$$\begin{array}{ccc}
 & & T_1 T_3 T_2 \rightarrow T_3 T_1 T_2 \\
 T_1 T_2 T_3 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \\
 & & T_2 T_1 T_3 \rightarrow T_2 T_3 T_1 \\
 & & \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} & T_3 T_2 T_1
 \end{array} \quad (1.35)$$

par utilisation répétée de l'équation de RTT . La relation (1.34) assure que les deux chemins mènent au même résultat.

L'algèbre A (“groupe quantique”) est une algèbre de Hopf non-commutative dont les co-structures sont identiques à ceux définies pour l'algèbre de Hopf commutative $Fun(G)$ de la section précédente, les équations (1.18)-(1.21), (1.11)-(1.13).

Donnons l'exemple de $SL_q(2)$, l'algèbre librement générée par les éléments α, β, γ et

δ de la matrice 2×2

$$T_b^a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

satisfait les permutations

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= q\beta\alpha, & \alpha\gamma &= q\gamma\alpha, & \beta\delta &= q\delta\beta, & \gamma\delta &= q\delta\gamma \\ \beta\gamma &= \gamma\beta, & \alpha\delta - \delta\alpha &= (q - q^{-1})\beta\gamma, & q &\in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.37)$$

et

$$\det_q T \equiv \alpha\delta - q\beta\gamma = I. \quad (1.38)$$

Les permutations (1.37) peuvent être obtenues de (1.30) par la matrice R

$$R^{ab}_{cd} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

où les lignes et les colonnes sont numérotées par l'ordre 11, 12, 21, 22.

Il est simple de vérifier que le "déterminant quantique" défini dans (1.38) commute avec α, β, γ et δ , de sorte que la condition $\det_q T = I$ est consistante. L'inverse de matrice de T_b^a est

$$(T^{-1})_b^a = (\det_q T)^{-1} \begin{pmatrix} \delta & -q^{-1}\beta \\ -q\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Le co-produit, co-unité et le co-inverse de α, β, γ et δ sont déterminés par les formules (1.18)-(1.21) pour être

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma, & \Delta(\beta) &= \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta \\ \Delta(\gamma) &= \gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma, & \Delta(\delta) &= \gamma \otimes \beta + \delta \otimes \delta \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\delta) = 1, \quad \varepsilon(\beta) = \varepsilon(\gamma) = 0 \quad (1.42)$$

$$\kappa(\alpha) = \delta, \quad \kappa(\beta) = q^{-1}\beta, \quad \kappa(\gamma) = -q\gamma, \quad \kappa(\delta) = \alpha. \quad (1.43)$$

Note 1: En général $\kappa^2 \neq 1$, comme il peut être vérifié en utilisant (1.43). et donc on a les relations utiles suivantes [27]:

$$\kappa^2(T_b^a) = D_c^a T_d^c (D^{-1})_b^d = d^a d_b^{-1} T_b^a \quad (1.44)$$

où D est une matrice diagonale, $D_b^a = d^a \delta_b^a$, donnée par $d^a = q^{2a-1}$ pour les q -groupes A_{n-1} .

Note 2: Les commutations (1.37) sont compatibles avec le co-produit Δ , dans le sens que $\Delta(\alpha\beta) = q\Delta(\beta\alpha)$ et ainsi de suite. En général nous devons avoir

$$\Delta(R_{12}T_1T_2) = \Delta(T_2T_1R_{12}), \quad (1.45)$$

ce qui est facilement vérifié en utilisant $\Delta(R_{12}T_1T_2) = R_{12}\Delta(T_1)\Delta(T_2)$ et $\Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1$. C'est équivalent de montrer que les éléments de matrice du produit matriciel T_1T_1' , où T' est une matrice [satisfaisant (1.30)] dont les éléments *commutent* avec ceux de T_b^a , et qui obéissent toujours aux commutations (1.33).

Note 3: $\Delta(\det_q T) = \det_q T \otimes \det_q T$ de sorte que la propriété du co-produit $\Delta(I) = I \otimes I$ est compatible avec $\det_q T = I$.

Note 4: Autres conditions compatibles avec la relation de RTT peuvent être imposées sur T_b^a :

i) Condition de l'unitarité : $T^\dagger = T^{-1} \Rightarrow \bar{\alpha} = \delta, \quad \bar{\beta} = -q\gamma, \quad \bar{\gamma} = -q^{-1}\beta, \quad \bar{\delta} = \alpha$, où

q est un nombre réel et la barre denote une involution, la q -analogue de la conjugaison complexe, satisfait $\overline{(\alpha\beta)} = \overline{\beta}\overline{\alpha}$ etc, et réduit $SL_q(2)$ à $SU_q(2)$.

ii) Condition de réellité : $\bar{T} = T \Rightarrow \bar{\alpha} = \alpha, \bar{\beta} = \beta, \bar{\gamma} = \gamma, \bar{\delta} = \delta, |q| = 1.$ et réduit $SL_q(2)$ à $SL_q(2, R)$.

iii) Le q -analogue des groupes orthogonaux et symplectiques peut aussi être défini, voir [27].

Note 5: La condition (1.38) peut être adouci. Alors nous devons inclure l'élément central $\zeta = (\det_q T)^{-1}$ dans A , afin de pouvoir définir l'inverse de la q -matrice (matrice quantique) T_b^a comme dans (1.40), et le co-inverse T_b^a comme dans (1.21). Le q -groupe (groupe quantique) est alors $GL_q(2)$, et la condition de l'unitarité le réduit à $U_q(2)$. Le lecteur peut déduire les co-structures sur ζ :

$$\Delta(\zeta) = \zeta \otimes \zeta, \quad \varepsilon(\zeta) = 1, \quad \kappa(\zeta) = \det_q T.$$

Note 6: Plus généralement, le déterminant quantique des $n \times n$ q -matrices est défini par $\det_q T = \sum_{\sigma} (-q)^{l(\sigma)} T_{\sigma(1)}^1 \cdots T_{\sigma(n)}^n$, où $l(\sigma)$ est le nombre minimal des inversions dans une permutation σ . Alors $\det_q T = 1$ restreint $GL_q(n)$ à $SL_q(n)$.

Note 7: Nous rappelons les relations importantes [27] pour la matrice \widehat{R} définie par $\widehat{R}^{ab}_{cd} \equiv R^{ba}_{cd}$, à qui la limite $q = 1$ est l'opérateur de permutation $\delta_d^a \delta_c^b$:

$$\widehat{R}^2 = (q - q^{-1})\widehat{R} + I, \quad \text{pour } A_{n-1} \quad (\text{condition de Hecke}) \quad (1.46)$$

$$(\widehat{R} - qI)(\widehat{R} + q^{-1}I)(\widehat{R} - q^{1-N}I) = 0, \quad \text{pour } B_n, C_n, D_n, \quad (1.47)$$

avec $N = 2n + 1$ pour les séries B_n et $N = 2n$ pour C_n et D_n . D'ailleurs pour tous les q -groupes A, B, C, D la matrice R est triangulaire inferieure et satisfait:

$$(R^{-1})^{ab}_{cd}(q) = R^{ab}_{cd}(q^{-1}) \quad (1.48)$$

$$R^{ab}_{cd} = R^{dc}_{ba} \quad (1.49)$$

1.1.2 Calcul différentiel dans les groupes quantiques

Dans cette section on donne un petit rappel du calcul différentiel bicovariant sur les q -groupes comme il a été développé par Woronowicz [28] La limite $q \rightarrow 1$ apparaîtra constamment dans notre discussion, afin de montrer clairement quelle structure classique va être q - généralisée.

Considérons l'algèbre A de la section précédente, c.-à-d. l'algèbre librement générée par les éléments de matrice T_b^a les relations (1.30) et probablement quelques conditions de réélicité ou d'orthogonalité.

Le calcul différentiel du premier ordre sur A est alors défini par

i) une fonction linéaire $d: A \rightarrow \Gamma$, satisfaisant la règle de Leibniz

$$d(ab) = (da)b + a(db), \quad \forall a, b \in A; \quad (1.50)$$

Γ est un bimodule approprié (voir par exemple [29]) sur A , ce qui signifie essentiellement que ses éléments peuvent être multipliés du côté gauche et du côté droit par des éléments de A , et q -généralise l'espace de 1-forme sur un groupe de Lie ;

ii) la possibilité d'exprimer tout $\rho \in \Gamma$ comme

$$\rho = a_k db_k \quad (1.51)$$

pour certains a_k, b_k appartenant à A .

Covariance left-right

Le calcul différentiel du premier ordre (Γ, d) serait *left-right-covariant* si on peut avec consistance définir une action gauche et droite du q -groupe sur Γ comme suit

$$\Delta_L(adb) = \Delta(a)(id \otimes d)\Delta(b) \quad \Delta_L : \Gamma \rightarrow A \otimes \Gamma \quad (\text{covariance left}) \quad (1.52)$$

$$\Delta_R(adb) = \Delta(a)(d \otimes id)\Delta(b) \quad \Delta_R : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes A \quad (\text{covariance right}) \quad (1.53)$$

mais comment pouvons nous comprendre ces actions left et right sur Γ dans la limite $q \rightarrow 1$?

La première observation est que le co-produit Δ sur A est directement relié, pour $q = 1$, au renversement (pullback) induit par la multiplication gauche du groupe sur lui-même

$$L_x y \equiv xy, \quad \forall x, y \in G \quad (1.54)$$

Ceci induit l'action left L_x^* sur les fonctions de G :

$$L_x^* f(y) \equiv f(xy)|_y, \quad L_x^* : Fun(G) \rightarrow Fun(G) \quad (1.55)$$

où $f(xy)|_y$ signifie $f(xy)$ considérée comme fonction de y . Introduisons l'application L^* défini par

$$\begin{aligned} L^*(x, y) &\equiv L_x^* f(y) \equiv f(xy)|_y \\ L^* &: Fun(G) \rightarrow Fun(G \times G) \approx Fun(G) : Fun(G) \otimes Fun(G) \end{aligned} \quad (1.56)$$

le coproduit Δ sur A , quand $q = 1$, se réduit à l'application L^* . En effet, considérons $T_b^a(y)$ comme des fonctions sur G , nous avons

$$L^*(T_b^a)(x, y) = L_x^* T_b^a(y) = T_b^a(xy) = T_c^a(x) T_b^c(y) \quad (1.57)$$

puisque T_b^a est une representation de G . Alors

$$L^*T_b^a = T_c^a \otimes T_b^c$$

et L^* semble coincider avec Δ , voir (1.19)

Et L_x^* peut également être défini par 1-forme ρ comme

$$(L_x^*\rho)(y) = \rho(xy)|_y \quad (1.58)$$

on peut aussi définir L^* comme

$$(L^*\rho)(x, y) = L_x^*\rho(y) = \rho(xy)|_y \quad (1.59)$$

Dans le cas $q = 1$, l'action left Δ_L coincide avec l'application L^* pour la 1-forme. En effet pour $q = 1$

$$\begin{aligned} \Delta_L(adb)(x, y) &= [\Delta(a)(id \otimes d)\Delta(b)](x, y) = [(a_1 \otimes a_2)(id \otimes d)(b_1 \otimes b_2)](x, y) \\ &= [a_1b_1 \otimes a_2db_2](x, y) = a_1(x)b_1(x)a_2(y)db_2(y) \\ &= L^*(a)(x, y)d_y[L^*(b)(x, y)] = a(xy)db(xy) \end{aligned} \quad (1.60)$$

d'autre part

$$L^*(adb)(x, y) = a(xy)db(xy) \quad (1.61)$$

est donc $\Delta_L \longrightarrow L^*$ quand $q \longrightarrow 1$. Dans la dernière équation nous avons utilisé la propriété $L_x^*(adb) = L_x^*(a)dL_x^*(b)$ du pullback classique. Même chose pour Δ_R , et nous avons $\Delta_R \longrightarrow R^*$ quand $q \longrightarrow 1$, où R^* est défini via le pullback R_x^* sur les fonctions

(0–forme) ou sur 1–forme induites par la multiplication droite:

$$R_x y = yx, \quad \forall x, y \in G \quad (1.62)$$

$$(R_x^* \rho)(y) \equiv \rho(xy)|_y \quad (1.63)$$

$$(R^* \rho)(y, x) \equiv (R_x^* \rho)(y) \quad (1.64)$$

Ces observations expliquent pourquoi Δ_L et Δ_R sont appelé left et right actions du groupe quantique sur Γ quand $q \neq 1$.

Des définitions (1.52) et (1.53) on peut endéduire les propriétés suivantes[28]:

$$(\varepsilon \otimes id) \Delta_L(\rho) = \rho, \quad (id \otimes \varepsilon) \Delta_R(\rho) = \rho \quad (1.65)$$

$$(\Delta \otimes id) \Delta_L = (id \otimes \Delta_L) \Delta_L, \quad (id \otimes \Delta) \Delta_R = (\Delta_R \otimes id) \Delta_R \quad (1.66)$$

Bicovariance

Le calcul covariant left-right est dit bicovariant quand

$$(id \otimes \Delta_R) \Delta_L = (\Delta_L \otimes id) \Delta_R \quad (1.67)$$

laquelle est le q –analogue du fait que l’action left et right commutent pour $q = 1$
 $(L_x^* R_x^* = R_x^* L_x^*)$

L’invariant left et right ω

Un élément ω de Γ est dit être invariant left si:

$$\Delta_L(\omega) = I \otimes \omega \quad (1.68)$$

et invariant right si:

$$\Delta_R(\omega) = \omega \otimes I \quad (1.69)$$

Ce qui se comprend bien dans la limite classique

$$L^*\omega = I \otimes \omega \quad (1.70)$$

$$R^*\omega = \omega \otimes I \quad (1.71)$$

en effet ca définis 1–forme respectivement invariante left et right.

$$(I \otimes \rho)(x, y) = I(x)\rho(y) = \rho(y) \quad (1.72)$$

pour le cas invariant gauche ρ . La même argumentation pour l’invariant droit ω .

Conséquences

Pour n’importe quel calcul du premier ordre bicovariant on peut montrer ce qui suit [28]:

i) Tout $\rho \in \Gamma$ peut être uniquement écrit sous la forme

$$\rho = a_i \omega^i \quad (1.73)$$

$$\rho = \omega^i b_i \quad (1.74)$$

avec $a_i, b_i \in A$, et ω^i une base de ${}_{inv}\Gamma$, le sous-espace linéaire de tous les éléments invariants gauches de Γ . Ainsi, comme dans le cas classique, toute Γ est générée par une base d’invariant gauche ω^i . Un théorème analogue est valable avec une base des éléments invariants droits $\eta^i \in \Gamma_{inv}$. Notons que dans le cas quantique nous avons en général $a\omega^i \neq \omega^i a$, la structure bimodule de Γ étant non trivial pour $q \neq 1$.

ii) Il existe des fonctionnelles linéaires f_j^i sur A tels que

$$\omega^i b = (f_j^i * b) \omega^j \equiv (id \otimes f_j^i) \Delta(b) \omega^j \quad (1.75)$$

$$a \omega^i = \omega^j [(f_j^i \circ \kappa^{-1}) * a] \quad (1.76)$$

pour tous $a, b \in A$. En particulier

$$\omega^i T_b^a = (id \otimes f_j^i) (T_c^a \otimes T_b^c) \omega^j = T_c^a f_j^i (T_b^c) \omega^j \quad (1.77)$$

une fois nous avons les fonctionnelles f_j^i , nous saurons comment commuter les éléments de A par rapport aux éléments de Γ . Les f_j^i sont uniquement déterminés par (1.75) et pour être consistantes elles doivent satisfaire les conditions:

$$f_j^i(ab) = f_k^i(a) f_j^k(b) \quad (1.78)$$

$$f_j^i(I) = \delta_j^i \quad (1.79)$$

$$(f_j^k \circ \kappa) f_i^j = \delta_i^k \varepsilon; \quad f_j^k (f_i^j \circ \kappa) = \delta_i^k \varepsilon \quad (1.80)$$

d'où alors leur coproduit, counité et co-inverse sont donnée par:

$$\Delta' (f_j^i) = f_k^i \otimes f_j^k \quad (1.81)$$

$$\varepsilon' (f_j^i) = \delta_j^i \quad (1.82)$$

$$\kappa' (f_j^k) f_i^j = \delta_i^k \varepsilon = f_j^k \kappa' (f_i^j) \quad (1.83)$$

(cf.1.27-1.29). Notons que si $q = 1$, $f_j^i \longrightarrow \delta_j^i \varepsilon$, autrement dit les f_j^i deviennent proportionnelles à la fonctionnelle identité $\varepsilon(a) = a(e)$, et les formules (1.75), (1.76) deviennent triviales, i.e $\omega^i b = b \omega^i$

iii) Il existe une représentation adjointe M_j^i du groupe quantique, défini par l'action à droite sur (left invariant) ω^i :

$$\Delta_R (\omega^i) = \omega^j \otimes M_j^i, \quad M_j^i \in A \quad (1.84)$$

il est facile de montrer que $\Delta_R (\omega^i)$ appartient à $\Gamma \otimes A$, ce qui prouve l'existence de M_j^i . Dans le cas classique, M_j^i est en fait la représentation adjointe du groupe. On rappelle

que dans cette limite le left-invariant 1-forme ω^i peut être construit comme :

$$\omega^i(y) T_i = (y^{-1} dy)^i T_i, \quad y \in G \quad (1.85)$$

Sous la multiplication droite par un élément (constant) $x \in G : y \longrightarrow yx$ on a²:

$$\omega^i(yx) T_i = [x^{-1} y^{-1} d(yx)]^i T_i = [x^{-1} (y^{-1} dy) x]^i T_i \quad (1.86)$$

$$= [x^{-1} T_j x]^i (y^{-1} dy)^j T_i = M_j^i(x) \omega^j(y) T_i \quad (1.87)$$

ainsi donc

$$\omega^i(yx) = \omega^j(y) M_j^i(x) \quad (1.88)$$

où

$$R^* \omega^i(y, x) = \omega^j \otimes M_j^i(y, x) \quad (1.89)$$

qui reproduit (1.84) pour $q = 1$

Les co-structure sur M_j^i peuvent être déduite[28]:

$$\Delta(M_j^i) = M_k^i \otimes M_j^k \quad (1.90)$$

$$\varepsilon'(M_j^i) = \delta_j^i \quad (1.91)$$

$$\kappa(M_i^k) M_k^j = \delta_i^j \varepsilon = M_i^k \kappa(M_k^j) \quad (1.92)$$

Par exemple, dans le but de trouver le coproduit (1.90) il suffit d'appliquer $(id \otimes d)$ aux deux membres de (1.84) et utiliser la seconde relation de l'équa (1.66).

Les éléments M_j^i peuvent être utiliser pour construire une base d'invariant droit sur Γ . En effet les η^i sont définis par

$$\eta^i \equiv \omega^j \kappa(M_j^i) \quad (1.93)$$

²Rappelons que $q = 1$ est la définition de la représentation adjointe $x^{-1} T_j x = M_j^i(x) T_i$

et elles sont une base de Γ (chaque élément de Γ peut être uniquement écrit comme $\rho = \eta^i b_i$) et leur invariance droite peut être vérifiée directement.

$$\begin{aligned}\Delta_R(\eta^i) &= \Delta_R(\omega^i) \Delta(\kappa(M_j^i)) = \\ [\omega^k \otimes M_k^j] [\kappa(M_s^i) \otimes \kappa(M_j^s)] &= \omega^k \kappa(M_s^i) \otimes \delta_k^s I = \eta^i \otimes I\end{aligned}\quad (1.94)$$

On peut montrer que les fonctionnelles f_j^i définies auparavant satisfont :

$$\eta^i b = (b * f_j^i \circ \kappa^{-2}) \eta^i \quad (1.95)$$

$$a \eta^i = \eta^i [b * (f_j^i \circ \kappa^{-1})], \quad (1.96)$$

avec $a * f \equiv (f \otimes id)\Delta(a)$

De plus, suite à la dernière relation, en utilisant (1.93) et (1.76) on peut montrer la relation :

$$M_j^i(a * f_k^i) = (f_j^i * a)M_i^k, \quad (1.97)$$

avec $a * f_j^i \equiv (f_k^i \otimes id)\Delta(a)$.

iv) Un *produit extérieur*, compatible avec les actions gauches et droites du q -groupe, peut être défini par un automorphisme bimodule Λ dans $\Gamma \otimes \Gamma$ qui généralise l'opérateur de permutation ordinaire :

$$\Lambda(\omega^i \otimes \eta^j) = \eta^j \otimes \omega^i, \quad (1.98)$$

où ω^i et η^j sont respectivement des éléments invariants gauches et droits de Γ . L'automorphisme bimodule signifie que

$$\Lambda(a\tau) = a\Lambda(\tau) \quad (1.99)$$

$$\Lambda(\tau b) = \Lambda(\tau)b \quad (1.100)$$

pour tous $\tau \in \Gamma \otimes \Gamma$ et $a, b \in A$. Le produit tensoriel entre les éléments $\rho, \rho' \in \Gamma$ est défini d'une façon à avoir les propriétés $\rho a \otimes \rho' = \rho \otimes a\rho'$, $a(\rho \otimes \rho') = (a\rho) \otimes \rho'$ and

$(\rho \otimes \rho')a = \rho \otimes (\rho'a)$. les actions des left et right sur $\Gamma \otimes \Gamma$ sont définies par

$$\Delta_L(\rho \otimes \rho') \equiv \rho_1 \rho'_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho'_2, \quad \Delta_L : \Gamma \otimes \Gamma \rightarrow A \otimes \Gamma \otimes \Gamma \quad (1.101)$$

$$\Delta_R(\rho \otimes \rho') \equiv \rho_1 \otimes \rho'_1 \otimes \rho_2 \rho'_2, \quad \Delta_R : \Gamma \otimes \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma \otimes A \quad (1.102)$$

où, comme d'habitude ρ_1, ρ_2 , etc., sont définis par

$$\Delta_L(\rho) = \rho_1 \otimes \rho_2, \quad \rho_1 \in A, \rho_2 \in \Gamma$$

$$\Delta_R(\rho) = \rho_1 \otimes \rho_2, \quad \rho_1 \in \Gamma, \rho_2 \in A$$

Plus généralement, nous pouvons définir l'action de Δ_L sur $\Gamma \otimes \Gamma \otimes \dots \otimes \Gamma$ comme suit

$$\begin{aligned} \Delta_L(\rho \otimes \rho' \otimes \dots \otimes \rho'') &\equiv \rho_1 \rho'_1 \dots \rho''_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho'_2 \otimes \dots \otimes \rho''_2 \\ \Delta_L : \Gamma \otimes \Gamma \otimes \dots \otimes \Gamma &\longrightarrow A \otimes \Gamma \otimes \Gamma \otimes \dots \otimes \Gamma \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} \Delta_R(\rho \otimes \rho' \otimes \dots \otimes \rho'') &\equiv \rho_1 \otimes \rho'_1 \dots \otimes \rho''_1 \otimes \rho_2 \rho'_2 \dots \rho''_2 \\ \Delta_R : \Gamma \otimes \Gamma \otimes \dots \otimes \Gamma &\longrightarrow \Gamma \otimes \Gamma \otimes \dots \otimes \Gamma \otimes A. \end{aligned} \quad (1.104)$$

L'invariance gauche sur $\Gamma \otimes \Gamma$ est naturellement définie comme $\Delta_L(\rho \otimes \rho') = I \otimes \rho \otimes \rho'$ (definition similaire pour l'invariance droite), de sorte que, par exemple, $\omega^i \otimes \omega^j$ est invariant gauche, et en fait est une base invariante gauche pour $\Gamma \otimes \Gamma$.

– En général $\Lambda^2 \neq 1$, puisque $\Lambda(\eta^j \otimes \omega^i)$ n'est pas nécessairement égale à $\omega^i \otimes \eta^j$. Par linéarité, Λ peut être étendue à tout de $\Gamma \otimes \Gamma$.

– Λ est invertible et commute avec l'action gauche et droite du q -groupe G , c-à-d

$$\Delta_L \Lambda(\rho \otimes \rho') = (id \otimes \Lambda) \Delta_L(\rho \otimes \rho') = \rho_1 \rho'_1 \otimes \Lambda(\rho_2 \otimes \rho'_2),$$

et même chose pour Δ_R . Alors on remarque que $\Lambda(\omega^i \otimes \omega^j)$ est invariant left, et peut

être donc développé sur la base de l'invariant left $\omega^k \otimes \omega^l$:

$$\Lambda(\omega^i \otimes \omega^j) = \wedge_{kl}^{ij} \omega^k \otimes \omega^l.$$

– D'après la définition (1.98) on peut montrer que [28]:

$$\wedge_{kl}^{ij} = f_l^i(M_j^k); \quad (1.105)$$

ainsi les fonctionnelles f_l^i et les éléments $M_j^k \in A$ caractérisant le bimodule Γ sont duals dans le sens de l'équation (1.105) et déterminent le produit extérieur

$$\rho \wedge \rho' \equiv \rho \otimes \rho' - \Lambda(\rho \otimes \rho') \quad (1.106)$$

$$\omega^i \wedge \omega^j \equiv \omega^i \otimes \omega^j - \wedge_{kl}^{ij} \omega^k \otimes \omega^l \quad (1.107)$$

Notant que , si le tenseur \wedge_{kl}^{ij} est donné, on peut calculer le produit extérieur de tous $\rho, \rho' \in \Gamma$ puisque tout $\rho \in \Gamma$ peut se mettre en termes de ω^i équ. (1.73) et (1.74). la limite classique de \wedge_{kl}^{ij} est

$$\wedge_{kl}^{ij} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \delta_l^i \delta_k^j \quad (1.108)$$

puisque $f_j^i \xrightarrow{q \rightarrow 1} \delta_l^i \varepsilon$ et $\varepsilon(M_j^k) = \delta_k^j$. Alors dans la limite $q = 1$ le produit défini dans (1.107) concide avec le produit extérieur .

À partir de la propriété (1.99) appliquée au cas $\tau = \omega^i \otimes \omega^j$, on peut dériver la relation

$$\wedge_{ij}^{nm} f_p^i f_q^j = f_i^n f_j^m \wedge_{pq}^{ij} \quad (1.109)$$

Appliquant les deux membres de cette équation à l'élément M_r^s on se rapporte à l'équation quantique de Yang–Baxter pour Λ :

$$\wedge_{ij}^{nm} \wedge_{rp}^{ik} \wedge_{kq}^{js} = \wedge_{ri}^{nk} \wedge_{kj}^{ms} \wedge_{pq}^{ij}, \quad (1.110)$$

qui est suffisant pour la consistance de (1.109).

Prenons $a = M_p^q$ dans (1.97), et utilisons (1.105), nous trouvons la relation

$$M_i^j M_r^q \wedge_{pk}^{ir} = \wedge_{ri}^{jq} M_p^r M_k^i \quad (1.111)$$

et, définissons

$$R_{kl}^{ij} \equiv \wedge_{kl}^{ij}, \quad (1.112)$$

nous remarquons que M_i^j satisfait une relation identique à l'équation a "RTT" (1.30) pour T_b^a , et que R_{kl}^{ij} satisfait l'équation quantique de Yang–Baxter (1.32), suffisante pour la consistance de (1.111). Le rang des indices différent, puisque i, j, \dots sont des indices adjoints en considérant que a, b, \dots sont dans la représentation fondamentale de G_q .

v) Ayant le produit extérieur nous pouvons définir la *différentielle extérieure*

$$d : \Gamma \rightarrow \Gamma \wedge \Gamma \quad (1.113)$$

$$d(a_k db_k) = da_k \wedge db_k, \quad (1.114)$$

qui peut être facilement étendu à $\Gamma^{\wedge n}$ ($d : \Gamma^{\wedge n} \rightarrow \Gamma^{\wedge(n+1)}$, $\Gamma^{\wedge n}$ étant défini comme dans le cas classique mais avec l'opérateur de permutation quantique Λ [28]) et il a les propriétés suivantes :

$$d(\theta \wedge \theta') = d\theta \wedge \theta' + (-1)^k \theta \wedge d\theta' \quad (1.115)$$

$$d(d\theta) = 0 \quad (1.116)$$

$$\Delta_L(d\theta) = (id \otimes d)\Delta_L(\theta) \quad (1.117)$$

$$\Delta_R(d\theta) = (d \otimes id)\Delta_R(\theta), \quad (1.118)$$

où $\theta \in \Gamma^{\wedge k}$, $\theta' \in \Gamma^{\wedge n}$. Les deux dernières propriétés expriment le fait que d commute avec l'action left et right du groupe quantique, comme dans le cas classique.

vi). L'espace dual au sous espace invariant left ${}_{inv}G$ peut être introduit comme

un sous espace linéaire de A' , dont les éléments de base $\chi_i \in A'$ sont définis par

$$da = (\chi_i * a)\omega^i, \quad \forall a \in A. \quad (1.119)$$

Afin de reproduire la limite classique

$$da = \frac{\partial}{\partial y^\mu} a(y) dy^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} a \right) e_i^\mu(y) e_\nu^i(y) dy^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} a \right) e_i^\mu(y) \omega^i(y), \quad (1.120)$$

où $e_\nu^i(y)$ est le vielbein du groupe (et e_i^μ est son inverse), on doit avoir

$$\chi_i(a) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial x^i} a(x)|_{x=e}$$

Après cette introduction sur la théorie de déformation et le formalisme mathématique des algèbres de Hopf (groupes quantiques) la section suivante sera consacrée à l'étude de l'oscillateur harmonique généralisé dans le cadre de l'extension de la représentation q -déformé de Macfarlane, il sera question de la détermination complète des caractéristiques de ce qu'on note OHG q -déformé. La troisième section concernera l'étude des cordes bosoniques ouvertes q -déformées du point de vue des états ghosts i.e. montrer que ces états pour des valeurs appropriés de q sont libres de la norme négative. La quatrième chapitre sera dédié à la relation qui peut exister entre la théorie de déformation et la paraquantification. Enfin nous terminerons le contenu de cette thèse par un travail qui par son importance mérite d'y être une partie et qui donne façon de revoir les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs du point de l'équivalence canonique.

Chapter 2

L'Oscillateur Harmonique Généralisé q -déformé

Dans ce chapitre on va étudier le système d'un oscillateur harmonique généralisé dans le cadre de la q -déformation. Pour cela on a choisi d'étendre la représentation dite de Macfarlane[30] qui a été à l'origine proposée pour un oscillateur harmonique.

Dans le paragraphe suivant on va rappeler le formalisme de la q -déformation de l'oscillateur harmonique en particulier la description de ces opérateur de création et d'annihilation en représentation coordonnées déformée, et on calculera ces états propres. Puis dans le paragraphe suivant on exposera notre travail sur l'oscillateur harmonique généralisé et ces caractéristiques en particulier on essaiera de calculer la phase de Berry relative.

2.0.3 Oscillateur harmonique q -déformé

L'oscillateur harmonique q -déformé [30] est le système le plus simple dans lequel les opérateurs de création et d'annihilation obéissent à une algèbre non-standard dépendante d'un paramètre q (le paramètre de déformation). La limite $q \rightarrow 1$ correspond à l'algèbre ordinaire de Heisenberg-Weyl. On considère ce système il est facile d'expliquer et d'étendre la description de q -déformation à notre système d'étude.

L'oscillateur harmonique q -déformé est défini par l'algèbre de Heisenberg-Weyl q -déformé [31]

$$aa^+ - qa^+a = q^{-N} \quad (2.1)$$

ou les opérateur a et son adjoint a^+ agissent dans un espace de Hilbert associé à un espace de \mathcal{F} défini par:

$$\mathcal{F} = \{|n\rangle \text{ avec } n \in \mathbb{N}\} \quad (2.2)$$

et les opérateurs de création et de d'annihilation a et a^+ sont définis sur la base $|n\rangle$ par les relations

$$a |n\rangle = \sqrt{[n]} |n-1\rangle \quad (2.3)$$

et

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle \quad (2.4)$$

avec

$$a |0\rangle = 0 \quad (2.5)$$

et

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (2.6)$$

et q est supposé être un réel .

L'état $|0\rangle$ s'appelle le vide (ou l'état fondamental), q est le paramètre de déformation. l'opérateur N joue le rôle de l'opérateur nombre de particule

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.7)$$

cette dernière découle des définitions (2.3)(2.4). En fait, on peut vérifier facilement que

$$[a^+, N] = -a^+$$

et

$$[a, N] = a \tag{2.8}$$

qui justifie la relation (2.7)

Remarquons que si $q = 1$ alors $[n] = n$ et on retrouve ainsi les opérateurs de création et destruction usuels relatif à un oscillateur harmonique, qui vérifient la relation de commutation

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = \mathbf{1} \tag{2.9}$$

Pour lever la dépendance de la relation de commutation (2.1) du nombre de particule, nous appliquons la transformation suivante

$$b = q^{-N}a \tag{2.10}$$

et

$$b^+ = a^+q^{-N} \tag{2.11}$$

Les opérateurs b et b^+ satisfont à la relation de commutation suivante

$$bb^+ - q^2b^+b = 1 \tag{2.12}$$

il vient des relations (2.3)(2.4) et la définition (2.7) que

$$bb^+ = \frac{1 - q^{2N}}{1 - q^2} \tag{2.13}$$

Les opérateurs b , b^+ et l'opérateur unité forment une algèbre fermée: l'algèbre de Weyl-Heisenberg. La déformation de l'algèbre de Weyl-Heisenberg consiste dans la substitution de la loi de commutation usuelle par des autres lois, à savoir

$$[b, b^+]_q = \mathbf{1} \quad (2.14)$$

$$[b, \mathbf{1}]_q = 0 \quad (2.15)$$

$$[b^+, \mathbf{1}]_q = 0 \quad (2.16)$$

La loi de q -commutation est donnée par:

$$[A, B]_q = AB - q^2 BA \quad (2.17)$$

On peut montrer qu'un état $|n\rangle$ est donné sous la forme

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (b^+)^n |0\rangle \quad (2.18)$$

où

$$[n]! = [n] [n-1] \dots [1] \quad (2.19)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $[0]! = 1$; néanmoins les q nombres $[n]$ sont défini dans ce cas par

$$[n] = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} \quad (2.20)$$

2.0.4 Description en Coordonnée de l'oscillateur harmonique q -déformé

Cette réalisation en représentation de coordonnées de l'oscillateur harmonique q -déformé a été proposée par Macfarlane[30]

Où on exprime les opérateurs a, a^+ par

$$b = \alpha(e^{-2isx} - e^{-isx} e^{is\partial_x}) \quad (2.21)$$

$$b^+ = \alpha^*(e^{2isx} - e^{is\partial_x} e^{isx}) \quad (2.22)$$

où $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. la relation de commutation (5.42) est satisfaite si α est choisi réel et

donné par:

$$\alpha = \bar{\alpha} = (1 - q^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

et

$$q = e^{-s^2} \quad (2.24)$$

On choisi q positif (le cas négatif correspond au choix de $q = -\exp(-s^2)$ qui n'altère en rien ce qui suit dans notre étude). Quand s varie sur l'axe des réels , q varie dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour obtenir une théorie avec $q > 1$, il faut remplacer (x, ∂_x) par $(-x, \partial_x)$ dans (2.21) et 2.22). Et dans ce cas $q = \exp(-s^2)$. L'opérateur b^+ est l'adjoint de b dans l'espace de Hilbert des fonctions d'une variable réelle x .

À la limite $q \rightarrow 1$ ($s \rightarrow 0$), les opérateurs (2.21) et 2.22) deviennent les opérateurs d'annihilation et de création de l'oscillateur harmonique usuel, respectivement

$$b = -\frac{i}{\sqrt{2}}(x + \partial_x) + O(s) \quad (2.25)$$

$$b^+ = \frac{i}{\sqrt{2}}(x - \partial_x) + O(s) \quad (2.26)$$

La variable réelle x dans (2.21) et 2.22) est la coordonnée de l'espace de configuration (amplitude d'oscillation). Comparant (2.21) et 2.22) avec on en déduit que la q -déformation peut être associée à la modification de l'opérateur de l'annihilation et de création de telle façon que x reste toujours la coordonnée qui génère l'espace de configuration du système q -déformé. Ainsi, si on suppose que les théories q -déformées sont plus générales et qu'elles contiennent les théories classiques, alors la variable x doit être une quantité dotée de dimension. Cette supposition conduit immédiatement à une contradiction. En fait , le paramètre s doit être également doté d'une dimension , ce qui est impossible car $q = \exp(-s^2)$ est un nombre sans dimension comme il apparaît de (2.12)

Heureusement, (2.21) et 2.22) n'est pas la réalisation la plus générale. On peut changer $\exp(is\partial) \rightarrow \beta \exp(is'\partial)$, où β et s' sont réels , dans (2.21) et 2.22) , alors que la relation

de commutation(2.12) reste inchangée si

$$q^2 = \exp(-2ss') \quad \alpha\alpha^* = (1 - q^2)^{-1} \quad (2.27)$$

Le coefficient β peut être éliminée en réordonnant les opérateurs $\beta \exp(isx)$ et $\beta \exp(is'\partial)$ dans (2.21) et 2.22) ainsi donc ,on le supposera égal à un. Si les dimensions de s et s' sont inverse alors q est sans dimension.

Pour spécifier les constantantes s et s' , on exige que les opérateurs b et b^+ ont le comportement suivant au voisinage de $q \rightarrow 1$

$$b = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}}(p_x - iwx) + O(q - 1) \quad (2.28)$$

$$b^+ = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}(p_x + iwx) + O(q - 1) \quad (2.29)$$

où $p_x = i\hbar\partial$, nous avons utilisés la représentation des coordonnées, dans ce cas

$$[b, b^+] = \hbar + O(q - 1) \quad (2.30)$$

et ω is une fréquence d'oscillation. On a également restore la constante de Planck. Ce qui implique que nous avons mis \hbar au lieu de 1 dans le terme de droite de l'équation (2.12) et là $\alpha\alpha^* = \hbar(1 - q^2)^{-1}$ dans (2.21) et 2.22). Notre condition mène aux relations suivantes $s' = \gamma s + O(s^2)$ quand $s \rightarrow 0$ et $w = \hbar/\omega$.

En introduisant une longueur fondamentale $l_q = 1/s$ on obtient la théorie quantique q -déformée où les opérateurs de d'annihilation et de création [32]

$$b = \alpha(e^{-2ix/l_q} - e^{-ix/l_q}e^{-p_x/(\omega l_q)}) \quad (2.31a)$$

$$b^+ = \alpha^*(e^{2ix/l_q} - e^{-p_x/(\omega l_q)}e^{ix/l_q}) \quad (2.31b)$$

sont des fonctions des variables canoniques standards obéant à la relation de com-

mutation d'Heisenberg

$$[x, p_x] = i\hbar \quad (2.32)$$

Le paramètre de la q -déformation dépend de la constante de Planck, de la fréquence de l'oscillateur et de la longueur fondamentale l_q

$$q = \exp(-\hbar/\omega l_q^2) \quad (2.33)$$

de façon quand $l_q \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 1$

2.0.5 L'espace d'Hilbert associé

En représentation des coordonnées de (2.31a) et (2.31b), $p_x = i\hbar\partial$, l'état fondamental $\Phi_0(x) = \langle x|0\rangle$ satisfait à l'équation $b\Phi_0(x) = 0$ et s'écrit [32]

$$\Phi_0(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\omega x^2}{2\hbar} + i\frac{x}{2l_q}\right) \quad (2.34)$$

Les états d'ordre n $\Phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ sont déterminés en appliquant les opérateurs b^{+n} à l'état fondamental 5.32 et ont pour formes

$$\Phi_n(x) = (\alpha^*)^{-n} (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} b^{+n} \Phi_0(x) = H_n^q(\exp(2ix/l_q)) \Phi_0(x) \quad (2.35)$$

avec

$$H_n^q(\xi) = (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n [n, k]_q (-1)^{n-k} q^{n-k} \xi^k \quad (2.36)$$

où $|\xi| = 1$, $\{n\}! = \{n\}\{n-1\}\dots\{1\} = 1 - q^{2n}$, et

$$[n, k]_q = \frac{\{n\}!}{\{k\}!\{n-k\}!} \quad (2.37)$$

qui sont des polynomes Gaussiens.

En utilisant la relation

$$[n+1, k]_q = [n, k-1]_q + q^{2k} [n, k]_q$$

on obtient:

$$b^+ \Phi_n(x) = \alpha^* \{n+1\}^{-1/2} \Phi_{n+1}(x) \quad (2.38)$$

et

$$b \Phi_n(x) = \alpha \{n\}^{-1/2} \Phi_{n-1}(x) \quad (2.39)$$

ainsi donc,

$$b^+ b \Phi_n(x) = \alpha \alpha^* \{n\} \Phi_n(x) \quad (2.40)$$

et

$$N \Phi_n(x) = n \Phi_n(x) \quad (2.41)$$

ce résultat découle des équations(2.40)(2.13)

Les états $\Phi_n(x)$ forment une base orthogonale selon le produit scalaire suivant

$$\langle n | m \rangle = \int_{\Omega_l} dx \sigma_l(x) \Phi_n^*(x) \Phi_m(x) = \delta_{nm} \quad (2.42)$$

avec $\Omega_l = [-\pi l_q/2, \pi l_q/2]$ et la mesure est donnée par :

$$\sigma_l(x) = \left(\frac{\hbar}{\pi \omega l_q^2} \right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp \left[-\frac{\hbar}{\omega l_q^2} \left(n - \frac{\omega l_q}{\hbar} x \right)^2 \right] \quad (2.43)$$

Le produit scalaire (2.42) vient de la relation de normalisation des polynomes de Rogers-Szegoe (voir appendice I)

L'opérateur b^+ est l'adjoint de b dans l'espace de Hilbert des vecteurs:

$$\langle n | \psi \rangle \equiv \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \Phi_n(x) \quad (2.44)$$

avec le produit scalaire (2.42)

Le paramètre l_q détermine le volume de l'espace physique de configuration

2.1 Oscillateur harmonique généralisé q -déformé

Considérons l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique généralisé dans l'espace de configuration (x, p) :

$$H = \frac{1}{2}(Z(t)p^2 + Y(t)(px + xp) + X(t)x^2) \quad (2.45)$$

où $Z(t)$, $Y(t)$ et $X(t)$ sont des paramètres dépendant du temps et vérifiant la condition

$$XZ - Y^2 \geq 0 \quad (2.46)$$

En imposant les relations

$$P = \alpha p + \beta x \quad (2.47)$$

$$Q = \gamma x$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{Z}{\omega}} & \text{et} & & \beta &= \sqrt{\frac{Y^2}{Z\omega}} \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\omega}{Z}} & \text{et} & & \omega^2 &= \sqrt{XZ - Y^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'hamiltonien précédent ce réduit en fonction des nouvelles variables, Q et P en:

$$H = \frac{\omega}{2} (P^2 + Q^2) \quad (2.49)$$

et en termes des operateurs de création et d'annihilation b^+ et b ,

$$H = \frac{1}{2}(bb^+ + b^+b) \quad (2.50)$$

où ces opérateurs sont donnés, en fonction de Q et P par:

$$b = \frac{Q + iP}{\sqrt{2}} \quad (2.51)$$

$$b^+ = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}} \quad (2.52)$$

et en fonction de x et p par,

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{\omega}{\sqrt{Z}} + \frac{iY}{\sqrt{Z}} \right) x + i \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega}} p \quad (2.53)$$

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{\omega}{\sqrt{Z}} - \frac{iY}{\sqrt{Z}} \right) x - i \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega}} p \quad (2.54)$$

La représentation la plus adéquate, équivalente à celle de Macfarlane[30][32] et reflétant le caractère de q -déformation de ces opérateurs, est:

$$b = A \begin{bmatrix} \exp \left(-2is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) - \exp \left(-is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) \\ \exp -s \left(\left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$b^+ = A^* \begin{bmatrix} \exp \left(2is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) - \exp -s \left(\left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) \\ \exp \left(is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

avec

$$|A|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-s^2)}}$$

comme précédemment l'état fondamental de cet oscillateur généralisé q -déformé $(\text{OHG})_q$ est donné par l'équation :

$$b\Phi_0(x) = 0 \quad (2.57)$$

Sachant que

$$[\partial, x] = 1 \quad \text{ou encore} \quad [x, p] = i\hbar \quad (2.58)$$

et

$$e^{u\partial} e^{vx} = e^{uv} e^{vx} e^{u\partial} \quad \text{et} \quad e^{u\partial+vx} = e^{uv} e^{u\partial} e^{vx} \quad (2.59)$$

Les équations (2.55) et (2.57) permettent d'écrire :

$$\left[\exp\left(-2is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}x\right) - \exp\left(-is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}x\right) \exp -s\left(\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x\right) \right] \Phi_0(x) = 0 \quad (2.60)$$

c.a.d.

$$e^{-s\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x} \Phi_0(x) = e^{-is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}x} \Phi_0(x) \quad (2.61)$$

ou encore

$$e^{is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}x} e^{-s\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x} \Phi_0(x) = \Phi_0(x) \quad (2.62)$$

en l'unifiant dans la même exponentielle en utilisant(2.59); on aura :

$$e^{is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}x - s\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}}p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega}\right)^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}\hbar s^2} \Phi_0(x) = \Phi_0(x) \quad (2.63)$$

soit l'équation différentielle suivante:

$$\left(is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x - s \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega} \right)^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} \hbar s^2 \right) \Phi_0(x) = 0 \quad (2.64)$$

qui devient en remplaçant p par $i\hbar\partial$ et en l'ordonnant,

$$\partial\Phi_0(x) = \left(\frac{-1}{\hbar} \left(\frac{\omega}{Z} + \frac{iY}{Z} \right) x + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} s \right) \Phi_0(x) \quad (2.65)$$

qui a pour solution la fonction Gaussienne suivante

$$\Phi_0(x) = C \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{W}{Z} + i\frac{Y}{Z} \right) x^2 - \frac{is}{2} \left(\frac{W}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right] \quad (2.66)$$

la constante C est déterminée en imposant la condition de renormalisation

$$C = \left(\frac{W}{\pi Z} \right)^{\frac{-1}{4}}$$

Ainsi l'état fondamental q-déformé de $(OHG)_q$ est donné par:

$$\langle x | 0 \rangle_q \equiv \Phi_0(x)_q = \left(\frac{W}{\pi Z} \right)^{\frac{-1}{4}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{W}{Z} + i\frac{Y}{Z} \right) x^2 - \frac{is}{2} \left(\frac{W}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right] \quad (2.67)$$

De la même façon, le calcul des états excités d'ordre $n \geq 1$, se fait ordre par ordre en appliquant l'opérateur de création b^+ à chaque fois. Ainsi l'état d'ordre $n = 1$ est déterminé à partir de

$$\begin{aligned} \Phi_1(x)_q &= b^+ \Phi_0(x)_q \\ &= A^* \left[e^{\left(2is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)} - e^{-s \left(\left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} p + \left(\frac{Y^2}{Z\omega} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)} e^{\left(is \left(\frac{\omega}{Z} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)} \right] \Phi_0(x)_q \end{aligned} \quad (2.68)$$

en utilisant les relations (2.59) ,(2.61) et réorganisant sous la formule la plus simple $\Phi_1(x)_q$ est donnée par:

$$\Phi_1(x)_q = A^* \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} + e^{-\hbar s^2} \right) \Phi_0(x)_q \quad (2.69)$$

a l'ordre $n = 2$,

$$\Phi_2(x)_q = b^+ \Phi_1(x)_q \quad (2.70)$$

$$= A^* \left[e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} - e^{-s \left((\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}p + (\frac{Y^2}{Z\omega})^{\frac{1}{2}}x \right)} e^{is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right] \Phi_1(x)_q \quad (2.71)$$

en remplaçant $\Phi_1(x)_q$ par son expression dans (2.69), $\Phi_2(x)_q$ s'écrit alors:

$$\Phi_2(x)_q = (A^*)^2 \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} - e^{-s \left((\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}p + (\frac{Y^2}{Z\omega})^{\frac{1}{2}}x \right)} e^{is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right) \quad (2.72)$$

$$\cdot \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} + e^{-\hbar s^2} \right) \Phi_0(x)_q \quad (2.73)$$

$$= (A^*)^2 \left(e^{4is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} - \left(e^{-\hbar s^2} + 1 \right) e^{-\hbar s^2} e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} - e^{-\hbar s^2} \right) \Phi_0(x)_q$$

et sous forme condensée, elle s'écrit:

$$\Phi_2(x)_q = (A^*)^2 \sum_{k=0}^2 [2, k]_q \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right)^k \left(-e^{-\hbar s^2} \right)^{2-k} \Phi_0(x)_q \quad (2.74)$$

$[2, k]_q$ est par la relation (2.37)

En passant au cas général, i.e à l'ordre n quelconque les états $\Phi_n(x)_q = (b^+)^n \Phi_0(x)_q$ sont donnés par:

$$\Phi_n(x)_q = (A^*)^n \sum_{k=0}^n [n, k]_q \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right)^k \left(-e^{-\hbar s^2} \right)^{n-k} \Phi_0(x)_q$$

$[n, k]_q$ est par (2.37) et $\Phi_0(x)_q$ par (2.67).

Et pour des raisons de renormalisation on impose que

$$\Phi_n(x)_q = (A^*)_q^{-n} (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} b^{+n} \Phi_0(x)_q$$

Ce qui permet de réécrire $\Phi_n(x)_q$ en;

$$\Phi_n(x)_q = (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n [n, k]_q \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right)^k \left(-e^{-\hbar s^2} \right)^{n-k} \Phi_0(x)_q \quad (2.75)$$

En définissant les fonctions d'Hermite q -déformé par

$$H_n^q(\xi) = (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n [n, k]_q (-1)^{n-k} (q)^{n-k} \xi^k \quad (2.76)$$

ainsi donc

$$\Phi_n(x)_q = H_n^q \left(e^{2is(\frac{\omega}{Z})^{\frac{1}{2}}x} \right) \Phi_0(x)_q \quad (2.77)$$

avec le paramètre de déformation $q = e^{-\hbar s^2}$.

Ces états doivent être normalisés selon le produit scalaire suivant:

$$\langle n | m \rangle = \int_{\Omega_s} dx \sigma_s(x) \Phi_n^*(x)_q \Phi_m(x)_q = \delta_{nm} \quad (2.78)$$

rappelons que ce produit scalaire doit être identique au produit scalaire non déformé lorsque le paramètre q tend vers 1 .et l'espace d'Hilbert généré par les fonctions $\Phi_n(x)_q$ se réduit à l'espace d'Hilbert usuel d'un oscillateur harmonique et la mesure σ_l tend vers 1 .

Pour cela en se basant sur la relation de normalisation des polynomes de Rogers-Szegoe définient par:

$$G_n(\theta) = (\{n\}!)^{\frac{1}{2}} (-q)^{-n} H_n^q(qe^{i\theta}) \quad (2.79)$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Maintenant une comparaison simple permet de poser :

$$x = \frac{\theta}{2s} \sqrt{\frac{Z}{\omega}} \quad (2.80)$$

la mesure de normalisation qui en découle , en tenant compte lorsque $sn \rightarrow dn$, $\sum_n \rightarrow \int dn$ de telle façon que $\sigma_s(x) \rightarrow 1$, est:

$$\sigma_s(x) = \left(\frac{\hbar s^2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\hbar s^2 \left(n - \frac{i}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x\right)^2\right) \quad (2.81)$$

et l'intervalle d'intégration qui est associé est:

$$\Omega_s = \left[-\frac{\pi}{2s} \sqrt{\frac{Z}{\omega}}, \frac{\pi}{2s} \sqrt{\frac{Z}{\omega}}\right] \quad (2.82)$$

et donc les états propres normés de l'oscillateur harmonique généralisé q -déformé sont donnée par:

$$\Phi_n(x)_q = (\{n\}!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{W}{\pi Z}\right)^{\frac{-1}{4}} \sum_{k=0}^n [n, k]_q \left(e^{2is\left(\frac{\omega}{Z}\right)^{\frac{1}{2}} x}\right)^k \left(-e^{-\hbar s^2}\right)^{n-k} \quad (2.83)$$

$$\Phi_0(x) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{W}{Z} + i\frac{Y}{Z}\right) x^2 - \frac{is}{2} \left(\frac{W}{Z}\right)^{\frac{1}{2}} x\right] \quad (2.84)$$

Après avoir obtenu les états propres de OHG q -déformé calculons la phase de Berry relative à l'état $n=0$. Mais avant rappelons ce qui est la phase de Berry.

2.1.1 La phase de Berry

En étudiant l'évolution des systèmes physiques quantiques régie par un Hamiltonien dépendant de paramètres qui varient très lentement en fonction du temps, Berry[46] a mis en évidence un effet géométrique relatif à la phase des états stationnaires. Cet effet apporte un complément important à l'énoncé du théorème adiabatique [44] qui stipule qu'un système initialement dans un état stationnaire non dégénéré, repéré par

un ensemble donné de nombres quantiques lors d'une évolution adiabatique. Pour fixer les notations, soit $H(\vec{X})$ un hamiltonien admettant des vecteurs propres non dégénérés $|n, \vec{X}\rangle$ de valeurs propres $E_n(\vec{X})$.

$$\hat{H}(\vec{X}) |n, \vec{X}\rangle = E_n(\vec{X}) |n, \vec{X}\rangle. \quad (2.85)$$

la formulation usuelle du théorème adiabatique exprime que l'état initial $|\Psi(0)\rangle = |n, \vec{X}(0)\rangle$, état propre de l'Hamiltonien à l'instant zéro $\hat{H}(\vec{X}(0))$, évolue en un état $|\Psi(t)\rangle$ qui, à tout instant, reste état propre de l'Hamiltonien $\hat{H}(\vec{X}(t))$. La remarque de Berry est que la phase Φ_n de cet état, définie par rapport aux états de référence $|n, \vec{X}(t)\rangle$ par

$$|\Psi(t)\rangle = \exp i\Phi_n(t) |n, \vec{X}(t)\rangle, \quad (2.86)$$

est entièrement déterminée si on impose à $|\Psi(t)\rangle$ de satisfaire l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(\vec{X}(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (2.87)$$

" en moyenne", c'est à dire en projetant cette égalité sur l'état $|\Psi(t)\rangle$ lui même:

$$\langle \Psi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \langle \Psi(t) | \hat{H}(\vec{X}(t)) |\Psi(t)\rangle \quad (2.88)$$

on obtient alors une expression explicite pour Φ_n

$$\Phi_n(t) = \beta_n(t) + \gamma_n(t) \quad (2.89)$$

qui contient deux termes. Le premier terme β_n , appelé phase dynamique,

$$\beta_n(t) = -\hbar^{-1} \int_0^t E_n(s) ds \quad ; \quad E_n(s) = \langle n, \vec{X}(s) | \hat{H}(\vec{X}(s)) | n, \vec{X}(s) \rangle \quad (2.90)$$

est "attendu" car il est présent même si les paramètres \vec{X} ne dépend pas du temps. Le second est la phase de Berry γ_n donnée par

$$\gamma_n(t) = \int_{\vec{X}(0)}^{\vec{X}(t)} A_n(\vec{X}) d\vec{X} \quad ; \quad A_n(\vec{X}(t)) = \langle n, \vec{X}(t) | i \nabla_{\vec{X}} | n, \vec{X}(t) \rangle \quad (2.91)$$

(On vérifie que A_n et γ_n sont réels). Cette phase est aussi appelée phase géométrique. Son caractère géométrique est justifié par le fait que, lorsque les paramètres effectuant (adiabatiquement) un cycle C , γ_n ne dépend que du chemin suivi dans l'espace des paramètres. En effet, même si on change la base des vecteurs propres de référence par une "transformation de jauge" $|n, \vec{X}\rangle \rightarrow \exp i\Phi_n(t) |n, \vec{X}(t)\rangle$, ce qui modifie "le potentiel vecteur" A_n par un terme de gradient $A_n(\vec{X}) \rightarrow A_n(\vec{X}) - \nabla_{\vec{X}} \varphi_n(\vec{X})$ (et donc modifie $\gamma_n(t)$), la phase de Berry pour un cycle $\gamma_n(C) = \oint_C A_n(\vec{X}) d\vec{X}$ reste, elle, inchangée.

La phase $\gamma_n(C)$ pour un cycle peut s'écrire aussi comme l'intégrale de 2-forme

$$\sigma_B = id(\langle n, \vec{X}(t) | \wedge d | n, \vec{X}(t) \rangle) \quad (2.92)$$

sur une surface s'appuyant sur le contour C . En insérant une base d'états propre $|n, \vec{X}\rangle$ et en utilisant la relation $d(\hat{H}(\vec{X}) - E_n(\vec{X}) |n, \vec{X}\rangle) = 0$, Berry réécrit cette 2-forme d'une manière

$$\sigma_B = \sum \frac{t \langle n, \vec{X}(t) | d\hat{H} | m, \vec{X}(t) \rangle \wedge \langle m, \vec{X}(t) | d\hat{H} | n, \vec{X}(t) \rangle}{(E_m(\vec{X}) - E_n(\vec{X}))^2} \quad (2.93)$$

dans notre cas on supposant que les paramètres de l'oscillateur harmonique généralisé q -déformé ($Z(t)$, $Y(t)$ et $X(t)$) varient lentement on fonction du temps, on peut prétendre que de tel système est doté, en plus de la phase dynamique usuelle, d'une phase de Berry géométrique.

Pour cela évaluant la quantité

$$\gamma_n(t) = \int_{\vec{X}(0)}^{\vec{X}(t)} A_n(\vec{X}) d\vec{X} \quad ; \quad A_n(\vec{X}(t)) = \langle n, \vec{X}(t) | i\nabla_{\vec{X}} | n, \vec{X}(t) \rangle$$

ou encore

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t dt' \left(\Phi_n(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_n(x, t')_q \right) \quad (2.94)$$

dans le cas de $n = 0$, on aura

$$\gamma_0(t) = i \int_0^t dt' \left(\Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q \right) \quad (2.95)$$

la quantité $\Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q$ après dérivation et réarrangement donne:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q &= \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{W}{\hbar Z} x^2 \right) \\ &+ \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{-1}{2\hbar} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{Z} \right) + i \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{Y}{Z} \right) \right) x^2 \\ &+ \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{Z} \right)^{1/2} s x \end{aligned} \right\} \exp \left(-\frac{W}{\hbar Z} x^2 \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

en remplaçant dans la forme du produit scalaire on a:

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q \right) &= \int_{\Omega_s} dx \sigma_s(x) \Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q \\
&= \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} \int_{\Omega_s} \left(\frac{\hbar s^2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx + \\
&\quad \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/2} \left\{ \frac{-1}{2\hbar} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{Z} \right) + i \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{Y}{Z} \right) \right) \right\} \\
&\quad \int_{\Omega_s} \left(\frac{\hbar s^2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2 \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx + \\
&\quad \frac{is}{2} \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{Z} \right)^{1/2} \int_{\Omega_s} \left(\frac{\hbar s^2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx
\end{aligned}$$

on remarque que cette expression est fonction de trois types d'intégrales qu'on note I_1 , I_2 et I_3 et qui s'écrivent:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_s} \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx \\
I_2 &= \int_{\Omega_s} x^2 \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx \\
I_3 &= \int_{\Omega_s} x \exp \left(-\hbar s^2 \left(n^2 - \frac{2ni}{s\hbar} \sqrt{\frac{\omega}{Z}} x \right) \right) dx
\end{aligned}$$

qu'on évalue à

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\pi}{s} \sqrt{\frac{Z}{W}} \\
I_2 &= \frac{\pi}{in} \frac{e^{-\hbar s^2 n^2} Z}{2s^2 W} (-1)^n \\
I_3 &= \begin{cases} \frac{\pi^3}{12s^3} \left(\frac{Z}{W}\right)^3 & \text{pour } n = 0 \\ \frac{\pi e^{-\hbar s^2 n^2}}{2n^2} \left(\frac{Z}{W}\right)^3 (-1)^n & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

et d'où la phase de Berry dans ce cas est donnée par,

$$\begin{aligned}
\gamma_0(t) &= i \int_0^t dt' \left(\Phi_0(x, t')_q, \frac{\partial}{\partial t'} \Phi_0(x, t')_q \right) \\
&= \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{\pi \hbar Z} \right)^{1/4} - \frac{1}{8\hbar s^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{W}{Z} \right) + i \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{Y}{Z} \right) \right) \\
&\quad \left(\frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=+\infty} \frac{e^{-\hbar s^2 n^2}}{n^2} (-1)^n \right)
\end{aligned}$$

Chapter 3

No-ghost theorem pour une corde bosonique ouverte q -déformée

3.1 Introduction:

La théorie des cordes est le domaine le plus actif de la physique théorique. Elle représente l'unique espoir pour réaliser le rêve des physiciens : l'unification. Et par conséquence, elle peut donner une théorie consistante de la gravitation quantique.

Un autre thème qui d'actualité et dont un grand nombre de travaux lui ai consacré est la géométrie non-commutative, qui consiste, dans son aspect le plus naïf, à déformer la structure de l'espace. Il est très intéressant d'étudier la théorie de cordes dans le cadre de la géométrie non-commutative.

Dans ce chapitre, on expose un travail sur les cordes bosoniques q -déformées.

En particulier, on s'intéresse à la dimension critique de l'espace-temps des cordes bosoniques ouvertes. On sait qu'une théorie quantique des cordes bosoniques n'est consistante que pour dimension critique de l'espace-temps égale à 26. Par consistence, on entend ici l'absence dans l'espace de Hilbert (et/ou de Fock) de la théorie des états de norme négative. On a posé la question: quelle serait la dimension critique si on considère un espace non-commutatif (en travaillant avec les algèbre q -déformée)?

3.2 Les cordes bosoniques classiques:

3.2.1 L'action de Polyakov et les equations de mouvement:

On considère une corde ouverte. Pour décrire son évolution, on introduit deux paramètres σ et τ et on repère les positions des différents points sur la corde par

$$X^\mu = X^\mu(\sigma, \tau) \quad \mu = 1, 2, \dots, D \quad (3.1)$$

Lorsque la corde évolue, elle balaye une surface à deux dimensions, appelée surface d'univers. Cette surface est invariante par la paramétrisation

$$\sigma \longrightarrow \sigma'(\sigma, \tau), \quad \tau \longrightarrow \tau'(\sigma, \tau) \quad (3.2)$$

L'action qui décrit la dynamique des cordes est l'action de Polyakov définie par

$$S = -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad (3.3)$$

où $h_{\alpha\beta}$ est la métrique induite sur la surface d'univers, $h^{\alpha\beta}$ son inverse et h son déterminant.

Le tenseur de l'énergie-impulsion est donnée par

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} h^{\delta\gamma} \partial_\delta X^\mu \partial_\gamma X^\nu \end{aligned} \quad (3.4)$$

et les équations du mouvement qui en découlent:

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.5)$$

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \right) = 0 \quad (3.6)$$

3.2.2 Les symétries de l'action de Polyakov:

L'action (3.3) possède les symétries suivantes :

1. • Symétries globales:

-Invariance par transformations de Poincaré:

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu$$

$$\delta h_{\alpha\beta} = 0$$

- Symétries locales:

-Invariance de reparamétrisation:

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu$$

$$\delta h_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma h_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma h_{\alpha\gamma}$$

$$\delta \sqrt{-h} = \partial_\alpha \left(\xi^\alpha \sqrt{-h} \right)$$

-Invariance d'échelle de Weyl:

$$\delta h_{\alpha\beta} = 2\Lambda h_{\alpha\beta}$$

$$\delta X^\mu = 0$$

$a^\mu{}_\nu$ et b^μ sont deux constantes, ξ^α et Λ sont deux fonctions infénitesimales de σ et τ .

Une conséquence immédiate de l'invariance d'échelle est l'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion (3.4), i.e:

$$h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.7)$$

3.2.3 L'action de Polyakov dans la jauge conforme:

Les symétries locales permettent de faire un choix de jauge, appelé jauge conforme. dans cette jauge, la métrique du surface de l'univers s'écrit:

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

où

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et l'action de Polyakov (3.3) se réduit à:

$$S = 2T \int d^2\sigma \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu \quad (3.8)$$

où:

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$$

La variation de l'action précédente par rapport a X^μ , avec les conditions aux limites $\delta X^\mu(\tau_0) = 0 = \delta X^\mu(\tau_1)$ donne:

$$\delta S = T \int d^2\sigma \delta X^\mu (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X_\mu - T \int d\tau X'_\mu \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

d'où l'équation du mouvement suivante:

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X_\mu = 4\partial_+ \partial_- X^\mu = 0 \quad (3.9)$$

avec

$$X'_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0$$

Cette équation représente une équation d'onde bidimensionnelle dont la solution générale est de la forme:

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+) \quad (3.10)$$

avec

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$$

sont les coordonnées du cône de lumière.

et $X_{R,L}^\mu$ sont des fonctions arbitraires qui décrivent les états se propageant à droite et à gauche respectivement.

On doit également imposer sur les solutions des équations du mouvement les contraintes

$$\begin{aligned} T_{01} = T_{10} &= \frac{1}{2}(\dot{X} \cdot X') = 0 \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent être rassemblées en

$$\frac{1}{2}(\dot{X} \pm X')^2 = 0.$$

Dans les coordonnées du cône de lumière, ces contraintes deviennent

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{1}{2}(\partial_+ X \cdot \partial_+ X) = 0 \\ T_{--} &= \frac{1}{2}(\partial_- X \cdot \partial_- X) = 0 \\ T_{+-} &= T_{-+} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) \\ T_{--} &= \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) \end{aligned}$$

En se servant de (3.10), les equations de contraintes (3.11) s'écrivent comme

$$(\partial_+ X_L)^2 = (\partial_- X_R)^2 = 0.$$

et la conservation d'énergie-impulsion

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = 0$$

s'exprime par

$$\begin{aligned} \partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} &= 0 \\ \partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant (3.11), ces équations se réduisent à

$$\begin{aligned} \partial_- T_{++} &= 0 \\ \partial_+ T_{--} &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} T_{++} &= T_{++}(\sigma^+) \\ T_{--} &= T_{--}(\sigma^-). \end{aligned}$$

Les équations des contraintes (3.12) impliquent l'existence d'un nombre infini de

charges conservées. En effet, pour n'importe quelle fonction $f(\sigma^+)$, on a

$$\partial_- (f(\sigma^+)T_{++}(\sigma^+)) = 0$$

et les charges conservées correspondantes sont données par

$$L_f = 2T \int_0^\pi d\sigma f(\sigma^+)T_{++}(\sigma^+)$$

avec une expression similaire pour les états se propageant à droite.

3.2.4 Le développement en modes normaux:

Nous allons résoudre les équations du mouvement en tenant en compte des conditions aux bords, mais en oubliant provisoirement les contraintes. Ces contraintes seront imposées sur les solutions une fois trouvées.

Dans le cas des cordes ouvertes, les modes se propageant à gauche et à droite sont égaux. La solution générale des équations du mouvement (3.9) est donc sous la forme

$$X^\mu(\sigma, \tau) = f^\mu(\sigma^-) + f^\mu(\sigma^+)$$

de plus, on a la condition aux bords

$$X'_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \quad (3.13)$$

La solution générale de l'équation de l'onde bidimensionnelle qui vérifie les conditions aux bords

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \frac{1}{\pi T} p^\mu \tau + \frac{i}{\sqrt{\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp(-in\tau) \cos n\sigma$$

où on a défini

$$\alpha_n^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi T}} p^\mu,$$

x^μ et p^μ sont la position et l'impulsion du centre de masse de la corde.

Les crochets de Poisson pour les variables canoniques α_n^μ , x^μ et p^μ sont donnés par:

$$\begin{aligned}\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\}_{P.B.} &= -im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\ \{x^\mu, p^\nu\}_{P.B.} &= \eta^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

En termes de modes normaux, le Hamiltonien de la corde ouverte s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (3.14)$$

On définit les opérateurs de Virasoro de la corde ouverte

$$\begin{aligned}L_m &= 2T \int_0^\pi d\sigma (\exp(im\sigma)T_{++} + \exp(-im\sigma)T_{--}) \\ &= \frac{T}{2} \int_0^\pi d\sigma \exp(im\sigma) (\dot{X}^\mu + X'^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n\end{aligned} \quad (3.15)$$

Les L_m forment un ensemble complet de charges conservées qui vérifient les conditions aux bords (3.13). Elle forment une algèbre

$$\{L_m, L_n\}_{P.B.} = -i(m-n)L_{m+n}.$$

Cette algèbre est appelée l'algèbre de Virasoro.

En comparant (3.15) avec (3.14), on trouve

$$H = L_0.$$

3.3 La quantification canonique de la corde bosonique ouverte:

Pour quantifier la théorie des cordes dans le formalisme canonique, on va considérer provisoirement le système sans contraintes .

La quantification canonique s'effectue en remplaçant les crochets de Poisson des coefficients de Fourier de X^μ par i fois les commutateurs correspondants, *i.e.*

$$\{ , \}_{P.B.} \longrightarrow \frac{1}{i} [,] .$$

Donc, les coefficients de Fourier deviennent de opérateurs obeissant aux règles de commutation suivantes

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\ [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu} . \end{aligned}$$

En effectuant les changements

$$\begin{aligned} \alpha_m^\mu &= \sqrt{m}a_m^\mu \\ \alpha_{-m}^\mu &= \sqrt{m}a_m^{\mu\dagger} \end{aligned}$$

avec $m > 0$.

a_m^μ et $a_m^{\mu\dagger}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation.

L'espace de Fock construit à partir de ces opérateurs contient nécessairement des états de norme négatives. ces états sont appelés états fantômes (ou ghost, à ne pas confondre avec le ghosts de Fadeev-Popov).

On peut voir cela en considérant les composantes temporelles

$$[a_m^0, a_m^{0\dagger}] = \eta^{00} = -1$$

En prenant la valeur moyenne de ce commutateur dans le vide

$$\langle 0 | [a_m^0, a_m^{0\dagger}] | 0 \rangle = - \langle 0 | 0 \rangle = -1$$

$|0\rangle$ est l'état fondamental (le vide) défini par

$$a_m^0 |0\rangle = 0 \quad \forall m$$

et

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1$$

Donc, On a

$$\langle 0 | a_m^0 a_m^{0\dagger} | 0 \rangle = -1$$

ou

$$\| a_m^{0\dagger} | 0 \rangle \|^2 = -1$$

Ainsi, on a vu que l'état $a_m^{0\dagger} | 0 \rangle$ est un exemple des états fantômes (états qui possèdent une norme négative).

Ces états devront, en principe, être éliminés lorsqu'on considérera les contraintes.

Retournons maintenant à l'équation des contraintes. Dans le cas de la théorie classique, on a vu que les contraintes sont données par les coefficients de Fourier $L_m = 0$. Cependant quand on passe à la théorie quantique, toute expression qui contient des opérateurs qui ne commutent pas est mal définie (souffre d'une ambiguïté d'ordre normal) si on ne spécifie pas une prescription pour ordonner les opérateurs.

Cela s'applique, en particulier, sur L_0 . En effet, en examinant les générateurs de l'algèbre de Virasoro (les coefficients de Fourier) on se rend facilement compte qu'aucune ambiguïté d'ordre normale n'est présente dans les L_n pour $n \neq 0$ car ces opérateurs sont exprimés par des produits d'opérateurs qui commutent entre eux.

Dans le cadre de la théorie quantique, on définit les générateurs de Virasoro par leurs produits normaux

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n :$$

En particulier

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + a$$

où

$$a = \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

3.4 Les cordes bosonique ouvertes q-déformées:

On va considérer la déformation de l'algèbre de Virasoro . Dans ce cas, les générateurs de l'algèbre de Virasoro q-déformée est donnée par

$$L_n^q = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{m\mu}^\dagger :_q \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0^\mu &= 2\alpha' p^\mu & (3.17) \\ a_{-n}^\mu &= \sqrt{2\alpha' n} \alpha_n^{\dagger\mu} & n > 0 \\ a_n^\mu &= \sqrt{2\alpha' n} \alpha_n^\mu & n > 0 \end{aligned}$$

Les opérateurs de création et annihilation a_n^μ et $a_n^{\dagger\mu}$ vérifient les relations de q-commutation suivantes:

$$[a_n^\mu, a_m^{\nu\dagger}]_q = \delta_{n,m} \eta^{\mu\nu} \quad (3.18)$$

et

$$[x^\mu, p^\nu]_q = i\eta^{\mu\nu}$$

où

$$[a_n^{\dagger\mu}, a_m^\nu]_q = a_n^{\dagger\mu} a_m^\nu - [\delta_{\rho'}^\mu \delta_\sigma^\nu + (q-1)\delta_{n,m} \Lambda_{\rho\sigma}^{\mu\nu}] a_m^\rho a_n^{\sigma\dagger} \quad (3.19)$$

et

$$[x^\mu, p^\nu]_q = x^\mu p^\nu - q p^\nu x^\mu \quad (3.20)$$

On a introduit un produit normal q-déformé $::_q$ défini comme suit

$$\begin{aligned} : a_n^\mu a_m^{\dagger\nu} :_q &\equiv a_m^{\dagger\nu} a_n^\mu + (q-1)\delta_{n,m} \Lambda_{\mu'\nu'}^{\mu\nu} a_m^{\nu'} a_n^{\dagger\mu'} \\ : a_m^{\dagger\nu} a_n^\mu :_q &= a_m^{\dagger\nu} a_n^\mu \end{aligned} \quad (3.21)$$

avec

$$\Lambda_{\rho\sigma'}^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \text{ et } \rho = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.22)$$

3.4.1 Théorème No-Ghost

Un état $|phys\rangle_q$ est appelé un état physique q-déformé s'il vérifie les conditions:

$$L_n^q |phys\rangle_q = 0 \quad \text{pour } n > 0 \quad (3.23)$$

$$(L_0^q - \alpha_q(0)) |phys\rangle_q = 0 \quad (3.24)$$

avec

$$L_n^q = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{m\mu}^{\dagger} :_q \quad (3.25)$$

$\alpha_q(0)$ est un nombre complexe qui apparaît lorsque on effectue l'ordre normal q -déformé $::_q$. En faisant agir les opérateurs a_n^μ et $a_n^{\dagger\mu}$ sur l'état fondamental q -déformé $|0\rangle_q$, on construit l'espace de Fock q -déformé :

$$\begin{aligned} a_n^\mu |0\rangle_q &= 0 & n > 0 \\ P^\mu |0\rangle_q &= p^\mu |0\rangle_q \end{aligned} \quad (3.26)$$

et

$${}_q\langle 0 | 0 \rangle_q = 1 \quad (3.27)$$

Un état q -déformé $|S\rangle_q$ qui vérifie la relation:

$$(L_0^q - \alpha_q(0)) |S\rangle_q = 0 \quad (3.28)$$

est dit "spurious" s'il est orthogonal à tous les états physiques, i.e. :

$${}_q\langle S | phys \rangle_q = 0 \quad (3.29)$$

On peut développer $|S\rangle_q$ comme suit

$$|S\rangle_q = \sum_{n>0}^{+\infty} L_{-n}^q |\Phi_n\rangle_q \quad (3.30)$$

où $|\Phi_n\rangle_q$ est l'état vérifiant la relation

$$(L_0^q - \alpha_q(0) + n) |\Phi_n\rangle_q = 0 \quad (3.31)$$

La série donnée dans (eq. 3.30) peut être tronquée. En effet, on montre que, pour $n \geq 3$, les opérateurs L_n^q s'expriment comme des itérations des commutateurs de L_{-1}^q et L_{-2}^q , (voir eqs. (3.42, 3.45, 3.46)). Ainsi, les deux premiers termes de la série sont suffisants pour déterminer $|S\rangle_q$.

Un état "spurious" est défini donc par:

$$|S\rangle_q = L_{-1}^q |\Phi_1\rangle_q + L_{-2}^q |\Phi_2\rangle_q \quad (3.32)$$

où les états $|\Phi_1\rangle_q$ et $|\Phi_2\rangle_q$ vérifient eq.(3.31).

Si un état q -déformé est à la fois "spurious" et physique, il a une norme nulle. On peut construire des états de ce type si on considère les états spurious de la forme:

$$|\chi\rangle_q = (L_{-2}^q + \Omega_q(L_{-1}^q)^2) |\Theta\rangle_q \quad (3.33)$$

où Ω_q est un nombre complexe qui dépend de q et $|\Theta\rangle_q$ est un état arbitraire q -déformé vérifie les conditions:

$$L_n^q |\Theta\rangle_q = 0 \quad n > 0 \quad (3.34)$$

$$(L_0^q - \alpha_q(0))(L_{-2}^q + \Omega_q(L_{-1}^q)^2) |\Theta\rangle_q = 0 \quad (3.35)$$

et

$$L_0^{-q-2} |\Theta\rangle_q = \Lambda_q |\Theta\rangle_q \quad (3.36)$$

La condition (eq.3.35) donne les deux relations suivantes:

$$L_0^q |\Theta\rangle_q = \frac{1}{q} [\alpha_q(0) - (1+q)] |\Theta\rangle_q \quad (3.37)$$

et

$$L_0^q |\Theta\rangle_q = \frac{1}{q^2} [\alpha_q(0) - \frac{(1+q)^2}{2}] |\Theta\rangle_q \quad (3.38)$$

Des eqs. (3.37, 3.38), On tire:

$$\left[L_0^q + \frac{(1+q)}{2} \right] |\Theta\rangle_q = 0 \quad (3.39)$$

et

$$\alpha_q(0) = \frac{(1+q)}{2}. \quad (3.40)$$

Pour que l'état $|\chi\rangle_q$ ait une norme nulle, il doit être un état physique et il doit, par conséquent, être annihilé par L_m^q pour tout $m > 0$. Or cet état est trivialement annihilé par L_m^q pour $m > 3$, donc il suffit d'imposer les conditions:

$$L_1^q |\chi\rangle_q = 0, \quad L_2^q |\chi\rangle_q = 0 \quad (3.41)$$

pour déterminer un état de norme nulle.

On utilise l'algèbre de Virasoro q-déformée donnée par ([?]-[?]):

$$\begin{aligned} [L_n^q, L_m^q]_{q_{n,m}} &= L_n^{q_{n,m}} L_m^{q_{n,m}} - \Delta_{nm}^q L_m^{q_{n,m}} L_n^{q_{n,m}} \\ &= (n-m)L_{n+m}^q + C_{nm} \end{aligned} \quad (3.42)$$

où

$$C_{nm} = \delta_{0,m} \frac{(1-q)}{2} n L_n^q + \delta_{n,-m} \left\{ m \frac{(1-q)}{1+q} (3L_0^q - L_0^{-q-2}) + \frac{D-2}{12} m(m^2-1) \right\} \quad (3.43)$$

$$\Delta_{nm}^q = q + \delta_{n,m} (1-q) \quad (3.44)$$

et

$$L_n^{q_{n,m}} = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-\ell}^i \alpha_\ell^i :_{q_{n,m}} \quad (3.45)$$

avec

$$: \alpha_{n-\ell}^i \alpha_\ell^i :_{q_{n,m}} = q^{-\delta_{n,m} \delta_{n-\ell,\ell}} : \alpha_{n-\ell}^i \alpha_\ell^i :_q \quad (3.46)$$

Si on utilise le produit normal q-déformé " $::_q$ " défini par les eqs. (3.21,3.22) avec les eqs. (3.19,3.20), les conditions (3.41) donnent :

$$x^2 + B_q x + C_q = 0 \quad (3.47)$$

où

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2(1-q)}{1+q} \Lambda_q & (3.48) \\
B_q &= \frac{q-7}{q} - \frac{27}{2} + \frac{D}{2} - \frac{(1-q)^2}{1+q} \\
C_q &= \left(\frac{q-5}{q} + \frac{D}{2} \right) \left(\frac{2}{q} + \frac{(1-q)^2}{1+q} \right) + \frac{9(q-5)}{2q}
\end{aligned}$$

Remarque que pour le cas ordinaire où $q = 1$ et $D = 26$, on a $x = 0$ et $C_1 = 0$ et eq.(3.47) bien vérifiée. Néanmoins pour $q \neq 1$, l' eq.(3.47) admet de solutions que si

$$B_q^2 - 4C_q \geq 0 \quad (3.49)$$

ce qui donne :

$$\left[\frac{q-7}{q} - \frac{27}{2} + \frac{D}{2} - \frac{(1-q)^2}{1+q} \right]^2 - 4 \left[\left(\frac{q-5}{q} + \frac{D}{2} \right) \left(\frac{2}{q} + \frac{(1-q)^2}{1+q} \right) + \frac{9(q-5)}{2q} \right] \geq 0$$

Cette condition est bien vérifiée dans le cas où

$$D = D_c = 2 + 12(q+1) \quad \text{avec } q \in]0, 1]. \quad (3.50)$$

Une autre façon de voir que pour la dimension critique (3.50) l'espace de Fock est bien libre de tous états de normes négatives est de considérer les premiers états excités :

$$|0\rangle_q$$

$$|\varepsilon\rangle_q = \varepsilon_\mu a_1^{\dagger\mu} |0\rangle_q$$

$$|\lambda, \theta\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\lambda_\mu a_1^{\dagger\mu} + \theta_{\mu\nu} a_1^{\dagger\mu} a_1^{\dagger\nu} \right] |0\rangle_q \quad (\text{eq43})$$

ε_μ est le vecteur de polarisation.

On appliquant l'opérateur de masse M^2 :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} [L_0^q - \alpha_q(0)] \quad (3.51)$$

sur l'état $|0\rangle_q$ et en utilisant la relations (3.40) on obtient:

$$M^2 |0\rangle_q = -\frac{(1+q)}{\alpha'} |0\rangle_q. \quad (3.52)$$

L'état $|0\rangle_q$ est tachyionique si $q > -1$ et le carré de sa masse est positif si $q \leq -1$.

La norme d'un état de polarisation physique $|\varepsilon\rangle_q$, est donnée en utilisant l'eq (3.18) :

$${}_q\langle\varepsilon|\varepsilon\rangle_q = \frac{1}{q}\varepsilon_\mu\varepsilon^\mu \quad (3.53)$$

Si on applique la condition de Virasoro q-déformée :

$$L_n^q |\varepsilon\rangle_q = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (3.54)$$

cette dernière est triviale pour tout $n > 1$. Par contre, pour $n = 1$, on doit avoir:

$$\varepsilon_\mu P^\mu = 0 \quad (3.55)$$

L'application de l'opérateur de masse M^2 sur l'état $|\varepsilon\rangle_q$ donne:

$$-P^2 = \frac{1-q}{\alpha'} \quad (3.56)$$

avec

$$P^2 = -P^{02} + P^{i2} \quad i = \overline{1, D-1} \quad (3.57)$$

où la signature de l'espace-temps est $(- + + + \dots +)$. Dans un référentiel au repos on

peut écrire

$$P^\mu = \left(\left\{ \frac{1}{\alpha'}(1-q) \right\}^{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right) \quad (3.58)$$

De (3.55, 3.58) on tire $\varepsilon^0 = 0$ et par conséquent la norme donnée par l'eq (3.53) s'écrit:

$${}_q \langle \varepsilon | \varepsilon \rangle_q = \frac{\varepsilon^{i2}}{q} \quad (3.59)$$

Ce qui montre bien ${}_q \langle \varepsilon | \varepsilon \rangle_q \geq 0$ à condition que $q > 0$.

En conclusion, pour que l'état $|\varepsilon\rangle_q$ ne soit pas tachyonique avec une norme positive, il faut que:

$$0 < q \leq 1 \quad (3.60)$$

Soit maintenant les états $|\lambda, \theta\rangle_q$, en utilisant les lois de q-déformations données par eqs (3.18;3.19) on trouve:

$${}_q \langle \lambda, \theta | \lambda, \theta \rangle_q = \frac{1}{2q} [\lambda^2 + \theta_{\mu\nu} \theta^{\mu\nu}] \quad (3.61)$$

En appliquant l'opérateur de masse sur les états $|\lambda, \theta\rangle_q$, on trouve :

$$\begin{aligned} M^2 |\lambda, \theta\rangle_q &= \frac{3-q}{\alpha'} |\lambda, \theta\rangle_q \\ &= -p^2 |\lambda, \theta\rangle_q \end{aligned} \quad (3.62)$$

D'autre part, la contrainte de Virasoro :

$$L_n^q |\lambda, \theta\rangle_q = 0, \quad n > 0 \quad (3.63)$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$ on trouve:

$$\sqrt{2} \left(\lambda_\nu + \sqrt{4\alpha'} \theta_{\mu\nu} P^\mu \right) a_1^{+\nu} |0\rangle_q = 0 \quad (3.64)$$

et

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4\alpha'} \lambda_\mu P^\mu + \frac{1}{q} \theta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \right) |0\rangle_q = 0 \quad (3.65)$$

ou :

$$\lambda_\nu + \sqrt{4\alpha'} \theta_{\mu\nu} P^\mu = 0 \quad (3.66)$$

et

$$\sqrt{4\alpha'} \lambda_\mu P^\mu + \frac{1}{q} \theta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.67)$$

Dans un référentiel au repos où p^μ est donné par eq.(3.58), les équations (3.66,3.67) deviennent:

$$\lambda_0 + \sqrt{4\alpha'} \theta_{00} P^0 = 0 \quad (3.68)$$

$$\lambda_i + \sqrt{4\alpha'} \theta_{0i} P^0 = 0 \quad i = \overline{1, D-1}$$

d'ou la relation

$$\begin{aligned} {}_q \langle \lambda, \theta | \lambda, \theta \rangle_q &= \quad (3.69) \\ &= \frac{1}{q} \left\{ 2 \frac{(q-2)}{[2q(3-q)+1]^2} \left(\sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii} \right)^2 + (1-q) \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{0i}^2 + \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii}^2 + \sum_{i \neq j}^{D-1} \theta_{ij}^2 \right\} \end{aligned}$$

Pour que la norme (3.69) soit définie positive, quelque soient les valeurs des paramètres θ_{ii}, θ_{0i} et θ_{ij} , il faut :

a)

$$(1-q) \geq 0 \quad i.e \quad q \leq 1 \quad (3.70)$$

b)

$$\frac{2(q-2)}{[2q(3-q)+1]^2} \left(\sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii} \right)^2 + \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii}^2 \geq 0 \quad \forall \theta_{ii} \quad (3.71)$$

On utilisant le fait que

$$x^2 - x + 1 \geq 0 \quad \forall x \text{ (où } x = \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii} \text{)}$$

on obtient:

$$\frac{-2(q-2)}{[2q(3-q)+1]^2} \left(1 - \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii}\right) + \sum_{i=1}^{D-1} \theta_{ii}^2 \geq 0 \quad (3.72)$$

L'eq. (3.72) peut être mise sous la forme:

$$\sum_{i=1}^{D-1} \left(\frac{-2(q-2)}{[2q(3-q)+1]^2} \left(\frac{1}{D-1} - \theta_{ii} \right) + \theta_{ii}^2 \right) \geq 0$$

pour que cette relation soit vérifiée pour tout θ_{ii} , il faut

$$D \leq 1 + 4(8q+1)^2 \quad (3.73)$$

avec la condition supplémentaire

$$0 < q \leq 1. \quad (3.74)$$

Lorsque q décrit l'intervalle $]0, 1]$, D appartient à

$$5 < D \leq 325. \quad (3.75)$$

On voit bien que la dimension critique $D_c = 2 + 12(q+1)$ lorsque $0 < q \leq 1$, est incluse

$$14 < D_c \leq 26. \quad (3.76)$$

3.4.2 Conclusion:

On a étudié la théorie des cordes bosonique q -déformée. L'espace de Fock des états qui vérifient les équations de contraintes des opérateurs de Virasoro q -déformés est libre de tous état de norme négative (fantôme) si la dimension de l'espace-temps est égale à la dimension critique $D_c = 2 + 12(q+1)$ avec $0 < q \leq 1$.

Chapter 4

Relation entre paraquantification et q -déformation

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence pour un cas précis la relation qui peut exister entre la q -déformation et la paraquantification. Pour cela on introduira brièvement ce qui est la paraquantification puis on exposera le formalisme d'étude et on terminera par une conclusion.

4.1 Introduction

Historiquement, le passage de la mécanique classique vers les théories quantiques a été fait suivant deux étapes. La première, qu'on appella la quantification (puis la première quantification), consistait à réarranger les relations de Poisson entre la position et la quantité de mouvement dans la mécanique classique, i.e. les variables canoniques à degré fini de liberté, en commutateurs de Lie entre opérateurs représentant ces variables dans la nouvelle théorie. La seconde a été le réajustement de celle-ci, ces commutateurs, à des champs d'opérateurs, ce qui lui valut le nom de théorie quantique de champs.

Dans cette théorie quantique des champs, les opérateurs de champs sont dotés de deux types de particules qui vérifient deux algèbres différentes. Celle d'opérateurs de

particules de champs qui commutent et qu'on appelle les champs fermionique et qui vérifie la staistique de Fermi-dirac et celle d'opérateurs de particules de champs anticommutants et qu'on appelle champs bosonique et qui vérifie la statistique de Bose-Einstein.

Vers l'année 1953, H.S. Green proposa une généralisation de la methode de quantification , indépendante de la seconde quantification , et qui consiste à supposer qu'un même état peut être occupé par des particules jusqu'à un certain ordre. cette méthode qu'on appella ensuite la paraquantification a engendré deux types de statistiques ; les parabosons et les parafermions. Cette théorie parmi peu d'autres en théorie quantique de champs s'est avérée compatible avec les théorie de base de la physique telleque les les principes de la relativité.

4.1.1 Paraquantification

L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'écrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (4.1)$$

les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

Le principe de corresponsance avec l'equation de Heisenberg nous donnent

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [q, H] = \imath p \\ \dot{p} &= [p, H] = -\imath q \end{aligned}$$

Mais avec la restriction $[q, p] = \imath$, on montre que cette condition n'est pas unique

Pour cela, on utilisera les opérateurs définis par:

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad (4.2)$$

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \quad (4.3)$$

Ces relations nous donnent:

$$H = \frac{1}{2}(a^+a + aa^+) \equiv N \quad (4.4)$$

$$[a, N] = a, \quad [a^+, N] = -a^+ \quad (4.5)$$

Pour le spectre de N on le définit comme suit:

$$\begin{cases} N |n\rangle = N_n |n\rangle \\ \langle n | n'\rangle = \delta_{n,n'} \end{cases} \quad (4.6)$$

et

$$N_n = N_0 + n \quad \text{avec } N_0 \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad (4.7)$$

D'après les équations (1.108), (1.109) et (1.110) on montre facilement que:

$$N_0 + n = \frac{1}{2}(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2) \quad (4.8)$$

Avec

$$a_{n,n'} \equiv \langle n | a | n'\rangle$$

On peut alors résoudre cette équation par récurrence sur n pour obtenir :

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^+ = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc on arrive à montrer

$$\begin{aligned}\langle n | [a, a^+] | n' \rangle &= \sum_{n''} \{ \langle n | a | n'' \rangle \langle n'' | a^+ | n' \rangle - \langle n | a^+ | n'' \rangle \langle n'' | a | n' \rangle \} \\ &= \delta_{nn'} (|a_{n,n+1}|^2 - |a_{n,n-1}^+|^2)\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à écrire

$$\langle n | [a, a^+] | n' \rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1 - N_0) & n \text{ impair} \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous définissons l'ordre de la paraquantification de telle sorte que $N_0 = \frac{Q}{2}$ où Q est l'ordre de la PQ.

Remarquons que seule la valeur $Q = 1$ nous conduit à la relation de commutation ordinaire $[a, a^+] = 1$ qui représente le cas d'un oscillateur harmonique (bosonique) dans le cadre quantique.

Pour $Q = 2$ c-à-d $N_0 = 1$ nous aurons une relation du type:

$$aaa^+ - a^+aa = 2a$$

De même, le Hamiltonien d'un oscillateur fermionique est défini par:

$$H = \frac{1}{2} (b^+b - bb^+) \equiv N. \quad (4.10)$$

on peut alors montrer que

$$N = \frac{1}{2} (|b_{n-1,n}|^2 - |b_{n,n+1}|^2) \quad (4.11)$$

De la même manière, on montre que $Q = 1$ conduit aux relations d'anticommutation

$$\{b, b^+\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0 \quad (4.12)$$

donc $b^2 = (b^+)^2 = 0$

Pour $Q = 2$ nous aurons les relations

$$bb^+b = 2b, \quad bbb^+ + b^+bb = 2b \quad (4.13)$$

et

$$b^3 = (b^+)^3 = 0$$

4.1.2 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs

Soit un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques

Dans le cadre paraquantique, les opérateurs a_k et a_k^+ (bosoniques ou fermioniques) vérifient des relations trilinéaires de telle sorte que

$$\left[a_k, [a_l^+, a_n]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n \quad (4.14)$$

$$\left[a_k, [a_l^+, a_n^+]_{\mp} \right] = 2\delta_{kl}a_n^+ \mp 2\delta_{kn}a_l^+ \quad (4.15)$$

$$[a_k, [a_l, a_n]_{\mp}] = 0 \quad (4.16)$$

Le signe en haut est associé aux parafermions, celui en bas pour les parabosons
notre vide est définit par

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (4.17)$$

$$a_k | 0 \rangle = 0 \quad \forall k \quad (4.18)$$

avec la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification

$$a_k a_l^+ | 0 \rangle = Q \delta_{kl} | 0 \rangle \quad (4.19)$$

Ces relations dépendent du vide, mais on peut trouver des relations qui se suffisent à elles seules (“self-contained”).

Le problème qui se pose est que lorsque l'ordre de la paraquantification augmente les relations se compliquent.

L'une des solutions de ce problème est d'utiliser la décomposition de Green, qui est définie comme suit :

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)} \quad , \quad a_k^+ = \sum_{\alpha=1}^Q a_k^{(\alpha)+}$$

où $a_k^{(\alpha)}$ est la composante de Green qui agit dans le para-espace de Green..

les relations (4.14-4.15-4.16) deviennent bilinéaires :

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+} \right]_{\pm} = \delta_{kl} \quad (4.20)$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)} \right]_{\pm} = 0 \quad (4.21)$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+} \right]_{\mp} = \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)} \right]_{\mp} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (4.22)$$

le vide $|0\rangle'$ vérifie :

$$a_k^{(\alpha)} |0\rangle' = 0, \quad \forall k, \alpha$$

Donc

$$a_k |0\rangle' = 0, \quad \forall k$$

et :

$$a_k a_l^+ |0\rangle' = r \delta_{kl} |0\rangle'$$

Ce qui implique que $|0\rangle'$ et $|0\rangle$ sont équivalents.

4.2 Formalisme

La procedure classique de quantification dans le cas ordinaire est garantie par le transition de la théorie classique à la théorie quantique des coordonnées canoniques q_i et p_i ($i = 1, 3$) comme étant des opérateurs activant dans l'espace de Hilbert, et verifiant les relations

de commutation suivante :

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (\hbar = 1) \quad (4.23)$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (4.24)$$

lesquelles sont compatibles avec les équations de mouvement d'Heisenberg :

$$-i \frac{\partial A}{\partial q_\mu} = [A, p_\mu] \quad (\mu = \overline{0, 3}) \quad (4.25)$$

où A est observable quelconque. Il est toute à fait clair que les équations (4.23) et (4.24) sont suffisantes et non pas nécessaires pour garantir les équations de mouvement d'Heisenberg [36]-[39]. Ainsi donc, les relations fondamentales de quantification est l'équation d'Heisenberg(4.26).

Revenons aux notions de la paraquantification, et prenons comme exemple le cas de l'oscillateur harmonique à une seule dimension, son hamiltonien est donné par :

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad (4.26)$$

en terme d'opérateur de création et d'annihilation qui sont définis par :

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip) \quad (1.120.a)$$

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (q - ip) \quad (1.120.b)$$

Les équations (4.23) , (4.24) et (4.26) prennent les formes suivantes :

$$[a, N] = a, \quad [a^+, N] = -a^+ \quad (4.27)$$

avec

$$H = \frac{1}{2} (a^+ a + a a^+) \quad (4.28)$$

il est clair d'après la définition de l'opérateur hermitien N , que toutes ses valeurs propres ne sont pas négatives. Cela suggère que le spectre de ces valeurs est de la forme

$$N_n = N_0 + n \quad \text{avec} \quad N_0 \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.29)$$

(n étant la valeur propre de N associée à certain vecteur propre normalisé $|n\rangle$)
du fait des expressions de (4.28) et (4.29) on obtient :

$$N_0 + n = \frac{1}{2} (|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2) \quad (4.30)$$

on résout (4.30) en commençant successivement à partir de la valeur de $n = 0$ jusqu'à obtenir :

$$a_{n,n+1} = a_{n+1,n}^+ = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases} \quad (4.31)$$

de la forme des opérateurs $a_{n,n+1}$ et $a_{n+1,n}^+$ dans (4.31), il apparaît que le commutateur $[a, a^+]$ n'est en général qu'un opérateur tel que :

$$\langle n | [a, a^+] | n' \rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1 - N_0) & n \text{ impair} \end{cases} \quad (4.32)$$

Notant que seulement pour le cas de $N_0 = \frac{1}{2}$ la relation de commutation devient

un c -nombre ($= 1$) *et* qui correspond au cas canonique des relations de commutations

$$[a, a^+] = 1 \quad (4.33)$$

En plus de ça, pour le cas $N_0 = 1$, on peut montrer facilement que les opérateurs a et a^+ satisfont à la relation de commutation trilineaire en plus de (4.32) et (4.33) ;

$$aaa^+ - a^+aa = 2a \quad (4.34)$$

il faut remarquer que puisque $\langle n | [a, a^+] | n' \rangle$ est toujours un entier, de prendre alors pour valeur de N_0 un entier ou demi-entier, ce qui permet d'écrire d'écrire :

$$N_0 = \frac{r}{2} \quad (r \in \mathbb{N}^*) \quad (4.35)$$

où r est appelé l'ordre de la paraquantification.

Pour les q -oscillateur a, a^+ , Macfarlane [30] les a introduits en considérant leur action sur l'espace d'Hilbert menu de la base $\{|n\rangle\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ définie par :

$$\begin{aligned} a |0\rangle &= 0 \\ |n\rangle &= \left([n]_q\right)^{\frac{1}{2}} (a^+)^n |0\rangle \end{aligned} \quad (4.36)$$

où

$$\begin{aligned} [n]_q &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ [n]_q! &= [n]_q [n - 1]_q \dots [1]_q \end{aligned} \quad (4.37)$$

En prenant compte des relations de commutation (4.27) et l'algèbre :

$$aa^+ - qa^+a = q^{-N} \quad (4.38)$$

on peut avoir facilement l'action de a^+ , a et N dans la base $\{|n\rangle\}$:

$$\begin{aligned} a^+ |n\rangle &= q^{-\frac{N_0}{2}} [n+1]_q^{\frac{1}{2}} |n+1\rangle \\ a |n\rangle &= q^{-\frac{N_0}{2}} [n]_q^{\frac{1}{2}} |n-1\rangle \\ N |n\rangle &= (n + N_0) |n\rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

Maintenant, dans le but d'établir une relation entre l'algèbre (4.34) et (4.38), on va prendre $N_0 = 1$ (ie $r = 2$) et les oscillateurs a (respectivement a^+) qui dépendent de la valeur propre $|\Psi\rangle$ de l'opérateur N . En plus, on généralise l'algèbre (4.38) et (4.27) en

$$\begin{aligned} (a_\Psi a_\Psi^+ - Q a_\Psi^+ a_\Psi) P_\Psi &= e^{-NQ'} P_\Psi \\ [a_\Psi, N] &= a_\Psi \end{aligned} \quad (4.40)$$

et

$$[a_\Psi^+, N] = -a_\Psi^+$$

ou l'opérateur de projection P_Ψ a pour expression:

$$P_\Psi = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

($|\Psi\rangle$ est un état de la base $\{|n\rangle\}$)

et a_Ψ, a_Ψ^+, Q, Q' ont pour représentations :

$$\begin{aligned}
a_\Psi^+ |n\rangle &= q_\Psi^{-\frac{1}{2}} [n+1]_\Psi^{\frac{1}{2}} |n+1\rangle \\
a_\Psi |n\rangle &= q_\Psi^{-\frac{1}{2}} [n]_\Psi^{\frac{1}{2}} |n-1\rangle \\
Q_\Psi |\Psi\rangle &= q_\Psi |\Psi\rangle
\end{aligned} \tag{4.41}$$

et

$$Q'_\Psi |\Psi\rangle = (\ln q_\Psi) |\Psi\rangle$$

Il est important de mentionner que l'introduction de l'opérateur de projection P_Ψ est pour assurer que les opérateurs a et a^+ (désignés par a_Ψ et a_Ψ^+ respectivement) sont en relation avec l'état propre $|\Psi\rangle$ de N .

Maintenant, il est tout à fait simple de montrer que le choix ci-après du paramètre de déformation q_Ψ :

$$q_\Psi = \cosh(\Psi L n \Psi) \tag{4.42}$$

implique une équivalence entre l'algèbre q -déformée (4.40) et l'algèbre paraquantique suivante :

$$(a_\Psi a_\Psi a_\Psi^+ - a_\Psi^+ a_\Psi a_\Psi) P_\Psi = 2a P_\Psi \tag{4.43}$$

En fait, chacune des deux algèbres (4.40) et (4.43) avec la représentation (4.41) conduisent à la même relation (4.42) qui peut être résolue numériquement.

Pour $n = 3$ (par exemple), on trouve les solutions suivantes :

$$q_3 = \pm 1, \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}}, \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \tag{4.44}$$

4.3 Conclusion

L'intérêt motivé ici dans ce travail été d'essayer d'étudier et d'établir une connection entre la q -déformation et la paraquantification en sachant que les objectifs qui ont poussés à élaborer ces deux théories étaient identiques. Ils étaient une recherche d'une théorie consistante et plus globale que la mécanique quantique.

Ainsi, dans ce travail on a pu établir une équivalence entre l'algèbre déformée généralisée

$$\begin{aligned} (a_{\Psi}a_{\Psi}^{\dagger} - Qa_{\Psi}^{\dagger}a_{\Psi}) P_{\Psi} &= e^{-NQ'} P_{\Psi} \\ [a_{\Psi}, N] &= a_{\Psi} \end{aligned}$$

menue de la représentation (4.41) où on a pris un paramètre de déformation q dépendant de l'état propre $|\Psi\rangle$ de N ,

$$q_{\Psi} = \cosh(\Psi Lnq_{\Psi})$$

et l'algèbre praquantique d'ordre 2 pour chaque état propre $|\Psi\rangle$.

Chapter 5

Oscillateur nonlinéaire amorti et l'hamiltonien d'un oscillateur nonlinéaire généralisé

5.1 INTRODUCTION

5.1.1 L'ANGLE DE HANNAY

En mécanique classique le théorème adiabatique applicable aux systèmes Hamiltoniens intégrables est bien connu[42]. Il stipule qu'au cours d'un changement adiabatique des paramètres d'un Hamiltonien intégrable les variables d'action I_i restent constantes . On pourrait naïvement penser que les variables angulaires conjuguées θ_i évoluent avec des vitesses $\dot{\theta}(t)$ égales aux fréquences instantanées associées à l'Hamiltonien au même instant. Hannay [45] a été le premier à montrer que, comme dans le cas quantique, s'ajoute à cette contribution "dynamique" aux angles θ_i , une contribution géométrique qui ne dépend que du circuit suivi dans l'espace des paramètres et à laquelle peut être associée une 2-forme sur cet espace.

Considérons le cas $d = 1$ et soient I et θ les variables action angle associées à un

Hamiltonien $H(q,p,\vec{X}) = H(I,\vec{X})$. Ces variables permettent un paramétrage $q(I, \theta, \vec{X})$, $p(I, \theta, \vec{X})$ de l'espace de phase(ici q représente la position et p sont moment conjugué), $2\pi I$ représente l'aire d'une trajectoire et θ est la variable conjuguée mesurée sur chaque trajectoire (ce qui implique un choix d'origine sur les trajectoires). Soit $S(q, I, \vec{X})$ une fonction génératrice de la transformation canonique $(q, p) \rightarrow (I, \theta)$ ($p = \frac{\partial S}{\partial q}$; $\theta = \frac{\partial S}{\partial I}$). On sait que la dynamique des variables I et θ est régie par le nouvel Hamiltonien $K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$. Pour exprimer $\frac{\partial S}{\partial t}$ dans les variables I et θ ,

Berry[43] introduit la fonction S

$$S(I, \theta, \vec{X}) = S(q(I, \theta, \vec{X}), I, \vec{X}) \quad (5.1)$$

(dont la dérivée par rapport à \vec{X} est monovaluée). K s'écrit:

$$K(I, \theta, \vec{X}(t)) = H(I, \vec{X}(t)) + \dot{\vec{X}}(t) \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{X}} - p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right) (I, \theta, \vec{X}(t)) \quad (5.2)$$

L'hypothèse adiabatique consiste à remplacer les membres de droite des deux équations de Hamilton $\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \theta}$ et $\dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I}$ par leurs moyennes sur la trajectoire d'action I de l'Hamiltonien $H(q, p, \vec{X})$ (la moyenne d'une grandeur $f(q, p, \vec{X})$ étant définie par

$$\vec{f}(I, \vec{X}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f(q(I, \theta, \vec{X}), p(I, \theta, \vec{X}), \vec{X}) \quad (5.3)$$

La première équation donne le théorème adiabatique standard $\dot{I} = 0$. La seconde donne la vitesse angulaire

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_D + \dot{\theta}_H \quad (5.4)$$

somme d'une partie dynamique (ou fréquence instantanée)

$$\dot{\theta}_D = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I, \vec{X}) \quad (5.5)$$

et d'une partie géométrique

$$\dot{\theta}_H = \vec{X} \frac{\partial}{\partial I} \overline{\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{X}} - p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right)}(I, \vec{X}) \quad (5.6)$$

Lorsque les paramètres effectuent un cycle, cette partie géométrique s'écrit comme l'intégrale double de la 2-forme

$$\sigma_H(I, \vec{X}) = -\frac{\partial}{\partial I} \overline{\left(d_{\vec{X}} p(I, \theta, \vec{X}) \wedge d_{\vec{X}} q(I, \theta, \vec{X}) \right)} \quad (5.7)$$

qui caractérise l'holonomie classique.

Comme dans le cas quantique le transport de Hannay peut être obtenu "de manière exacte" en moyennant le principe variationnel

$$\delta \left[\int L dt \right] = 0 \quad L = p\dot{q} - H \quad (5.8)$$

de la mécanique classique hamiltonienne. Ce principe moyenné s'écrit:

$$\delta \left[\int \bar{L} dt \right] = 0 \quad (5.9)$$

avec

$$\bar{L} = p \frac{\partial q}{\partial I} \dot{I} + I \dot{\theta} + p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \vec{X} - H(I, \vec{X}) \quad (5.10)$$

(en remarquant que $I = \frac{1}{\epsilon\pi} \oint pdq = \overline{p \frac{\partial q}{\partial \theta}}$). Comme θ est une variable cyclique pour \bar{L} , l'action $I = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta}$ est automatiquement conservée ($\dot{I} = 0$). Utilisant ce résultat dans l'extremalisation par rapport à I , on obtient:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{X}} \overline{\left(p \frac{\partial q}{\partial I} \right)} - \frac{\partial}{\partial I} \overline{\left(p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right)} \right] \vec{X} = \dot{\theta}_D + \dot{\theta}_H \quad (5.11)$$

La partie géométrique qui s'écrit sous la forme d'un crochet de Poisson [Koiller (1989)]

$$\dot{\theta}_H = \overline{\left(\left(\frac{\partial p}{\partial \vec{X}} \frac{\partial q}{\partial I} \right) - \frac{\partial p}{\partial I} \frac{\partial q}{\partial \vec{X}} \right) \vec{X}} \quad (5.12)$$

s'identifie facilement à l'expression donnée par Berry et Hannay. Cette procédure est certainement la plus simple et la plus rapide pour obtenir à la fois le théorème adiabatique standard ($\dot{I} = 0$) et l'angle de Hannay

Dans son article consacré à l'angle de Hannay, Berry[43] établit une relation "semi-classique" entre l'angle classique et la phase quantique en utilisant la méthode de Maslov, . Cette méthode relie de manière générale la fonction d'onde, définie en représentation q , aux trajectoires dans l'espace de phase; en particulier, elle relie l'état propre $\psi_n(q, \vec{X})$ à la fonction génératrice $S(q, I, \vec{X})$:

$$\psi_n(q, \vec{X}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(q, I, \vec{X}) e^{\frac{i}{\hbar} S^{\alpha}(q, I, \vec{X})} \quad (5.13)$$

En substituant la fonction $\psi_n(q, \vec{X}) = \langle q | n, \vec{X} \rangle$ dans l'expression $\dot{\gamma}_n = \iota \langle n, \vec{X} | \nabla_{\vec{X}} | n, \vec{X} \rangle \vec{X}$ et en tenant compte du non recouvrement (dans la limite semiclassique) des termes $\alpha \neq \beta$, Berry obtient:

$$\dot{\gamma}_n = -\frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{X}} S^{\alpha}(q, I, \vec{X}) \vec{X} = -\frac{1}{\hbar} (\nabla_{\vec{X}} S - p \frac{\partial q}{\partial \vec{X}}) \vec{X} \quad (5.14)$$

(Rappelons que $S(I, \theta, \vec{X}) = S(q(I, \theta, \vec{X}), I, \vec{X})$ est une fonction dont le gradient est monovalué). La relation entre l'angle classique et la phase quantique s'obtient en dérivant cette égalité par rapport à la variable action I identifiée à $n\hbar$ dans la limite semiclassique:

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_n}{\partial I} = -\frac{1}{\hbar} \dot{\theta}_H \quad (5.15)$$

L'obtention de cette relation est donc basée sur une description des états quantiques semiclassiques à partir de l'espace de phase classique.

5.2 Formalisme

L'angle de Hannay [45] (la contrepartie classique de la phase géométrique de Berry [46]), à l'origine était associée à l'évolution adiabatique des systèmes d'hamiltoniens classiques, mais elle a été étendue à une grande classe des équations dynamiques correspondant aux systèmes dissipatifs: équations non-linéaires avec des limites cycliques [47] ou avec des symétries internes plus générale [48], telles que les équations décrivant les dynamiques du laser [49], etc... Dans ce contexte, il a été prouvé dans [50] que le système dissipatifs le plus simple, à savoir l'oscillateur harmonique amorti décrit par le lagrangien dépendant du temps :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} e^{2\int^t \lambda(s) ds} (\dot{q}^2 - \omega_o^2 q^2) \quad (5.16)$$

est canoniquement équivalent, même pour les paramètres dépendants du temps $(\lambda, \omega_o) \equiv \vec{\mu}$, à l'oscillateur harmonique généralisé, un système conservatif décrit par l'Hamiltonien:

$$H(P, Q, \vec{\mu}) = \frac{P^2}{2} + \lambda PQ + \frac{\omega_o^2}{2} Q^2 . \quad (5.17)$$

(la fonction génératrice de la transformation canonique est $F(q, P, t) = qP e^{\int^t \lambda(s) ds}$). Par conséquent, les angles de Hannay des deux systèmes sont identiques. Leur expression peuvent être simplement établie comme dans [51] en utilisant le changement de variable

$$Q = \frac{\partial F(q, P, t)}{\partial P} = q e^{\int^t \lambda(s) ds} \quad (5.18)$$

ce qui donne au lagrangien (5.16) la forme

$$L(Q, \dot{Q}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} (\dot{Q}^2 - 2\lambda Q \dot{Q} - \omega^2 Q^2) \quad (\omega^2 = \omega_o^2 - \lambda^2) \quad (5.19)$$

ce qui s'écrit également par:

$$L(Q, \dot{Q}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} (\dot{Q}^2 - (\omega^2 - \dot{\lambda}) Q^2) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\lambda Q^2) . \quad (5.20)$$

Dans cette dernière expression, la quantité $(\omega^2 - \dot{\lambda})$ est le carré de la fréquence instantanée du système.

Dans la limite adiabatique où les paramètres $\vec{\mu}$ sont des fonctions lentement variables en fonction du temps $\vec{\mu}(\epsilon t)$ (avec $\frac{\epsilon}{\omega_o} \ll 1$), on peut mettre en premier ordre l'expansion de cette fréquence instantanée pour les petits paramètres adiabatiques ϵ . On obtient le resultat bien connu [45][46].

$$\dot{\Theta} = \omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega} . \quad (5.21)$$

où la partie 'dynamique' ω de la dérivée par rapport au temps $\dot{\Theta}$ de la phase de l'oscillateur semble être corrigée par une contribution adiabatique $-\frac{\dot{\lambda}}{2\omega}$ l'intégrale de l'angle de Hannay géométrique dans l'espace des paramètres.

Le but principale de ce travail est d'étudier dans quelle mesure les résultats ci-dessus, concernant l'équivalence canonique et l'identité des phases géométriques des oscillateurs linéaires dissipatifs et conservatifs, peuvent être généralisés aux cas non-linéaires au moins pour le premier ordre d'approximation de la théorie des perturbations. Dans ce qui suit nous nous limiterons à l'oscillateur quartique amorti généralisé. Nous ne considérons pas les termes cubiques car à cet ordre ils ne sont pas résonants c-à-d sans effets sur l'équation de phase [52]

Le paragraphe suivant sera consacré à l'oscillateur quartique généralisé i.e. l'Hamiltonien qui est déduit à partir de (5.17) par l'addition d'un terme proportionnel à Q^4 . Afin de calculer la phase géométrique de ce système nous prolongeons la méthode de réduction aux formes normales dans le cas où les paramètres varient lentement avec le temps.

Nous pouvons alors résoudre perturbativement l'équation d'Hamilton et trouver les transformations canoniques appropriées sous les deux suppositions de la non-linéarité faible et de l'adiabacité de la variation des paramètres. En particulier nous déterminons l'invariance adiabatique I du système et trouvons l'expression de la correction non-linéaire du premier ordre à la partie de Hannay géométrique de l'angle Θ . La raison de choisir la technique des formes normales plutôt que la méthode faisant la moyenne (averaging method) est que, sans compter le fait qu'elle peut en principe être développée à

n'importe quel ordre de perturbation (dans le régime adiabatique), c'est une approche standard pour l'étude des systèmes dissipatifs non-linéaires; il nous permettra de déduire les transformations canoniques appropriées dans le cas dissipatif à partir des précédents.

Puis après un paragraphe sera consacré à l'étude de l'oscillateur quartique amorti, le Lagrangien déduit à partir de (5.16) par l'addition d'un terme proportionnel à q^4 . En utilisant les transformations canoniques dépendantes du temps construites dans le paragraphe précédent et gardant les mêmes hypothèses de non-linéarité faible et l'adiabacité, on obtient les résultats suivants: Pour les valeurs finies du paramètre (d'amortissement) λ , c-à-d quand la résonance n'existe pas, le terme quartique est sans effet sur la partie géométrique de l'angle. Dans ce cas l'oscillateur quartique amorti peut s'avérer canoniquement équivalent à l'oscillateur harmonique linéaire généralisé.

Cependant, ici, il existe aussi une limite (d'amortissement) faible paramétrisée par une (grandeur) de λ allant vers zéro avec le paramètre adiabatique de telle manière que le phénomène de résonance ressurgisse à la limite. Dans cette limite le terme quartique contribue et rétablit l'angle de Hannay de l'oscillateur généralisé quartique déterminé dans le paragraphe précédent.

Ce dernier résultat généralise aux systèmes non-linéaires le résultat établi dans [50] pour les oscillateurs non-linéaires.

5.2.1 Oscillateur quartique généralisé

La plus simple extension non-linéaire conduisant à un terme résonant dans l'équation du mouvement est obtenu en ajoutant un terme quartique à l'Hamiltonien (5.17) qui devient alors:

$$H_G(P, Q, \vec{\mu}) = \frac{P^2}{2} + \lambda PQ + \frac{\omega_o^2}{2} Q^2 + \frac{\nu}{4} Q^4. \quad (5.22)$$

Les équations de Hamilton pour Q et P prennent les formes

$$\dot{Q} = \lambda Q + P \quad , \quad \dot{P} = -\lambda P - \omega_0^2 Q - \nu Q^3. \quad (5.23)$$

Afin de résoudre ces équations couplées non-linéaires, il est plus commode d'introduire, au lieu de Q et P une variable complexe z , et son conjuguée \bar{z} , définis par

$$z = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[Q - \frac{i}{\omega} (\lambda Q + P) \right], \quad (\omega^2 = \omega_o^2 - \lambda^2). \quad (5.24)$$

D'une manière équivalente Q et P sont alors

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (z + \bar{z}), \quad P = \frac{i\omega - \lambda}{\sqrt{2\omega}} z - \frac{i\omega + \lambda}{\sqrt{2\omega}} \bar{z}. \quad (5.25)$$

Pour des paramètres dépendants du temps $(\lambda, \omega_0, \nu) \equiv \vec{\mu}$, les équations de Hamilton pour Q et P conduisent à l'équation non-linéaire suivante pour z

$$\dot{z} = i\omega z + \frac{i\nu}{4\omega^2} (z + \bar{z})^3 - \frac{i\dot{\lambda}}{2\omega} z + \frac{\dot{\omega} - i\dot{\lambda}}{2\omega} \bar{z}. \quad (5.26)$$

(Notons que les trois paramètres λ , ω et ν ne jouent pas le même rôle: la dérivée du temps $\dot{\nu}$ du paramètre lié avec le terme quartique non-linéaire n'apparaît pas en (5.26) en contradistinction avec $\dot{\lambda}$ et $\dot{\omega}$). Cette équation peut être résolue perturbativement en utilisant sa réduction canonique à la forme normale (5.24) si on suppose que le système est faiblement non-linéaire ($\frac{\nu}{\omega_o^2} Q^2 \ll 1$) et que les paramètres varient adiabatiquement ($\vec{\mu}$ est une fonction varie lentement du temps $\vec{\mu}(\epsilon t)$ avec $\frac{\epsilon}{\omega_o} \ll 1$). Dans ces conditions, faisant introduire alors la transformation quasi-identité

$$z = u + \delta \bar{u} \quad (5.27)$$

Afin d'éliminer le terme non-linéaire résonant proportionnel à \bar{u} dans l'équation pour la nouvelle variable u . Pour $\delta = \frac{\dot{\lambda} + i\dot{\omega}}{4\omega^2}$ (δ est petit, de l'ordre de ϵ) le coefficient de \bar{u} s'annule et l'équation pour u s'écrit

$$\dot{u} = i \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega} \right) u + \frac{i\nu}{4\omega^2} (u + \bar{u})^2 [(1 + \delta + 3\bar{\delta})u + (1 + 4\delta)\bar{u}]. \quad (5.28)$$

Le premier terme dans (5.28) montre déjà l'angle de Hannay de l'oscillateur généralisé linéaire. Afin d'obtenir la correction non linéaire on doit introduire un second (quasi-identité) changement de variable

$$u = v + \alpha v^3 + \beta v \bar{v}^2 + \gamma \bar{v}^3. \quad (5.29)$$

La nécessité pour que l'équation pour ν ne contient plus des termes cubiques non-résonants existants en (5.28) conduit à des équations différentielles pour des coefficients dépendants du temps α , β et γ de la transformation. Ces équations différentielles sont explicitement écrites et ses solutions sont discutées dans l'annexe.

L'équation résolue pour v , valable au premier ordre en ϵ et en paramètre v de non linéarité faible, est

$$\dot{v} = i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)v + \frac{3i\nu}{4\omega^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right)v^2\bar{v} \quad (5.30)$$

Maintenant, en remplaçant $v = A e^{i\Theta}$, les équations pour l'amplitude A et pour l'angle Θ s'écrivent

$$\dot{A} = 0, \quad (5.31)$$

$$\dot{\Theta} = \omega \left(1 + \frac{3\nu}{4\omega^3}A^2\right) - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega} \left(1 - \frac{3\nu}{2\omega^3}A^2\right). \quad (5.32)$$

L'équation (5.31) montre que A est une invariante adiabatique reliée, comme on l'a vu ci dessus, à l'action I du système

$$I = A^2. \quad (5.33)$$

Le premier terme dans r.h.s de l'équation (5.32) explique bien le résultat bien connu que le terme quartique $\frac{\nu}{4}Q^4$ dans (5.22), est responsable de la présence des termes résonants $v^2\bar{v}$ dans (5.30), induit une renormalisation de la fréquence linéaire ω qui devient

$$\Omega = \omega\left(1 + \frac{3\nu}{4\omega^3}A^2\right). \quad (5.34)$$

(Le fait que la fréquence n'apparaît pas explicitement dans l'expression de I et que le

terme de correction $\frac{3\nu}{4\omega^2} A^2$ à la fréquence linéaire est différent de l'expression construite dans la référence ([52]) sont dues à l'utilisation de l'amplitude A de la variable transformée v dans (5.33) et (5.34) à la place de l'amplitude a de la variable originale Q ; en particulier, l'expression habituelle pour Ω en terme de a , ω et ν peut être rétabli à partir de (5.34) notons que $A = \sqrt{\frac{\omega}{2}} a$). Le second terme $\frac{\dot{\lambda}}{2\omega} \left(-1 + \frac{3\nu}{2\omega^2} A^2 \right)$ dans le r.h.s. de l'équation (5.32), qui existe seulement pour les paramètres dépendants du temps, est la partie de Hannay géométrique, non intégrable de $\dot{\Theta}$. Comme la partie dynamique Ω contient également une contribution à partir du terme résonant non linéaire. Cependant comme cette partie géométrique est définie jusqu'à une dérivée du temps totale, on peut l'écrire, pour ν constant, sous la même forme comme dans le cas linéaire $\left(-\frac{\dot{\lambda}}{2\omega} \right)$ en termes de la fréquence renormalisée et d'un paramètre d'amortissement renormalisé Λ défini par

$$\Lambda = \lambda \left(1 - \frac{3\nu}{\omega^3} A^2 \right). \quad (5.35)$$

En effet, l'égalité $\frac{\dot{\Lambda}}{2\Omega} = \frac{\dot{\lambda}}{2\omega} \left(1 - \frac{3\nu}{2\omega^3} A^2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{9\nu\lambda}{8\omega^4} A^2 \right)$ est exacte jusqu'au premier ordre en terme non linéaire faible proportionnel à νA^2 . En conséquence l'équation (5.32) pour la variable d'angle Θ prend une forme fonctionnelle:

$$\dot{\Theta} = \Omega - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Omega}, \quad (5.36)$$

identique à celle, $\dot{\Theta} = \omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}$, obtenue dans le cas linéaire, on peut dire que, pour ν constant, l'effet de la non-linéarité quartique faible sur la phase (la partie géométrique aussi bien que la partie dynamique) s'élève à une simple renormalisation des deux ω et λ .

Nous montrons maintenant que les variables dynamiques (I, Θ) et (P, Q) sont reliées par une transformation canonique dépendante du temps et que les équations (5.31)-(5.33) sont les équations de Hamilton pour les variables action-angle associées au Hamiltonien

dépendant du temps $\mathcal{H}_G(I, \Theta, t)$:

$$\mathcal{H}_G(I, \Theta, t) = I\omega \left(1 - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega^2}\right) + I^2 \frac{3\nu}{8\omega^2} \left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right) . \quad (5.37)$$

ceci peut être vérifié par l'inspection de l'ensemble des transformations successives $(P, Q) \rightarrow (-i\bar{z}, z) \rightarrow (iu, \bar{u}) \rightarrow (-i\bar{v}, v) \rightarrow (I, \Theta)$, qui seront également d'importance dans le paragraphe suivant. En ce qui concerne la première transformation $(P, Q) \rightarrow (-i\bar{z}, z)$, sa fonction génératrice $F(Q, z)$ est obtenue par l'intégration des équation $\frac{\partial F}{\partial Q} = P(Q, z)$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = i\bar{z}(Q, z)$ déduites à partir de l'identité différentielle (caractérisant une transformation canonique)

$$PdQ - H_G dt = -i\bar{z}dz - \mathcal{H}_G^z dt + dF . \quad (5.38)$$

En tenant compte les relations (5.24)(5.25) on obtient

$$F(Q, z) = -\frac{1}{2}(i\omega + \lambda)Q^2 + i\sqrt{2\omega}Qz - \frac{1}{2}iz^2 . \quad (5.39)$$

L'Hamiltonien \mathcal{H}_G^z pour les nouvelles variables conjuguées $(-i\bar{z}, z)$ est alors obtenu à partir de la relation $\mathcal{H}_G^z = H_G + \frac{\partial F}{\partial t}$, son expression s'écrit

$$\mathcal{H}_G^z = \omega z\bar{z} + \frac{\nu}{16\omega^2}(z + \bar{z})^4 + \frac{i\dot{\omega}}{4\omega}(z^2 - \bar{z}^2) - \frac{\dot{\lambda}}{4\omega}(z + \bar{z})^2 \quad (5.40)$$

et on peut vérifier que les équations de Hamilton:

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}_G^z}{\partial(-i\bar{z})} , \quad -i\dot{\bar{z}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_G^z}{\partial z} \quad (5.41)$$

En effet, coïncident avec l'équation (5.26) pour z et son correspondant \bar{z} .

la transformation $(-i\bar{z}, z) \rightarrow (iu, \bar{u})$ associée à la fonction génératrice

$$G(z, \bar{u}) = -iz\bar{u} + \frac{1}{2}i\delta\bar{u}^2 - \frac{1}{2}\bar{\delta}z^2 \quad (5.42)$$

est également canonique.

L'expression de l'Hamiltonien \mathcal{H}_G^u pour les nouvelles variables conjuguées (iu, \bar{u}) est obtenue à partir de la relation $\mathcal{H}_G^u = \mathcal{H}_G^z + \frac{\partial G}{\partial t}$ et, dans cette formulation du Hamiltonien de la réduction de la forme normale, δ and $\bar{\delta}$ sont déterminés par la condition que \mathcal{H}_G^u ne contient plus des termes proportionnels à \bar{u}^2 et u^2 . Ceci est équivalent à la condition ci-dessus que l'équation pour \bar{u} (resp u) ne contient plus un terme non résonant proportionnel à u (resp. \bar{u}) et ce qui conduit à la même valeur $\frac{\dot{\lambda} + i\dot{\omega}}{4\omega^2}$ pour δ . Donc \mathcal{H}_G^u s'écrit

$$\mathcal{H}_G^u = \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)u\bar{u} + \frac{\nu}{16\omega^2}(u + \bar{u})^4 + \frac{\nu}{4\omega^2}(u + \bar{u})^3(\delta\bar{u} + \bar{\delta}u). \quad (5.43)$$

(En effet, $\frac{\partial G}{\partial t}$ ne contribue pas à cette expression de \mathcal{H}_G^u valable jusqu'au premier ordre en ϵ puisqu'il contient seulement les termes proportionnels à $\dot{\delta}$ et $\dot{\bar{\delta}}$ et aussi de l'ordre ϵ^2 .)

De la même manière, la transformation $(iu, \bar{u}) \rightarrow (-i\bar{v}, v)$ associée à une fonction génératrice:

$$K(\bar{u}, v) = iv\bar{u} + \alpha v^3\bar{u} + \frac{1}{3}\beta v\bar{u}^3 + \frac{1}{4}\gamma\bar{u}^4 - \frac{1}{4}\gamma v^4 \quad (5.44)$$

est canonique. Les valeurs de α , β et γ , maintenant sont déterminées en imposant que l'Hamiltonien $\mathcal{H}_G^v = \mathcal{H}_G^u + \frac{\partial K}{\partial t}$ pour les nouvelles variables conjuguées $(-i\bar{v}, v)$ ne contiennent pas des termes non résonants quartiques, sont ceux trouvées dans l'annexe. L'expression de \mathcal{H}_G^v est

$$\mathcal{H}_G^v = \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)v\bar{v} + \frac{3\nu}{8\omega^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right)v^2\bar{v}^2. \quad (5.45)$$

Finalement, la transformation $(-i\bar{v}, v) \rightarrow (I, \Theta)$ associée à la fonction génératrice:

$$M(v, \Theta) = -\frac{1}{2}v^2 \exp(-2i\Theta) \quad (5.46)$$

est canonique et l'Hamiltonien (5.45) se transforme en (5.37) comme il a été notée précédemment. Cette expression (5.37) montre que $I = A^2$ est l'action du système et permet de déterminer l'invariant adiabatique comme une fonction de l'énergie.

5.2.2 L'oscillateur quartique amorti

l'oscillateur quartique amorti que nous considérons dans cette section est décrit par l'équation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + 2\lambda\dot{q} + \nu q^3 = 0. \quad (5.47)$$

Il peut être obtenu à partir du Lagrangien de Caldirola-Kanai dépendant du temps généralisé [10]

$$\mathcal{L}_D(q, \dot{q}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} e^{2\int^t \lambda(s) ds} (\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2 - \frac{1}{2} \nu q^4). \quad (5.48)$$

En termes de la nouvelle variable

$$Q = q e^{\int^t \lambda(s) ds} \quad (5.49)$$

Le Lagrangien (5.48) s'écrit

$$L_D(Q, \dot{Q}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2} (\dot{Q}^2 - 2\lambda Q \dot{Q} - \omega^2 Q^2 - \frac{1}{2} \nu Q^4 e^{-2\int^t \lambda(s) ds}) \quad (5.50)$$

et l'Hamiltonien correspondant dépendant du temps $H_D(P, Q, \vec{\mu})$, où $P = \frac{\partial L_D}{\partial \dot{Q}} = \dot{Q} - \lambda Q$, prend la forme:

$$H_D(P, Q, \vec{\mu}) = \frac{P^2}{2} + \lambda P Q + \frac{\omega_0^2}{2} Q^2 + \frac{\nu}{4} Q^4 e^{-2\int^t \lambda(s) ds} \quad (5.51)$$

identique à l'expression (5.22) pour l'Hamiltonien de l'oscillateur généralisé quartique, sauf le facteur exponentiel crucial dans le terme quartique. Alors, faisons les mêmes changements successives des variables comme dans la paragraphe précédent, à savoir $(P, Q) \rightarrow (-i\bar{z}, z) \rightarrow (iu, \bar{u}) \rightarrow (-i\bar{v}, v)$, nous obtenons sans d'importants nouveaux calculs, l'hamiltonien suivant pour les variables conjuguées $(-i\bar{v}, v)$:

$$\mathcal{H}_D^v = (\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}) v \bar{v} + \frac{3\nu}{8\omega^2} (1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}) v^2 \bar{v}^2 e^{-2\int^t \lambda(s) ds} \quad (5.52)$$

A ce point une remarque est de l'ordre. En contradistinction avec l'oscillateur quartique généralisé, l'oscillateur quartique amorti ne montre pas de phénomène de résonance. La théorie des formes normales enseigne qu'il est possible dans ce cas d'éliminer les termes non-linéaires. Par conséquent, on prévoit que (comme dans [50]) que l'angle de Hannay ne prend aucune contribution non-linéaire. Voyant comment ceci devient dans le formalisme des transformations canoniques. A cet effet, nous introduisons le changement de variable (quasi-identité)

$$v = w + i\sigma w^2 \bar{w}. \quad (5.53)$$

La transformation est $(-i\bar{v}, v) \rightarrow (iw, \bar{w})$ canonique pour σ réel. Il correspond à la fonction génératrice

$$N(v, \bar{w}) = -iv\bar{w} - \frac{1}{2}\sigma v^2 \bar{w}^2 \quad (5.54)$$

et l'Hamiltonien transformé $\mathcal{H}_D^w = \mathcal{H}_D^v + \frac{\partial N}{\partial t}$ s'écrit

$$\mathcal{H}_D^w = \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)w\bar{w} - \frac{1}{2}\left(\dot{\sigma} - \frac{3\nu}{4\omega^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right)e^{-2\int^t \lambda(s) ds}\right)w^2 \bar{w}^2. \quad (5.55)$$

Le second terme dans le r.h.s de (5.55) peut être mis égal à zéro. En effet, en raison de la présence du facteur exponentiel (proportionnel à ν) qui assure que la transformation (5.53) est presque l'unité. Ainsi pour λ fini l'oscillateur amorti quartique est canoniquement généralisé, et les phases des deux systèmes sont identiques. Notons qu'une telle élimination peut ne pas être faite sur l'Hamiltonien (5.45) car l'intégration de $\dot{\sigma}$ conduirait à des termes non bornés proportionnels au temps t .

Maintenant, considérons le cas où l'amplitude du paramètre d'amortissement λ est près du zéro de telle sorte que le phénomène de résonance ne puisse pas être évité. Plus précisément soit λ de la forme

$$\lambda(t) = \epsilon^a \tilde{\lambda}(\epsilon^b t) \quad (5.56)$$

où a et b sont des nombres positifs tel que $a > b > 0$ et $a + b = 1$. b positif assure la

validité de l'hypothèse adiabatique par λ et $a+b = 1$ que $\dot{\lambda}$ reste de l'ordre de ϵ , comme $\dot{\omega}$. Pour un tel comportement de λ l'intégrale $\int^t \lambda(s) ds$ est de l'ordre ϵ^{a-b} avec $(a-b) > 0$. Donc en remplaçant le facteur exponentiel dans (5.52) par les termes importants dans l'expression de son expansion, on obtient l'expression suivante (valable jusqu'au premier ordre en ϵ) pour l'Hamiltonien \mathcal{H}_D^v :

$$\mathcal{H}_D^v = \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)v\bar{v} + \frac{3\nu}{8\omega^2}\left(1 - 2 \int^t \lambda(s) ds + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right)v^2\bar{v}^2. \quad (5.57)$$

Pour les mêmes raisons que pour l'hamiltonien (5.45) on ne peut pas éliminer les termes non linéaires en (5.57). Il est intéressant de noter que le terme proportionnel à la dérivée du temps des paramètres, $-\frac{\dot{\lambda}}{2\omega}v\bar{v} + \frac{3\nu\dot{\lambda}}{8\omega^4}v^2\bar{v}^2$, sont identiques dans (5.45) et (5.57). Par conséquent, dans cette limite d'amortissement faible, l'angle de Hannay de l'oscillateur amorti quartique est identique à celle de l'oscillateur harmonique quartique généralisé. Dû à la présence du terme dynamique supplémentaire $-\frac{3\nu}{4\omega^2} \int^t \lambda(s) ds v^2\bar{v}^2$ en (5.57) les deux systèmes semblent ne pas être canoniquement équivalents. Cependant, on peut exprimer l'Hamiltonien (5.57) en termes du paramètre renormalisé $\tilde{\nu} = \nu(1 - 2 \int^t \lambda(s) ds)$ (un changement qui, en degré de précision dans nos calculs, n'affecte pas la partie géométrique non-linéaire de l'angle) pour obtenir une expression

$$\mathcal{H}_D^v = \left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)v\bar{v} + \frac{3\tilde{\nu}}{8\omega^2}\left(1 + \frac{\dot{\lambda}}{\omega^2}\right)v^2\bar{v}^2 \quad (5.58)$$

semblable à (5.45). L'oscillateur quartique amorti avec les paramètres ω_0 , λ et ν est ainsi, dans cette limite d'amortissement faible et dans le premier ordre d'approximation de la théorie des perturbations, est canoniquement équivalent à l'oscillateur quartique généralisé avec les paramètres ω_0 , λ et $\tilde{\nu}$ et les deux systèmes ont les angles d'Hannay identiques. Ces résultats sont la généralisation pour les oscillateurs non-linéaires du résultat établi en ([50]) pour les cas linéaires.

Bibliography

- [1] Flato, M. "Deformation view of physical theories", Czechoslovak J. Phys. **B32** (1982), 472-475.
- [2] Flato, M. "Two Disjoint Aspects of the Deformation Programme: Quantizing Nambu Mechanics; Singleton Physics", these Proceedings.
- [3] Faddeev L. D. "On the relation between mathematics and physics". in: *Integrable systems* (Tianjin, 1987), 3-9, Nankai Lectures Math. Phys., World Sci. Pub. (1990).
- [4] Faddeev L.D., Reshetikhin N.Yu. and Takhtajan L.A. "Quantization of Lie groups and Lie algebras", Leningrad Math. J. **1** (1990), 193-225.
- [5] Voros A. *Développements semi-classiques*, Thèse (Orsay et Saclay), mai 1977. "Semi-classical approximations", Ann. Inst. Henri Poincaré **24** (1976), 31-90.
- [6] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A. and Sternheimer D. "Deformation theory and quantization I, II", Ann. Phys. (NY) (1978) **111**, 61-110, 111-151
- [7] Angelopoulos E., Flato M., Fronsdal, C. and Sternheimer D. "Massless particles, conformal group and De Sitter universe", Phys. Rev. **D23** (1981), 1278-1289.
- [8] Bonneau P., Flato M., Gerstenhaber M. and Pinczon G. "The hidden group structure of quantum groups: strong duality, rigidity and preferred deformations". Comm. Math. Phys. **161** (1994), 125-156.

- [9] Drinfeld V.G. "Quantum Groups", in: *Proc. ICM86, Berkeley*, **1**, 101-110, Amer. Math. Soc., Providence (1987); "Quasi-Hopf algebras", *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 1419-1457; "On almost co-commutative Hopf algebras", *ibid.*, 321-431.
- [10] Flato M. and Fronsdal C. "Composite Electrodynamics". *J. Geom. Phys.* **5** (1988), 37-61; "Interacting Singletons", *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 249-259.
- [11] Agarwal G.S. and Wolf E. "Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics I, II, III", *Phys. Rev.* **D2** (1970), 2161-2186, 2187-2205, 2206-2225.
- [12] Daubechies I. "On the distributions corresponding to bounded operators in the Weyl quantization", *Comm. Math. Phys.* **75** (1980), 229-238; Daubechies I. and Grossmann A. "An integral transform related to quantization", *J. Math. Phys.* **21** (1980), 2080-2090.
- [13] Grossman A., Loupiaz G. and Stein E.M. "An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space", *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **18** (1968), 343-368.
- [14] Woronowicz S.L. "Compact matrix pseudogroups", *Comm. Math. Phys.* **111** (1987), 613-665; *Comm. Math. Phys.* **160** (1989), 125-170; "Quantum E(2) group and its Pontryagin dual", *Lett. Math. Phys.* **23** (1991), 251-263.
- [15] Kulish P.P. and Reshetikhin N.Yu. "Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations". *Zap. Nauch. Sem. LOMI* **101** (1981), 101-110 (English translation in *Jour. Sov. Math.* **23** (1983), 24-35)
- [16] Jimbo M. "A q -difference algebra of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation", *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63-69.
- [17] Dito G., Flato M., Sternheimer D. and Takhtajan L. "Deformation Quantization and Nambu Mechanics", *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), 1-22.

- [18] Berezin F. A. "General concept of quantization", *Comm. Math. Phys.* **40** (1975), 153-174; "Quantization", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), 1116-1175; "Quantization in complex symmetric spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975), 363-402, 472. [English translations: *Math. USSR-Izv.* **38** 1109-1165 (1975) and **39**, 341-379 (1976)].
- [19] Agarwal G.S. and Wolf E. "Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics I, II, III", *Phys. Rev.* **D2** (1970), 2161-2186, 2187-2205, 2206-2225.
- [20] Boutet de Monvel L. and Guillemin V. *The spectral theory of Toeplitz operators*. *Annals of Mathematics Studies* **99**, Princeton University Press (1981).
- [21] Gerstenhaber M. "On the deformation of rings and algebras", *Ann. Math.* **79** (1964), 59-103; and (IV), *ibid.* **99** (1974), 257-276.
- [22] Lévy-Nahas M. "Deformations and contractions of Lie algebras", *J. Math. Phys.* **8** (1967), 1211-1222. "Déformations du groupe de Poincaré", in: *L'extension du groupe de Poincaré aux symétries internes des particules élémentaires* (Colloque Int. CNRS N° 159), 25-45, Éds CNRS, Paris (1968).
- [23] Inönü E. and Wigner E.P. "On the contraction of groups and their representations", *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **39** (1953), 510-524.
- [24] Kodaira K. and Spencer D.C. "On deformations of complex analytic structures" I, II, *Ann. of Math.* **67** (1958), 328-466; III "Stability theorems for complex structures" *ibid.* **71** (1960), 43-76.
- [25] Saletan E.J. "Contraction of Lie groups", *J. Math. Phys.* **2** (1961), 1-21 and 742.
- [26] Segal I.E. "A class of operator algebras which are determined by groups", *Duke Math. J.* **18** (1951), 221-265.

- [27] L.D. Faddeev, N.Yu. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Algebra and Analysis*, **1** (1987) 178
- [28] S.L. Woronowicz, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, Vol. **23**, 1 (1987) 117; *Commun. Math. Phys.* **111** (1987) 613 and *Commun. Math. Phys.* **122**, (1989) 125.
- [29] E. Abe, *Hopf Algebras*, (University Press, Cambridge, 1977).
- [30] Macfarlane A.J. *J.Phys. A: Math. Gen* 22(1989) 4581-4588
- [31] Biedenharn L.C. *J.Phys. A: Math. Gen* 22(1989)22 L873
- [32] Shabanov S.V. *Phys. Lett. B*293(1992)117
- [33] Oh C.H. and K. Singh *J. Phys. A : Mat .Gen.*27 (1994) 5907.
- [34] Sabanov S.V. *J. Phys. A : Mat .Gen.*26 (1993) 2583.
- [35] Chaichian M. and A.P.Demichev *Phys.Lett .B*320(1994)273.
- [36] Wigner E.P *Phys.Rev .*77(1950)711.
- [37] Green M.S.*Phys.Rev .*90(1953)270.
- [38] Ohnuki Y. and S.Kawefuchi. *J.Math.Phys.*21(1980)601;*Phys.Rev.*170(1968)127
- [39] Ohnuko Y. and Lashiwa T. *Prog .Theor.Phys.*60(1978)584
- [40] Mebarki N.,Belaloui N.and Traikia M.H.*Acta Physika Pol B* 12 (1992) 1230.
- [41] Mebarki N.,Belaloui N.and Traikia M.H*Tr. Phys.* 19 (1995) 1101
- [42] Arnold V. *Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique*. Ed. Mir chap. 10(1976)
- [43] BERRY M.V.*Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase. J. Phys A* 18,15 (1985).

- [44] MESSIAH A . Mecanique qantique .vol.2 Dunod Paris .Chap. 17(1964).
- [45] HANNAY J-H 1985 J. Phys. A: Math. Gen. **18** 221 BERRY M V 1985 J. Phys. A: Math. Gen. **18** 15
- [46] BERRY M V 1984 Proc. R. Soc. A **392** 45
- [47] KEPLER T B, KAGAN M L and EPSTEIN I R 1991 Chaos **1** 455
- [48] LANDSBERG A S 1992 Phys. Rev. Lett. **69** 865
- [49] TODOROV V Yu and DEBROV V 1993 Phys. Rev. **A 50** 878
- [50] USATENKO O V, PROVOST J P and VALLEE G 1996 J. Phys. A: Math. Gen. **29** 2607
- [51] JACKIW R 1988 Int J Mod Phys **A 3** 285
- [52] LANDAU L and LIFCHITZ E Physique Théorique Tome 1 Mécanique ,
- [53] ARNOLD V I 1978 Mathematical Methods in Classical Mechanics, Appendix 7 p.385, Springer-Verlag New York.
- [54] VERHULST F 1990 Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [55] CALDIROLA P 1941 Nuovo Cimento **18** 393
- KANAI E 1948 Prog. Theor. Phys. **3** 440

5.3 ANNEXE I

q -Series

Introduisons avant tous quelques notions sur q -séries, on note pour $|q| < 1$

$$(a)_n \equiv (a : q)_n \equiv (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{n-1})$$

de telle façon que

$$(a)_\infty \equiv (a; q)_\infty \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$$

avec

$$(a)_0 \equiv 1$$

pour le cas particulier $a = q$, on a:

$$(q)_n \equiv (q : q)_n \equiv (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \dots (1 - q^n)$$

Et pour n'importe quel valeur de n réelle, on peut écrire

$$\begin{aligned} (a)_n &= \frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty} = \frac{(1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{n+1}) \dots}{(1 - aq^n)(1 - aq^{n+1}) \dots} \\ &= (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{n-1}) \end{aligned}$$

Le théorème de Cauchy permet d'écrire pour $|t| < 1$ l'égalité suivante

$$\prod_{s=0}^{N-1} \frac{(1 - atq^s)}{(1 - tq^s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n t^n}{(q; q)_n}$$

et du fait on peut montrer que

$$(x; q)_N = \prod_{S=0}^{N-1} (1 - q^S x) = \sum_{S=0}^N (-1)^S \begin{bmatrix} N \\ S \end{bmatrix}_q q^{\frac{S}{2}(S-1)} x^S \quad (5.59)$$

avec

$$\begin{bmatrix} N \\ S \end{bmatrix} = \frac{(q)_N}{(q)_S (q)_{N-S}}$$

qu'est appelé coefficient q -binomiale (et des fois polynomes de Gauss) où

$$[n]_q \equiv [n] := \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{n-1} \quad \text{et} \quad [0] = 0$$

q -Polynomes orthogonaux

Les polynômes de Rogers-Szegö (**RS**) sont définis par:

$$H_n(x; q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (5.60)$$

et satisfait la relation de recurrence à trois termes suivante:

$$H_{n+1}(x; q) = (1 + x) H_n(x; q) - (1 - q^n) x H_{n-1}(x; q)$$

sachant que;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Les quelques premiers polynômes sont données par:

$$\begin{aligned}
H_0(x : q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 = 1 \\
H_1(x : q) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x^0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = 1 + x \\
H_2(x : q) &= 1 + \frac{(1-q)(1-q^2)}{(1-q)(1-q)} x + x^2 = 1 + (1-q)x + x^2
\end{aligned}$$

Bien sûr à la limite;

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$$

et donc

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_n(x : q) = \lim_{q \rightarrow 1} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

les polynômes (**RS**) sont orthogonalisable sur un cercle suivant la fonction de Jacobi prise comme mesure ;

$$I_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} H_m \left(-q^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi}; q \right) H_n \left(-q^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi}; q \right) \vartheta_3(q, \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}$$

avec

$$\vartheta_3(q, \varphi) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} q^{\frac{t^2}{2}} e^{it\varphi}$$

En remplaçant les polynômes (**RS**) par (5.60)

$$I_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^{r+s} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} q^{\frac{r}{2}(r+s)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} q^{\frac{t^2}{2}} e^{it\varphi} \delta_{t, s-r}$$

et qui donne

$$I_{mn} = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n (-1)^{r+s} \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} q^{\frac{r}{2}(r-1)} q^{\frac{s}{2}(s-1)} q^{-rs}$$

ce qui permet d'écrire que si on remplace par 5.59

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_m \left(-q^{-\frac{1}{2}} e; q \right) H_n \left(-q^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi}; q \right) \vartheta_3(q, \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{(q; q)_n}{q^n} \delta_{mn}$$

Pour plus de commodité de normalisation, les polynômes (**RS**) sont souvent connus sous la forme

$$R_n(\varphi : q) = \frac{q^{-\frac{n}{2}}}{[(q : q)_n]^{\frac{1}{2}}} H_n \left(-q^{-\frac{1}{2}} e; q \right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-\mu m^2 - im\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{4\mu} (\varphi - 2\pi n)^2 \right]$$

$$\vartheta_3(q, \varphi) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} q^{\frac{t^2}{2}} e^{-i\varphi t}$$

$$G_n(y) \equiv G_n(y : q) = \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{r(r-n)} y^r$$

5.4 ANNEXE II

Le non-linéaire, près de l'identité, le changement de variable (14) transforme l'équation (13) pour u à l'équation suivante pour la nouvelle variable v :

$$\dot{v} = i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)v + \frac{3i\nu}{4\omega^2}(1 + 2(\delta + \bar{\delta}))v^2\bar{v} - D_1\alpha v^3 - D_2\beta v\bar{v}^2 - D_3\gamma \bar{v}^3 \quad (\text{A.1})$$

où les opérateurs différentiels D_1 , D_2 et D_3 sont tel que

$$D_1\alpha = \dot{\alpha} + 2i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)\alpha - \frac{i\nu}{4\omega^2}(1 + \delta + 3\bar{\delta}) \quad (\text{A.2})$$

$$D_2\beta = \dot{\beta} - 2i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)\beta - \frac{3i\nu}{4\omega^2}(1 + 3\delta + \bar{\delta}) \quad (\text{A.3})$$

$$D_3\gamma = \dot{\gamma} - 4i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)\gamma - \frac{i\nu}{4\omega^2}(1 + 4\delta) \quad (\text{A.4})$$

Pour la solution α de $D_1\alpha = 0$, β solution de $D_2\beta = 0$ et solution γ de $D_3\gamma = 0$ les termes cubiques non-résonants peut être éliminés dans (A.1). Les trois équations différentielles ayant la même structure, il est suffisant d'étudier le comportement de la solution d'une seule d'elles, par exemple α .

Puisque $\delta = \frac{\dot{\lambda} + i\dot{\omega}}{4\omega^2}$, l'équation différentielle pour α s'écrit

$$\dot{\alpha} + 2i\left(\omega - \frac{\dot{\lambda}}{2\omega}\right)\alpha - \frac{i\nu}{4\omega^2}\left(1 + \frac{2\dot{\lambda} - i\dot{\omega}}{2\omega^2}\right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Cette équation qui contient des termes d'ordre zéro et d'ordre un en ce qui concerne le petit paramètre adiabatique ϵ , peut être résolu par une méthode perturbative et sa solution peut être écrite sous la forme d'une expansion en ce qui concerne ϵ . En négligeant les termes d'ordre ϵ en (A.5) (c-à-d toutes les dérivées du temps) on trouve la solution approximative d'ordre zéro $\alpha_0 = \frac{\nu}{8\omega^3}$. En mettant $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ dans (A.5) on obtient une équation pour α_1 qui contient des termes d'ordre un et d'ordre deux en ce qui concerne ϵ .

En négligeant les termes proportionnels à ϵ^2 dans cette équation, on obtient une expression (de ordre ϵ) pour α_1 et ainsi de suite. On vérifie que α , et ainsi aussi que β et γ , sont petits pour la non-linéarité faible et dans l'hypothèse adiabatique (les principaux termes sont proportionnels à ν et ϵ)

Ceci valide les calculs ci dessus qui supposent que la transformation est près à l'identité. Enfin on peut en effet éliminer les termes cubiques non-résonant dans (A.1) qui se réduit à (15).