

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI, CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**N° d'ordre :
N° de Série :**

**THESE :
PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME
DE
DOCTORAT D'ETAT EN PHYSIQUE**

THEME

**THEORIES DE JAUGE AU-DELA DU MODELE STANDARD
ET GEOMETRIE NON-COMMUTATIVE**

SPECIALITE

PHYSIQUE THEORIQUE

PAR

Habib AISSAOUI

Soutenu le

Devant le jury :

Président	L. Chetouani	Prof.	Université Mentouri, Constantine
Rapporteur	N. Mebarki	Prof.	Université Mentouri, Constantine
Examineurs	J. Mimouni	Prof.	Université Mentouri, Constantine
	A. Ladrem	Prof.	ENS Kouba, Alger
	A. Bouldjedri	Prof.	Université de Batna
	T. Boudjedaa	Prof.	Université de Jijel

Remerciements

Il m'est très agréable d'exprimer ici ma gratitude à Nourredine Mebarki, qui a encadré cette thèse et guidé mes premières pas dans la recherche avec beaucoup d'attention et de dynamisme, et je l'en remercie chaleureusement.

Je remercie Prof. Lyazid Chetouani de m'avoir honoré de présider le jury de ma thèse, ainsi qu'aux Profs. Abdelmadjid Ladrem, Abdelhamid Bouldjedri, Tahar Boudjedda et Jamal Mimouni d'avoir accepté la tâche d'examineurs.

Je remercie tout les membres du laboratoire de Physique théorique d'Orsay, France où une partie de cette thèse a été préparée. Je remercie également l'équipe de physique des particules et de hautes énergie de l'université d'Oklahoma, USA pour la collaboration fructueuse.

Je remercie mes collègues du laboratoire de Physique Mathématique et Subatomique de l'atmosphère de travail agréable qui y règne, et je leur en suis reconnaissant.

Enfin, mes proches, Parents et amis, savent combien ce travail leur doit.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Les Cordes Bosonique	8
2.1	Equation du Mouvement de la Corde Bosonique ouverte	10
2.2	Formalisme Covariant de l'Hamiltonien et Quantification	11
3	Compactifications Toroidale Successive de la Corde Bosonique Fermée	16
3.1	Methode N°1 :	18
3.2	Methode N°2 :	20
3.3	Résultats et Conclusions	22
4	Corde Bosonique q-déformée et Dimensions Critiques	28
4.1	L'Algèbre de Virasoro q -déformée	29
4.2	La corde Bosonique ouverte q -déformée	33
4.3	Condition de Couche de Masse	34
5	Baryogénèse via la Léptogénèse	37
5.1	Introduction	37
5.2	Le Modèle Symétrique Gauche-Droite Brief review	43
5.3	Premier Modèle : Leptogénèse dans le Contexte des Modèles Gauche-Droite Symétrique	45
5.4	La Violation de CP et l'Asymétrie Leptonique	51

5.5	Les Equations de Boltzmann	55
5.6	Résultats et discussion	60
5.7	Conclusion	64
5.8	Le Deuxième Modèle : Leptogénèse dans le Contexte du Modèle Standard à quatre Générations	65
5.9	Considérations Préliminaires	67
5.10	Intégration des Equations de Boltzmann	70
5.11	Results et Conclusions	73
5.11.1	Contraintes sur la 4 ^{ème} génération	73
5.11.2	Solutions Numeriques des BE	74

Table des figures

5-1	Paramètre de l'asymétrie CP ε_1 utilisant les résultats analytique (discontinue) et numérique (continue) comme fonction de l'angle θ_{13} de l'oscillation des neutrinos. Les paramètres fixés de notre illustration sont $a_{12} = 1, b = 1, \Delta m_{\odot}^2 = 2.5 \times 10^{-5} eV^2, \Delta m_a^2 = 5.54 \times 10^{-3} eV^2$ et $\{\delta, \alpha\} = \{\pi/4, \pi/4\}$. Notre modèle exige que $ \varepsilon_1 \gtrsim 1.3 \times 10^{-7}$ pour obtenir une asymétrie baryonique acceptable. Ce critère est satisfait seulement dans la région où $0.01 \lesssim \theta_{13} \lesssim 0.07$, cet intervalle n'est pas trop sensible aux variations des autres paramètres fixés.	54
5-2	La désintégration du neutrino droit de Majorana N_1 , et les corrections à une boucle (énergie propre et vertex) qui rentre dans le calcul du paramètre de la violation de CP ε_1	56
5-3	Processus $\Delta L = 1$, échange du Higgs, ces diagrammes font intervenir les quarks (top essentiellement) dans les processus de diffusion.	56
5-4	Processus $\Delta L = 2$, échange des neutrinos lourds de Majorana, ces diagrammes sont aussi appelés "washout".	57
5-5	Différents taux thermiques de réactions moyennes Γ_X contribuant aux BE normalisées par le taux de l'expansion de l'univers $H(z = 1)$. La ligne continue grise représente $H(z)/H(z = 1)$, celle en tiret est pour $\Gamma_{D_1}/H(z = 1)$, la ligne avec des point et des tirets représente les processus $\Gamma_{\Delta L=1}/H(z = 1)$ et la courbe rouge représente $\Gamma_{\Delta L=2}/H(z = 1)$	62

5-6	Evolution de Y_{N_1} (solide blue), $Y_{N_1}^{eq}$ (points-tirets) et l'asymmetrie baryonique η_B (ligne noire continue) en fonction de z dans le modèle. La valeur estimé pour l'asymétrie baryonique est $\eta_B \simeq 6.03 \times 10^{-10}$, avec $Y_{N_1}^{ini} = 0$ et en supposant qu'il n'ya pas d'asymétrie pré-existante $B - L$	63
5-7	Les canaux s et t des diagrammes $\Delta L = 2$ (échange des Neutrinos de Majorana).	73
5-8	Les densités de réactions thermiques Γ_X contribuant aux BE normalisé par le taux d'expansion de l'univers $H(z = 1)$	76
5-9	Abondance Y_{N_1} et l'asymétrie baryonique Y_{B-L} pour le modèle à quatre générations.	76

Chapitre 1

Introduction

Une des plus importantes découvertes scientifiques de la physique théorique de notre siècle qui vise à unifier les quatre interactions observées dans l'univers est sans aucun doute la théorie des cordes.

Pour la première fois dans l'histoire de la physique théorique, une théorie scientifique exceptionnelle est capable de traiter les quatre interactions fondamentales (électromagnétique, faible, forte et gravitation) sur le même pied d'égalité. Cette révolution est un succès sans précédent, elle affecte profondément nos connaissances et les idées que nous avons de l'univers. Tout cela est plus simplement le fruit des derniers développements de la théorie des particules élémentaires connue aussi sous le nom de physique des hautes énergies. La physique des particules élémentaires révèle pour la première fois un rapport étroit entre particules subnucléaires et les forces enterrées dans la matière. On peut distinguer deux nouvelles théories conceptuelles, la Théorie de Grand Unification "GUT" et la Supersymétrie "SUSY", ces deux théories mènent à l'idée que la nature est contrôlée par une superforce unique et que cette superforce a pu créer l'univers et lui a donné la lumière, l'énergie, la matière et la structure.

La recherche d'une superforce pour la construction d'une théorie unifiée des champs était l'idée d'Einstein, bien que seulement la gravitation et l'électromagnétisme aient été alors concernés. Avant Einstein, Maxwell a prouvé que l'électricité et le magnétisme

étaient deux forces intimement liées, et sont décrites par une théorie unifiée des champs connue sous le nom d'électromagnétisme. Le succès de la description de Maxwell peut être vu dans l'impact qu'a eu sur notre société, telle que la radio, le téléphone portable, l'électronique etc..., ces applications sont toutes basées sur la théorie électromagnétique des champs. Après ce succès exceptionnel, les physiciens rêvent du jour où ils arrivent à unifier l'électromagnétisme avec les autres forces. Qui sait quels résultats extraordinaires cette unification peut donner ?

De nos jours, la théorie connue sous le nom de théorie des cordes est l'unique théorie qui soit cohérente, libre d'anomalies et qui peut satisfaire le rêve des physiciens théoriciens. Elle constitue une grande branche de recherche dans la physique théorique, dans laquelle les interactions fortes, faibles, électromagnétiques et la gravité peuvent être unifiées pour la première fois. Ainsi, la théorie des cordes semble être très prometteuse de jouer un rôle important dans la physique d'aujourd'hui.

Le résultat le plus marquant et le plus spectaculaire d'une telle idée est que la gravitation est contenue automatiquement dans cette théorie. En effet, un type de particules qui n'a pas de place dans le spectre des hadrons -(une particule sans masse et de spin 2)- sont présent dans le spectre de masse des cordes. De plus, si on se base sur quelques arguments naïfs, cette théorie des cordes a le comportement d'une théorie superrenormalisable [1].

Il est très important de mentionner que la théorie des cordes a été inventée comme une approche aux interactions fortes [2] mais il s'est avéré qu'elle ne peut pas les décrire de la meilleure façon [3]. En fait, la théorie des cordes obtient son mérite en étant libre d'anomalies, et unifie la théorie de la gravitation à ceux de Yang-Mills. Comme exemple, les théories des cordes supersymétrique appelées supercordes semblent être entièrement libres d'anomalies qui infestent les théories des champs quantiques de la gravitation "*classique*". C'est vraiment une période exceptionnelle d'aventure intellectuelle.

Néanmoins, on peut se poser les questions suivantes : Que signifie la théorie des cordes ? Combien de théories de corde on connaît ? Que peut-on dire de la phénoménologie des cordes ? Et y a-t-il de prévisions qualitativement distinctives mesurables de cette

théorie ?

Cette nouvelle théorie suggère que notre univers est fait de cordes "objets étendus à une dimension" au lieu de particules "objets comme un point ". Alors les entités fondamentales dont est fait notre univers sont les cordes. Pour ce qui concerne la deuxième question, la réponse est qu'il y a seulement cinq théories des cordes qui sont consistantes : les deux formes des supercordes fermés, les cordes ouvertes $SO(32)$ et les deux formes des cordes hétérotiques, actuellement ces cinq théories des cordes semblent être liées par une théorie Mère appelée *M-theory*. Les théories des cordes sont en principe capables de faire beaucoup de "prédictions" (comme le calcul du rapport de masse des quarks et des leptons, les masses des Higgs, les couplages de jauge etc...). Elles peuvent également faire beaucoup de prédictions (telles que les masses des particules supersymétriques, de nouvelles interactions de jauge etc...), pour toutes ces raisons on pense que cela est suffisant pour établir la validité de cette théorie.

Chapitre 2

Les Cordes Bosonique

Avant d'entrer dans les détails de la construction des théories des cordes Bosoniques, rappelons brièvement comment la théorie d'une particule relativiste est formulée.

Dans ce qui suit, nous prenons comme convention $\eta^{00} = -\eta^{ii} = +1$ et $\eta^{ij} = 0$ si $i \neq j$ (η est la métrique de l'espace-temps de Minkowski).

Une particule sans spin se déplace librement sur une trajectoire X^μ . Cette trajectoire peut être paramétrisée avec un paramètre τ , ce dernier nous donne la position dans l'espace-temps de cette particule. La forme de $X^\mu(\tau)$ est obtenue à partir de l'action en appliquant le principe variationnel. Cette action semble être indépendante de la paramétrisation τ et de la covariance de l'espace-temps. Elle est prise proportionnelle à la longueur de la "line-d'univers" de la particule entre la position initiale et finale

$$S[X^\mu] = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [-(dX^\mu/d\tau)(dX^\nu/d\tau)]^{1/2} \quad (2.1)$$

(ici m est identifiée avec la masse de la particule). Cette action est invariante par reparamétrisation [1, 3, 2]. Si nous prenons $X^\mu(\tau)$ comme un ensemble de champs scalaire de $(D - 1)$ dimensions, nous pouvons les coupler avec le champ $g_{\tau\tau}(\tau) = g(\tau)$ a une dimension sur la line-d'univers et ainsi nous pouvons interpréter la théorie obtenu comme une

théorie de la gravitation a une dimension. L'action correspondante devient

$$S[X^\mu, g] = -\frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{g(\tau)} \left[g^{-1}(\tau) \dot{x}^2 - m^2 \right]^{1/2} \quad (2.2)$$

$g(\tau)$ joue le rôle d'un champ auxiliaire qui peut être éliminé par l'équation du mouvement. Dans cette expression, le m^2 joue le rôle de la constante cosmologique. Comme pour la particule ponctuelle, les cordes sont les objets a une dimension ; quand la corde se déplace dans l'espace-temps, elle engendre une "surface-d'univers" par analogie avec la "line-d'univers". Cette surface-d'univers peut être paramétrisée par deux paramètres (τ, σ) . Si nous voulons que la corde ne se propagent pas plus vite que la lumière, nous devons considérer dans chaque point de la surface-d'univers l'existence de vecteur tangent de genre temps et espace :

$$\eta_{\mu\nu} (dX^\mu/d\tau + \lambda dX^\mu/d\sigma)(dX^\nu/d\tau + \lambda dX^\nu/d\sigma) \leq 0 \quad (2.3)$$

(c-à-d il prend des valeurs négatives et positives quand λ change). La condition nécessaire et suffisante de ceci est

$$\left[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 \right] \geq 0 \quad (2.4)$$

où nous avons défini

$$\dot{x} = \partial x^\mu / \partial \tau \quad \text{et} \quad x' = \partial x^\mu / \partial \sigma \quad (2.5)$$

Comme pour les particules ponctuelle, Nambu suggère que l'action d'une corde relativiste libre soit proportionnelle à la surface engendrée par la surface-d'univers entre la configuration initiale $x^\mu(\sigma, \tau_i)$ et finale $x^\mu(\sigma, \tau_f)$ de la corde

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 \right]^{1/2} \quad (2.6)$$

où α' a la dimension d'une [longueur]² et correspond à la pente de la trajectoire de Regge (pour la corde ouverte). On peut montrer aussi que cette action est invariante sous

la reparamétrisation de la surface-d'univers [1, 3, 2].

2.1 Equation du Mouvement de la Corde Bosonique ouverte

Il a été établi que l'action de la corde bosonique est donnée par

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma L \quad (2.7)$$

$$L = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \left[(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

sous une petite variation $x^\mu + \delta x^\mu$ avec $\delta x^\mu(\sigma, \tau_i) = \delta x^\mu(\sigma, \tau_f)$ l'action devient

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \partial\tau \delta x^\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right) \partial\sigma \delta x^\mu \right\} \\ &= \int_0^\pi d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right) \delta x^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \\ &\quad - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\partial\tau \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \partial\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right) \right] \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.9)$$

où le premier terme s'annule quand la position initiale et finale de la corde sont prises fixes. On peut imposer les conditions aux bords comme suit

$$\frac{\partial L}{\partial x'^\mu}(\sigma = 0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial x'^\mu}(\sigma = \pi, \tau) \quad (2.10)$$

le dernier terme dans cette équation nous donne l'équation du mouvement qui est également égal à zéro

$$\partial\tau \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \partial\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x'^\mu} \right) = 0 \quad (2.11)$$

la solution générale covariante d'une telle équation et qui satisfait les conditions aux bords est donnée par [1, 3, 2]

$$x_\mu(\sigma, \tau) = q_0^\mu + 2\alpha' p_0^\mu \tau - i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \frac{a_n^{*\mu}(0) \exp(in\tau) - a_n^\mu(0) \exp(-in\tau)}{n^{1/2}} \cos n\sigma \quad (2.12)$$

si on pose

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2\alpha' p_0^\mu \\ \alpha_n^\mu &= (2\alpha')^{1/2} n^{1/2} a_n^\mu \\ \alpha_{-n} &= \alpha_n^* \end{aligned} \quad (2.13)$$

on peut réécrire l'équation (2.12) comme suit

$$x_\mu(\sigma, \tau) = q_0^\mu + \alpha_0^\mu \tau - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \alpha_n^\mu \exp(-in\tau) \cos n\sigma \quad (2.14)$$

dans ce qui suit, nous définissons les équations de contraintes comme

$$L_n = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \alpha_{n-m} \alpha_m = 0 \quad (2.15)$$

Notons en particulier que la contrainte $L_0 = 0$ nous donne l'état de mass-shell

$$M^2 = p^2 = -\frac{i}{2\alpha'} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} n a_n^{*\mu} a_n^\mu \quad (2.16)$$

2.2 Formalisme Covariant de l'Hamiltonien et Quantification

Considérons le lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i)$, ici q_i et \dot{q}_i sont respectivement les coordonnées généralisées et leurs dérivés par rapport au temps. On suppose que ce lagrangien est

implémenté par un ensemble de contraintes algébriques entre les q_i et les p_i dénotés par

$$\Phi_\alpha(q_i, p_i) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, M \quad (2.17)$$

(p_i sont les conjugués canoniques des q_i). On suppose aussi que les contraintes Φ_α et le Hamiltonien canonique

$$H_0 = \sum_i p_i q_i - L \quad (2.18)$$

forme une algèbre fermée par les crochets de Poisson

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = \sum c_{\alpha\beta\gamma} \Phi_\gamma \quad (2.19)$$

et

$$\{H_0, \Phi_\alpha\} = \sum c_{\alpha\beta} \Phi_\beta \quad (2.20)$$

Dirac a montré que le Hamiltonien du système tenant compte des contraintes est donné par

$$H = H_0 + \sum_n v_n \Phi_n(q_i, p_i) \quad (2.21)$$

ici v_n sont des facteurs appelés les multiplicatives de Lagrange (indépendant de p_i et de q_i).

Maintenant, n'importe quelle quantité physique f doit vérifier l'équation suivante d'évolution [4]

$$\begin{aligned} \dot{f}(p, q) &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \\ \{f, \Phi_n\} &= \sum_n d_{n\beta} \Phi_\beta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous supposons que les crochets canoniques de Poisson sont données par

$$\begin{aligned}
\{x^\mu(\sigma), x^\nu(\sigma')\} &= 0 \\
\{p^\mu(\sigma), p^\nu(\sigma')\} &= 0 \\
\{x^\mu(\sigma), p^\nu(\sigma')\} &= -g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma')
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Les contraintes peuvent être exprimées en représentation intégrale comme suit

$$L_n = -\frac{1}{2} \oint \frac{dy}{2i\pi y} y^n : P(y)^2 := 0 \tag{2.24}$$

en générale on dénote par L_f la quantité

$$L_f = -\frac{1}{2} \oint \frac{dy}{2i\pi y} f(y) : P(y)^2 := 0 \tag{2.25}$$

où $:$ signifie le produit normal chronologique et

$$P(z) = (\dot{x} + x')(\sigma, \tau) \quad \text{pour } z = \exp[i(\sigma + \tau)] \tag{2.26}$$

notons que

$$P_\mu(x)P_\nu(x) =: P_\mu(x)P_\nu(x) : -g_{\mu\nu} \frac{xy}{x-y} \quad \text{si } |x| > |y| \tag{2.27}$$

La quantification se fera de la manière usuelle, c.-a-d. on doit substituer les crochets de Poisson $\{, \}$ par $[,]$ ($[,]$ signifie le commutateur). Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
[L_f, L_g] &= \frac{1}{4} \oint_{\Gamma_1} \frac{dx}{2i\pi x} \frac{dy}{2i\pi y} f(x)g(y) : P(x)^2 :: P(y)^2 : \\
&\quad - \oint_{\Gamma_1} \frac{dx}{2i\pi x} \frac{dy}{2i\pi y} f(x)g(y) : P(y)^2 :: P(x)^2 :
\end{aligned} \tag{2.28}$$

où

$$\Gamma_1 = |x| > |y| \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = |x| < |y| \tag{2.29}$$

avec deux contraction du type : $P(x)P(x) :: P(y)P(y) : .$ Notons qu'en simplifiant le produit normal (on employant le théorème de Wick) on a

$$: P(x)P(x) :: P(y)P(y) := g_{\mu\nu} \frac{xy}{(x-y)^2} g^{\mu\nu} \frac{xy}{(x-y)^2} = D \frac{x^2 y^2}{(x-y)^4} \quad (2.30)$$

où D est la dimension de l'espace-temps.

Maintenant, si nous mettons $f(x) = -x^n$ et $g(x) = -y^m$, nous obtenons l'algèbre bien connu de Virasoro [2, 5]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12}n(n^2-1)\delta_{m,n} \quad (2.31)$$

Pour les états physiques $|\Psi\rangle$ on a la contrainte

$$L_n |\Psi\rangle = 0 \quad (2.32)$$

il est à noter qu'en raison des ambiguïtés du produit normal de l'équation (2.31) on a

$$\begin{aligned} L_n - \alpha(0)\delta_{n,0} |\Psi_2\rangle &= 0 & \text{pour } n \geq 0 & \text{seulement} \\ \langle \Psi_1 | L_{-n} - \alpha(0)\delta_{n,0} &= 0 & \text{pour } n \geq 0 & \text{seulement} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\alpha(0)$ est un c -nombre.

En raison de la métrique indéfini, les solutions de ces équations peuvent ne pas être physique et l'espace de Hilbert relatif par conséquent peut contenir des états de norme négatifs "*les fontômes*". On montre que ce problème est résolu si nous prenons [1, 3, 2, 5] (voir la démonstration du Thérème de non fontômes)

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 1 & \text{si } D &= 26 \\ \alpha(0) &\leq 1 & \text{si } D &\leq 26. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les $(D-4)$ extra-dimensions de l'espace-temps où la corde bosonique vie constituent

un espace compact de rayon très petit pour être vu. La connexion entre le monde réel à 4-dim se fait par le biais d'une méthode appelée compactification. La phénoménologie derrière cette méthode est loin d'être unique mais reste très riche et mérite d'être étudiée en profondeur. Ce qui constitue la matière du prochain chapitre.

Chapitre 3

Compactifications Toroidale

Successive de la Corde Bosonique

Fermée

On rappelle que l'action de Nambu-Goto de la corde bosonique fermée est donnée par [6], [7]

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau g\sigma \left((\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 \right) \quad (3.1)$$

avec

$$x^\mu(\sigma + \pi, \tau) = x^\mu(\sigma, \tau) \quad (3.2)$$

La solution générale de l'équation du mouvement (dans la jauge orthonormale)

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0 \quad (3.3)$$

et qui vérifiée les conditions aux limites (3.2) est donnée par

$$x_\mu(\sigma, \tau) = q^\mu + \alpha' p^\mu + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} [\alpha_n^\mu \exp -2in(\tau - \sigma) - \tilde{\alpha}_n^\mu \exp -2in(\tau + \sigma)] \quad (3.4)$$

où q^μ et p^μ sont respectivement la coordonnée du centre de masse et l'impulsion.

Après quantification, la dimension critique est fixé à $D = 26$ et les états physique $|\psi\rangle_{phys}$ obéissent aux conditions de Virasoro

$$\begin{aligned} L_n = \tilde{L}_n |\psi\rangle_{phy} &= 0 \quad n \geq 1 \\ (L_0 - \tilde{L}_0) |\psi\rangle_{phy} &= 0 \\ (L_0 + \tilde{L}_0 - \alpha(0)) |\psi\rangle_{phy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où les générateurs de Virasoro sont données par

$$\begin{aligned} L_n &= -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{m\mu} \\ \tilde{L}_n &= -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{n-m}^\mu \tilde{\alpha}_{m\mu} \end{aligned} \quad (3.6)$$

pour avoir le spectre de masse on applique l'opérateur de masse M^2 suivant

$$M^2 = 4 \left[N + \tilde{N} - \alpha(0) \right] \quad (3.7)$$

sur l'état physique $|\psi\rangle_{phy}$ (on prend $\frac{1}{2\alpha'} = 1$) avec

$$N |\psi\rangle_{phy} = \tilde{N} |\psi\rangle_{phy}, \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}^\mu \alpha_{m\mu} \\ \tilde{N} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{n-m}^\mu \tilde{\alpha}_{m\mu} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Notre programme de compactification est le suivant : on démarre de la dimension

critique $D = 26$ et puis on fait des sauts successives des dimensions supplémentaires à compactifier sur un tore.

On rappelle qu'un tore de r -dimensions T^r est défini comme l'ensemble R/Γ où Γ est un réseau de r -dimensions produit par la base $\{\vec{e}_\alpha, \alpha = \overline{1, r}\}$. On peut également définir le réseau dual Γ^* comme suit

$$\Gamma^* = \{\vec{\beta} \in R^r / \forall \vec{\gamma} \in \Gamma, \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \text{ est un entier}\} \quad (3.10)$$

avec une base duale $\{\vec{e}_\alpha^*, \alpha = \overline{1, r}\}$ telle que

$$\vec{e}_\alpha^* \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

3.1 Methode N°1 :

La première méthode consiste à prendre les modes gauches et droites comme mélangés. Ainsi, les coordonnées compactifiées x peuvent être écrites comme :

$$x^i(\sigma, \tau) = q^i + \alpha' p^i + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} [\alpha_n^i \exp -2in(\tau - \sigma) - \tilde{\alpha}_n^i \exp -2in(\tau + \sigma)] \quad (3.12)$$

Pour les coordonnées compactifiées $x^I (I = \overline{1, r})$ sur un tore de r -dimensions, on doit identifier les points sous une translation par $2\pi R_\alpha$ dans la direction de \vec{e}_α . Ainsi

$$x^I = x^I + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=0}^r n_\alpha \cdot R_\alpha \cdot e_\alpha \quad n \in \mathbf{Z} \quad (3.13)$$

où r (resp. R_α) est la dimension du tore (resp. rayon dans la direction α) et donc on peut écrire :

$$x^I(\sigma, \tau) = q^I + \alpha' p^I + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n} [\alpha_n^I \exp -2in(\tau - \sigma) - \tilde{\alpha}_n^I \exp -2in(\tau + \sigma)] \quad (3.14)$$

avec

$$p^I = \sum_{\alpha=1}^r \frac{m_\alpha}{R_\alpha} \frac{e_\alpha^{*I}}{\|e_\alpha^*\|} \quad m \in \mathbf{Z} \quad (3.15)$$

le l est le nombre d'enroulement "*winding-number*", donné par

$$l^I = \sum_{\beta=1}^r m_\beta R_\beta \frac{e_\beta^{*I}}{\|e_\beta^*\|} \quad (3.16)$$

maintenant, après n compactifications, l'opérateur de masse M prend la forme

$$M^2 = 4 \left[N + \tilde{N} - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \left(\frac{(p^I)^2}{4} + l^{I2} \right) \right] \quad (3.17)$$

(ici r_k est la dimension du r_k -ième tore ($\sum_{p=1}^n r_p = 22$)). Avec

$$N |\psi\rangle_{phy} = (\tilde{N} + \sum_{k=1}^r \sum_{I=1}^{r_k} l^I p^I) |\psi\rangle_{phy} \quad (3.18)$$

où

$$N = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^r \sum_{I=1}^{r_k} (\alpha_{n-m}^i \alpha_m^i + \alpha_{n-m}^I \alpha_m^I) \quad (3.19)$$

$$\tilde{N} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^r \sum_{I=1}^{r_k} (\tilde{\alpha}_{n-m}^i \tilde{\alpha}_m^i + \tilde{\alpha}_{n-m}^I \tilde{\alpha}_m^I) \quad (3.20)$$

le réseau self-dual et la base orthonormale, eqs.(4.15) et (4.16) deviennent,

$$M^2 = (N + \tilde{N} - 2) + \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \left(\frac{m_\alpha^2}{R_\alpha^2} + 4n_\alpha^2 R_\alpha^2 \right) \quad (3.21)$$

$$N |\psi\rangle_{phys} = \left(\tilde{N} + \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} n_\alpha m_\alpha \right) |\psi\rangle_{phys}$$

Il faut noter qu'on peut caractériser les états physique $|\psi\rangle_{phys}$ par les nombres quan-

tiques n_α et m_α . Maintenant, il est facile de montrer, que pour $R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\forall \alpha = \overline{1, r_p}; p = \overline{1, n})$, le nombre des états physiques sans masse et les nombres quantiques n_α et m_α sont respectivement donnés par (voir l'ANNEXE A)

$$\Omega = 4 \sum_{p=1}^n (r_p^2 + 11) \quad (3.22)$$

et

$$\Sigma = 2 \sum_{p=1}^n r_p = 44 \quad (3.23)$$

Cependant, pour au moins un $R_\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le nombre d'états sans masse vectoriel physiques devient 44.

3.2 Methode N°2 :

Dans cette méthode les modes gauches et droites de la corde fermée $x^I(\sigma - \tau)$ et $x^I(\sigma + \tau)$ respectivement sont traités indépendamment. Dans ce cas, les coordonnées compactifiées peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} x^I(\sigma - \tau) &= q^I + p^I(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \exp -2in(\tau - \sigma) \\ x^I(\sigma + \tau) &= \tilde{q}^I + \tilde{p}^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I \exp -2in(\tau + \sigma) \end{aligned}$$

où les moments du centre de masse de la corde p^I et \tilde{p}^I sont donnés dans le réseau dual Γ^* par

$$\begin{aligned} p^I &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{m_\alpha}{R_\alpha} \frac{e_\alpha^{I*}}{\|e_\alpha^*\|} \\ \tilde{p}^I &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{\tilde{m}_\alpha}{R_\alpha} \frac{e_\alpha^{I*}}{\|e_\alpha^*\|} \end{aligned} \quad (m_\alpha \tilde{m}_\alpha \in Z) \quad (3.24)$$

On note que dans ce cas, les nombres d'enroulement ℓ^I et $\tilde{\ell}^I$ sont liés aux moments p^I et \tilde{p}^I par les relations

$$\begin{aligned}\ell^I &= -\frac{1}{2}p^I \\ \tilde{\ell}^I &= \frac{1}{2}\tilde{p}^I\end{aligned}\tag{3.25}$$

Ceci signifie que le réseau Γ et son dual Γ^* ont une intersection non nulle. Maintenant, l'état de masse de couche (3.17) mène à la relation

$$M^2 = -p^{i2} = 2(N + \tilde{N} - 4) + \sum_{k=1}^n \sum_{\beta,\alpha=1}^{r_k} \left[\frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} (m_\alpha m_\beta + \tilde{m}_\alpha \tilde{m}_\beta) \right]\tag{3.26}$$

où $g_{\alpha\beta}^*$ est la métrique du réseau dual. De plus, la condition de Virasoro (3.18) implique que :

$$\left(N + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{\beta,\alpha=1}^{r_k} \frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} m_\alpha m_\beta \right) |\psi\rangle_{phys} = \left(\tilde{N} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{\beta,\alpha=1}^{r_k} \frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} \tilde{m}_\alpha \tilde{m}_\beta \right) |\psi\rangle_{phys}\tag{3.27}$$

Il est important de mentionner que si $R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, les états vectoriels sans masse appartiennent à la représentation adjointe du produit tensoriel $G \otimes G$, où G , est un groupe de Lie simple de rang $r = 22$ et avec la matrice de Cartan $g_{\alpha\beta}$. Maintenant, si le réseau Γ est pair et entier c.-à-d

$$\begin{aligned}\forall \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \Gamma &\longrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \quad \text{est un entier.} \\ \forall \vec{\gamma} \in \Gamma &\longrightarrow \vec{\gamma}^2 \quad \text{est entier et pair.}\end{aligned}$$

les moments p^I et \tilde{p}^I sont identifiés avec les vecteurs poids du groupe de Lie G . Maintenant, si nous caractérisons les états physiques vectoriels par les nombres quantiques m_α et \tilde{m}_α , nous pouvons prouver que pour $R_\alpha^2 = R^2 =$ un nombre entier ou demi-entier, le nombre Ω de ces états indépendants est [voir l'ANNEXE B]

$$\Omega_2 = 44 + \sum_{p=1}^n \frac{2^{s_{p+1}}}{(r_{p-1} - s_p)! Q_1! Q_2! \dots Q_{t_p}!}\tag{3.28}$$

(n est le nombre de compactifications successives) où pour la $p^{ième}$ compactification ; r_p , S_p et Q_{t_p} sont la dimension de l'espace compactifié, le nombre des nombres quantiques non nuls (m_α et n_α) et la dégénérescence du $t_p^{ième}$ nombre quantique respectivement. Cependant, si au moins un R n'est pas un nombre entier ou demi-entier, le nombre, d'états physiques devient $\Omega'_2 = 44$.

3.3 Résultats et Conclusions

Pour avoir une idée et rendre nos résultats transparents, nous avons considéré des compactifications sur des tores de dimension pair. Les tableaux 1 et 2 montrent les divers types des compactifications et le rang et l'ordre des groupes de Lie résultants avec les deux méthodes 1 et 2 avec $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 respectivement. Il est important de noter que les résultats dépendent de :

a) Le choix de la méthode :

En effet, il est clair des tableaux 1 et 2 que pour le même type de compactification, les groupes de Lie résultants obtenus avec la première méthode sont totalement différent de la seconde méthode. Par exemple, une compactification sur T^{22} donne avec la première méthode les groupes Lie suivants : $SO(5) \otimes SO(60) \otimes U(12)$; $SO(58) \otimes SO(22) \otimes U(4)$; $SO(14) \otimes SO(14) \otimes SO(61)$; $SO(56) \otimes SO(5) \otimes SO(29)$; $SO(63) \otimes U(8) \otimes U(5)$; $SO(44) \otimes SO(44)$; $SO(58) \otimes SO(16) \otimes E7$. Cependant, avec la seconde méthode on a : $SO(51) \otimes SO(36) \otimes U(1)$; $SO(36) \otimes SO(3) \otimes SO(51)$; $SO(45) \otimes SO(45)$. Un deuxième exemple, la compactifications successives sur 10 tores $T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$ ne donne pas de solution pour la première méthode et : $SO(11) \otimes SO(58) \otimes U(12)$; $SO(47) \otimes SO(40) \otimes U(1)$; $SO(57) \otimes SO(24) \otimes U(4)$; $SO(59) \otimes SU(3) \otimes SO(14)$; $SO(3) \otimes SO(37) \otimes SO(51)$; $SO(58) \otimes SO(11) \otimes U(5)$; $SO(48) \otimes SO(36) \otimes G2$; $SO(58) \otimes SU(5) \otimes U(11)$ pour la deuxième.

b) Le type et le nombre de compactifications :

Chaque type et nombre de compactifications successives donne différents résultats . En

fait, le type $T^2 \otimes T^{20}$ (par exemple) mène aux groupes de Lie suivants : $SO(12) \otimes SO(28) \otimes SO(48)$; $SO(38) \otimes SO(42) \otimes U(4)$; $SO(8) \otimes SO(33) \otimes SO(49)$; $SO(55) \otimes U(2) \otimes U(15)$; $SO(48) \otimes SO(28) \otimes E_6$; $SO(48) \otimes SO(26) \otimes E_7$; Cependant, le type $T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$ donne $SO(20) \otimes U(15) \otimes U(19)$; $SO(13) \otimes U(17) \otimes U(21)$; $SO(25) \otimes U(14) \otimes U(18)$.

c) Rayon du Tore :

Les résultats des compactifications successives dépendent fortement du choix du rayon des tores compactifiés. Par exemple la première méthode donne pour $R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\forall \alpha = \overline{1, r}; k = \overline{1, n})$, un nombre d'états physiques vectoriel égale à $44 + 2 \sum_{k=1}^n r_k^2$ qui peut former la représentation irréductible d'un groupe de Lie. Cependant, pour au moins $R \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce nombre est réduit à 44 et mène à de différentes solutions des groupes de Lie.

TABLE CAPTION

TABLEAU 1. présente le rang et l'ordre des groupes de Lie pour divers types de compactifications sur des tores en utilisant de la première méthode et $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

TABLEAU 2. la mêmes chose que le tableau 1 mais en utilisant de la deuxièmes méthode et $R = 1$.

Tableau 1 :

Type of compactification	rank	order			
T^{22}	44	234212			
$T^2 \otimes T^{20}$	44	174882			
$T^4 \otimes T^{18}$	44	223644			
$T^6 \otimes T^{16}$	44	123868			
$T^8 \otimes T^{14}$	44	42172			
$T^{10} \otimes T^{12}$	44	29116			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^{18}$	44	115046			
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^{16}$	44	79758	$T^4 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	7732
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^{14}$	44	47806	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{14}$	44	64602
$T^2 \otimes T^8 \otimes T^{12}$	44	29630	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	38898
$T^2 \otimes T^{10} \otimes T^{10}$	44	23742	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	23898
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	46998	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	19074
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	23254	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	21706
$T^4 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	15254	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	13970
$T^6 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	15126	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	11066
$T^6 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	12758	$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	12530
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	29408	$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	9674
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	12512	$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	8250
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	12832			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{16}$	44	89110			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	54640			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	32112			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	21400			
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	11698			
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	16820			
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	11124			

$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{12}$	44	45424
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	26866
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	18034
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	24612
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	12916
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	15990
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	9464
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{10}$	44	30662
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	18590
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	12598
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	10510
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8$	44	25910
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	19616
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	16458
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6$	44	23976
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	21848
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$	44	28530
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$	44	36180

Tableau 2 :

Type of compactification	rank	order			
T^{22}	44	9624428			
$T^2 \otimes T^{20}$	44	6168104			
$T^4 \otimes T^{18}$	44	6154058			
$T^6 \otimes T^{16}$	44	1405082			
$T^8 \otimes T^{14}$	44	568380			
$T^{10} \otimes T^{12}$	44	243836			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^{18}$	44	3841396	$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	156310
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^{16}$	44	1821254	$T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	60072
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^{14}$	44	656222	$T^4 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	37170
$T^2 \otimes T^8 \otimes T^{12}$	44	317942	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{14}$	44	1356836
$T^2 \otimes T^{10} \otimes T^{10}$	44	189190	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	572866
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	782618	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	228514
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	305290	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	134170
$T^4 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	122554	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	224942
$T^6 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	111282	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	93598
$T^6 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	127674	$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	51502
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	425734	$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	84654
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	161392			
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	91560			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{16}$	44	1283546			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	1041106			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	426592			
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	186860			
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	66458			

$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	48470
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	38934
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{12}$	44	790064
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	313838
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	170800
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	153804
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	76606
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	62226
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	49194
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{10}$	44	430974
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	178496
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	89848
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	68048
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8$	44	253958
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	130820
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	97954
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6$	44	187536
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	141310
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$	44	198350
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$	44	277918

Chapitre 4

Corde Bosonique q -déformée et Dimensions Critiques

L'algèbre de Virasoro fournit un cadre extrêmement puissant pour unifier les concepts de la symétrie et de la localité et elle est la version infinitésimale de certains groupes dimensionnels infinis. L'algèbre de Virasoro surgit comme algèbre du groupe conforme dans un ou deux dimensions. Les générateurs L_n ($n \in \mathbf{Z}$, l'ensemble des nombres entiers), et l'élément central c , tel que $[L_n, c] = 0$, sont reliés par

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{D}{12}cn(n^2 - 1)\delta_{m,n} \quad m, n \in \mathbf{Z}. \quad (4.1)$$

classiquement $c = 0$, mais il joue un rôle crucial dans n'importe quelle application de mécanique quantique. Pour la représentation unitaire c.-à-d., ceux satisfaisant la condition d'hermiticité $L_n^\dagger = L_{-n}$ et si une telle représentation est irréductible, c devrait prendre une valeur constante, dans ce cas on peut le prendre réel.

L'algèbre de Virasoro a été intensivement employée dans le contexte des théories des cordes. En fait, elle est approprié dans n'importe quelle théorie dans l'espace-temps à deux dimensions qui possède une invariance conforme. Le but de cette parti est d'étudier l'algèbre q -déformée de Virasoro dans le contexte de la théorie des cordes, l'application

de ces nouvelles idées mathématiques à la théorie de cordes pour dériver de nouvelles dimensions critiques de l'espace-temps, qui peuvent avoir des implications phénoménologiques intéressantes, montrer qu'on peut résoudre le problème de la compactification duquel les théories des cordes souffrent sans recours à la méthode de compactification.

4.1 L'Algèbre de Virasoro q -déformée

Les groupes Quantiques sont apparus dans l'élaboration des méthodes quantiques inverses, appelée aussi système intégrable, et dans l'étude des équations de Yang-Baxter [17]. On a également constaté que les groupes quantiques ont des applications importantes dans les théories de jauge quantiques et des champs conforme [18, 19]. Elles ont émergé comme une structures d'algèbre la plus fondamentale et qui pourrait être décrites par une classe générale d'algèbres associatives et Co-commutatives appelé algèbres de Hopf [20, 22]. La Co-commutativité peut être réalisée par l'introduction d'un paramètre libre q qu'on appelle habituellement le paramètre de déformation [23, 24].

D'autres part, la solution des équations du mouvement d'une corde bosonique ouverte mène à l'apparition de quelques contraintes qui sont exprimées en termes d'un ensemble infini de conditions d'initiales [25, 27]. Dans la jauge du cône de lumière on a :

$$L_n = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i = 0 \quad i = 1, 2 \dots D - 2 \quad (4.2)$$

Après la procédure de quantification, les contraintes L_n deviennent des operateurs appliqués sur les états physiques $|\psi\rangle_{phy}$ tels que

$$\begin{aligned} L_n |\psi\rangle_{phy} &= 0 \quad n \geq 0 \\ (L_0 - \alpha(0)) |\psi\rangle_{phy} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

($\alpha(0) = 1$ ou 2 pour les cordes ouvertes ou fermées respectivement) et sont définis par

$$L_n = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : \quad (4.4)$$

où ":" signifie le produit normal chronologique. Les générateurs L_n constituent l'algèbre fermée (4.1). Dans cette partie du chapitre, nous dérivons une algèbre modifiée de Virasoro basée sur la déformation des relations de commutations entre les diverses variables dynamiques.

Considérons les variables dynamiques de la corde bosonique ouverte dans la jauge du cône de lumière $q^i, p^i, q^-, p^+, a^i, a^{+i}$ [26]. Après quantification ordinaire on a les relations de commutation non nulles suivantes

$$\begin{aligned} [q^i, p^j] &= i\delta^{ij} \\ [q^-, p^+] &= -i \\ [a_n^{+i}, a_m^i] &= -\delta_{nm}\delta^{ij} \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_0^i &= 2\alpha' p^i, \\ \alpha_n^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^i \\ \alpha_{-n}^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^{+i} \end{aligned}$$

L'analogie q -déformée des équations (4.5) sont données par [24]

$$\begin{aligned} [q^i, p^j]_q &= i\delta^{ij} \\ [q^-, p^+]_q &= -i \\ [a_n^{+i}, a_m^i]_q &= -\delta_{nm}\delta^{ij} \end{aligned} \quad (4.6)$$

où

$$\begin{aligned}
[a_n^{+i}, a_m^j]_q &\equiv a_n^{+j} a_m^i - [\delta_{j'}^j \delta_{i'}^i + (q-1)\delta_{n,m} \Lambda_{i'j'}^{ij}] a_m^{j'} a_n^{+i'} \\
[q^-, p^+]_q &\equiv q^- p^+ - q p^+ q^- \\
[q^i, p^j]_q &\equiv q^i p^j - q p^j q^i
\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec

$$\Lambda_{i'j'}^{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i' = j' \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{4.8}$$

Pour ce qui concerne les générateurs L_n , on doit définir tout d'abord un produit normal q -déformé $: :_q$ comme suit

$$\begin{aligned}
: a_n^i a_m^{+j} :_q &\equiv a_m^{+j} a_n^i + (q-1)\delta_{n,m} \Lambda_{i'j'}^{ij} a_m^{j'} a_n^{+i'} \\
: a_m^{+j} a_n^i :_q &\equiv a_m^{+j} a_n^i
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi on peut récrire l'expression (4.4) comme

$$L_n^q = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m} \alpha_m :_q \tag{4.10}$$

Maintenant, l'évaluation de l'algèbre q -déformée $[L_n, L_m]_{q_{n,m}}$ qui est défini comme

$$[L_n^q, L_m^q]_{q_{n,m}} = L_n^{q_{n,m}} L_m^{q_{n,m}} - \Delta_{n,m}^q L_m^{q_{n,m}} L_n^{q_{n,m}} \tag{4.11}$$

où

$$\Delta_{n,m}^q = q + \delta_{n,m}(1-q) \tag{4.12}$$

et

$$L_n^{q_{n,m}} \equiv -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-l}^i \alpha_l^i :_{q_{n,m}} \tag{4.13}$$

avec

$$: \alpha_{n-l}^i \alpha_l^i :_{q_{n,m}} = q^{-\delta_{n,m} \delta_{n-l,l}} : \alpha_{n-l}^i \alpha_l^i :_q \quad (4.14)$$

et l'utilisation de la relation de commutation q -déformée (4.6) donne pour $q \neq -1$

$$[L_n^q, L_m^q]_{q_{n,m}} = (n-m)L_{n+m}^q \quad \text{pour } n \neq -m, \quad n \neq 0, \quad m \neq 0, \quad (4.15)$$

$$[L_n^q, L_{-n}^q]_{q_{n,-n}} = \frac{n}{1+q} \left((5-q)L_0^q - (q-1)L_0^{-q-2} \right) + \frac{D-2}{12} n(n^2-1) \quad \text{pour } n \neq 0, \quad (4.16)$$

$$[L_0^q, L_{-n}^q]_{q_{n,0}} = -\frac{1}{2} n(1+q)L_n^q \quad (4.17)$$

et

$$[L_m^{q'}, L_n^q] = 0 \quad \text{for } q \neq q'. \quad (4.18)$$

Les expressions (4.15)-(4.17) peuvent être écrites sous une forme compacte

$$[L_m^{q'}, L_n^q]_{q_{n,m}} = (n-m)L_{n+m}^q + c_{nm} \quad (4.19)$$

où

$$c_{nm} = \delta_{0,m} \frac{1-q}{2} n L_n^q + \delta_{m,-n} \left\{ m \frac{1-q}{1+q} (2L_0^q - L_0^{-q-2}) + \frac{D-2}{12} m(m^2-1) \right\}. \quad (4.20)$$

Notez que pour $q = 1$, l'éq. (4.19) se réduit à l'éq. (4.1). De plus, l'expression (4.19) contient un terme d'anomalie c_{nm} qui n'est pas un c -nombre.

Dans cette partie, nous avons dérivé une algèbre modifiée de Virasoro dans le cadre de la théorie de déformation caractérisée par un paramètre d'ordre q . Il a été montré que le terme d'anomalie et contrairement au cas ordinaire (voir l'éq.(4.20).) n'est pas un c -nombre. De plus, et pour un paramètre de déformation $q = 1$ l'algèbre q -déformée de Virasoro est mal définie.

4.2 La corde Bosonique ouverte q -déformée

Après une q -déformation, les expressions des opérateurs de masse sont données par

a)- La corde bosonique ouverte

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i :_q \quad (4.21)$$

b)- La corde bosonique fermée

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} [: \alpha_{-n}^i \alpha_n^i :_q + : \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i :_q] \quad (4.22)$$

(ici $: :_q$ dénote le produit normal chronologique), où

$$\begin{aligned} \alpha_0^i &= 2\alpha' p^i, \\ \alpha_n^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^i \\ \alpha_{-n}^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^{+i} \\ \tilde{\alpha}_n^i &= \sqrt{2\alpha' n} \tilde{a}_n^i \\ \tilde{\alpha}_{-n}^i &= \sqrt{2\alpha' n} \tilde{a}_n^{+i} \quad n > 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Notez que, dans ce cas, les variables dynamiques de la corde q^i , p^i , q^- , p^+ , a^i , a^{+i} , \tilde{a}_n^i , \tilde{a}_n^{+i} satisfont aux relations de commutations non nulles q -déformée suivantes

$$\begin{aligned} [q^i, p^j]_q &= i\delta^{ij} \\ [q^-, p^+]_q &= -i \\ [a_n^{+i}, a_m^i]_q &= -\delta_{nm}\delta^{ij} \\ [\tilde{a}_n^{+i}, \tilde{a}_m^i]_q &= -\delta_{nm}\delta^{ij} \quad n > m. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le produit normal q -déformé dans les équations. (4.21) et (4.22) et des relations de commutation des équations (4.24) sont définis comme

$$: a_n^i a_m^{+j} :_q \equiv a_m^{+j} a_n^i + (q-1) \delta_{n,m} \Lambda_{i'j'}^{ij} a_m^{j'} a_n^{+i'} \quad (4.25)$$

$$[a_n^{+i}, a_m^j]_q \equiv a_n^{+j} a_m^i - [\delta_{j'}^j \delta_{i'}^i + (q-1) \delta_{n,m} \Lambda_{i'j'}^{ij}] a_m^{j'} a_n^{+i'} \quad (4.26)$$

où

$$\Lambda_{i'j'}^{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i' = j' \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.27)$$

Notant qu'on a de semblable définitions pour \tilde{a}_n^{+i} , \tilde{a}_m^i .

4.3 Condition de Couche de Masse

Concernant l'ambiguïté du produit normal q -déformé, on peut simplifier les équations (4.21) et (4.22) par la régularisation de la fonction zéta de Riemann et par l'utilisation de la relation q -déformée de commutation (4.24) aussi bien que les équations (4.25) et (4.26) on obtient

$$\alpha' M^2 = -\frac{D-2}{24} + \frac{1}{2} \sum_{i,i',j=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{+\infty} n [2 + 3(q-1) \Lambda_{i'i'}^{ii} + (q-1)^2 \Lambda_{jj}^{ii} \Lambda_{i'i'}^{jj}] a_n^{+i'} a_n^{i'}, \quad (4.28)$$

$$\alpha' M^2 = -\frac{D-2}{12} + \frac{1}{2} \sum_{i,i',j=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{+\infty} n [2 + 3(q-1) \Lambda_{i'i'}^{ii} + (q-1)^2 \Lambda_{jj}^{ii} \Lambda_{i'i'}^{jj}] [a_n^{+i'} a_n^{i'} + \tilde{a}_n^{+i'} \tilde{a}_n^{i'}] \quad (4.29)$$

pour la corde ouverte et fermée respectivement.

Maintenant, concernant la corde bosonique ouverte, nous considérons les états vectoriel de la forme $\varepsilon_j \alpha_{-1}^j |0\rangle$ (ε_j est le vecteur de polarisation). Pour préserver la covariance après la q -déformation, ces états devraient définir une représentation irréductible de leur petit groupe qui est la représentation vectorielle du groupe $SO(D-2)$. Ceci implique

que ces états doivent avoir une masse nulle, c-à-d.,

$$M^2 \varepsilon_j \alpha_{-1}^j |0\rangle = 0 \quad (4.30)$$

De même, pour la corde bosonique fermée, nous prenons les états tensoriels symétriques de la forme $\varepsilon_{ij} (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^i + \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^i) |0\rangle$ et pour que ces états aient une masse nulle aussi, on doit avoir

$$M^2 \varepsilon_{ij} (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^i + \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^i) |0\rangle = 0 \quad (4.31)$$

Nous rappelons que l'espace q -déformé de Fock est défini tels que

$$\begin{aligned} \alpha_n^i |0\rangle &= 0 & n \geq 1 \\ \tilde{\alpha}_n^i |0\rangle &= 0 & n \geq 1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Après un calcul directe et l'utilisation de la relation de commutation q -déformée (4.24), les deux conditions de couche de masse (4.21) et (4.22) donnent

$$D = 2 + 12(q + 1) \quad (4.33)$$

Notez que pour $q = 1$, nous retrouvons la dimension critique de l'espace-temps habituel de la corde bosonique $D = 26$. De plus, pour que cette relation doit être compatible avec la condition $D > 4$, on doit exiger que

$$q \geq -\frac{5}{6}. \quad (4.34)$$

Dans cette parti du chapitre, nous avons dérivé une nouvelle dimension critique de l'espace-temps pour les cordes bosoniques dans le cadre général de la théorie de déformation.

Ainsi, on peut avoir des théories des cordes bosonique q -déformées consistentes où les dimensions de l'espace-temps sont telles que l'inégalité (4.34) est vérifié. Ceci signifie

qu'on peut avoir $D = 4$ qui correspond à une valeur du paramètre de déformation $q = -5/6$ sans avoir recours au procédé de compactification. De plus, avec ces nouvelles dimensions critiques de l'espace-temps, on peut avoir des implications phénoménologiques intéressantes.

Chapitre 5

Baryogénèse via la Léptogénèse

5.1 Introduction

La découverte des oscillations de saveur de neutrino dans les expériences solaires, atmosphériques, et de réacteurs [32] peut avoir un profond impact sur notre compréhension de la dynamique de l'univers primordial. Car de telles oscillations sont faisables seulement si les neutrinos ont de petites masses (sub-eV), expliquées d'une façon naturelle par le mécanisme de seesaw [33]. Ce dernier suppose l'existence des neutrinos droits N_i (un par famille de lepton) avec des masses de l'ordre ($10^8 - 10^{14}$) GeV donc super-lourd. Les masses des neutrinos légers sont obtenues à partir de la matrice $M_\nu \simeq M_D M_R^{-1} M_D^T$ où M_D et M_R sont respectivement les matrices de Dirac et de masse des neutrinos de Majorana droits lourds (r.h.n). La désintégration du neutrino droit le plus léger N_1 peut produire naturellement un excès de baryons sur les anti-baryons dans l'univers [34] et qui soit en accord avec les observations cosmologiques. Le paramètre d'asymétrie baryonique est une observable cosmologique importante conditionnée par la Nucléosynthèse du Big Bang et déterminée récemment avec une très grande précision par l'expérience de WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)¹ [35] :

¹C'est une mission d'explorateur de la NASA qui mesure la température du rayonnement de fond cosmique avec une exactitude sans précédent.

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.5_{-0.3}^{+0.4}) \times 10^{-10}. \quad (5.1)$$

Dans la physique des particules, le nombre baryonique (leptonique) est un nombre quantique conservé du système, Il est défini comme suit :

$$B = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3} \quad (5.2)$$

où n_q est le nombre de quarks, et $n_{\bar{q}}$ est le nombre d'antiquarks. Pourquoi un tiers ? Selon les lois de l'interaction forte il ne peut pas y avoir de charge nue de couleur, c-à-d. la charge de couleur totale d'une particule doit être zéro (*'blanche'*), (cf. confinement). Ceci peut seulement être réalisé en mettant ensemble un quark d'une couleur avec un antiquark avec l'anti-couleur correspondante, donnant ainsi un méson avec le nombre baryonique 0, ou en combinant trois quarks dans un baryon avec le nombre baryonique +1, ou en combinant trois antiquarks dans un anti-baryon avec le nombre baryonique -1. Une autre possibilité est le pentaquark exotique, se composant de 4 quarks et de 1 anti-quark. Ainsi, les quarks sont toujours présents en nombre de trois, si les antiquarks sont comptés en tant que "quarks négatifs".

Historiquement, le nombre baryonique a été défini longtemps avant que le modèle des quarks ait été établi, ainsi plutôt que de changer la définition, les physiciens de particules ont simplement divisé le nombre quantique précédemment connu par trois.

Les particules sans aucuns quarks ou antiquarks ont un nombre baryonique 0. De telles particules incluent les leptons, le photon, et les bosons de jauge W et Z .

Le nombre de baryon est presque conservé dans toutes les interactions du modèle standard. L'échappatoire est l'anomalie chirale. Les sphalérons de l'interaction électro-faible peuvent seulement changer le nombre de baryon par 3. Conservé veut dire que la somme du nombre baryonique de toutes les particules entrantes est égale à la somme du nombre baryonique de toutes les particules résultant de la réaction. Une violation du nombre baryonique pourrait mener à la désintégration du proton, mais seulement si le

nombre de baryon change par 1.

L'idée hypothétique de la théorie de la grande unification permet le changement d'un baryon en un groupe de leptons, violant ainsi la conservation du nombre baryonique et leptonique. La désintégration du proton est un exemple de ces processus.

Dans le sens strict du mot, la leptogénèse est le processus qui crée des leptons. Les théories de leptogénèses essaient d'expliquer comment l'univers a changé d'un état sans leptons juste après le Big Bang à un état contenant beaucoup de leptons, -dont la plupart du temps des électrons-, aujourd'hui. Un problème équivalent pour les baryons s'appelle la baryogénèse. Tandis qu'il n'y a aucune limite d'observation sur le nombre relatif de leptons et d'anti-leptons, puisque les leptons peuvent être convertis en neutrinos ou en anti-neutrinos et restent invisibles, un déséquilibre significatif est observés en ce qui concerne le nombre de baryons et d'anti-baryons.

On devrait comprendre cependant, qu'il n'est pas possible de créer seulement des électrons (ou seulement des protons) sans violer la conservation de la charge électrique. En d'autres termes, la conservation de la charge électrique exige un nombre égal d'électrons et de protons.

Baryogénèse et leptogénèse sont également liés par un phénomène qui se produit dans le modèle standard des interactions élémentaires. En effet, certaines configurations (non-perturbative) des champs de jauge appelées "sphalerons" peuvent convertir des leptons en baryons et *vice versa*. Ceci signifie que le modèle standard est en principe capable de fournir un mécanisme pour créer des baryons et des leptons, réalisant une possibilité spéculative suggérée par A. Sakharov dans les années '60. Cependant, la version la plus simple du modèle standard, ne peut pas quantitativement réaliser cette possibilité.

Une simple extension du modèle standard qui peut réaliser le programme de Sakharov est celui suggéré par Fukugita et Yanagida. Le modèle standard augmenté par l'addition des neutrinos droits rend l'application du mécanisme de seesaw possible et fourni aux neutrinos gauches la masse. En même temps, ce modèle étendu peut produire spontanément des leptons de la désintégration des neutrinos droits. En conclusion, les sphalérons

peuvent convertir l'asymétrie leptonique spontanément produite en asymétrie baryonique observée. Souvent, les physiciens emploient le mot "*leptogénèse*" pour dénoter le mécanisme décrit ici.

Un sphaléron est une solution statique -indépendante du temps- aux équations de champ électrofaible du modèle standard de la physique des particules élémentaires, des processus qui violent le nombre baryonique et leptonique. De tels processus ne peuvent pas être représentés par des diagrammes de Feynman, et s'appellent donc non-perturbative. Géométriquement, un sphaléron est simplement un point de selle de l'énergie potentielle électrofaible (dans l'espace dimensionnel infini de champ), tout comme le point de selle de la surface $z = x^2 - y^2$ dans la géométrie analytique tridimensionnelle.

Dans le modèle standard, les processus qui violent le nombre baryonique convertissent trois baryons en trois antileptons, et des processus relatifs. Ceci viole la conservation du nombre baryonique et leptonique, mais la différence $B - L$ reste conservée. Un sphaléron est semblable au point médian ($t = 0$) de l'instanton, ainsi il est non-perturbative. Ceci signifie que dans des conditions normales les sphalérons sont très rares à observer. Cependant, ils auraient été plus nombreux à températures élevées de l'univers primordial. Dans certaines théories de baryogénèse un déséquilibre du nombre de leptons et d'antileptons est formé d'abord par des transitions de leptogénèse et les sphalérons convertissent alors ceci en déséquilibre dans les nombres de baryons et d'antibaryons.

La désintégration du neutrino droit le plus léger N_1 peut satisfaire chacune des trois conditions de Sakharov [36] requises pour la génération de η_B : *i*) il peut se produire hors de l'équilibre thermique, *ii*) il y a violation suffisante de C et de CP , et *iii*) il y a également violation du nombre baryonique B . La dernière condition est obtenue en combinant la violation du nombre leptonique dans les masses de Majorana des neutrinos droits avec les interactions du modèle standard qui viole le nombre $B + L$ surgissant lors de processus électrofaibles appelés sphaléron [37].

Un examen plus soigneux de la structure du seesaw indiquerait que, et bien qu'il y ait un lien fondamental, quand le mécanisme de seesaw est mis en application dans le

contexte de la symétrie du modèle standard (SM), la masse des neutrinos légers et les paramètres de mélange ne peuvent pas en général déterminer l'asymétrie baryonique de l'univers. Il est facile de le voir, sans perdre les généralités, on peut travailler dans une base où la matrice de masse des leptons chargés et la matrice de masse M_R des neutrinos lourds de Majorana droits sont diagonales avec des valeurs propres réelles. La matrice de masse des neutrinos de Dirac serait alors une matrice arbitraire complexe (3×3) de 18 paramètres (9 amplitudes et 9 phases). Trois des paramètres de phase peuvent être enlevés par redéfinition des champs (i.e. les doublets de lepton gauche et les singulets de lepton chargés droits). Le secteur de neutrino aura alors 18(= 15 + 3) paramètres. Alors, 9 combinaisons de ces derniers détermineront les observables de basses énergies (3 masses, 3 angles de mélange et 3 phases), alors que l'asymétrie leptonique (et ainsi η_B) dépendrait de chacun des 18 paramètres, les laissant ainsi arbitraires.

Dans ce chapitre nous prouvons qu'il est possible de relier quantitativement η_B à la masse des neutrinos légers et aux paramètres de mélange en mettant en application le mécanisme de seesaw dans le contexte d'une classe de modèle supersymétrique gauche-droite [38]. Nous notons qu'à la différence du SM où les neutrinos droits apparaissent plutôt add-hoc, dans les modèles symétriques gauche-droite, ils sont naturels car l'invariance de jauge exige leur existence. D'un autre côté, la Supersymétrie (SUSY) a le mérite de résoudre le problème de la hiérarchie de jauge. Avec la supposition d'un secteur minimal de Higgs, il s'avère que ces modèles prévoient la forme de la matrice de masse du neutrino de Dirac

$$M_D = c \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

où le paramètre $c \simeq m_t/m_b$ est déterminé à partir du secteur de quark, laissant seulement la matrice de masse de Majorana M_R arbitraire. Trois phases dans la matrice M_R peuvent être enlevées, laissant un total de 9 paramètres qui déterminent à la fois les mixings et les

masses des neutrinos de basse énergie ainsi que l'asymétrie baryonique. Il est maintenant évident que η_B est calculable en fonction des observables de basses énergies des neutrinos. On trouve dans la littérature d'autres tentatives de relier la leptogénèse aux observables de basses énergies [39, 40], de telles tentatives font souvent des suppositions additionnelles telles que $M_D = M_{\text{up}}$ (qui peut ne pas être entièrement réaliste), ou prennent des textures spécifiques des matrices de masse de lepton.

Ces dernières années, nous avons beaucoup appris des expériences au sujet des masses et des mixings des neutrinos légers, mais il reste aussi beaucoup à apprendre. Notre analyse montre que la cosmologie peut mettre des restrictions significatives sur les paramètres des neutrinos légers. Dans notre modèle, pour une baryogénèse réussie nous exigeons que ces trois conditions soient satisfaites : $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$, $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ et $\theta_{13} = (0.01 - 0.07)$. Ici θ_{12} et θ_{13} sont des éléments de la matrice de mélange des neutrinos légers, m_i sont les valeurs propres de la matrice de masse des neutrinos légers et α, β sont les phases de Majorana qui entrent dans le calcul de l'amplitude de la double désintégration bêta sans émission de neutrino. Les futures expériences de neutrino confirmeront ou réfuteront ces prévisions.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2 nous passons brièvement en revue le modèle symétrique minimal gauche-droite. Dans la section 3, nous analysons la leptogénèse dans le cadre de ce modèle, où nous dérivons des contraintes imposées à notre modèle pour que la leptogénèse soit réussie. Dans la section 4, nous calculons le paramètre ε_1 de l'asymétrie leptonique produit lors de la désintégration de N_1 . La section 5 est dédiée aux équations appropriées de Boltzmann requises pour calculer le paramètre d'asymétrie baryonique. La section 6 nous donnons nos résultats numériques pour η_B . Dans la section 7 nous concluons pour ce premier modèle. Dans la section 8, nous introduisons un nouveau modèle de leptogénèse qui marche à l'échelle du TeV et qui constitue le plus minimaliste des extensions du modèle standard qui soit compatible avec les données expérimentaux et observationnelle à cette échelle d'énergie.

5.2 Le Modèle Symétrique Gauche-Droite Brief review

Passons en revue brièvement la structure de base du modèle symétrique minimal gauche-droite supersymétrique développé dans la référence [38]. Le groupe de la symétrie de jauge du modèle est $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Les quarks et les leptons sont associés au groupe de jauge de la manière suivante : Les quarks et les leptons (Q, L) d'hélicité gauche se transforment comme des doublets de $SU(2)_L$ [$Q(3, 2, 1, 1/3)$ et $L(1, 2, 1, -1)$], tandis que ceux d'hélicité droite (Q^c, L^c) sont des doublets de $SU(2)_R$ [$Q^c(3^*, 1, 2, -1/3)$ et $L^c(1, 1, 2, 1)$]. Les masses de Dirac des fermions surgissent des couplages de Yukawa à un bidoublet de Higgs $\Phi(1, 2, 2, 0)$. La symétrie $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ est brisée à $U(1)_Y$ par le VEV (v_R) d'un triplet d'un champ scalaire $\Delta^c(1, 1, 3, -2)$ avec $B - L = -2$. Ce triplet est accompagné d'un triplet d'hélicité gauche $\Delta(1, 3, 1, 2)$ (plus $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}^c$ leurs conjugués, pour éliminer les anomalies). Ces champs se couplent également aux leptons et sont responsables d'induire de grandes masses de Majorana pour ν_R . Une alternative à ces triplets de champs de Higgs est d'utiliser les $B - L = \pm 1$ doublets $\chi(1, 2, 1, -1)$ et $\chi^c(1, 1, 2, 1)$, avec leurs conjugués $\bar{\chi}$ et $\bar{\chi}^c$. Dans ce dernier cas, on a l'absence d'opérateurs nonrenormalisables pour donner de grandes masses de Majorana à ν_R . Bien que notre formalisme tient compte de n'importe quel nombre de doublet de champs de Higgs, nous adopterons l'option de triplet, pour la simplicité. Le superpotentiel invariant sous la symétrie de jauge impliquant les champs de quark et de lepton est donné par

$$W = \mathbf{Y}_q Q^T \tau_2 \Phi \tau_2 Q^c + \mathbf{Y}_l L^T \tau_2 \Phi \tau_2 L^c + (\mathbf{f} L^T i \tau_2 \Delta L + \mathbf{f}_c L^c i \tau_2 \Delta^c L^c) . \quad (5.4)$$

Notons que sous la symétrie de la parité gauche-droite, $Q \leftrightarrow Q^{c*}, L \leftrightarrow L^{c*}, \Phi \leftrightarrow \Phi^\dagger, \Delta \leftrightarrow \Delta^{c*}$, avec $W_{SU(2)_L} \leftrightarrow W_{SU(2)_R}^*, W_{B-L} \leftrightarrow W_{B-L}^*$ et $\theta \leftrightarrow \bar{\theta}$. On a comme conséquence, $\mathbf{Y}_q = \mathbf{Y}_q^\dagger, \mathbf{Y}_l = \mathbf{Y}_l^\dagger$, et $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c^*$ dans l'équation (5.4).² Il a été montré dans la réf. [38] que

²On a pas utiliser explicitement ces relations.

l'hermiticité des matrices de Yukawa (avec les contraintes de parité sur les paramètres de la brisure douce de SUSY) aide à résoudre le problème de CP supersymétrique qui hante le modèle standard minimale supersymétrique (MSSM).

Au-dessous de v_R , la théorie effective est le MSSM avec ses multiplets de Higgs H_u et H_d .³ Ces derniers sont contenus dans le bidoublet Φ du modèle supersymétrique gauche-droite, mais en général, ils peuvent également résider partiellement dans d'autres multiplets ayant des nombres quantiques identiques sous la symétrie du MSSM (i.e χ , $\bar{\chi}$, le doublet des champs de Higgs voir plus haut). En tenant compte d'une telle possibilité, le superpotentiel du MSSM de l'éq.(5.4) mène aux relations des matrices de couplage de Yukawa

$$\mathbf{Y}_u = \gamma \mathbf{Y}_d, \quad \mathbf{Y}_l = \gamma \mathbf{Y}_{\nu^D}. \quad (5.5)$$

Ces relations ont été appelées l'unification up-down [38]. Ici, la première relation de l'éq. (5.5) implique $\frac{m_t}{m_b} \simeq \gamma \tan \beta \equiv c$ où γ est un paramètre caractérisant quelle quantité de H_u et H_d du MSSM est dans le bidoublet Φ . Le cas où $H_{u,d}$ est entièrement dans Φ correspondra à $\gamma = 1$ et $\tan \beta = m_t/m_b$. A première vue, la première des relations de l'éq. (5.5) peut paraître phénoménologiquement un désastre puisqu'elle mène à l'annulation des mixings de quark et à des rapports de masse de quark inacceptables. Il a été montré dans le premier papier de la réf. [38] qui inclue les diagrammes à une boucle impliquant le gluino et le chargino, et tenant compte de la structure de saveur des termes A de la brisure douce de SUSY, il existe une large plage de paramètres (pas toute la plage possible du MSSM habituelle) où les correctes mixings de quarks ainsi que les masses peuvent être obtenues d'une façon consistante avec les contraintes sur les changements de saveur.

C'est la seconde équation de (5.5) qui nous intéresse ici. Cette relation mènerait à $M_D = cM_l$, avec $c \simeq m_t/m_b$. Les corrections de boucle supersymétrique des matrices de masse leptonique sont numériquement petites comparées aux semblables corrections dans

³Les bosons de jauge d'hélicité droite ont des masses de l'ordre $v_R \sim 10^{14}$ GeV et ainsi n'ont pas un rôle significatif dans la cosmologie à $T \sim M_1 \ll v_R$.

le secteur des quarks, puisque ces particules interagissent fortement et donc ne participent pas à ces boucles. En outre, les angles de mélange leptonique sont induits au niveau de l'arbre par la structure du neutrino de Majorana dans la matrice de masse, et toutes les corrections de boucle de ces derniers seront subdominants. C'est particulièrement vrai puisque deux des angles de mélanges leptoniques sont grands. Nous ignorons donc ces corrections de boucle de SUSY par rapport aux matrices de masse leptonique.

On peut ainsi travailler dans une base où les matrices de masse des leptons chargés et des neutrinos de Dirac sont simultanément diagonales. La matrice de masse de Majorana $M_R = \mathbf{f}v_R$ sera alors une matrice générique symétrique complexe. Après enlèvement de trois phases dans M_R par redéfinitions des champs, il nous reste 9 paramètres (6 amplitudes et 3 phases) qui déterminent le spectre des neutrinos légers aussi bien que le spectre des neutrinos lourds et par conséquent ceci fixera l'asymétrie leptonique. Les conséquences sur la leptogénèse de ce système si contraint seront analysées dans la prochaine section.

En principe les champs de Higgs $\Delta(1, 3, 1, +2)$ peuvent également acquérir un petit VEV $\lesssim \mathcal{O}(\text{eV})$ [41]. Dans ce cas la formule de seesaw serait modifiée, ainsi que le calcul de l'asymétrie leptonique [42]. Nous supposons que de telles contributions du seesaw du type II proportionnelles à $\langle \Delta \rangle$ sont nulles dans notre analyse. Ce qui est consistant avec les modèles de la réf. [38]. Enfin, il est à noter que dans la littérature la leptogénèse dans des modèles gauche-droite symétriques dans un contexte plus général que le notre a été analysé [43].

5.3 Premier Modèle : Leptogénèse dans le Contexte des Modèles Gauche-Droite Symétrique

La symétrie $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ est brisée en $U(1)_Y$ par le VEV $\langle \Delta^c \rangle = v_R \sim 10^{14}$ GeV. Au moins certains des neutrinos droits ont des masses au-dessous de v_R . Nous nous concentrons ainsi sur le couplage de Yukawa des neutrinos dans le contexte du MSSM.

Les interactions de Yukawa invariante sous les transformations du groupe de symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sont contenues dans le superpotentiel du MSSM

$$W = lH_d \mathbf{Y}_\ell e^c + lH_u \mathbf{Y}_{\nu^D} \nu^c + \frac{1}{2} \underbrace{\nu^{cT} C M_R \nu^c}, \quad (5.6)$$

où l est utilisé pour les doublets de leptons d'hélicité gauche, et (e^c, ν^c) dénote respectivement les conjugués des leptons chargés et des neutrinos d'hélicités droites. H_u et H_d sont les champs de Higgs du MSSM avec respectivement les VEVs v_u et v_d . On définit aussi $M_l = \mathbf{Y}_\ell v_d$, $M_D = \mathbf{Y}_{\nu^D} v_u$ et M_R qui sont respectivement les matrices de masses des leptons chargés, des neutrinos de Dirac, et des neutrinos d'hélicité droite de Majorana. On peut alors générer des masses légères aux neutrinos par le mécanisme de seesaw [33]

$$M_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T. \quad (5.7)$$

Il est à noter qu'il ya un mélange entre les générations dans M_R ainsi que M_D , les angles de mélange des neutrinos légers vont dépendre ainsi de ces deux mélanges. Dans le cadre du SM ou le MSSM et où M_D est une matrice arbitraire, la structure de la matrice de masse des neutrinos droits de Majorana ne peut pas être entièrement déterminée même si la matrice de masse des neutrinos légers M_ν est complètement connue des expériences. Comme nous l'avons noté dans la section 2, dans la version minimale du modèle symétrique gauche-droite (notre modèle) on a

$$M_D = cM_l = c \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad (5.8)$$

où $c \simeq \frac{m_t}{m_b}$. Noter qu'ici nous sommes déjà sur une base où la matrice de masse des leptons chargés est diagonale. Dans le scénario à trois familles de leptons et de quarks, les relations entre les états propres de saveur $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ et les états propres de masse

(ν_1, ν_2, ν_3) des neutrinos peuvent être exprimées en termes d'observables

$$M_\nu = U^* M_\nu^{diag} U^\dagger, \quad (5.9)$$

où $M_\nu^{diag} \equiv \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, avec m_i sont les masses des neutrinos légers et U est une matrice (3×3) de mélange qui peut être écrite comme $U = U_{PMNS}.P$. La matrice U_{PMNS} [44] est paramétrisée comme suit

$$\begin{aligned} U_{PMNS} &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ et δ est la phase de Dirac responsable de la violation de CP qui apparaît dans les oscillations des neutrinos. La matrice P contient deux phases supplémentaires de Majorana non observables dans les oscillations de neutrino, mais qui sont importants pour la double désintégration bêta sans émission de neutrino [45] ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

En combinant l'éq. (5.9) avec la formule de seesaw éq. (5.7) et en résolvant pour la

matrice de masse des neutrinos droits nous trouvons

$$\begin{aligned}
M_R &= c^2 M_l M_\nu^{-1} M_l & (5.12) \\
&= \frac{c^2 m_\tau^2}{m_1} \begin{pmatrix} \frac{m_e}{m_\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_\mu}{m_\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{PMNS} P^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{m_3} \end{pmatrix} U_{PMNS}^T \begin{pmatrix} \frac{m_e}{m_\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_\mu}{m_\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'établir un lien entre les paramètres et les observables des hautes et de basses énergies respectivement.

Nous définissons un petit paramètre d'expansion ϵ comme

$$\epsilon = \frac{m_\mu}{m_\tau} \simeq 0.059,$$

en fonction de ce dernier paramètre nous avons donc

$$m_e = a_e \epsilon^3 m_\tau, \quad \frac{m_1}{m_3} = a_{13} \epsilon, \quad \theta_{13} = t_{13} \epsilon, \quad \theta_{23} = \frac{\pi}{4} + t_{23} \epsilon. \quad (5.13)$$

ici a_e , a_{13} , t_{13} et t_{23} sont des paramètres $\lesssim \mathcal{O}(1)$ avec $a_e = 1.400$. Ces expansions sont dictées par les données de basses énergies qui supposent un spectre de masse des neutrinos hiérarchique.

Nous constatons alors que la condition de produire une asymétrie baryonique proportionnée place des contraintes significatives sur les paramètres de mélange des neutrinos. Spécifiquement, les expansions suivantes

$$\frac{m_1}{m_2} = \tan^2 \theta_{12} + a_{12} \epsilon \quad \text{et} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + b \epsilon, \quad (5.14)$$

où on exige que les paramètres a_{12} et b soient $\lesssim \mathcal{O}(1)$. Pour avoir une idée sur ceci, nous notons que le paramètre de l'asymétrie de CP ϵ_1 produit lors de la désintégration de N_1 est trop petit, -de l'ordre de $\epsilon_1 \sim \frac{\epsilon^6}{8\pi} \sim 2 \times 10^{-9}$ - si a_{12} ou b sont beaucoup plus grand que 1. C'est parce que les masses des neutrinos lourds seraient fortement hiérarchiques

dans ce cas, $M_1 : M_2 : M_3 \sim \epsilon^6 : \epsilon^2 : 1$. Ceci peut être changé à une hiérarchie faible $M_1 : M_2 : M_3 \sim \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1$ en prenant que tous les éléments du bloc 2 ou 3 de M_R de l'éq. (5.12) sont proportionnels à $\{\frac{m_1}{m_2} e^{2i\beta} \cos^2 \theta_{12} + e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12}\}$ et en exigeant que cette quantité soit de l'ordre de ϵ , l'éq. (5.14) exprime bien cette condition. Dans ce cas le paramètre de la violation de CP $\epsilon_1 \sim \frac{\epsilon^4}{8\pi} \sim 10^{-6}$, ce qui peut mener à une asymétrie baryonique acceptable, comme nous allons le montrer.

Une conséquence immédiate de l'éq. (5.14) est que la double désintégration bêta sans émission de neutrinos est très faible dans le modèle. La masse effective appropriée pour cette désintégration s'avère

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| \simeq |m_2 e^{2i\alpha} \epsilon (a_{12} c_{12}^2 - 2ib s_{12}^2) + m_3 s_{13}^2 e^{-2i\delta}|. \quad (5.15)$$

Ceci est de l'ordre de $m_3 \epsilon^2 \sim 10^{-4}$ eV, ce qui serait difficile de mesurer. Cette amplitude est petite en raison de l'annulation entre les principales contributions proportionnelles à m_1 et m_2 (voir éq. (5.14)).

En termes de ces expansions, la matrice de masse des neutrinos droits de Majorana devient

$$M_R = \begin{pmatrix} A_{11}\epsilon^5 & A_{12}\epsilon^3 & A_{13}\epsilon^2 \\ A_{12}\epsilon^3 & A_{22}\epsilon^2 & A_{23}\epsilon \\ A_{13}\epsilon^2 & A_{23}\epsilon & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{M_o \epsilon a_e^2 e^{2i\alpha} \cos 2\theta_{12}}{\cos^2 \theta_{12}} \\
A_{12} &= -\frac{M_o \epsilon a_e e^{2i\alpha} \tan \theta_{12}}{\sqrt{2}} \\
A_{13} &= \frac{M_o \epsilon a_e e^{2i\alpha} \tan \theta_{12}}{\sqrt{2}} \\
A_{22} &= \frac{M_o \epsilon}{2} \left\{ a_{13} - a_{12} e^{2i\alpha} \cos^2 \theta_{12} - 2ib e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12} + 2e^{i(2\alpha+\delta)} t_{13} \tan \theta_{12} \right\} \\
A_{23} &= \frac{M_o \epsilon}{2} \left\{ a_{13} + a_{12} e^{2i\alpha} \cos^2 \theta_{12} + 2ib e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12} \right\} \\
A_{33} &= -M_o \epsilon e^{2i\alpha} \left\{ t_{13} e^{i\delta} \tan \theta_{12} + ib \sin^2 \theta_{12} - \frac{a_{13} e^{-2i\alpha}}{2} + \frac{a_{12} \cos^2 \theta_{12}}{2} \right\}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

On définit $M_o = \frac{c^2 m_7^2}{m_1}$. Cette matrice de masse hiérarchique est diagonalisée par une série de rotations U_1 , U_2 et U_3 telles que ;

$$(KU_3U_2U_1)M_R(KU_3U_2U_1)^T = \begin{pmatrix} |M_1| & 0 & 0 \\ 0 & |M_2| & 0 \\ 0 & 0 & |M_3| \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

où $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ avec $k_i = e^{-i\phi_i/2}$ étant des facteurs de phase qui rendent chacune des masses M_i réelles, $M_i = |M_i|e^{i\phi_i}$. $V = (KU_3U_2U_1)^T$ est la matrice qui diagonalise M_R . La matrice unitaire U_1 est donnée par

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{A_{13}}{A_{33}}\epsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{A_{13}^*}{A_{33}^*}\epsilon^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

De même, U_2 et U_3 sont des matrices unitaires avec des entrées off-diagonales données par

$$(U_2)_{23} = -\frac{A_{23}}{A_{33}}\epsilon, \quad (U_3)_{12} = -\frac{\left(A_{12} - \frac{A_{13}A_{23}}{A_{33}}\right)\epsilon}{A_{22} - \frac{A_{23}^2}{A_{33}}}. \quad (5.20)$$

les valeurs propres de masse sont alors données par

$$\begin{aligned}
M_1 &= M_\circ k_1^2 \epsilon^5 (2a_{13} a_e^2 e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12}) \\
&\times (2t_{13}^2 e^{2i(\alpha+\delta)} \sin^2 \theta_{12} + (a_{12} + 2ib + (a_{12} - 2ib) \cos 2\theta_{12}) a_{13} \cos^2 \theta_{12})^{-1} \\
M_2 &= M_\circ k_2^2 \epsilon^3 e^{2i\alpha} (a_{13} (a_{12} + 2ib + (a_{12} - 2ib) \cos 2\theta_{12}) + 2t_{13}^2 e^{i(\delta+\alpha)} \tan^2 \theta_{12}) \\
&\times (-a_{13} + ibe^{2i\alpha} + e^{2i\alpha} (a_{12} \cos^2 \theta_{12} - ib \cos 2\theta_{12}) + 2e^{i\delta} t_{13} \tan \theta_{12})^{-1} \\
M_3 &= \frac{M_\circ k_3^2 \epsilon}{2} (a_{13} - ibe^{2i\alpha} - e^{2i\alpha} (a_{12} \cos^2 \theta_{12} - ib \cos 2\theta_{12} + 2t_{13} e^{i\delta} \tan \theta_{12})) .(5.21)
\end{aligned}$$

Nous utiliserons ces résultats dans la prochaine section pour déterminer ε_1 .

5.4 La Violation de CP et l'Asymétrie Leptonique

Maintenant que nous avons développé le cadre où se situe notre modèle, nous allons nous intéresser à l'évaluation du paramètre de l'asymétrie CP ε_1 produit lors de la désintégration du plus léger neutrino de Majorana N_1 . Cette asymétrie résulte de l'interférence entre les amplitudes de désintégration au niveau de l'arbre et à une boucle.⁴ Dans une base où la matrice M_R est diagonale et réelle, l'asymétrie dans la désintégration de N_i est donnée par [46]

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{8\pi v^2 (M_D^\dagger M_D)_{ii}} \sum_{j=2,3} \text{Im}[(M_D^\dagger M_D)_{ij}]^2 \left[f\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) + g\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) \right] \quad (5.22)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ représentent respectivement les contributions des corrections du vertex et de l'énergie propre. Pour le cas du modèle standard non-supersymétrique avec des

⁴On supposera que $M_1 \ll M_2 < M_3$, dans ce cas, même si les neutrinos lourds N_2 et N_3 produisent une asymétrie leptonique, elle est habituellement effacé avant même la désintégration de N_1 .

neutrinos droits, ces fonctions sont données par [46]

$$f_{\text{non-SUSY}}(x) = \sqrt{x} \left[-1 + (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right], \quad g_{\text{non-SUSY}}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \quad (5.23)$$

tandis que dans le cas du MSSM plus des neutrinos droits, sont données par

$$f_{\text{SUSY}}(x) = \sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad g_{\text{SUSY}}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}. \quad (5.24)$$

Ici v est le VEV du doublet de Higgs du SM, $v \simeq 174$ GeV. Dans le cas du MSSM, v dans l'éq. (5.22) est remplacée par $v \sin \beta$. Pour la simplicité de l'évolution numérique des équations de Boltzmann, nous supposons le scénario du SM ci-après. Cependant, notre résultat devrait être approximativement valide aussi bien pour le cas du MSSM.⁵ En supposant un spectre de masse hiérarchique $M_1 \ll M_2 < M_3$ dans le secteur des neutrinos droits i.e., ($x \gg 1$), qui est réalisable dans notre modèle, voir l'éq. (5.16), la formule de ε_1 est simplifiée à la suivante :

$$\varepsilon_1 = -\frac{3}{16\pi v^2 (M_D^\dagger M_D)_{11}} \sum_{k=2,3} \text{Im}[(M_D^\dagger M_D)_{1k}^2] \frac{M_1}{M_k}. \quad (5.25)$$

remarquons que ε_1 dépend des éléments de matrice (1, 1), (1, 2) et (1, 3) de $M_D^\dagger M_D$. Ces quantités peuvent être reliés aux paramètres, masses et mixings, des neutrinos légers mesurables dans les expériences de basses énergies. Dans la base où M_R est diagonale, ces éléments sont donnés par

$$\begin{aligned} (M_D^\dagger M_D)_{11} &= (cm_\tau)^2 (V_{31}V_{31}^* + V_{21}V_{21}^*\epsilon^2 + a_e^2 V_{11}V_{11}^*\epsilon^6) \\ (M_D^\dagger M_D)_{12} &= (cm_\tau)^2 (V_{31}V_{32}^* + V_{21}V_{22}^*\epsilon^2 + a_e^2 V_{11}V_{12}^*\epsilon^6) \\ (M_D^\dagger M_D)_{13} &= (cm_\tau)^2 (V_{31}V_{33}^* + V_{21}V_{23}^*\epsilon^2 + a_e^2 V_{11}V_{13}^*\epsilon^6), \end{aligned} \quad (5.26)$$

⁵La fonction $f + g$ dans le MSSM est deux fois plus grande que celle du SM. Cependant, elle est compensé par le facteur $\frac{1}{g_*}$ qui apparaît dans η_B et qui est dans le MSSM la moitié de celle du SM.

où $V = KU_3U_2U_1$ est la matrice unitaire qui diagonalise M_R . Un calcul direct donne, en premier ordre de ϵ ,

$$\begin{aligned}
(M_D^\dagger M_D)_{11} &= 8a_e^2 c^2 m_\tau^2 \epsilon^4 \cos^2 \theta_{12} \sin^2 \theta_{12} (a_{13}^2 + t_{13}^2 \tan^2 \theta_{12}) \\
&\times 1 / \{ 8t_{13}^4 \sin^4 \theta_{12} + 32a_{13}t_{13}^2 b \cos^2 \theta_{12} \sin^4 \theta_{12} \sin 2(\alpha + \delta) \\
&+ a_{13} \cos^4 \theta_{12} [4a_{13}(a_{12}^2 - b^2) \cos 2\theta_{12} + a_{13}(a_{12}^2 + 4b^2)(3 + \cos 4\theta_{12}) \\
&+ 16a_{12}t_{13}^2 \sin^2 \theta_{12} \cos 2(\alpha + \delta)] \} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(M_D^\dagger M_D)_{12}^2 &= 2a_e^2 c^4 m_\tau^4 \epsilon^6 \tan^2 \theta_{12} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} e^{-2i(2\alpha + \delta)} \{ 4(a_{13}^2 - t_{13}^2) \cos 2\theta_{12} - 2t_{13} \sin 2\theta_{12} \\
&\times (2a_{13}e^{i(2\alpha + \delta)} - (a_{12} + 2ib)e^{-i\delta}) + 4(a_{13}^2 + t_{13}^2) + t_{13} \sin 4\theta_{12} e^{-i\delta} (a_{12} - 2ib) \}^2 \\
&\times 1 / \{ [ibe^{i\delta} - a_{13}e^{-i(2\alpha + \delta)} + a_{12}e^{-i\delta} \cos^2 \theta_{12} - ibe^{-i\delta} \cos 2\theta_{12} + 2t_{13} \tan \theta_{12}]^2 \\
&\times [3a_{12}a_{13} - 2ia_{13}b + 4t_{13}^2 e^{-2i(\alpha + \delta)} + 4 \cos 2\theta_{12} (a_{12}a_{13} - t_{13}^2 e^{-2i(\alpha + \delta)}) + \\
&a_{13}(a_{12} + 2ib) \cos 4\theta_{12}]^2 \} \quad (5.28)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(M_D^\dagger M_D)_{13}^2 &= 2a_e^2 c^4 m_\tau^4 \epsilon^4 \sin^2 \theta_{12} e^{-i(\phi_1 - \phi_3)} (a_{13} \cos \theta_{12} + e^{-i(2\alpha + \delta)} t_{13} \sin \theta_{12})^2 \\
&\times 1 / \{ a_{13} \cos^2 \theta_{12} (a_{12} - 2ib + (a_{12} + 2ib) \cos 2\theta_{12}) \\
&+ 2t_{13}^2 \sin^2 \theta_{12} e^{-2i(\alpha + \delta)} \}^2 \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Ces expressions analytiques ont été vérifiées numériquement. Dans la Figure (5-1) on a représenté $|\epsilon_1|$ en fonction de θ_{13} et on a fixé les autres observables. La courbe avec le trait continu dans la Figure (5-1) et qui correspond à l'évaluation numérique exacte est conforme à la courbe avec un trait discontinu et qui correspond aux expressions analytiques.

De la Figure (5-1), il est clair que θ_{13} est contraint par la cosmologie dans notre

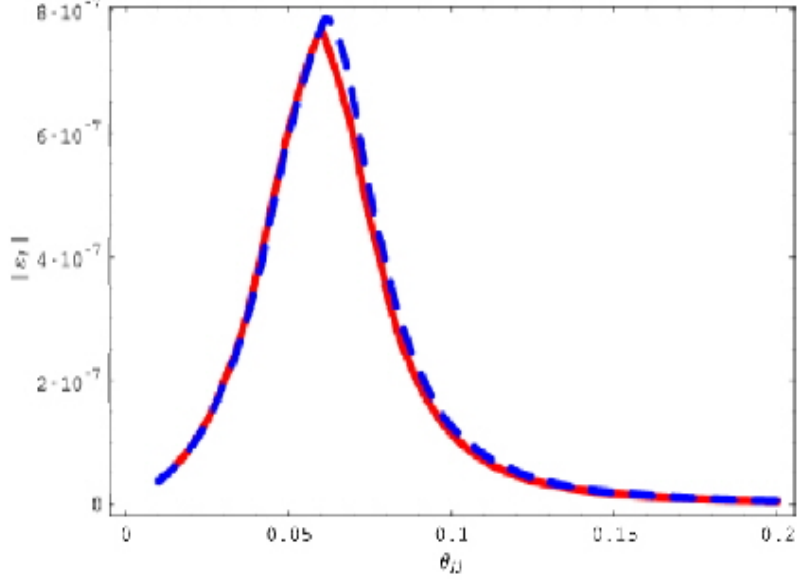


FIG. 5-1 – Paramètre de l’asymétrie CP ε_1 utilisant les résultats analytique (discontinue) et numérique (continue) comme fonction de l’angle θ_{13} de l’oscillation des neutrinos. Les paramètres fixés de notre illustration sont $a_{12} = 1$, $b = 1$, $\Delta m_{\odot}^2 = 2.5 \times 10^{-5} eV^2$, $\Delta m_a^2 = 5.54 \times 10^{-3} eV^2$ et $\{\delta, \alpha\} = \{\pi/4, \pi/4\}$. Notre modèle exige que $|\varepsilon_1| \gtrsim 1.3 \times 10^{-7}$ pour obtenir une asymétrie baryonique acceptable. Ce critère est satisfait seulement dans la région où $0.01 \lesssim \theta_{13} \lesssim 0.07$, cet intervalle n’est pas trop sensible aux variations des autres paramètres fixés.

modèle. Si $\varepsilon_1 < 1.3 \times 10^{-7}$, l’asymétrie baryonique induite serait trop petite pour expliquer les observations. Comme on peut le voir de la Figure (5-1), θ_{13} devrait se situer alors dans l’intervalle $0,01 - 0,07$ pour qu’on puisse avoir une valeur acceptable de ε_1 . Ce résultat ne change pas beaucoup avec la variation des autres paramètres.

Les processus électrofaible de sphaléron [37] devrait alors convertir l’asymétrie leptonique induite à une asymétrie baryonique. Les rapports de l’asymétrie baryonique Y_B et de l’asymétrie leptonique Y_L par l’entropie sont reliés par la relation [47] :

$$Y_B = C Y_{B-L} = \frac{C}{C-1} Y_L \quad (5.30)$$

avec $C = \frac{8N_f + 4N_\varphi}{22N_f + 13N_\varphi}$, où $N_f = 3$ et on a respectivement $N_\varphi = 1, 2$ dans le cas du SM et du MSSM. Dans l’un ou l’autre cas $C \sim \frac{1}{3}$. Dans l’éq. (5.30), $Y_B = \frac{n_B}{s}$ avec $s = 7.04 n_\gamma$.

Un intérêt considérable dans le but d’obtenir une expression analytique approximative de l’asymétrie baryonique a été développé dans la littérature [48, 49]. Pour estimer cette asymétrie, le facteur de dilution κ qui prend en compte les processus de la désintégration inverse du neutrino droit N_1 et des diffusions qui violent le nombre leptoniques et qui peuvent laver l’asymétrie produite doit être connu. Comme exemple, $\kappa = (2 \pm 1) \times 10^{-2} \left(\frac{0.01 \text{ eV}}{\tilde{m}_1} \right)^{1.1 \pm 0.1}$ a été suggéré dans la réf. [48] pour le quel $\eta_B \simeq 0.96 \times 10^{-2} \varepsilon_{N_1} \kappa$ a été calculé. Dans notre travail nous résoudrons les équations couplées de Boltzmann numériquement pour estimer l’asymétrie baryonique sans se rapporter au facteur de dilution.

5.5 Les Equations de Boltzmann

Dans cette section nous établissons les équations de Boltzmann afin de calculer l’asymétrie baryonique η_B produite hors équilibre thermique lors de la désintégration de N_1 . Dans notre modèle les masses des neutrinos droits de Majorana ne sont pas indépendantes du paramètre ε_1 de l’asymétrie CP. Par conséquent une analyse cohérente du modèle est exigée.

Dans l’univers primordial, et à la température de l’ordre de la masse de N_1 , les principaux processus thermiques qui rentrent dans la production de l’asymétrie leptonique sont, la désintégration du neutrino droit le plus léger N_1 ⁶, sa désintégration inverse (voir 5-2), et les processus violants le nombre leptonique, $\Delta L = 1$ échange du boson de Higgs (voir 5-3), plus $\Delta L = 2$ échange des neutrinos droits lourds de Majorana (r.h.n) [50] (voir 5-4). La production de l’asymétrie leptonique par l’intermédiaire de la désintégration du r.h.n est un processus hors-équilibre qui est le plus souvent traité d’une manière efficace au moyen des équations de Boltzmann (BE).

La première BE qui décrit l’évolution de l’abondance du neutrino droit et qui corres-

⁶Dans notre analyse nous nous limitons au cas où l’asymétrie est due seulement à la désintégration du neutrino droit N_1 le plus léger.

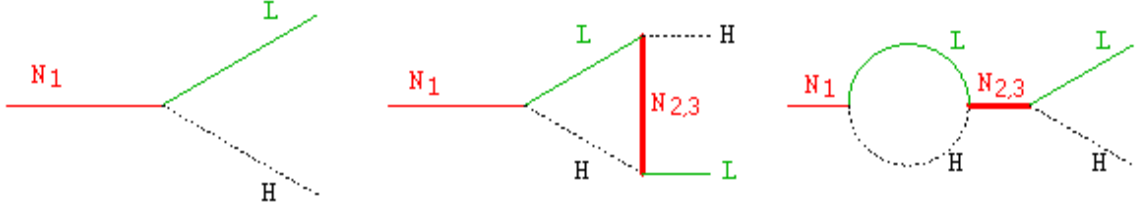


FIG. 5-2 – La désintégration du neutrino droit de Majorana N_1 , et les corrections à une boucle (energie propre et vertex) qui rentre dans le calcul du paramètre de la violation de CP ε_1 .

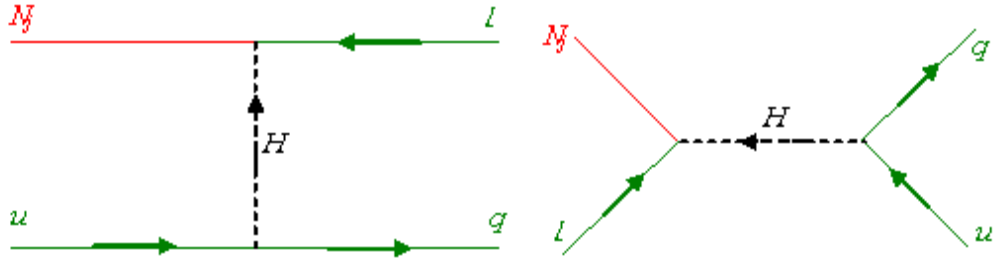


FIG. 5-3 – Processus $\Delta L = 1$, échange du Higgs, ces diagrammes font intervenir les quarks (top essentiellement) dans les processus de diffusion.

pond à la source de l'asymétrie est donné par⁷

$$\frac{dY_{N_1}}{dz} = -\frac{z}{Hs(z)} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{eq}} - 1 \right) (\gamma_{D_1} + \gamma_{S_1}), \quad (5.31)$$

où $z = \frac{M_1}{T}$. Ici $s(z)$ est la densité d'entropie et $\gamma_{D_1}, \gamma_{S_1}$ sont les taux d'interactions pour la désintégration et les contributions $\Delta L = 1$, respectivement.

La seconde BE appropriée à l'asymétrie leptonique est donnée par

$$\frac{dY_{B-L}}{dz} = -\frac{z}{s(z)H(M_1)} \left[\varepsilon_1 \gamma_{D_1} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{eq}} - 1 \right) + \gamma_w \frac{Y_{B-L}}{Y_L^{eq}} \right], \quad (5.32)$$

⁷Dans cette section on a suivi les notations du premier papier de la Réf. [39] où le lecteur peut trouver plus de détails.

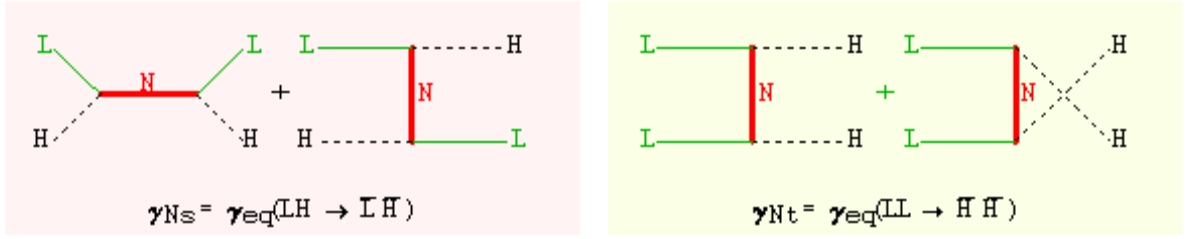


FIG. 5-4 – Processus $\Delta L = 2$, échange des neutrinos lourds de Majorana, ces diagrammes sont aussi appelés "washout".

où ε_1 est le paramètre de la violation de CP donné par l'éq. (5.22) et γ_w est le facteur de lavage qui est responsable de l'atténuation de l'asymétrie produite lors de la désintégration de N_1 , voir au-dessous l'éq. (5.50). Dans les eqs. (5.31) et (5.32), Y_i^{eq} est la densité de nombre à l'équilibre de particules d'espèces i , et de masse m_i , donnée par

$$Y_i^{eq}(z) = \frac{45}{4\pi^4} \frac{g_i}{g_*} \left(\frac{m_i}{M_1} \right)^2 z^2 K_2 \left(\frac{m_i z}{M_1} \right), \quad (5.33)$$

où g_i est le degré de liberté interne de la particule ($g_{N_i} = 2$, $g_\ell = 4$). A des températures beaucoup plus grande que l'échelle électrofaible on a $g_* \simeq 106.75$ dans le modèle standard, et $g_* \simeq 228.75$ dans le MSSM. H , le paramètre de Hubble à l'instant $z = 1$, et $s(z)$, la densité d'entropie, sont données par

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45}} \frac{M_1^2}{M_P}, \quad s(z) = \frac{2\pi^2 g_*}{45} \frac{M_1^3}{z^3}, \quad (5.34)$$

où $M_P = 1.22 \times 10^{19}$ GeV est l'échelle de la masse de Planck. On a aussi défini

$$\gamma_{s_j} = 2\gamma_{t_j}^{(1)} + 4\gamma_{t_j}^{(2)}. \quad (5.35)$$

La densité de réaction de la désintégration γ_{D_j} a la forme suivante :

$$\gamma_{D_j} = n_{N_j}^{eq} \frac{K_1(z)}{K_2(z)} \Gamma_{N_j}, \quad (5.36)$$

où $K_n(z)$ sont les fonctions de Bessel modifier. Γ_{N_j} du neutrino droit de Majorana N_j est le taux de désintégration total au niveau de l'arbre défini comme

$$\Gamma_{N_j} = \frac{(\lambda^\dagger \lambda)_{jj}}{8\pi} M_j, \quad (5.37)$$

où

$$n_{N_i}^{eq}(T) = \frac{g_i T m_i}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right). \quad (5.38)$$

On a utilisé la définition $\lambda = M_D/v$. On définit la densité de réaction $\gamma^{(i)}$ de n'importe quel processus de diffusion $a + b \rightarrow c + d$ par

$$\gamma^{(i)} = \frac{M_1^4}{64\pi^4} \frac{1}{z} \int_{\frac{(M_a+M_b)^2}{M_1^2}}^{\infty} dx \hat{\sigma}^{(i)}(x) \sqrt{x} K_1(\sqrt{x}z), \quad (5.39)$$

où $\hat{\sigma}^{(j)}(x)$ sont les sections efficaces réduites des différents processus qui contribuent aux équations de Boltzmann. Pour les processus $\Delta L = 1$ impliquants les quarks, nous avons

$$\hat{\sigma}_{t_j}^{(1)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x}\right)^2, \quad (5.40)$$

$$\hat{\sigma}_{t_j}^{(2)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x}\right) \left[\frac{x - 2a_j + 2a_h}{x - a_j + a_h} + \frac{a_j - 2a_h}{x - a_j} \ln\left(\frac{x - a_j + a_h}{a_h}\right) \right], \quad (5.41)$$

où

$$\alpha_u = \frac{\text{Tr}(\lambda_u^\dagger \lambda_u)}{4\pi} \simeq \frac{m_t^2}{4\pi v^2}, \quad a_j = \left(\frac{M_j}{M_1}\right)^2, \quad a_h = \left(\frac{\mu}{M_1}\right)^2, \quad (5.42)$$

μ est la coupure infrarouge, que nous mettons égale à 800 GeV dans l'analyse numérique des résultats de notre modèle [50, 51]. Pour les processus $\Delta L = 2$ impliquants les

neutrinos droits de Majorana, on a

$$\hat{\sigma}_N^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) A_{jj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n<j,j=1}^3 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) B_{nj}^{(1)} \quad (5.43)$$

$$\hat{\sigma}_N^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) A_{jj}^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n<j,j=1}^3 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) B_{nj}^{(2)} \quad (5.44)$$

où

$$A_{jj}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{a_j}{D_j} + \frac{a_j x}{2D_j^2} - \frac{a_j}{x} \left(1 + \frac{x+a_j}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right], \quad (5.45)$$

$$A_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x+a_j} + \frac{a_j}{x+2a_j} \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right], \quad (5.46)$$

$$B_{nj}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left[\frac{1}{D_j} + \frac{1}{D_n} + \frac{x}{D_j D_n} + \left(1 + \frac{a_j}{x} \right) \left(\frac{2}{a_n - a_j} - \frac{1}{D_n} \right) \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{a_n}{x} \right) \left(\frac{2}{a_j - a_n} - \frac{1}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x+a_n}{a_n} \right) \right], \quad (5.47)$$

$$B_{nj}^{(2)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x+a_n+a_j} \ln \left[\frac{(x+a_j)(x+a_n)}{a_j a_n} \right] + \frac{2}{a_n - a_j} \ln \left(\frac{a_n(x+a_j)}{a_j(x+a_n)} \right) \right\} \quad (5.48)$$

et

$$D_j = \frac{(x-a_j)^2 + a_j c_j}{x-a_j}, \quad c_j = a_j \sum_{\alpha=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j} \lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{64\pi^2}. \quad (5.49)$$

Finalement, γ_w qui traduit la contribution des processus de lavage de l'asymétrie dans les équations de Boltzmann est

$$\gamma_w = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2} \gamma_{D_j} + \frac{Y_{N_j}}{Y_{N_j}^{eq}} \gamma_{t_j}^{(1)} + 2\gamma_{t_j}^{(2)} - \frac{\gamma_{D_j}}{8} \right) + 2\gamma_N^{(1)} + 2\gamma_N^{(2)}. \quad (5.50)$$

Ici, mettons l'accent sur ce qu'on appelle le RIS (états réelles intermédiaires) dans les interactions $\Delta L = 2$ qui doivent être soigneusement soustraites pour éviter le double comptage dans les équations de Boltzmann. Ceci correspond au terme $-\frac{1}{8}\gamma_{D_j}$ dans l'éq. (5.50). Pour plus de détails voir Réfs. [48, 52] et le premier papier de la Réf. [49].

5.6 Résultats et discussion

Nous sommes maintenant prêts à présenter nos résultats numériques. D’abord faisons plusieurs remarques importantes. Quoique notre modèle soit supersymétrique, nous avons considéré dans notre analyse des BE seulement les interactions de particules du SM. Ce qui est une bonne approximation (voir remarque 4 du bas de page). Les auteurs de la réf. [51] ont démontrés que les interactions de SUSY ne changent pas d’une manière significative l’asymétrie baryonique finale. En outre, nous n’avons pas inclus dans notre analyse les effets du groupe de renormalisation sur les masses et les couplages dépendants de l’énergie. Le premier papier de la réf. [49] a étudié ces effets, cet article a également inclus les effets de la température finie et les processus $\Delta L = 1$ impliquants les bosons de jauge du SM, que nous avons aussi ignorés dans notre analyse. Ceci devrait être une bonne approximation puisque ces effets sont significatifs seulement dans le régime du lavage faible et les paramètres de notre modèle semblent favoriser le régime du lavage fort avec $\tilde{m}_1 = \frac{(M_D^\dagger M_D)_{11}}{M_1} \simeq 0.1$ eV. Les processus de diffusion impliquants les bosons de jauge du SM ont été également étudiés dans la réf. [52] dans le contexte de la leptogénèse résonnante où ces effets se sont avérés significatifs.

Notre prochaine étape est de mettre ce modèle à l’essai et de vérifier ses prédictions. Afin de calculer la valeur de l’asymétrie baryonique nous procédons à résoudre numériquement les équations de Boltzmann. Nous scanons l’espace des paramètres correspondant à a_{12} , b , l’angle d’oscillation θ_{13} , la phase de violation de CP δ et la phase de Majorana α . Afin de satisfaire automatiquement les données des oscillations des neutrinos, nous avons introduit les paramètres de neutrino léger suivantes :

$$\Delta m_{\odot}^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad \Delta m_a^2 = 5.54 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad \sin \theta_{12} = 0.52. \quad (5.51)$$

En utilisant un spectre hiérarchique, nous voyons que les masses m_1 , m_2 et m_3 sont fixes. D’autre part, nous considérons le mélange maximal dans le secteur 2 – 3 de la matrice de mélange leptonique, i.e $\theta_{23} = \frac{\pi}{4} + t_{23}\epsilon$ avec t_{23} étant zéro ($t_{23} \sim \mathcal{O}(1)$) a un impact minimal

sur η_B). La phase δ de la violation de CP et la phase α de Majorana sont supposées variables respectivement dans les intervalles $[0, 2\pi]$ et $[0, \pi]$. Nous rappelons le lecteur que la deuxième phase de Majorana β est liée à α à travers la relation $\beta \simeq \alpha + \frac{\pi}{2} + b\epsilon$. L'angle de mélange θ_{13} changera dans l'intervalle $[0, 0.2]$ comme l'exige les expériences de réacteur de neutrino.

Dans la Figure (5-5), pour un ensemble donné de paramètres, nous illustrons les différents taux thermiques moyens de réaction $\Gamma_X = \frac{\gamma_X}{n_{N_1}^{eq}}$ contribuant aux BE comme fonction de $z = \frac{M_1}{T}$.

Tous les taux à l'instant $z = 1$ respectent la 3^{ème} condition de Sakharov stipulant que tous les processus doivent se produire hors de l'équilibre thermique (i.e. $\Gamma_X \lesssim H(z = 1)$), et ainsi l'effet prévu du lavage dû aux processus $\Delta L = 2$ sera petit. Les paramètres choisis pour cette illustration sont : $\delta = \pi/2$, $\alpha = \pi/2$, $a_{12} = 0.01$, $b = 0.9$, $cm_\tau = m_t \left(\frac{m_\tau}{m_b} \right) = 135$ GeV et $\theta_{13} = 0.02$. L'éq. (5.51) fixe les masses des neutrinos et donne : $m_1 = 0.00271292$ eV, $m_2 = 0.00688186$ eV et $m_3 = 0.0380442$ eV. Pour ce choix nous obtenons $|\epsilon_1| \simeq 2 \times 10^{-7}$. Les masses calculées des r.h.n sont dans ce cas-ci

$$M_1 = 9 \times 10^9 \text{ GeV}, \quad M_2 = 8.7 \times 10^{11} \text{ GeV}, \quad M_3 = 2.6 \times 10^{14} \text{ GeV}. \quad (5.52)$$

La masse du r.h.n le plus léger est conforme avec la limite inférieure dérivée dans la réf. [49], $M_1 \geq 2.4 \times 10^9$ GeV, pour des masses des neutrinos hiérarchiques et en supposant qu'on commence par une abondance initiale de N_1 nulle (c'est ce que nous avons supposé dans notre calcul). Cette masse est conforme également à la limite supérieure trouvée dans la réf. [53] après une étude indépendante du modèle de l'asymétrie CP, et à la limite dérivée dans la réf. [48] basée sur l'évaluation de la production de ν_R et l'étude du lavage de l'asymétrie.

La figure (5-6) représente la solution des BE, abondance de N_1 et l'asymétrie baryonique, toutes les deux comme fonctions de z pour le même ensemble de paramètres mentionnés ci-dessus. L'asymétrie finale baryonique, en termes d'un rapport du nombre de baryon sur le nombre de photon, est (voir la courbe foncée et pleine dans la figure

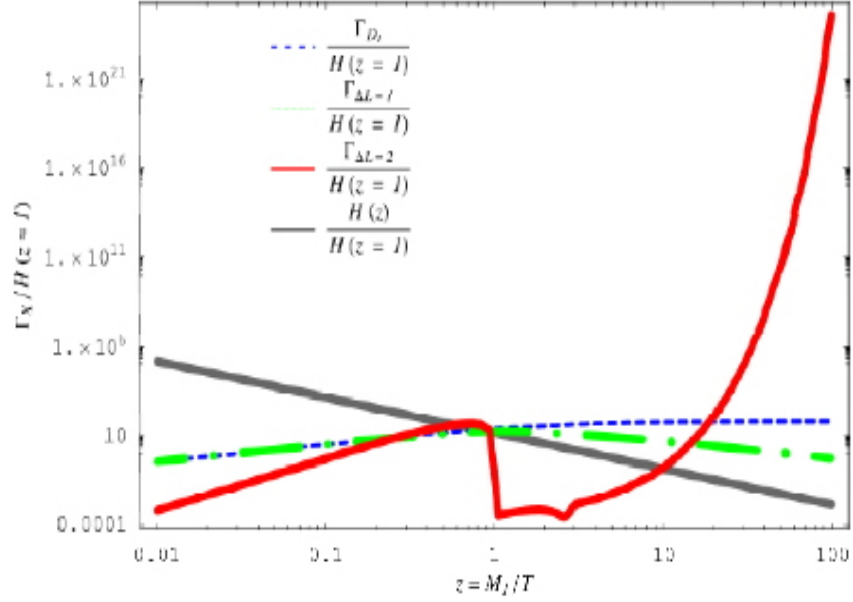


FIG. 5-5 – Différents taux thermiques de réactions moyennes Γ_X contribuant aux BE normalisées par le taux de l'expansion de l'univers $H(z = 1)$. La ligne continue grise représente $H(z)/H(z = 1)$, celle en tiret est pour $\Gamma_{D_1}/H(z = 1)$, la ligne avec des point et des tirets représente les processus $\Gamma_{\Delta L=1}/H(z = 1)$ et la courbe rouge représente $\Gamma_{\Delta L=2}/H(z = 1)$.

(5-6) pour $z \gg 1$)

$$\eta_B \simeq 6.03 \times 10^{-10}. \quad (5.53)$$

Ce nombre est à l'intérieur de la plage d'observation de l'éq. (5.1). Nos deux codes MATHEMATICA et MAPLE ont été testés de reproduire les résultats du premier papier de la réf. [39] avant d'être appliquée à ce modèle.

En ce point nous devrions mentionner quelques difficultés potentielles de la désintégration du gravitino dans le modèle.

Si la brisure de la supersymétrie est produite par la supergravité conventionnel, il est normal de s'attendre à ce que la masse du gravitino soit de l'ordre de 1 TeV. Un tel gravitino, avec ses interactions supprimées à l'échelle de Planck, se désintégrerait en des particules du MSSM avec une durée de vie de l'ordre de 1 seconde. Les produits

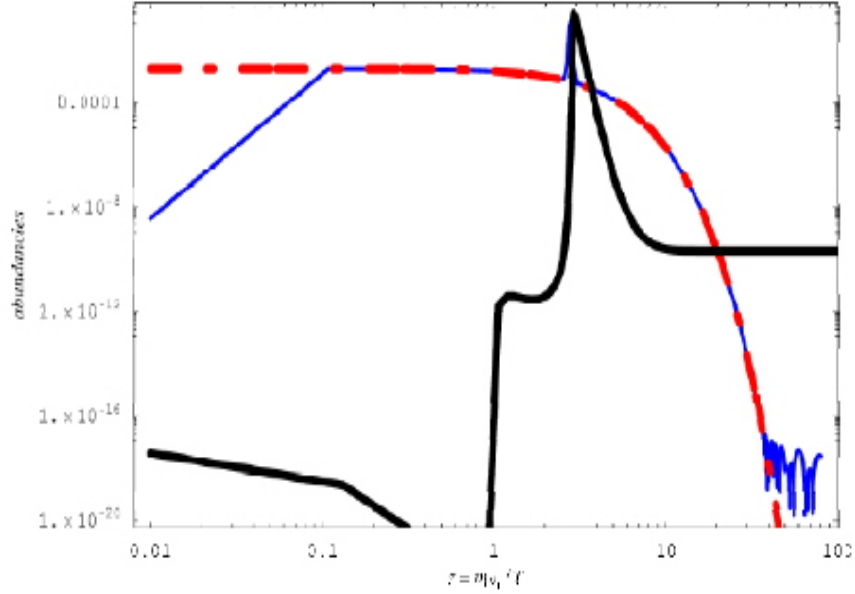


FIG. 5-6 – Evolution de Y_{N_1} (solide blue), $Y_{N_1}^{eq}$ (points-tirets) et l’asymétrie baryonique η_B (ligne noire continue) en fonction de z dans le modèle. La valeur estimé pour l’asymétrie baryonique est $\eta_B \simeq 6.03 \times 10^{-10}$, avec $Y_{N_1}^{ini} = 0$ et en supposant qu’il n’ya pas d’asymétrie pré-existante $B - L$.

de la désintégration intervertirait alors le succès de la nucléosynthèse standard du big bang. Dans un scénario inflationniste, l’exigence d’être consistant avec l’abondance des éléments légers met une limite inférieure sur la température du réchauffement T_R . Pour une masse du gravitino de 300 GeV à 3 TeV, une limite $T_R > 6 \times 10^6$ GeV a été posé [54]. Maintenant, la désintégration de N_1 qui produit l’asymétrie leptonique devrait se produire après le réchauffement, ainsi n’importe quelle asymétrie produite avant le réchauffement sera diluée par l’inflation. Donc on exige que $M_1 < T_R$, qui pour une masse du gravitino de 300 GeV à 3 TeV est en conflit avec les prévisions de l’éq. (5.52).

Il y a plusieurs manières de surmonter ce problème. *i)* Dans le scénario de brisure de SUSY engendrée par une jauge dynamique, le gravitino est la particule de SUSY la plus légère (LSP) avec une masse de l’ordre de 10^{-4} eV – 100 GeV. Pour $m_{\tilde{g}} < 100$ MeV, il n’y a aucun problème cosmologique ou astrophysique. Dans un tel scénario l’axion peut servir comme matière noire. *ii)* Dans le scénario de brisure de SUSY engendrée par les

anomalies, la masse du gravitino est augmentée par un facteur de boucle comparé aux masses des squarks et est naturellement de l'ordre de 100 TeV. Un tel gravitino se désintégrerait avec une durée de vie plus courte sans affecter la nucléosynthèse du big bang. Dans ce cas, le gaugino est un candidat naturel pour la matière noire. *iii*) Le gravitino lui-même peut être le LSP et la matière noire avec une masse de l'ordre de 100 GeV, dans ce cas il ne se désintègre pas [55]. D'autres solutions qui incluent le changement de la dynamique du processus même de la leptogénèse font appel à *iii*) la leptogénèse non thermique [56], *iv*) la leptogénèse résonnante [52, 57], ou *v*) la leptogénèse douce [58]. Les résultats présentés ici sont compatibles avec les trois premières solutions.

5.7 Conclusion

Le mécanisme de seesaw est attrayant car il peut expliquer l'origine des petites masses des neutrinos et en même temps expliquer l'asymétrie baryonique observée dans l'univers par la désintégration hors équilibre des neutrinos droits super-lourds. Il peut alors établir un lien entre le paramètre d'asymétrie baryonique η_B produit à haute température, la masse des neutrinos et aux paramètres de mélange observables dans les expériences de basse énergie. Aucune connexion quantitative ne peut être trouvée entre ces paramètres dans le cas du SM. Il y a eu plusieurs tentatives dans la littérature [39, 40, 59] d'établir un rapport entre les deux. Dans cette première partie nous avons adressé cette question dans le contexte d'une classe de modèles supersymétriques gauche-droite symétriques minimales.

Dans les modèles que nous étudions la minimalité du secteur de Higgs implique que M_l et M_D (les matrices de masse des leptons chargés et des neutrinos de Dirac) sont proportionnelles. En conséquence, le secteur de seesaw entier (y compris les neutrinos droits lourds et les neutrinos légers) a seulement 9 paramètres. C'est le même nombre d'observables de neutrino de basse énergie (3 masses, 3 angles de mélanges et 3 phases). En conséquence nous pouvons lier l'asymétrie baryonique de l'univers aux observables

de neutrino de basse énergie. Ce dispositif est différent du mécanisme de seesaw du SM qui a trop de paramètres arbitraires. Notre solution numérique des équations couplées de Boltzmann prouve que ce système conditionné par $M_l \propto M_D$ mène à une asymétrie baryonique acceptable. La condition d'une asymétrie baryonique acceptable limite certaines observables des neutrinos légers. On trouve que $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$, $0.01 \lesssim \theta_{13} \lesssim 0.07$ et $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ sont nécessaire pour une baryogénèse réussit. Les expériences futures d'oscillation de neutrino peuvent directement sonder la dynamique de l'univers dans son stage primordial et dire si notre modèle est fiable ou non.

5.8 Le Deuxième Modèle : Leptogénèse dans le Contexte du Modèle Standard à quatre Générations

Le lagrangien du modèle que nous considérons est donnée par,

$$L = L_{SM} + \bar{\psi}_{R_i} i \not{\partial} \psi_{R_i} - \frac{M_{N_i}}{2} (\bar{\psi}_{R_i}^c \psi_{R_i} + h.c.) - (\lambda_{i\alpha}^\nu \bar{L}_\alpha \psi_{R_i} \phi + h.c.) , \quad (5.54)$$

où ψ_{R_i} sont des spineurs à deux composantes qui décrivent les neutrinos d'hélicité droite et on définit un spineur de Majorana de 4-composantes, $N_i = \psi_{R_i} + \psi_{R_i}^c$. L'indice i varié de 1 à 4, et $\alpha = e, \mu, \tau, \sigma$. La composante σ de L_α correspond au doublet leptonique d'hélicité gauche qui doit satisfaire les contraintes du LEP sur la largeur de désintégration du boson de jauge Z [83]. Les $\lambda_{i\alpha}^\nu$ sont les couplages de Yukawa et le champ ϕ est le doublet du boson de Higgs du SM avec la valeur moyenne du vide noté par v .

On travail dans une base où la matrice M de masse des neutrinos droits est diagonale et réelle,

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3, M_4) \quad (5.55)$$

on définit la matrice de Dirac $m_D = \lambda^\nu v$.

La matrice de masse des neutrinos gauches légers est donnée par la formule de seesaw,

$$m_\nu = \lambda^{\nu\dagger} M^{-1} \lambda^\nu v^2. \quad (5.56)$$

et qui est diagonalisée par la matrice bien connue PMNS [44].

On considère la désintégration hors de l'équilibre thermique du singlet de jauge le plus léger N_1 . Le taux de désintégration à l'ordre de l'arbre est donné par

$$\Gamma_{N_j} = \frac{(\lambda^\dagger \lambda)_{jj}}{8\pi} M_j = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{8\pi} M_j = \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1 M_j}{8\pi v^2}, \quad (5.57)$$

où $\lambda \equiv \lambda^\nu$ et nous avons défini⁸

$$\tilde{m}_j^{(4G)} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{M_1} v^2. \quad (5.58)$$

Pour assurer une désintégration hors de l'équilibre thermique de N_1 il est nécessaire que $\frac{\Gamma_{N_1}}{H(T=M_1)} \ll 1$, où H est le taux d'expansion de l'univers à la température $T = M_1$. Cette condition va imposer une limite supérieure sur la masse usuelle effective \tilde{m}_1 [84].

L'asymétrie CP calculée de l'interférence des diagrammes de Feynmann à l'ordre de l'arbre avec ceux à l'ordre d'une boucle (i.e. corrections : énergie propre et vertex) est [85]

$$\epsilon_i = \frac{1}{(8\pi)} \frac{1}{[\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu]_{ii}} \sum_j \text{Im} [\lambda^{\nu\dagger} \lambda_\nu]_{ij}^2 \left[f \left(\frac{M_j^2}{M_i^2} \right) + g \left(\frac{M_j^2}{M_i^2} \right) \right], \quad (5.59)$$

⁸Pour simplifier notre notation, nous écrivons les somme sur $\alpha = 1$ à 4 pour dénoter les sommes sur tous les saveurs e, μ, τ, σ , et les sommes sur $\alpha = 1$ à 3 pour dénoter les sommes sur les trois saveurs les plus légers. Par exemple, $\tilde{m}_j^{(3G)} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{M_1} v^2$ est le paramètre de masse effective habituel \tilde{m}_1 défini dans la littérature pour $j = 1$.

où

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \left[1 - (1+x) \ln \frac{1+x}{x} \right], \\ g(x) &= \frac{\sqrt{x}}{1-x}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Dans la référence [72] il a été montré que la limite supérieure de l'asymétrie CP produite lors de la désintégration du neutrino droit N_1 le plus léger est

$$|\epsilon_1| \lesssim \frac{3}{8\pi} \frac{M_1 m_4}{v^2}, \tag{5.61}$$

où m_4 dénote la plus grande valeur propre de la matrice de masse m_ν des neutrinos d'hélicité gauche. Due aux contraintes expérimentaux on exige que m_4 soit > 45 GeV, ce qui implique que la limite sur ϵ_1 est non pertinente. En général, il ya des régions dans l'espace des paramètres dans lesquelles l'asymétrie CP produite peut être très grande, ainsi la région permise finale de l'espace des paramètres pourrait inclure des secteurs où la contribution des processus de lavage pouvait être aussi très grande. Dans la référence [72] des exemples de texture possible pour la matrice des couplages de Yukawa λ' sont données pour illustrer comment obtenir des masses qui sont consistante avec les data de basses énergie et une valeur approprié de l'asymétrie de CP de la désintégration de N_1 .

5.9 Considérations Préliminaires

Dans la référence [79] il a été précisé que pour la leptogénèse thermique l'objet approprié qui devrait être étudié est la matrice densité ρ [80]. Pour des températures plus grande que 10^{12} GeV, la matrice ρ pour le modèle de Fukugita-Yanagida est une matrice (3×3) avec tous ses éléments différent de zéro. Cependant, lorsque la température diminue et chacune des différentes interactions définies par un couplage de Yukawa chargé rentre en équilibre, les éléments off-diagonaux de la matrice densité ρ vont s'annuler. Dans notre modèle à l'échelle du TeV tout les couplages de Yukawa chargés sont en équilibre

et ainsi ρ serait diagonale. Cette matrice est normalisé de la manière suivante

$$Tr\rho = \sum_{\alpha} Y_{L_{\alpha}} \equiv \sum_{\alpha} (Y_{\ell_{\alpha}} - Y_{\bar{\ell}_{\alpha}}) . \quad (5.62)$$

où la somme sur les indices α indique la somme sur les saveurs.

Une autre question importante est le rapport entre l'asymétrie leptonique produite et l'asymétrie induite $B - L$ qui est conservée par les interactions de sphaléron. Une étude profonde doit être faite concernant les températures et les interactions en équilibre qui peuvent changer l'équation qui relie cette asymétrie voir référence [79]. En général, la procédure utilisée pour cette étude est l'établissement des équations concernant les potentiels chimiques et qui reflètent qu'elle interaction est en équilibre thermique. Ainsi les équations de l'équilibre chimique nous permettent d'écrire les densités d'asymétries en termes d'une certaine asymétrie spécifique, soit $Y_{L_{\alpha}}$. Pour le modèle de Fukugita-Yanagida il y aurait alors génériquement une matrice $A_{\alpha\beta}$ (3×3) de la forme [79]

$$Y_{B/3-L_{\alpha}} = A_{\alpha\beta} Y_{L_{\beta}}, \quad (5.63)$$

et les valeurs numériques des éléments de A sont déterminées à partir des équations des potentiels chimiques. Si toutes les interactions avec les couplages de Yukawa chargés sont en équilibre, aussi bien que les interactions de sphaléron, l'équation dans le cas de N générations se simplifié à,

$$\frac{Y_B}{N} - Y_{L_{\alpha}} = \left(-\frac{4}{3N} + \frac{8}{3} \frac{1}{4N+2} \right) \sum_{\beta} Y_{L_{\beta}} - 3Y_{L_{\alpha}}, \quad (5.64)$$

ou en sommant sur toutes les générations

$$Y_{B-L} = - \left(\frac{22N+13}{6N+3} \right) \sum_{\alpha} Y_{L_{\alpha}}. \quad (5.65)$$

Dans le scénario standard du modèle de FY avec trois neutrinos RH, où l'asymétrie

se produit à une certaine échelle (grande) pour laquelle pas tous les couplages chargés de Yukawa sont en équilibre, dans ce cas on devrait utiliser l'éq. (5.63) pour relier les asymétries. Ce qui est habituellement étudié dans le système des équations couplées de Boltzmann est l'équation $Y_L = \sum_{\alpha} Y_{L_{\alpha}}$, voir ci-dessous notre discussion sur ce point, et ainsi alors l'asymétrie $B - L$ est calculée à partir de l'éq. (5.65). De notre discussion précédente nous voyons qu'il n'est pas tout à fait correct de procéder de cette manière à moins que quelques approximations soient faites sur les différents $Y_{L_{\alpha}}$.

Pour notre modèle à l'échelle du TeV⁹, tous les couplages chargés de Yukawa sont en équilibre, alors il serait correcte d'utiliser les équations (5.64) et (5.65). Un autre avantage qu'offre notre modèle est que le couplage de Yukawa du neutrino d'hélicité gauche lourd est de l'ordre de 1, cela nous assure que les masses de la quatrième génération de leptons soient assez grandes, et ainsi obtenir une augmentation considérable de la valeur de l'asymétrie CP produite dans le modèle. Cependant, l'interaction de diffusion qui est associée au couplage de Yukawa du neutrino gauche lourd serait aussi en équilibre dans notre modèle. Cela changerait les équations d'équilibre des potentiels chimiques de tel sorte que la relation entre $B - L$ (B) et L est modifiée a :

$$\begin{aligned}
Y_{B-L} &= - \left(\frac{13}{3} + \frac{8(13-3N)}{3(12N-2)} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{L_{\alpha}} = - \left(\frac{22N+13}{6N-1} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{L_{\alpha}}. \quad (5.66) \\
Y_B &= - \left(\frac{(8N+4)}{(14N+25)} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{L_{\alpha}}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme il a été estimée dans la référence [72] il n'y a aucune asymétrie nette produite dans le secteur leptonique gauche lourd. En conséquence, nous pouvons poser $Y_{L_{\sigma}}$ égale à zéro et faire les suppositions habituelles pour $Y_{L_{\alpha}}$ en construisant l'équation de Boltzmann pour Y_L et à la fin nous employons l'équation (5.66) pour relier l'asymétrie leptonique produite à l'asymétrie finale $B - L$. Dorénavant, Y_L dénotera la somme sur l'indice α des asymétries des trois saveurs leptoniques légères seulement.

⁹Dans ce modèle, nous dénotons par σ la saveur de la quatrième génération leptonique.

Dans la référence [70] l'effet du groupe de renormalisation (RG) sur les masses et les couplages était inclu. En particulier, en considérant les valeurs de ces couplages à haute énergie, énergie à laquelle l'asymétrie leptonique est produite, les diagrammes $\Delta L = 1$ proportionnels aux couplages de jauge peuvent devenir importants comparés à ceux proportionnels au couplage de Yukawa du quark top. Dans notre modèle à l'échelle du TeV, nous avons vérifié que cet effet est très petit et donc nous n'incluons pas les effets du RG dans notre analyse.

En outre, dans la réf. [70] les effets de la température ont été inclus dans le calcul, il a été précisé que numériquement ces effets sont particulièrement appropriés en corrigeant le propagateur du champ scalaire de Higgs. Nous incluons seulement cette correction thermique dans notre calcul.

Un autre point important qui devrait être mentionné, et qui est crucial pour notre modèle, est le fait que la température réelle de désintégration à laquelle l'asymétrie leptonique est produite est juste au-dessus de l'échelle électrofaible ; ainsi on doit faire attention et vérifier que pour notre choix des paramètres les interactions de sphaléron sont toujours en équilibre. Bien que, dans le SM il n'y a aucune transition de phase du premier ordre, ceci reste valable pour notre modèle à quatre générations, les interactions de sphaléron sont translatées pour les températures au-dessous de ~ 100 GeV [81]. Le calcul détaillé des équations des équilibres chimiques dans la région près de la transition de phase électrofaible a été élaboré dans [82].

5.10 Intégration des Equations de Boltzmann

On définit la densité de réaction $\gamma^{(i)}$ de n'importe quel processus de diffusion $a + b \rightarrow c + d$ par

$$\gamma^{(i)} = \frac{M_1^4}{64\pi^4} \frac{1}{z} \int_{\frac{(M_a+M_b)^2}{M_1^2}}^{\infty} dx \hat{\sigma}^{(i)}(x) \sqrt{x} K_1(\sqrt{x}z),$$

où $\hat{\sigma}^{(j)}(x)$ sont les sections efficaces réduites des différents processus qui contribuent aux équations de Boltzmann. Pour les processus $\Delta L = 1$ impliquant les quarks, nous avons

$$\hat{\sigma}_{t_j}^{(1)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x} \right)^2 = 3\alpha_u \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1}{v^2} \left(\frac{x - a_j}{x} \right)^2, \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t_j}^{(2)} &= 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x} \right) \left[\frac{x - 2a_j + 2a_h}{x - a_j + a_h} + \frac{a_j - 2a_h}{x - a_j} \ln \left(\frac{x - a_j + a_h}{a_h} \right) \right] \\ &= 3\alpha_u \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1}{v^2} \left(\frac{x - a_j}{x} \right) \left[\frac{x - 2a_j + 2a_h}{x - a_j + a_h} + \frac{a_j - 2a_h}{x - a_j} \ln \left(\frac{x - a_j + a_h}{a_h} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.68)$$

où

$$\alpha_u = \frac{Tr(\lambda_u^\dagger \lambda_u)}{4\pi} \simeq \frac{m_t^2}{4\pi v^2}, \quad a_j = \left(\frac{M_j}{M_1} \right)^2, \quad a_h = \left(\frac{\mu}{M_1} \right)^2,$$

μ est la coupure infrarouge, que nous prenons égale à 800 GeV due à des considérations phénoménologiques¹⁰. Nous avons ainsi,

$$\gamma_{S_j} = 2\gamma_{t_j}^{(1)} + 4\gamma_{t_j}^{(2)}.$$

Pour les processus $\Delta L = 2$ impliquant les neutrinos droits de Majorana, et qui sont responsable d'une partie du "washout" de l'asymétrie créé, on a

$$\hat{\sigma}_N^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j}) A_{jj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\substack{n < j \\ j=1}}^4 Re(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta n}^* \lambda_{\beta j}) B_{nj}^{(1)} \quad (5.69)$$

$$\hat{\sigma}_N^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j}) A_{jj}^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\substack{n < j \\ j=1}}^4 Re(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta n}^* \lambda_{\beta j}) B_{nj}^{(2)} \quad (5.70)$$

¹⁰800 GeV est la valeur qui marque la limite supérieure de la validité de la théorie de perturbation, et dénote aussi la masse maximale que le Higgs du modèle standard et SUSY peut avoir.

où

$$A_{jj}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{a_j}{D_j} + \frac{a_j x}{2D_j^2} - \frac{a_j}{x} \left(1 + \frac{x + a_j}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x + a_j}{a_j} \right) \right], \quad (5.71)$$

$$A_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x + a_j} + \frac{a_j}{x + 2a_j} \ln \left(\frac{x + a_j}{a_j} \right) \right], \quad (5.72)$$

$$B_{nj}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left[\frac{1}{D_j} + \frac{1}{D_n} + \frac{x}{D_j D_n} + \left(1 + \frac{a_j}{x} \right) \left(\frac{2}{a_n - a_j} - \frac{1}{D_n} \right) \ln \left(\frac{x + a_j}{a_j} \right) \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{a_n}{x} \right) \left(\frac{2}{a_j - a_n} - \frac{1}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x + a_n}{a_n} \right) \right], \quad (5.73)$$

$$B_{nj}^{(2)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x + a_n + a_j} \ln \left[\frac{(x + a_j)(x + a_n)}{a_j a_n} \right] + \frac{2}{a_n - a_j} \ln \left(\frac{a_n(x + a_j)}{a_j(x + a_n)} \right) \right\}, \quad (5.74)$$

et

$$D_j = \frac{(x - a_j)^2 + a_j c_j}{x - a_j}, \quad c_j = a_j \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j} \lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j})}{64\pi^2},$$

alors on a

$$\gamma_w = \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{2} \gamma_{D_j} + \frac{Y_{N_j}}{Y_{N_j}^{eq}} \gamma_{t_j}^{(1)} + 2\gamma_{t_j}^{(2)} - \frac{\gamma_{D_j}}{8} \right) + 2\gamma_N^{(1)} + 2\gamma_N^{(2)}.$$

En ce point plusieurs commentaires importants s'imposent. Tout d'abord, notons que dans les équations (5.57), (5.40) et (5.41), nous avons sommé sur tout les états ℓ_α . Cependant, dans les équations (5.69) et (5.70) les termes aux quels correspondent $\beta = 4$, (c'est à dire la saveur σ , voir la figure 5-7), ne contribuent pas à l'équation (5.32) parce qu'elles sont multipliés par $Y_{L_\sigma} = 0$. En effet, il a été mentionné avant, que les processus impliquant en même temps dans l'état initial et final seulement cette saveur sont en équilibre thermique, et ainsi alors il n'y a aucune asymétrie créé pour cette saveur. Deuxièmement, comme dans le modèle de FY, on peut paramétriser γ_{D_j} et γ_{S_j} par M_1 et $\tilde{m}_1^{(4G)}$ (voir éqs. (5.57), (5.40), (5.41)). Troisièmement, les processus $\Delta L = 2$ peuvent être divisés et traités dans deux régimes séparés.

La contribution pour une température variant de $z = 1$ à $z \simeq 10$, 1^{er} régime, est proportionnelle à $\sqrt{\tilde{m}_1^{(4G)} \tilde{m}_1^{(3G)}}$ au lieu de \tilde{m}_1 . Pour les température ($z \gg 1$), 2^{ème} régime,

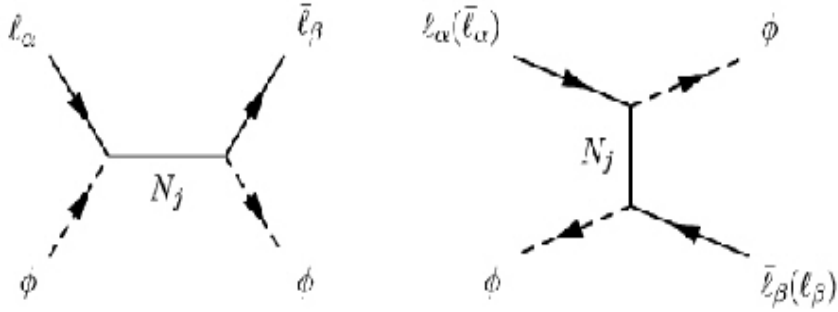


FIG. 5-7 – Les canaux s et t des diagrammes $\Delta L = 2$ (échange des Neutrinos de Majorana).

la contribution dominante au premier ordre serait proportionnelle à $\bar{m}^2 \equiv tr(m_\nu^\dagger m_\nu)$, si la sommation sur l'indice β est de 1 à 4. Enfin, la même remarque concernant le RIS (états réelles intermédiaires) s'impose ici aussi pour les interactions $\Delta L = 2$, qui doivent être soigneusement soustraites pour éviter le double comptage dans les équations de Boltzmann. Ceci correspond au terme $-\frac{1}{8}\gamma_{D_j}$ dans l'éq. (5.50).

5.11 Results et Conclusions

5.11.1 Contraintes sur la 4^{ème} génération

Notre modèle consiste à l'addition au contenu de particules du modèle standard d'un 4^{ème} doublet de leptons et de quarks (dans le but d'éliminer les anomalies), et quatre singlets de neutrinos d'hélicité droite. Les masses et les couplages des singlets sont contraints les données des expériences : solaire, atmosphérique, WMAP, et la bonne valeur de l'asymétrie CP, ϵ_1 . Pour ce qui concerne la quatrième génération des leptons et des quarks, la contrainte directe est qu'elle doit être plus lourde que $\frac{M_Z}{2}$. Il existe des contraintes plus fortes que $\frac{M_Z}{2}$ venant des testes de précision électrofaible : par exemple, la limite inférieure du LEP II sur la masse du lepton chargé σ est approximativement 80 GeV [86]. Il est bien connu, que la valeur centrale de la masse du Higgs du SM est inférieure à la limite inférieure de la mesure directe du LEP II [87] et l'existence d'une quatrième

génération est une solution possible d'augmenter la masse du Higgs [88, 89, 90]. La forme de la courbe de la désintégration du Z en prenant quatre génération a été intensivement étudiée dans par exemple la réf. [91] où nous pouvons voir que le quatrième neutrino gauche est exclu à 95% CL si sa masse est inférieure à 46.7 ± 0.2 GeV. Dans notre analyse les masses des neutrinos gauches sont toujours contraintes à satisfaire les données (solaire + atmosphérique+ WMAP) aussi bien que cette dernière limite pour le 4^{ème} neutrino gauche. Il existe d'autres contraintes sur la quatrième génération (les éléments de la matrice de CKM généralisés, les paramètres optiques etc.) qui peuvent être trouver dans la réf. [83] et dans la réf. [92], où des expériences du Tevatron et futures au LHC sont largement discutées.

5.11.2 Solutions Numeriques des BE

Dans la figure 5-8, on présente pour un ensemble choisi de paramètres les différents taux de réactions moyenné contribuant aux BE comme fonction de $z = \frac{M_1}{T}$:

$$\Gamma_X = \frac{\gamma_X}{n_{N_1}^{eq}}, \quad X = D, S, \Delta L = 2.$$

Il est clair de cette figure que pour cet ensemble de paramètres, et il est vrai pour une large plage de l'espace des paramètres, que tous les taux de réaction à $z = 1$ respectent la 3^{ème} condition de Sakharov (i.e. $\Gamma_X < H(z = 1)$), et ainsi l'effet du lavage due aux interactions $\Delta L = 2$ est prévu être petit. Les paramètres choisis pour cette illustration sont : $M_1 = 450$ GeV, $M_2 = 2 \times 10^6$ GeV, $M_3 = 10^6$ GeV, $M_4 = 605$ GeV, $\epsilon_1 \simeq 4.2 \times 10^{-6}$, $\tilde{m}_1^{(3G)} = 2.7 \times 10^{-5}$ eV et $\tilde{m}_1^{(4G)} = 3.6 \times 10^{-5}$ eV.

La figure 5-9 représente la solution des BE, abondance et asymétrie $B - L$, en fonction de z . La valeur de l'asymétrie baryonique générée est $\eta_B \simeq 6 \times 10^{-10}$. En Appliquant le mécanisme de seesaw à notre modèle pour ce choix de paramètres, on obtient un neutrino d'hélicité gauche lourd avec une masse plus grande que 48 GeV, qui est compatible avec les contraintes sur la 4^{ème} génération (voir section 5.11.1) et les trois neutrinos légers de

masses allant de l'ordre de 10^{-1} eV à quelques 10^{-7} eV.

Dans cette partie de notre travail, on a présenté les solutions des équations de Boltzmann couplées d'un modèle de leptogénèse thermique à l'échelle du TeV. On a soigneusement étudié l'effet des interactions faisant intervenir la 4^{ème} génération de leptons et on a écrit d'une façon consistante les BE qui contribuent à l'asymétrie baryonique finale avec le facteur de conversion approprié de l'asymétrie leptonique à celle baryonique. Nos résultats montrent que dans cette extension simple du modèle standard, il est possible de produire le taux observé de l'asymétrie baryonique de l'univers d'une façon générique.

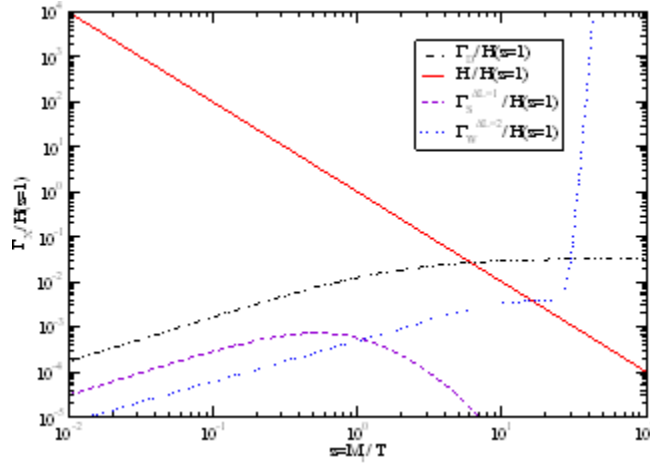


FIG. 5-8 – Les densités de réactions thermiques Γ_X contribuant aux BE normalisé par le taux d'expansion de l'univers $H(z = 1)$.

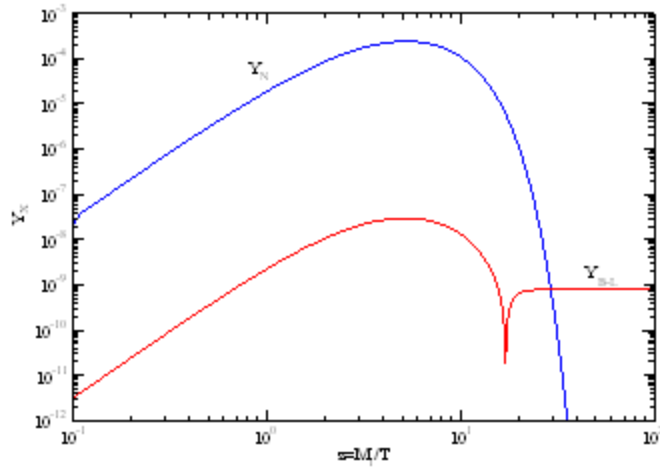


FIG. 5-9 – Abondance Y_{N_1} et l'asymétrie baryonique Y_{B-L} pour le modèle à quatre générations.

ANNEXE A

Les états vectoriels physiques possibles sont : $\alpha_{-t}^i |0\rangle, \tilde{\alpha}_{-t}^i |0\rangle, \alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s} |0\rangle, \tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s} |0\rangle,$
 $\tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s} |0\rangle$ et $\alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s} |0\rangle$ avec t, u et $q \in N^*$. Pour les états $|\psi\rangle_{phys}$ de la forme
 $\alpha_{-t}^i |0\rangle$ et $\tilde{\alpha}_{-t}^i |0\rangle$ et on imposant

$$M^2 |\psi\rangle_{phys} = 0 \quad (\text{A-1})$$

et

$$N |\psi\rangle_{phys} = (\tilde{N} + \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_{\alpha} m_{\alpha}) |\psi\rangle_{phys} \quad (\text{A-2})$$

on obtient

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \left(\frac{m_{\alpha}^2}{4R_{\alpha}^2} + n_{\alpha}^2 R_{\alpha}^2 \right) = 2 - t \quad (\text{A-3})$$

et

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_{\alpha} m_{\alpha} = \pm t$$

où n est le nombre de compactifications sur les tores (les signes $+$ et $-$ sont respectivement pour les cas $\alpha_{-t}^i |0\rangle$ et $\tilde{\alpha}_{-t}^i |0\rangle$). Cela implique que $t = 1$ et $R = (2)^{-1/2}$ et un des n_{α} et m_{α} sont égales à ± 1 (Pour les autres, $n_{\alpha} = m_{\beta}$ si $\alpha \neq \beta$). Ainsi, les $4 \sum_{p=1}^n r_p^2$ états peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} & |1, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0\rangle, |0, 1, 0, \dots, 0; 0, 1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, \\ & |-1, 0, \dots, 0; -1, 0, \dots, 0\rangle, |0, -1, 0, \dots, 0; 0, -1, 0, \dots, 0\rangle \\ & |1, 0, \dots, 0; -1, 0, \dots, 0\rangle, |0, 1, 0, \dots, 0; 0, -1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, \end{aligned}$$

et

$$|-1, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0\rangle, |0, -1, 0, \dots, 0; 0, 1, 0, \dots, 0\rangle, \dots,$$

Il est important de mentionner que les états de la forme :

$$\tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s} |0\rangle \quad \text{et} \quad \alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s} |0\rangle$$

vérifiant les éq.(A-1) et (A-2) sont équivalent respectivement aux états $\alpha_{-t}^i |0\rangle$ et $\tilde{\alpha}_{-t}^i |0\rangle$. Pour les états de la forme $\alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s} |0\rangle$, $\tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s} |0\rangle$, les conditions (A-2) et (A-3) mènent à :

$$2 - (t + u_1 + u_2 + \dots + u_q) = \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \left(\frac{m_{\alpha}^2}{4R_{\alpha}^2} + n_{\alpha}^2 R_{\alpha}^2 \right)$$

et

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_{\alpha} m_{\alpha} = t - (u_1 + u_2 + \dots + u_q)$$

ce qui implique que $n_{\alpha} = m_{\alpha} = 0$ ($\alpha = \overline{1, r}$). Ainsi, le nombre des états physiques est $2 \sum_{p=1}^n r_p = 44$.

ANNEXE B

Le nombre des états vectoriels sans masses de la forme $\alpha_{-t}^i |0\rangle$, $\tilde{\alpha}_{-t}^i |0\rangle$ avec $t \in N$ peut être déterminé par la résolution des équations

$$\begin{aligned} m_\alpha = 0 & \quad \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \frac{m_\alpha^2}{R_\alpha^2} = 2 \\ \tilde{m}_\alpha = 0 & \quad \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{R_\alpha^2} = 2 \end{aligned} \tag{B-1}$$

Notons que dans les deux cas la solution est la même. En prenant $R_\alpha = R$ ($\forall \alpha = \overline{1, r; p = \overline{1, n}}$) on obtient :

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} m_\alpha^2 = 2R^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2 \tag{B-2}$$

Maintenant, il est évident que si R^2 n'est pas un nombre entier ou demi-entier, les équations (B-1) et (B-2) n'ont aucunes solutions. Dans ce qui suit s dénote le nombre de \tilde{m}_α non nul. Comme exemple, si $R = (2)^{3/2}$, l'équation (B-3) devient

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2 = 16$$

qui peut être écrit comme :

a) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$

b) $4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$

c) $4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$

d) $4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$

e) $4 + 4 + 4 + 4 = 16$

f) $9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16$

g) $9 + 4 + 1 + 1 + 1 = 16$

Dans ce cas, les valeurs de s sont respectivement 16, 13, 10, 7, 4, 8, 5.

Maintenant, si $R = 1$ (le cas qui nous interesse) on obtient :

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2 = 2$$

ce qui implique que $|\tilde{m}_\alpha| = 1$. Ainsi, la dégénérescence s de \tilde{m}_α est égal à 2. Et ainsi donc le nombre Ω de tout les états physiques possibles de la forme $|11, 1, 0, \dots, 0\rangle, |11, 0, 1, \dots, 0\rangle, \dots$ etc est

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n r_p (r_p - 1) = \sum_{p=1}^n \frac{r_p!}{2!(r_p - 1)!} \quad (\text{B-3})$$

Maintenant, en tenant compte des valeurs positives et négatives de \tilde{m}_α revient à multiplier le résultat par 2^2 . Par conséquent, le nombre, d'états Ω_{tot} est

$$\Omega_{tot} = \sum_{p=1}^n 2^2 \frac{r_p!}{2!(r_p - 2)!} \quad (\text{B-4})$$

Alors, il est clair que pour un s donné, l'éq. (B-4) peut être généralisée à

$$\Omega_{tot} = \sum_{p=1}^n 2^{s_p} \frac{r_p!}{(r_p - s_p)! \prod_{q=1}^{t_p} Q_q!}$$

où Q_q (resp. s_p) est la dégénérescence du $q^{ième}$ nombre quantique (resp. le nombre de nombre quantique \tilde{m}_α non nul), le t_p est le nombre de nombres quantique non identiques aux s pour la $p^{ième}$ compactification. Le facteur $\frac{r_p!}{(r_p - s_p)!}$ représente le nombre de réarrangements de r_p par s_p nombre c.-à-d.

$$A_{r_p}^{s_p} = s_p! C_{r_p}^{s_p}$$

Cependant, s'il y a quelques nombres quantiques non nul identiques, On doit divisé par le facteur $\prod_{q=1}^{t_p} Q_q!$. Noter que le facteur 2^{s_p} , vient du fait que le \tilde{m}_α peut prendre des valeurs positives et négatives.

Bibliographie

- [1] J. Govaerts, Lecture presented at the Escuela Avanzada de Verano en Fisica, June-9, July-15, 1986 Department of Physics, Cinvestav-IPN Mexico.
- [2] M. B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory, Cambridge University press 1987.
- [3] J. Sherk, J. Rev. Mod. Phys. 47(1975)123.
- [4] H. Goldstein, Classical Mecanics, Addison-Wesley Publishing Company, Second ed.(1981).
- [5] A. N. Schellekens, Current Phys. Sources and Comments. Vol.4 (1989).
- [6] J.Sherk, Rev.Mod.Phy. 47 (1975) 123.
- [7] J.H Schwarz, Phys.Rep.C 89 (1982) 223.
- [8] P.Candelas,G.T.Horowitz,A.Strominger and E.Witten,Nucl.Phys.B 258(1985)46.
- [9] E.Witten,Phys.Lett.B 115 (1985) 151 ;Nucl.Phys.B 258 (1985)75.
- [10] M.Dine,R.Rohm,N.Seiberg and E Witten,Phys.Lett.B 156 (1985)55.
- [11] M.Dine and N.Seiberg,Phys.Rev.Lett.55 (1985)366.
- [12] V.Kamplumovski, Phys.Rev.Lett.55 (1985)1036.
- [13] A.Strominger and E.Witten,Comm.Math.Phys.101(1985)341.
- [14] A.Strominger,Phys.Rev.Lett.55(1985)2547.
- [15] J.Breit,B.Ovrut and G.Segie,Phys.Lett.158 B(1985)33.
- [16] J.P.Derendinger,L.E.Ibanez and H.P.Nilles,Nucl.Phys.B 267(1986)365.

- [17] Tjin T. : Int. J. Mod. Phys. A 7 (1992) 6175.
- [18] Jimbo M. : Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63; 11 (1986) 247.
- [19] Lagraa M. : Quantum gauge theories, Preprint 94-1, Laboratoire de Physique Theorique d'Oran, 1994; Quantum B.R.S.T. transformations of gauge theories, Preprint 94-3, Laboratoire de Physique Theorique d'Oran, 1994.
- [20] Oh C.H. and Singh K. : J. Phys. A : Math. Gen. 27 (1994) 5907.
- [21] Sabanov S.V. : J. Phys. A : Math. Gen. 26 (1993) 2583.
- [22] Chaichain M. and Demichev A.P. : Phys.Lett. B 320 (1994) 273.
- [23] McFarlane A.J. : J. Phys. A : Math. Gen. 22 (1989) 4581.
- [24] Mebarki N., Aissaoui H., Boudine A., and Maasmi A. : Czech. J. Phys. 47 (1997) 761.
- [25] Scherk J. and Schwarz J.H. : Nucl. Phys. B 81 (1974) 118.
- [26] Scherk J. : Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 123.
- [27] Polyakov A.M. : Phys. Lett. B 103 (1981) 207.
- [28] Mebarki N., Benrachi S., Aissaoui H., and Boudine A., Turk.J.Phys.21 :235,1997.
- [29] Mebarki N., Aissaoui H., Boudine A., and Maasmi A. : Czech. J. Phys. 47(1997) 755.
- [30] Kato N., and Ogawa K. : Nucl. Phys. B 212 (1983) 443.
- [31] Govaerts J. : in lectures presented at the Escuela, Avasszada de Verano en Fisica, June 9-July 15 (1986), Department of Physics, Cinverstav-IPN Mexico.
- [32] S. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Lett. **B539**, 179 (2002); Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002); B.T. Cleveland *et al.* Astrophys. **J.** **496**, 505 (1998); D. N. Abdurashitov *et al.* (SAGE Collaboration), Phys. Rev. **D60**, 055801 (1999); W. Hampel *et al.* (GALLEX Collaboration), Phys. Lett. **B447**, 127 (1999); C. Cattadori, (GNO Collaboration), Nucl. Phys. **B111** (Proc. Suppl.), 311 (2002); M. Apollonio *et al.* [CHOOZ Collaboration],

- Phys. Lett. **B466**, 415 (1999); K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [33] P. Minkowski, Phys. Lett. **B67**, 421 (1977); T. Yanagida, proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe, Tsukuba, Japan 1979 (edited by A. Sawada and A. Sugamoto, KEK Report No. 79-18, Tsukuba); S.L. Glashow, in Quarks and Leptons, Cargèse, eds. M. Lévy, et al., (Plenum, 1980, New York), p. 707; M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, ed. by P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman (North Holland, Amsterdam, 1979), p.315; R. N. Mohapatra and G. Senjanović, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [34] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. **B174**, 45 (1986).
- [35] D. N. Spergel et al., "First year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations : Determination of cosmological parameters." *astro-ph/0302209*, 2003.Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [36] A. D. Sakharov, JETP Letters **5**, 24 (1967).
- [37] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B155**, 36 (1985).
- [38] K. S. Babu, B. Dutta and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. **D67**, 076006 (2003); Phys. Rev. **D60**, 095004 (1999); Phys. Rev. **D61**, 091701 (2000); Phys. Rev. Lett. **85**, 5064 (2000); Phys. Lett. **B458**, 93 (1999).
- [39] G. C. Branco, R. Gonzalez Felipe, F. R. Joaquim, I. Masina, M. N. Rebelo and C. A. Savoy, Phys. Rev. **D67**, 073025 (2003); G. C. Branco, R. Gonzalez Felipe, F. R. Joaquim and M. N. Rebelo, Nucl. Phys. **B640**, 202 (2002).
- [40] W. Buchmüller and M. Plümacher, Phys. Lett. **B389**, 73 (1996); P. H. Frampton, S. L. Glashow and T. Yanagida, Phys. Lett. **B548**, 119 (2002); E. K. Akhmedov, M. Frigerio and A. Y. Smirnov, JHEP **0309**, 021 (2003); S. Davidson and A. Ibarra, Nucl. Phys. B **648**, 345 (2003); S. Pascoli, S. T. Petcov and W. Rodejohann, Phys. Rev. **D68**, 093007 (2003); J. C. Pati, Phys. Rev. **D68**, 072002 (2003); V. Barger,

- D. A. Dicus, H. J. He and T. j. Li, Phys. Lett. **B583**, 173 (2004); R. N. Mohapatra, S. Nasri and H. Yu, Phys. Lett. **B615** 231 (2005).
- [41] G. Lazarides, Q. Shafi and C. Wetterich, Nucl. Phys. **B181**, 287 (1981); R. N. Mohapatra and G. Senjanović, Phys. Rev. **D23**, 165 (1981); J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D25**, 774 (1982).
- [42] T. Hambye and G. Senjanović, Phys. Lett. **B582**, 73 (2004); S. Antusch and S. F. King, Phys. Lett. **B597**, 199 (2004).
- [43] E. Ma, S. Sarkar and U. Sarkar, Phys. Lett. **B458**, 73 (1999); A. S. Joshipura, E. A. Paschos and W. Rodejohann, Nucl. Phys. **B611**, 227 (2001); W. Rodejohann and K. R. S. Balaji, Phys. Rev. **D65**, 093009 (2002); M. Frank, Phys. Rev. **D70**, 036004 (2004); U. A. Yajnik, J. Cline and M. Rabikumar, Pramana **62**, 771 (2004); M. C. Chen and K. T. Mahanthappa, Phys. Rev. **D71**, 035001 (2005); N. Sahu and S. Uma Sankar, arXiv :hep-ph/0501069.
- [44] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962); B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **7**, 172 (1958).
- [45] S. M. Bilenky, J. Hosek and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B94**, 495 (1980); J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D22**, 2227 (1980).
- [46] M. Flanz, E. A. Paschos and U. Sarkar, Phys. Lett. **B345**, 248 (1995) [Erratum-ibid. **B382**, 447 (1996)]; L. Covi, E. Roulet and F. Vissani, Phys. Lett. **B384**, 169 (1996); M. Flanz, E. A. Paschos, U. Sarkar and J. Weiss, Phys. Lett. **B389**, 693 (1996); A. Pilaftsis, Phys. Rev. **D56**, 5431 (1997); W. Buchmüller and M. Plümacher, Phys. Lett. **B431**, 354 (1998).
- [47] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B308**, 885 (1988). For a recent review see : W. Buchmuller, R. D. Peccei and T. Yanagida, arXiv :hep-ph/0502169.
- [48] W. Buchmüller, P. Di Bari, M. Plümacher, Annals Phys. **315**, 305 (2005).

- [49] G. F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto and A. Strumia, Nucl. Phys. **B685**, 89 (2004); R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia and N. Tetradis, Nucl. Phys. **B575**, 61 (2000).
- [50] M. A. Luty, Phys. Rev. **D45**, 455 (1992).
- [51] M. Plümacher, Nucl. Phys. **B530**, 207 (1998); arXiv :hep-ph/9807557; K. Hamaguchi, arXiv :hep-ph/0212305.
- [52] A. Pilaftsis and T. E. J. Underwood, Nucl. Phys. **B692** 303 (2004); arXiv :hep-ph/0506107.
- [53] S. Davidson and A. Ibarra, Phys. Lett. **B535**, 25 (2002).
- [54] K. Kohri, T. Moroi and A. Yotsuyanagi, arXiv :hep-ph/0507245.
- [55] J. L. Feng, A. Rajaraman and F. Takayama, Phys. Rev. Lett. **91**, 011302 (2003); J. L. Feng, S. Su and F. Takayama, Phys. Rev. **D70**, 075019 (2004).
- [56] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. **B258**, 305 (1991); T. Asaka, K. Hamaguchi, M. Kawasaki and T. Yanagida, Phys. Rev. **D61**, 083512 (2000); R. Jeannerot and M. Postma, arXiv :hep-ph/0507162; S. Dar, Q. Shafi and A. Sil arXiv :hep-ph/0508037.
- [57] A. Pilaftsis, Phys. Rev. **D56**, 5431 (1997); J. R. Ellis, M. Raidal and T. Yanagida, Phys. Lett. **B546**, 228 (2002).
- [58] Y. Grossman, T. Kashti, Y. Nir and E. Roulet, Phys. Rev. Lett. **91**, 251801 (2003); G. D'Ambrosio, G. F. Giudice and M. Raidal, Phys. Lett. **B575**, 75 (2003); L. Boubekeur, T. Hambye and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **93**, 111601 (2004).
- [59] D. Falcone and F. Tramontano, Phys. Rev. **D63**, 073007 (2001); M. Hirsch and S. F. King, Phys. Rev. **D64**, 113005 (2001); T. Hambye, E. Ma and U. Sarkar, Nucl. Phys. **B602**, 23 (2001); M. S. Berger and K. Siyeon, Phys. Rev. **D65**, 053019 (2002); M. Fujii, K. Hamaguchi and T. Yanagida, Phys. Rev. **D65**, 115012 (2002); L. Boubekeur, arXiv :hep-ph/0208003; S. F. King, Phys. Rev. **D67**, 113010 (2003); L. Velasco-Sevilla, JHEP **0310**, 035 (2003); T. Endoh, S. Kaneko, S. K. Kang,

- T. Morozumi and M. Tanimoto, J. Phys. **G29**, 1877 (2003); Y. Achiman; Phys. Lett. **B599**, 75 (2004); S. Dar, S. Huber, V. N. Senoguz and Q. Shafi, Phys. Rev. **D69**, 077701 (2004); W. I. Guo and Z. Z. Xing, Phys. Lett. **B583**, 163 (2004); T. Hambye, J. March-Russell and S. M. West, JHEP **0407**, 070 (2004); C. H. Albright and S. M. Barr, Phys. Rev. **D70**, 033013 (2004); M. Raidal, A. Strumia and K. Turzyski, Phys. Lett. **B609**, 351 (2005); S. M. West, Phys. Rev. **D71**, 013004 (2005).
- [60] M. Fukugita and T. Yanagida., "Baryogenesis without grand unification." *Phys. Lett.*, B174 :45, 1986.
- [61] M. Gell-Mann, P. Ramon, and R. Slansky., "*Supergravity*." North-Holland Amsterdam, 1979.
- [62] T. Yanagida., *Proc. "Workshop on Unified theory and baryon number in the universe."* KEK, 1979.
- [63] R.N. Mohapatra, G. Senjanovic., " Neutrino mass and spontaneous parity violation." *Phys. Rev. Lett.*, 44 :912, 1980.
- [64] W. Buchmuller, P. Di Bari, and M. Plumacher., "Cosmic microwave background, matter-antimatter asymmetry and neutrino masses." *Nucl. Phys.*, B643 :367–390, 2002.
- [65] W. Buchmuller, P. Di Bari, and M. Plumacher., "A bound on neutrino masses from baryogenesis." *Phys. Lett.*, B547 :128–132, 2002.
- [66] W. Buchmuller, P. Di Bari, and M. Plumacher., "The neutrino mass window for baryogenesis." *hep-ph/0302092*, 2003.
- [67] S. Davidson and A. Ibarra., "A lower bound on the right-handed neutrino mass from leptogenesis." *Phys. Lett.*, B535 :25–32, 2002.
- [68] G.C. Branco, *et al.*, "Minimal scenario for leptogenesis and CP violation" *Phys. Rev. D* **67** : 073025, 2003, *hep-ph/0211001*.

- [69] A. Pilaftsis, T.E. J. Underwood., "Resonant Leptogenesis" *Nucl.Phys.* B692 :303-345,2004, *hep-ph/0309342*.
- [70] G.F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto, A. Strumia., "Towards a complete theory of thermal leptogenesis in the SM and MSSM." *Nucl.Phys.* B685 (2004) 89-149, *hep-ph/0310123*.
- [71] W. Buchmuller, P. Di Bari, M. Plumacher., "Leptogenesis for Pedestrians." *hep-ph/0401240*.
- [72] A. Abada and M. Losada., "Leptogenesis with four gauge singlets." *Nucl.Phys.* B673 :319-330,2003, *hep-ph/0306180*.
- [73] A. Abada, H. Aissaoui, M. Losada., "Leptogenesis at the TeV scale." *Invited talk at 39th Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories, La Thuile, Aosta Valley, Italy, 21-28 Mar 2004.*, *hep-ph/0406304*.
- [74] M. Senami and K. Yamamoto., "Leptogenesis with supersymmetric higgs triplets in TeV region." *hep-ph/0305202*, 2003.
- [75] M. Senami and K. Yamamoto., "Lepton flavor violation with supersymmetric higgs triplets in TeV region for neutrino masses and leptogenesis." *hep-ph/0305203*, 2003.
- [76] L. Boubekur., "Leptogenesis at low scale." *hep-ph/0208003*, 2002.
- [77] L. Boubekur, T. Hambye, G. Senjanovic., "Low-scale leptogenesis and soft supersymmetry breaking." *hep-ph/0404038*.
- [78] T. Hambye, J. March-Russell, S.M. West., "TeV scale resonant leptogenesis from supersymmetry breaking." *hep-ph/0403183*.
- [79] R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia, N. Tetradis., "Baryogenesis through leptogenesis." *Nucl.Phys.*B575 (2000)61-77, *hep-ph/9911315*.
- [80] G. Sigl and G. Raffelt., "General kinetic description of relativistic mixed neutrinos." *Nucl.Phys.*B406 (1993) 423-451.
- [81] G.D. Moore., "Sphaleron rate in the symmetric electroweak phase" *Phys.Rev.* D62 (2000) 085011, *hep-ph/0001216*.

- [82] M. Laine and M. Shaposhnikov., "A remark on sphaleron erasure of baryon asymmetry." *Phys.Rev.* D61 (2000) 117302, *hep-ph/9911473*.
- [83] Particle Data Group., "Review of particle physics." *Euro. Phys. J.*, C15 :1, 2002.
- [84] See for example, Michael Plumacher., "Baryogenesis and lepton number violation." *Z. Phys.*, C74 :549–559, 1997., M. Plumacher, "Baryon asymmetry, neutrino mixing and supersymmetric $SO(10)$ unification." *Nucl. Phys. B* **530**, 207 (1998).
- [85] L. Covi, E. Roulet, and F. Vissani., "CP violating decays in leptogenesis scenarios." *Phys. Lett.*, B384 :169–174, 1996.
- [86] M. Maltoni, V.A. Novikov, L.B. Okun, A.N. Rozanov, M.I. Vysotsky., "Extra quark-lepton generations and precision measurements." *Phys. Lett.*B476 (2000) 107-115.
- [87] The LEP Collaborations, "A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model." *hep-ex/0112021*.
- [88] H. J. He, N. Polonsky, S. Su., "Extra Families, Higgs Spectrum and Oblique Corrections." *Phys.Rev.*D64 (2001) 053004.
- [89] V.A. Novikov, L.B. Okun, A.N. Rozanov, M.I. Vysotsky., "Mass of the Higgs versus fourth generation masses." *JETP Lett.* 76 (2002) 127-130.
- [90] S. Sultansoy., "Why the four SM families." *Contributed to 30th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 2000), Osaka, Japan, 27 Jul - 2 Aug 2000.*, *hep-ph/0004271*.
- [91] S.S. Bulanov, V. A. Novikov, L. B. Okun, A. N. Rozanov, M.I. Vysotsky., "Z-lineshape versus 4th generation masses." *Phys.Atom.Nucl.* 66 (2003) 2169, *hep-ph/03012268*.
- [92] P.H. Frampton, P.Q. Hung, M. Sher., "Quarks and leptons beyond the third generation." *Phys.Rept.* 330 (2000) 263.

ARTICLES

Successive Toroidal Compactifications of a Closed Bosonic Strings*

N. MEBARKI

*Département de Physique Théorique,
Institut de Physique, Constantine-ALGERIA[†]*

and

*Department of Physics, MC.Gill University,
Montréal PQ H3A 2T8-CANADA*

A. TALEB, H. AISSAOUI, N. BELALOUI, M. HAOUCHINE

*Département de Physique Théorique,
Institut de Physique, Constantine-ALGERIA*

Received 27.03.1998

Abstract

Successive toroidal compactifications of a closed bosonic string are studied and some Lie groups solutions are derived.

1. Introduction

Our present understanding of the observed fundamental interactions is encompassed, on the one hand, for the strong, weak and electromagnetic interactions by the standard mode and, on the other hand for, the gravitational interaction by Einstein's classical theory of general relativity which, however, can not be consistently quantized.

Although the success of some of the unified gauge theories (based on the point-like quantum fields concept), there are too many arbitrary parameters and some of the outstanding problems like the Higgs, spontaneous symmetry breaking mechanism, Kobayashi-Maskawa matrix etc... are still unsolved.

The discovery in the summer of 1984 by Green and Schwarz [1] of the unique anomaly free open superstring has once again spurred an enormous interest in string theories as candidates for unified quantum theories of all interactions and matter.

As opposed to point-like particles in ordinary field theories, the fundamental constituents of string theories are 1-dimensional objects. A single classical relativistic string

*This work is supported by the Algerian Ministry of Education and research under contract D2501/01/17/93

[†]Permanent address.

can vibrate in an infinite set of normal modes, which, when quantized correspond to an infinite set of states with arbitrary high masses and spins.

These theories can be consistently quantized for one specific dimension of space-time only. This critical dimension is 26 for the bosonic string (open or closed) and 10 for the superstring [2], [3]. However, to keep contact with the real world, the extra space-time dimensions have to be compactified. It turns out that there are too many ways to do such a procedure and consequently, the four-dimensional low energy physics is not unique [4]-[12]. Thus, there is still no clear answer to the important problem of compactification and how contact can be made with a realistic phenomenology.

In this paper, and as a toy model, we consider a closed bosonic string and study the effect of successive toroidal compactifications.

In section 2, we present general solutions resulted from various types of an even dimensional tori compactifications. In section 3, we display our results and draw our conclusions.

2. Formalism

The Nambu-Goto action of a closed bosonic string is given by [2], [3];

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma [(x \cdot x')^2 - \dot{x}^2 \cdot x'^2] \quad (1)$$

with :

$$x^\mu(\sigma + \pi, \tau) = x^\mu(\sigma, \tau), \quad (2)$$

and σ, τ are the dimensionless world-sheet parameters. Here σ' is the string scale and x'^μ (resp. \dot{x}^μ) means $\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}$ (resp. $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$). The general solution of the equation of motion (in the orthonormal gauge)

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0 \quad (3)$$

which satisfies the boundary condition (2) is :

$$x^\mu(\sigma, \tau) = q^\mu + \alpha' p^\mu + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} [\alpha_n^\mu \exp -2in(\tau - \sigma) + \tilde{\alpha}_n^\mu \exp -2in(\tau + \sigma)], \quad (4)$$

where q^μ and p^μ are the string center of mass coordinates and the momentum, respectively.

After quantization, the critical dimension is fixed to $D = 26$ and the physical states $|\psi\rangle_{\text{phys}}$ are subject to the Virasoro conditions:

$$\begin{aligned} L_n |\psi\rangle_{\text{phys}} &= \tilde{L}_n |\psi\rangle_{\text{phys}} \quad n \geq 1 \\ (L_0 - \tilde{L}_0) |\psi\rangle_{\text{phys}} &= 0 \\ (L_0 + \tilde{L}_0 - \alpha(0)) |\psi\rangle_{\text{phys}} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where the Virasoro generators L_n and \tilde{L}_n are given by:

$$L_n = \frac{1}{4\sigma'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \alpha_m \quad (6)$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{4\sigma'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{n-m} \tilde{\alpha}_m$$

(here $\sigma(0) = 2$). To get the mass spectrum, one has to apply the following mass operator M^2

$$M^2 = 4[N + \tilde{N} - \alpha(0)] \quad (7)$$

on the physical states $|\psi\rangle_{\text{phys}}$ (we have taken $\frac{1}{2\alpha'} = 1$) with:

$$N|\psi\rangle_{\text{phys}} = \tilde{N}|\psi\rangle_{\text{phys}},$$

where

$$N = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-m}^\mu \alpha_{m\mu} \quad (8)$$

$$\tilde{N} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_{-m}^\mu \tilde{\alpha}_{m\mu}.$$

Now, our compactification program consists of starting from the critical dimension $D = 26$ and then truncating the extra dimensions successively through a various number of tori compactifications.

We remained the reader that an r -dimensional torus T^r is defined as the set R/Γ , where Γ is an r -dimensional lattice generated by a basis $\{\vec{e}_\alpha, \alpha = \overline{1}, \vec{r}\}$. One can be also define a dual lattice Γ^* as

$$\Gamma^* = \{\vec{\beta} \in R^r / \forall \vec{\gamma} \in \Gamma, \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \text{ is an integer}\} \quad (9)$$

with a dual basis $\{\vec{e}_\alpha^*, \alpha = \overline{1}, \vec{r}\}$ such that

$$\vec{e}_\alpha^* \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

2.1. Method $N = 1$

The first method consists of taking the left and right movers modes as mixed. Thus, the compactified coordinates x can be written as:

$$x^i(\alpha, \tau) = q^i + \alpha' p^i + \frac{i}{2} \sum_{n=0} \frac{1}{n} [\alpha_n^i \exp -2in(\tau - \sigma) + \tilde{\alpha}_n^i \exp -2in(\tau + \sigma)]. \quad (11)$$

For the compactified coordinates $x^I (I = \overline{1, r})$ on an r -dimensional torus, one has to identify the points under the translation by $2\pi R_\alpha$ in the \vec{e}_α direction. Thus:

$$x^I \simeq x^I + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=1}^r n_\alpha \cdot R_\alpha \cdot e_\alpha^I \quad (n \in Z) \quad (12)$$

where r (resp. R_α) is the torus dimension (resp. radius in the α direction) and therefore one can write:

$$x^I(\sigma, \tau) = q^I + \alpha' p^I + 2\ell^I + \frac{i}{2} \sum_{n=0} \frac{1}{n} [\alpha_n^I \exp -2in(\tau - \sigma) + \tilde{\alpha}_n^I \exp -2in(\tau + \sigma)] \quad (13)$$

with:

$$p^I = \sum_{\alpha=1}^r \frac{m_\alpha}{R_{\alpha=1}} \frac{e_\alpha^{I*}}{\|e_\alpha^*\|}, \quad (m_\alpha \in Z) \quad (14)$$

and ℓ are the winding numbers which have the following expression:

$$\ell^I = \sum_{\beta=1}^r m_\beta R_\beta \frac{e_\beta^I}{\|e_\beta\|}. \quad (15)$$

Now, after “ n ” compactification, the mass operator M takes the form:

$$M^2 = 4[N + \tilde{N} - 2 \sum_{k=1}^r \sum_{I=1}^{r_k} (\frac{(p^I)^2}{4} + \ell^{I^2})] \quad (16)$$

(here r_k is the dimension of the k^{th} torus ($\sum_{p=1}^n r_p = 22$)). With:

$$N|\psi\rangle_{\text{phys}} = (\tilde{N} + \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \ell^I p^I) |\psi\rangle_{\text{phys}}, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I \\
 \tilde{N} &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \tilde{\alpha}_{-m}^i \tilde{\alpha}_m^i + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} \tilde{\alpha}_{-m}^I \tilde{\alpha}_m^I.
 \end{aligned} \tag{18}$$

With a self dual lattice and orthonormal basis, eqs (16) and (17) become:

$$\begin{aligned}
 M^2 &= (N + \tilde{N} - 2) + \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} + \left(\frac{m_\alpha^2}{R_\alpha^2} + 4n_\alpha^2 R_\alpha^2 \right) \\
 N|\psi\rangle_{\text{phys}} &= (\tilde{N} + \sum_{k=1}^n \sum_{I=1}^{r_k} n_\alpha m_\alpha) |\psi\rangle_{\text{phys}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

It is to be noted that one can characterize the quantum physical states $|\psi\rangle_{\text{phys}}$ by the quantum numbers n_α and m_α . Now, it is easy to show, that for $R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\forall \alpha = \overline{1, r_p}; p = \overline{1, n})$, the number of the vectorial physical massless states and the quantum numbers n_α and m_α is (see APPENDIX A):

$$\Omega = 4 \sum_{p=1}^n (r_p^2 + 11) \tag{20}$$

and

$$\Sigma = 2 \sum_{p=1}^n r_p = 44, \tag{21}$$

respectively. However, for at least one $R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, the number of the physical vectorial massless states becomes 44.

2.2. Method $N = 2$

In this method the left and the right movers of the closed string $x^I(\sigma - \tau)$ and $x^I(\sigma + \tau)$, respectively, are treated independently. In this case, the compactified coordinates can be written as:

$$\begin{aligned}
 x^I(\sigma - \tau) &= q^I + p^I(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n=0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \exp -2in(\tau - \sigma) \\
 x^I(\sigma + \tau) &= \tilde{q}^I + \tilde{p}^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n=0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I \exp -2in(\tau + \sigma),
 \end{aligned} \tag{22}$$

where the string center of mass momentum p^I and \tilde{p}^I are given on the dual lattice Γ^* by:

$$\begin{aligned} p^I &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{m_\alpha}{R_\alpha} \frac{e_\alpha^{I*}}{\|e_\alpha^*\|} \\ \tilde{p}^I &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{\tilde{m}_\alpha}{R_\alpha} \frac{e_\alpha^{I*}}{\|e_\alpha^*\|}. \end{aligned} \quad (m_\alpha \tilde{m}_\alpha \in Z) \quad (23)$$

It is to be noted that in this case, the winding numbers ℓ^I and $\tilde{\ell}^I$ are related to the momenta p^I and \tilde{p}^I by the relations:

$$\begin{aligned} \ell^I &= -\frac{1}{2}p^I \\ \tilde{\ell}^I &= \frac{1}{2}\tilde{p}^I. \end{aligned} \quad (24)$$

This means that the lattice Γ and its dual Γ^* have a non zero intersection. Now, the mass shell condition (16) leads to the relation

$$M^2 = -p^{i2} = 2(N + \tilde{N} - 4) + \sum_{k=1}^n \sum_{\beta, \alpha=1}^{r_k} \left[\frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} (m_\alpha m_\beta + \tilde{m}_\alpha \tilde{m}_\beta) \right]. \quad (25)$$

where $g_{\alpha\beta}^*$ is the dual lattice metric. Moreover, the Varisoro condition (2-5-b) implies that:

$$\left(N + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{\beta, \alpha=1}^{r_k} \frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} m_\alpha m_\beta \right) | \psi \rangle_{phys} = \left(\tilde{N} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{\beta, \alpha=1}^{r_k} \frac{g_{\alpha\beta}^*}{R_\alpha R_\beta} \tilde{m}_\alpha \tilde{m}_\beta \right) | \phi \rangle_{phys}. \quad (26)$$

It is important to mention that, if $R_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, the massless vectorial states belong to the adjoint representation of the tensorial product $G \otimes G$, where G is the simply laced Lie group of rank $r = 22$ and with a Cartan matrix $g_{\alpha\beta}$. Now, if the lattice Γ is even and integer, i.e.

$$\begin{aligned} \forall \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \Gamma &\longrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \quad \text{is an integer;} \\ \forall \vec{\gamma} \in \Gamma &\longrightarrow \vec{\gamma}^2 \quad \text{is integer and even;} \end{aligned}$$

the momenta p^I and \tilde{p}^I are identified with the weight vectors of the Lie group G . Now, if we characterize the vectorial physical states by the quantum numbers m_α and \tilde{m}_α , we can show that for $R_\alpha^2 = R^2 =$ an integer or half integer the number Ω of these independent states is [see APPENDIX B]

$$\Omega_2 = 44 + \sum_{p=1}^n \frac{2^{s_{p+1}}}{(r_p - S_p)! Q_1! Q_2! \dots Q_{t_p}!} \quad (27)$$

(n is the number of successive compactifications) where, for the p^{th} compactification, r_p, S_p and Q_{t_p} are the dimension of the compactified space, the number of the non zero

quantum numbers (m_α and n_α) and the degeneracy of the t_p^{th} quantum number respectively. However, if at least one of the R is not an integer or half an integer, the number, of the physical states becomes $\Omega'_2 = 44$.

3. Results and Conclusions

To get an idea and keep our results transparent, we have considered compactifications on an even dimensional tori. Tables 1 and 2 display various types of compactifications and the rank and order of the resulted Lie groups with both methods 1 and 2 with $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and 1, respectively. It is important to notice that the results depend on:

Table 1. Display the rank and order of the Lie groups coming from various types of Tori compactifications with the use of the first method and $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Type of compactification	rank	order
T^{22}	44	234212
$T^2 \otimes T^{20}$	44	174882
$T^4 \otimes T^{18}$	44	223644
$T^6 \otimes T^{16}$	44	123868
$T^8 \otimes T^{14}$	44	42172
$T^{10} \otimes T^{12}$	44	29116
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^{18}$	44	115046
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^{16}$	44	79758
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^{14}$	44	47806
$T^2 \otimes T^8 \otimes T^{12}$	44	29630
$T^2 \otimes T^{10} \otimes T^{10}$	44	23742
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	46998
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	23254
$T^4 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	15254
$T^6 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	15126
$T^6 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	12758
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	29408
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	12512
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	12832
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{16}$	44	89110
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	54640
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	32112
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	21400
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	11698
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	16820
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	11124
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	7732
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{14}$	44	64602

Table 1. Continue

Type of compactification	rank	order
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	38898
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	23898
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	19074
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	21706
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	13970
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	11066
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	12530
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	9674
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	8250
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{12}$	44	45424
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	26866
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	18034
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	24612
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	612916
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	15990
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	9464
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{10}$	44	30662
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	18590
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	12598
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	10510
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8$	44	25910
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	19616
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	16458
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6$	44	23976
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	21848
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$	44	28530
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$	44	36180

a) The choice of the method:

In fact, it is clear from tables 1 and 2 that for the same type of compactification, the resulted Lie groups obtained with the first method are totally different from the second one. For example, a compactification on T^{22} gives with the first method, the following possible Lie groups : $SO(5) \otimes SO(60) \otimes U(12)$; $SO(58) \otimes SO(22) \otimes U(4)$; $SO(14) \otimes SO(14) \otimes SO(61)$; $SO(56) \otimes SO(5) \otimes SO(29)$; $SO(63) \otimes U(8) \otimes U(5)$; $SO(44) \otimes SO(44)$; $SO(58) \otimes SO(16) \otimes E7$. However with the second method one gets: $SO(51) \otimes SO(36) \otimes U(1)$; $SO(36) \otimes SO(3) \otimes SO(51)$; $SO(45) \otimes SO(45)$. As a second example, the ten successive tori compactifications $T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$ lead to no

solutions for the first method and $SO(11) \otimes SO(58) \otimes U(12)$; $SO(47) \otimes SO(40) \otimes U(1)$; $SO(57) \otimes SO(24) \otimes U(4)$; $SO(59) \otimes SU(3) \otimes SO(14)$; $SO(3) \otimes SO(37) \otimes SO(51)$; $SO(58) \otimes SO(11) \otimes U(5)$; $SO(48) \otimes SO(36) \otimes G_2$; $SO(58) \otimes SU(5) \otimes U(11)$ for the second one.

Table 2. The same as Table 1 but with the use of the second method and $R = 1$

Type of compactification	rank	order
T^{22}	44	9624428
$T^2 \otimes T^{20}$	44	6168104
$T^4 \otimes T^{18}$	44	6154058
$T^6 \otimes T^{16}$	44	1405082
$T^8 \otimes T^{14}$	44	568380
$T^{10} \otimes T^{12}$	44	243836
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^{18}$	44	3841396
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^{16}$	44	1821254
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^{14}$	44	656222
$T^2 \otimes T^8 \otimes T^{12}$	44	317942
$T^2 \otimes T^{10} \otimes T^{10}$	44	189190
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	782618
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	305290
$T^4 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	122554
$T^6 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	111282
$T^6 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	127674
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	425734
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	161392
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	91560
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{16}$	44	1283546
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{14}$	44	1041106
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$	44	426592
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^{10}$	44	186860
$T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	66458
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	156310
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	60072
$T^4 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	37170
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{14}$	44	1356836
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{12}$	44	572866
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{10}$	44	228514
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8 \otimes T^8$	44	134170
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	224942

Table 2. Continue

Type of compactification	rank	order
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	93598
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	51502
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	84654
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	9674
$T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	33934
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{12}$	44	790064
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^{10}$	44	313838
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^8$	44	170800
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	153804
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6 \otimes T^6$	44	76606
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	6226
$T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	49194
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^{10}$	44	430974
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^8$	44	178496
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	89848
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	68048
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^8$	44	253958
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^6$	44	130820
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	97954
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^6$	44	187536
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4 \otimes T^4$	44	141310
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^4$	44	198350
$T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2 \otimes T^2$	44	277918

b) Type and number of compactifications:

Each type and number of successive compactifications gives different results. In fact, the type $T^2 \otimes T^{20}$ (for example) leads to the following Lie groups: $SO(12) \otimes SO(28) \otimes SO(48)$; $SO(38) \otimes SO(42) \otimes U(4)$; $SO(8) \otimes SO(33) \otimes SO(49)$; $SO(55) \otimes U(2) \otimes U(15)$; $SO(48) \otimes SO(28) \otimes E_6$; $SO(48) \otimes SO(26) \otimes E_7$; However, the type $T^2 \otimes T^2 \otimes T^6 \otimes T^{12}$ gives $SO(20) \otimes U(15) \otimes U(19)$; $\otimes SO(13) \otimes U(17) \otimes U(21)$; $SO(25) \otimes U(14) \otimes U(18)$.

c) Tori radius:

The results of the successive compactifications depend strongly on the choice of the radius of the compactified tori. For example the first method gives for $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\forall \alpha = \overline{1}, \overline{r}; k = \overline{1}, \overline{n})$, a number of $44 + 2 \sum_{k=1}^n r_k^2$ vectorial physical states which can form the irreducible representation of a Lie group. However, for at least $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, this number is reduced to 44 and leads to different Lie groups solutions.

Acknowledgments

We are very grateful to Drs. M. Lagraa and M. Tahiri for fruitful discussions and one of us (N.M) would like to thank professors C.S. Lam and C. Burgess from the Department of physics, Mc. Gill University, for useful private communications.

References

- [1] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Phys. Lett.* **B 149** (1984) 117.
- [2] J. Sherk, *Rev. Mod. Phy.* **47** (1975) 123.
- [3] J.H. Schwarz, *Phys. Rep.* **C 89** (1982) 223.
- [4] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 258** (1985) 46.
- [5] E. Witten, *Phys. Lett.* **B 115** (1985) 151; *Nuc. Phys.* **156** (1985) 55.
- [6] M. Dine, R. Rohm, N. Seiberg and E. Witten, *Phys. Lett.* **B 156** (1985) 55.
- [7] M. Dine and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 366.
- [8] V. Kamplumovski, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1036.
- [9] A. Strominger and E. Witten, *Comm. Math Phys.* **101** (1985) 341.
- [10] A. Strominger, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2547.
- [11] J. Breit, B. Ovrut and G. Segie. *Phys. Lett.* **158 B** (1985) 33.
- [12] J.P. Derendinger, L.E. Ibanez and P.H. Nilles, *Nucl. Phys.* **B 267** (1986) 365.

Appendix A

The possible physical vectorial states are: $\alpha_{-t}^i|0\rangle, \tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle, \alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s}|0\rangle, \tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s}|0\rangle, \tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s}|0\rangle$ and $\alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s}|0\rangle$ with t, u and $q \in N^*$. For the states $|\psi\rangle_{\text{phys}}$ of the form $\alpha_{-t}^i|0\rangle$ and $\tilde{\alpha}_{-t}^i|0\rangle$ and by imposing

$$M^2|\psi\rangle_{\text{phys}} = 0 \quad (\text{A-1})$$

and

$$N|\psi\rangle_{\text{phys}} = (\tilde{N} \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_{\alpha} m_{\alpha}) |\psi\rangle_{\text{phys}} \quad (\text{A-2})$$

one gets

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \left(\frac{m_{\alpha}^2}{4R_{\alpha}^2} + n_{\alpha}^2 R_{\alpha}^2 \right) = 2 - t \quad (\text{A-3})$$

and

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_{\alpha} m_{\alpha} = \pm t,$$

where n denotes the number of tori compactifications (+ and - signs are for the case $\alpha_{-t}^i|0\rangle$ and $\tilde{\alpha}_{-t}^i|0\rangle$ respectively). This implies that $t = 1$ and $R = (2)^{-1/2}$ and one of the n_{α} and m_{α} are equal to ± 1 (For the others, $n_{\alpha} = m_{\beta}$ if $\alpha \neq \beta$). Thus, the $4 \sum_{p=1}^n r_p^2$ states

can be written as:

$$\begin{aligned} & |1, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0\rangle, |0, 1, 0, \dots, 0; 0, 1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, \\ & |-1, 0, \dots, 0; -1, 0, \dots, 0\rangle, |0, -1, 0, \dots, 0; 0, -1, 0, \dots, 0\rangle \\ & |1, 0, \dots, 0; -1, 0, \dots, 0\rangle, |0, 1, 0, \dots, 0; 0, -1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, \end{aligned}$$

and

$$|1 - 1, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0\rangle, |0, -1, 0, \dots, 0; 1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, .$$

It is worth mentioning that the states of the form:

$$\tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s}|0\rangle \text{ and } \alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s}|0\rangle.$$

used with eq. (A-1) and (A-2) can be easily shown to be equivalent to the states $\alpha_{-t}^i|0\rangle$ and $\tilde{\alpha}_{-t}^i|0\rangle$, respectively. For the states of the form $\alpha_{-t}^i \prod_{s=1}^q \tilde{\alpha}_{-u_s}^{I_s}|0\rangle; \tilde{\alpha}_{-t}^i \prod_{s=1}^q \alpha_{-u_s}^{I_s}|0\rangle$, the conditions (A-2) and (A-3) lead to:

$$2 - (t + u_1 + u_2 + \cdots + u_q) = \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \left(\frac{m_\alpha^2}{4R_\alpha^2} + n_\alpha^2 R_\alpha^2 \right)$$

and

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} n_\alpha m_\alpha = t - (u_1 + u_2 + \cdots + u_q),$$

which implies that $n_\alpha = m_\alpha = 0 (\alpha = \overline{1, r})$. Thus, the number of the physical states is

$$2 \sum_{p=1}^n r_p = 44.$$

Appendix B

The number of massless vectorial states of the form $\alpha_{-t}^i|0\rangle, \tilde{\alpha}_{-t}^i|0\rangle$ with $t \in N$ can be determined by solving the equations

$$\begin{aligned} m_\alpha = 0 & \quad \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \frac{m_\alpha^2}{R_\alpha^2} = 2 \\ \tilde{m}_\alpha = 0 & \quad \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{R_\alpha^2} = 2, \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

respectively. Notice that in both cases the solution is the same. Setting $R_\alpha = R(\forall \alpha = \overline{1, r}; p = \overline{1, n})$ we obtain:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} m_\alpha^2 = 2R^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2. \quad (\text{B-2})$$

Now, it is obvious that if R^2 is not an integer or half an integer, eqs. (B-1) and (B-2) have no solutions. In what follows we denote by s the number of the non zero \tilde{m}_α 's. As an example, for $R = (2)^{3/2}$, eq. (B-2) becomes

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2 = 16$$

which can be written as:

- a) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=16$
- b) $4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=16$
- c) $4+4+1+1+1+1+1+1+1+1=16$
- d) $4+4+4+1+1+1+1=16$
- e) $4+4+4+4=16$
- f) $9+1+1+1+1+1+1+1+1=16$
- g) $9+4+1+1+1=16$

In this case, the values of s are respectively 16, 13, 10, 7, 4, 8, 5.

Now, if $R = 1$ (case of our interest) one gets:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\alpha=1}^{r_p} \tilde{m}_\alpha^2 = 2$$

which implies that $|\tilde{m}_\alpha| = 1$. So, the degeneracy s of \tilde{m}_α is equal to 2. Thus the number Ω of all possible physical states of the form $|11, 1, 0, \dots, 0\rangle, |11, 0, 1, \dots, 0\rangle, \dots$ etc is

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n r_p (r_p - 1) = \sum_{p=1}^n \frac{r_p!}{2!(r_p - 1)} \quad (\text{B-3})$$

This result can be found in an equivalent way by taking r number arranged in two and without repetition. Thus, the number of the different physical vectorial states Ω is:

$$\Omega = \sum_{p=1}^n \frac{2!C_{rp}^2}{2!} = \sum_{p=1}^n \frac{r_p!}{2!(r_p - 1)!} \quad (\text{B-4})$$

Now, taking into account the positive and negative values of \tilde{m}_α amounts to multiplying the result by 2^2 . Hence, the total number, of states Ω_{tot} is:

$$\Omega_{\text{tot}} = \sum_{p=1}^n 2^2 \frac{r_p!}{2!(r_p - 2)!}. \quad (\text{B-5})$$

Then, it is clear that for a given s , eq. (B-6) can be generalized to

$$\Omega_{\text{tot}} = \sum_{p=1}^n 2^{s_p} \frac{r_p!}{(r_p - s_p)! \prod_{q=1}^{t_p} Q_q!}$$

where Q_q (resp. s_p) is the degeneracy of the q^{th} quantum number (resp. the number of the non zero quantum numbers \tilde{m}_α), t_p is the number of the non identical quantum numbers among the s ones for the p^{th} compactification. The factor $\frac{r_p!}{(r_p - s_p)!}$ represents the number of the rearrangements of r_p by s_p numbers. i.e.

$$A_{r_p}^{s_p} = s_p! C_{r_p}^{s_p}.$$

However, if there are some identical non zero quantum numbers, one has to divide by the factor $\prod_{q=1}^{t_p} Q_q!$. Notice that the factor 2^{s_p} comes from the fact that \tilde{m}_α can take both positive and negative values.

NEW CRITICAL DIMENSIONS FOR q -DEFORMED BOSONIC STRING *)

N. MEBARKI, H. AISSAOUI, A. BOUDINE

*Département de Physique théorique, Institut de Physique,
Université de Constantine, Constantine, Algeria**)*

and

*Theoretical Physics Group, Blackett Laboratory, Imperial College, London
University of London, Prince Consort Road, London 5W7 2BZ, U.K.*

A. MAASMI

*Département de Physique, Institut des sciences exactes et de Technologie,
Centre Universitaire Larbi, Tebessi, Tebessa, Algeria*

Received 20 August 1996

Applying the mass shell condition for q -deformed open and closed strings, new critical space-time dimensions are derived.

1 Introduction

There has been an upsurge of interest in the study of quantum group [1] during the past few years. These q -deformed groups present examples of Hopf algebra [2,3]. Together with the ideas of non-commutative geometry, it is expected that the quantum groups might provide a fundamental length in the context of space-time quantization [4,5]. Despite remarkable progress, the use of quantum groups have not yet percolated to the level of the physical applications. It is the purpose of this paper to show that the application of these new mathematical ideas to the string theory gives new critical space-time dimensions, which may have interesting phenomenological implications. Moreover, one may solve the compactification problem by which string theories suffer.

In Section 2 we describe the formalism and in Section 3 we derive the bosonic string critical dimensions. Finally, in Section 4 we draw our conclusions.

2 Formalism

The classical action S of a free relativistic bosonic string propagating in a flat space-time is given in the light cone gauge by [7], [8]

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \partial_\alpha x^i \partial^\alpha x^i, \quad \alpha = 0, 1, \quad i = D - 2, \quad (1)$$

*) Supported by the Algerian Ministry of High Education and Research under contract N°D2501/17/01/93.

***) Permanent address.

where σ, τ are dimensionless world-sheet parameters, α' is the string tension and $\partial_0 \equiv \partial_\tau$ and $\partial_1 \equiv \partial_\sigma$.

The general solution of the equation of motion in the light-cone gauge are [7,8]

$$x^i = q^i + 2\alpha' p^i \tau + i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\alpha_n^i}{n} \exp(-in\tau) \cos n\sigma, \quad (2)$$

$$x^i = q^i + 2\alpha' p^i \tau + \frac{i}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} [\alpha_n^i \exp(-2in(\tau - \sigma)) + \tilde{\alpha}_n^i \exp(-2in(\tau + \sigma))], \quad (3)$$

where q^i and p^i are the string center of mass coordinates and momenta, respectively. It is to be noted that the solutions (2) and (3) are for the open and closed bosonic strings, respectively.

After a q -deformation, the mass operators expressions are given by:

a) open bosonic string

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i :_q, \quad (4)$$

b) closed bosonic string

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} [: \alpha_{-n}^i \alpha_n^i :_q + : \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i :_q] \quad (5)$$

(here $: :_q$ means a q -deformed normal ordering), where

$$\begin{aligned} \alpha_0^i &= 2\alpha' p^i, \\ \alpha_n^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^i, \\ \alpha_{-n}^i &= \sqrt{2\alpha' n} a_n^{\dagger i}, \\ \tilde{\alpha}_{-n}^i &= \sqrt{2\alpha' n} \tilde{a}_n^{\dagger i}, \\ \tilde{\alpha}_n^i &= \sqrt{2\alpha' n} \tilde{a}_n^i, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

It is to be noted that, in this case, the string dynamical variables $q^i, p^i, q^-, p^+, a_n^{\dagger i}, a_n^i, \tilde{a}_n^{\dagger i}, \tilde{a}_n^i$ satisfy the following non-vanishing q -deformed commutations relations

$$\begin{aligned} [q^i, p^j]_q &= i\delta^{ij}, \\ [q^-, p^+]_q &= -1, \\ [a_n^{\dagger i}, a_m^j]_q &= -\delta^{ij} \delta_{nm}, \\ [\tilde{a}_n^{\dagger i}, \tilde{a}_m^j]_q &= -\delta^{ij} \delta_{nm}, \quad n, m > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

The q -deformed normal ordering in Eqs. (4) and (5) and commutation relation in Eqs. (7) are defined as [6]

$$: a_n^i a_m^{\dagger j} :_q \equiv a_m^{\dagger i} a_n^i + (q-1)\delta_{nm} \Lambda_{i'j}^{ij} a_m^{\dagger j'} a_n^{i'}, \quad (8)$$

$$[a_n^{\dagger i}, a_m^j]_q \equiv a_n^{\dagger i} a_m^j - [\delta_{ij}^j, \delta_{i'}^i + (q-1)\delta_{n,m} \Lambda_{i'j'}^{ij}] a_m^{j'} a_n^{\dagger i'}, \quad (9)$$

where

$$\Lambda_{i'j'}^{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \text{ and } i' = j', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

Similar definitions hold for $\tilde{a}_n^{\dagger i}, \tilde{a}_n^i$.

3 The mass shell condition

Regarding the q -deformed normal ordering ambiguity, one can simplify Eqs. (4) and (5) by means of the Riemann zeta function regularization and the use of the q -deformed commutation relation (7) as well as Eqs. (8) and (9) one obtains

$$\alpha' M^2 = -\frac{D-2}{24} + \frac{1}{2} \sum_{i,i',j=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{+\infty} n [2 + 3(q-1)\Lambda_{i'i'}^{ii} + (q-1)^2 \Lambda_{jj}^{ii} \Lambda_{i'i'}^{jj}] a_n^{\dagger i'} a_n^{i'}, \quad (11)$$

$$\alpha' M^2 = -\frac{D-2}{12} + \frac{1}{2} \sum_{i,i',j=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{+\infty} n [2 + 3(q-1)\Lambda_{i'i'}^{ii} + (q-1)^2 \Lambda_{jj}^{ii} \Lambda_{i'i'}^{jj}] [a_n^{\dagger i'} a_n^{i'} + \tilde{a}_n^{\dagger i'} \tilde{a}_n^{i'}] \quad (12)$$

for the open and closed bosonic strings, respectively.

Now, regarding the open bosonic string, we consider vectorial states of the form $\epsilon_j \alpha_{-1}^j |0\rangle$ (ϵ_j is a polarization vector). To preserve the covariance after the q -deformation, these states should define an irreducible representation of their little group which is the vectorial representation of the $SO(D-2)$ group. This implies that these states have to have a zero mass, i.e.,

$$M^2 \epsilon_j \alpha_{-1}^j |0\rangle = 0. \quad (13)$$

Similarly, for the closed bosonic string, we take symmetric tensorial states of the form $\epsilon_{ij} (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^i + \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j) |0\rangle$ and in order that these states have a zero mass too, one has to have

$$M^2 \epsilon_{ij} (\alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^i + \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j) |0\rangle = 0. \quad (14)$$

We remind the reader that the q -deformed Fock space is defined such that

$$\begin{aligned} \alpha_n^i |0\rangle &= 0, & n &\geq 1, \\ \tilde{\alpha}_n^i |0\rangle &= 0, & n &\geq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

After, straightforward manipulations and the use of the q -deformed commutation relation (7) both of the mass shell conditions (4) and (5) give

$$D = 2 + 12(q + 1). \quad (16)$$

Notice that for $q = 1$, we derive the usual space-time critical dimension of the bosonic string $D = 26$. Moreover, and in order that the relation has to be compatible with the condition $D \geq 4$, one has to require that

$$q \geq -\frac{5}{6}. \quad (17)$$

4 Conclusion

Throughout this work, we have derived new critical space-time dimension for bosonic strings in the general framework of the deformation theory.

Thus, one can have a q -deformed consistent bosonic strings in an infinite number of space-time where dimensions are such that the inequality (17) holds. This means that one may have $D = 4$ which corresponds to a value of the deformed parameter $q = -\frac{5}{6}$ without having recourse to the compactification procedure. Moreover, with these new critical space-time dimensions, one may have interesting phenomenological implications (more details are under investigations [9]).

We are very grateful to profs. G.W. Gibbons from University of Cambridge and Jerome P. Gauntlett from California Institute of Technology for fruitful discussions and comments.

References

- [1] Oh C.H. and Singh K.: *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 5907.
- [2] Sabanov S.V.: *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) 2583.
- [3] Chaichain M. and Demichev A.P.: *Phys. Lett. B* **320** (1994) 273.
- [4] McFarlane A.J.: *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) 4581.
- [5] Mebarki N., Benrachi S., Aissaoui H., and Boudine A.: *The relationship between paraquantization and deformation*, accepted for publication in *Turk. J. Phys.*
- [6] Mebarki N., Aissaoui H., Boudine A., and Maasmi A.: *Czech. J. Phys.* **47** (1997) 755 (this issue).
- [7] Kato N., and Ogawa K.: *Nucl. Phys. B* **212** (1983) 443.
- [8] Govaerts J.: in lectures presented at the Escuela, Avasszada de Verano en Fisica, June 9–July 15 (1986), Department of Physics, Cinverstav-IPN Mexico.
- [9] Mebarki N., Aissaoui H., Boudine A., and Maasmi A.: in preparation.

Leptogenesis in minimal left–right symmetric models

K.S. Babu^a, A. Bachri^{a,*}, H. Aissaoui^{b,c}

^a Oklahoma Center for High Energy Physics, Department of Physics, Oklahoma State University,
Stillwater, OK 74078, USA

^b Laboratoire de Physique Théorique, Université de Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay cedex, France

^c Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Mentouri University, Constantine 25000, Algeria

Received 23 September 2005; received in revised form 16 December 2005; accepted 20 December 2005

Available online 17 January 2006

Abstract

We analyze lepton asymmetry induced in the decay of right-handed neutrinos in a class of minimal left–right symmetric models. In these models, which assume low energy supersymmetry, the Dirac neutrino mass matrix is proportional to the charged lepton mass matrix. As a result, lepton asymmetry is calculable in terms of 9 parameters, all measurable in low energy neutrino experiments. By solving the Boltzmann equations numerically we show that adequate baryon asymmetry is generated in these models. This however places significant constraints on the light neutrino parameters. We find $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$ and $\theta_{13} = (0.01–0.07)$ for the neutrino oscillation angles, and $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ for the Majorana phases.

© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The discovery of neutrino flavor oscillations in solar, atmospheric, and reactor neutrino experiments [1] may have a profound impact on our understanding of the dynamics of the early universe. This is because such oscillations are feasible only if the neutrinos have small (sub-eV) masses, most naturally explained by the seesaw mechanism [2]. This assumes the existence of super-heavy right-handed neutrinos N_i (one per lepton family) with masses of order $(10^8–10^{14})$ GeV. The light neutrino masses are obtained from the matrix $M_\nu \simeq M_D M_R^{-1} M_D^T$ where M_D and M_R are respectively the Dirac and the heavy Majorana right-handed neutrino

* Corresponding author.

E-mail addresses: kaladi.babu@okstate.edu (K.S. Babu), abdelghafour.bachri@okstate.edu (A. Bachri), aissaoui@th.u-psud.fr (H. Aissaoui).

(r.h.n.) mass matrices. The decay of the lightest right-handed neutrino N_1 can generate naturally an excess of baryons over anti-baryons in the universe [3] consistent with cosmological observations. The baryon asymmetry parameter is an important cosmological observable constrained by big bang nucleosynthesis and determined recently with high precision by the WMAP experiment [4]:

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.5^{+0.4}_{-0.3}) \times 10^{-10}. \quad (1)$$

The decay of N_1 can satisfy all three of the Sakharov conditions [5] needed for successful generation of η_B —it can occur out of thermal equilibrium, there is sufficient C and CP violation, and there is also baryon number violation. The last condition is met by combining lepton number violation in the Majorana masses of the right-handed neutrinos with $B + L$ violating interactions of the Standard Model arising through the electroweak sphaleron processes [6]. A compelling picture emerges, with the same mechanism explaining the small neutrino masses and the observed baryon asymmetry of the universe. η_B appears to be intimately connected to the observed neutrino masses and mixings.

A more careful examination of the seesaw structure would reveal that, although there is an underlying connection, the light neutrino mass and mixing parameters cannot determine the cosmological baryon asymmetry, when the seesaw mechanism is implemented in the context of the Standard Model (SM) gauge symmetry. It is easy to see this as follows. Without loss of generality one can work in a basis where the charged lepton mass matrix and the heavy right-handed neutrino Majorana mass matrix M_R are diagonal with real eigenvalues. The Dirac neutrino mass matrix would then be an arbitrary complex 3×3 matrix with 18 parameters (9 magnitudes and 9 phases). Three of the phase parameters can be removed by field redefinitions of the left-handed lepton doublets and the right-handed charged lepton singlets. The neutrino sector will then have 18 ($= 15 + 3$) parameters. 9 combinations of these will determine the low energy observables (3 masses, 3 mixing angles and 3 phases), while the lepton asymmetry (and thus η_B) would depend on all 18 parameters, leaving it arbitrary.

In this paper we show that it is possible to quantitatively relate η_B to light neutrino mass and mixing parameters by implementing the seesaw mechanism in the context of a class of supersymmetric left–right models [7]. We note that unlike in the SM where the right-handed neutrinos appear as rather ad hoc additions, in the left–right symmetric models they are more natural as gauge invariance requires their existence. Supersymmetry has the well-known merit of solving the gauge hierarchy problem. With the assumption of a minimal Higgs sector, it turns out that these models predict the relation for the Dirac neutrino mass matrix

$$M_D = c \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where $c \simeq m_t/m_b$ is determined from the quark sector, leaving only the Majorana mass matrix M_R to be arbitrary. 3 phases in M_R can be removed, leaving a total of 9 parameters which determine both the low energy neutrino masses and mixings as well as the baryon asymmetry. It then becomes apparent that η_B is calculable in terms of the neutrino observables. There have been other attempts in the literature to relate leptogenesis with low energy observables [8,9]. Such attempts often make additional assumptions such as $M_D = M_{\text{up}}$ (which may not be fully realistic), or specific textures for lepton mass matrices.

While a lot has been learned from experiments about the light neutrino masses and mixings, a lot remains to be learned. Our analysis shows that cosmology puts significant restrictions on

the light neutrino parameters. Successful baryogenesis requires within our model that three conditions be satisfied: $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$, $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ and $\theta_{13} = (0.01-0.07)$. Here θ_{12} and θ_{13} are elements of the neutrino mixing matrix, m_i are the light neutrino mass eigenvalues and α , β are the Majorana phases entering in the amplitude for neutrinoless double beta decay. Future neutrino experiments will be able to either confirm or refute these predictions.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we review briefly the minimal left–right symmetric model. In Section 3 we analyze leptogenesis in this model. Here we derive constraints imposed on the model from the requirement of successful leptogenesis. In Section 4 we calculate the lepton asymmetry parameter ε_1 generated in the model in N_1 decay. Section 5 summarizes the relevant Boltzmann equations needed for computing the baryon asymmetry parameter. Section 6 provides our numerical results for η_B . Finally, in Section 7 we conclude.

2. Brief review of the minimal left–right symmetric model

Let us briefly review the basic structure of the minimal SUSY left–right symmetric model developed in Ref. [7]. The gauge group of the model is $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. The quarks and leptons are assigned to the gauge group as follows. Left-handed quarks and leptons (Q, L) transform as doublets of $SU(2)_L$ [$Q(3, 2, 1, 1/3)$ and $L(1, 2, 1, -1)$], while the right-handed ones (Q^c, L^c) are doublets of $SU(2)_R$ [$Q^c(3^*, 1, 2, -1/3)$ and $L^c(1, 1, 2, 1)$]. The Dirac masses of fermions arise through their Yukawa couplings to a Higgs bidoublet $\Phi(1, 2, 2, 0)$. The $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ symmetry is broken to $U(1)_Y$ by the VEV (v_R) of a $B - L = -2$ triplet scalar field $\Delta^c(1, 1, 3, -2)$. This triplet is accompanied by a left-handed triplet $\Delta(1, 3, 1, 2)$ (along with $\bar{\Delta}$ and $\bar{\Delta}^c$ fields, their conjugates to cancel anomalies). These fields also couple to the leptons and are responsible for inducing large Majorana masses for the ν_R . An alternative to these triplet Higgs fields is to use $B - L = \pm 1$ doublets $\chi(1, 2, 1, -1)$ and $\chi^c(1, 1, 2, 1)$, along with their conjugates $\bar{\chi}$ and $\bar{\chi}^c$. In this case non-renormalizable operators will have to be invoked to generate large ν_R Majorana masses. For definiteness we shall adopt the triplet option, although our formalism allows for the addition of any number of doublet Higgs fields as well. The superpotential invariant under the gauge symmetry involving the quark and lepton fields is

$$W = \mathbf{Y}_q Q^T \tau_2 \Phi \tau_2 Q^c + \mathbf{Y}_l L^T \tau_2 \Phi \tau_2 L^c + (\mathbf{f} L^T i \tau_2 \Delta L + \mathbf{f}_c L^c T i \tau_2 \Delta^c L^c). \quad (3)$$

Under left–right parity symmetry, $Q \leftrightarrow Q^{c*}$, $L \leftrightarrow L^{c*}$, $\Phi \leftrightarrow \Phi^\dagger$, $\Delta \leftrightarrow \Delta^{c*}$, along with $W_{SU(2)_L} \leftrightarrow W_{SU(2)_R}^*$, $W_{B-L} \leftrightarrow W_{B-L}^*$ and $\theta \leftrightarrow \bar{\theta}$. As a consequence, $\mathbf{Y}_q = \mathbf{Y}_q^\dagger$, $\mathbf{Y}_l = \mathbf{Y}_l^\dagger$, and $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c^*$ in Eq. (3).¹ It has been shown in Ref. [7] that the hermiticity of the Yukawa matrices (along with the parity constraints on the soft SUSY breaking parameters) helps to solve the supersymmetric CP problem that haunts the MSSM.

Below v_R , the effective theory is the MSSM with its H_u and H_d Higgs multiplets.² These are contained in the bidoublet Φ of the SUSY left–right model, but in general they can also reside partially in other multiplets having identical quantum numbers under the MSSM symmetry (such as the χ , $\bar{\chi}$ doublet Higgs fields alluded to earlier). Allowing for such a possibility,

¹ We do not explicitly use these relations.

² The right-handed gauge bosons have masses of order $v_R \sim 10^{14}$ GeV and thus play no significant role in cosmology at $T \sim M_1 \ll v_R$.

the superpotential of Eq. (3) leads to the relations for the MSSM Yukawa coupling matrices

$$\mathbf{Y}_u = \gamma \mathbf{Y}_d, \quad \mathbf{Y}_\ell = \gamma \mathbf{Y}_{\nu D}. \quad (4)$$

These relations have been called up–down unification [7]. Here, the first relation of Eq. (4) implies $m_t/m_b \simeq \gamma \tan \beta \equiv c$ where γ is a parameter characterizing how much of H_u and H_d of MSSM are in the bidoublet Φ . The case of $H_{u,d}$ entirely in Φ will correspond to $\gamma = 1$ and $\tan \beta = m_t/m_b$. At first sight the first of the relations in Eq. (4) might appear phenomenologically disastrous since it leads to vanishing quark mixings and unacceptable quark mass ratios. It was shown in the first paper of Ref. [7] that including the one-loop diagrams involving the gluino and the chargino and allowing for a flavor structure for the soft SUSY breaking A terms, there exists a large range of parameters (though not the entire range possible in the usual MSSM) where correct quark mixings as well as masses can be obtained consistent with flavor changing constraints.

It is the second of Eq. (4) that concerns us here. This relation would lead to $M_D = c M_l$, with $c \simeq m_t/m_b$. The supersymmetric loop corrections for the leptonic mass matrices are numerically small compared to similar corrections in the quark sector, since no strongly interacting particles take part in these loops. Furthermore, leptonic mixing angles are induced at tree level through the structure in the Majorana neutrinos mass matrix, and any loop corrections to these will be subdominant. This is especially true since two of the leptonic mixing angles are large to begin with. We therefore ignore SUSY loop corrections to the lepton mass matrices.

One can thus go to a basis where the charged lepton and the Dirac neutrino mass matrices are simultaneously diagonal. The heavy Majorana mass matrix $M_R = \mathbf{f}v_R$ will then be a generic complex symmetric matrix. After removing three phases in M_R by field redefinitions, we are left with 9 parameters (6 magnitudes and 3 phases) which determine the light neutrino spectrum as well as the heavy neutrino spectrum. This in turn fixes the lepton asymmetry. The consequences of such a constrained system for leptogenesis will be analyzed in the next section.

In principle the $\Delta(1, 3, 1, +2)$ Higgs field can also acquire a small VEV $\lesssim \mathcal{O}(\text{eV})$ [10]. In this case the seesaw formula would be modified, as will the calculation of the lepton asymmetry [11]. We will assume such type II seesaw contributions proportional to $\langle \Delta \rangle$ are zero in our analysis. This is consistent with the models of Ref. [7]. Leptogenesis in the context of more general left–right symmetric models has been analyzed in Ref. [12].

3. Leptogenesis in left–right symmetric framework

The $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ symmetry is broken down to $U(1)_Y$ by the VEV $\langle \Delta^c \rangle = v_R \sim 10^{14}$ GeV. At least some of the right-handed neutrinos have masses below v_R . We thus focus on the neutrino Yukawa coupling in the context of MSSM. The $SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariant Yukawa interactions are contained in the MSSM superpotential

$$W = l H_d \mathbf{Y}_\ell e^c + l H_u \mathbf{Y}_{\nu D} v^c + \frac{1}{2} v^{cT} \mathbf{C} M_R v^c, \quad (5)$$

where l stands for the left-handed lepton doublet, and (e^c, ν^c) denote the conjugates of the right-handed charged lepton and the right-handed neutrino fields respectively. H_u, H_d are the MSSM Higgs fields with VEVs v_u, v_d . $M_l = \mathbf{Y}_\ell v_d$, $M_D = \mathbf{Y}_{\nu D} v_u$ and M_R are respectively the charged lepton, the Dirac neutrino, and the Majorana r.h.n. mass matrices. Then one can generate light neutrino masses by the seesaw mechanism [2]

$$M_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T. \quad (6)$$

There is mixing among generations in both M_R and M_D , the light neutrino mixing angles will depend on both of these mixings. Within the SM or MSSM where M_D is an arbitrary matrix, the structure of the right-handed neutrino mass matrix cannot be fully determined even if the light matrix M_ν were to be completely known from experiments. As noted in Section 2, in the minimal version of the left–right symmetric model one has

$$M_D = cM_l = c \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad (7)$$

where $c \simeq m_t/m_b$. Here we have already gone to a basis where the charged lepton mass matrix is diagonalized. In the three family scenario, the relations between the flavor eigenstates (ν_e, ν_μ, ν_τ) and the mass eigenstates (ν_1, ν_2, ν_3) can be expressed in terms of observables as

$$M_\nu = U^* M_\nu^{\text{diag}} U^\dagger, \quad (8)$$

where $M_\nu^{\text{diag}} \equiv \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$, with m_i being the light neutrinos masses and U being the 3×3 mixing matrix which we write as $U = U_{PMNS} P$. We parameterize U_{PMNS} [13] as

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (9)$$

where $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ and δ is the Dirac CP violating phase which appears in neutrino oscillations. The matrix P contains two Majorana phases unobservable in neutrino oscillation, but relevant to neutrinoless double beta decay [14]:

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Combining Eq. (8) with the seesaw formula of Eq. (6) and solving for the right-handed neutrino mass matrix we find

$$M_R = c^2 M_l M_\nu^{-1} M_l = \frac{c^2 m_\tau^2}{m_1} \begin{pmatrix} \frac{m_e}{m_\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_\mu}{m_\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U_{PMNS} P^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{m_3} \end{pmatrix} U_{PMNS}^T \begin{pmatrix} \frac{m_e}{m_\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_\mu}{m_\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

This enables us to establish a link between high scale parameters and low scale observables.

We define a small expansion parameter ϵ as

$$\epsilon = \frac{m_\mu}{m_\tau} \simeq 0.059,$$

in terms of which we have

$$m_e = a_e \epsilon^3 m_\tau, \quad \frac{m_1}{m_3} = a_{13} \epsilon, \quad \theta_{13} = t_{13} \epsilon, \quad \theta_{23} = \frac{\pi}{4} + t_{23} \epsilon. \quad (12)$$

Here a_e, a_{13}, t_{13} and t_{23} are $\lesssim \mathcal{O}(1)$ parameters with $a_e = 1.400$. These expansions follow from low energy data assuming the picture of hierarchical neutrino masses.

We find that the requirement of generating adequate baryon asymmetry places significant constraints on the neutrino mixing parameters. Specifically, the following expansions

$$\frac{m_1}{m_2} = \tan^2 \theta_{12} + a_{12}\epsilon \quad \text{and} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + b\epsilon, \quad (13)$$

where a_{12} and b are $\lesssim \mathcal{O}(1)$ parameters are required. To see this, we note that the CP asymmetry parameter ϵ_1 generated in the decay of N_1 is too small, of order $\epsilon_1 \sim \frac{\epsilon^6}{8\pi} \sim 2 \times 10^{-9}$ if a_{12} or b are much greater than 1. This is because the heavy neutrino masses would be strongly hierarchical in this case, $M_1 : M_2 : M_3 \sim \epsilon^6 : \epsilon^2 : 1$. This can be altered to a weak hierarchy $M_1 : M_2 : M_3 \sim \epsilon^4 : \epsilon^2 : 1$ by observing that the elements of the 2–3 block of M_R of Eq. (11) are all proportional to $\{\frac{m_1}{m_2} e^{2i\beta} \cos^2 \theta_{12} + e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12}\}$ and by demanding this quantity to be of order ϵ . Eq. (13) is just this condition. $\epsilon_1 \sim \frac{\epsilon^4}{8\pi} \sim 10^{-6}$ in this case, which can lead to acceptable baryon asymmetry, as we show.

An immediate consequence of Eq. (13) is that neutrinoless double beta decay is suppressed in the model. The effective mass relevant for this decay is found to be

$$m_{\beta\beta} = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| \simeq \left| m_2 e^{2i\alpha} \epsilon (a_{12} c_{12}^2 - 2i b s_{12}^2) + m_3 s_{13}^2 e^{-2i\delta} \right|. \quad (14)$$

This is of the order $m_3 \epsilon^2 \sim 10^{-4}$ eV, which would be difficult to measure. This amplitude is small because of a cancellation between the leading contributions proportional to m_1 and m_2 (see Eq. (13)).

In terms of these expansions, the r.h.n. mass matrix becomes

$$M_R = \begin{pmatrix} A_{11}\epsilon^5 & A_{12}\epsilon^3 & A_{13}\epsilon^2 \\ A_{12}\epsilon^3 & A_{22}\epsilon^2 & A_{23}\epsilon \\ A_{13}\epsilon^2 & A_{23}\epsilon & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{M_o \epsilon a_e^2 e^{2i\alpha} \cos 2\theta_{12}}{\cos^2 \theta_{12}}, & A_{12} &= -\frac{M_o \epsilon a_e e^{2i\alpha} \tan \theta_{12}}{\sqrt{2}}, \\ A_{13} &= \frac{M_o \epsilon a_e e^{2i\alpha} \tan \theta_{12}}{\sqrt{2}}, \\ A_{22} &= \frac{M_o \epsilon}{2} \{a_{13} - a_{12} e^{2i\alpha} \cos^2 \theta_{12} - 2i b e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12} + 2e^{i(2\alpha+\delta)} t_{13} \tan \theta_{12}\}, \\ A_{23} &= \frac{M_o \epsilon}{2} \{a_{13} + a_{12} e^{2i\alpha} \cos^2 \theta_{12} + 2i b e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12}\}, \\ A_{33} &= -M_o \epsilon e^{2i\alpha} \left\{ t_{13} e^{i\delta} \tan \theta_{12} + i b \sin^2 \theta_{12} - \frac{a_{13} e^{-2i\alpha}}{2} + \frac{a_{12} \cos^2 \theta_{12}}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Here we defined $M_o = c^2 m_\tau^2 / m_1$. This hierarchical mass matrix is diagonalized by a series of rotations U_1 , U_2 and U_3 such that:

$$(K U_3 U_2 U_1) M_R (K U_3 U_2 U_1)^T = \begin{pmatrix} |M_1| & 0 & 0 \\ 0 & |M_2| & 0 \\ 0 & 0 & |M_3| \end{pmatrix} \quad (17)$$

where $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ with $k_i = e^{-i\phi_i/2}$ being phase factors which make each r.h.n. masses M_i real, $M_i = |M_i|e^{i\phi_i}$. $V = (KU_3U_2U_1)^T$ is the matrix that diagonalizes M_R . The unitary matrix U_1 is given by

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{A_{13}}{A_{33}}\epsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{A_{13}^*}{A_{33}^*}\epsilon^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Similarly, U_2 and U_3 are unitary matrices with off-diagonal entries given by

$$(U_2)_{23} = -\frac{A_{23}}{A_{33}}\epsilon, \quad (U_3)_{12} = -\frac{(A_{12} - A_{13}A_{23}/A_{33})\epsilon}{A_{22} - A_{23}^2/A_{33}}. \quad (19)$$

The mass eigenvalues are found to be

$$\begin{aligned} M_1 &= M_\circ k_1^2 \epsilon^5 (2a_{13}a_e^2 e^{2i\alpha} \sin^2 \theta_{12}) \\ &\quad \times (2t_{13}^2 e^{2i(\alpha+\delta)} \sin^2 \theta_{12} + (a_{12} + 2tb + (a_{12} - 2tb) \cos 2\theta_{12}) a_{13} \cos^2 \theta_{12})^{-1}, \\ M_2 &= M_\circ k_2^2 \epsilon^3 e^{2i\alpha} (a_{13}(a_{12} + 2tb + (a_{12} - 2tb) \cos 2\theta_{12}) + 2t_{13}^2 e^{i(\delta+\alpha)} \tan^2 \theta_{12}) \\ &\quad \times (-a_{13} + tbe^{2i\alpha} + e^{2i\alpha}(a_{12} \cos^2 \theta_{12} - tb \cos 2\theta_{12}) + 2e^{i\delta} t_{13} \tan \theta_{12})^{-1}, \\ M_3 &= \frac{M_\circ k_3^2 \epsilon}{2} (a_{13} - tbe^{2i\alpha} - e^{2i\alpha}(a_{12} \cos^2 \theta_{12} - tb \cos 2\theta_{12} + 2t_{13} e^{i\delta} \tan \theta_{12})). \end{aligned} \quad (20)$$

We use these results in the next section to determine ε_1 .

4. CP violation and lepton asymmetry

Now that we have developed our framework, we can turn attention to the evaluation of the CP asymmetry ε_1 generated in the decay of the lightest r.h.n. N_1 . This arises from the interference between the tree-level and one-loop level decay amplitudes.³ In a basis where the r.h.n. mass matrix is diagonal and real, the asymmetry in the decay of N_i is given by [15]

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{8\pi v^2 (M_D^\dagger M_D)_{ii}} \sum_{j=2,3} \text{Im}[(M_D^\dagger M_D)_{ij}]^2 \left[f\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) + g\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) \right] \quad (21)$$

where $f(x)$ and $g(x)$ represent the contributions from vertex and self energy corrections respectively. For the case of the non-supersymmetric standard model with right-handed neutrinos, these functions are given by [15]

$$f_{\text{non-SUSY}}(x) = \sqrt{x} \left[-1 + (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right], \quad g_{\text{non-SUSY}}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, \quad (22)$$

while for the case of MSSM plus right-handed neutrinos, they are given by

$$f_{\text{SUSY}}(x) = \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad g_{\text{SUSY}}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}. \quad (23)$$

³ We will assume $M_1 \ll M_2 < M_3$. In this case, even if the heavier right-handed neutrinos N_2 and N_3 produce lepton asymmetry, it is usually erased before the decay of N_1 .

Here v is the SM Higgs doublet VEV, $v \simeq 174$ GeV. For the case of MSSM, v in Eq. (21) is replaced by $v \sin \beta$. Hereafter, for definiteness in the numerical evaluation of the Boltzmann equations, we assume the SM scenario. However, our result should be approximately valid for the MSSM case as well.⁴ Assuming a mass hierarchy $M_1 \ll M_2 < M_3$ in the right-handed neutrino sector i.e. ($x \gg 1$), which is realized in our model, see Eq. (15), the above formula is simplified to the following one:

$$\varepsilon_1 = -\frac{3}{16\pi v^2 (M_D^\dagger M_D)_{11}} \sum_{k=2,3} \text{Im}[(M_D^\dagger M_D)_{1k}]^2 \frac{M_1}{M_k}. \quad (24)$$

ε_1 depends on the (1, 1), (1, 2) and (1, 3) entries of $M_D^\dagger M_D$. These quantities can be related to the light neutrino mass and mixing parameters measurable in low energy experiments. In the basis where M_R is diagonal, these elements are

$$\begin{aligned} (M_D^\dagger M_D)_{11} &= (cm_\tau)^2 (V_{31} V_{31}^* + V_{21} V_{21}^* \epsilon^2 + a_e^2 V_{11} V_{11}^* \epsilon^6), \\ (M_D^\dagger M_D)_{12} &= (cm_\tau)^2 (V_{31} V_{32}^* + V_{21} V_{22}^* \epsilon^2 + a_e^2 V_{11} V_{12}^* \epsilon^6), \\ (M_D^\dagger M_D)_{13} &= (cm_\tau)^2 (V_{31} V_{33}^* + V_{21} V_{23}^* \epsilon^2 + a_e^2 V_{11} V_{13}^* \epsilon^6), \end{aligned} \quad (25)$$

where $V = K U_3 U_2 U_1$ is the unitary matrix diagonalizing M_R . Straightforward calculations give, to leading order in ϵ ,

$$\begin{aligned} (M_D^\dagger M_D)_{11} &= 8a_e^2 c^2 m_\tau^2 \epsilon^4 \cos^2 \theta_{12} \sin^2 \theta_{12} (a_{13}^2 + t_{13}^2 \tan^2 \theta_{12}) \\ &\quad \times 1/\{8t_{13}^4 \sin^4 \theta_{12} + 32a_{13} t_{13}^2 b \cos^2 \theta_{12} \sin^4 \theta_{12} \sin 2(\alpha + \delta) \\ &\quad + a_{13} \cos^4 \theta_{12} [4a_{13} (a_{12}^2 - b^2) \cos 2\theta_{12} + a_{13} (a_{12}^2 + 4b^2) (3 + \cos 4\theta_{12}) \\ &\quad + 16a_{12} t_{13}^2 \sin^2 \theta_{12} \cos 2(\alpha + \delta)]\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (M_D^\dagger M_D)_{12}^2 &= 2a_e^2 c^4 m_\tau^4 \epsilon^6 \tan^2 \theta_{12} e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} e^{-2i(2\alpha + \delta)} \\ &\quad \times \{4(a_{13}^2 - t_{13}^2) \cos 2\theta_{12} - 2t_{13} \sin 2\theta_{12} (2a_{13} e^{i(2\alpha + \delta)} - (a_{12} + 2ib) e^{-i\delta}) \\ &\quad + 4(a_{13}^2 + t_{13}^2) + t_{13} \sin 4\theta_{12} e^{-i\delta} (a_{12} - 2ib)\}^2 \\ &\quad \times 1/\{[ibe^{i\delta} - a_{13} e^{-i(2\alpha + \delta)} + a_{12} e^{-i\delta} \cos^2 \theta_{12} - ibe^{-i\delta} \cos 2\theta_{12} \\ &\quad + 2t_{13} \tan \theta_{12}]^2 \\ &\quad \times [3a_{12} a_{13} - 2ia_{13} b + 4t_{13}^2 e^{-2i(\alpha + \delta)} + 4 \cos 2\theta_{12} (a_{12} a_{13} - t_{13}^2 e^{-2i(\alpha + \delta)}) \\ &\quad + a_{13} (a_{12} + 2ib) \cos 4\theta_{12}]^2\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (M_D^\dagger M_D)_{13}^2 &= 2a_e^2 c^4 m_\tau^4 \epsilon^4 \sin^2 \theta_{12} e^{-i(\phi_1 - \phi_3)} (a_{13} \cos \theta_{12} + e^{-i(2\alpha + \delta)} t_{13} \sin \theta_{12})^2 \\ &\quad \times 1/\{a_{13} \cos^2 \theta_{12} (a_{12} - 2ib + (a_{12} + 2ib) \cos 2\theta_{12}) \\ &\quad + 2t_{13}^2 \sin^2 \theta_{12} e^{-2i(\alpha + \delta)}\}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

These analytical expressions have been checked numerically. In Fig. 1 we have plotted $|\varepsilon_1|$ as function of θ_{13} for fixed values of other observables. The solid line in Fig. 1 which corresponds

⁴ The function $f + g$ in MSSM is twice as big compared to the SM. However this is compensated by the factor $1/g_*$ that appears in η_B which in MSSM is half of the SM value.

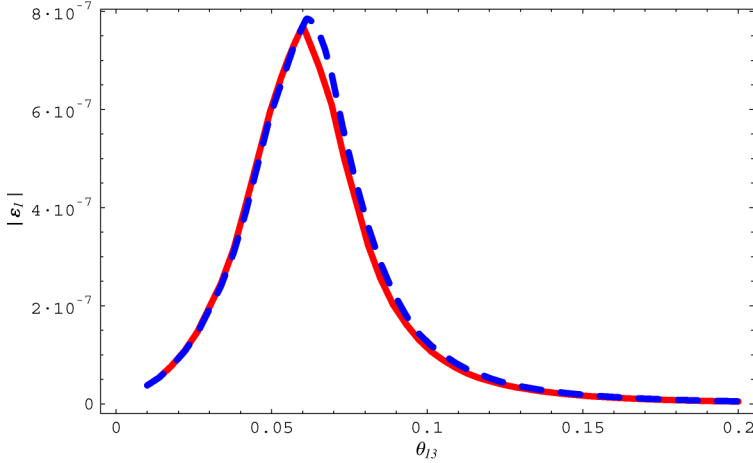


Fig. 1. Plots for CP asymmetry parameter ϵ_1 using analytical (dotted) and numerical (solid) results as a function of the neutrino oscillation angle θ_{13} . The input parameters used are $a_{12} = 1$, $b = 1$, $\Delta m_{\odot}^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\Delta m_a^2 = 5.54 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ and $\{\delta, \alpha\} = \{\pi/4, \pi/4\}$. Our model requires $|\epsilon_1| \gtrsim 1.3 \times 10^{-7}$ to successfully generate an adequate number for the BA. This criterium happens to be satisfied only in the region for which $0.01 \lesssim \theta_{13} \lesssim 0.07$, this interval is not too sensitive to variations in the input parameters.

to the exact numerical evaluation agrees very well with the dashed line corresponding to the analytical expressions.

From Fig. 1, it is apparent that θ_{13} is constrained in the model from cosmology. If $\epsilon_1 < 1.3 \times 10^{-7}$, the induced baryon asymmetry would be too small to explain observations. As can be seen from Fig. 1, θ_{13} should lie in the range 0.01–0.07 for an acceptable value of ϵ_1 . This result does not change very much with variations in the other input parameters.

Electroweak sphaleron processes [6] will convert the induced lepton asymmetry to baryon asymmetry. The ratio of baryon asymmetry to entropy Y_B is related to the lepton asymmetry through the relation [16]:

$$Y_B = C Y_{B-L} = \frac{C}{C-1} Y_L \quad (29)$$

where $C = \frac{8N_f + 4N_\varphi}{22N_f + 13N_\varphi}$, $N_f = 3$ and $N_\varphi = 1, 2$ in the case of the SM and MSSM, respectively. In either case $C \sim 1/3$. In Eq. (29), $Y_B = n_B/s$ with $s = 7.04n_\gamma$.

There has been considerable interest in obtaining approximate analytical expression for baryon asymmetry [17,18]. In order to estimate this, the dilution factor, often referred to as the efficiency factor κ that takes into account the washout processes (inverse decays and lepton number violating scattering) has to be known. As an example, $\kappa = (2 \pm 1) \times 10^{-2} \left(\frac{0.01 \text{ eV}}{m_1}\right)^{1.1 \pm 0.1}$ has been suggested in Ref. [17] from which $\eta_B \simeq 0.96 \times 10^{-2} \epsilon_{N_1} \kappa$ has been calculated. In our work we solve the coupled Boltzmann equations numerically to estimate the baryon asymmetry without referring to the efficiency factor.

5. Boltzmann equations

In this section we set up the Boltzmann equations for computing the baryon asymmetry η_B generated through the out of equilibrium decay of N_1 . In our model the right-handed neutrino

masses are not independent of the CP asymmetry parameter ε_1 . Therefore a self consistent analysis within the model is required.

In the early universe, at temperature of order N_1 mass, the main thermal processes which enter in the production of the lepton asymmetry are the decay of the lightest r.h. neutrino,⁵ its inverse decay, and the lepton number violation scattering, $\Delta L = 1$ Higgs exchange plus $\Delta L = 2$ r.h.n. exchange [19]. The production of the lepton asymmetry via the decay of the r.h.n. is an out-of-equilibrium process which is most efficiently treated by means of the Boltzmann equations (BE).

The first BE which describes the evolution of the abundance of the r.h. neutrino and which corresponds to the source of the asymmetry is given by⁶

$$\frac{dY_{N_1}}{dz} = -\frac{z}{Hs(z)} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{\text{eq}}} - 1 \right) (\gamma_{D_1} + \gamma_{S_1}), \quad (30)$$

where $z = M_1/T$. Here $s(z)$ is the entropy density and γ_{D_1} , γ_{S_1} are the interaction rates for the decay and $\Delta L = 1$ scattering contributions, respectively.

The second BE relevant to the lepton asymmetry is given by

$$\frac{dY_{B-L}}{dz} = -\frac{z}{s(z)H(M_1)} \left[\varepsilon_1 \gamma_{D_1} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{\text{eq}}} - 1 \right) + \gamma_W \frac{Y_{B-L}}{Y_L^{\text{eq}}} \right], \quad (31)$$

where ε_1 is the CP violation parameter given by Eq. (21) and γ_W is the washout factor which is responsible for damping of the produced asymmetry, see Eq. (49) below. In Eqs. (30) and (31), Y_i^{eq} is the equilibrium number density of a particle species i , which has a mass m_i , given by

$$Y_i^{\text{eq}}(z) = \frac{45}{4\pi^4} \frac{g_i}{g_*} \left(\frac{m_i}{M_1} \right)^2 z^2 K_2 \left(\frac{m_i z}{M_1} \right), \quad (32)$$

where g_i is the particle internal degree of freedom ($g_{N_i} = 2$, $g_\ell = 4$). At temperatures far above the electroweak scale one has $g_* \simeq 106.75$ in the standard model, and $g_* \simeq 228.75$ in MSSM. H , the Hubble parameter evaluated at $z = 1$, and $s(z)$, the entropy density, are given by

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45} \frac{M_1^2}{M_P}}, \quad s(z) = \frac{2\pi^2 g_*}{45} \frac{M_1^3}{z^3}, \quad (33)$$

where $M_P = 1.22 \times 10^{19}$ GeV. We also have

$$\gamma_{S_j} = 2\gamma_{t_j}^{(1)} + 4\gamma_{t_j}^{(2)}. \quad (34)$$

The decay reaction density γ_{D_j} has the following expression:

$$\gamma_{D_j} = n_{N_j}^{\text{eq}} \frac{K_1(z)}{K_2(z)} \Gamma_{N_j}, \quad (35)$$

where $K_n(z)$ are the modified Bessel functions. Γ_{N_j} of the r.h.n. N_j is the tree level total decay rate defined as

$$\Gamma_{N_j} = \frac{(\lambda^\dagger \lambda)_{jj}}{8\pi} M_j, \quad (36)$$

⁵ In our analysis we stick to the case where the asymmetry is due only to the decay of the lightest r.h. neutrino N_1 .

⁶ In this section we follow the notation of the first paper of Ref. [8] to which we refer the reader for further details.

where

$$n_{N_i}^{\text{eq}}(T) = \frac{g_i T m_i}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right). \quad (37)$$

We used the definition $\lambda = M_D/v$. We define the reaction density $\gamma^{(i)}$ of any process $a + b \rightarrow c + d$ by

$$\gamma^{(i)} = \frac{M_1^4}{64\pi^4} \frac{1}{z} \int_0^\infty dx \hat{\sigma}^{(i)}(x) \sqrt{x} K_1(\sqrt{x}z), \quad (38)$$

$$\frac{(M_a + M_b)^2}{M_1^2}$$

where $\hat{\sigma}^{(j)}(x)$ are the reduced cross sections for the different processes which contribute to the Boltzmann equations. For the $\Delta L = 1$ processes involving the quarks, we have

$$\hat{\sigma}_{tj}^{(1)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x}\right)^2, \quad (39)$$

$$\hat{\sigma}_{tj}^{(2)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x}\right) \left[\frac{x - 2a_j + 2a_h}{x - a_j + a_h} + \frac{a_j - 2a_h}{x - a_j} \ln\left(\frac{x - a_j + a_h}{a_h}\right) \right], \quad (40)$$

where

$$\alpha_u = \frac{\text{Tr}(\lambda_u^\dagger \lambda_u)}{4\pi} \simeq \frac{m_t^2}{4\pi v^2}, \quad a_j = \left(\frac{M_j}{M_1}\right)^2, \quad a_h = \left(\frac{\mu}{M_1}\right)^2, \quad (41)$$

μ is the infrared cutoff which we set to 800 GeV [19,20]. For the $\Delta L = 2$ r.h.n. exchange processes, we have

$$\hat{\sigma}_N^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) A_{jj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n < j, j=1}^3 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) B_{nj}^{(1)}, \quad (42)$$

$$\hat{\sigma}_N^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) A_{jj}^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n < j, j=1}^3 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) B_{nj}^{(2)} \quad (43)$$

where

$$A_{jj}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{a_j}{D_j} + \frac{a_j x}{2D_j^2} - \frac{a_j}{x} \left(1 + \frac{x + a_j}{D_j} \right) \ln\left(\frac{x + a_j}{a_j}\right) \right], \quad (44)$$

$$A_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x + a_j} + \frac{a_j}{x + 2a_j} \ln\left(\frac{x + a_j}{a_j}\right) \right], \quad (45)$$

$$B_{nj}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left[\frac{1}{D_j} + \frac{1}{D_n} + \frac{x}{D_j D_n} + \left(1 + \frac{a_j}{x} \right) \left(\frac{2}{a_n - a_j} - \frac{1}{D_n} \right) \ln\left(\frac{x + a_j}{a_j}\right) \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{a_n}{x} \right) \left(\frac{2}{a_j - a_n} - \frac{1}{D_j} \right) \ln\left(\frac{x + a_n}{a_n}\right) \right], \quad (46)$$

$$B_{nj}^{(2)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x + a_n + a_j} \ln\left[\frac{(x + a_j)(x + a_n)}{a_j a_n}\right] + \frac{2}{a_n - a_j} \ln\left(\frac{a_n(x + a_j)}{a_j(x + a_n)}\right) \right\}, \quad (47)$$

and

$$D_j = \frac{(x - a_j)^2 + a_j c_j}{x - a_j}, \quad c_j = a_j \sum_{\alpha=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j} \lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{64\pi^2}. \quad (48)$$

Finally, γ_W that accounts for the washout processes in the Boltzmann equations is

$$\gamma_W = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2} \gamma_{D_j} + \frac{Y_{N_j}}{Y_{N_j}^{\text{eq}}} \gamma_{t_j}^{(1)} + 2\gamma_{t_j}^{(2)} - \frac{\gamma_{D_j}}{8} \right) + 2\gamma_N^{(1)} + 2\gamma_N^{(2)}. \quad (49)$$

Here, we emphasize the so-called RIS (real intermediate states) in the $\Delta L = 2$ interactions which have to be carefully subtracted to avoid double counting in the Boltzmann equations. This corresponds to the term $-\frac{1}{8}\gamma_{D_j}$ in Eq. (49). For more details see Refs. [17,21] and the first paper of Ref. [18].

6. Results and discussion

We are now ready to present our numerical results. First we make several important remarks. Even though our model is supersymmetric, we have considered in our BE analysis only the SM particle interactions. This is a good approximation (see footnote 4). The authors in Ref. [20] have demonstrated that SUSY interactions do not significantly change the final baryon asymmetry. Furthermore, we have not included in our analysis the effects of renormalization group on the running masses and couplings. The first paper of Ref. [18] has studied these effects. This paper has also included finite temperature effects and $\Delta L = 1$ scattering processes involving SM gauge bosons, which we have ignored in our analysis. This should be a good approximation since it is believed that these effects are significant in the weak washout regime and our model parameters seem to favor the strong washout regime with $\tilde{m}_1 = (M_D^\dagger M_D)_{11}/M_1 \simeq 0.1$ eV. Scattering processes involving gauge bosons have also been studied in Ref. [21] in the context of resonant leptogenesis where they have been shown to be significant.

Our next step is to put this model to the test and check its predictions. In order to compute the value of the baryon asymmetry we proceed to numerically solve the Boltzmann equations. We scan the parameter space corresponding to the parameters a_{12} , b , the oscillation angle θ_{13} , the CP phase δ and the Majorana phase α . In order to automatically satisfy the oscillation data, we input the following light neutrino parameters:

$$\Delta m_{\odot}^2 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \Delta m_a^2 = 5.54 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad \sin \theta_{12} = 0.52. \quad (50)$$

Using hierarchical spectrum, we see that the masses m_1 , m_2 and m_3 are fixed. On the other hand we consider maximal mixing in the 2–3 sector of the leptonic mixing matrix, i.e. $\theta_{23} = \frac{\pi}{4} + t_{23}\epsilon$ with t_{23} being zero ($t_{23} \sim \mathcal{O}(1)$ has minimal impact on η_B). The CP phase δ and the Majorana phase α are allowed to vary in the intervals $[0, 2\pi]$ and $[0, \pi]$, respectively. We remind the reader that the second Majorana phase β is related to α through $\beta \simeq \alpha + \frac{\pi}{2} + b\epsilon$. θ_{13} will be allowed to vary in the interval $[0; 0.2]$ as it is bounded from above by reactor neutrino experiments.

In Fig. 2, for a given set of input parameters, we illustrate the different thermally averaged reaction rates $\Gamma_X = \gamma_X/n_{N_1}^{\text{eq}}$ contributing to BE as a function of $z = M_1/T$.

All rates at $z = 1$ fulfill the out of equilibrium condition (i.e. $\Gamma_X \lesssim H(z = 1)$), and so the expected washout effect due to the $\Delta L = 2$ processes will be small. The parameters chosen for this illustration are: $\delta = \pi/2$, $\alpha = \pi/2$, $a_{12} = 0.01$, $b = 0.9$, $cm_\tau = m_\tau(\frac{m_\tau}{m_b}) = 135$ GeV and $\theta_{13} =$

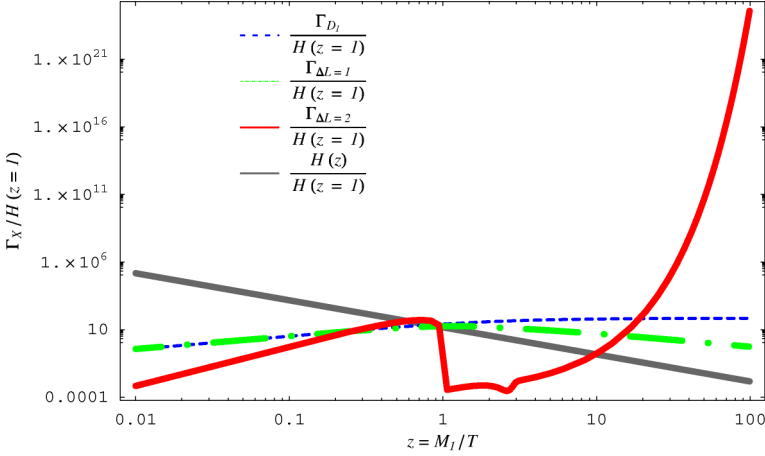


Fig. 2. Various thermally averaged reaction rates Γ_X contributing to BE normalized to the expansion rate of the Universe $H(z=1)$. The straight greyed line represents $H(z)/H(z=1)$, the dashed is for $\Gamma_{D_1}/H(z=1)$, the dotted-dashed line represents $\Gamma_{\Delta L=1}/H(z=1)$ processes and the red curve represents $\Gamma_{\Delta L=2}/H(z=1)$. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

0.02. Eq. (50) fixes the light neutrino masses to be: $m_1 = 0.00271292$ eV, $m_2 = 0.00688186$ eV and $m_3 = 0.0380442$ eV. For this choice we obtain $|\epsilon_1| \simeq 2 \times 10^{-7}$. The calculated r.h.n. masses in this case are

$$M_1 = 9 \times 10^9 \text{ GeV}, \quad M_2 = 8.7 \times 10^{11} \text{ GeV}, \quad M_3 = 2.6 \times 10^{14} \text{ GeV}. \quad (51)$$

The mass of the lightest r.h.n. is consistent with lower bound derived in Ref. [18], $M_1 \geq 2.4 \times 10^9$ GeV, for hierarchical neutrino masses assuming that one starts with zero N_1 initial abundance (which is what we assumed in our calculation). This mass is also in accordance with the upper bound found in Ref. [22] following a model independent study of the CP asymmetry, and the bound derived in Ref. [17] based on the estimation of ν_R production and the study of the asymmetry washout.

Fig. 3 represents the solution of the BE, N_1 abundance and the baryon asymmetry both as functions of z for the same set of parameters mentioned above. The final baryon asymmetry, in terms of the baryon to photon ratio, is (see dark, solid curve in Fig. 3 for $z \gg 1$)

$$\eta_B \simeq 6.03 \times 10^{-10}. \quad (52)$$

This number is inside the observational range of Eq. (1). Our codes were tested to reproduce the results in the first paper of Ref. [8] before being applied to this model.

At this point we should mention some potential difficulties with gravitino decays in the model. If supersymmetry breaking is mediated by conventional supergravity, it is natural to expect the mass of the gravitino to be of order 1 TeV. Such a gravitino, with its Planck scale suppressed interactions, would decay into MSSM particles with a lifetime of order 1 second. The decay products would upset the success of standard big bang nucleosynthesis. In an inflationary scenario, demanding consistency with light element abundance puts a lower limit on the reheating temperature T_R . For gravitino mass in the range 300 GeV to 3 TeV, a limit $T_R > 6 \times 10^6$ GeV has been derived [23]. Now, the decays of N_1 that generates lepton asymmetry should occur after reheating, since any asymmetry produced prior to that will be diluted by inflation. Thus

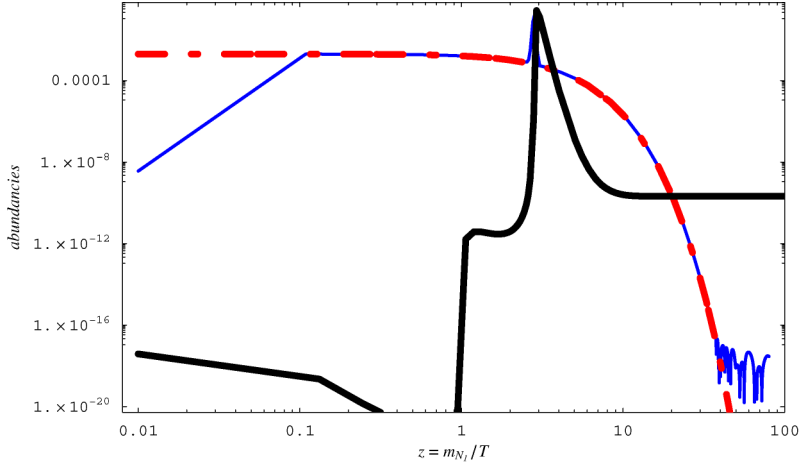


Fig. 3. Evolution of Y_{N_1} (solid blue), $Y_{N_1}^{\text{eq}}$ (dot-dash) and the baryon asymmetry η_B (dark solid line) in terms of z in the model. The estimated value for the baryon asymmetry is $\eta_B \simeq 6.03 \times 10^{-10}$, with $Y_{N_1}^{\text{ini}} = 0$ and assuming no pre-existing $B-L$ asymmetry. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

$M_1 < T_R$ is required, which for gravitino mass in the range 300 GeV to 3 TeV is in conflict with the predictions of Eq. (51).

There are several ways around this problem. (i) In gauge mediated SUSY breaking scenario the gravitino is the lightest SUSY particle with mass in the range 10^{-4} eV–100 GeV. For $m_{\tilde{g}} < 100$ MeV, there are no cosmological or astrophysical problems. In such a scenario the axion can serve as the dark matter. (ii) In anomaly mediated SUSY breaking scenario, the gravitino mass is enhanced by a loop factor compared to the squark masses and is naturally of order 100 TeV. Such a gravitino would decay with a shorter lifetime without affecting big bang nucleosynthesis. The gaugino is a natural dark matter candidate in this case. (iii) The gravitino itself can be the LSP and dark matter with a mass of order 100 GeV, in which case it does not decay [24]. Other solutions include changing the dynamics of the leptogenesis process by invoking (iii) non-thermal leptogenesis [25]. (iv) Resonant leptogenesis [21,26], or (v) soft leptogenesis [27]. The results presented here are compatible with any one of the first three alternatives.

7. Conclusion

An attractive feature of the seesaw mechanism is that it can explain the origin of small neutrino masses and at the same time account for the observed baryon asymmetry in the universe by the out of equilibrium decay of the super-heavy right-handed neutrinos. It is then very tempting to seek a link between the baryon asymmetry parameter η_B induced at high temperature and neutrino mass and mixing parameters observable in low energy experiments. No quantitative connection can be found between them in the SM. There have been several attempts in the literature [8,9,28] to establish a relationship between the two. In this paper we have addressed this question in the context of a class of minimal left–right symmetric models.

In the models under consideration the minimality of the Higgs sector implies that M_l and M_D (charged lepton and Dirac neutrino mass matrices) are proportional. As a result, the entire seesaw sector (including the heavy right-handed neutrinos and the light neutrinos) has only 9

parameters. This is the same number as low energy neutrino observables (3 masses, 3 mixing angles and 3 phases). As a result we are able to link the baryon asymmetry of the universe to low energy neutrino observables. This feature is unlike the SM seesaw which has too many arbitrary parameters. Our numerical solution to the coupled Boltzmann equations shows that this constrained system with $M_l \propto M_D$ leads to an acceptable baryon asymmetry. The requirement of an acceptable baryon asymmetry restricts some of the light neutrino observables. We find that $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$, $0.01 \lesssim \theta_{13} \lesssim 0.07$ and $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ are needed for successful baryogenesis. Future neutrino oscillation experiments can directly probe into the dynamics of the universe in its early stages.

Acknowledgements

One of the authors (A.B.) wishes to thank I. Gogoladze for discussions and A. Strumia for useful correspondence. The work of K.B. and A.B. is supported in part by US Department of Energy grant #DE-FG02-04ER46140 and #DE-FG02-04ER41306.

References

- [1] S. Fukuda, et al., Super-Kamiokande Collaboration, Phys. Lett. B 539 (2002) 179;
Q.R. Ahmad, et al., SNO Collaboration, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 011302;
B.T. Cleveland, et al., Astrophys. J. 496 (1998) 505;
D.N. Abdurashitov, et al., SAGE Collaboration, Phys. Rev. D 60 (1999) 055801;
W. Hampel, et al., GALLEX Collaboration, Phys. Lett. B 447 (1999) 127;
C. Cattadori, GNO Collaboration, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 111 (2002) 311;
M. Apollonio, et al., CHOOZ Collaboration, Phys. Lett. B 466 (1999) 415;
K. Eguchi, et al., KamLAND Collaboration, Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 021802.
- [2] P. Minkowski, Phys. Lett. B 67 (1977) 421;
T. Yanagida, in: A. Sawada, A. Sugamoto (Eds.), Proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe, Tsukuba, Japan 1979, KEK Report No. 79–18, Tsukuba;
S.L. Glashow, in: M. Lévy, et al. (Eds.), Quarks and Leptons, Cargèse, Plenum, New York, 1980, p. 707;
M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, in: P. van Nieuwenhuizen, D.Z. Freedman (Eds.), Supergravity, North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 315;
R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 912.
- [3] M. Fukugita, T. Yanagida, Phys. Lett. B 174 (1986) 45.
- [4] D.N. Spergel, et al., Astrophys. J. Suppl. 148 (2003) 175.
- [5] A.D. Sakharov, JETP Lett. 5 (1967) 24.
- [6] V.A. Kuzmin, V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 155 (1985) 36.
- [7] K.S. Babu, B. Dutta, R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D 67 (2003) 076006;
K.S. Babu, B. Dutta, R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D 60 (1999) 095004;
K.S. Babu, B. Dutta, R.N. Mohapatra, Phys. Rev. D 61 (2000) 091701;
K.S. Babu, B. Dutta, R.N. Mohapatra, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 5064;
K.S. Babu, B. Dutta, R.N. Mohapatra, Phys. Lett. B 458 (1999) 93.
- [8] G.C. Branco, R. Gonzalez Felipe, F.R. Joaquim, I. Masina, M.N. Rebelo, C.A. Savoy, Phys. Rev. D 67 (2003) 073025;
G.C. Branco, R. Gonzalez Felipe, F.R. Joaquim, M.N. Rebelo, Nucl. Phys. B 640 (2002) 202.
- [9] W. Buchmüller, M. Plümacher, Phys. Lett. B 389 (1996) 73;
P.H. Frampton, S.L. Glashow, T. Yanagida, Phys. Lett. B 548 (2002) 119;
E.K. Akhmedov, M. Frigerio, A.Y. Smirnov, JHEP 0309 (2003) 021;
S. Davidson, A. Ibarra, Nucl. Phys. B 648 (2003) 345;

- S. Pascoli, S.T. Petcov, W. Rodejohann, Phys. Rev. D 68 (2003) 093007;
 J.C. Pati, Phys. Rev. D 68 (2003) 072002;
 V. Barger, D.A. Dicus, H.J. He, T.j. Li, Phys. Lett. B 583 (2004) 173;
 R.N. Mohapatra, S. Nasri, H. Yu, Phys. Lett. B 615 (2005) 231.
- [10] G. Lazarides, Q. Shafi, C. Wetterich, Nucl. Phys. B 181 (1981) 287;
 R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Phys. Rev. D 23 (1981) 165;
 J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D 25 (1982) 774.
- [11] T. Hambye, G. Senjanovic, Phys. Lett. B 582 (2004) 73;
 S. Antusch, S.F. King, Phys. Lett. B 597 (2004) 199.
- [12] E. Ma, S. Sarkar, U. Sarkar, Phys. Lett. B 458 (1999) 73;
 A.S. Joshipura, E.A. Paschos, W. Rodejohann, Nucl. Phys. B 611 (2001) 227;
 W. Rodejohann, K.R.S. Balaji, Phys. Rev. D 65 (2002) 093009;
 M. Frank, Phys. Rev. D 70 (2004) 036004;
 U.A. Yajnik, J. Cline, M. Rabikumar, Pramana 62 (2004) 771;
 M.C. Chen, K.T. Mahanthappa, Phys. Rev. D 71 (2005) 035001;
 N. Sahu, S. Uma Sankar, hep-ph/0501069.
- [13] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 870;
 B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP 7 (1958) 172.
- [14] S.M. Bilenky, J. Hosek, S.T. Petcov, Phys. Lett. B 94 (1980) 495;
 J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D 22 (1980) 2227.
- [15] M. Flanz, E.A. Paschos, U. Sarkar, Phys. Lett. B 345 (1995) 248;
 M. Flanz, E.A. Paschos, U. Sarkar, Phys. Lett. B 382 (1996) 447, Erratum;
 L. Covi, E. Roulet, F. Vissani, Phys. Lett. B 384 (1996) 169;
 M. Flanz, E.A. Paschos, U. Sarkar, J. Weiss, Phys. Lett. B 389 (1996) 693;
 A. Pilaftsis, Phys. Rev. D 56 (1997) 5431;
 W. Buchmüller, M. Plümacher, Phys. Lett. B 431 (1998) 354.
- [16] S.Y. Khlebnikov, M.E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B 308 (1988) 885;
 For a recent review see: W. Buchmüller, R.D. Peccei, T. Yanagida, hep-ph/0502169.
- [17] W. Buchmüller, P. Di Bari, M. Plümacher, Ann. Phys. 315 (2005) 305.
- [18] G.F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto, A. Strumia, Nucl. Phys. B 685 (2004) 89;
 R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia, N. Tetradis, Nucl. Phys. B 575 (2000) 61.
- [19] M.A. Luty, Phys. Rev. D 45 (1992) 455.
- [20] M. Plümacher, Nucl. Phys. B 530 (1998) 207, hep-ph/9807557;
 K. Hamaguchi, hep-ph/0212305.
- [21] A. Pilaftsis, T.E.J. Underwood, Nucl. Phys. B 692 (2004) 303, hep-ph/0506107.
- [22] S. Davidson, A. Ibarra, Phys. Lett. B 535 (2002) 25.
- [23] K. Kohri, T. Moroi, A. Yotsuyanagi, hep-ph/0507245.
- [24] J.L. Feng, A. Rajaraman, F. Takayama, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 011302;
 J.L. Feng, S. Su, F. Takayama, Phys. Rev. D 70 (2004) 075019.
- [25] G. Lazarides, Q. Shafi, Phys. Lett. B 258 (1991) 305;
 T. Asaka, K. Hamaguchi, M. Kawasaki, T. Yanagida, Phys. Rev. D 61 (2000) 083512;
 R. Jeannerot, M. Postma, hep-ph/0507162;
 S. Dar, Q. Shafi, A. Sil, hep-ph/0508037.
- [26] A. Pilaftsis, Phys. Rev. D 56 (1997) 5431;
 J.R. Ellis, M. Raidal, T. Yanagida, Phys. Lett. B 546 (2002) 228.
- [27] Y. Grossman, T. Kashti, Y. Nir, E. Roulet, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 251801;
 G. D'Ambrosio, G.F. Giudice, M. Raidal, Phys. Lett. B 575 (2003) 75;
 L. Boubekeur, T. Hambye, G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 111601.
- [28] D. Falcone, F. Tramontano, Phys. Rev. D 63 (2001) 073007;
 M. Hirsch, S.F. King, Phys. Rev. D 64 (2001) 113005;
 T. Hambye, E. Ma, U. Sarkar, Nucl. Phys. B 602 (2001) 23;
 M.S. Berger, K. Siyeon, Phys. Rev. D 65 (2002) 053019;
 M. Fujii, K. Hamaguchi, T. Yanagida, Phys. Rev. D 65 (2002) 115012;
 L. Boubekeur, hep-ph/0208003;
 S.F. King, Phys. Rev. D 67 (2003) 113010;
 L. Velasco-Sevilla, JHEP 0310 (2003) 035;

- T. Endoh, S. Kaneko, S.K. Kang, T. Morozumi, M. Tanimoto, *J. Phys. G* 29 (2003) 1877;
Y. Achiman, *Phys. Lett. B* 599 (2004) 75;
S. Dar, S. Huber, V.N. Senoguz, Q. Shafi, *Phys. Rev. D* 69 (2004) 077701;
W.l. Guo, Z.z. Xing, *Phys. Lett. B* 583 (2004) 163;
T. Hambye, J. March-Russell, S.M. West, *JHEP* 0407 (2004) 070;
C.H. Albright, S.M. Barr, *Phys. Rev. D* 70 (2004) 033013;
M. Raidal, A. Strumia, K. Turzynski, *Phys. Lett. B* 609 (2005) 351;
S.M. West, *Phys. Rev. D* 71 (2005) 013004.

A model for leptogenesis at the TeV scale

Asmaa Abada ^a, Habib Aissaoui ^{a,b}, Marta Losada ^c

^a *Laboratoire de Physique Théorique, Université de Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay cedex, France*

^b *Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique, Mentouri University, Constantine 25000, Algeria*

^c *Centro de Investigaciones, Universidad Antonio Nariño, Cll. 58A No. 37-94, Santa Fe de Bogotá, Colombia*

Received 5 October 2004; accepted 3 August 2005

Available online 24 August 2005

Abstract

We consider the mechanism of thermal leptogenesis at the TeV scale in the context of an extension of the Standard Model with 4 generations and the inclusion of four right-handed Majorana neutrinos. We obtain a value for the baryon asymmetry of the Universe in accordance with observations by solving the full set of coupled Boltzmann equations for this model.

© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 12.60.Jv; 14.60.Pq; 11.30.Fs

Keywords: Leptogenesis; Neutrino physics; Baryon asymmetry of the universe

1. Introduction

The attractive mechanism of thermal leptogenesis has been thoroughly investigated in recent years. Most of the focus has been on the extended model of the Standard Model (SM) with 3 right-handed (RH) neutrinos [1]. This simple model which can explain the baryon asymmetry of the Universe (BAU) and provide appropriate values for neutrino masses and mixing angles is based on the out-of-equilibrium decay of a RH neutrino, in a CP violating way, such that an asymmetry in the leptonic decay products is produced. The leptonic asymmetry is then converted into a baryonic asymmetry due to $(B + L)$ -violating sphaleron interactions which are in equilibrium above the electroweak breaking scale.

E-mail addresses: abada@th.u-psud.fr (A. Abada), aissaoui@th.u-psud.fr (H. Aissaoui), malosada@uan.edu.co (M. Losada).

From the experimental point of view the recent best fit values of the ratio of the baryon to photon density $\eta = n_B/n_\gamma$,

$$\eta = 6.5_{-0.3}^{+0.4} \times 10^{-10}, \quad (1)$$

is given by WMAP [2].

The typical scale at which the standard scenario described above occurs corresponds to 10^{10} – 10^{15} GeV, and the induced neutrino masses arise via the see-saw mechanism [3–5] with a common interaction being at the origin of the asymmetry and mass generation.

Recently, detailed calculations have been performed solving the corresponding Boltzmann equations of the system taking into account the different interactions which contribute both to the production and potential washout of the leptonic asymmetry. The implications of these analyses have provided strong constraints on the values of the light left-handed neutrino masses $\sum_i m_i \sim 0.2$ eV [6–8] and a lower bound on the mass of the lightest RH neutrino $M \gtrsim 10^8$ GeV [6,9,10]. The more recent work of Ref. [11] has included the effect of scattering with gauge bosons which had been neglected before and in Ref. [12] a comprehensive calculation including effects from renormalization group (RG) running, finite temperature background effects, other possible decays producing a leptonic asymmetry (decay of a scalar particle), a correction to the appropriate subtraction that must be performed for scattering via N -exchange was presented. A thorough recalculation of this last issue was done in Ref. [13], coinciding with Ref. [12] that the washout contribution from this type of diagram had been overestimated.

The less standard scenario of leptogenesis occurring at the TeV scale has been investigated, for example, in Refs. [14–21]. In particular, in Ref. [14] a TeV scale model which is a simple extension of the Fukugita–Yanagida (FY) model including one more generation to the SM and four gauge singlets was discussed and estimates of the produced CP asymmetry and final baryon asymmetry were obtained. Both supersymmetric and non-supersymmetric versions of the model were analyzed.

In this paper we focus on this model of Ref. [14] and solve the corresponding Boltzmann equations (BE) in order to reliably obtain the final values of the asymmetry and determine the region of parameter space which is available for the model.

We dedicate Section 2 to a careful discussion of the way we set up our calculations of the Boltzmann equations making emphasis on a few subtle points. In Section 3, we recall the main features of the model and establish our notation. Section 4 presents the Boltzmann equations valid for this model. Section 5 is devoted to our results and conclusions.

2. Preliminary considerations

In Ref. [22] it was pointed out that the relevant object that should be studied in thermal leptogenesis is the density matrix ρ [23]. In the FY model ρ is a (3×3) matrix with all entries different from zero for temperatures greater than 10^{12} GeV. However, as the temperature decreases and each of the different interactions defined by a specific charged Yukawa coupling enters equilibrium the corresponding off-diagonal elements of the density matrix go to zero. In our model at the TeV scale all of the charged Yukawa couplings are in equilibrium and thus ρ will be a diagonal matrix. The matrix ρ is normalized such that

$$\text{Tr } \rho = \sum_{\alpha} Y_{L\alpha} \equiv \sum_{\alpha} (Y_{\ell_{\alpha}} - Y_{\bar{\ell}_{\alpha}}), \quad (2)$$

where the sum over α indicates a sum over flavour.

Another important issue is the relationship between the produced lepton asymmetry and the induced $B - L$ asymmetry which is conserved by sphaleron interactions. Again a careful consideration of the temperatures and which interactions are in equilibrium changes the equation relating these asymmetries, see Ref. [22]. In general, the procedure that is employed is through the establishment of equations for the chemical potentials reflecting which interactions are in equilibrium. Thus the chemical equilibrium equations allow us to write the asymmetries in number densities in terms of some specific asymmetry, say Y_{L_α} . For the Fukugita–Yanagida model then generically there would be a (3×3) matrix $A_{\alpha\beta}$ of the form [22]

$$Y_{B/3-L_\alpha} = A_{\alpha\beta} Y_{L_\beta}, \tag{3}$$

and the numerical values for the elements of A are determined from the equations for the chemical potentials. If all interactions related to charged Yukawa couplings are in equilibrium, as well as sphaleron interactions, the equation for the case of N generations simplifies to

$$\frac{Y_B}{N} - Y_{L_\alpha} = \left(-\frac{4}{3N} + \frac{8}{3} \frac{1}{4N+2} \right) \sum_{\beta} Y_{L_\beta} - 3Y_{L_\alpha}, \tag{4}$$

or, adding over all generations,

$$Y_{B-L} = -\frac{22N+13}{6N+3} \sum_{\alpha} Y_{L_\alpha}. \tag{5}$$

Some comments are in order. In the standard scenario of the FY model with three RH neutrinos, where the production of the asymmetry occurs at some high scale for which not all charged Yukawa couplings are in equilibrium, one should use Eq. (3) to relate the asymmetries. The point is that usually what is solved in the system of coupled Boltzmann equations, under certain assumptions, is an equation for $Y_L = \sum_{\alpha} Y_{L_\alpha}$, see below for a discussion on this point, and then the asymmetry in $B - L$ is calculated using Eq. (5). From our previous discussion we see that it is not quite correct to do this unless some approximations are done concerning the different Y_{L_α} .

For our model at the TeV scale,¹ all charged Yukawa couplings are in equilibrium and it would be correct to use Eqs. (4) and (5). Another feature of our model is that the Yukawa coupling of the heavy LH neutrino is of the order of 1 to ensure that the masses of the fourth generation leptons are heavy enough, and also to give an enhancement to the value of the CP asymmetry produced in the model. However, then the scattering interaction which is associated to the Yukawa coupling of the heavy LH neutrino will also be in equilibrium in our model. This changes the chemical equilibrium equations such that the relationship between $B - L$ (B) and L is modified to be:

$$Y_{B-L} = -\left(\frac{13}{3} + \frac{8(13-3N)}{3(12N-2)} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{L_\alpha} = -\frac{22N+13}{6N-1} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{L_\alpha}. \tag{6}$$

Thus, as was estimated in Ref. [14] there is no net asymmetry produced in the heavy left-handed lepton. Consequently, we can put Y_{L_σ} to zero and make the usual assumptions about the other Y_{L_α} when constructing the Boltzmann equation for Y_L provided we use Eq. (6) to relate the produced leptonic asymmetry to the final net $B - L$ asymmetry. Below, and from now on, Y_L denotes the sum over the asymmetries of only the three light leptonic flavours.

¹ In this model, we denote by σ the flavour of the fourth leptonic generation.

In Ref. [12] the effect of renormalization group (RG) running for masses and couplings was included. In particular, one of the important effects is that the diagrams with $\Delta L = 1$ proportional to gauge couplings can become sizeable compared to those proportional to the top Yukawa coupling when considering values for these couplings at the high scale at which the lepton asymmetry is being produced. In our model at the TeV scale, we have checked that this is a very small effect and we will not include RG effects in our analysis. We also have not included the $\Delta L = 1$ proportional to gauge couplings as we are not in the resonant leptogenesis case of Ref. [11].

Also in Ref. [12] thermal background effects have been included into the calculation, it was pointed out that numerically these effects are particularly relevant when correcting the propagator of the Higgs scalar field. We include only this thermal correction into our calculation.

Another important point that should be mentioned, which is crucial for our model, is the fact that the actual decay temperature at which the lepton asymmetry is produced is just above the electroweak scale; thus one must be careful and check that for our choice of parameters the sphaleron interactions are still in equilibrium. Although, in the SM there is no first order phase transition, just a crossover, and this is not modified for our model with four generations, sphaleron interactions are switched off for temperatures below ~ 100 GeV [24]. A careful calculation of the chemical equilibrium equations in the region close to the electroweak phase transition was performed in [25].

3. The model

The relevant part of the Lagrangian of the model we consider is given by

$$L = L_{SM} + \bar{\psi}_{R_i} i \not{\partial} \psi_{R_i} - \frac{M_{N_i}}{2} (\bar{\psi}_{R_i}^c \psi_{R_i} + \text{h.c.}) - (\lambda_{i\alpha}^v \bar{L}_\alpha \psi_{R_i} \phi + \text{h.c.}), \quad (7)$$

where ψ_{R_i} are two-component spinors describing the right-handed neutrinos and we define a Majorana 4-component spinor, $N_i = \psi_{R_i} + \psi_{R_i}^c$. Our index i runs from 1 to 4, and $\alpha = e, \mu, \tau, \sigma$. The σ component of L_α corresponds to a left-handed lepton doublet which must satisfy the LEP constraints from the Z -width on a fourth left-handed neutrino [26]. The $\lambda_{i\alpha}^v$ are Yukawa couplings and the field ϕ is the SM Higgs boson doublet whose vacuum expectation value is denoted by v .

We work in the basis in which the mass matrix for the right-handed neutrinos M is diagonal and real,

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3, M_4), \quad (8)$$

and define $m_D = \lambda^v v$.

To leading order,² the induced see-saw neutrino mass matrix for the left-handed neutrinos is given by

$$m_\nu = \lambda^{v\dagger} M^{-1} \lambda^v v^2, \quad (9)$$

which is diagonalized by the well-known PMNS matrix.

² Given the fact that in our model, at least one of the RH neutrino masses take values $\sim \text{TeV}$, one has to go to next order in the general see-saw formula. However, these corrections are small and not relevant for our purpose.

We consider the out-of-equilibrium decay of the lightest of the gauge singlets N_j , which we take to be N_1 . The decay rate at tree-level is given by

$$\Gamma_{N_j} = \frac{(\lambda^\dagger \lambda)_{jj}}{8\pi} M_j = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{8\pi} M_j = \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1 M_j}{8\pi v^2}, \quad (10)$$

where $\lambda \equiv \lambda^\nu$ and we have defined³

$$\tilde{m}_j^{(4G)} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{M_1} v^2. \quad (11)$$

To ensure an out-of-equilibrium decay of N_1 it is necessary that $\frac{\Gamma_{N_1}}{H(T=M_1)} \ll 1$, where H is the Hubble expansion rate at $T = M_1$. This condition will impose an upper bound on the usual effective mass parameter \tilde{m}_1 which is defined in, for example, [27].

The CP asymmetry calculated from the interference of the tree diagrams with the one-loop diagrams (self-energy and vertex corrections) is [28]

$$\epsilon_i = \frac{1}{(8\pi)} \frac{1}{[\lambda_\nu^\dagger \lambda_\nu]_{ii}} \sum_j \text{Im}[\lambda^{\nu\dagger} \lambda_\nu]_{ij}^2 \left[f\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) + g\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) \right], \quad (12)$$

where

$$f(x) = \sqrt{x} \left[1 - (1+x) \ln \frac{1+x}{x} \right], \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}. \quad (13)$$

In Ref. [14] it was shown that the upper bound of the CP asymmetry produced in the decay of the lightest right-handed neutrino N_1 is

$$|\epsilon_1| \lesssim \frac{3}{8\pi} \frac{M_1 m_4}{v^2}, \quad (14)$$

where m_4 denotes the largest eigenvalue of the left-handed neutrino mass matrix m_ν . Due to experimental constraints we require that $m_4 > 45$ GeV, which implies that the bound on ϵ_1 is irrelevant. In general, there will be regions of parameter space in which the produced CP asymmetry can be very large, thus the final allowed region of parameter space could include areas in which the washout processes can be very large as well. In Ref. [14] possible textures for the λ^ν matrix were given to illustrate how to obtain masses consistent with low energy data and the appropriate amount of CP asymmetry from the decay of N_1 .

4. Boltzmann equations

We will now write the Boltzmann equations for the RH neutrino abundance and the lepton densities. With all the above arguments in consideration, the main processes we consider in the thermal bath of the early universe are decays, inverse decays of the RH neutrinos, and the lepton

³ To simplify our notation, we write the sums over $\alpha = 1-4$ denoting the sums over all flavours e, μ, τ, σ , and sums over $\alpha = 1$ to 3 to denote sums over the three lightest flavours. For instance, $\tilde{m}_j^{(3G)} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j})}{M_1} v^2$ is the usual effective mass parameter \tilde{m}_1 defined in the literature for $j = 1$.

number violation $\Delta L = 1$ and $\Delta L = 2$, Higgs and RH neutrinos exchange scattering processes, respectively.

In our analysis we stick to the case where the asymmetry is due only to the decay of the lightest RH neutrino N_1 .⁴ The first BE, which corresponds to the evolution of the abundance of the lightest RH neutrino Y_{N_1} involving the decays, inverse decays and $\Delta L = 1$ processes is given by

$$\frac{dY_{N_1}}{dz} = -\frac{z}{sH(M_1)} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{\text{eq}}} - 1 \right) (\gamma_{D_1} + \gamma_{S_1}), \quad (15)$$

where $z = M_1/T$, s is the entropy density and γ_{D_j} , γ_{S_j} are the interaction rates for the decay and $\Delta L = 1$ scattering contributions, respectively.

The BE for the lepton asymmetry is given by

$$\frac{dY_L}{dz} = -\frac{z}{sH(M_1)} \left[\epsilon_1 \gamma_{D_1} \left(\frac{Y_{N_1}}{Y_N^{\text{eq}}} - 1 \right) + \gamma_W \frac{Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right], \quad (16)$$

where ϵ_1 is the CP violation parameter given by Eq. (12) and γ_W , is a function of γ_{D_j} and γ_{S_j} and $\Delta L = 2$ interaction rate processes, called the washout factor which is responsible for the damping of the produced asymmetry. In Eqs. (15) and (16), Y_i^{eq} is the equilibrium number density of a particle i , which has a mass m_i , given by

$$Y_i^{\text{eq}}(z) = \frac{45}{4\pi^4} \frac{g_i}{g_*} \left(\frac{m_i}{M_1} \right)^2 z^2 K_2 \left(\frac{m_i z}{M_1} \right), \quad (17)$$

where g_i is the internal degree of freedom of the particle ($g_{N_i} = 2$, $g_\ell = 4$) and $g_* \simeq 108$. Explicit expressions of the interaction rates γ_{D_j} , γ_{S_j} and γ_W are given below.

The reaction density γ_{D_j} is related to the tree level total decay rate of the RH neutrino N_j of Eq. (10) by

$$\gamma_{D_j} = n_{N_j}^{\text{eq}} \frac{K_1(z)}{K_2(z)} \Gamma_{N_j}, \quad (18)$$

where $K_n(z)$ are the K -type Bessel functions.

We define the reaction density of any process $a + b \rightarrow c + d$ by

$$\gamma^{(i)} = \frac{M_1^4}{64\pi^4} \frac{1}{z} \int_{(M_a+M_b)^2/M_1^2}^{\infty} dx \hat{\sigma}^{(i)}(x) \sqrt{x} K_1(\sqrt{x}z), \quad (19)$$

where $\hat{\sigma}^{(j)}(x)$ are the reduced cross sections for the different processes which contribute to the Boltzmann equations. For the $\Delta L = 1$ Higgs boson exchange processes, we have

$$\hat{\sigma}_{t_j}^{(1)} = 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x - a_j}{x} \right)^2 = 3\alpha_u \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1}{v^2} \left(\frac{x - a_j}{x} \right)^2, \quad (20)$$

⁴ We have checked that the asymmetry produced by the decay of the second lightest RH neutrino is very tiny in our model compared to the one produced by the decay of N_1 .

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t_j}^{(2)} &= 3\alpha_u \sum_{\alpha=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) \left(\frac{x-a_j}{x} \right) \left[\frac{x-2a_j+2a_h}{x-a_j+a_h} + \frac{a_j-2a_h}{x-a_j} \ln \left(\frac{x-a_j+a_h}{a_h} \right) \right] \\ &= 3\alpha_u \frac{\tilde{m}_j^{(4G)} M_1}{v^2} \left(\frac{x-a_j}{x} \right) \left[\frac{x-2a_j+2a_h}{x-a_j+a_h} + \frac{a_j-2a_h}{x-a_j} \ln \left(\frac{x-a_j+a_h}{a_h} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$\alpha_u = \frac{\text{Tr}(\lambda_u^\dagger \lambda_u)}{4\pi} \simeq \frac{m_t^2}{4\pi v^2}, \quad a_j = \left(\frac{M_j}{M_1} \right)^2, \quad a_h = \left(\frac{\mu}{M_1} \right)^2, \quad (22)$$

the infrared cutoff μ is chosen to be equal to 800 GeV due to phenomenological considerations. So we have

$$\gamma_{S_j} = 2\gamma_{t_j}^{(1)} + 4\gamma_{t_j}^{(2)}. \quad (23)$$

The expressions of reduced cross sections of $\Delta L = 2$ RH neutrino exchange processes, which washout a part of the asymmetry are given by

$$\hat{\sigma}_N^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j}) A_{jj}^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{n < j}^4 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta n}^* \lambda_{\beta j}) B_{nj}^{(1)}, \quad (24)$$

$$\hat{\sigma}_N^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^4 (\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j}) A_{jj}^{(2)} + \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{n < j}^4 \text{Re}(\lambda_{\alpha n}^* \lambda_{\alpha j}) (\lambda_{\beta n}^* \lambda_{\beta j}) B_{nj}^{(2)}, \quad (25)$$

where

$$A_{jj}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \frac{a_j}{D_j} + \frac{a_j x}{2D_j^2} - \frac{a_j}{x} \left(1 + \frac{x+a_j}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right], \quad (26)$$

$$A_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x+a_j} + \frac{a_j}{x+2a_j} \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right], \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B_{nj}^{(1)} &= \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left[\frac{1}{D_j} + \frac{1}{D_n} + \frac{x}{D_j D_n} + \left(1 + \frac{a_j}{x} \right) \left(\frac{2}{a_n - a_j} - \frac{1}{D_n} \right) \ln \left(\frac{x+a_j}{a_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{a_n}{x} \right) \left(\frac{2}{a_j - a_n} - \frac{1}{D_j} \right) \ln \left(\frac{x+a_n}{a_n} \right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$B_{nj}^{(2)} = \frac{\sqrt{a_n a_j}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x+a_n+a_j} \ln \left[\frac{(x+a_j)(x+a_n)}{a_j a_n} \right] + \frac{2}{a_n - a_j} \ln \left(\frac{a_n(x+a_j)}{a_j(x+a_n)} \right) \right\}, \quad (29)$$

and

$$D_j = \frac{(x-a_j)^2 + a_j c_j}{x-a_j}, \quad c_j = a_j \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^3 \frac{(\lambda_{\alpha j}^* \lambda_{\alpha j} \lambda_{\beta j}^* \lambda_{\beta j})}{64\pi^2}, \quad (30)$$

then we have

$$\gamma_W = \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{2} \gamma_{D_j} + \frac{Y_{N_j}}{Y_{N_j}^{\text{eq}}} \gamma_{t_j}^{(1)} + 2\gamma_{t_j}^{(2)} - \frac{\gamma_{D_j}}{8} \right) + 2\gamma_N^{(1)} + 2\gamma_N^{(2)}. \quad (31)$$

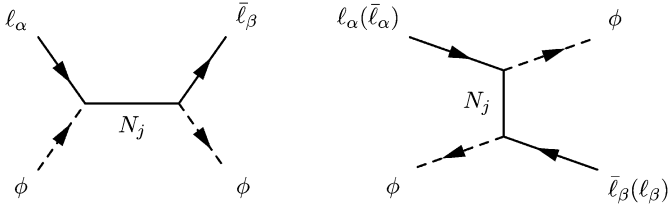


Fig. 1. s and t channel $\Delta L = 2$ Majorana exchange diagrams.

There are several important comments to make at this point. First of all, notice that in Eqs. (10), (20) and (21), we have summed over all states ℓ_α . However, in Eqs. (24) and (25) terms which correspond to $\beta = 4$ (that is the σ flavour, see Fig. 1), do not contribute to Eq. (16) because they are multiplied by $Y_{L\sigma} = 0$. Indeed, as was mentioned before, the processes involving at the same time only this flavour in the initial and final state are in thermal equilibrium, and so there is no asymmetry in this flavour. Second, as in the case of FY model, one can parametrize γ_{D_j} and γ_{S_j} by M_1 and $\tilde{m}_1^{(4G)}$ (see Eqs. (10), (20), (21)). Third, the $\Delta L = 2$ processes can be divided and treated in two separate regimes. The contribution in the temperature range from $z = 1$ to $z \simeq 10$ is proportional to $\sqrt{\tilde{m}_1^{(4G)} \tilde{m}_1^{(3G)}}$ instead of \tilde{m}_1 . For the range of temperature ($z \gg 1$), the dominant contribution at leading order would have been proportional to $\bar{m}^2 \equiv \text{tr}(m_\nu^\dagger m_\nu)$, had the summation on the index β gone from 1 to 4. In addition, we emphasize that the so-called RIS (real intermediate states) in the $\Delta L = 2$ interactions have to be carefully subtracted, to avoid double counting in the Boltzmann equations. In our calculation, we have followed Ref. [13] where the authors have shown how the appropriate ($-\frac{1}{8}\gamma_{D_j}$ in Eq. (31)) subtraction must be done.

5. Results and conclusions

5.1. Constraints on the fourth generation

Our model is based on the addition of a fourth doublet of leptons and quarks (in order to be anomaly-free) to the particle content of the Standard Model, and of four RH neutrino singlets. The masses and couplings of the singlets are constrained by the left-handed neutrino masses (from solar, atmospheric and WMAP data) and the right amount of CP asymmetry ϵ_1 . Concerning the fourth generation of leptons and quarks, the direct constraint is that they must be heavier than $M_Z/2$. There are stronger constraints from electroweak precision tests: for example, the lower bound on the charged lepton σ from LEP II is approximately 80 GeV [29]. As is well known, the SM central value of the Higgs mass is lower than the direct lower bound set by LEP II [30] and the existence of a fourth generation is one possible way to increase the Higgs mass [31–33]. The Z -lineshape versus fourth generation masses have been extensively studied in, for example, Ref. [34], where we can see that the fourth left-handed neutrino is excluded at 95% CL if its mass is lower than 46.7 ± 0.2 GeV. In our analysis the left-handed neutrino masses are always constrained in order to fit the data (solar + atmospheric + WMAP) as well as this latter bound for the 4th LH neutrino. There are other constraints on the fourth generation, the generalized CKM matrix elements, etc., which can be found in [26] and in Ref. [35], where present and future experimental searches at Tevatron and LHC are widely discussed.

5.2. Numerical solutions of BE

In our numerical analysis we use one of the possible textures for the Yukawa matrix (λ_ν) in the four generation case which can produce the needed amount of CP asymmetry and fit the neutrino data [14]:

$$\lambda_\nu = C \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \alpha \\ \epsilon & 1 & 1 & 0 \\ \epsilon & 1 & 1 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix}, \quad (32)$$

where C , ϵ and α are parameters (ϵ and α are complex numbers). This texture will induce to first order the following mass matrix for the three lightest LH neutrinos

$$m_\nu \propto \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

This is a typical texture for a hierarchical spectrum that has to fit the oscillation data (atmospheric, solar, CHOOZ) and the constraints on the absolute mass.

To show the feasibility of our scenario we chose different values of the parameters C , ϵ , α and values of the RH neutrino masses, M_i , $i = 1, 4$, and we constrain the inputs given the data for the LH neutrino masses and the out-of-equilibrium condition. It is precisely a hierarchy in the Yukawa couplings which allows for an out-of-equilibrium decay without a suppression of the induced CP asymmetry.

In Fig. 2, we illustrate for a given set of input parameters the different thermally averaged reaction rates contributing to BE as a function of $z = M_1/T$:

$$\Gamma_X = \frac{\gamma_X}{n_{N_1}^{\text{eq}}}, \quad X = D, S, \quad \Delta L = 2. \quad (34)$$

It is clear from this plot that for this set of parameters, and this is true for a wide range of parameter space, all rates at $z = 1$ fulfill the out-of-equilibrium condition (i.e., $\Gamma_X < H$ ($z = 1$)), and so the expected washout effect due to the $\Delta L = 2$ processes will be small. The parameters chosen for this illustration are: $M_1 = 450$ GeV, $M_2 = 2 \times 10^6$ GeV, $M_3 = 10^6$ GeV, $M_4 = 605$ GeV, $\epsilon_1 \simeq 4.2 \times 10^{-6}$, $\tilde{m}_1^{(3G)} = 2.7 \times 10^{-5}$ eV and $\tilde{m}_1^{(4G)} = 3.6 \times 10^{-5}$ eV.

Although a complete scan of the allowed parameter space varying both the values of the RH neutrino masses and the Yukawa couplings has not been done we mention that it is not completely trivial to satisfy all constraints when we vary the parameters. For example, for fixed values of the Yukawa couplings, if we let the second lightest RH neutrino be heavier then the heavier LH neutrino becomes lighter than $M_Z/2$. On the other hand, again for fixed values of the Yukawa couplings, when the masses of the two heaviest RH neutrinos increase or decrease, it becomes difficult to have acceptable light LH neutrino masses. Nevertheless, a more detailed analysis can provide other spectra for the RH neutrinos which are also acceptable.

Fig. 3 represents the solution of the BE, abundance and $B - L$ asymmetry, as a function of z . The generated value of the baryon asymmetry is $\eta_B \simeq 6 \times 10^{-10}$. Applying the see-saw mechanism to our model for the chosen values of the parameters, we obtain a heavy left-handed neutrino with a mass above 48 GeV, which is consistent with the fourth generation constraints (see Section 5.1) and the three light neutrino masses are of the order of 10^{-1} eV to a few 10^{-7} eV.

We have presented the solutions to the coupled system of Boltzmann equations for our TeV scale model of thermal leptogenesis. We have carefully considered the effect of the interactions

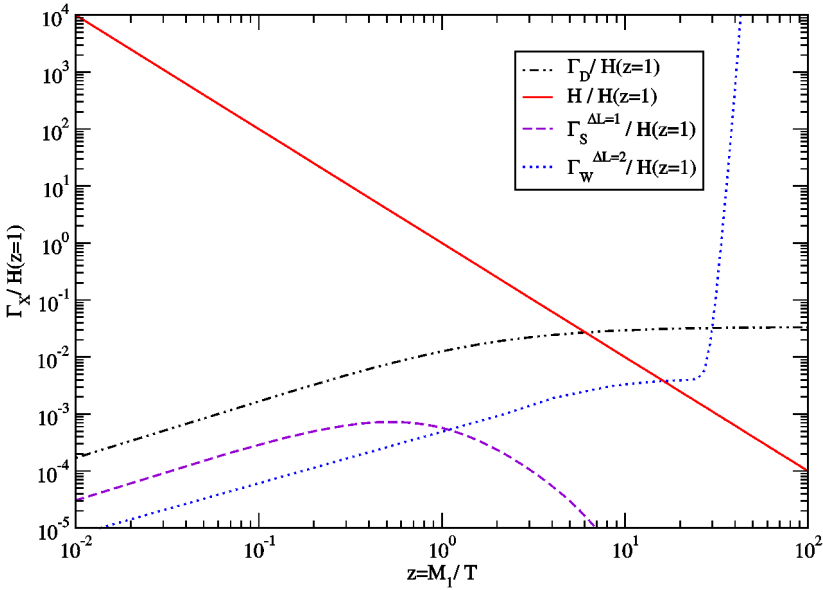


Fig. 2. Various thermally averaged reaction rates Γ_X contributing to BE normalized to the expansion rate of the Universe $H(z=1)$.

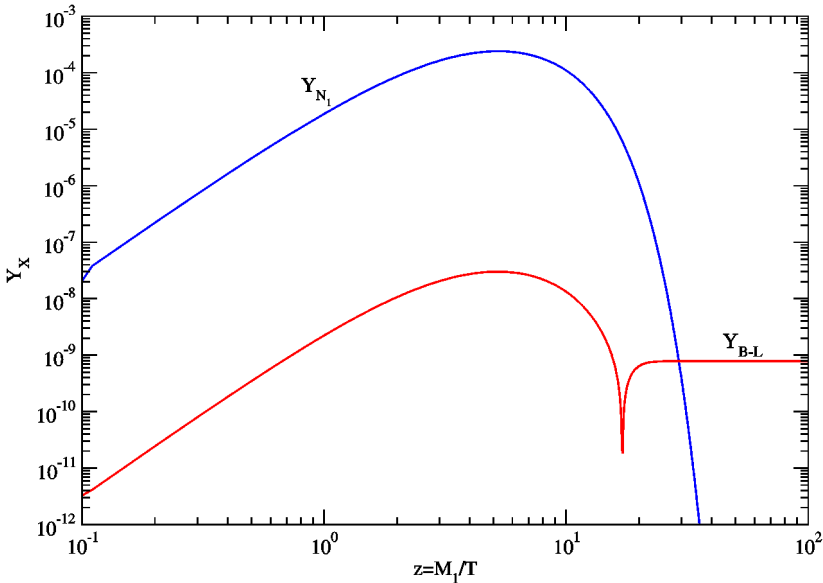


Fig. 3. Abundance Y_{N_1} and the baryon asymmetry Y_{B-L} for the four generation model.

involving the heavy fourth generation leptonic fields and consistently written the BE which contribute to the final baryon asymmetry together with the appropriate conversion factor from the lepton asymmetry to the baryonic one. Our results show that in this simple extension of the Standard Model it is possible to produce the right amount of the BAU in a generic way.

Acknowledgements

We would like to thank S. Davidson for extremely useful discussions. M.L. thanks the Michigan Center for Theoretical Physics and the Laboratoire de Physique Théorique, Université de Paris XI, Orsay, for hospitality during the completion of this work. H.A. would like to thank M. Plumacher for useful communications.

References

- [1] M. Fukugita, T. Yanagida, Baryogenesis without grand unification, *Phys. Lett. B* 174 (1986) 45.
- [2] D.N. Spergel, et al., First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters, astro-ph/0302209.
- [3] M. Gell-Mann, P. Ramon, R. Slansky, *Supergravity*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [4] T. Yanagida, in: *Proceedings of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, KEK, Tsukuba, 1979.
- [5] R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Neutrino mass and spontaneous parity violation, *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980) 912.
- [6] W. Buchmuller, P. Di Bari, M. Plumacher, Cosmic microwave background, matter–antimatter asymmetry and neutrino masses, *Nucl. Phys. B* 643 (2002) 367.
- [7] W. Buchmuller, P. Di Bari, M. Plumacher, A bound on neutrino masses from baryogenesis, *Phys. Lett. B* 547 (2002) 128.
- [8] W. Buchmuller, P. Di Bari, M. Plumacher, The neutrino mass window for baryogenesis, hep-ph/0302092.
- [9] S. Davidson, A. Ibarra, A lower bound on the right-handed neutrino mass from leptogenesis, *Phys. Lett. B* 535 (2002) 25.
- [10] G.C. Branco, et al., Minimal scenario for leptogenesis and CP violation, *Phys. Rev. D* 67 (2003) 073025, hep-ph/0211001.
- [11] A. Pilaftsis, T.E.J. Underwood, Resonant leptogenesis, *Nucl. Phys. B* 692 (2004) 303, hep-ph/0309342.
- [12] G.F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto, A. Strumia, Towards a complete theory of thermal leptogenesis in the SM and MSSM, *Nucl. Phys. B* 685 (2004) 89, hep-ph/0310123.
- [13] W. Buchmuller, P. Di Bari, M. Plumacher, Leptogenesis for Pedestrians, *Ann. Phys.* 315 (2005) 305, hep-ph/0401240.
- [14] A. Abada, M. Losada, Leptogenesis with four gauge singlets, *Nucl. Phys. B* 673 (2003) 319, hep-ph/0306180.
- [15] A. Abada, H. Aissaoui, M. Losada, Leptogenesis at the TeV scale, Invited talk at 39th Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories, La Thuile, Aosta Valley, Italy, 21–28 March, 2004, hep-ph/0406304.
- [16] M. Senami, K. Yamamoto, Leptogenesis with supersymmetric Higgs triplets in TeV region, hep-ph/0305202.
- [17] M. Senami, K. Yamamoto, Lepton flavor violation with supersymmetric Higgs triplets in TeV region for neutrino masses and leptogenesis, *Phys. Rev. D* 69 (2004) 035004, hep-ph/0305203.
- [18] L. Boubekeur, Leptogenesis at low scale, hep-ph/0208003.
- [19] L. Boubekeur, T. Hambye, G. Senjanovic, Low-scale leptogenesis and soft supersymmetry breaking, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 111601, hep-ph/0404038.
- [20] T. Hambye, J. March-Russell, S.M. West, TeV scale resonant leptogenesis from supersymmetry breaking, *JHEP* 0407 (2004) 070, hep-ph/0403183.
- [21] A. Pilaftsis, CP violation and baryogenesis due to heavy Majorana neutrinos, *Phys. Rev. D* 56 (1997) 5431, hep-ph/9707235.
- [22] R. Barbieri, P. Creminelli, A. Strumia, N. Tetradis, Baryogenesis through leptogenesis, *Nucl. Phys. B* 575 (2000) 61, hep-ph/9911315.
- [23] G. Sigl, G. Raffelt, General kinetic description of relativistic mixed neutrinos, *Nucl. Phys. B* 406 (1993) 423.
- [24] G.D. Moore, Sphaleron rate in the symmetric electroweak phase, *Phys. Rev. D* 62 (2000) 085011, hep-ph/0001216.
- [25] M. Laine, M. Shaposhnikov, A remark on sphaleron erasure of baryon asymmetry, *Phys. Rev. D* 61 (2000) 117302, hep-ph/9911473.
- [26] Particle Data Group, Review of particle physics, *Eur. Phys. J. C* 15 (2002) 1.
- [27] See, for example, M. Plumacher, Baryogenesis and lepton number violation, *Z. Phys. C* 74 (1997) 549; M. Plumacher, Baryon asymmetry, neutrino mixing and supersymmetric $SO(10)$ unification, *Nucl. Phys. B* 530 (1998) 207.
- [28] L. Covi, E. Roulet, F. Vissani, CP violating decays in leptogenesis scenarios, *Phys. Lett. B* 384 (1996) 169.

- [29] M. Maltoni, V.A. Novikov, L.B. Okun, A.N. Rozanov, M.I. Vysotsky, Extra quark–lepton generations and precision measurements, *Phys. Lett. B* 476 (2000) 107.
- [30] LEP Collaborations, A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model, hep-ex/0112021.
- [31] H.J. He, N. Polonsky, S. Su, Extra families, Higgs spectrum and oblique corrections, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 053004.
- [32] V.A. Novikov, L.B. Okun, A.N. Rozanov, M.I. Vysotsky, Mass of the higgs versus fourth generation masses, *JETP Lett.* 76 (2002) 127.
- [33] S. Sultansoy, Why the four SM families, Contributed to 30th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 2000), Osaka, Japan, 27 July–2 August 2000, hep-ph/0004271.
- [34] S.S. Bulanov, V.A. Novikov, L.B. Okun, A.N. Rozanov, M.I. Vysotsky, Z-lineshape versus 4th generation masses, *Phys. At. Nucl.* 66 (2003) 2169, hep-ph/03012268.
- [35] P.H. Frampton, P.Q. Hung, M. Sher, Quarks and leptons beyond the third generation, *Phys. Rep.* 330 (2000) 263.

ملخص:

في الجزء الأول من الرسالة قمنا بدراسة نظرية الأوتار في إطار عام يعتمد على تقليص توريديالي متتالي – متتابع- لوتر بوزوني مغلق و كذلك اشتقاق – استخراج- بعض الحلول الظواهرية لزمري بالاضافة الى نسخة مشوهة لوتر بوزوني كلاسيكي التي أعطتنا أبعاد حرجة جديدة للفضاء. لقد برهننا أيضا مشكلة تقليص الأبعاد يمكن أن تحل في هذه النظرية.

في الجزء الثاني ، لقد حللنا اللاتناظر اللببوني المتحصل عليها من التفكك النيترينو اليميني في إطار النماذج التناظرية يسار- يمين الأصغري.

في هذه النماذج التي تعتمد على التناظر لطاقة دنيا تكون مصفوفة كتلة النيترونات لديرانك متناسبة مع مصفوفة كتلة اللببونات المشحونة.

نتيجة ذلك فإن اللاتناظر اللببوني يكون قابلا للحساب بدلالة 9 وسائط، كلها قابلة للقياس في الطاقات الدنيا.

بحل معادلات بولتزمان بطريقة عددية نستطيع أن نبرهن على أنه في هذه النماذج ينتج لاتناظر بريوني مقبول.

هذا ما يحتم علينا شروط دلالية على وسائط النترونات الخفيفة.

و ندرس أيضا آلية الليبتوجيناز الحراري في سلم التاف في إطار تمديد-توسيع- النموذج المعياري ب4 أجيال و إدخال 4 نيترونات يمينية لمايورانا.

و تحصلنا على قيمة اللاتناظر الباريوني للكون الذي يلائم المشاهدات و ذلك بحل جملة معادلات بولتزمان لهذا النموذج.

الكلمات المفتاحية:

نظرية الاوتار، نظرية التشوهات، الليبتوجيناس، الباريوجيناس، ما وراء النموذج المعياري.

Abstract

In the first part of this thesis, the string theory is studied in a general context based on a successive toroidal compactifications of closed bosonic string and some phenomenological Lie groups solutions are derived. Moreover, a q -deformed version of the classical bosonic string is formulated, and a new critical space-time dimensions are derived. It is shown that the problem of compactification can be solved in such a theory.

In the second part, We analyze lepton asymmetry induced in the decay of right-handed neutrinos in a class of minimal left-right symmetric models. In these models, which assume low energy supersymmetry, the Dirac neutrino mass matrix is proportional to the charged lepton mass matrix. As a result, lepton asymmetry is calculable in terms of 9 parameters, all measurable in low energy neutrino experiments. By solving the Boltzmann equations numerically we show that adequate baryon asymmetry is generated in these models. This however places significant constraints on the light neutrino parameters. We find $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$ and $\theta_{13} = (0.01 - 0.07)$ for the neutrino oscillation angles, and $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ for the Majorana phases. We consider also the mechanism of thermal leptogenesis at the TeV scale in the context of an extension of the Standard Model with 4 generations and the inclusion of four right-handed Majorana neutrinos. We obtain a value for the baryon asymmetry of the Universe in accordance with observations by solving the full set of coupled Boltzmann equations for this model.

Keywords : String Theory, q -deformation theory, Leptogenesis, Baryogenesis, Beyond the Standard Model.

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, la théorie des cordes est étudiée dans un contexte général basé sur la compactification toroïdal successifs d'une corde bosonique fermée et quelques solutions phénoménologiques de groupes de Lie sont dérivées. De plus, une version q -déformée de la corde bosonique classique est formulée, et de nouvelles dimensions critique de l'espace-temps sont dérivés. On montre aussi que le problème de la compactification peut être résolu dans une telle théorie.

Dans la deuxième partie, On analyse l'asymétrie leptonique induite dans la désintégration du neutrino droit dans une classe de modèles symétriques gauche-droite minimale. Dans ces modèles, qui supposent la supersymétrie à basse énergie, la matrice de la masse des neutrinos de Dirac est proportionnelle à la matrice de masse des leptons chargée. En conséquence, l'asymétrie leptonique est calculable en termes de 9 paramètres, tous mesurables à base énergie. En résolvant les équations de Boltzmann numériquement nous prouvons qu'une asymétrie proportionnée de baryon est produite dans ces modèles. Cependant ceci place des contraintes significatives sur les paramètres des neutrinos légers. On trouve $\tan^2 \theta_{12} \simeq m_1/m_2$ et $\theta_{13} = (0.01 - 0.07)$ pour les angles des oscillations des neutrinos, et $\beta \simeq \alpha + \pi/2$ pour la phase de Majorana. Nous considérons également le mécanisme de leptogénèse thermique à l'échelle du TeV dans le contexte d'une prolongation du modèle standard avec 4 générations et l'inclusion de quatre neutrinos droits de Majorana. Nous obtenons une valeur pour l'asymétrie baryonique de l'univers compatible avec les observations en résolvant l'ensemble des équations couplées de Boltzmann pour ce modèle.

Mots Clés : Théories des cordes, Théorie de la q -déformation, Leptogénèse, Baryogénèse, Au-delà du Modèle Standard.