REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Thèse de Doctorat en sciences

Filière : physique

Option : Physique Théorique

Techniques des intégrales de chemins appliquées à la solution des problèmes relativistes

Présentée par
HAOUAT Salah

Soutenue le 20/05/08 devant la commission d'examen :

Président :	A. Lecheheb	Prof. Univ. Mentouri
Rapporteur:	L. Chetouani	Prof. Univ. Mentouri
Examinateurs:	N. Belaloui	Prof. Univ. Mentouri
	T. Boudjedaa	Prof. Univ. de Jijel
	A. Bouda	Prof. Univ. de Béjaia
	A. Boudine	M.C. Centre Univ. d'Oum-El-Bouaghi

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier le dieu pour m'avoir aidé tout au long de mes études de l'école primaire à la fin de cette thèse.

Mon respect et ma gratitude vont à M. CHETOUANI, le directeur de ma thèse à qui je dois beaucoup. J'ai particulièrement apprécié sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme. Ses compétences m'ont été extrêmement profitables. J'ai beaucoup appris avec lui, et ceci, sans heurts et sans être forcé. Il m'a transmis cette espèce de réflexe qui consiste à se plonger très vite dans un ouvrage ou un article et à en retirer au mieux la substance et l'information pertinente. Je lui dois tout, depuis les cours des intégrales de chemins, depuis mon mémoire de magistère, jusqu'à cette thèse que je l'espère, lui fera honneur.

Je remercie très sincèrement M. LECHEHEB qui m'a fait l'honneur d'être le président de Jury. Mes remerciements vont aussi vers M. BOUDA, M. BELALOUI, M. BOUDJEDAA et M. BOUDINE qui ont accepté la soutenance de cette thèse achevant ainsi un projet particulièrement important de ma vie.

Je souhaite remercier avec un soin particulier Lamine KHODJA et Mounir HAMDOUCHE pour le bon esprit d'amitié et de loyauté. J'ai toujours pu compter sur eux dans les moments difficiles.

Salah HAOUAT

Table des matières

Chapitre 1

Introduction Générale

Comme on le sait, Feynman a introduit sa fameuse technique des intégrales de chemins qui est alternative aux méthodes de Heisenberg et de Schrödinger afin de répondre au besoin profond de la compréhension de la physique quantique [1]. L'approche de Feynman implique la connaissance du lagrangien classique, ayant ainsi plusieurs avantages distincts par rapport aux autres méthodes basées sur le Hamiltonien [2]. Une approche basée sur le Lagrangien nous offre une généralisation facile de la mécanique quantique à la théorie de champs. Le concept essentiel dans cette approche est le propagateur qui, comme fonction de Green de l'équation de Schrödinger, contient toutes les informations sur le système. Ce propagateur étant une somme de contributions de tous les chemins, le principe de la superposition se manifeste déjà dans cette formulation. Puisque, les contributions principales au propagateur viennent habituellement des chemins classiques, il est possible de développer des arrangements comme l'approximation semi-classique basée sur un développement autour du chemin classique. Ainsi la technique intégrales de chemins peut rapporter une bonne réponse aux problèmes assez difficiles.

De plus, la méthode des intégrales de chemins traite avec des transformations spacio-temporelles des problèmes indépendants du temps et dépendants du temps de la même manière et c'est un vrai avantage par rapport aux autres approches basées sur le Hamiltonien pour résoudre des problèmes dépendant du temps.

Cependant si à un certaine époque, le développement du formalisme de Feynman comparé à celui des autres approches (i.e. les équations différentielles de la physique) n'a pas été aussi rapide, la solution par cette approche des intégrales de chemins du problème fondamental que constitue l'atome d'hydrogène et par la suite le succés dans l'obtention de la solution à d'autres problèmes de la mécanique quantique non relativiste ont été l'étape décisive pour son développement [3][4][5][6]. Ayant franchie cette étape cruciale, les intégrales de chemins sont devenus à l'heure actuelle un outil d'une égale importance à celle que le sont ou l'ont été les équations différentielles de la physique et son essor et sa puissance nous pouvons les voir dans des domaines comme en cosmologie par exemple où la quantification suivant d'autres méthodes de quantification n'est pas adéquate [7]

[8].

Notons que la formulation intégrales de chemins en mécanique quantique relativiste et pour la particule de Dirac n'est pas tout à fait claire à cause du problème que constitue l'entité fondamentale de nature discrète qui est le spin et de la difficulté de son insertion au moyens de chemins qui sont d'essence continus dans le formalisme de Feynman. Le spin, dans l'équation de Dirac intervenient par l'intermédiaire des matrices γ vérifiant certaines relations d'anticommutations semblables à celles des matrices de Pauli.

Des formulations ont été établies et nous pouvons citer celle qui nous parait la plus apte à traiter concrètement par les calculs des problèmes d'une particule relativiste soumise à une interaction d'origine électromagnétique : il s'agit de celle élaborée par Fradkin en 1966 et qui a été revue par Fradkin et Gitman en 1991 [9] où ils ont réussi à obtenir pour le propagateur relative à la particule de Dirac une formulation *Path-Integral* et ceci suivant la forme standard de Feynman

$$\sum_{\text{paths}} \exp i\mathcal{A}(\text{path}), \tag{1.1}$$

où $\mathcal{A}(\text{path})$ est une action supersymétrique décrivant à la fois les mouvements externes de la particule par des variables de type bosoniques et la dynamique interne relative au spin de la particule par des variables de Grassmann.

L'idée de base consiste d'abord à écrire formellement la fonction de Green causale solution de l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\left(P_{\mu}-eA_{\mu}\right)-m\right] S^{c}\left(x_{b}, x_{a}\right)=-\delta\left(x_{b}-x_{a}\right) \tag{1.2}$$

en utilisant l'opérateur associé à l'équation de Dirac et en multitpliant au préalable par la matrice γ^5 $(\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$ afin de rendre l'opérateur $\left[\gamma^{\mu}\left(P_{\mu}-eA_{\mu}\right)-m\right]$ homogène en matrices γ

$$S^{c}\left(x_{b}, x_{a}\right)\gamma^{5}=\left\langle x_{b}\right| \frac{1}{\gamma^{5}\gamma^{\mu}\left(P_{\mu}-eA_{\mu}\right)-\gamma^{5}m}\left|x_{a}\right\rangle . \tag{1.3}$$

En changeant de représentation en passant à des nouvelles matrices $\tilde{\gamma}^{\mu} = \gamma^5 \gamma^{\mu}$ et $\tilde{\gamma}^5 = \gamma^5$ qui obéissent à la relation d'anticommutation $[\tilde{\gamma}^m, \tilde{\gamma}^n]_+ = \eta^{mn}$, où η^{mn} =diag(1, -1, -1, -1, -1) et $m, n = \overline{0,3}, 5$, l'operateur $\tilde{F} \equiv \gamma^5 \gamma^{\mu} (P_{\mu} - eA_{\mu}) - \gamma^5 m$ devient alors un opérateur homogène en matrices γ ; $\tilde{F} \equiv \left[\tilde{\gamma}^{\mu} (P_{\mu} - eA_{\mu}) - \tilde{\gamma}^5 m\right]$. Comme ces matrices sont des opérateurs de type Fermionique l'opérateur $\tilde{F}$ est aussi de genre fermionique et son carré $\tilde{F}^2$ est un opérateur de genre bosonique. En utilisant la technique de Schwinger, le propagateur prend alors la forme en exponentielle suivante

$$\begin{aligned} S^c(x_b, x_a)\gamma^5 &= \langle x_b| \frac{1}{\tilde{F}} |x_a\rangle = \langle x_b| \tilde{F} \frac{1}{\tilde{F}^2} |x_a\rangle \\ &= \int d\lambda \int \langle x_b| \exp i \left[\lambda \tilde{F}^2 + \chi \tilde{F}\right] |x_a\rangle \, d\chi, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où χ est une variable de Grassmann (impaire) anticommutant avec les matrices $\tilde{\gamma}$. A partir de cette représentation, nous pouvons construire la forme intégrales de chemins avec une action supersymétrique [10][11] [12] [13].

Notons que pour un espace-temps de dimension quelconque la généralisation de la formulation path integral a été établie par Gitman qui a montré que dans le cas où la dimension est impaire (2d + 1) la matrice de genre γ^5 ne peut être définie et la procédure d'homogènisation de l'opérateur de Dirac en matrices γ devient alors inapplicable. Un recours à une autre technique est alors nécessaire pour obtenir la formulation intégrale de chemin pour ce cas particulier [14]. Egalement la formulation path integral est établie pour une particule de Dirac soumise à des forces de torsion par Geyer *et al* [15].

Par ailleurs, il a été montré par Alexandrou *et al* que le problème de l'équation de Dirac avec un champ electromagnetique peut être formulé suivant deux representations dites globale et locale [16]. Ainsi donc avec la represention dite globale il est possible de se passer de la matrice γ^5 pour donner une formulation path integral au propagateur relatif à l'équation de Dirac.

Dans cette thèse nous nous proposons de traiter par l'approche des intégrales de chemins supersymétriques le problème de la particule de Dirac interagissant avec un potentiel pseudoscalaire selon Lorentz . L'équation de Dirac avec un potentiel pseudoscalaire $V_p(x)$ que nous cherchons à resoudre par la méthode de Feynman s'écrit [17] [18] [19] [20] [21] [22]

$$\left[i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\gamma^{5}V_{p}(x)-m\right]\psi(x)=0, \tag{1.5}$$

où $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Cette équation peut être considérée comme la première approximation de la théorie des champs décrivant l'interaction de la particule de Dirac (le fermion) avec une particule pseudoscalaire (qui est en général instable). Le Lagrangien décrivant cette théorie est [23]

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ig\bar{\psi}(x)\gamma^{5}\psi(x)\phi(x) \tag{1.6}$$

où $\psi(x)$ est le champ du fermion et $\phi(x)$ et le champ de la particule pseudoscalaire.

Si pour les potentiels scalaires et vectoriels la formulation "*Path-Integral*" utilisant une action supersymétrique et une description pseudoclassique est déja établie [9] [14] [16], pour les potentiels pseudoscalaires et à notre connaissance il n'y a pas de traitement par la méthode de Feynman.

A cause de la présence de la matrice γ^5, la représentation locale des intégrales de chemins pour ces potentiels reste difficile à obtenir. C'est ainsi que nous ne considérons que la projection globle.

Cette thèse se compose essentiellement de quatre parties.

Dans la première partie nous nous proposons de trouver la solution de l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires unidimensionnels en utilisant les intégrales de chemins. Notre objectif à travers ce traitement est d'examiner l'extension supersymetrique de la méthode de Feynman à l'étudiant du mouvement de la particule de Dirac interagissant avec ce type d'interactions. Nous établissons d'abord une formulation supersymetrique pour le problème en question suivant l'approche dite globale et nous représentons le propagateur que nous suggérons de calculer au moyen des intégrales bosonique et des intégrales fermioniques. Ensuite nous montrons que le calcul de la fonction de Green dans ce cas se réduit à celui relatif à un problème nonrelativiste avec des potentiels supersymmétriques effectifs. Enfin nous considérons des cas particuliers.

Nous poursuivons dans la deuxième partie, l'étude par l'approche des intégrales de chemins en considérant l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires unidimensionnels pour lesquelles il n'y a pas de solutions analytiques. Le recours aux approximations devient donc inévitable. Si l'on veut obtenir quelques informations sur le système considéré, ce ne serait que partielles. Parmi les méthodes d'approximations, la méthode semiclassique est la plus connue et la mieux adaptée pour les intégrales de chemins. Il est important alors de mettre en oeuvre d'abord la méthode semiclassique pour ce genre de potentiels. La classe de potentiels que nous considérons dans ce chapitre est de la forme $V(x) = \alpha x^{\delta}$, qui en général n'admet pas de solutions exactes .

La troisième partie est consacrée à l'étude de la diffusion d'une particule de Dirac par un potentiel pseudoscalaire en utilisant l'approche "*Path-Integral*". Le formalisme à utiliser est le même que celui de la première partie. Pour une barrière du potentiel dont la forme est bien définie, nous calculons la fonction de Green relative au problème et nous déterminons analytiquement les coefficients de transmission et de réflexions.

Dans la quatrième partie, nous suggérons de trouver la solution par les intégrales de chemins de l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires dans l'espace le plus réaliste à (3+1) dimensions. En première étape nous établissons une généralisation de la formulation des intégrales de chemins utilisée dans les chapitres précédents toujours suivant la représentation globale. Ensuite nous considérons le cas d'une onde plane pseudoscalaire qui ne dépend que du produit $(k.x)$. Dans ce cas nous montrons qu'après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green relative peut être exprimée par des intégrales bosoniques. Les propriétés de l'onde plane rendent le problème facile à intégrer. Ainsi nous avons à utiliser une identité afin de réduire le problème quadridimensionnel au problème unidimensionnel. Enfin nous considérons deux différents cas ;

1) Pour le cas de $k^2 \neq 0$, les calculs se ramènent à ceux du premier chapitre.

2) Pour le cas où $k^2 = 0$, nous montrons que l'intégration sur les variables bosoniques est simple et la forme analytique et éxacte de la fonction de Green peut être achevée rapidement ainsi que les fonctions d'ondes relatives au problème.

Chapitre 2

Intégrales de chemins pour la particule de Dirac dans un champ pseudoscalaire unidimensionnel

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'examiner l'extension supersymetrique des intégrales de chemin au cas où l'interaction à laquelle est soumise la particule relativiste est décrite par un potentiel pseudoscalaire unidimensionnel ne dépendant que de la position. Nous voulons donc calculer le propagateur relatif à ce problème et trouver une solution analytique à l'équation de Dirac par l'approche de Feynman.

Dans une première étape nous formulons le propagateur suivant l'approche *Path-Integral* en utilisant la representation dite globale et nous décrivons les degrés de liberté relatives au spin par des variables de Grassman impaires. Dans une deuxième étape après élimination de ces variables nous montrons que la fonction de Green peut être donnée uniquement par des intégrales de chemin de type bosonique. Le problème se réduit alors au calcul du propagateur relatif à une particule non relativiste soumise à un potentiel supersymetrique effectif. Finalement, nous considérons des exemples explicites pour illustrer la méthode.

2.2 Formulation du problème

Le mouvement d'une particule relativiste de spin 1/2 dans un espace-temps à (1+1) dimensions est régi par l'équation de Dirac qui s'écrit sous la forme la plus générale suivante [18] [19] [20] [22]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\alpha P + \beta m + \mathbb{V}\left(x\right)\right]\psi, \tag{2.1}$$

où le potentiel $\mathbb{V}\left(x\right)$ a la structure de Lorentz suivante

$$\mathbb{V}\left(x\right) = V_0\left(x\right) + \alpha V_1\left(x\right) + \beta V_s\left(x\right) + \beta\gamma^5 V_p\left(x\right). \tag{2.2}$$

Les termes $V_0(x)$ et $V_1(x)$ sont les deux composantes du 2-vecteur de Lorentz. $V_s(x)$ et $V_p(x)$ sont respectivement les potentiels scalaire et pseudoscalaire.

Dans notre cas du potentiel pseudoscalaire (i.e. $V_0(x) = V_1(x) = V_s(x) = 0$), à cause de la présence de la matrice γ^5 dans l'interaction pseudoscalaire, il n'est pas possible de rendre homogène en matrices γ l'opérateur associé à l'équation de Dirac. Ainsi donc il n'est pas facile de travailler avec la représentation dite locale avec un parametre supersymétrique pour décrire l'évolution du système. Nous sommes donc contraint d'utiliser la représentation dite globale pour la fonction de Green causale $S^c(x_b, x_a)$ solution de l'équation différentielle

$$\left[\gamma^\mu P_\mu - \gamma^5 V_p\left(x^1\right) - m\right] S^c(x_b, x_a) = -\ \delta^2\left(\ x_b - x_a\right), \tag{2.3}$$

où $x \equiv (x^0, x^1)$ et x^1 est la position.

La dimension de notre problème étant (1+1), les matrices de Dirac sont alors représentées par les matrices de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma_z\ ,\ \gamma^1 = i\sigma_y\ ,\ \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1 = i\sigma_x. \tag{2.4}$$

Il est connu que $S^c(x_b, x_a)$, est l'élément de matrice d'un opérateur $\mathbb{S}^c$

$$S^c(x_b, x_a) = \langle x_b | \mathbb{S}^c | x_a \rangle\,, \tag{2.5}$$

avec

$$\mathbb{S}^c = \frac{1}{K_-} = K_+ \frac{1}{K_- K_+} \tag{2.6}$$

où les opérateurs K_- et K_+ sont donnés par

$$K_\pm = \left[\gamma^\mu P_\mu - \gamma^5 V_p\left(x^1\right) \pm m\right]. \tag{2.7}$$

Içi nous avons multiplié par l'opérateur K_+ afin de pouvoir construire le propagateur

$S^c(x_b, x_a)$. Cette procedure est la même que celle utilisée dans la reference [16] pour obtenir une représentation des intégrales de chemins pour le propagateur systematiquement sans utiliser l'extention usuelle à 5 dimensions (i.e. sans utiliser γ^5). Elle se ressemble aussi à celle employée dans [14] au cas d'un espace temps à dimension impaire où il n'y a pas de matrice de genre γ^5. Cependant, dans notre cas présent, malgré que la matrice γ^5 existe, nous sommes contraint d'utiliser cette procédure avec le produit des deux opérateurs K_- et K_+ pour obtenir un opérateur de type bosonique ayant une forme quadratique par rapport aux matrices γ et aux impulsions P_μ en même temps.

Le produit K_-K_+ est simplement égal à

$$K_-K_+ = P^2 - m^2 - V_p^2\left(x^1\right) + i\frac{1}{2}F_{mn}\gamma^m\gamma^n \tag{2.8}$$

où le tenseur antisymétrique F_{mn}, qui peut être considéré comme une matrice dont le premier indice contravariant dénote la ligne et le deuxième indice covariant indique la coulonne, est défini par

$$F_{mn} = f_{mn}\frac{\partial}{\partial x^1}V_p\left(x^1\right), \tag{2.9}$$

avec

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Remarquons que dans le cas général lorsque le potentiel $V_p(x)$ depend à la fois de la position et du temps, le tenseur F_{mn} est donné par

$$
\begin{aligned}
F_{51} &= -F_{15} = \frac{\partial}{\partial x^1} V_p\left(x\right), \\
F_{50} &= -F_{05} = \frac{\partial}{\partial x^0} V_p\left(x\right), \\
F_{01} &= F_{10} = 0,
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

mais, comme il a été mentionné nous ne considérons que le potentiel dépendant uniquement de la position ($F_{50} = 0$).

Pour construire une représentation "intégrales de chemins" globale pour le propagateur en question utilisons la relation de fermeture suivante $\int dx^2 \left|x\right\rangle \left\langle x\right| = 1$. Nous obtenons

$$
S^c\left(x_b, x_a\right) = \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b^\mu} - \gamma^5 V_p\left(x_b^1\right) + m\right] G^c\left(x_b, x_a\right), \tag{2.12}
$$

où

$$
G^c\left(x_b, x_a\right) = \left\langle x_b\right| \frac{1}{K_- K_+} \left|x_a\right\rangle . \tag{2.13}
$$

Içi l'opérateur $\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^5 V_p\left(x^1\right) + m\right]$ joue le rôle d'un projecteur qui élimine les états superflus introduits par le produit $K_- K_+$ dans l'équation (2.8).

En introduisant le temps propre de Schwinger, la fonction de Green $G^c\left(x_b, x_a\right)$ que nous proposons de déterminer par les intégrales de chemins s'écrit

$$
G^c\left(x_b, x_a\right) = i \int d\lambda \left\langle x_b\right| \exp\left(-i\mathcal{H}\left(\lambda\right)\right) \left|x_a\right\rangle , \tag{2.14}
$$

avec

$$
\mathcal{H}\left(\lambda\right) = \lambda \left(-P^2 + m^2 + V_p^2\left(x^1\right) - \frac{i}{2} F_{mn}\gamma^m\gamma^n\right). \tag{2.15}
$$

Pour obtenir pour $G^c\left(x_b, x_a\right)$ la forme d'une intégrale de chemins, nous suivons la démarche habituelle en écrivant d'abord $\exp\left(-i\mathcal{H}\left(\lambda\right)\right) = \left[\exp\left(-i\mathcal{H}\left(\lambda\right)\varepsilon\right)\right]^N$, avec $\varepsilon = 1/N$, et en insérant $(N-1)$ identités $\int \left|x\right\rangle \left\langle x\right| dx = 1$ entre deux opérateurs $\exp\left(-i\varepsilon\mathcal{H}\left(\lambda\right)\right)$

successifs et également N intégrations $\int d\lambda_k \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = 1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} G^c &= i \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int d\lambda_0 \int dx_1 dx_2 \, ... dx_{N-1} \int d\lambda_1 d\lambda_2 \, ... d\lambda_N \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{N} \langle x_k | \exp\left(-i\varepsilon \mathcal{H}\left(\lambda_k\right)\right) | x_{k-1} \rangle \, \delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Le pas ε étant infinitésimal, nous avons au premier ordre

$$\langle x_k | \exp\left(-i\varepsilon \mathcal{H}\left(\lambda_k\right)\right) | x_{k-1} \rangle \approx \langle x_k | \, 1 - i\varepsilon \mathcal{H}\left(\lambda_k\right) | x_{k-1} \rangle \tag{2.17}$$

Pour éliminer les opérateurs impulsions dans (2.17) nous introduisons également des relations de fermeture $\int |p_k\rangle \langle p_k| \, dp_k = 1$. A l'aide du produit scalaire

$$\langle x_k \mid p_{k'} \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{ip_{k'} x_k}, \tag{2.18}$$

et comme il n'y a pas de produits mixtes d'opérateurs X, P dans $\mathcal{H}\left(\lambda\right)$ l'élement de matrice (2.17) peut être éxprimé en terme du mid point $\tilde{x}_k = (x_k + x_{k-1})/2$

$$\int \frac{dp_k}{\left(2\pi\right)^2} \exp\left\{ i \left[p_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} - \mathcal{H}\left(\lambda_k, \tilde{x}_k, p_k\right) \right] \varepsilon \right\}. \tag{2.19}$$

Il nous reste à reécrire le produit des élements de matrices en (2.16) sous forme d'une seule exponentielle avec pour exposant une somme. Comme ce produit étant noncommutatif à cause des matrices de Dirac qui ne commutent pas, nous attribuons formellement à ces matrices un indice k et nous introduisons un $\mathbb{T}$-produit qui agit sur les γ_k. En utilisant la représentation intégrale pour les fonctions δ

$$\delta\left(\lambda_k - \lambda_{k-1}\right) = \frac{i}{2\pi} \int e^{i\pi_k (\lambda_k - \lambda_{k-1})} d\pi_k. \tag{2.20}$$

il est alors possible de regrouper tous les facteurs dans (2.16), sous la forme d'une seule exponentielle .

$$G^c = \mathbb{T}\int_0^\infty d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi \times$$
$$\exp\left\{ i\int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2\left(x^1\right)\right) + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} \right.\right.$$
$$\left.\left. +\lambda\frac{i}{2}F_{mn}\gamma^m\gamma^n\right]\right\}. \tag{2.21}$$

Les matrices γ peuvent être déplacées à l'aide de sources grassmanniennes ρ^μ, et la fonction de Green prend alors la forme suivante

$$G^c = \int_0^\infty d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi \times$$
$$\exp\left\{ i\int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2\left(x^1\right)\right) + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} \right.\right.$$
$$\left.\left. +\lambda\frac{i}{2}F_{mn}\frac{\delta_\ell}{\delta\rho^m}\frac{\delta_\ell}{\delta\rho^n}\right]\right\} \mathbb{T}\exp\int_0^1 \rho\left(\tau\right)\gamma d\tau\Big|_{\rho=0}, \tag{2.22}$$

Dans une dernière étape le terme $\mathbb{T}\exp\int_0^1 \rho\left(\tau\right)\gamma d\tau$ peut s'exprimer par une intégrale de chemins sur des trajectoires décrites par des variables impaires de type Grassmann [9] [16]

$$\mathbb{T}\exp\int_0^1 \rho\left(\tau\right)\gamma d\tau = \exp\left(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right)\int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta}\mathcal{D}\psi \times$$
$$\exp\left\{\int_0^1 d\tau\left[\psi_n\dot{\psi}^n - 2i\ \rho_n\psi^n\right] + \psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}, \tag{2.23}$$

où la mesure $\mathcal{D}\psi$ est donnée par

$$\mathcal{D}\psi = D\psi\left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp\left\{\int_0^1 \psi_n\dot{\psi}^n d\tau\right\}\right]^{-1}. \tag{2.24}$$

et θ^n , ψ^nsont des variables grassmanniennes anticommutant avec les matrices γ.

Enfin en insérant la dernière représentation intégrale dans l'équation (2.22) nous obtenons pour G^c son expression en intégrales de chemins

$$G^c = \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \int\limits_0^\infty d\lambda_0 \int Dx \int Dp \int D\lambda \int D\pi \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \times$$
$$\exp\left\{i\int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2\left(x^1\right) + 2iF_{mn}\psi^m\psi^n\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\psi_n\dot{\psi}^n + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda}\right] + \psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}\Big|_{\theta=0}. \tag{2.25}$$

Notons qu'en effectuant l'intégration sur les impulsions et en séparant le terme de fixation de jauge $\pi\dot{\lambda}$ et le terme $\psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)$ nous obtenons l'action invariante selon la reparamétrisation, la transformation de jauge et la supersymmétrie

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda} - \lambda V_p^2\left(x^1\right) - i\psi_n\dot{\psi}^n + 2i\lambda F_{mn}\psi^m\psi^n\right] d\tau, \tag{2.26}$$

qui présente une certaine similarité avec l'action de Berezin-Marinov [10] [11].

2.3 Calcul de la fonction de Green

Ayant montré comment formuler le problème de la particule de Dirac soumise à l'action d'un champ pseudoscalaire dans le cadre des intégrales de chemins supersymétriques de Feynman-Beresin,eliminons les variables fermioniques par intégrations pour obtenir pour la fonction de Green une expression avec seulement des intégrales bosoniques.

Pour celà fixons la jauge dans l'équation (2.25), en effectuant l'intégration sur π et λ;

$$G^c = \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \int\limits_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \times$$
$$\exp\left\{i\int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2\left(x\right) + 2iF_{mn}\psi^m\psi^n\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\psi_n\dot{\psi}^n + p\dot{x}\right] + \psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}\Big|_{\theta=0}. \tag{2.27}$$

Ensuite, effectuons successivement les intégrations sur p_1, p_0 et x_0 ($x_0 \equiv t$) pour obtenir

$$G^c = \int \frac{dE}{2\pi} e^{iE(t_b - t_a)} G_E, \tag{2.28}$$

où G_E est la fonction de Green à énergie fixée,

$$G_E = \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \int_0^\infty d\lambda\ e^{i\lambda\left(E^2 - m^2\right)} \int Dx^1 \times$$
$$\exp\left\{ i \int_0^1 d\tau \left[\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4\lambda} - \lambda V_p^2\left(x^1\right) \right] \right\} \mathcal{I}\left(x^1, \lambda, \theta\right) \Bigg|_{\theta=0} \tag{2.29}$$

avec le facteur de spin de Polyakov [26]

$$\mathcal{I}\left(x^1, \lambda, \theta\right) = \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \times$$
$$\exp\left\{ \int_0^1 d\tau \left[\psi_n \dot{\psi}^n - 2\lambda F_{mn} \psi^m \psi^n \right] + \psi_n(1)\, \psi^n(0) \right\}. \tag{2.30}$$

Pour calculer $\mathcal{I}\left(x^1, \lambda, \theta\right)$ changeons, d'abord les variables ψ en ξ, avec

$$\psi = \frac{1}{2}\xi + \frac{\theta}{2}. \tag{2.31}$$

Les nouvelles variables ξ sont sujettes à la condition au limites

$$\xi(0) + \xi(1) = 0. \tag{2.32}$$

Effectuons encore un autre changement τ en σ, défini par

$$d\sigma = V_p'\left(x^1\right) d\tau. \tag{2.33}$$

Le facteur $\mathcal{I}\left(x^1,\lambda,\theta\right)$ est alors donné par l'intégrale Grassmannienne de forme Gaussienne

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\left(x^1,\lambda,\theta\right) &= \exp\left(-\frac{\tilde{\lambda}}{2}f_{nm}\ \theta^n\theta^m\right)\int\mathcal{D}\xi \\ &\quad \exp\left\{\int_0^1\left[\frac{1}{4}\xi_n\dot{\xi}^n-\tilde{\lambda}f_{nm}\ \xi^n\xi^m-2\tilde{\lambda}f_{nm}\ \theta^n\xi^m\right]d\sigma\right\}\Bigg|_{\theta=0},\end{aligned} \tag{2.34}$$

où

$$\tilde{\lambda}=\lambda\int_0^1 V_p'\left(x^1\right)d\tau. \tag{2.35}$$

Or f_{nm} est constant, $\mathcal{I}\left(x^1,\lambda,\theta\right)$ a une forme semblable à celle de la partie spinorielle relative au propagateur d'un electron soumis à un champ électromagnétique constant est uniforme. Nous pouvons obtenir son expression par intégrations directes et le résultat est

$$\mathcal{I}\left(x^1,\lambda,\theta\right)=\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\cosh\tilde{\lambda}f\right)\left(1-B_{nm}\theta^n\theta^m\right), \tag{2.36}$$

où B est le tenseur donné par [24] [25]

$$B=\frac{1}{2}\tanh\left(\tilde{\lambda}f\right) \tag{2.37}$$

Avec la forme du tenseur f_{nm}, il est facile de montrer que

$$\cosh\left(\tilde{\lambda}f\right)=1+f^2\left(1-\cos\tilde{\lambda}\right) \tag{2.38}$$

et que

$$B=\frac{1}{2}f\tan\tilde{\lambda}. \tag{2.39}$$

Ainsi donc la partie fermionique du propagateur est calculable

$$\exp\left(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right)\mathcal{I}\left(x^1,\lambda,\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}=\sum_{s=\pm1}\frac{1+s\gamma^0}{2}\exp\left(i\lambda s\int_0^1 V_p'\left(x^1\right)d\tau\right), \tag{2.40}$$

et la fonction de Green G_E a pour expression

$$G_E = \sum_{s=\pm 1} \frac{1+s\gamma^0}{2} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right), \tag{2.41}$$

où P_s est le noyau relatif à la coordonnée position x^1 qui est donné par

$$\begin{aligned} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= \int_0^\infty d\lambda e^{i\lambda\left(E^2-m^2\right)} \\ & \int Dx^1 \exp\left\{ i\int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4} - \mathcal{U}_s\left(x^1\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

avec le potentiel effectif supersymétrique

$$\mathcal{U}_s\left(x^1\right) = V_p^2\left(x^1\right) - sV_p'\left(x^1\right), \tag{2.43}$$

Notons que nous avons réduit notre problème pseudoscalaire à un problème non relativiste d'une particule en mouvement dans un potentiel effectif supersymétrique. Ainsi notre problème devient soluble à la condition que le problème nonrelativiste soit soluble.

Dans le cas où $P_s\left(x_b^1, x_a^1\right)$ est intégrable, et admet la décomposition spectrale

$$P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) = \int_0^\infty d\lambda e^{i\lambda\left(E^2-m^2\right)} \sum_n e^{-i\lambda\mathcal{E}_n} \phi_n\left(x_b^1\right) \phi_n^*\left(x_a^1\right) \tag{2.44}$$

où $\mathcal{E}_n$ reprsente l'énergie relatif au problème nonrelativiste la fonction de Green à énergie fixée devient

$$G_E\left(x_b^1, x_a^1\right) = \sum_{n,s} \int_0^\infty d\lambda e^{i\lambda\left(E^2-m^2-\mathcal{E}_n\right)} \phi_n\left(x_b^1\right) \phi_n^*\left(x_a^1\right)$$

En décomposant la matrice

$$\frac{1+s\gamma^0}{2} = U_s\bar{U}_s, \tag{2.45}$$

sous la forme du produit d'une colonne U et de la ligne $\bar{U}$, avec

$$U_{s=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; U_{s=+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

et en effectuant l'intégration sur le parametre de Schwinger λ, nous obtenons

$$G_E = \sum_{n,s} U_s \bar{U}_s \frac{\phi_n\left(x_b^1\right) \phi_n^*\left(x_a^1\right)}{E^2 - E_n^2} \tag{2.47}$$

avec

$$E_n^2 = m^2 + \mathcal{E}_n. \tag{2.48}$$

Effectuons encore l'intégration sur la variable E, nous obtenons

$$\begin{aligned} &G^c\left(x_b, x_a\right) = \\ &\sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta\left[\epsilon\left(t_b - t_a\right)\right] \varphi_{n,s}^{\epsilon}\left(x_b\right) \bar{\varphi}_{n,s}^{\epsilon}\left(x_a\right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

où $\Theta\left(\Delta t\right)$ est la fontion "step" et

$$\varphi_{n,s}^{\epsilon}\left(x\right) = e^{-i\epsilon E_n t} \phi_n\left(x^1\right) U_s. \tag{2.50}$$

Les spineurs $\varphi_{n,s}^{\epsilon}\left(x\right)$ sont solutions de l'équation de Dirac quadratique (à cause du produit de $K_- K_+$).

Pour obtenir les spineurs de Dirac solutions de l'équation de Dirac du premier ordre, les états superflus doivent être éliminés en faisant agir l'opérateur $K_+\left(x\right)$ sur les spineurs $\varphi_{n,s}^{\epsilon}\left(x\right)$

$$\psi_{n,s}\left(t, x\right) = N_{n,s} \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \gamma^5 V_p\left(x^1\right) + m\right] \varphi_{n,s}^{\epsilon}\left(x\right), \tag{2.51}$$

où $N_{n,s}$ est une constante de normalisation.

Nous obtenons alors la solutions complete à notre problème du potentiel pseudoscalaire

$$\psi_{n,s=+1}(x) = N_{n,+1} e^{-i\epsilon E_n t} \begin{pmatrix} E_n + m \\ i\frac{\partial}{\partial x^1} - iV_p\left(x^1\right) \end{pmatrix} \phi_n\left(x^1\right), \tag{2.52}$$

et

$$\psi_{n,s=-1}(x) = N_{n,-1} e^{-i\epsilon E_n t} \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial x^1} - iV_p\left(x^1\right) \\ -E_n + m \end{pmatrix} \phi_n\left(x^1\right). \tag{2.53}$$

Il en résulte ainsi que, pour n'importe quel potentiel pseudoscalaire, il suffit de calculer le propagateur présenté en (2.42) et de determiner le spectre d'énergie E_n et les fonctions $\phi_n\left(x^1\right)$ correspondantes.

Dans ce qui suit nous traitons explicitement des exemples pour illustrer la méthode.

2.4 Exemples

2.4.1 Le potentiel linéaire (un oscillateur relativiste)

Le premier exemple que nous considérons est le potentiel pseudoscalaire linéaire

$$V_p\left(x^1\right) = m\omega x^1, \tag{2.54}$$

qui représente un oscillateur relativiste (i.e. à la limite nonrelativiste il reproduit l'oscillateur harmonique habituel).

Le potentiel supersymétrique correspondant a la même forme que l'oscillateur harmonique habituel avec un terme constant en plus

$$\mathcal{U}_s\left(x^1\right) = m^2\omega^2\left(x^1\right)^2 - sm\omega. \tag{2.55}$$

Pour ce cas le noyau

$$
\begin{aligned}
P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= \int_0^\infty dT e^{iT\left(E^2-m^2+sm\omega\right)} \\
&\int Dx^1 \exp\left\{i\int_0^T d\tau\left[\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4} - m^2\omega^2\left(x^1\right)^2\right]\right\}
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

est donc intégrable. Les fonctions d'onde $\phi_n\left(x^1\right)$ sont celles de l'oscillateur Harmonique nonrelativiste

$$
\phi_n\left(x^1\right) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} (m\omega)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2}\left(x^1\right)^2} H_n\left(\sqrt{m\omega}x^1\right) \tag{2.57}
$$

et le spectre d'énergie est donné par

$$
E_n^2 = m^2 + (2n+1-s)\, m\omega. \tag{2.58}
$$

2.4.2 Le potential de Pöschl-Teller modifié

Considérons le potentiel suivant

$$
V_p\left(x^1\right) = V_0 \tanh x^1 - \frac{V_1}{\sinh 2x^1} \tag{2.59}
$$

qui donne le potential de Pöschl-Teller modifié

$$
\mathcal{U}_s\left(x^1\right) = V_0^2 + \frac{l^2-\frac{1}{4}}{\sinh^2 x^1} - \frac{k^2-\frac{1}{4}}{\cosh^2 x^1} \tag{2.60}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{V_1}{2} - \frac{s}{2} \\
k &= V_0 + \frac{V_1}{2} + \frac{s}{2}.
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Le noyau correspondant

$$\begin{aligned} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= \int\limits_0^\infty d\lambda e^{i\lambda\left(E^2-m^2-V_0^2\right)} \\ & \int Dx^1 \exp\left\{i\int_0^\lambda d\tau\left[\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4}-\left(\frac{l^2-\frac{1}{4}}{\sinh^2 x^1}-\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\cosh^2 x^1}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

est aussi calculabe. Nous avons [27]

$$\begin{aligned} \phi_n\left(x^1\right) &= N\left(\sinh x^1\right)^{k+1/2}\left(\cosh x^1\right)^{n-l+1/2} \\ & \times {}_2F_1\left(-n, k-n, l+1; \tanh^2 x^1\right), \end{aligned} \tag{2.63}$$

où

$$N=\frac{1}{\Gamma(k+1)}\left[\frac{2\left(l-k-2n-1\right)\Gamma\left(l-n\right)\Gamma\left(1+n+k\right)}{\Gamma\left(l-k-n\right)n!}\right]^{1/2}, \tag{2.64}$$

et

$$E_n^2=m^2+V_0^2-\left(2n-V_0+\frac{V_1}{2}+1-s\right)^2. \tag{2.65}$$

Notons içi que le potential de Pöschl-Teller

$$\mathcal{U}_s\left(x^1\right)=\frac{l^2-\frac{1}{4}}{\sin^2 x^1}-\frac{k^2-\frac{1}{4}}{\cos^2 x^1} \tag{2.66}$$

peut être obtenu à partir du potentiel pseudoscalaire

$$V_p\left(x^1\right)=V_0\tan x^1-\frac{V_1}{\sin 2x^1}. \tag{2.67}$$

C'est encore un cas soluble.

2.4.3 Le potentiel "Scarf II"

Le troisième exemple que nous considérons est le potentiel complexe

$$V_p\left(x^1\right) = (p+q)\tanh x^1 - i\frac{(p-q)}{\cosh x^1}. \tag{2.68}$$

Le potentiel supersymétric $\mathcal{U}_s\left(x^1\right)$ prent la forme

$$\mathcal{U}_s\left(x^1\right) = \alpha - \beta + \beta\tanh^2 x^1 + \gamma\frac{\sinh x}{\cosh^2 x^1}, \tag{2.69}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= (p+q)^2 \\ \beta &= -2\left(p^2+q^2\right) - s\,(p+q) \\ \gamma &= -i\,(p-q)\left[2\,(p+q)+s\right]. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Dans ce cas, le hamiltonien relatif est pseudo-hermitien (i.e. $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$, où η étant l'opérateur de parité) et la norme d'une fonction scalaire (pseudo-norme) est donnée par [20]

$$\int \psi\,(x)\,\psi^*\,(-x)\,dx. \tag{2.71}$$

Comme le propagateur $P_s\left(x_b^1, x_a^1\right)$ à une action complexe, il est commode de rendre l'action réelle, en utilisant une transformation de type Duru-Kleinert [4], où le chemin x est changé en un autre y , par la relation suivante

$$\begin{aligned} \sinh x^1 &= -i\tanh y \\ \cosh x^1 &= \frac{1}{\cosh y} \end{aligned} \tag{2.72}$$

et le temps propre λ transformé en un autre T, défini par

$$d\tau = \frac{-1}{\cosh^2 y} d\sigma. \tag{2.73}$$

Suite à ces transformations, notre problème se ramène a celui de Rosen-Morse qui comme on le sait, admet une solution exacte. De manière explicite nous obtenons

$$E_{n,s}^2 = m^2 - \left(n + \frac{1-s}{2}\right)^2 - 2\,(p+q)\left(n + \frac{1-s}{2}\right) \tag{2.74}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_n\,(x) \quad &= \quad N\left(\frac{1 - i\sinh x^1}{2}\right)^{-\left(q+\frac{s-1}{4}\right)}\left(\frac{1 + i\sinh x^1}{2}\right)^{-\left(p+\frac{s-1}{4}\right)} \\ & \qquad P_n^{\left(-2p-\frac{s}{2},-2q-\frac{s}{2}\right)}\left(i\sinh x^1\right), \end{aligned} \tag{2.75}$$

où

$$N = \sqrt{\frac{\left[2n - 2\,(p+q+s-1)\right]\Gamma\left(n+1-\left(p+q+\frac{s}{2}\right)\right)n!}{\Gamma\left(n+1-\left(2p+\frac{s}{2}\right)\right)\Gamma\left(n+1-\left(2q+\frac{s}{2}\right)\right)}}. \tag{2.76}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu par l'approche des intégrales de chemins, voir comment traiter un problème de particule de Dirac soumise à l'action d'un potentiel pseudoscalaire unidimensinnel . Comme le potentiel est matriciel à cause de γ^5, des adaptations du formalisme de Fradkin-Gitman pour ce cas ont été nécessaires. Nous avons obtenu pour le propagateur une expression avec une action pseudoclassique supersymétrique qui a une certaine ressemblance à celle de Berezin-Marinov.

Ainsi donc notre problème pseudoscalaire a trouvé sa solution de manière simple en utilisant une voie directe. Ce qui montre la puissance de la méthode des intégrales de chemins à résoudre des problèmes concrets.

Chapitre 3

Approximation semi-classique

3.1 Introduction

Au premier chapitre, nous avons solutionné suivant une approche supersymétrique des intégrales de chemins, le problème d'une particule de Dirac soumise à un potentiel pseudoscalaire. Notons que dans la construction, les variables grassmanniennes impaires ont été utilisées pour décrire les degrés de liberté fermioniques et que le calcul de la fonction de Green a été réduit seulement au calcul d'intégrale de chemins de type bosonique pour se ramener finalement à un problème d'une particule nonrelativiste soumise à un potentiel supersymétrique. Ce lien entre la mécanique quantique supersymétrique et l'équation de Dirac a été analysé dans [28], où les auteurs ont discuté le problème de la particule de Dirac soumise à un champ magnétique, le potentiel de Coulomb et à un potentiel scalaire selon Lorentz. Les interactions pseudoscalaires ont été également analysées dans le contexte de l'équation de Dirac en présence d'interactions non hermitiennes mais admettant un spectre réel. Il a été montré que la symétrie cachée et appropriée à l'équation de Dirac avec ce type d'interaction est une pseudo-supersymétrie [20].

Par ailleurs avec l'avènement de la mécanique quantique supersymétrique [29] une approche semiclassique basée sur la méthode WKB a été établie dans le context des approximations par Comtet, Bandrauk et Campbell (CBC) [30]. Pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel supersymétrique de genre

$$\mathcal{U}_{\pm}(x) = V^2 \pm V, \tag{3.1}$$

la règle de la quantification de CBC est la suivante

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m\left(E - V^2(x)\right)}dx = n\pi, \tag{3.2}$$

où m est la masse de particule, E est son énergie, et x_L, x_R sont respectivement les points tournants gauche et droit définis comme étant solutions de $V^2(x_L) = V^2(x_R) = E$.

Dans le cadre des intégrales de chemins, le même problème a été considéré par Inomata et Junker en utilisant une approche quasi-classique [31][32] ; Il a été montré que la règle de quantification de CBC est une bonne approximation dans le cas du bonne SUSY, mais dans le cas de brisure de la SUSY la règle de quantification quasi-classique devient

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2m\left(E - V^2\left(x\right)\right)}dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{3.3}$$

Nous suggérons dans ce chapitre, qui représente une continuation du chapitre précédent, d'établir rigoureusement la bonne règle quasi-classique de quantification pour la particule relativiste de spin $\frac{1}{2}$ soumise à un potentiel pseudoscalaire à partir de la formulation intégrale de chemin qui a été élaborée auparavant.

En utilisant la méthode d'approximation de la phase stationnaire, nous obtenons d'abord une expression quasi-classique pour la fonction de Green relative à l'équation de Dirac et finalement à partir des pôles de cette même fonction de Green, nous extrayons la bonne règle de quantification.

3.2 Approximation quasi-classique pour l'équation de Dirac

Rappelons que dans le premier chapitre le propagateur relatif à l'équation de Dirac avec un potentiel pseudoscalaire $V_p\left(x\right)$ est donné par

$$S^c\left(x_b, x_a\right) = \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\left(x_b\right)_\mu} - \gamma^5 V_p\left(x_b\right) + m\right] G^c\left(x_b, x_a\right). \tag{3.4}$$

où la fonction de Green

$$G^c\left(x_b, x_a\right) = \int \frac{dE}{2\pi} e^{iE(t_b - t_a)} G_E \tag{3.5}$$

a été exprimée en fonction d'une fonction de Green à énergie fixée

$$G_E = \sum_{s=\pm 1} \frac{1 + s\gamma^0}{2}\, P\left(x_b, x_a, \mathcal{E}\right), \tag{3.6}$$

Comme nous l'avons vu pour certaines formes de potentiels le noyau $P(x_b, x_a, \mathcal{E})$ peut être obtenue analytiquement et d'une manière exacte. Cependant que pour quelques interactions réalistes, il n'y a pas de solutions exactes et le recours aux approximations est plus que nécessaire si l'on veut obtenir une information sur la dynamique du système.

Pour obtenir une règle de quantification quasi-classique dérivons d'abord pour l'équation de Dirac la formule de Gutzwiller [33] qui exprime $P(x_b, x_a, \mathcal{E})$ en fonction de chemins quasiclassiques.

A partir de l'expression du noyau $P(x_b, x_a, \mathcal{E})$

$$P(x_b, x_a, \mathcal{E}) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda\mathcal{E}} P(x_b, x_a, \lambda)\, d\lambda, \tag{3.7}$$

qui peut être considéré comme la transformée de Fourier du propagateur $P(x_b, x_a, \lambda)$ relatif à un système physique décrit par l'action

$$\mathcal{S}(x, \dot{x}) = \int_0^{\lambda} d\tau \left(\frac{1}{4}\dot{x}^2 - \mathcal{U}_s(x)\right). \tag{3.8}$$

Nous avons alors

$$P(x_b, x_a, \lambda) = \int Dx \exp\{i\mathcal{S}(x, \dot{x})\}. \tag{3.9}$$

Séparons dans cette action la partie relative au spin de la partie bosonique (indépendante du spin)

$$\mathcal{S}(x, \dot{x}) = \mathcal{S}_T(x, \dot{x}) + \mathcal{S}_s(x, \dot{x}) \tag{3.10}$$

avec

$$\mathcal{S}_s(x, \dot{x}) = s \int_0^{\lambda} d\tau V_p'(x) \tag{3.11}$$

et

$$\mathcal{S}_T(x,\dot{x}) = \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} - V_p^2(x)\right] \tag{3.12}$$

Suivant la procédure de l'approximation quasi-classique nous devons déterminer d'abord la solution quasi-classique $q(\tau)$ qui s'obtient à partir de

$$\delta\mathcal{S}_T(x,\dot{x}) = 0 \tag{3.13}$$

et effectuer ensuite un développement de $\mathcal{S}(x,\dot{x})$ au voisinage de $q(\tau)$.

Il est facile de vérifier que la solution quasi-classique $q(\tau)$ vérifie l'équation suivante

$$d\tau = \frac{dq}{2\sqrt{\mathcal{E} - V_p^2(q)}} \tag{3.14}$$

où l'énergie $\mathcal{E}$ est donnée par

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\mathcal{S}_T(q,\dot{q})}{\partial\tau}. \tag{3.15}$$

En utilisant la méthode de la phase stationnaire et à l'aide du développement de $\mathcal{S}(x,\dot{x})$ au voisinage de $q(\tau)$, nous obtenons l'expression semiclassique suivante

$$P(x_b,x_a,\lambda) = \sum_{q(\tau)} \exp i\left[\mathcal{S}_{\text{qc}} + s\varphi\right] \int D\xi \exp i\mathcal{S}_{\text{fl}}\left(\xi,\dot{\xi}\right) \tag{3.16}$$

où

$$\mathcal{S}_{\text{fl}}\left(\xi,\dot{\xi}\right) = \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\dot{\xi}^2}{4} - \frac{1}{4}\Omega^2(\tau)\,\xi^2\right] \tag{3.17}$$

avec

$$\frac{1}{2}\Omega^2(\tau) = \frac{d^2}{dq^2}V_p^2(q(\tau)). \tag{3.18}$$

A cause de la dominance de la trajectoire quasi-classique, la contribution de la partie relative au spin est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi \quad : \quad &= \mathcal{S}_s\left(q,\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\int_{x_a}^{x_b} \frac{V_p'\left(q\right)dq}{\sqrt{\mathcal{E}-V_p^2\left(q\right)}} \\ &= \frac{1}{2}\left[a\left(x_b\right)-a\left(x_a\right)\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec

$$a\left(x\right) = \arctan\left(\frac{V_p\left(x\right)}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right). \tag{3.20}$$

L'action relative à l'intégrale de chemin dans l'équation (3.16) étant quadratique, alors $P\left(x_b, x_a, \lambda\right)$ est intégrable et le résultat est le suivant

$$P\left(x_b, x_a, \lambda\right) = \sum_{q(\tau)} \sqrt{\frac{1}{4i\pi f\left(\lambda\right)}} \exp i\left[\mathcal{S}_{qc} + s\varphi\right]. \tag{3.21}$$

Ainsi nous avons exprimé le resultat en fonction de $f\left(\tau\right)$ qui est solution de l'équation suivante

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \Omega^2\left(\tau\right)\right] f\left(\tau\right) = 0 \tag{3.22}$$

et dont la solution est

$$f\left(\lambda\right) = \dot{q}\left(\lambda\right)\dot{q}\left(0\right)\int_0^\lambda \frac{d\tau}{\left[\dot{q}\left(\tau\right)\right]^2}. \tag{3.23}$$

Signalons que la vitesse $\dot{q}\left(\tau\right)$ change son signe à chaque point tournant et la quantité $\dot{q}\left(\lambda\right)\dot{q}\left(0\right)$ à cause de ce changement de signe s'écrit aussi

$$\dot{q}\left(\lambda\right)\dot{q}\left(0\right) = 4\left(-1\right)^\nu \left|p_{qc}\left(x_b\right)p_{qc}\left(x_a\right)\right| \tag{3.24}$$

où ν est le nombre du points tournant le long d'un chemin quasi-classique particulier $q\left(\tau\right)$ reliant les deux points x_b et x_a qui est également le nombre de zeros de la fonction $f\left(\tau\right)$ a l'intérieur de l'intervalle $\tau \in [0,1]$. Il est appelé aussi indice de Morse [34].

La quantité $f\left(\lambda\right)$ peut être donc s'exprimer en fonction de $p_{qc}\left(x_a\right)$, $p_{qc}\left(x_b\right)$, ν , λ et $\mathcal{E}$.

En effet, avec l'équation du mouvement quasi-classique nous avons

$$\lambda = \int_{x_a}^{x_b} \frac{dq}{\dot{q}\,(\tau)} = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_b} \frac{dq}{\sqrt{\mathcal{E} - V_p^2\,(q)}} \tag{3.25}$$

et par dérivation par rapport à $\mathcal{E}$ nous avons encore

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{E}} = -2 \int_0^{\lambda} \frac{d\tau}{\left[\dot{q}\,(\tau)\right]^2}. \tag{3.26}$$

En insérant les deux équations (3.24) et (3.25) dans (3.23) nous obtenons pour $f\,(\lambda)$ l'expression suivante

$$f\,(\lambda) = -2\,(-1)^{\nu} \left| p_{qc}\,(x_a)\, p_{qc}\,(x_b) \right| \frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{E}}. \tag{3.27}$$

Pour obtenir la formule de Gutzwiller comme dans le cas de la mécanique quantique supersymétrique, il est utile d'introduire l'analogue quasi-classique de la fonction caractéristique de Hamilton

$$\mathcal{W}_{qc}\,(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_T\,(x, \dot{x}) + \mathcal{E}\lambda = \int_{x_a}^{x_b} p_{qc}\,(q)\, dq. \tag{3.28}$$

Par dérivation de $\mathcal{W}_{qc}\,(\mathcal{E})$ par rapport à l'énergie $\mathcal{E}$,

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{qc}}{\partial \mathcal{E}} = \lambda \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{W}_{qc}}{\partial \mathcal{E}^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{E}} \tag{3.29}$$

nous obtenons pour le propagateur $P\,(x_b, x_a, \lambda)$ la forme suivante

$$\begin{aligned} P\,(x_b, x_a, \lambda) \quad = \quad & \sum_{q(\tau)} \sqrt{\frac{i}{2\pi \left| p_{qc}\,(x_a)\, p_{qc}\,(x_b) \right|}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{E}} \right)^{-1/2} \\ & \exp i \left[\mathcal{W}_{qc}\,(\mathcal{E}) - \mathcal{E}\lambda + s\varphi - \nu \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

En incorporant cette expression dans l'équation (3.7) et en changeant la variable d'intégration λ en $\mathcal{E}$, avec

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial\mathcal{E}} d\mathcal{E} \tag{3.31}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} P\left(x_b, x_a, \mathcal{E}'\right) &= \sum_{q(\tau)} \int d\mathcal{E} \sqrt{\frac{i}{2\pi \left|p_{qc}\left(x_a\right) p_{qc}\left(x_b\right)\right|}} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mathcal{E}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \exp i \left[\mathcal{W}_{qc}\left(\mathcal{E}\right) - \lambda\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}'\right) + s\varphi - \nu\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour avoir une expression sans intégrale, développons $\mathcal{W}_{qc}\left(\mathcal{E}'\right)$ au voisinage de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{W}_{qc}\left(\mathcal{E}'\right) \approx \mathcal{W}_{qc}\left(\mathcal{E}\right) - \lambda\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}'\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial\mathcal{E}}\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}'\right)^2 + ... \tag{3.33}$$

et effectuons une intégration sur $\mathcal{E}$ suivie du remplacement de $\mathcal{E}'$ par $\mathcal{E}$, nous obtenons ainsi la formule cherchée de Gutzwiller pour l'équation de Dirac

$$P\left(x_b, x_a, \mathcal{E}\right) = \sum_{q(\tau)} \frac{1}{\sqrt{\left|p_{qc}\left(x_a\right) p_{qc}\left(x_b\right)\right|}} \exp i \left[\mathcal{W}_{qc}\left(\mathcal{E}\right) + s\varphi - \nu\frac{\pi}{2}\right] \tag{3.34}$$

A ce niveau l'étape restant est la sommation sur tous les chemins quasi-classiques à énergie fixée. Comme il a été montré dans [31] et [32] (voire aussi [3]) la somme sur $q\left(\tau\right)$ peut être convertie à la somme sur les deux indices $i = \overline{1,4}$ et $k = 0, 1, 2, ...$

$$\sum_{q(\tau)} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=0}^{\infty}, \tag{3.35}$$

où k est le nombre des cycles et i indique 4 categories de chemins ;

1) $i = 1$ indique les chemins quittant x_a à droite et arrivant à x_b à gauche.

2) $i = 2$ indique les chemins quittant x_a à droite et arrivant à x_b à droite.

3) $i = 3$ indique les chemins quittant x_a à gauche et arrivant à x_b à gauche.

4) $i = 4$ indique les chemins quittant x_a à gauche et arrivant à x_b à droite.

Pour effectuer la sommation nous définissons pour chaque chemin quasi-classique noté par (i,k) les quantités $\mathcal{W}_k^{(i)}$, $\varphi_k^{(i)}$, et $\nu_k^{(i)}$ comme suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_k^{(i)} &= \mathcal{W}_k^{(i)} + 2kw\left(x_R\right), \\
\varphi_k^{(i)} &= \varphi_0^{(i)} + k\left[a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right)\right], \\
\nu_k^{(i)} &= \nu_0^{(i)} + 2k,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

où

$$w\left(x\right) = \int_{x_L}^{x} \sqrt{\mathcal{E} - V^2\left(q\right)}dq, \tag{3.37}$$

les quantités $\mathcal{W}_0^{(i)}$, $\varphi_0^{(i)}$ et $\nu_0^{(i)}$ sont données par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_0^{(1)} = w\left(x_b\right) - w\left(x_a\right) \\
&\varphi_0^{(1)} = \tfrac{1}{2}\left[a\left(x_b\right) - a\left(x_a\right)\right] \\
&\nu_0^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_0^{(2)} = w\left(x_b\right) + w\left(x_a\right) \\
&\varphi_0^{(2)} = \tfrac{1}{2}\left[a\left(x_b\right) - a\left(x_a\right)\right] - a\left(x_L\right) \\
&\nu_0^{(2)} = 1,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_0^{(3)} = 2w\left(x_R\right) - w\left(x_b\right) - w\left(x_a\right) \\
&\varphi_0^{(3)} = a\left(x_R\right) - \tfrac{1}{2}\left[a\left(x_b\right) - a\left(x_a\right)\right] \\
&\nu_0^{(3)} = 1,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

et, enfin,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_0^{(4)} = 2w\left(x_R\right) - w\left(x_b\right) + w\left(x_a\right) \\
&\varphi_0^{(4)} = a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right) - \tfrac{1}{2}\left[a\left(x_b\right) - a\left(x_a\right)\right] \\
&\nu_0^{(4)} = 2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Nous obtenons alors

$$P\left(x_b, x_a, \mathcal{E}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left|p_{qc}\left(x_a\right) p_{qc}\left(x_b\right)\right|}} \sum_{i=1}^{4} \exp i \left[\mathcal{W}_0^{(i)} + s\varphi_0^{(i)} - \nu_0^{(i)} \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp ik \left[2w\left(x_R\right) + s\left(a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right)\right) - \pi\right]. \tag{3.42}$$

La sommation sur k peut être effectuer facilement. (C'est une série géométrique.)

Alors nous avons pour la fonction de Green G_E l'expression quasi-classique suivante

$$G_E = \sum_{s=\pm 1} \frac{1+s\gamma^0}{2} \frac{1}{\sqrt{\left|p_{qc}\left(x_a\right) p_{qc}\left(x_b\right)\right|}}$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{4} \exp i \left[\mathcal{W}_0^{(i)} + s\varphi_0^{(i)} - \nu_0^{(i)} \frac{\pi}{2}\right]}{1 - \exp\left\{i\left[2w\left(x_R\right) + s\left(a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right)\right) - \pi\right]\right\}}, \tag{3.43}$$

Il nous reste à déduire la règle de quantification à partir des pôles de la fonction de Green G_E. Ces pôles sont tels que

$$\exp\left\{i\left[2w\left(x_R\right) + s\left(a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right)\right) - \pi\right]\right\} = 1. \tag{3.44}$$

A partir de cette équation nous déduisons la règle de quantification

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\mathcal{E} - V^2\left(q\right)} dq = \left(n + \frac{1}{2} - s\frac{a\left(x_R\right) - a\left(x_L\right)}{2\pi}\right)\pi. \tag{3.45}$$

Il est important de noter içi qu'il y a deux cas différents ;

I) Cas d'une bonne SUSY ;

Dans ce cas $V\left(x_R\right) = -V\left(x_L\right) = \sqrt{\mathcal{E}}$ et $a\left(x_R\right) = -a\left(x_L\right) = \frac{\pi}{2}$,et la règle de quantification quasi-classique est la suivante

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\mathcal{E} - V^2\left(x\right)} dx = \left(n + \frac{1-s}{2}\right)\pi. \tag{3.46}$$

II) Cas de la brisure de la SUSY ;

Nous avons dans ce cas $V(x_R) = V(x_L) = \pm\sqrt{\mathcal{E}}$ et $a(x_R) = a(x_L) = \pm\frac{\pi}{2}$. La règle de quantifiaction est alors

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\mathcal{E} - V^2(x)}dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{3.47}$$

3.3 Application : le potentiel $V_p(x) = \alpha x^\delta$;

Comme application, considérons l'exemple d'un potentiel pseudoscalaire proportionnel à une puissance de x

$$V_p(x) = \alpha x^\delta, \tag{3.48}$$

où δ est un entier et α est un réel. Le potentiel supersymétrique correspondant est alors

$$\mathcal{U}(x) = \alpha^2 x^{2\delta} - s\alpha\delta x^{\delta-1} \tag{3.49}$$

qui en général n'est pas soluble et car il n'a plus l'invariance de forme. Dans le cadre de la mecanique quantique nonrelativiste, les potentiels avec la puissance δ paire ou impaire ont été traités suivant l'approche quasi-classique respectivement dans [32] et [35].

Dans le cadre relativiste de l'équation de Dirac, l'approximation, quasi classique nous donne

$$E^2 = m^2 + \alpha^{\frac{2}{1+\delta}}\left[\left(n + \frac{1}{2} - s\epsilon\right)\frac{\pi}{I}\right]^{\frac{2\delta}{1+\delta}}, \tag{3.50}$$

où

$$I = \int_{-1}^{+1}\sqrt{1 - x^{2\delta}}dx = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\delta+1}{2\delta}\right)}, \tag{3.51}$$

et $\epsilon = 0$ pour δ pair (i.e. $\delta = 2k$) et $\epsilon = \frac{1}{2}$ pour δ impaires (i.e. $\delta = 2k - 1$).

Remarquons qu' en prenant $\alpha = m\omega$ et $\delta = 1$,

$$V_p(x) = m\omega x, \tag{3.52}$$

nous obtenons le spectre quasi-classique relatif au potentiel linéaire

$$E^2_{\text{Q-class.}} = m^2 + \alpha(2n + 1 - s) \tag{3.53}$$

qui comparé au résultat exact du 1er chapitre est exactement le même

$$E^2_{\text{Exact}} = m^2 + m\omega(2n + 1 - s). \tag{3.54}$$

Ainsi avec le traitement quasi-classique et surtout avec l'exemple considéré dans ce chapitre, nous pouvons noter le lien profond qui existe entre la mécanique quantique supersymétrique et l'équation de Dirac. Le résultat essentiel est que le spin de la particule contribue au spectre d'énergie quasiclasique uniquement lorsque la SUSY est bonne . Ailleurs il ne contribue pas au spectre d'énergie quasi-classique.

3.4 Conclusion

En conclusion, nous avons utilisé dans le présent chapitre l'approche des intégrales de chemins pour obtenir une règle quantification quasi-classique pour le problème à (1+1) dimensions d'une particule de Dirac en interaction avec un potentiel pseudoscalaire . Pour atteindre notre objectif nous avons utilisé d'abord le résultat relatif à la fonction de Green exprimée au moyen des intégrales de type bosonique pour ensuite obtenir, grâce à la méthode de la phase stationnaire, la formule de Gutzwiller relative à l'équation de Dirac qui donne la relation entre la fonction de Green à énergie fixée et les chemins quasi-classiques.

Comme l'a si bien montré Cooper [28], nous pouvons dans ce chapitre, remarquer qu'il exsite un lien profond entre la mécanique quantique relativiste de la particule de spin $\frac{1}{2}$ et la mécanique quantique supersymétrique et qu'explicitement la supersymétrie cachée peut être décrite par une action supersymétrique semblable à celle de Berezin-Marinov. C'est aussi un autre avantage de la formulation path integral.

Chapitre 4

Diffusion d'une particule de Dirac par un champ pseudoscalaire

4.1 Introduction

Récemment, le problème de la diffusion d'un fermion neutre par une barrière de potentiel pseudoscalaire

$$V_p\,(x) = V_0\ \boldsymbol{\theta}\,(x)\,, \tag{4.1}$$

a été étudié dans [22] et la nouveauté dans cette forme d'interactions est l'absence du paradoxe de Klein.

Dans ce chapitre, nous voulons étudier la diffusion de la particule de Dirac par la barrière pseudoscalaire suivante

$$V_p\left(x^1\right) = \frac{V_0}{2}\left(1 + \tanh\frac{x^1}{2a}\right). \tag{4.2}$$

Afin d'accomplir cette étude nous employons la technique des intégrales de chemins que nous avons développée auparavons ; Dans les les deux chapitre précédents, nous avons présenté le propagateur d'une particule de Dirac soumise à l'action d'un potentiel pseudoscalaire en (1+1) dimensions au moyen des intégrales de chemin supersymétriques, où le mouvement interne relative au spin est décrit par des variables de Grassmann impaires. Après avoir intégré sur les trajectoires fermioniques nous avons pu exprimer la fonction de Green seulement par des intégrales bosoniques. Le problème a été réduit au traitement non relativiste avec un potentiel supersymétrique.

Dans ce chapitre nous employons ces résultats pour obtenir une expression analytique pour la fonction de Green relative au potentiel (4.2). Nous montrons d'abord que le problème présent est similaire au problème nonrelativiste du potentiel de Rosen-Morse. En suite, nous extrayons la fonction d'onde propageant à gauche ainsi que la fonction d'onde propageant à droite et finalement nous déterminons les coefficients de transmission et de réflexion.

4.2 Calcul de la fonction de Green

Rappelons d'abord qu'il a été montré dans la premiere partie que le propagateur relatif à l'équation de Dirac avec un potentiel pseudoscalaire $V_p(x)$ est donné par

$$S^c(x_b, x_a) = \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial (x_b)_\mu} - \gamma^5 V_p(x_b) + m \right] G^c(x_b, x_a), \tag{4.3}$$

où le nouveau propagateur G^c

$$G^c(x_b, x_a) = \int \frac{dE}{2\pi} e^{iE(t_b - t_a)} G_E. \tag{4.4}$$

est exprimé en fonction de la fonction de Green à énergie fixé G_E qui est donnée par

$$G_E = \sum_{s=\pm 1} \frac{1 + s\gamma^0}{2} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right), \tag{4.5}$$

avec

$$\begin{aligned} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= \int_0^\infty d\lambda e^{i\lambda\left(E^2 - m^2\right)} \\ &\int Dx^1 \exp\left\{ i \int_0^\lambda d\tau \left[\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4} - \mathcal{U}_s\left(x^1\right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

et le potentiel effectif $\mathcal{U}_s(x^1)$ a une forme supersymétrique

$$\mathcal{U}_s\left(x^1\right) = V_p^2\left(x^1\right) - sV_p'\left(x^1\right). \tag{4.7}$$

Passons maintenant à l'étude de la diffusion de l'électron par le potentiel pseudoscalaire. Notre approche est basée sur la détermination des coéfficients de transmission et de reflection à partir de la fonction de Green qui contient des informations importantes sur le système considéré.

En utilisons les variables $T = \frac{\lambda}{4a^2}$ et $u = \frac{x^1}{2a}$,le noyau $P_s(x_b^1, x_a^1)$ peut être rearrangé comme suite

$$
\begin{aligned}
P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= 4a^2 \int_0^{+\infty} dT \int Du \exp\left\{ i \int_0^T d\sigma \left[\frac{\dot{u}^2}{4} \right.\right. \\
&\quad - \left(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \tanh u\right) + \\
&\quad \left.\left. \left(a^2 V_0^2 + saV_0\right) \frac{1}{\cosh^2 u} \right] \right\}, \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
m_1 - m_2 &= 2ia\sqrt{E^2 - m^2} \\
m_1 + m_2 &= 2ia\sqrt{E^2 - m^2 - V_0^2}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

L'intégrale de chemin présentée en (4.8) a la même forme que la fonction de Green à énergie fixée correspondant au potentiel de Rosen-Morse. Il a été montré dans [36] et [4] qu'en utilisant une transformation spacio-temporelle de Duru-Kleinert, cette fonction de Green peut être convertie à celle de Pöschl-Teller généralisé (PTG), dont l'énergie de PT est donnée par

$$
E_{PT} - \frac{3}{16} = a^2 V_0^2 + saV_0. \qquad (4.10)
$$

$P_s\left(x_b^1, x_a^1\right)$ est alors intégrable. Pour $x_b^1 \rangle x_a^1$, Le resultat est

$$
\begin{aligned}
P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) &= 4a^2 \frac{\Gamma\left(m_1 - l_s\right)\Gamma\left(m_1 + l_s + 1\right)}{\Gamma\left(m_1 + m_2 + 1\right)\Gamma\left(m_1 - m_2 + 1\right)} \\
&\times \left(\frac{1+\tanh u_b}{2}\right)^{\frac{m_1 - m_2}{2}} \left(\frac{1-\tanh u_b}{2}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{2}} \\
&\times \left(\frac{1-\tanh u_a}{2}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{2}} \left(\frac{1+\tanh u_a}{2}\right)^{\frac{m_1 - m_2}{2}} \\
&\times F\left(m_1 - l_s, m_1 + l_s + 1, m_1 - m_2 + 1; \frac{1+\tanh u_a}{2}\right) \\
&\times F\left(m_1 - l_s, m_1 + l_s + 1, m_1 + m_2 + 1; \frac{1-\tanh u_b}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

avec

$$
l_s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} + E_{PT}} = saV_0. \tag{4.12}
$$

A ce niveau nous pouvons distinguer deux cas différents :

4.2.1 Le premier cas : si $E^2 \leq m^2 + V_0^2$;

Pour être exempt de la condition $x_b^1 > x_a^1$ est afin de trouver la fonction d'onde propageant à gauche et la fonction d'onde propageant à droite il est commode d'employer la méthode bien connue décrite dans [36] et [37]. En première étape nous appliquons le théorème de Cauchy pour écrire $P_s\left(x_b, x_a\right)$ sous forme d'intégrale

$$
P_s\left(x_b, x_a\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\mathcal{P}\left(x_b, x_a, z\right)}{z^2 - \left(E^2 - m^2\right)} 2z dz \tag{4.13}
$$

où le contour d'intégration est un demi-cercle dans la moitié supérieure du plan complexe (Içi $\mathcal{P}\left(x_b, x_a, z\right)$ a la même forme que $P_s\left(x_b, x_a\right)$ avec le changement $E^2 - m^2 = z^2$).

Il est facile de monter que $P_s\left(x_b, x_a\right)$ peut être exprimé par une intégrale sur l'axe réel

$$P_s(x_b, x_a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} 2kdk \frac{\mathcal{P}(x_b, x_a, k)}{E^2 - (k^2 + m^2) + i\epsilon}, \tag{4.14}$$

où

$$\mathcal{P}(x_b, x_a, k) = \mathcal{K}\ \varphi_k(x_b)\, \chi_k(x_a) \tag{4.15}$$

et la quantité $\mathcal{K}$ est une fonction des variables k et k' (dans ce cas $k' = \sqrt{m^2 + V_0^2 - E^2}$)

$$\mathcal{K}(k) = 4a^2 \frac{\Gamma(iak - ak' - l_s)\, \Gamma(iak - ak' + l_s + 1)}{\Gamma(2iak + 1)\, \Gamma(-2ak' + 1)}. \tag{4.16}$$

Les fonctions $\varphi_k(x)$ et $\chi_k(x)$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} &\varphi_k(x) = (1 - y)^{-ak'} (y)^{iak} \\ &F(iak - ak' - l_s, iak - ak' + l_s + 1, 2iak + 1; y), \end{aligned} \tag{4.17}$$

et

$$\begin{aligned} &\chi_k(x) = (1 - y)^{-ak'} (y)^{iak} \\ &F(iak - ak' - l_s, iak - ak' + l_s + 1, -2ak' + 1; 1 - y) \end{aligned} \tag{4.18}$$

où la variable y est donnée par

$$y = \frac{1}{1 + \exp(x/a)} \tag{4.19}$$

En changeant la variable d'intégration dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ de k à $-k$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_s(x_b, x_a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} 2kdk \frac{1}{E^2 - (k^2 + m^2) + i\epsilon} \\ &\quad [K\ \varphi_k(x_b)\, \chi_k(x_a) - K^*\ \varphi_k^*(x_b)\, \chi_k^*(x_a)]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant maintenant la formule (Eq. 5.2.49 dans [39])

$$
\begin{aligned}
&F\left(a,b,a+b-c+1;1-y\right)=A_1\;F\left(a,b,c;y\right)+\\
&B_1\;y^{1-c}F\left(b-c+1,a-c+1,2-c;y\right),
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\Gamma\left(a+b-c+1\right)\Gamma\left(1-c\right)}{\Gamma\left(a-c+1\right)\Gamma\left(b-c+1\right)}\\
B_1 &= \frac{\Gamma\left(c-1\right)\Gamma\left(a+b-c+1\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)},
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

nous pouvons écrire la fonction $\chi_k\left(x\right)$ en fonction de $\chi_k^*\left(x\right)$ et $\varphi_k^*\left(x\right)$, et la fonction $\varphi_k^*\left(x\right)$ en fonction de $\chi_k\left(x\right)$ and $\varphi_k\left(x\right)$;

$$
\begin{aligned}
\chi_k\left(x\right) &= \chi_k^*\left(x\right)+\alpha\;\varphi_k^*\left(x\right)\\
\varphi_k^*\left(x\right) &= \alpha^*\left(\chi_k\left(x\right)-\frac{1}{\alpha}\;\varphi_k\left(x\right)\right),
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

avec

$$
\alpha=\frac{\Gamma\left(-iak-ak'-l_s\right)\Gamma\left(-iak-ak'+l_s+1\right)}{\Gamma\left(-2ak'+1\right)\Gamma\left(-2iak\right)}. \tag{4.24}
$$

Tenant compte de la propriété

$$
K\alpha=-\alpha^*K^*=\frac{2a}{ik}\left|\frac{\Gamma\left(iak-ak'-l_s\right)\Gamma\left(iak-ak'+l_s+1\right)}{\Gamma\left(2iak\right)\Gamma\left(-2ak'+1\right)}\right|^2, \tag{4.25}
$$

nous arrivons à

$$
\begin{aligned}
P_s(x_b, x_a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} 2kdk \frac{1}{E^2-(k^2+m^2)+i\epsilon} \\
&\quad K\alpha\left[\varphi_k^*(x_b)\varphi_k(x_a) + \ \chi_k^*(x_b)\chi_k(x_a)\right].
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Rappelons que la matrice $\frac{1}{2}\left(1+s\gamma^0\right)$ peut être écrite comme produit du spineur U_s et son conjugué $\bar{U}_s$

$$
\frac{1+s\gamma^0}{2} = U_s\bar{U}_s. \tag{4.27}
$$

Ce qui nous permet d'écrire la décomposition de la fonction de Green à énergie fixée G_E comme suite

$$
\begin{aligned}
G_E(x_b, x_a) &= \int_0^{+\infty} 2kdk \frac{1}{E^2-(k^2+m^2)+i\epsilon} \\
&\quad \left[\bar{\psi}_{\rightarrow}(x_b)\psi_{\rightarrow}(x_a) + \ \bar{\psi}_{\leftarrow}(x_b)\psi_{\leftarrow}(x_a)\right]
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

où la fonction d'onde propageant à gauche $\psi_{\rightarrow}(x)$ et la fonction d'onde propageant à droite $\psi_{\leftarrow}(x)$ s'éxpriment en terme des fonctions hypergeométrique

$$
\begin{aligned}
\psi_{\rightarrow}(x) &= U_s \times \mathcal{N} \times (1-y)^{-ak'}(y)^{iak} \\
&\quad F\left(iak-ak'-l_s, iak-ak'+l_s+1, -2ak'+1; y\right),
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{\leftarrow}(x) &= U_s \times \mathcal{N} \times (1-y)^{-ak'}(y)^{iak} \\
&\quad F\left(iak-ak'-l_s, iak-ak'+l_s+1, 2iak+1; 1-y\right)
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

$\mathcal{N}$ étant une constante de normalisation

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2a}{2\pi k}} \left| \frac{\Gamma\left(iak - ak' - l_s\right)\Gamma\left(iak - ak' + l_s + 1\right)}{\Gamma\left(2iak\right)\Gamma\left(-2ak' + 1\right)} \right|. \tag{4.31}$$

Il nous reste de calculer les coéfficients de transmission et de reflection. Pour cela nous utilisons la formule connue (Eq. (9.131.2) [38])

$$\begin{aligned} F\left(a, b, c; y\right) = A\ F\left(a, b, a + b - c + 1; 1 - y\right) + \\ B\ \left(1 - y\right)^{c-a-b} F\left(c - a, c - b, c - a - b + 1; 1 - y\right), \end{aligned} \tag{4.32}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c - a - b\right)}{\Gamma\left(c - a\right)\Gamma\left(c - b\right)} \\ B &= \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(a + b - c\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Il est facile de montrer qu'à la limite $x^1 \to -\infty$, la fonction d'onde propageant à gauche se comporte comme

$$\psi_{\rightarrow}\left(x^1\right) \approx U_s \times \left(A\ e^{ikx^1} + B\ e^{-ikx^1}\right). \tag{4.34}$$

Le coéfficient de reflection est donc égal à

$$\begin{aligned} R &= \left|\frac{B}{A}\right|^2 \\ &= \left|\frac{\Gamma\left(iak - ak' - l_s\right)\Gamma\left(iak - ak' + l_s + 1\right)}{\Gamma\left(-iak - ak' - l_s\right)\Gamma\left(-iak - ak' + l_s + 1\right)}\right|^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Quand $x^1 \to +\infty$, la fonction d'onde propageant à droite a le comportement suivant

$$\varphi_{\rightarrow}\left(x^{1}\right) \approx U_{s} \times N\ e^{-kx^{1}} \tag{4.36}$$

et par consequent le coéfficient de transmission est nul

$$T = 0. \tag{4.37}$$

Notons içi que dans le cas où $E^2 < m^2 + V_0^2$ la fonction d'onde est oscillatoire dans la région $x^1 << 0$ et proportionnelle à un exponentiel decroissant dans la région $x^1 >> 0$. Il y a une certaine ressemblence à la mécanique nonrelativiste (i.e. Equation de Schrödinger avec une barrière de potentiel.)

4.2.2 Le deuxième cas : si $E^2 > m^2 + V_0^2$;

Dans ce cas l'élimination de la condition $x_b > x_a$ et la détermination des états de diffusion à partir de la fonction de Green à énergie fixée peuvent être faite en suivant les mêmes étapes. Cependant que pour $E^2 > m^2 + V_0^2$, on doit prendre $|k'| = \sqrt{E^2 - m^2 - V_0^2}$. Dans notre cas présent l'analogue de l'équation (4.15) est

$$\mathcal{P}\left(x_b, x_a, k, k'\right) = \mathcal{K}\left(k, k'\right) \varphi_{k,k'}\left(x\right) \chi_{k,k'}\left(x\right), \tag{4.38}$$

où les fonctions $\varphi_{k,k'}\left(x\right)$ et $\chi_{k,k'}\left(x\right)$ sont données par

$$\begin{aligned} &\varphi_{k,k'}\left(x\right) = \left(1-y\right)^{iak'}\left(y\right)^{iak} \\ &F\left(iak + iak' - l_s, iak + iak' + l_s + 1, 2iak' + 1; y\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

et

$$\chi_{k,k'}(x) = (1-y)^{iak'}(y)^{iak}$$
$$F\left(iak + iak' - l_s, iak + iak' + l_s + 1, 2iak + 1; 1-y\right), \tag{4.40}$$

$\mathcal{K}(k,k')$ étant une fonction des variables k et k'

$$\mathcal{K}(k,k') = \frac{\Gamma(iak + iak' - l_s)\,\Gamma(iak + iak' + l_s + 1)}{\Gamma(2iak+1)\,\Gamma(2iak'+1)}. \tag{4.41}$$

Changeant la variable d'intégration de k à $-k$ et tenant compte du fait que k' se modifie comme $k' \to -k'$, nous obtenons, pour $P_s(x_b, x_a)$,

$$\begin{aligned} P_s(x_b, x_a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} 2kdk \frac{1}{E^2 - (k^2+m^2) + i\epsilon} \\ &\left[\mathcal{K}(k,k')\ \varphi_{k,k'}(x_b)\,\chi_k(x_a) - \mathcal{K}^*(k,k')\ \varphi^*_{k,k'}(x_b)\,\chi^*_{k,k'}(x_a)\right]. \end{aligned} \tag{4.42}$$

En utilisant la formule (4.21) et la propriété (voire Eq. (91) in[36])

$$z^{r_1}(1-z)^{-r_2} F(r_1 - r_2 + l + 1, r_1 - r_2 - l, 2r_1 + 1; z) =$$
$$z^{r_1}(1-z)^{r_2} F(r_1 + r_2 + l + 1, r_1 + r_2 - l, 2r_1 + 1; z) \tag{4.43}$$

nous pouvons exprimer $\varphi^*_{k,k'}(x)$ en fonction de $\varphi_{k,k'}(x)$ et $\chi_{k,k'}(x)$

$$\varphi^*_{k,k'}(x) = \left(\frac{-\alpha}{\beta}\varphi_{k,k'}(x) + \frac{1}{\beta}\chi_{k,k'}(x)\right) \tag{4.44}$$

et $\chi_{k,k'}(x)$ en fonction de $\varphi^*_{k,k'}(x)$ et $\varphi^*_{k,k'}(x)$

$$\chi_{k,k'}(x) = \left(\frac{k}{k'}\frac{1}{\beta^*}\varphi^*(x) + \frac{\alpha}{\beta^*}\chi^*_{k,k'}(x)\right), \tag{4.45}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\Gamma(2iak+1)\,\Gamma(-2iak')}{\Gamma(iak-iak'-l_s)\,\Gamma(iak-iak'+l_s+1)}\\
\beta &= \frac{\Gamma(2iak')\,\Gamma(2iak+1)}{\Gamma(iak+iak'-l_s)\,\Gamma(iak+iak'+l_s+1)}.
\end{aligned}\tag{4.46}$$

Le noyau $P_s(x_b, x_a)$ devient alors

$$\begin{aligned}
P_s(x_b,x_a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} 2kdk\frac{1}{E^2-(k^2+m^2)+i\epsilon}\\
&\left[\alpha\left(\frac{\mathcal{K}^*}{\beta}+\frac{\mathcal{K}}{\beta^*}\right)\varphi_{k,k'}(x)\,\chi^*_{k,k'}(x_a)+\right.\\
&\left.\frac{k}{k'}\frac{\mathcal{K}}{\beta^*}\;\varphi_{k,k'}(x_b)\,\varphi^*(x)-\frac{\mathcal{K}^*}{\beta}\chi_{k,k'}(x)\,\chi^*_{k,k'}(x_a)\right].
\end{aligned}\tag{4.47}$$

Compte tenu de la propriété

$$\beta\mathcal{K}+\mathcal{K}^*\beta^*=0,\tag{4.48}$$

la fonction de Green à énergie fixée G_E se décompose comme suite

$$\begin{aligned}
G_E(x_b,x_a) &= \int_0^{+\infty} 2kdk\frac{1}{E^2-(k^2+m^2)+i\epsilon}\\
&\left[\bar{\psi}_{\rightarrow}(x_b)\,\psi_{\rightarrow}(x_a)+\;\bar{\psi}_{\leftarrow}(x_b)\,\psi_{\leftarrow}(x_a)\right]
\end{aligned}\tag{4.49}$$

où les états de diffusion $\psi_{\rightarrow}(x)$ et $\psi_{\leftarrow}(x)$ sont données par

$$\begin{aligned}
\psi_{\rightarrow}(x) &= U_s\times\mathcal{N}\times(1-y)^{iak'}(y)^{iak}\\
&\quad F\left(ia(k+k')-l, ia(k+k')+l+1, 2iak+1; y\right),
\end{aligned}\tag{4.50}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{\leftarrow}(x) &= U_s \times \mathcal{N} \times (1-y)^{iak'} (y)^{iak} \\ &\quad F\left(iak + iak' - l, iak + iak' + l + 1, 2iak' + 1; 1 - y\right). \qquad (4.51)\end{aligned}$$

La constante de normalisation $\mathcal{N}$ est dans ce cas

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{2a}{2\pi k}} \left| \frac{\Gamma\left(ia\left(k+k'\right) - l\right) \Gamma\left(ia\left(k+k'\right) + l + 1\right)}{\Gamma\left(2iak\right) \Gamma\left(2iak' + 1\right)} \right|. \qquad (4.52)$$

Pour déduire les coéfficients de transmission et de reflection nous faisons comme dans le cas précédent le comportement asymptotique des fonction de diffusion. Il est facile de montrer que

$$R = \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(ak + ak' + iw\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(ak + ak' - iw\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\left(ak - ak' - iw\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\left(ak - ak' + iw\right)\right)} \right|^2, \qquad (4.53)$$

et

$$T = \frac{1}{k} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(ak + ak' + iw\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(ak + ak' - iw\right)\right)}{\Gamma\left(2iak\right) \Gamma\left(2iak' + 1\right)} \right|^2, \qquad (4.54)$$

où

$$w = saV_0 + \frac{1}{2}. \qquad (4.55)$$

En utilisant, pour les modules des fonctions gammas, les formules bien connues

$$\Gamma\left(x+1\right) = x\Gamma\left(x\right), \qquad (4.56)$$

$$\left|\Gamma\left(iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{y \sinh\left(\pi y\right)}, \qquad (4.57)$$

et

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cosh\left(\pi y\right)}. \tag{4.58}$$

nous obtenons

$$R=\frac{\cosh 2\pi a\left(k-k'\right)+\cos 2\pi w}{\cosh 2\pi a\left(k+k'\right)+\cos 2\pi w} \tag{4.59}$$

et

$$T=\frac{2\sinh\left(2\pi ak\right)\sinh\left(2\pi ak'\right)}{\cosh 2\pi a\left(k+k'\right)+\cos 2\pi w} \tag{4.60}$$

Notons que R est toujours inferieur à un et la relation $R+T=1$ est assurée.

De plus, en prenant la limite $a\to 0$ nous obtenons le cas particulier du potentiel pseudoscalaire "step"

$$V_p\left(x\right)=V_0\,\boldsymbol{\theta}\left(x\right), \tag{4.61}$$

dont les coéfficients R et T sont donnés par

$$R=\frac{V_0^2+\left(k-k'\right)^2}{V_0^2+\left(k+k'\right)^2}, \tag{4.62}$$

et

$$T=\frac{4kk'}{V_0^2+\left(k+k'\right)^2}. \tag{4.63}$$

Les expressions (4.62) et (4.63) coincident exactement avec celles obtenues dans [22].

4.3 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié la diffusion de la particule de Dirac par un potentiel pseudoscalaire à (1+1) dimensions. Pour une forme bien définie de la barrière de potentiel la fonction de Green a été réduite au propagateur connu de Rosen-Morse. La décomposition spectrale de la fonction de Green est obtenue et les fonctions de diffusion sont déterminées. Les coefficients de transmission et de réflection sont également déterminés.

Pour $E^2 > m^2 + V_0^2$, nous avons montré que $\psi\left(x^1 >> 0\right)$ est toujours un exponentiel decroissant, au contraire du cas d'un potentiel vecteur où $\psi\left(x^1 >> 0\right)$ est un exponentiel oscillant. Il y a donc une certaine ressemblance à la mécanique quantique nonrelativistic, à savoir, le paradoxe du Klein n'apparaît pas. Cette conclusion est la même que celle de la reference [22]

De plus, l'intervalle entre les énergies positives et les énergies négatives est $]-m^*, +m^*[$ pour $x^1 << 0$ mais pour $x^1 >> 0$, cette intervalle sera $]-m^*, +m^*[$, avec $m^* = \sqrt{m^2 + V_0^2}$. Ceci signifie qu'un état rempli de la mer du Dirac d'un côté de la barrière ne peut pas percer un tunnel pour être un état de particules à l'autre côté et par conséquent la création de paire de particule-antiparticle ne peut y avoir lieu.

Chapitre 5

Cas d'un champ pseudoscalaire dépendant du variable $\left(k_\mu x^\mu\right)$

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous suggerons de trouver la solution par les intégrales de chemins de l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires dans un espace-temps à (3+1) dimensions. En première étape nous établissons une généralisation de la formulation des intégrales de chemins utilisée dans les chapitres précédents suivant la représentation globale. Ensuite nous considérons le cas d'une onde plane pseudoscalaire qui ne dépend que du produit $(k.x)$. Dans ce cas nous montrons qu'après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green correspondante peut être exprimée au moyen des intégrales bosoniques. Les propriétés de l'onde plane rendent le problème facile à intégrer. Ainsi nous utilisons une identité afin de reduire le problème quadridimensionnel au probleme unidimensionnel. Enfin deux cas différents sont explicitement discutés ; Pour le cas de $k^2 \neq 0$, les calculs se ramènent à ceux du premier chapitre. Pour le cas où $k^2 = 0$, nous montrons que l'intégration sur les variables bosoniques est simple. La forme analytique et éxacte de la fonction de Green peut être achevée rapidement ainsi que les fonctions d'ondes correspondantes.

5.2 Formulation du problème

Comme nous avons vu au premier chapitre, dans le cas d'un champs pseudoscalaire, la procedure de rendre l'opérateur associé à l'équation de Dirac homogène en matrices gamma ne fonctionne pas. Il est alors difficile de construire une représentation locale en utilisant un temps propre supersymétrique. Pour étudier le mouvement de la particule de Dirac par l'approche des intégrales de chemins, il est commode de suivre la projection globale à partir de l'équation qu'en satisfait le propagateur $S^c(x_b, x_a)$

$$\left[\gamma^\mu P_\mu - \gamma^5 V_p(x) - m\right] S^c(x_b, x_a) = -\,\delta^4(\,x_b - x_a)\,. \tag{5.1}$$

Il est bien connu que $S^c(x_b, x_a)$ peut être présenté formellement par l'élément de matrice d'un operateur $\mathbb{S}^c$

$$S^c(x_b, x_a) = \langle x_b | \mathbb{S}^c | x_a \rangle , \tag{5.2}$$

avec

$$\mathbb{S}^c = \frac{1}{K_-} = K_+ \frac{1}{K_- K_+} \tag{5.3}$$

Les opérateurs K_- et K_+ sont

$$K_{\pm} = \left[\gamma^\mu P_\mu - \gamma^5 V_p(x) \pm m \right] . \tag{5.4}$$

Tenant compte de $[\gamma^m, \gamma^n]_+ = 2\eta^{mn}$, avec $m, n = \overline{0,3}, 5$ et η^{mn}= diag(1,-1,-1,-1,-1), le produit $K_- K_+$ s'arrange alors comme suite

$$K_- K_+ = P^2 - m^2 - V_p^2(x) + i\frac{1}{2} F_{mn} \gamma^m \gamma^n \tag{5.5}$$

où le tenseur antisymétrique F_{mn}, qui peut être considéré comme une matrice, est défini par

$$\begin{aligned} F_{5\mu} &= -F_{\mu 5} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} V_p(x), \\ F_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pour avoir la représentation globale nous utilisons la relation de ferméture $\int dx \, |x\rangle \langle x| = 1$. Le propagateur $S^c(x_b, x_a)$ s'éxprime alors au moyen d'une nouvelle fonction de Green

$$S^c(x_b, x_a) = \left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_b^\mu} - \gamma^5 V_p(x_b) + m \right] G^c(x_b, x_a) . \tag{5.7}$$

Içi l'opérateur $[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^5 V_p(x) + m]$ élimine les états superflus causé par le produit $K_- K_+$ en (5.5).

La fonction de Green $G^c(x_b, x_a)$, que nous proposons à calculer par la méthode des intégrale des chemins, a la forme en exponentiel suivante

$$G^c(x_b,x_a)=i\int\limits_0^\infty d\lambda\,\langle x_b|\exp\left(-i\mathcal{H}(\lambda)\right)|x_a\rangle\,, \tag{5.8}$$

où

$$\mathcal{H}(\lambda)=\lambda\left(-P^2+m^2+V_p^2(x)-\frac{i}{2}F_{mn}\gamma^m\gamma^n\right). \tag{5.9}$$

Comme au cas des potentiels unidimentionnels, nous pouvons obtenir pour $G^c(x_b,x_a)$ une représentation path integral en considérant les mêmes étapes. Le résultat est

$$\begin{aligned}G^c=&\exp\left(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right)\int\limits_0^\infty d\lambda_0\int Dx\int Dp\int D\lambda\int D\pi\int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta}\mathcal{D}\psi\,\times\\&\exp\left\{i\int_0^1 d\tau\left[\lambda\left(p^2-m^2-V_p^2(x)+2iF_{mn}\psi^m\psi^n\right)\right.\right.\\&\left.\left.-i\psi_n\dot{\psi}^n+p.\dot{x}+\pi\dot{\lambda}\right]+\psi_n(1)\,\psi^n(0)\right\}\Big|_{\theta=0},\end{aligned} \tag{5.10}$$

où la mesure $\mathcal{D}\psi$ est toujours donnée par l'équation (2.27) et les variables θ^n and ψ^n sont des grassmannienne.

Notons qu'en effectuant l'intégration sur les impulsions et en separant le terme de fixation de jauge $\pi\dot{\lambda}$ et terme $\psi_n(1)\,\psi^n(0)$ nous otenons l'action supersymétique

$$\mathcal{A}=\int_0^1\left[-\frac{\dot{x}^2}{4\lambda}-\lambda V_p^2(x)-i\psi_n\dot{\psi}^n+2i\lambda F_{mn}\psi^m\psi^n\right]d\tau, \tag{5.11}$$

qui se ressemble à l'action de Berezin-Marinov [10] [11] [12] [13].

A partir de cette action nous pouvons deduire les équations classique d'Euler-Lagrange

$$\frac{\ddot{x}_\mu}{2\lambda}-2\lambda V_p(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}V_p(x)+2\lambda i\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}F_{mn}\right)\psi^m\psi^n=0, \tag{5.12}$$

$$-2i\dot{\psi}_m+4i\lambda F_{mn}\psi^n=0. \tag{5.13}$$

Ayant montré comment formuler le problème de la particule de Dirac en intéraction avec un champ pseudoscalaire dans le cadre des intégrales de chemins de Feynman-Beresin, examinons notre méthode par exemple explicite.

5.3 Application

Pour illustrer la méthode présentée choisissons pour le champ pseudoscalaire la forme suivante

$$V_p(x) = gf(k.x), \tag{5.14}$$

où $f(\phi)$ est une fonction arbitraire de la variable $\phi = k.x$, et k_μ est le vecteur de propagation. Dans ce cas le tenseur antisymétrique F_{mn} sera donné par

$$F_{mn} = gf'(k.x)\,\mathfrak{f}_{nm}, \tag{5.15}$$

avec

$$\mathfrak{f}_{5\mu} = -\mathfrak{f}_{\mu 5} = k_\mu, \quad \mathfrak{f}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.16}$$

Pour commencer, fixons d'abord dans l'équations (5.10) la jauge sur le temps propre λ en effectuant l'intégrale fonctionnelle sur π et λ; La fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{aligned} G^c = \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \int_0^\infty d\lambda \int Dx \int Dp \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \times \\ \exp\left\{i\int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2(x)\right) + p.\dot{x}\right]\right\} \mathcal{I}(x,\lambda,\theta)\Big|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

où le facteur de spin $\mathcal{I}(x,\lambda,\theta)$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x,\lambda,\theta) = \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \times \\ \exp\left\{\int_0^1 d\tau \left[\psi_n\dot{\psi}^n - 2\lambda F_{mn}\psi^m\psi^n\right] + \psi_n(1)\,\psi^n(0)\right\}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Intégrons maintenant sur les variables de Grassmann, pour exprimer G^c seulement par des intégrales de chemins bosoniques. Comme les variables Grassmannienne ψ obéissent à la condition aux bornes $\psi(0) + \psi(1) = \theta$, il est commode pour calculer $\mathcal{I}(x, \lambda, \theta)$, de changer ψ par ξ, où

$$\psi = \frac{1}{2}\xi + \frac{\theta}{2}. \tag{5.19}$$

Les nouvelles variables ξ obéissent à la condition

$$\xi(0) + \xi(1) = 0. \tag{5.20}$$

Ensuite, afin d'avoir une forme familière par rapport aux variables ξ, nous changeons le temps propre τ en σ, avec

$$d\sigma = f'(k.x)\, d\tau. \tag{5.21}$$

Le facteur $\mathcal{I}(x, \lambda, \theta)$ est donnée alors au moyen d'une intégrale de Grassmann Gaussienne

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, \lambda, \theta) &= \exp\left(-\frac{g}{2}\tilde{\lambda}\mathfrak{f}_{nm}\ \theta^n\theta^m\right)\int \mathcal{D}\xi \\ &\exp\left\{\int_0^1 \left[\frac{1}{4}\xi_n\dot{\xi}^n - \frac{1}{2}g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}_{nm}\ \xi^n\xi^m - g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}_{nm}\ \theta^n\xi^m\right] d\sigma\right\}\Bigg|_{\theta=0}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

avec

$$\tilde{\lambda} = \lambda\int_0^1 f'(k.x)\, d\tau. \tag{5.23}$$

Comme $\mathfrak{f}_{nm}$ est constant, $\mathcal{I}(x, \lambda, \theta)$ se calcule. Le résultat est

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, \lambda, \theta) &= \det{}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{M(g)}{M(g=0)}\right]\exp\left(-\frac{g}{2}\tilde{\lambda}\mathfrak{f}_{nm}\ \theta^n\theta^m\right) \\ &\quad \exp\left\{\int_0^1 \left[\mathcal{J}^m(\sigma')\left(M^{-1}\right)_{mn}\mathcal{J}^n(\sigma)\right] d\sigma' d\sigma\right\}, \end{aligned} \tag{5.24}$$

où la matrice M et le courant $\mathcal{J}^n$ sont donnés par

$$M_{mn}(g) = \eta_{mn}\delta'(\sigma - \sigma') - 2g\mathfrak{f}_{mn}\delta(\sigma - \sigma'), \tag{5.25}$$

et

$$\mathcal{J}^n = g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}_{nm}\ \theta^n. \tag{5.26}$$

Le determinant dans (5.24) peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \det\left[\frac{M(g)}{M(0)}\right] = \\ & \exp\left\{\mathrm{Tr}\left[\log M(g) - \log M(0)\right]\right\} = \\ & \exp\left\{-\,\mathrm{Tr}\int_0^g dg' \int d\sigma \int d\sigma' \mathcal{R}\left(g';\sigma,\sigma'\right)\mathfrak{f}\right\}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

où $\mathcal{R}_{mn}\left(g;\sigma,\sigma'\right)$ est la solution de l'équation suivante [24] [25]

$$\frac{d}{d\sigma}\mathcal{R}_{mn}\left(g;\sigma,\sigma'\right) - g\mathfrak{f}_m{}^l\mathcal{R}_{ln}\left(g;\sigma,\sigma'\right) = \eta_{mn}\delta\left(\sigma-\sigma'\right), \tag{5.28}$$

avec la condition initiale

$$\mathcal{R}_{mn}\left(g;1,\sigma\right) = -\mathcal{R}_{mn}\left(g;0,\sigma\right) \quad ; \ \forall\sigma\in[0,1] \tag{5.29}$$

En écrivant $\mathcal{R}$ sous sa forme explicite

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1}{2}\eta\varepsilon\left(\sigma-\sigma'\right) - \frac{1}{2}\tanh\left(g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}\right)\right)\exp\left[g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}\left(\sigma-\sigma'\right)\right], \tag{5.30}$$

et en utilisant la propriété

$$\exp\left[\mathrm{Tr}\left(\ln A\right)\right] = \det\left(A\right), \tag{5.31}$$

nous arrivons à

$$\det\left[\frac{M(g)}{M(0)}\right] = \det\left(\cosh g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}\right) \tag{5.32}$$

Le facteur $\mathcal{I}\left(x,\lambda,\theta\right)$ se rearrange alors comme suite

$$\mathcal{I}\left(x,\lambda,\theta\right) = \det{}^{\frac{1}{2}}\left(\cosh g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}\right)\left(1 - B_{nm}\theta^n\theta^m\right), \tag{5.33}$$

où le tenseur B_{nm} est donné par

$$B = \frac{1}{2}\tanh\left(g\tilde{\lambda}\mathfrak{f}\right). \tag{5.34}$$

A ce niveau nous pouvons envisager deux situations differentes ;

5.3.1 Le premier cas : $k^2 \neq 0$

Dans ce cas, tenant compte de $\mathfrak{f}^3 = k^2\mathfrak{f}$, nous obtenons sans difficulté

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(x,\lambda,\theta) = \\ &\cos\left(g\left|k\right|\tilde{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(g\left|k\right|\tilde{\lambda}\right)\frac{k_\mu}{|k|}\left(\theta^\mu\theta^5 - \theta^5\theta^\mu\right)\end{aligned} \tag{5.35}$$

Donc le facteur de spin prend la forme suivante

$$\begin{aligned}&\exp\left(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right)\mathcal{I}(x,\lambda,\theta)\Big|_{\theta=0} = \\ &\sum_{s=\pm1}\frac{1}{2}\left(1 - s\frac{i\hat{k}\gamma^5}{|k|}\right)\exp\left(i\lambda s\left|k\right|\int_0^1 V_p'(k.x)\,d\tau\right).\end{aligned} \tag{5.36}$$

où nous avons utilisé la notation suivante $\hat{k} = \not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ et $|k| = \sqrt{-k_0^2 + \vec{k}^2} = \sqrt{-k^\mu k_\mu}$.

La fonction de Green G^c est ainsi

$$\begin{aligned}G^c = &\sum_{s=\pm1}\frac{1}{2}\left(1 - s\frac{i\hat{k}\gamma^5}{|k|}\right)\int_0^\infty d\lambda\int Dx\int Dp \\ &\exp\left\{i\int_0^1 d\tau\left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2(k.x) + s\left|k\right|V_p'(k.x)\right) + p.\dot{x}\right]\right\}\Big|_{\theta=0}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Pour continuer nous exploitons les propriétés de la forme choisie pour le potentiel pseudoscalaire en incorporant l'identité [40]

$$\int d\phi_a d\phi_b\ \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) \int D\phi Dp_\phi \exp\left\{ i \int_0^1 d\tau p_\phi \left(\dot{\phi} - k\dot{x}\right)\right\} = 1, \tag{5.38}$$

qui rend la variable $k.x$ indépendant du quadri-vecteur de position x. En suite, en faisant le changement $p - p_\phi k \to p$, il devient possible d'effectuer l'intégration sur x et p. L'intégration sur x donne $\delta\left(\dot{p}\right)$, qui signifie que p est constant. La fonction de Green G^c est donc

$$\begin{aligned}
G^c = & \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{2}\left(1 - s\frac{i\hat{k}\gamma^5}{|k|}\right) \int_0^\infty d\lambda \\
& \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp\left[ip\left(x_b - x_a\right) + i\lambda\left(p^2 - m^2\right)\right] \\
& \int d\phi_a d\phi_b\ \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) \int D\phi Dp_\phi \\
& \exp\left\{ i \int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(k^2 p_\phi^2 - V_p^2(\phi) + s|k| V_p'(\phi)\right) + p_\phi\left(\dot{\phi} + 2\lambda pk\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Effectuant l'intégration sur p_ϕ, nous obtenons une expression simple pour G^c

$$\begin{aligned}
G^c = & \sum_{s=\pm 1} \frac{1}{2}\left(1 - s\frac{i\hat{k}\gamma^5}{|k|}\right) \int \frac{dp}{(2\pi)^4} e^{ip(x_b - x_a)} \times \\
& \int_0^{+\infty} d\lambda \exp\left[i\lambda\left(p^2 - m^2 - \frac{(p.k)^2}{k^2}\right)\right] \times \\
& \int d\phi_a d\phi_b\ \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) K_s\left(\phi_b, \phi_a, \lambda\right).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

où

$$\begin{aligned}
K_s\left(\phi_b, \phi_a, \lambda\right) = & \exp\left\{-i\frac{p.k}{k^2}\left(\phi_b - \phi_a\right)\right\} \\
& \int D\phi \exp\left\{ i \int_0^\lambda d\tau \left[\left(\frac{\dot{\phi}^2}{4|k|^2} - V_p^2(\phi) + s|k| V_p'(\phi)\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Le problème se ramène au propagateur relatif à la particule de Schrödinger soumise à un potentiel effectif supersymétrique $U(\phi) = V_p^2(\phi) - s|k|V_p'(\phi)$. Alors le problème à (3+1) dimensions se ramène tout simplement au calcul d'un propagateur unidimensionnel. En d'autre terme, le mouvement du fermion dans les (3+1) dimensions est projeté le long du vecteur de propagation du champ k.

De plus, si nous prenons $k_\mu = (0, -1, 0, 0)$ nous revenons au cas du potentiel pseudoscalaire unidimensionnel étudié au premier chapitre ($V_p(x) = V_p(x^1)$). En faisant une intégration sur ϕ_a dans (5.40) suivie par une intégration sur p^1et ϕ_b nous obtenons

$$\begin{aligned} G^c = & \sum_{s=\pm1} \frac{1}{2}\left(1 - s\frac{i\hat{k}\gamma^5}{|k|}\right) \times \\ & \int \frac{dp^0}{2\pi}\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\left[p^0\left(x_b^0 - x_a^0\right) - p_\perp(x_{\perp b} - x_{\perp a})\right]} \times P_s\left(x_b^1, x_a^1, \lambda\right), \end{aligned} \tag{5.42}$$

où

$$p_\perp = \left(p^2, p^3\right) \equiv (p_y, p_z), \tag{5.43}$$

et

$$x_\perp = \left(x^2, x^3\right) \equiv (y, z) \tag{5.44}$$

Le noyau $P_s(x_b^1, x_a^1)$ est le propagateur d'une la particule nonrelativiste en interaction avec un potentiel supersymétrique ;

$$\begin{aligned} P_s\left(x_b^1, x_a^1\right) = & \int_0^{+\infty} d\lambda \exp\left[i\lambda\left(p_0^2 - p_\perp^2 - m^2\right)\right] \\ & \int Dx^1 \exp\left\{i\int_0^1 d\tau\left[\left(\frac{\left(\dot{x}^1\right)^2}{4\lambda} - \lambda V_p^2\left(x^1\right) + s\lambda V_p'\left(x^1\right)\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

5.3.2 Le deuxième cas : $k^2 = 0$

Dans le cas où $k^2 = 0$, il est facile de montrer que $\mathfrak{f}^3 = 0$ et le tenseur B prend la forme simple suivante

$$B = \frac{1}{2}\tilde{\lambda}\mathfrak{f}. \tag{5.46}$$

Le quantité $\mathcal{I}(x, \lambda, \theta)$ est alors

$$\mathcal{I}(x, \lambda, \theta) = \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} k_\mu \left(\theta^\mu \theta^5 - \theta^5 \theta^\mu\right)\right). \tag{5.47}$$

et le facteur de spin est par conséquent

$$\exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n}\right) \mathcal{I}(x, \lambda, \theta)\Big|_{\theta=0} = 1 + \hat{k}\ \gamma^5 \lambda \int_0^1 V_p'(k.x)\, d\tau. \tag{5.48}$$

La fonction de Green G^c s'exprime alors en fonction des intégrales de chemins bosoniques

$$\begin{aligned} G^c &= \int_0^\infty d\lambda \int Dp \int Dx\ \left[1 + \hat{k}\ \gamma^5 \lambda \int_0^1 V_p'(k.x)\, d\tau\right] \times \\ &\quad \exp\left\{i \int_0^1 d\tau \lambda \left(p^2 - m^2 - V_p^2(x)\right) + p\dot{x}\right\}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Comme précédemment en incorporant l'identité (5.38) et en faisant le changement $p - p_\phi k \to p$, nous obtenons

$$\begin{aligned} G^c &= \int_0^\infty d\lambda \int d\phi_a d\phi_b\ \delta(\phi_a - k.x_a) \int D\phi D p_\phi \int Dx \int Dp \\ &\quad \left[1 + \hat{k}\ \gamma^5 \lambda \int_0^1 V_p'(\phi)\, d\tau\right] \times \\ &\quad \exp\left\{i \int_0^1 d\tau \left[\lambda \left(p^2 - m^2 - V_p^2(\phi)\right) + p_\phi \left(\dot{\phi} + 2\lambda p k\right) + p\dot{x}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

A ce moment nous pouvons effectuer l'intégration sur x et p. Le résultat de cette intégration est

$$\begin{aligned} G^c &= \int_0^\infty d\lambda \int d\phi_a d\phi_b \, \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip.(x_b - x_a)} \\ & \int D\phi Dp_\phi \left[1 + \hat{k}\,\gamma^5 \lambda \int_0^1 V_p'(\phi)\, d\tau\right] \times \\ & \exp\left\{ i \int_0^1 d\tau \left[\lambda\left(p^2 - m^2 - V_p^2(\phi)\right) + p_\phi\left(\dot{\phi} + 2\lambda pk\right) + p\dot{x}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Il nous reste d'intégrer sur les variables de l'onde pseudoscalaire. L'intégration sur la variable p_ϕ nous donne la fonctionnelle delta $\delta\left(\dot{\phi} + 2\lambda pk\right)$ qui est reliée directement à l'équation du mouvement classique projetée le long du vecteur de l'onde pseudoscalaire. Il est évident que

$$d\tau = -\frac{d\phi}{2\lambda pk}. \tag{5.52}$$

En effectuant l'intégration sur la variable ϕ nous obtenons l'expression finale de la fonction de Green G^c

$$\begin{aligned} G^c &= \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left\{i\lambda\left(p^2 - m^2\right) + ip.\left(x_b - x_a\right)\right\} \\ & \exp\left\{ i \frac{1}{2pk} \int_{k.x_a}^{k.x_b} V_p^2(\phi)\, d\phi \right\} \times \left[1 - \frac{\hat{k}\,\gamma^5}{2pk}\left(V_p\left(k.x_b\right) - V_p\left(k.x_a\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Pour obtenir les fontions d'ondes nous symétrisons d'abord cette expression en utilisant la propriété

$$\left(1 + \frac{\hat{k}\,\gamma^5}{2pk}(a - b)\right) = \left(1 + \frac{\hat{k}\,\gamma^5}{2pk} a\right)\left(1 - \frac{\hat{k}\,\gamma^5}{2pk} b\right) \tag{5.54}$$

et nous faisons ensuite l'intégration sur le parametre de Schwinger λ

$$\begin{aligned} G^c &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip.(x_b-x_a)} \left(1-\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk} V_p(k.x_b)\right) \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon} \\ & \exp\left\{i\frac{1}{2pk}\int_{k.x_a}^{k.x_b} V_p^2(\phi)\,d\phi\right\}\left(1+\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk}V_p(k.x_a)\right). \end{aligned} \tag{5.55}$$

Nous changeons maintenant p par $-p$ dans l'équation (5.55) et nous incorporons la dernière expression de G^c dans l'équation (5.7) pour avoir l'expression finale du propagateur $S^c(x_b, x_a)$

$$\begin{aligned} S^c(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip.(x_b-x_a)} \left(1+\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk} V(k.x_b)\right) \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \\ & \left(1-\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk}V(k.x_a)\right)\exp\left\{-i\frac{1}{2pk}\int_{k.x_a}^{k.x_b} V_p^2(\phi)\,d\phi\right\}. \end{aligned} \tag{5.56}$$

En dernière étape nous effectuons l'intégration sur l'énergie p^0 et nous utilisons les projecteurs des états d'énergie positive et d'énergie negative [41]

$$\Lambda_+(p) = \sum_{\pm s} u(p,s)\,\bar{u}(p,s) = \frac{\hat{p}+m}{2m}, \tag{5.57}$$

et

$$\Lambda_-(p) = -\sum_{\pm s} v(p,s)\,\bar{v}(p,s) = \frac{-\hat{p}+m}{2m}. \tag{5.58}$$

Le propagateur $S^c(x_b, x_a)$ se décompose alors comme suite

$$\begin{aligned} S^c(x_b,x_a) &= -i\theta(t_b-t_a)\int d^3p \sum_{\pm s} \psi^{(+)}_{s,\mathbf{p}}(x_b)\,\bar{\psi}^{(+)}_{s,\mathbf{p}}(x_a) \\ & +i\theta(t_a-t_b)\int d^3p \sum_{\pm s} \psi^{(-)}_{s,\mathbf{p}}(x_b)\,\bar{\psi}^{(-)}_{s,\mathbf{p}}(x_a), \end{aligned} \tag{5.59}$$

où

$$p^0 = \left(\vec{p}^2+m^2\right)^{1/2}, \tag{5.60}$$

et les fonctions d'onde son données par

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}_{s,\mathbf{p}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left[1+\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk}V_p(x)\right]u(p,s)\\ &\quad\times\exp\left\{-ip.x-\frac{i}{2pk}\int_0^{k.x}V_p^2(\phi)\,d\phi\right\},\end{aligned}\tag{5.61}$$

et

$$\begin{aligned}\psi^{(-)}_{s,\mathbf{p}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{1/2}\left[1-\frac{\hat{k}\ \gamma^5}{2pk}V_p(x)\right]v(p,s)\\ &\quad\times\exp\left\{ip.x-\frac{i}{2pk}\int_0^{k.x}V_p^2(\phi)\,d\phi\right\}.\end{aligned}\tag{5.62}$$

Notons que ces solutions ont une structure similaire à celle des solutions de l'équation de Dirac avec une onde plane ordinaire (champ de photons) [40].

5.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons obtenu la solution de l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires dans un espace-temps à (3+1) dimensions en utilisant l'approche des intégrales de chemins supersymétriques. Nous avons établi d'abord une généralisation de la formulation des intégrales de chemins utilisée dans les chapitres précédents suivant la représentation globale. Ensuite nous avons considéré le cas de l'onde plane pseudoscalaire. Il a été montré que pour cette interaction et après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green relative peut être exprimée par des intégrales bosoniques. Comme le champ de l'onde plane ne dépond que du produit $(k.x)$ et à l'aide d'une identité le problème était facile à intégrer. Pour le cas où $k^2 = 0$, une forme analytique et éxacte pour la fonction de Green est achevée ainsi que les fonctions d'ondes relatives au problème.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans cette thèse nous pouvons voir qu'il a été principalement question d'étude du mouvement de la particule de Dirac en interaction avec un champ pseudoscalaire de Lorentz par le formalisme des intégrales de chemins et ceci suivant une formulation supersymétrique dans laquelle le mouvement de la particule est décrit par deux variables : l'une est relative à la position extérieure, et l'autre est Grassmannienne relative au mouvement interne (dynamique de spin). A cause de la présence de la matrice gamma 5, il a fallu utiliser la représentation globale.

Du point de vue descriptive, le formalisme est à peu prés maîtrisé (construction, invariance,...). Par contre, en raison du couplage du mouvement du spin avec le mouvement extérieur de la particule et à cause de la présence de la matrice γ^5, la solution de problèmes avec des champs pseudoscalaires dans le cas général restait difficile à obtenir.

C'est ainsi que nous avons commencé par traiter le problème de la particule de Dirac soumise à l'action des potentiels unidimensionnels admettant des solutions exactes. Apres avoir formulé le problème suivant la représentation globale nous avons montré que le calcul de la fonction de Green dans ce cas se ramène à un problème d'une particule de Schrödinger interagie par un potentiel supersymétrique effictif. La méthode est examinée en étudiant quelques exemples.

Connaissant les difficultés et ayant appris à les contourner on s'est intéressé dans une deuxième étape au même problème, mais en considérant une approche semiclassique. Apres avoir mis la formulation générale du problème nous avons considéré le potentiel $V(x) = \alpha x^{\delta}$, comme un exemple. Dans ce cas, la nature supersymétrique de l'équation de Dirac a été mise en évidence.

Ayant trouvé la solution des problèmes avec des états liés nous avons considéré dans une troisième étape la diffusion d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ par un potentiel pseudoscalaire. Pour une barriere du potentiel dont la forme est bien définie, nous avons calculé la fonction de Green relative au problème et les coefficients de transmission et de reflection.

Les problèmes rencontrés durant la troisième étape ayant été surmontés, le problème de la particule de Dirac soumise à l'action du potentiel pseudoscalaire est finalement reconsidéré, dans un espace temps à (3+1) dimensions. Au début nous avons généralisé la formulation des intégrales de chemins utilisée dans les chapitres précédents toujours suivant la représentation globale. Ensuite nous avons considéré le cas d'une onde plane pseudoscalaire qui ne dépend que du produit $(k.x)$. Dans ce cas nous avons montré qu'après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green relative peut être exprimée par des intégrales bosoniques. Enfin deux cas différents sont explicitement discutés ;

1) le cas de $k^2 \neq 0$,

2) et le cas où $k^2 = 0$,

Tous les calculs obtenus ont été soit testés soit comparés avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

Nous pouvons alors affirmer que ce formalisme assez complexe est maintenant presque maîtrisé et que le but de la thèse est abouti.

Bibliographie

[1] Feynman R. P. and Hibbs A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc Graw Hill, New York, 1965).

[2] D.C. Khandekar and S.V. Lawande PHYS. REP. 137, (1986) 115

[3] Schulman L. S., Techniques and Applications of Path Integration (John Wiley, New York, 1981) .

[4] Kleinert H., Path Integral in quantum mechanics, statistics and polymer physics (World Scientific, Singapore 1990).

[5] Chaichian M. and Demichev A., Path integrals in physics. **Vol.1** : Stochastic processes and quantum mechanics (IOP Publisher, Bristol UK 2001).

[6] Chaichian M. and Demichev A., Path integrals in physics. **Vol.2** : Quantum field theory, statistical physics and other modern applications, (IOP Publisher, Bristol UK 2001).

[7] Hawking S. W. and Hartle J. B., Phys. Rev. D **13**, (1976) 2188.

[8] Chitre D. M. and Hartle J. B., Phys. Rev D. **16**, (1977) 251.

[9] Fradkin E. S. and Gitman D. M., Phys. Rev. D **44** , (1991) 3220

[10] Berezin F. A., Marinov M. S., JETP Lett. **21** (1975) 320.

[11] Berezin F. A., Marinov M. S., Ann. Phys. **104** (1977) 336.

[12] Brink L. Deser S., Zumino B., Di Vecchia P. and Howe P., Phys. Lett. B **64** (1976) 435

[13] Brink L., Di Vecchia P. and Howe P., Nucl. Phys. B **118** (1977) 76.

[14] Gitman D. M., Nucl. Phys. B **488**, (1997) 490

[15] Geyer B., Gitman D. M. and Shapiro I. L., Int. J. Mod. Phys. A **15,** (2000) 3861

[16] Alexandrou C., Rosenfelder R. and Schreiber A. W., Phys. Rev. A **59**, (1999)3

[17] V. M. Villalba, Il Nuovo Cimento, B**112** (1997)109

[18] A. S. de Castro, Phys. Lett. A **318** (2003) 340.

[19] L. B. Castro and A. S. de Castro, J. Phys. A : Math. Theor. 40 (2007) 263–270

[20] A. Sinha and P. Roy, Mod. Phys. Lett. A **20,** (2005) 2377

[21] D.G.C. McKeon, and G. Van Leeuwen, Mod. Phys. Lett. A **17,** (2002) 1961.

[22] A.S. de Castro, Phys. Lett. A **309** (2003) 40.

[23] F. Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory (Wiley-Interscience, New York, 1993).

[24] Gitman D. M. and Zlatev S .I., Phys. Rev. D **55** (1997) 7701 ;

[25] Gitman D. M., Zlatev S. I. and Cruz W. D., Brazilian J. Phys. **26** (1996) 419.

[26] Polyakov A. M., Gauge Fields and Strings (Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1987)

[27] C. Grosche, Nuovo Cimento B **108** (1993) 1365

[28] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. 251, (1995) 267

[29] E. Witten, Nucl. Phys. B **188** (1981) 513.

[30] A. Comtet, A. Bandrauk and D. K. Campbell, Phys. Lett. B **150** (1985)159.

[31] A. Inomata and G Junker, Lectures in Path Integration : Trieste 1991eds. H. A. Cerdeira et al (Singapore : World Scientific1993)

[32] A. Inomata and G. Junker Phys. Rev. A **50** (1994) 3638

[33] C. M. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics (New York, Springer 1990)

[34] J. W. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, Vol. 51 (Princeton University Press, Princeton, 1963).

[35] A. Khare, Phys. Lett. B **161**(1985) 131.

[36] H. Kleinert and I. Mustapic, J. Math. Phys. **33** (1992) 643.

[37] L. Chetouani, L. Guechi, T .F. Hammann and A. Lecheheb, J. Math. Phys. **34** (1993) 1257.

[38] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, N-Y,(1979).

[39] P. M. Morse and H. Feshbach, Method of Theoretical Physics Vol. I.,Mc- Graw- Hill, N- Y, (1953)

[40] Zeggari S., Boudjedaa T. and Chetouani L., Physica Scripta **64** (2001) 285.

[41] Bjorken J. D. and Drell S. D., Relativistic Quantum Fields (Mc Graw Hill, New York, 1965).

Techniques des intégrales de chemins appliquées à la solution des problèmes relativistes

Résumé

Il a été principalement dans cette thèse question d'étude de mouvement de particule de Dirac en interaction avec un champ pseudoscalaire de Lorentz par le formalisme des intégrales de chemins et ceci suivant une formulation supersymétrique dans laquelle le mouvement de la particule est décrit par deux variables: l'une est relative à la position extérieure, et l'autre est Grassmannienne relative au mouvement interne (dynamique de spin).

Dans une première étape des potentiels pseudoscalaires unidimensionnels admettant des solutions exactes ont été considérés. Il a été montré qu'après intégration sur les variables de Grassmann, le calcul de la fonction de Green dans ce cas se ramène à un problème d'une particule de Schrödinger soumise à un potentiel effectif supersymétrique. Quelques exemples particuliers ont été étudiés.

Dans une deuxième étape, l'approximation semi-classique a été utilisée pour obtenir la solution de l'équation de Dirac avec des potentiels pseudoscalaires unidimensionnels. Une règle de quantification semi-classique a été dérivée pour n'importe quel potentiel. Il a été considéré comme exemple le potentiel polynomial (en puissance de x).

La troisième partie est consacrée à l'étude de la diffusion d'une particule de Dirac par un potentiel pseudoscalaire en utilisant l'approche "*Path-Integral*". Pour une barrière du potentiel dont la forme est bien définie, la fonction de Green relative au problème a été calculée ainsi que les coefficients de transmission et de réflexion.

Dans une quatrième étape, une interaction de type encore pseudoscalaire est considérée dans un espace plus réaliste à (3+1) dimensions. La forme choisie pour cette interaction est celle d'une onde plane pseudoscalaire ne dépendant que du produit ($k.x$). Pour cette forme, après intégration sur les variables de Grassmann, la fonction de Green est réduite à une intégrale de type bosonique. Grâce aux propriétés de l'onde plane les intégrations peuvent être encore menées jusqu'au terme et la fonction de Green devient calculable exactement.

Mots clés : Intégrales de chemins, Actions supersymétrique, Potentiels pseudoscalaires.

Path integral technics applied to solve relativistic problems

Abstract

In this thesis we have applied the supersymetric path integrals to solve the problem of relativistic spinning particle interacting with pseudoscalar potentials. In the first stage we have presented the relative propagator associated with the (1+1) dimensional Dirac equation by means of path integral, where the spin degrees of freedom are described by odd Grassmannian variables. After integrating over fermionic variables (Grassmannian variables), the problem is reduced to a nonrelativistic one with an effective supersymetric potential. Some explicit examples are considered, where we have extracted the energy spectrum of the electron and the wave functions.

In a second part, we have applied the semi-classical approximation to solve the problem of Dirac particle interacting with a pseudoscalar potential in (1+1) dimension. Then, the semi-classical quantization rule is derived for any pseudoscalar potential. An explicit example has been considered.

In a third part, we have studied the scattering of spinning particle by a pseudoscalar smooth potential. The relative Green's function is calculated by means of supersymetric path integral. The left propagating wave function and the right propagating one are extracted. The transmission and reflection coefficients are deduced. The absence of the Klein paradox is also discussed.

In a fourth part, the problem of relativistic spinning particle interacting with pseudoscalar potentials in (3+1) dimensions is formulated in the framework of supersymetric path integrals. As an application, we have considered the case of the plane wave, where the pseudoscalar potential is an arbitrary function of the variable ($k.x$). For the case of $k^2=0$, the relative propagator is exactly calculated and the wave functions are extracted.

***Key words**: Path integrals, supersymetric actions, pseudoscalar potentials*

تطبيق تقنيات تكاملات المسار لحل مسائل نسبية

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بدراسة حركة جسيمة ديراك ذات عزم لف ذاتي يساوي نصف خاضعة لحقل شبه سلمي للورانتز باستعمال تكاملات المسار و هذا اعتمادا على صياغة فوق تناظرية توصف فيها الحركة بمتغيرين. المتغير الأول يصف الحركة الخارجية للجسيمة و المتغير الثاني و هو متغير غراسمان يصف الحركة الناتجة عن عزم اللف الذاتي (سبين).

في المرحلة الأولى كان اهتمامنا منصبا على كمونات شبه سلمية ذات بعد واحد، حيث قمنا بوضع صياغة فوق تناظرية للمسألة و تم وصف الحركة بالمتغيرين المألوفين (متغير حقيقي و متغير غراسمان) ولقد رأينا في هذه الحالة أن المسألة تؤول إلى دراسة جسيمة شرودينغر في وجود كمون فوق تناظري. بعد ذلك قمنا بإعطاء الحل التام موضحين بذلك إمكانية حل مثل هذه المسائل باستعمال طريقة تكاملات المسار و البساطة الملاحظة في إجراء التكاملات من أجل بعض الأمثلة.

المرحلة الثانية كانت مخصصة لحل معادلة ديراك في وجود حقل شبه سلمي ذو بعد واحد بالاعتماد على طريقة نصف كلاسيكية و تكاملات المسار. و لقد اعتمدنا في ذلك على الصياغة دالة غرين المشتقة سابقا في المحور الثاني. بإجراء التكامل على متغيرات غراسمان تم التعبير عن دالة غرين باستعمال متغيرات بوزونية (سلمية) فقط. ثم بعد ذلك تم استنتاج قاعدة التكميم نصف الكلاسيكية والتي تعطي مستويات الطاقة الخاصة بالمسألة المدروسة.

في الفصل الثالث قمنا بدراسة انتشار جسيمة ديراك في وجود حقل شبه سلمي أحادي البعد ، و ذلك باستعمال نفس طريقة تكاملات المسار. النتيجة الهامة التي نستخلصها من هذه الدراسة هي غياب مفارقة كليين حيث أنه لا وجود لامكانية خلق زوج من الجسيمات في وجود حقل شبه سلمي.

في المرحلة الرابعة ،اعتبارنا حقل سلمي ذو أربع أبعاد ، حيث قمنا بوضع صياغة في الحالة العامة ومن أجل حقل شبه سلمي كيفي ثم بعد ذلك ركزنا اهتمامنا على حالة الكمون الشبه السلمي الذي له شكل الموجة المستوية . في هذه الحالة، استطعنا أن نجعل المسألة تؤول إلى مسألة أحادية البعد و لقد تم إيجاد الصيغة التامة لدالة غرين و كذلك دوال الموجة حلول معادلة ديراك.

الكلمات المفتاحية : تكاملات المسار ، الفعل الفوق تناظري ، كمون شبه سلمي