REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES PHYSIQUES

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

THEME

Théories des Cordes Etendues (Membranes et Supermembranes) et Supercordes dans le Formalisme de la Paraquantification

Par

Lamine KHODJA

SOUTENUE LE : / /

Devant le jury :

Président :	N. MEBARKI	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	N. BELALOUI	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	A. BOUDA	Prof. Univ. de Bejaia
	T. BOUDJEDAA	Prof. Univ. de Jijel
	A. BOUDINE	MC. Univ. d'Oum El Bouaghi
	H. AISSAOUI	MC. Univ. Mentouri Constantine

To my parents who gave me life and education

À mes parents qui m'ont donné la vie et l'éducation

À …

Remerciements

Ce travail a fait l'objet d'une thèse de doctorat en sciences réalisée au Laboratoire de Physique Mathématique et Physique Subatomique (LPMPS), département de Physique, Université Mentouri de Constantine, sous la direction du Pr Nadir BELALOUI que je tiens à remercier vivement. Il m'a bien suivi, dirigé et m'a permis avec gentillesse, compétence et patience de mener à terme ce travail.

J'ai le plaisir de remercier tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en y participant : Mr. N. MEBARKI, professeur à l'université Mentouri Constantine a bien voulu présider ce jury. Mrs A. BOUDA, professeur à l'université de Béjaia, T. BOUDJEDAA professeur à l'université de Jijel, A. BOUDINE, maître de conférences à l'université d'Oum El-Bouaghi et H. AISSAOUI, maître de conférences à l'université Mentouri de Constantine pour avoir bien voulu juger ce travail.

Enfin, je ne saurais terminer sans adresser mes remerciements à mes enseignants avec lesquels j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions, et tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Préface

Au cours des trois dernières décennies, une nouvelle théorie révolutionnaire appelée théorie des cordes est apparue et semblait être une candidate sérieuse pour la théorie fondamentale de la nature par le fait que c'était la seule théorie qui semblait unifier la théorie classique de la relativité générale à grande échelle avec le modèle standard de la physique des particules quantiques à de petites distances.

Cinq théories quantiques des supercordes cohérentes sont possibles, en l'occurrence les types I, IIA, IIB, hétérotiques $E_8 \otimes E_8$ et $SO(32)$.

La multiplicité de ces théories additionnée au fait que la supergravité est une théorie à onze dimensions alors que les théories conformes des supercordes le sont à dix sont autant d'incovenients pour le statut de la théorie des cordes comme candidate d'unification.

Dès 1995, une nouvelle idée remarquable provoque un changement substantiel par rapport au statut de la théorie des supercordes en tant que la principale candidate à une description fondamentale de l'univers. En effet, toutes les théories des cordes cohérentes connues semblent être des cas limites particuliers d'une théorie plus fondamentale qui a été baptisée M-Theory [1, 2], cette dernière semble être naturellement décrite à onze dimensions. Il est toutefois important de noter que la théorie des cordes contient des objets dynamiques de plusieurs dimensionalités, en particulier, une double excitation dimensionnelle de la corde connue sous le nom de membrane donne quelques propriétés intéressantes. Les onze dimensions de la supermembrane quantique est le premier point qui interpelle les physiciens des cordes et qui les laisse penser à une description microscopique des onze dimensions de la supergravité.

Un autre point très intéréssant dans ce contexte est le lien entre la théorie des cordes et la géométrie noncommutative [3]. Il y a eu une révolution d'activité dans l'analyse de la noncommutativité en théorie des cordes et des membranes, en particulier, celles dérivées pour une corde couplée à un champs de fond à 2-form ou une membrane couplée à une 3-form [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Contrairement à la théorie des cordes, l'étude de la théorie de la membrane est plus compliquée que l'étude analogue dans le cas de la corde, puisque les équations à résoudre sont non linéaires [12] .

La spécificité de la membrane est le fait que le lagrangien ne dispose pas de l'invariance de Weyl [12], ce qui suggère que certaines techniques de base en théorie des cordes telles que la symétrie conforme ne sont pas disponibles. En théorie des cordes il est bien connu que la dimension critique telle que $D = 26$, par exemple est liée à l'invariance de Lorentz dans la jauge du cône de lumière. La dimension critique de la membrane a été principalement examinée par une étude de son spectre [13, 14], par une quantification à la BRST [15] ou par l'algèbre de Lorentz [16], où $D = 27$ apparaît comme une condition nécessaire.

La théorie des membranes bosoniques quantiques est formulée dans un espace-temps de dimension $D = 27$ [13, 14, 15, 16] alors que la théorie des supermembranes quantiques est formulée dans un espace-temps de dimension $D = 11$[17]. L'extension de ces théories dans le formalisme de la paraquantification nous conduit à des possibilités de leurs existence pour des dimensions D autres que 27 ou 11.

La première étude de l'algèbre de Poincaré pour les cordes parabosoniques (resp. parafermioniques) a été faite par F.Ardalan and F.Mansouri [18]. Cette étude est basée sur l'hypothèse qui consiste à considérer que la coordonnée du centre de masse x^μ et son moment conjugué p^μ vérifient des relations de commutation ordinaires. Ceci est réalisé par le choix d'une direction spécifique dans le para-espace de Green, caractérisée par l'hypothèse : $x^{\mu(\beta)} = x^\mu \delta_{\beta 1}$ et $p^{\mu(\beta)} = p^\mu \delta_{\beta 1}$ où $x^{\mu(\beta)}$ (resp $p^{\mu(\beta)}$) sont les composantes de Green de x^μ (resp. p^μ). La conséquence de cette hypothèse est que les variables de la corde $X^\mu(\sigma, \tau)$, $\mathcal{P}^\nu(\sigma', \tau)$ et $\psi^\rho(\sigma'', \tau)$ ne satisfont plus des relations trilinéaires qui traduisent un système paraquantique. La séparation entre $\beta = 1$ et $\beta \neq 1$ nous conduit à écrire des relations du type anormal (en termes de composantes de Green) entre les coordonnées du centre de masse et les modes de vibration de la corde et en aucun cas, on peut les ramener à des relations trilinéaires qui sont la base de la paraquantification. Sous cette hypothèse, les auteurs démontrent que la théorie des cordes bosoniques (resp.

fermioniques) est invariante de Poincaré si la dimension D de l'espace-temps et l'ordre Q de la paraquantification sont reliés par l'expression $D = 2 + \dfrac{24}{Q}$ (resp. $D = 2 + \frac{8}{Q}$).

Le propos de cette thèse traite, d'une part des problèmes relatifs à la construction classique et cohérente des théories des membranes, et d'une autre, des versions paraquantiques de ces modèles et leurs consistances.

La thèse est présentée comme suit :

Dans les trois premiers chapitres, on donnera une idée générale sur la théorie des cordes, la théorie des membranes et le formalisme paraquantique.

Dans le quatrième chapitre, on va étudier une théorie classique perturbative d'une membrane bosonique basée sur l'étude d'une limite à basse énergie, on établira la version paraquantique, et on cherchera les possibilités des dimensions critques de la membrane. Enfin, on cloturera avec une étude de la théorie de la membrane bosonique en interaction dans un champ de fond B.

Dans le cinqième chapitre, on construira l'extension supersymétrique du modèle, et on discutera les possibilités d'exitence d'une théorie de la membrane fermioniqe à basse énergie dans le cadre classique et paraquantique.

Dans le sixième chapitre, on calculera la densité d'états pour une parasupercorde ouverte et sa forme asymptotique, on dérivera quelques quantités thermodynamiques, en particulier la température de Hagedorn Une étude de la fonction de partition d'un gaz de parasupercodes à une température non nulle sera développée. Un autre point important est la forme générale des états dans le cadre paraquantique, on terminera avec une généralisation pour la théorie des (parasuper) p-branes On cloturera enfin cette thèse par une conclusion générale.

Chapitre 1

Introduction aux théories des cordes

1.1 Introduction

Pour décrire les phénomènes observés dans la nature, 4 forces fondamentales sont nécessaires : les intéractions éléctromagnétiques (E.M), faibles (f), fortes (F) et la gravitation (G).

A l'origine, les 3 premières concernaient des systèmes à l'échelle microscopique que décrit la théorie quantique des champs. L'introduction de notions de symétries locales dans les théories de Yang-Mills (Y.M) a conduit à des modèles d'unification (théories de jauge) qui se basent sur le formalisme de la mécanique quantique. La gravitation était par contre destinée à décrire les phénomènes à l'échelle macroscopique à travers la théorie de la relativité générale d'Einstein qui se base sur une manifestation géométrique de l'espace-temps.

Le fait que ces théories soient indépendantes est un mystère, que ce soit du point de vue formalisme mathématique ou des principes.

Au fur et à mesure que se précisent les connaissances, la gravitation s'avère jouer un rôle primordial au niveau microscopique. Il surgit alors d'une façon naturelle le problème suivant : comment adapter la théorie de la gravitation pour décrire le monde microscopique ?, en d'autres termes, comment construire une théorie quantique de la gravitation ?

C'est l'un des problèmes majeurs aux quels étaient confrontés les physiciens du $20^{ème}$ siècle.

Plusieurs tentatives (parfois osées) ont conduit à des échecs. Face à ces échecs et aux problèmes associés à l'idéalisation de la particule ponctuelle, certains physiciens ont opté à l'abandon de cette dernière et la substituer par l'idée qui consiste à concevoir une particule comme le résultat de la vibration d'une corde dans l'espace-temps. Cette option était le fruit de plusieurs années de recherche sur les modèles duaux [19] qui, à l'origine, étaient déstinés à décrire les interactions fortes, puis, abandonnés par la suite dès l'apparition de la Q.C.D.

En effet, la théorie des modèles duaux conduit à deux résultats étranges :

1. L'existence d'une nouvelle particule sans masse de spin 2.
2. La dimension de l'espace-temps est supérieure à 4.

Ces deux résultats sont le point de départ de plusieurs recherches, J. Schwartz et J. Scherck et d'autres [20, 21, 22] ont associé le graviton à la particule sans masse de spin 2, et la dimension $D > 4$ inspire la théorie de Kaluza-Klein [23, 24]. Ceci a conduit au développement d'une nouvellle théorie d'unification basée sur une nouvelle définition de la particule : la corde et la vibration de cette corde détermine le type de la particule.

Une autre notion est venue conforter l'option de la théorie des cordes : c'est la supersymétrie (SUSY). En effet, sur la base des propriétés géométriques très différentes des bosons et des fermions, on a passé longtemps à croire qu'il est impossible de trouver une symétrie entre eux. Pourtant, cette symétrie éxiste belle et bien, c'est la supersymétrie. Elle consiste à donner une description unifiée des bosons et des fermions, cette idée est apparue au début des années soixante-dix, mais prit véritablement son essor avec les travaux de Ferrara, Van Nueuwenhuizen, Zumino et d'autres.

Le plus beau dans cette théorie est que l'invariance locale nous conduit à la relativité générale. Voir surgir la gravitation sans l'avoir explicitement incluse est un résultat très attrayant, c'est la supergravité.

Cette théorie est formulée pour la dimension $D = 11$ qui nous inspire une autre fois la théorie de Kaluza-Klein, malheureusement, cette théorie n'est pas finie.

Le moment est venu de mixer toutes les idées, ce qui conduit plusieurs chercheurs [25, 26, 27, 28, 29] à développer ce qu'on appelle la théorie des cordes supersymétriques ou supercordes qui offre beaucoups d'avantages par la résolution de certains problèmes aux quels sont conffrontés les premiers modèles de la théorie des cordes. En plus, la théorie des cordes étant une théorie renormalisable, implique une théorie renormalisable de la supergravité.

Malgré ces avantages, la théorie des supercordes est confrontée à des problèmes par la présence de certaines anomalies, des recherches conduites par Gross, Harvey, Martinec et Rohm ont amené à une théorie hybrides des cordes : C'est la théorie des cordes hétérotiques qui est construite à partir des groupe $E_8 \otimes E_8$ et $SO(32)$.

La construction de plusieurs théories des cordes indépendantes pose le problème d'unicité. Des recherches ont évolué dans ce sens et ont donné naissance à d'autres théories : La M-théory, les branes....

Dans ce qui suit, on ce propose de donner une brève description de la théorie des cordes. Pour de plus amples détails, on peut par exemple consulter [30, 31, 32].

1.2 Cordes bosoniques

La corde est un objet à une dimension, elle se présente comme une extension du point de telle sorte que, de la même façon que l'évolution d'un point dans l'espace-temps décrit une ligne, l'évolution de la corde va d'écrire une surface. Il est donc légitime que la théorie des cordes découle de la théorie du point.

Nous commencerons cette partie par une brève déscription de la particle ponctuelle sans spin.

Dans ce cas l'action est donnée par

$$S = -m \int_{s_0}^{s_1} ds = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[-\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \eta^{\mu\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

où τ est un paramètre arbitraire de la ligne d'univers dans l'espace-temps à D dimensions, $x^{\mu}(\tau)$ décrit la position pour chaque valeur de τ, avec $\mu, \nu = \overline{0, D-1}$ et la convention $\eta_{\mu\nu} = diag\,(- + +...+)$.

Cette action est invariante par τ-reparamétrisation

Le moment conjugué est défini par :

$$P_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{1.2}$$

La présence de cette symétrie a pour conséquence la présence de la contrainte :

$$P^2 + m^2 = 0 \tag{1.3}$$

De la même façon que l'action de la particule ponctuelle est proportionnelle à la longueur de la ligne d'univers, en 1970, Nambu postule que celle de la corde devrait être proportionnelle à l'aire de la surface d'univers, ce qui permet d'introduire l'action sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\sigma d\tau \left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X} \right)^2 (X')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

Où $X^{\mu}(\sigma, \tau)$ est la coordonnée de la corde, τ est le paramètre d'évolution et σ est un paramètre qui dénombre les points de la corde.

$$\dot{X} = \frac{dX^{\mu}}{d\tau} \quad \text{et} \quad X' = \frac{dX^{\mu}}{d\sigma} \tag{1.5}$$

avec $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ est le facteur de normalisation appelé aussi tension de la corde. Expérimentalement α' représente la constante de Regge.

Cette action est invariante par reparamétrisation de la surface d'univers et par transformation de Lorentz.

D'après le principe de moindre action, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = 0, \tau) = \frac{\partial L}{\partial X'_\mu}(\sigma = \pi, \tau) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

La deuxième relation représente ce qu'on appelle, la condition aux bords de la corde.

Le moment conjugué est donné par :

$$\mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} \tag{1.7}$$

la conséquence de l'invariance par reparamétrisation est la présence des contraintes :

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{\pi^2} = 0 \\ \mathcal{P}^\mu X'_\mu = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

On définit aussi le moment énergie total de la corde par :

$$P^\mu = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\mu(\sigma, \tau) \tag{1.9}$$

et le moment angulaire total par :

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma\left(\mathcal{P}^\mu X^\nu - \mathcal{P}^\nu X^\mu\right) \tag{1.10}$$

Les équations (1.8) ne sont pas linéaires, un choix convenable de la jauge (jauge orthogonale) permet de les linéariser sous la forme :

$$\ddot{X}_\mu(\sigma, \tau) - X''_\mu(\sigma, \tau) = 0 \tag{1.11}$$

En tenant compte de la condition aux bords, la solution générale prend la forme :

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = x^{\mu} + 2\alpha' p^{\mu}\tau + \sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{a_n^{\mu}\exp(-in\tau) - a_n^{\mu *}\exp(in\tau)\right\}\cos n\sigma \quad (1.12)$$

qui, en posant :

$$\begin{aligned}
a_n^{\mu} &= a_n^{\mu}\exp(-in\tau) \qquad , \qquad a_n^{\mu *} = a_n^{\mu *}\exp(in\tau) \\
\alpha_0^{\mu} &= 2\alpha' p^{\mu} \qquad , \qquad \alpha_n^{\mu} = \sqrt{2n\alpha'}a_n^{\mu} \\
\alpha_{-n}^{\mu} &= \alpha_n^{\mu *} \qquad\qquad n \geq 0
\end{aligned}$$

se réécrit sous la forme :

$$X^{\mu}(\sigma,\tau) = x^{\mu} + \alpha_0^{\mu}\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}\exp(-in\tau)\cos n\sigma \quad (1.13)$$

les α_n^{μ} représentent les modes de vibration de la corde.

Dans cette jauge les générateurs de Virasoro sont donnés par :

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\pi\alpha' \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \exp in(\tau+\sigma)\left(\mathcal{P}^2 + \frac{(X^{\mu})^2}{2\pi\alpha'}\right) \\
&= \frac{1}{4\alpha'}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \equiv 0 \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

En particulier $L_0 = H$, où H est l'hamiltonien qui s'écrit

$$H = -\pi\int_0^{\pi} d\sigma\left[\alpha'\mathcal{P}^2 + \frac{(X^{\mu})^2}{4\pi^2\alpha'}\right] = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty}\alpha_{-m}\alpha_m \quad (1.15)$$

Ceci conduit à écrire la condition de masse de la corde en fonction des modes :

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \quad (1.16)$$

D'autre part le moment angulaire peut s'écrire :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu\right) \tag{1.17}$$

1.2.1 Quantification

Notre théorie est riche en symétries, la présence des contraintes nous conduit à utiliser la méthode de quantification de Dirac.

Il existe deux méthodes de quantification :

1. La première consiste à traiter toutes les variables comme indépendantes et les contraintes seront considérées comme des conditions initiales. Par la suite, seuls les états soumis à ces contraintes (conditions de Virasoro) seront physiques. C'est ce qu'on appelle la quantification covariante.
2. La deuxième consiste à résoudre les équations des contraintes, ceci nous permet d'éliminer les variables superflues pour avoir uniquement des variables dynamiques effectivement indépendantes. C'est la quantification dans la jauge tranverse.

Jauge covariante

On réinterprète les variables dynamiques x^μ, p^ν et α_n^μ en termes d'opérateurs qui vérifient les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [x^\mu, p^\nu] &= ig^{\mu\nu} && (1.18.a) \\ [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] &= 2\alpha' n\delta_{n+m,0}g^{\mu\nu} && (1.18.b) \end{aligned}$$

le moment angulaire garde la même forme en terme d'opérateurs :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_{-n}^\mu\alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu\alpha_n^\mu\right) \tag{1.19}$$

les générateurs de Virasoro s'écrivent comme :

$$L_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha^{\mu}_{-n-m}\alpha_{n,\mu} : \tag{1.20}$$

Mais à cause des ambiguités d'ordes dans L_0, on ajoute une constante qui nous permet d'enlever cette ambiguité

Donc on pose $L_0 \longrightarrow L_0 - a$

ce qui nous permet d'écrire

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m - a \tag{1.21}$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m - \frac{a}{\alpha'} \tag{1.22}$$

Comme pour l'éléctrodynamique quantique (QED), les états physiques sont déterminés par :

$$L_n \left|\psi\right\rangle_{ph} = 0 \qquad n \geq 1 \tag{1.22.a}$$

$$\left[L_0 - a\right] \left|\psi\right\rangle_{ph} = 0 \tag{1.22.b}$$

Remarquons ici que l'état $|0\rangle$ (état du vide) est un état tachyonique et que la composante temporelle nous donne un état de ghost, dû au fait que la métrique n'est pas définie positive.

Dans le cadre du "No-ghost theorem" (NGT), on montre que la théorie est libre des "ghost" pour $(a \leq 1,\ D \leq 25)$ ou $(a = 1,\ D = 26)$.

Les générateurs L_n satisfont l'algèbre de Virasoro :

$$\left[L_n, L_m\right] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{D}{12} n \left(n^2 - 1\right) \delta_{n,-m} \tag{1.23}$$

L'algèbre de Poincaré est décrite par les relations :

$$[p^\mu, p^\nu] = 0 \tag{1.24.a}$$

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = \imath \left(g^{\mu\nu} p^\rho - g^{\mu\rho} p^\nu\right) \tag{1.24.b}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \imath \left(g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}\right) \tag{1.24.c}$$

Notons ici que la covariance de Lorentz est manifeste.

Jauge transverse

Il est plus commode d'utiliser les coordonnées du cône de lumière :

$$U^\mu \rightarrow U^\pm,\ U^{D-1} \qquad \text{avec } i = \overline{1, D-2} \tag{1.25}$$

$$U^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U^0 \pm U^{D-1}\right) \tag{1.26}$$

avec la métrique de Minkowski :

$$\eta_{ij} = 1,\ \eta_{+-} = \eta_{-+} = -1 \tag{1.27}$$

le produit de 2 vecteurs est défini par :

$$U.V = U^i V^i - U^+ V^- - U^- V^+ \tag{1.28}$$

où

$$U^\pm = -U_\mp \quad , \quad U^i = U_i \tag{1.29}$$

Les opérateurs x^-, p^+, x^i, p^i et α_n^i ($i = \overline{1, D-2}$) vérifient les relations de commutation :

$$\left[x^{-}, p^{+}\right] = i \tag{1.30.a}$$

$$\left[x^{i}, p^{j}\right] = i\delta^{ij} \tag{1.30.b}$$

$$\left[\alpha_n^{i}, \alpha_m^{j}\right] = 2\alpha' n \delta^{ij}\delta_{n+m,0} \tag{1.30.c}$$

Les composantes α_n^- s'écrivent :

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}\left[L_n^{tr} - a\delta_{n,0}\right] \tag{1.31}$$

où

$$L_n^{tr} = \frac{1}{4\alpha'}\sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha^i_{-n-m}\alpha^i_n : \tag{1.32}$$

L'opérateur de masse dans cette jauge est donné par :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^i_{-n}\alpha^i_n - a\right) \tag{1.33}$$

Pour l'algèbre de Poincaré, on peut facilement montrer qu'elle est satisfaite sauf pour le commutateur $[M^{i-}, M^{j-}]$ qui nous donne :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = \frac{2}{(p^+)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\alpha^i_{-m}\alpha^j_m - \alpha^j_{-m}\alpha^i_m\right)\left[\frac{1}{m}\left(a - \frac{D-2}{24}\right) - m^2\left(1 - \frac{D-2}{24}\right)\right] \tag{1.34}$$

il est clair que ce commutateur s'annule pour les seules valeurs

$$\begin{cases} D = 26 \\ a = 1 \end{cases} \tag{1.35}$$

Cette condition est bien satisfaite par le (NGT), donc notre théorie est bien libre de "ghost".

L'étude du spectre est basée sur la construction d'une fonction génératrice. En effet, la dégénéréscence des états pour chaque niveau de masse augmente exponentiellement et peut être obtenue à partir de cette fonction génératrice appelée : fonction de partition.

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)\, x^n = Tr x^N \tag{1.36}$$

où $d(n)$ est la dégénéréscence au niveau éxcité.

Pour les cordes bosoniques, la fonction est définie par :

$$P_b(x) = \sum_{N=0}^{\infty} d_b(N)\, x^N \tag{1.37}$$

avec

$$\begin{aligned} d_b(N) &\rightarrow \text{nombre d'états pour chaque niveau.} \\ N &= \alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{-n}^i a_n^i \\ \text{avec } i &= \overline{1, 24} \end{aligned}$$

On montre facilement que :

$$\begin{aligned} P_b(x) &= = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{24} \\ &= 1 + 24x + 324x^2 + 3200x^3 + ... \end{aligned} \tag{1.40}$$

L'utilité de cette fonction apparaîtra dans le chapitre 6

1.2.2 Cordes fermées

Si on impose la périodicité pour les coordonnées $X^\mu(\sigma, \tau)$ de telle sorte que :

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + \pi, \tau) \tag{1.41}$$

en suivant les mêmes démarches que dans le cas des cordes ouvertes, la solution est donnée (en fonction des modes) par :

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu \tag{1.42}$$

avec

$$\begin{aligned} X_R^\mu(\sigma,\tau) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu \exp\left[-2in(\tau-\sigma)\right] && (1.43.a)\\ X_L^\mu(\sigma,\tau) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\widetilde{\alpha}_n^\mu \exp\left[-2in(\tau+\sigma)\right] && (1.43.b) \end{aligned}$$

Pour quantifier, en plus des relations de commutation (1.18) nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{\alpha}_n^\mu, \widetilde{\alpha}_m^\nu\right] &= 2\alpha' n\delta_{n+m,0}g^{\mu\nu} && (1.44.a)\\ \left[\alpha_n^\mu, \widetilde{\alpha}_m^\nu\right] &= 0 && (1.44.b) \end{aligned}$$

les états physiques sont donnés par :

$$\begin{aligned} L_n\left|\psi\right\rangle_{ph} &= 0 \qquad n\geq 1 && (1.45.a)\\ \widetilde{L}_n\left|\psi\right\rangle_{ph} &= 0 \qquad n\geq 1 && (1.45.b)\\ \left[L_0-a\right]\left|\psi\right\rangle_{ph} &= 0 && (1.45.c)\\ \left[\widetilde{L}_0-a\right]\left|\psi\right\rangle_{ph} &= 0 && (1.45.d) \end{aligned}$$

avec en plus la condition :

$$\left(L_0-\widetilde{L}_0\right)\left|\psi\right\rangle_{ph} = 0 \tag{1.46}$$

avec les $\widetilde{L}_n$ verifient les mêmes relations que (1.20), en termes des modes gauches.

la condition de "mass-shell" est traduite par

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'}p^\mu p_\mu = M_L^2 + M_R^2 \tag{1.47}$$

où

$$\alpha' M_L^2 = 2\left[N-a\right] = 2\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - a\right] \quad (1.48.a)$$

$$\alpha' M_R^2 = 2\left[\widetilde{N}-a\right] = 2\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{\alpha}_{-n}\widetilde{\alpha}_n - a\right] \quad (1.48.b)$$

la condition (1.46) signifie que la théorie est indépendante du choix de l'origine du parametre σ, ce qui nous conduit à la condition de "mass-shell" donnée par :

$$\frac{1}{4}\alpha' M^2 = N = \widetilde{N} \quad (1.49)$$

Cette théorie est libre de ghost pour $D = 26$ et $a = 2$, et libre de tachyons, ce qui est intéréssant. La particularité de la corde fermée est la présence d'un état tensoriel sans masse dont la partie symétrique peut être assimilée au graviton.

1.3 Cordes fermioniques

Les cordes fermioniques sont construites pour décrire les particules spinorielles.

Pour cela on a introduit des champs fermioniques à ceux de la théorie bosonique.

Le champ fermionique est un spineur de Majorana à 2 dimensions $\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_0^\mu \\ \psi_1^\mu \end{pmatrix}$.

On écrit l'action sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2\rho \left[\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\overline{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu\right] \quad (1.50)$$

avec

$$\rho^0 = \tau \quad , \quad \rho^1 = \sigma \quad (1.51)$$

et les matrices γ à 2 dimensions sont données par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = -2\eta^{ab} \tag{1.52}$$

Cette action est invariante sous les transformations supersymétriques (susy) globales :

$$\delta X^\mu = \overline{\varepsilon}\psi^\mu \tag{1.53.a}$$

$$\delta\psi^\mu = -i\gamma^a \partial_a X^\mu \varepsilon \tag{1.53.b}$$

On vérifie la fermeture de l'algèbre supersymétrique, en montrant que :

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] X^\mu = \left(2i\overline{\varepsilon}_1\gamma^a\varepsilon_2\right) X^\mu \tag{1.54.a}$$

$$\left[\delta_1, \delta_2\right] \psi^\mu = \left(2i\overline{\varepsilon}_1\gamma^a\varepsilon_2\right) \psi^\mu \tag{1.54.b}$$

les équations du mouvement sont données par :

$$\partial_a\partial^a X = 0 \tag{1.55.a}$$

$$\gamma^a\partial_a\psi = 0 \tag{1.55.b}$$

$$\partial_1 X\left(\rho^1 = 0\right) = \partial_1 X\left(\rho^1 = \pi\right) = 0 \tag{1.55.c}$$

le choix

$$\psi_0\left(\rho^0 = 0\right) = \psi_1\left(\rho^0 = 0\right) \tag{1.56}$$

conduit aux possibilités

$$\psi_0\left(\rho^0 = \pi\right) = \pm\psi_1\left(\rho^0 = \pi\right) \tag{1.57}$$

qui correspondent aux deux modèles :

$$\text{avec} \begin{cases} + & \text{modèle de Ramond (R)} \\ - & \text{modèle de Neuveu-Schwarz (N-S)} \end{cases}$$

les solutions sont :

$$
\begin{aligned}
X^{\mu} &= x^{\mu} + p^{\mu}\tau + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}\exp\left(-in\tau\right)\cos n\sigma && (1.58.a)\\
\psi_0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in(\tau+\sigma)} && (1.58.b)\\
\psi_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in(\tau-\sigma)} \qquad \text{avec} \qquad C_{-n} = C_n^{*} && (1.58.c)
\end{aligned}
$$

avec les conditions $\psi_0(\tau,0) = \psi_1(\tau,0)$.

$n \in \mathbb{Z}$ pour le secteur de Ramond et $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ pour le secteur de (N-S).

1.3.1 Quantification

Jauge covariante

On impose les règles de commutation :

$$
\begin{aligned}
\left[X^{\mu}(\sigma,\tau), \partial_0 X^{\nu}(\sigma',\tau)\right] &= -\pi g^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') && (1.59.a)\\
\left[\psi_a^{\mu}(\sigma,\tau), \partial_0 \psi_b^{\nu}(\sigma',\tau)\right]_+ &= -\pi g^{\mu\nu}\delta_{ab}\delta(\sigma-\sigma') && (1.59.b)\\
\left[X^{\mu}(\sigma,\tau), \psi^{\nu}(\sigma',\tau)\right] &= 0 && (1.59.c)\\
\left[\partial_0 X^{\mu}(\sigma,\tau), \partial_0 \psi^{\nu}(\sigma',\tau)\right] &= 0 && (1.59.d)
\end{aligned}
$$

qui, réécrites en fonction des modes, sont données par :

$$
\begin{aligned}
\left[x^{\mu}, \alpha_0^{\nu}\right] &= -2\imath\alpha' g^{\mu\nu} && (1.60.a)\\
\left[\alpha_n^{\mu}, \alpha_m^{\nu}\right] &= -2\alpha' n g^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} && (1.60.b)\\
\left[C_n^{\mu}, C_m^{\nu}\right]_+ &= -g^{\mu\nu}\delta_{r+s,0} && (1.60.c)
\end{aligned}
$$

les autres commutateurs et anticommutateurs sont nuls.

Modèle de Ramond

On pose

$$C_0^\mu = \frac{i}{2}\gamma^\mu \qquad , \qquad C_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{D+1} d_n^\mu \tag{1.61}$$

la superalgèbre de Virasoro est donnée par :

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)\, L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m+n,0} && (1.62.a) \\ [L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n} && (1.62.b) \\ [F_m, F_n]_+ &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m+n,0} && (1.62.c) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} :\, \alpha_{-n}\alpha_{m+n} \,: + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(n + \frac{1}{2}m\right) :\, d_{-n} d_{m+n} \,: && (1.63) \\ F_m &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} d_{m+n} && (1.64) \end{aligned}$$

L'Hamiltonien dans ce cas est

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m} d_m \tag{1.65}$$

les états physiques dans cette jauge sont définis par :

$$\begin{aligned} L_n \left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad n > 0 && (1.66.a) \\ (L_0 - a) \left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66.b) \\ F_n \left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66.c) \\ F_0 \left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66.d) \end{aligned}$$

On peut montrer que $F_0^2 = L_0$ qui nous conduit à montrer que $a = 0$.

La condition de la couche de masse (1.3) nous donne la forme de la masse en fonction des modes par :

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m} d_m \tag{1.67}$$

Ce modèle correspond au secteur fermionique.

Modèle de Neuveu-Schwarz

De la même manière on pose :

$$C_r^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} b_r^\mu \qquad , \qquad C_{-r}^+ = C_r \tag{I-68}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} [b_r^\mu, b_s^\nu]_+ &= -g^{\mu\nu}\delta_{r+s,0} \\ \text{avec } r, s &\in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.69}$$

On définit les générateurs de la superalgèbre de Virasoro :

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} : \alpha_{-m}^\mu \alpha_{m+n,\mu} : + \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(r + \frac{1}{2}m\right) : b_{-r} b_{m+r} : \tag{1.70}$$

$$G_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} b_{r+n} \tag{1.71}$$

qui vérifient les relations suivantes :

$$[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n} + \frac{D}{8}\left(m^3 - m\right)\delta_{m+n,0} \tag{1.72.a}$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - n\right) G_{m+r} \tag{1.72.b}$$

$$[G_r, G_s]_+ = 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0} \tag{1.72.c}$$

Les états physiques doivent satisfaire les conditions :

$$\begin{aligned}
L_n\left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad n>0 && (1.73.a)\\
(L_0-a)\left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad a>0 && (1.73.b)\\
G_r\left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad r>0 && (1.73.c)
\end{aligned}$$

De la même façon, on définit l'hamiltonien :

$$H=\alpha' p^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{-n}\alpha_n+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty}rb_{-r}b_r \tag{1.74}$$

et l'opérateur de masse :

$$\alpha' M^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{-n}\alpha_n+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty}rb_{-r}b_r \tag{1.75}$$

Tous les états de ce sécteur sont des bosons.

Remarquons aussi que l'état fondamental représente un tachyon.

Pour l'algèbre de Poincaré le générateur $M^{\mu\nu}$ s'écrit sous la forme :

$$M^{\mu\nu}=M_0^{\mu\nu}(x)+K^{\mu\nu} \tag{1.76}$$

où $M_0^{\mu\nu}(x)$ représente la partie bosonique, et l'opérateur $K^{\mu\nu}$ est défini par :

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu} &= -\frac{\imath}{4}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(b_{-r}^{\mu},b_r^{\nu}-b_{-r}^{\nu},b_r^{\mu}\right) \qquad (NS) && (1.77)\\
K^{\mu\nu} &= -\frac{\imath}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(d_{-m}^{\mu},d_m^{\nu}-d_{-m}^{\nu},d_m^{\mu}\right) \qquad (R) && (1.78)
\end{aligned}$$

ces générateurs vérifient l'algèbre de Poincaré c-à-d :

$$\left[p^{\mu},M^{\nu\rho}\right]=-\imath g^{\mu\nu}p^{\rho}+\imath g^{\mu\rho}p^{\nu} \tag{1.79}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \imath g^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} - \imath g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \imath g^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} + \imath g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} \tag{1.80}$$

Jauge transverse

Comme on l'a déjà vu dans le cas des cordes bosoniques, cette jauge nous permet de déterminer la dimension critique.

Les relations de commutation et d'anticommutation vérifiées par les opérateurs x^-, p^+, x^i, p^i, α_n^i et b_r^i ou d_n^i sont :

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_n^i, \alpha_m^j\right] &= \delta^{ij} n \delta_{n+m} && (1.81.a)\\
\left[x^-, p^+\right] &= i && (1.81.b)\\
\left[d_n^i, d_m^j\right]_+ &= \delta^{ij} \delta_{n+m} \qquad (R) && (1.81.c)\\
\left[b_r^i, b_s^j\right] &= \delta^{ij} \delta_{r+s} \qquad (NS) && (1.81.d)
\end{aligned}$$

avec $\overline{i = 1, D-2}$

De la même façon, on définit les générateurs de Lorentz :

$$M^{i-} = M_0^{i-}(x) + K^{i-} \tag{1.82}$$

(où $M_0^{i-}(x)$ représente la partie bosonique).

avec

$$K^{i-} = -\frac{\imath}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_n^i \left(b_{n-r}^i b_r^j - b_{n-r}^j b_r^i\right) \tag{1.83}$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha_n^- &= \frac{1}{2p^+} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-l}^i \alpha_l^i : + \frac{1}{2p^+} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(r - \frac{n}{2}\right) : b_{n-r}^i b_r^i : - \frac{a}{2p^+} \delta_{n,0} && (1.84)\\
b_r^- &= \frac{1}{p^+} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \alpha_{s-r}^i b_r^i && (1.85)
\end{aligned}$$

L'algèbre de Lorentz est satisfaite à l'exception du commutateur $[M^{i-}, M^{j-}]$ qui nous donne :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = -\frac{\imath}{\left(p^{+}\right)^{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{j} - \alpha_{-n}^{j} \alpha_{n}^{i}\right) \left[n \left(\frac{D-2}{8}\right) + \frac{1}{n} \left(2a - \frac{D-2}{8}\right)\right] \quad (1.86)$$

Ce commutateur est nul uniquement pour $D = 10$ et $a = \frac{1}{2}$ dans le secteur de Ramond ($D = 10$ et $a = 0$ dans le secteur de N-S)

Pour déterminer le nombre d'états physiques pour chaque niveau excité, il est plus commode de passer par la fonction de partition.

Le calcul explicite de cette fonction nous donne :

$$\begin{aligned} P_{R}(x) &= \sum_{N=0}^{\infty} d_{R}(N)\, x^{N} \\ &= 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n}}{1-x^{n}}\right)^{8} \\ &= 8\left(1 + 8x + 16x^{2} + 144x^{3} + 960x^{4} + ...\right) \end{aligned} \quad (1.87)$$

les différents coefficients dans ce developpement correspondent aux degrés de dégénéréscence pour chaque niveau éxcité.

Pour N-S

$$\begin{aligned} P_{NS}(x) &= \sum_{N=0}^{\infty} d_{NS}(N)\, x^{N} \\ &= \frac{1}{2x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-x^{n}\right)^{8}} \left\{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + x^{n-1/2}\right)^{8} - \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{n-1/2}\right)^{8}\right\} \\ &= 8\left(1 + 8x + 16x^{2} + 144x^{3} + 960x^{4} + ...\right) \end{aligned} \quad (1.88)$$

Remarquons que la fonction de partition a le même développement pour les deux secteurs ce qui veut dire qu'il y a autant de bosons que de fermions pour chaque niveau éxcité. Ceci suggère la construction d'un modèle supersymétrique qui donnerait une déscription unifiée des bosons et des fermions. La théorie des supercordes répond à ces préoccupations.

1.4 Supercordes

Le principal handicap de la théorie des cordes fermioniques est l'introduction de deux espaces de Fock indépendants pour décrire les bosons et les fermions (ceci est une conséquence du fait que la supersymétrie se manifeste sur le "world-sheet" et non pas sur l'espace-temps). Cette théorie est baptisée "ancienne" théorie des supercordes.

La nouvelle théorie des supercordes qui est basée sur une SUSY sur l'éspace-temps nous conduit à un seul espace de Fock décrivant à la fois les bosons et les fermions.

Pour les cordes bosoniques l'action de Polyakov s'écrit :

$$S_{bos} = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{1.89}$$

où $g^{\alpha\beta}$ est la métrique de l'espace-temps, $\mu = \overline{0, D-1}$.

Par analogie au cas de la théorie supersymétrique du point, supersymétriser cette action revient à faire la correspondance :

$$S_{bos} \rightarrow S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}\Pi_\alpha.\Pi_\beta \tag{1.90}$$

avec

$$\Pi_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - i\overline{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A \tag{1.91}$$

où θ^A est un spineur dont les composantes sont données par θ^{Aa} avec $a = 1, ..., 2^{[D/2]}$ ([ ] reptrésente la partie entière et D est la dimension de l'espace-temps), $A = 1, ..., N$ (N entier).

Cette action est invariante sous les transformations supersymétriques globales.

L'invariance locale éxige l'introduction d'un deuxième terme S_2.

$$S = S_1 + S_2 \tag{1.92}$$

de telle sorte que

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \int d\sigma d\tau \left\{ -i\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \left(\overline{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \overline{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right) + \epsilon^{\alpha\beta} \overline{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \overline{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right\} \quad (1.93)$$

$\epsilon^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Levi-Civita et $\alpha, \beta = 0, 1$.

L'invariance de S_2 sous les transformations SUSY nous conduit à l'identité :

$$\epsilon^{\alpha\beta} \left[\Gamma^\mu \theta \partial_\alpha \overline{\theta} \Gamma_\mu \partial_\beta \theta + \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta \partial_\beta \overline{\theta} \Gamma_\mu \theta + \Gamma^\mu \partial_\beta \theta \overline{\theta} \Gamma_\mu \partial_\alpha \theta \right] = 0 \quad (1.94)$$

avec $\theta = \theta^1$ ou θ^2. En posant $\psi_1 = \theta$, $\psi_2 = \partial_\sigma \theta = \theta'$ et $\psi_3 = \partial_\tau \theta = \dot{\theta}$, l'équation (1.94) est réécrite sous une forme compacte :

$$\Gamma^\mu \psi_{[1} \psi_2 \Gamma_\mu \psi_{3]} = 0 \quad (1.95)$$

(le symbole [ ] représent l'antisymétrisation des spineurs ψ).

dont la principale conséquence est que seules les 4 valeurs $D = 3, 4, 6, 10$ de la dimension de l'espace-temps sont possibles, avec des exigences sur le type de spineurs (modèle de superYang-Mills). La quantification de cette théorie conduit à la survie d'une seule possibilité ($D = 10$).

1.4.1 Quantification dans la jauge transverse :

Le défaut majeur de l'action de Green-Schwarz est qu'une quantification covariante naïve, comme pour la particule ponctuelle, n'existe pas, dans le sens où les relations de commutation sont hautement non linéaires !. La solution à ce problème est de quantifier directement dans la jauge transverse (du cône de lumière).

Le modèle à traîter est un modèle supersymétrique, nous devons donc équilibrer les degrés de liberté bosoniques et fermioniques. Un spineur de Dirac a $2^{[D/2]}$ composantes complexes, c-à-d pour θ^1 et θ^2 à $D = 10$ nous avons 32+32 composantes complexes, par contre, pour les bosons, nous avons uniquement 8 composantes transverses. Pour arriver à réduire ce surplus, on doit tenir compte de certaines conditions décrites comme suit :

Condition	Nombre de composantes
Dirac	$(32+32)$ $C.Complexes$
Majorana-Weyl	$(16+16)$ $C.Complexes$
Light cone	$(8+8)$ $C.Réelles$
On-Shell	8 $C.Réelles$

la condition de la jauge transverse est donnée par

$$\Gamma^{+}\theta^{A}=0 \qquad \text{avec } A=1,2 \tag{1.96}$$

Dans cette jauge l'action est donnée par (avec la substitution $\sqrt{p^{+}}\theta \rightarrow S$) :

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau\left(\partial_{a}X^{i}\partial^{a}X_{i}-i\overline{S}^{Aa}\rho^{B}\partial_{B}S^{Aa}\right) \tag{1.97}$$

avec $i,a=\overline{1,8}$, $A,B=1,2$ et la convention $2\alpha'=1$.

Où S^{A} est un spineur à deux composantes et $\overline{S}^{Aa}=\left(S^{+}\right)^{Bb}\left(\Gamma^{0}\right)^{ba}\left(\rho^{0}\right)^{BA}$

les matrices ρ^{A} verifient l'algèbre de Clifford où :

$$\rho^{1}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad \rho^{2}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad \left\{\rho^{A},\rho^{B}\right\}=-2\eta^{AB} \tag{1.98}$$

Les équations du mouvement sont :

$$\left(\partial_{\tau}+\partial_{\sigma}\right)S^{1a} = 0 \tag{1.99.a}$$

$$\left(\partial_{\tau}-\partial_{\sigma}\right)S^{2a} = 0 \tag{1.99.b}$$

$$\left(\partial_{\sigma}^{2}-\partial_{\tau}^{2}\right)X^{i} = 0 \tag{1.99.c}$$

remarquons que se sont des équations linéaires faciles à résoudre.

Différents types de supercordes sont construits. On peut les classer comme suit :

Supercordes :Type I

Les conditions aux limites sont données par

$$S^{1a}(0,\tau) = S^{2a}(0,\tau) \tag{1.100.a}$$

$$S^{1a}(\pi,\tau) = S^{2a}(\pi,\tau) \tag{1.100.b}$$

ce qui nous donne la solution sous la forme :

$$S^{1a}(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} S_n^a \exp\left[-in(\tau-\sigma)\right] \tag{1.101.a}$$

$$S^{2a}(\sigma,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} S_n^a \exp\left[-in(\tau+\sigma)\right] \tag{1.101.b}$$

$$X^i(\sigma,\tau) = x^i + p^i\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^i \exp\left(-in\tau\right)\cos n\sigma \tag{1.101.c}$$

les modes vérifiant les relations d'anticommutation :

$$\left[S_n^a, S_m^b\right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.102}$$

alors que les X^i vérifient les mêmes relations que pour les cordes bosoniques ouvertes.

Supercordes fermées :Type II (fermées)

Les conditions de périodicité sont :

$$S^{Aa}(\sigma,\tau) = S^{Aa}(\sigma+\pi,\tau) \tag{1.103}$$

Le développement en modes donne :

$$S^{1a}(\sigma,\tau) = \sum_{n\in Z} S_n^a \exp\left[-2in(\tau-\sigma)\right] \tag{1.104.a}$$

$$S^{2a}(\sigma,\tau) = \sum_{n\in Z} \widetilde{S}_n^a \exp\left[-2in(\tau+\sigma)\right] \tag{1.104.b}$$

$$X^i(\sigma,\tau) = x^i + p^i\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left\{\alpha_n^i e^{-2\imath n(\tau-\sigma)} + \widetilde{\alpha}_n^i e^{-2\imath n(\tau+\sigma)}\right\} \tag{1.104.c}$$

Pour les supercordes fermées $N=2$, on distingue deux types, selon la chiralité des champs spinoriels (1.104.a) et (1.104.b) :

– chiralité opposée $\longrightarrow$ supercordes type IIA.

– même chiralité $\longrightarrow$ supercordes type IIB.

Les règles de commutations et d'anticommutation sont analogues à celle du type I. En effet, en plus des relations (1.25) et (1.102) nous avons les relations suivantes :

$$\left[\widetilde{S}_n^a.\widetilde{S}_m^b\right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.105.a}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^i.\widetilde{\alpha}_m^j\right] = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.105.b}$$

et tous les autres commutateurs sont nuls.

Dans la jauge transverse, les générateurs supersymétriques sont définis par :

$$Q^a = \left(2p^+\right)^{\frac{1}{2}} s_0^a \tag{1.106}$$

$$Q^{\dot{a}} = \left(p^+\right)^{\frac{-1}{2}} \gamma_{\dot{a}a}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{-n}^a \alpha_n^i \tag{1.107}$$

et vérifient les relations d'anticommutation :

$$\left[Q^a, Q^b\right]_+ = 2p^+\delta^{ab} \tag{1.108}$$

$$\left[Q^{\dot{a}}, Q^{\dot{b}}\right]_+ = 2\delta^{\dot{a}\dot{b}}H \tag{1.109}$$

$$\left[Q^a, Q^{\dot{a}}\right]_+ = \sqrt{2}\gamma_{a\dot{a}}^i p^i \tag{1.110}$$

où H est l'hamiltonien défini par

$$H = \frac{1}{p^{+}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + n s_{-n}^{a} \ s_{n}^{a} \ \right) + \frac{1}{2} p_{i}^{2} \right\} \tag{1.111}$$

Spectre

La condition de la couche de masse nous permet de définir l'opérateur de masse :

$$M^{2} = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{i} \alpha_{n}^{i} + n s_{-n}^{a} s_{n}^{a} \tag{1.112}$$

L'état fondamental est une particule vectorielle sans masse avec 8 composantes transverses donné par $|i\rangle$ qui représente le photon et son patenaire fermionique représenté par $|a\rangle$ qui est le photino .

On définit l'état du spineur par :

$$|a\rangle = \frac{i}{8} \left(\gamma_{i} S_{0} \right)^{a} |i\rangle \tag{1.113}$$

on vérifie alors :

$$\begin{aligned}
\langle i \, | j \rangle &= \delta_{ij} && (1.114.a) \\
\langle a \, | b \rangle &= \frac{1}{2} \left(h \gamma^{+} \right)^{ab} && (1.114.b) \\
|i\rangle &= \frac{i}{8} \left(\overline{S}_{0} \gamma_{i+} \right)^{a} |a\rangle && (1.114.c)
\end{aligned}$$

Pour la fonction de partition

$$\begin{aligned}
P_{ss}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{ss}\left(n\right) x^{n} \\
&= 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n}}{1 - x^{n}} \right)^{8} \\
&= 16 \left(1 + 16x + 144x^{2} + 960x^{3} + 5264x^{4} + 25\,056x^{5} + ... \right)
\end{aligned}$$

Remarquons bien que cette fonction est équivalente à la somme de celle des deux secteurs (R) et (N-S).

1.5 Cordes hétérotiques

La théorie des supercordes a fait considérablement progresser la théorie des cordes , seulement elle présente des anomalies. Green et Schwarz considèrent le cas des anomalies de jauge pour les supercordes ouverte de type I et découvrent qu'à une boucle, les anomalies sont éliminées pour les groupes de jauge $SO(32)$ ou $E_8 \otimes E_8$. Cependant la théorie des supercordes ne peut incorporer de tels groupes, ce qui a amené D. Gross [33, 34] à introduire la notion de corde hétérotique qui est en fait une ingénieuse idée qui permet d'introduire ces groupes de jauge. En effet une corde hétérotique est une combinaison des modes droits des supercordes fermées à $D' = 10$ dimensions et des modes gauches des cordes bosoniques fermées à $D = 26$ dimensions. C'est alors par compactification des 16 dimensions internes (par un mécanisme de Kaluza-Klein [23, 24] généralisé, adapté à la théorie des cordes) que l'on produit le groupe de symétrie de Yang-Mills $E_8 \otimes E_8$ ou $SO(32)$.

En effet, les 16 dimensions compactifiées sont représentées sur un réseau, sa nature nous permet d'introduire le groupe $E_8 \otimes E_8$.

Les cordes hétérotiques sont des cordes fermées, par conséquent, le réseau doit être pair. D'un autre côté, pour que la théorie soit finie à une boucle, l'invariance modulaire nous permet de faire le calcul d'intégrale sur un domaine libre de pôles appelé domaine fondamental, cependant, cette invariance modulaire exige que le réseau soit self dual. Sachant que les réseaux self duaux pairs ne peuvent exister que dans des dimensions multiples de 8, à 16 dimensions, le réseau est celui des racines du groupe $E_8 \otimes E_8$.

On montre alors qu'à une boucle cette théorie est finie, libre d'anomalies, sans tachyons et libre de ghosts (pour plus de détails, voir par example [30, 21, 32]).

Chapitre 2

La théorie des membranes

2.1 La membrane bosonique

2.1.1 Introduction

Dans cette section, on présente une brève introduction à la théorie d'une membrane bosonique relativiste classique en mouvement dans un espace-temps de Minkovski à D dimensions. Cette analyse est très similaire à l'étude de la théorie d'une corde bosonique relativiste classique (chapitre 1). Tout comme une particule qui balaie une trajectoire décrite par une ligne d'univers, une membrane dynamique se déplace dans $D-1$ dimensions spatiales qui balaie un world volume en trois dimensions. Nous pouvons penser que le mouvement de la membrane dans l'espace-temps peut être décrit par le champ X^{μ}. Nous pouvons localement choisir un ensemble de 3 coordonnées σ^{α} , $\alpha \in \{0,1,2\}$, sur le world volume de la membrane, analogue à la coordonnée τ utilisée pour paramétriser la ligne d'univers d'une particule se déplaçant dans l'espace-temps . Nous allons parfois utiliser la notation $\tau = \sigma^0$ et nous allons utiliser des indices $a, b, ...$ pour décrire des coordonnées «spatiales» $\sigma^a \in \{1,2\}$ sur le world volume de la membrane. Dans un tel système de coordonnées, le mouvement de la membrane à travers l'espace-temps est décrit par un ensemble de fonctions $X^{\mu}(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2)$. L'action classique naturelle pour une membrane en mouvement dans l'espace-temps prend la forme de celle de Nambu-Goto :

$$S = -T_m \int d^3\sigma \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} \tag{2.1}$$

où T_m est une constante qui peut être interprétée comme la tension de la membrane $T_m = 1/(2\pi)^2 l_p^2$, et

$$h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\nu \tag{2.2}$$

la signature de la métrique de l'espace-temps est $(-+++...+)$.

Avec la racine carrée, il est emmêlant d'analyser la théorie de la membrane directement en utilisant cette action. Il y a une reformulation pratique de la théorie des membranes qui conduit aux mêmes équations du mouvement en utilisant une action polynomiale. Ceci est l'analogue de celle de Polyakov pour la corde bosonique. Pour décrire la membrane en utilisant cette approche, nous devons introduire une métrique auxiliaire $\gamma_{\alpha\beta}$ sur le world volume de la membrane. Nous prenons alors l'action sous la forme

$$S = -\frac{T}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1 \right) \tag{2.3}$$

Le terme -1 dans la parenthèse ne figure pas dans l'action analogue de la corde bosonique. Cette constante supplémentaire «terme cosmologique» est nécessaire en raison de l'absence d'invariance d'échelle dans la théorie. En faisons varier $\gamma_{\alpha\beta}$ dans l'équation. (2.3) nous obtenons l'équations du mouvement suivante :

$$\gamma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\nu \tag{2.4}$$

Remplacer ceci dans l'équation (2.3) donnerait à nouveau l'équation (2.1), et nous remarquons donc que les deux formes de l'action sont effectivement équivalentes. En faisons varier X^μ dans l'équation. (2.3), l'équation du mouvement est $\partial_\alpha \left(\sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) = 0$. Pour simplifier l'analyse, nous devons utiliser la symétrie de la théorie de jauge pour fixer la métrique γ. Malheureusement, contrairement au cas de la corde classique, où il y a trois composantes de la métrique et trois symétries continues (deux symétries de difféomorphisme et une symétrie d'échelle), pour la membrane, nous avons six composantes indépendantes de la métrique et seulement trois symétries de difféomorphisme. Nous pouvons utiliser ces symétries pour fixer les composantes $\gamma_{0\alpha}$ de la métrique comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{0\alpha} &= 0 && (2.5) \\ \gamma_{00} &= -\frac{4}{\nu^2} \det h_{\alpha\beta} && (2.6) \end{aligned}$$

où ν est une constante arbitraire. Une fois que nous avons choisi cette voie, aucune composante supplémentaire de la métrique γ_{ab} ne peut être fixée. Cette jauge ne peut être choisie que lorsque le world volume de la membrane est de la forme $\Sigma \times R$, où Σ est une surface de Riemann d'une topologie fixe. En utilisant l'équation (2.4) afin d'éliminer γ, l'action de la membrane dans cette voie est :

$$S = \frac{T\nu}{4} \int d^3\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{4}{\nu^2} \det h_{\alpha\beta} \right) \tag{2.7}$$

Il est naturel de réécrire cette action en termes de crochets de Poisson canoniques pour un τ égal : $\{f, g\} \equiv \epsilon^{ab} \partial_a f \partial_b g$ avec $\epsilon^{01} = 1$. Nous supposons que les coordonnées σ sont choisies de façon que, en ce qui concerne la forme symplectique associée à ces crochets, le volume de la surface de Riemann Σ est $\int d^2\sigma = 4\pi$. En termes de crochets de Poisson, l'action de la membrane devient

$$S = \frac{T\nu}{4} \int d^3\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{2}{\nu^2} \{X^\mu, X^\nu\} \{X_\mu, X_\nu\} \right) \tag{2.8}$$

Les équations du mouvement pour les champs X^μ sont

$$\begin{aligned} \ddot{X}^\mu &= \frac{4}{\nu^2} \partial_a \left(h h^{ab} \partial_b X^\mu \right) \\ &= \frac{4}{\nu^2} \{\{X^\mu, X^\nu\}, X_\nu\} && (2.9) \end{aligned}$$

Les contraintes auxiliaires sur le système résultant de la combinaison des équations (2.4), (2.5) et (2.6) sont

$$\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu} = -\frac{4}{\nu^2}\det h_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\nu^2}\left\{X^{\mu}, X^{\nu}\right\}\left\{X_{\mu}, X_{\nu}\right\} \tag{2.10}$$

et

$$\dot{X}^{\mu}\partial_a X_{\mu} = 0 \tag{2.11}$$

Il découle directement de l'équation. (2.11) que

$$\left\{\dot{X}^{\mu}, X_{\mu}\right\} = 0 \tag{2.12}$$

Nous avons ainsi exprimé la théorie classique de la membrane bosonique comme un système dynamique contraint. Les degrés de liberté de ce système sont des fonctions de X^{μ} sur le world volume à 3 dimensions d'une membrane avec une topologie $\Sigma \times R$. Cette théorie est encore complètement covariante. Il est difficile de la quantifier, cependant, en raison des contraintes et de la non-linéarité des équations du mouvement.

2.1.2 La membrane bosonique dans la jauge transverse

Nous considérons maintenant la théorie de la membrane dans les coordonnées du cône de lumière

$$X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 \pm X^{D-1}\right) \tag{2.13}$$

Les contraintes (2.10) et (2.11) peuvent être résolues explicitement dans la jauge du cône de lumière

$$X^{+}\left(\tau, \sigma, \rho\right) = \tau \tag{2.14}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\dot{X}^{-} &= \frac{1}{2}\dot{X}^{i}\dot{X}^{i} + \frac{1}{\nu^2}\left\{X^i, X^j\right\}\left\{X^i, X^j\right\} && (2.15)\\ \partial_a X^{-} &= \dot{X}^{i}\partial_a X^i && (2.16)\end{aligned}$$

Nous pouvons passer à un formalisme hamiltonien en calculant les densités des moments canoniques conjugés. Le moment totale dans la direction P^+ est alors

$$p^+ = \int d^2\sigma P^+ = 2\pi\nu T \tag{2.17}$$

et le hamiltonien de la théorie est donné par

$$H = \frac{\nu T}{4}\int d^2\sigma \left(\dot{X}^{i}\dot{X}^{i} + \frac{i}{2}\left\{X^i, X^j\right\}\left\{X^i, X^j\right\}\right) \tag{2.18}$$

La seule contrainte qui reste est que les degrés de liberté transverses doivent satisfaire est

$$\left\{\dot{X}^{i}, X^i\right\} = 0 \tag{2.19}$$

Cette théorie a une invariance résiduelle sous des diffeomorphismes indépendants de τ. Tels difféomorphismes ne changent pas la forme symplectique et ainsi laissent manifestement l'hamiltonien (2.18) invariant. Malheureusement, cette théorie est toujours assez difficile à quantifier, contrairement à la théorie des cordes, où les équations du mouvement sont linéaires dans un formalisme analogue, car dans le cas de la membrane, les équations du mouvement (2.9) sont non linéaires et difficiles à résoudre.

La spécificité de la membrane est le fait que le lagrangien ne dispose pas de l'invariance de Weyl [12], ce qui suggère que certaines techniques de base en théorie des cordes telles que (les symétries coformes) ne sont pas disponibles. Dans la théorie des cordes la dimension critique $D = 26$ est bien connue, elle est par exemple liée à l'invariance de Lorentz dans la jauge du cône de lumière. La dimension critique de la membrane a été principalement examinée au regard de son spectre [13, 14], par d'autres versions comme la BRST [15] ou par l'algèbre de Lorentz [16], où la dimension $D = 27$ apparaît comme une condition nécessaire.

2.2 Les supermembranes

2.2.1 Bases de supermembranes

Comme il existe plusieurs examens de la théorie des supermembranes [35, 36, 37, 38, 39], nous ne résumons ici que les faits de base. Par définition, une p-superbrane est un objet étendu de p dimensions qui se déplace dans un (super) espace dont la dimension bosonique D qui peut être courbé (soumis à des conditions de certaines cohérences), mais pour simplifier, on considère un espace plat R^D. La dimension du sous-espace fermionique est assez généralement déterminée par le nombre de composants d'un spin dans les dimensions D (éventuellement avec des facteurs supplémentaires de 1 / 2 ou 1 / 4 pour Majorana et / ou spineurs de Weyl). Contrairement au cas bosonique, où p et D peuvent être choisis plus ou moins à volonté, le nombre de possibilités pour des objets supersymétriques étendus est très limité. C'est essentiellement parce que le nombre de composantes d'un spineur augmente d'une façon exponentielle avec la dimension, tandis que le nombre de composantes d'un vecteur prend une forme linéaire, et il devient impossible de faire correspondre les degrés de liberté bosoniques et fermioniques une fois la dimension D est trop grande.

Nous paramétrisons le world volume à $(p+1)$-dimension par les coordonnées locales

$$\zeta_i = (\zeta_0, \zeta_r) \equiv (\tau, \sigma^r) \tag{2.20}$$

avec les indices r, $s, ... = 1,..., p$ représentent les coordonnées spatiales sur la p-brane. En conséquence, chaque point dans le world volume est caractérisé par un point dans le superspace

$$\zeta \to (X^\mu(\zeta), \theta_\alpha(\zeta)) \tag{2.21}$$

Les indices de l'espace-temps $\mu, \nu, ... = \overline{0, D-1}$, et les indices α, β représentent les composantes d'un spineur dans la dimension D. Dans cette section, on s'intéressera au cas $p = 2$, c'est la supermembrane, pour laquelle la version classique de la théorie ne peut exister que dans les espaces-temps de dimensions $D = 4, 5, 7$ et 11. Pour la version quantique, il y aura de nouvelles restrictions, comme pour les supercordes, de sorte que $D = 11$ est probablement la seule candidate qui survit pour une supermembrane quantique cohérente. Donc $D = 11$ est le cas le plus intéressant, notamment parce qu'il est lié à la théorie maximale de la supergravité à onze dimensions [40] ; dans ce cas, il y a 32 coordonnées fermioniques réelles θ^α (i.e. $\alpha, \beta, ... = 1, ..., 32$) correspondantes aux composantes d'un spineur de Majorana à onze dimensions. Notons que, du point de vue du world volume, θ^α se transforme comme un scalaire, ceci est une caractéristique générale des actions de type de Green Schwarz. Pour construire l'action de la supermembrane, on démarre de celle de Nambu-Goto.

Nous avons donc tout d'abord besoin d'une expression de la métrique induite sur le world volume qui nous permet de définir un élément de volume. Ceci est simplement obtenu en utilisant la définition suivante :

$$g_{ij}(X, \theta) = E_i^\mu E_j^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.22}$$

où les $E_i^\mu \{i = 0, 1, 2\}$ forment un dreibein tangent au world volume. Pour un superspace, ces dreibeins deviennent des supervielbeins avec des composantes fermioniques supplémentaires $\partial_i \theta$. La partie bosonique du vielbein pour la supermembrane est

$$E_i^\mu = \partial_i X^\mu + \overline{\theta} \Gamma^\mu \partial_i \theta \tag{2.23}$$

Les matrices carrées (32×32) Γ^μ vérifient l'algèbre de Clifford, à savoir

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.24}$$

Ces ingrédients sont tout ce qui est nécessaire pour écrire l'action de la supermembrane dans un espace plat à onze dimensions [35, 41]

$$L = -\sqrt{-g\left(X, \theta\right)} - \epsilon^{ijk}\left[\frac{1}{2}\partial_i X^\mu + \overline{\theta}\Gamma^\nu\partial_j\theta + \frac{1}{6}\overline{\theta}\Gamma^\mu\partial_i\theta\overline{\theta}\Gamma^\nu\partial_j\theta\right]\overline{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_k\theta \tag{2.25}$$

ce qui représente une généralisation de l'action de Green-Schwarz pour les supercordes (qui existe pour les dimensions de l'espace-temps $D = 3, 4, 6$ et 10). Le deuxième terme de cette action peut être interprété comme un terme de WZW dans le superespace cible [42]. Bien entendu, cette action aura des termes supplémentaires une fois que la supergravité est allumée ; la cohérence exige ensuite que les champs du fond, satisfont les équations de mouvement de la supergravité à $D = 11$ [35, 41] (voir [43] pour une analyse de la supermembrane dans un fond courbe). Notons également que, pour simplifier, nous avons mis la tension de la membrane T_p égale à l'unité. Disons que nous pouvons aussi traiter la métrique du world volume g_{ij} comme une variable indépendante sur le world volume à $(p+1)$ dimensions. En résolant les équations du mouvement de la métrique g_{ij} pour le lagrangien suivant :

$$L = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{ij}E_i^\mu E_{j\mu} + \frac{1}{2}\left(1-p\right)\right] \tag{2.26}$$

et en la remplaçant par la métrique on-shell, on se ramène à l'action précédente de Nambu-Goto. Malheureusement, cela ne suffit pas à mettre en place une formulation de la supermembrane qui serait l'analogue du world sheet de la formulation de Ramond et Neveu-Schwarz pour les supercordes.

Les équations du mouvement d'Euler-Lagrange à partir du dernier lagrangien sont

$$\partial_i\left(\sqrt{-g}g^{ij}E_j^\mu\right) = \epsilon^{ijk}E_j^\nu\partial_j\overline{\theta}\Gamma^\mu{}_\nu\partial_k\theta \tag{2.27}$$

$$\left(1+\Gamma\right)g^{ij}\Gamma_\rho E_i^\rho\partial_j\theta = 0 \tag{2.28}$$

où

$$\Gamma = \frac{\epsilon^{ijk}}{6\sqrt{-g}} E_i^\mu E_j^\nu E_k^\rho \Gamma_{\mu\nu\rho} \tag{2.29}$$

avec $\Gamma^2 = 1$, d'où $1 \pm \Gamma$ sont des opérateurs de projection. La caractéristique la plus importante de l'action (2.26) est ses symétries. Les globales sont déterminées par les symétries de Killing pour une géométrie du fond à $D = 11$ dans laquelle se déplace la supermembrane. Pour un espace-temps plat $D = 11$, elles correspondent aux transformations de super-Poincaré

$$\begin{aligned} \delta_P X^\mu &= a^\mu + \omega^{\mu\nu} X_\nu - \bar{\epsilon}\Gamma^\mu\theta && (2.30) \\ \delta_P \theta &= \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\theta + \epsilon && (2.31) \end{aligned}$$

Comme on le sait, les invariances globales donnent des quantités conservées. Par exemple, le courant associé à la supersymétrie à $D = 11$ est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} J^i &= 2\sqrt{-g} g^{ij} \Gamma_\rho E_j^\rho \theta \\ &\quad - \epsilon^{ijk} \left\{ E_j^\mu E_k^\nu \Gamma_{\mu\nu}\theta + \frac{4}{3}\left[\Gamma^\nu\theta\left(\bar{\theta}\Gamma_{\mu\nu}\partial_j\theta\right) + \Gamma_{\mu\nu}\theta\left(\bar{\theta}\Gamma^\nu\partial_j\theta\right)\right]\left(E_k^\mu - \frac{2}{5}\bar{\theta}\Gamma^\mu\partial_k\theta\right)\right\} && (2.32) \end{aligned}$$

de sorte que les variations de la supersymétrie globale sont générées par les supercharges de Noether

$$Q = \int d^2\sigma J^0$$

Les autres courants sont donnés par des expressions standards et ne sont pas présentées ici. Les symétries locales (de jauge) sont associées à l'invariance par reparametrization des coordonnées du world volume avec un champ vecteur ξ et un autre fermionique κ [41, 44, 45]

$$\begin{aligned} \delta_\kappa X^\mu &= \xi^i \partial_i X^\mu + \bar{\kappa}\left(1 - \Gamma\right)\Gamma^\mu\theta && (2.33) \\ \delta_\kappa \theta &= \xi^i \partial_i \theta + \left(1 - \Gamma\right)\kappa && (2.34) \end{aligned}$$

Ici κ est à nouveau un spineur de Majorana à 32 composantes. Le terme WZW dans le lagrangien est essentiel pour la symétrie κ. Comme il est déjà indiqué, la combinaison $(1-\Gamma)$ est un projecteur : Il élimine la moitié des composantes du spineur κ. Cela signifie que la symétrie κ divise par deux le nombre de composantes du spineur physique.

L'invariance κ exige l'identité de Fierz

$$\overline{\psi}_{[1}\Gamma^{\mu}\psi_2\overline{\psi}_3\Gamma_{\mu\nu}\psi_{4]} = 0 \tag{2.35}$$

dont la principale conséquence est qu'elle est valable seulement pour les dimensions $D = 4, 5, 7, 11$ (cette identité est analogue à celle de théories de jauge supersymétriques [31] et à l'action de Green-Schwarz, qui conduit aux valeurs $D = 3, 4, 6, 10$). La version quantique garde uniquement la dimension pertinente onze qui est celle de la M-Theory. Les invariances locales nous permettent d'éliminer les degrés de liberté non physiques, et de nous retrouver avec un nombre égal de degrés de liberté bosoniques et fermioniques, c'est ce que demande la supersymétrie. À savoir, l'invariance par reparamétrisation peut être utilisée pour éliminer (sur la couche de masse) trois polarisations de X^{μ} tangentes au world volume. Pour les fermions, nous invitons la symétrie κ pour se débarrasser de la moitié d'entre eux. Au total, on finit avec le compte suivant de degrés de liberté dans les dimensions autorisées pour les supermembranes classiques :

	$D=4$	$D=5$	$D=7$	$D=11$
X^{μ}	$4 \rightarrow 1$	$5 \rightarrow 2$	$7 \rightarrow 4$	$11 \rightarrow 8$
θ	$4 \rightarrow 2$	$8 \rightarrow 4$	$16 \rightarrow 8$	$32 \rightarrow 16$

Nous avons fixé tous les degrés de liberté pour exposer le spectre supersymétrique d'une manière explicite. Nous remarquons que le nombre de fermions est le double de celui de bosons. C'est l'un des problèmes en suspens qui consiste à trouver des champs auxiliaires qui correspondent aussi à des degrés de liberté off-shell. Il est probablement aussi difficile de trouver une formulation off-shell pour $N = 8$ de la supergravité. En fait, il est probable qu'une formulation off-shell dans un sens classique (avec un nombre fini de champs auxiliaires) ne peut exister. Néanmoins, quelques équivalents d'une version off-shell de la supermembrane ou d'un outil aussi puissant est nécessaire si nous voulons régler ce problème.

Chapitre 3

Le formalisme de la paraquantification

3.1 Introduction

La mécanique quantique (M.Q) configure prèsque toutes les théories de la physique moderne.

Son importance est dûe à son succès à unifier le double aspect de la matière (onde-corpuscule)

Ces deux aspects sont bien déterminés par :

La condition de Bohr

$$h\nu = E_1 - E_2 \tag{3.1}$$

Et la relation de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{|p|} \tag{3.2}$$

où ν et λ représentent l'aspect onde de la matière et E et $|p|$ la partie corpusculaire.

Dans le cas relativiste on peut montrer que ces deux relations sont une conséquence directe des équations du mouvement de Heisenberg :

$$\begin{aligned} -i\hbar\frac{\partial A}{\partial q_\mu} &= [A, P_\mu] \\ \mu &= \overline{0,3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

A étant une observable arbitraire et P_μ le quadrivecteur énergie-impulsion où $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (H, P_x, P_y, P_z)$ et $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (t, q_x, q_y, q_z)$.

Nous savons que dans un système classique, on peut écrire le Hamiltonien en fonction des coordonnées q_i et leurs conjugués p_i avec ($i = \overline{1, d}$; d =DDL)

Ce que nous appelons le principe de correspondance de la M.Q est que toutes les variables deviennent des opérateurs et que les équations du mouvement restent valables avec la condition que l'équation de Heisenberg (3.3) soit vérifiée.

Il existe des contraintes sur les opérateurs q_i et p_i :

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{3.4}$$

$$[q_i, p_j] = \imath\hbar\delta_{ij} \tag{3.5}$$

Le point essentiel de la M.Q est l'equation de Heisenberg (3.3) mais les équations de commutations (3.4-3.5) ne sont pas uniques [46], ce qui nous conduit à faire une généralisation de la M.Q qu'on appellera paraquantification (P.Q).

Pour mieux voir ce formalisme nous étudions le cas simple d'un oscillateur harmonique [47]

3.1.1 Paraquantification

L'hamiltonien d'un oscillateur harmonique s'écrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \tag{3.6}$$

les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases}$$

Le principe de correspondance avec l'equation de Heisenberg nous donnent

$$\begin{aligned} i\dot{q} &= [q, H] = ip \\ i\dot{p} &= [p, H] = -iq \end{aligned}$$

Mais avec la restriction $[q, p] = \imath$, on montre que cette condition n'est pas unique Pour cela, on utilisera les opérateurs définis par :

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \tag{3.7}$$

$$a^{+} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \tag{3.8}$$

Ces relations nous donnent :

$$H = \frac{1}{2}\left(a^{+}a + aa^{+}\right) \equiv N \tag{3.9}$$

$$[a, N] = a, \quad \left[a^{+}, N\right] = -a^{+} \tag{3.10}$$

Pour le spectre de N on le définit comme suit :

$$\begin{cases} N\left|n\right\rangle = N_n \left|n\right\rangle \\ \left\langle n \left| n' \right\rangle\right. = \delta_{n,n'} \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$N_n = N_0 + n \qquad \text{avec} \quad N_0 \geq 0, \;\; n \in \mathbb{N} \tag{3.12}$$

à partir des équations (3.9-3.11) et (3.12) on montre facilement que :

$$N_0 + n = \frac{1}{2}\left(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2\right) \tag{3.13}$$

Avec

$$a_{n,n'} \equiv \langle n|\, a\, |n'\rangle$$

On peut alors résoudre cette équation par récurrence sur n pour obtenir :

$$a_{n,n+1} = a^{+}_{n+1,n} = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1+n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}$$

et donc de montrer que

$$\begin{aligned} \langle n|\left[a, a^{+}\right]|n'\rangle &= \sum_{n''}\left\{\langle n|\, a\, |n''\rangle \langle n''|\, a^{+}\, |n'\rangle - \langle n|\, a^{+}\, |n''\rangle \langle n''|\, a\, |n'\rangle\right\} \\ &= \delta_{nn'}\left(|a_{n,n+1}|^2 - |a^{+}_{n,n-1}|^2\right) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à écrire

$$\langle n|\left[a, a^{+}\right]|n'\rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1-N_0) & n \text{ impair} \end{cases} \tag{3.14}$$

Nous définissons l'ordre de la paraquantification de telle sorte que $N_0 = \frac{Q}{2}$ où Q est l'ordre de la PQ.

Remarquons que seule la valeur $Q = 1$ nous conduit à la relation de commutation ordinaire $[a, a^{+}] = 1$ qui représente le cas d'un oscillateur harmonique (bosonique) dans le cadre quantique.

Pour $Q = 2$ c-à-d $N_0 = 1$ nous aurons une relation du type :

$$aaa^{+} - a^{+}aa = 2a$$

De même, l'hamiltonien d'un oscillateur fermionique est défini par :

$$H = \frac{1}{2}\left(b^+b - bb^+\right) \equiv N. \tag{3.15}$$

on peut alors monter que

$$N = \frac{1}{2}\left(|b_{n-1,n}|^2 - |b_{n,n+1}|^2\right) \tag{3.16}$$

De la même manière, on montre que $Q = 1$ conduit aux relations d'anticommutation

$$\{b, b^+\} = 1, \quad \{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0 \tag{3.17}$$

donc $b^2 = (b^+)^2 = 0$

Pour $Q = 2$ nous aurons les relations

$$bb^+b = 2b, \quad bbb^+ + b^+bb = 2b \tag{3.18}$$

et

$$b^3 = \left(b^+\right)^3 = 0$$

3.1.2 Généralisation au cas de plusieurs oscillateurs

Soit un système de plusieurs oscillateurs harmoniques bosoniques ou fermioniques

Dans le cadre paraquantique, les opérateurs a_k et a_k^+ (bosoniques ou fermioniques) vérifient des relations trilinéaires de telle sorte que

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_n\right]_\mp\right] = 2\delta_{kl}a_n \tag{3.19}$$

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_n^+\right]_\mp\right] = 2\delta_{kl}a_n^+ \mp 2\delta_{kn}a_l^+ \tag{3.20}$$

$$\left[a_k, \left[a_l, a_n\right]_\mp\right] = 0 \tag{3.21}$$

Le signe en haut est associé aux parafermions, celui en bas pour les parabosons le vide est défini par

$$\begin{aligned} \langle 0 \,|0\rangle &= 1 && (3.22) \\ a_k \,|0\rangle &= 0 \quad \forall k && (3.23) \end{aligned}$$

avec la condition qui fixe l'ordre de la paraquantification

$$a_k a_l^+ \,|0\rangle = Q\delta_{kl} \,|0\rangle \tag{3.24}$$

Ces relations dépendent du vide, mais on peut trouver des relations qui se suffisent à elles seules ("self-contained").

Le problème qui se pose est que lorsque l'ordre de la paraquantification augmente les relations se compliquent.

L'une des solutions à ce problème est d'utiliser la décomposition de Green [48], qui est définie comme suit :

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)} \quad , \quad a_k^+ = \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)+}$$

où $a_k^{(\alpha)}$ est la composante de Green qui agit dans le para-espace de Green.

les relations (3.19-3.21) deviennent bilinéaires :

$$\begin{aligned} \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+}\right]_{\pm} &= \delta_{kl} && (3.25) \\ \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\right]_{\pm} &= 0 && (3.26) \\ \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+}\right]_{\mp} &= \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\right]_{\mp} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) && (3.27) \end{aligned}$$

le vide $|0\rangle'$ vérifie :

$$a_k^{(\alpha)} \,|0\rangle' = 0 \,, \qquad \forall k, \alpha$$

Donc

$$a_k \left|0\right\rangle' = 0\,, \qquad \forall k$$

et :

$$a_k a_l^+ \left|0\right\rangle' = r\delta_{kl} \left|0\right\rangle'$$

Ce qui implique que $\left|0\right\rangle'$et $\left|0\right\rangle$ sont équivalents.

Chapitre 4

La membrane bosonique et parabosonique : Dimensions critiques et une noncommutativité déformée

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier une théorie perturbative classique d'une membrane bosonique basée sur l'étude d'une limite à basse énergie, on discutera la fermeture de l'algèbre des contraintes. Nous paraquantifierons ce modèle dans les deux approches covariante et transverse. A partir de la fermeture de la (para) algèbre de Poincaré, nous chercherons une relation entre la dimension de l'espace-temps D et l'ordre de la paraquantification Q. Enfin, nous discuterons la théorie de la membrane bosonique en interaction dans un champs de fond B [49]

4.2 Etude perturbative classique de la membrane bosonique

4.2.1 Action

On considère une membrane bosonique ouverte qui se déplace en $(D-1)$ dimensions spatiales et décrivant le world volume, paramétrisé par σ^a, $a = 0, 1, 2$. Nous utilisons une métrique Minkovskienne de signature $(-,+,...,+)$ avec $X^\mu(\tau,\sigma,\rho)$ est la coordonnée de la membrane. L'action de Polyakov pour la membrane bosonique est donnée par [50] :

$$S = -\frac{T_m}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-h}\left(h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1\right) \tag{4.1}$$

avec

$$h = \det h_{ab} \tag{4.2}$$

et $\mu, \nu = 0, 1, ..., D-1$. T_m décrit la tension de la membrane.

Pour simplifier l'étude de la dynamique des membranes, nous devons utiliser les symétries de la théorie. Malheureusement, contrairement au cas de la théorie classique des cordes , où il y a trois composantes de la métrique et trois symétries, en l'occurrence : deux difféomorphismes et une symétrie d'échelle, conduisant à une spécification complète de la métrique par une fixation de jauge pour la membrane, nous avons six composantes indépendantes et seulement trois symétries de difféomorphisme et en particulier pas de symétrie d'échelle.

Comme conséquence, les équations du mouvement de la membrane sont intrinsèquement non linéaires, ce qui ne permet pas d'obtenir leurs solutions générales. Certaines solutions particulières ont été considérées dans la littérature. Un chemin particulier de solutions est l'étude de la limite à basse énergie d'un rayon faible de la membrane cylindrique où on choisit la direction $\sigma^2 = \rho$ de la membrane comme enroulée autour d'un cercle de rayon R $(0 \leq \rho \leq 2\pi R)$.

Nous cherchons des solutions de la coordonnée de la membrane $X^{\mu}(\tau,\sigma,\rho)$ avec le choix introduit par [51] comme suit :

On considère le modèle perturbatif suivant ($a=(\alpha,2)$) [51, 52] :

$$X^{\mu}(\tau,\sigma,\rho)=Z^{\mu}(\tau,\sigma)+\rho W^{\mu}(\tau,\sigma) \tag{4.3}$$

avec une métrique

$$h^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \tag{4.4}$$

$$h^{\alpha 2}=g^{\alpha\beta}(\tau,\sigma)\,\phi_{\beta}(\tau,\sigma) \tag{4.5}$$

$$h^{22}=1+g^{\alpha\beta}\phi_{\alpha}\phi_{\beta} \tag{4.6}$$

$$\alpha,\beta=0,1$$

où W^{μ} est un champs constant normé.

Notons cependant que dans [52], la théorie perturbative est considérée jusqu'à l'ordre ϵ^2.

Au début, la métrique h^{ab} possède 6 composantes indépendantes, mais dans cette écriture de h^{ab}, il ne reste 5 indépendantes tandis que la sixième est fixée par la jauge $h^{22}=1+g^{\alpha\beta}\phi_{\alpha}\phi_{\beta}$ pour satisfaire la condition $\det h^{ab}=\det g^{\alpha\beta}$.

L'action (4.1) prend alors la forme suivante :

$$S=-\frac{T_s}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}D_{\alpha}Z^{\mu}D_{\beta}Z^{\nu}\eta_{\mu\nu} \tag{4.7}$$

avec $D_{\alpha}Z^{\mu}=\partial_{\alpha}Z^{\mu}+\phi_{\alpha}W^{\mu}$, et la tension de la membrane T_m se réduit à celle de la corde T_s par la relation :

$$T_s=2\pi RT_m=\frac{R}{l_p^3} \tag{4.8}$$

où l_p est la longueur de Planck.

Notons ici que l'invariance par reparamétrisation de ρ est cachée par son absence dans l'action. Cependant, le champ ϕ_α joue le rôle de ρ à l'égard de la symétrie cachée de la membrane qui est devenue une symétrie supplémentaire à la corde étendue et qui prend la forme [51, 53]

$$\delta_\Lambda Z^\mu = W^\mu \Lambda \tag{4.9}$$

$$\delta_\Lambda \phi_\alpha = -\partial_\alpha \Lambda \tag{4.10}$$

Cette symétrie supplémentaire doit être considérée comme une invariance de jauge supplémentaire de la corde dans l'esprit des modèles de Wess-Zumino-Witten jaugés [53].

Finalement, cette action devient invariante par rapport aux symétries : de Poincaré, locale, et de Weyl, avec aussi une nouvelle symétrie de jauge supplémentaire de paramètre Λ.

Les moments canoniques des champs Z^μ, $g_{\alpha\beta}$, ϕ_α sont respectivement :

$$\Pi_Z^\mu = -T_s\sqrt{-g}D_0 Z^\mu \tag{4.11}$$

$$\Pi_g^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.12}$$

$$\Pi_\phi^\alpha = 0 \tag{4.13}$$

Il est clair que, si Π_Z^μ correspond à une véritable dynamique, $\Pi_g^{\alpha\beta}$ et Π_ϕ^α sont des contraintes principales (primary constraints) de la théorie. La première est équivalente à l'annulation du tenseur energie-impulsion :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = -T_s\left(D_\alpha Z^\mu D_\beta Z_\mu - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}D_\rho Z^\mu D_\sigma Z_\mu\right) = 0 \tag{4.14}$$

et la deuxième est equivalente à la solution de l'équation du mouvement du champ induit ϕ_α donnée par

$$W^\mu D_\alpha Z_\mu = 0 \tag{4.15}$$

On peut alors définir les trois équations de contraintes de la théorie comme suit :

$$\chi_1 = 2gT_sT_{00} = \Pi_Z^2 + T_sD_1Z^\mu D_1Z_\mu = 0 \tag{4.16}$$

$$\chi_2 = \sqrt{-g}T_{01} = \Pi_Z^\mu D_1Z_\mu = 0 \tag{4.17}$$

$$\chi_3 = W^\mu \Pi_\mu = 0 \tag{4.18}$$

qui représentent les trois conditions imposées sur la métrique du world-volume par une analyse hamiltonienne détaillée d'une membrane libre [50].

Le hamiltonien classique est exprimé par :

$$H = \int d\sigma \mathcal{H}_0 \tag{4.19}$$

où

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\sqrt{-g}}{2T_sg_{11}}\chi_1 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\chi_2 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\phi_1\chi_3 = 0 \tag{4.20}$$

L'evolution temporelle du champ Z^μ et de son moment conjugué Π_Z^μ est décrite par :

$$\partial_0 Z^\mu = \{Z^\mu, H\}_{PB} = \{Z^\mu, \Pi_Z^\nu\}_{PB}\frac{\partial H}{\partial \Pi_{Z\nu}} + \{Z^\mu, Z^\nu\}_{PB}\frac{\partial H}{\partial Z_\nu} \tag{4.21}$$

Cette dernière avec le choix particulier correspondant à $\phi_0 = 0$ conduit à une forme ordinaire des crochets de Poisson (P.B) comme suit :

$$\{Z^\mu(\sigma), \Pi_{Z\nu}(\sigma')\}_{PB} = -\delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.22}$$

$$\left\{g_{a\beta}(\sigma), \Pi_g^{\rho\sigma}(\sigma')\right\}_{PB} = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\rho\right)\delta(\sigma - \sigma') \tag{4.23}$$

$$\left\{\phi_a(\sigma), \Pi_\phi^\beta(\sigma')\right\}_{PB} = \delta_\alpha^\beta\delta(\sigma - \sigma') \tag{4.24}$$

$$\{ailleurs\}_{PB} = 0$$

maintenant et par la suite, on considère $\Pi_Z^\mu = -T_s\sqrt{-g}\partial_0 Z^\mu$.

Notons ici que le P.B pour le champ induit ϕ_0 n'est pas vérifiée, ce cas est identique à celui du champ électrodynamique A_0 en QED, lorsque la jauge de Lorentz est utilisée.

A partir des P.B (4.22-4.24), on peut facilement montrer que les contraintes (4.16-4.18) satisfont l'algèbre fermée suivante :

$$\{\chi_1(\sigma), \chi_1(\sigma')\}_{PB} = 4T_s^2 [\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')] \partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.25}$$

$$\{\chi_2(\sigma), \chi_2(\sigma')\}_{PB} = [\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')] \partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.26}$$

$$\{\chi_3(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = 0 \tag{4.27}$$

$$\{\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma')\}_{PB} = -T_s [\chi_1(\sigma) + \chi_2(\sigma')] \partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.28}$$

$$\{\chi_1(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = T_s^2 [\chi_3(\sigma) + \chi_3(\sigma')] \partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.29}$$

$$\{\chi_2(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = [\chi_3(\sigma) + \chi_3(\sigma')] \partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{4.30}$$

l'ensemble de ces relations est l'équivalent de la fermeture de l'algèbre des contraintes pour la membrane libre donnée dans [11].

Maintenant, et comme il est mentionné ci-dessus, il est possible d'utiliser la symétrie de Weyl pour fixer la jauge $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, qui represente l'un des avantage de ce modèle.

On peut alors adopter la stratégie habituelle en théorie des cordes par rapport à l'algèbre de Virasoro en regroupant les contraintes précédentes dans une écriture compacte, ceci est fait par la substitution de la contrainte χ_3 dans les deux autres.

Redéfinissons maintenant le moment conjugué Π_Z^μ comme suit

$$\widetilde{\Pi}_Z^\mu = \Pi_Z^\mu - (\Pi_Z)_\nu W^{\mu\nu} \tag{4.31}$$

où $W^{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique constant défini comme suit :

$$W^{\mu\nu} = W^\mu W^\nu \tag{4.32}$$

$$\eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = W^\mu{}_\mu = 1 \tag{4.33}$$

On peut alors écrire

$$\chi_1 - \chi_3^2 = \widetilde{\Pi}_Z^2 + T_s D_1 Z^\mu D_1 Z_\mu = 0 \tag{4.34}$$

$$\chi_2 - \chi_3 \varphi_3 = \widetilde{\Pi}_Z^\mu D_1 Z_\mu = 0 \tag{4.35}$$

où φ_3 est la condition donnée par l'équation $\varphi_3 = W^\mu D_1 Z_\mu \equiv 0$

Il est facile de voir que

$$\left[\widetilde{\Pi}_Z^\mu \pm T_s D_1 Z^\mu\right]^2 = 0 \tag{4.36}$$

qui correspond à la forme bien connue des contraintes en théorie des cordes classiques.

L'équation du mouvement du champ Z^μ est

$$\partial_\alpha D^\alpha Z^\mu = 0 \tag{4.37}$$

on considère les conditions aux bords de Neumann (pour une corde fermée)

$$D_1 Z^\mu (\tau, 0) = D_1 Z^\mu (\tau, 2\pi) = 0 \tag{4.38}$$

En substituant (4.15) dans l'équation (4.37), avec les conditions aux bords (4.38), la solution générale coïncide avec l'équation ordinaire de la corde habituelle qui est donnée par la relation suivante :

$$Z^\mu (\tau, \sigma) = z_0^\mu + \frac{1}{\pi T_s} p^\mu \tau + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi T_s}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} + \widetilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}\right) \tag{4.39}$$

On peut aussi réécrire les relations P.B (4.22-4.24) en fonction des modes comme suit :

$$\{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\}_{PB} = -in\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{4.40}$$

$$\{\widetilde{\alpha}_n^\mu, \widetilde{\alpha}_m^\nu\}_{PB} = -in\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{4.41}$$

$$\{z_0^\mu, p^\nu\}_{PB} = -\eta^{\mu\nu} \tag{4.42}$$

résolvons l'équation (4.15), l'équation (4.36) est réécrite sous la forme $B_{\pm}^2 = 0$ où

$$B_{-}^{\mu} = (\partial_0 - \partial_1)(Z^{\mu} - W^{\mu\rho} Z_{\rho}) \tag{4.43}$$

$$B_{+}^{\mu} = (\partial_0 + \partial_1)(Z^{\mu} - W^{\mu\rho} Z_{\rho}) \tag{4.44}$$

Introduisons maintenant les générateurs de Virasoro L_n et $\widetilde{L}_n$ définis à travers les transformations de Fourier des contraintes précédentes :

$$B_{-}^2 = \frac{2}{\pi T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_n e^{-2n(\tau-\sigma)} \tag{4.45}$$

$$B_{+}^2 = \frac{2}{\pi T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}_n e^{-2n(\tau+\sigma)} \tag{4.46}$$

En terme de modes, L_n et $\widetilde{L}_n$ prennent les formes suivantes : :

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m} A_{n-m}^{\mu} A_n^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}^{\mu} \alpha_n^{\nu} \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{4.47}$$

$$\widetilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}_{n-m}^{\mu} \widetilde{A}_n^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\alpha}_{n-m}^{\mu} \widetilde{\alpha}_n^{\nu} \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{4.48}$$

avec

$$A_n^{\mu} = \alpha_n^{\mu} - W^{\mu\rho} \alpha_{n\rho} \tag{4.49}$$

$$\widetilde{A}_n^{\mu} = \widetilde{\alpha}_n^{\mu} - W^{\mu\rho} \widetilde{\alpha}_{n\rho} \tag{4.50}$$

et qui vérifient la forme habituelle de l'algèbre classique de Virasoro.

On peut également voir que les générateurs de Poincaré sont inchangées et vérifier la fermeture de l'algèbre classique.

4.3 Paraquantification covariante et fermeture de l'algèbre

4.3.1 La paraquantification covariante du modèle

La paraquantification de la théorie est conduite par la reinterpretation des variables dynamiques classiques $Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ et $\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ comme opérateurs satisfaisant les relations de commutation trilinéaires :

$$\left[Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[\Pi_Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\left[\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^{\rho}\delta(\sigma-\sigma')+\eta^{\mu\rho}\Pi^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{4.51}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\left[\eta^{\mu\nu}Z^{\rho}\delta(\sigma-\sigma')+i\eta^{\mu\rho}Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{4.52}$$

$$\left[Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\eta^{\mu\rho}Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'') \tag{4.53}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^{\rho}\delta(\sigma-\sigma') \tag{4.54}$$

Réécrites en termes des variables du centre de masse z_0^{μ}, p^{μ} et des modes d'éxcitation α_n^{μ} et $\widetilde{\alpha}_n^{\mu}$ de la corde, les équations (4.51-4.54) sont équivalentes à :

$$\left[\alpha_n^{\mu},\left[\alpha_m^{\nu},\alpha_l^{\rho}\right]_+\right]=2n\left(\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\alpha_l^{\rho}+\eta^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\alpha_m^{\nu}\right) \tag{4.55}$$

$$\left[\alpha_n^{\mu},\left[A^{\nu},\alpha_m^{\rho}\right]_+\right]=2n\eta^{\mu\rho}\delta_{n+m,0}A^{\nu} \tag{4.56}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^{\mu},\left[\widetilde{\alpha}_m^{\nu},\widetilde{\alpha}_l^{\rho}\right]_+\right]=2n\left(\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\widetilde{\alpha}_l^{\rho}+\eta^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\widetilde{\alpha}_m^{\nu}\right) \tag{4.57}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^{\mu},\left[B^{\nu},\widetilde{\alpha}_l^{\rho}\right]_+\right]=2n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}B^{\nu} \tag{4.58}$$

$$\left[z_0^{\mu},\left[p^{\nu},p^{\rho}\right]_+\right]=2i\left(\eta^{\mu\nu}p^{\rho}+\eta^{\mu\rho}p^{\nu}\right) \tag{4.59}$$

$$\left[z_0^{\mu},\left[C^{\nu},p^{\rho}\right]_+\right]=2i\eta^{\mu\rho}C^{\nu} \tag{4.60}$$

$$\left[p^{\mu},\left[z_0^{\nu},z_0^{\rho}\right]_+\right]=-2i\left(\eta^{\mu\nu}z_0^{\rho}+\eta^{\mu\rho}z_0^{\nu}\right) \tag{4.61}$$

$$\left[p^{\mu},\left[D^{\nu},z_0^{\rho}\right]_+\right]=-2i\eta^{\mu\nu}D^{\nu} \tag{4.62}$$

ici, les operateurs A^{μ}, B^{μ}, C^{μ} et D^{μ} sont respectivement :

$A^{\mu} = z_0^{\mu}$, $\widetilde{\alpha}_n^{\mu}$ ou p^{μ}.

$B^{\mu} = z_0^{\mu}$, α_n^{μ} ou p^{μ}

$C^{\mu} = \alpha_n^{\mu}$, $\widetilde{\alpha}_n^{\mu}$ ou z_0^{μ}.

$D^{\mu} = \alpha_n^{\mu}$, $\widetilde{\alpha}_n^{\mu}$ ou p^{μ}

Toutes les autres relations sont nulles.

Les composantes de Green d'un paraboson A peuvent être généralement exprimées comme suit [46, 47, 48] :

$$A = \sum_{\alpha=1}^{Q} A^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{Q} e^{\alpha} A^{\alpha} \tag{4.63}$$

où $\alpha = \overline{1, Q}$, Q est le paramètre de la paraquantification et e^{α} sont des éléments d'une algèbre de Clifford satisfaisant les relations suivantes :

$$e^{\alpha} e^{\beta} + e^{\beta} e^{\alpha} = 2\delta^{\alpha\beta} \tag{4.64}$$

$$\left[e^{\alpha}, A^{\beta}\right] = 0 \tag{4.65}$$

alors, la décomposition des variables dynamiques peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} Z^{\mu}(\tau, \sigma) &= \sum_{\beta=1}^{Q} Z^{\mu(\beta)}(\tau, \sigma) \\ &= \sum_{\beta=1}^{Q} \left\{ z_0^{\mu(\beta)} + \frac{1}{\pi T_s} p^{\mu(\beta)} \tau + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi T_s}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^{\mu(\beta)} e^{-2in(\tau - \sigma)} + \widetilde{\alpha}_n^{\mu(\beta)} e^{-2in(\tau + \sigma)} \right) \right\} \end{aligned} \tag{4.66}$$

En termes de composantes de Green, les relations de commutation trilinéaires (4.55-4.62) sont équivalentes aux relations bilinéaires anormales suivantes :

$$\left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{4.67}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^{\mu(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\widetilde{\alpha}_n^{\mu(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{4.68}$$

$$\left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = i\eta^{\mu\nu} \quad ; \quad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{4.69}$$

et tous les autres commutateurs (et anticommutateurs) de type $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\alpha)}\right] = 0$ (et $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0$, pour $\alpha \neq \beta$).

4.3.2 (Para) algèbres de Poincaré et des contraintes

Dans le cas parastatistique, les générateurs de Virasoro L_n et $\widetilde{L}_n$ ont la même écriture que dans le cas classique avec une symétrisation adéquate, on peut alors écrire :

$$L_n = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\alpha^{\mu}_{n-m}, \alpha^{\nu}_{n}\right]_+ \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha^{\mu(\alpha)}_{n-m}\alpha^{\nu(\alpha)}_{n} : \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{4.70}$$

$$\widetilde{L}_n = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\widetilde{\alpha}^{\mu}_{n-m}, \widetilde{\alpha}^{\nu}_{n}\right]_+ \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \widetilde{\alpha}^{\mu(\alpha)}_{n-m}\widetilde{\alpha}^{\nu(\alpha)}_{n} : \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{4.71}$$

On peut facilement vérifier que l'algèbre de Virasoro reste inchangée en dehors de la charge centrale qui prend la forme $c_Q = Q\left(D-1\right)/12$:

$$\left[L_n, L_m\right] = \left(n-m\right)L_{n+m} + \frac{Q\left(D-1\right)}{12} n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0} \tag{4.72}$$

$$\left[\widetilde{L}_n, \widetilde{L}_m\right] = \left(n-m\right)\widetilde{L}_{n+m} + \frac{Q\left(D-1\right)}{12} n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0} \tag{4.73}$$

$$\left[L_n, \widetilde{L}_m\right] = 0 \tag{4.74}$$

De la même manière, et aussi avec une symétrisation adéquate, nous pouvons définir les générateurs du moment angulaire associé aux transformations de Poincaré comme suit :

$$
\begin{aligned}
M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma \left([Z^\mu, \Pi_Z^\nu]_+ - [Z^\nu, \Pi_Z^\mu]_+\right) \\
&= \frac{1}{2}[z_0^\mu, p^\nu]_+ - \frac{1}{2}[z_0^\nu, p^\mu]_+ \\
&- \frac{i}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\left([\alpha_{-m}^\mu, \alpha_m^\nu]_+ - \left[\alpha_{-m}^\nu, \alpha_m^\mu\right]_+ + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^\mu, \widetilde{\alpha}_m^\nu\right]_+ - \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^\nu, \widetilde{\alpha}_m^\mu\right]_+\right)
\end{aligned} \tag{4.75}
$$

Ces générateurs avec l'impulsion totale vérifient une (para) algèbre de Poincaré fermée donnée par :

$$\left[p^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 0 \tag{4.76}$$

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = -i\eta^{\mu\nu}p^\rho + i\eta^{\mu\rho}p^\nu \tag{4.77}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\nu\rho}M^{\sigma\mu} - i\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} + i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} \tag{4.78}$$

Où la relation habituelle $[p^\mu, p^\nu] = 0$ est brisée.

On peut aussi montrer que les conditions des états physiques sont invariantes sous les transformations de Lorentz. On peut en effet voir ceci à travers les relations suivantes

$$[M^{\mu\nu}, L_n] = \left[M^{\mu\nu}, \widetilde{L}_n\right] = 0 \tag{4.79}$$

4.4 Paraquantification transverse et dimensions critiques

4.4.1 Paraquantification transverse

Maintenant, après avoir exploré la paraquantification de la membrane à la limite basse énergie dans la jauge covariante, en imposant les conditions de Virasoro comme des contraintes subsidiaires sur des états physiques, il y a encore une symétrie de jauge résiduelle qui peut être utilisée pour faire d'autres choix spécifiques de jauges. En effet, en faisant un choix particulier non covariant, il devient possible de résoudre les équations de contrainte, et de décrire la théorie dans un espace de Fock qui représente les degrés de liberté physiques seulement.

Ce choix particulier correspond à imposer des conditions de jauges supplémentaires et qui sera non covariant, mais très pratique.

- La première consiste en la substitution de la contrainte χ_3 dans les deux autres χ_1 et χ_2 afin de réduire le problème à une théorie des cordes, ceci se traduit par les choix spécifiques et convenables suivants :

$$Z^{D-1} = z_0^{D-1} \tag{4.80}$$

$$p^{D-1} = \alpha_n^{D-1} = \widetilde{\alpha}_n^{D-1} = 0 \quad \text{pour } n \neq 0 \tag{4.81}$$

$$Z^{\mu}(\tau, \sigma) = \left(z_0^{D-1}, Z^i(\tau, \sigma)\right) \qquad , \qquad i = \overline{0, D-2} \tag{4.82}$$

ce qui réduit le modèle à une corde parabosonique fermée étendue qui se déplace dans un espace-temps plat à $(D-1)$ dimensions

- Le second correspond à utiliser la jauge transverse habituelle donnée par les équations :

$$Z^{+}(\tau, \sigma) = z^{+} + \alpha' p^{+} \tau \text{ (corde fermée)} \tag{4.83}$$

$$\alpha_n^{+} = \widetilde{\alpha}_n^{+} = 0 \quad \text{pour } n \neq 0 \tag{4.84}$$

dans laquelle les équations de contraintes de Virasoro seront résolues pour obtenir les variables dynamiques α_n^I, $\widetilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, p^+, z_0^I et p^I avec $I = \overline{1, D-3}$, et $T_s^{-1} = 2\pi\alpha'$.

Ces dernières vérifient les relations trilinéaires suivantes :

$$\left[\alpha_n^I, \left[\alpha_m^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = 2n\left(\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}\alpha_l^K + \delta_{n+l,0}\delta^{IK}\alpha_m^J\right) \tag{4.85}$$

$$\left[\alpha_n^I, \left[A, \alpha_m^J\right]_+\right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}A \tag{4.86}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^I, \left[\widetilde{\alpha}_m^J, \widetilde{\alpha}_l^K\right]_+\right] = 2n\left(\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}\widetilde{\alpha}_l^K + \delta_{n+l,0}\delta^{IK}\widetilde{\alpha}_m^J\right) \tag{4.87}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^I, \left[B, \widetilde{\alpha}_m^J\right]_+\right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}B \tag{4.88}$$

$$\left[z_0^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] = 2i\left(\delta^{IJ}p^K + \delta^{IK}p^J\right) \tag{4.89}$$

$$\left[z_0^I, \left[C, p^J\right]_+\right] = 2i\delta^{IJ}C \tag{4.90}$$

$$\left[p^I, \left[z_0^J, z_0^K\right]_+\right] = -2i\left(\delta^{IJ}z_0^K + \delta^{IK}z_0^J\right) \tag{4.91}$$

$$\left[p^I, \left[D, z_0^J\right]_+\right] = -2iD \tag{4.92}$$

$$\left[z_0^-, \left[p^+, p^+\right]_+\right] = -4ip^+ \tag{4.93}$$

$$\left[z_0^-, \left[E, p^+\right]_+\right] = -2iE \tag{4.94}$$

$$\left[p^+, \left[z_0^-, z_0^-\right]_+\right] = 4iz_0^- \tag{4.95}$$

$$\left[p^+, \left[F, z_0^-\right]_+\right] = 2iF \tag{4.96}$$

où les opérateurs A, B, C, D, E et F sont donnés par :

$A = z_0^I,\ \widetilde{\alpha}_n^I,\ z_0^-,\ p^+$ ou p^I.

$B = z_0^I,\ \alpha_n^I,\ z_0^-,\ p^+$ ou p^I

$C = \alpha_n^I,\ \widetilde{\alpha}_n^I,\ z_0^-,\ p^+$ ou z_0^I.

$D = \alpha_n^I,\ \widetilde{\alpha}_n^I,\ z_0^-,\ p^+$ ou p^I

$E = z_0^I,\ \widetilde{\alpha}_n^I,\ z_0^-,\ \alpha_n^I$ ou p^I

$F = z_0^I,\ \widetilde{\alpha}_n^I,\ z_0^-,\ \alpha_n^I$ ou p^I

Toutes les autres relations trilinéaires sont nulles.

En termes de composantes de Green, on peut écrire les relations bilinéaires anormales suivantes

$$\left[\alpha_n^{I(\alpha)}, \alpha_m^{J(\alpha)}\right] = n\delta^{IJ}\delta_{n+m} \qquad ; \qquad \left[\alpha_n^{I(\alpha)}, \alpha_m^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.97}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{J(\alpha)}\right] = n\delta^{IJ}\delta_{n+m} \qquad ; \qquad \left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.98}$$

$$\left[z_0^{I(\alpha)}, p^{J(\alpha)}\right] = -i\delta^{IJ} \qquad ; \qquad \left[z_0^{I(\alpha)}, p^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.99}$$

$$\left[z_0^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}\right] = i \qquad ; \qquad \left[z_0^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.100}$$

et tous les autres commutateurs (et anticommutateurs) de type $\left[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}\right] = 0$ (et $\left[A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}\right]_+ = 0$, pour $\alpha \neq \beta$).

4.4.2 Nouvelles dimensions critiques

Afin de vérifier la cohérence de ce modèle paraquantique, on va construire les générateurs de Lorentz et vérifier leurs relations de commutation. La seule source de l'anomalie est le commutateur $\left[M^{I-}, M^{J-}\right]$qui doit être nul. A partir de la relation (4.75) on peut écrire l'expression du generateur M^{I-} comme suit (nous avons choisi $W^{D-1} = 0$) :

$$\begin{aligned} M^{I-} = & \frac{1}{2}\left[z_0^I, p^-\right]_+ - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ \\ & - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+} L_m^{tr}\right]_+ - \left[\frac{1}{p^+} L_{-m}^{tr}, \alpha_m^I\right]_+ \right. \\ & \left. + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^I, \frac{1}{p^+} \widetilde{L}_m^{tr}\right]_+ - \left[\frac{1}{p^+} \widetilde{L}_{-m}^{tr}, \widetilde{\alpha}_m^I\right]_+ \right) \end{aligned} \tag{4.101}$$

où la forme paraquantique des modes est imposée de la manière suivante :

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} L_n^{tr} \quad ou \quad \alpha_n^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} L_n^{tr(\beta\beta)} \tag{4.102}$$

$$\widetilde{\alpha}_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} \widetilde{L}_n^{tr} \quad ou \quad \widetilde{\alpha}_n^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} \widetilde{L}_n^{tr(\beta\beta)} \tag{4.103}$$

$$\alpha_0^- = \widetilde{\alpha}_0^- = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^- \quad ou \quad \widetilde{\alpha}_0^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{p^+} \left(L_0^{tr(\beta\beta)} - a\right) \tag{4.104}$$

(a est la constante d'ordre, et $a = \widetilde{a}$)

la partie transverse des générateurs L_n et $\widetilde{L}_n$ est donnée par

$$L_n^{tr} = \sum_{\alpha=1}^{Q} L_n^{tr(\alpha\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{n-m}^I, \alpha_n^I\right]_+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^{I(\alpha)}\alpha_n^{I(\alpha)} : \quad (4.105)$$

$$\widetilde{L}_n^{tr} = \sum_{\alpha=1}^{Q} \widetilde{L}_n^{tr(\alpha\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\widetilde{\alpha}_{n-m}^I, \widetilde{\alpha}_n^I\right]_+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \widetilde{\alpha}_{n-m}^{I(\alpha)}\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)} : \quad (4.106)$$

Maintenant, en utilisant les expressions suivantes :

$$[AB, C]_+ = A\,[B, C]_+ - [A, C]\,B \ or \ A\,[B, C] + [A, C]_+\,B \quad (4.107)$$

$$[A, BC]_+ = [A, B]_+\,C - B\,[A, C] \ \ or \ \ [A, B]\,C + B\,[A, C]_+ \quad (4.108)$$

$$\zeta\,(0) = -\frac{1}{2} \quad (4.109)$$

où $\zeta\,(s)$ est la fonction usuelle de Zeta-Riemann definie par :

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (4.110)$$

et en utilisant l'ensemble des relations trilinéaires (4.85-4.96), on peut ficilement voir que $\left[\frac{1}{p^+}, L_n^{tr}\right] = \left[\frac{1}{p^+}, \widetilde{L}_n^{tr}\right] = 0$. Alors, il n'est pas difficile de vérifier que l'expression (4.101) peut prendre la forme suivante :

$$\begin{aligned} M^{I-} = {} & \frac{1}{\alpha'}\left[z_0^I, \frac{1}{p^+}\right]_+\left(L_0^{tr} - a\right) - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ \\ & - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ L_m^{tr} - L_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, \alpha_m^I\right]_+\right. \\ & \left. + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ \widetilde{L}_m^{tr} - \widetilde{L}_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, \widetilde{\alpha}_m^I\right]_+\right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

qui coincide exactement avec celle imposée dans la référence [54].

Maintenant, en utilisant les relations (4.85-4.100) et (4.111), un calcul direct donne :

$$\left[M^{I-},M^{J-}\right]=\frac{1}{2\alpha'\left(p^{+}\right)^{2}}\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\left[\alpha_{-m}^{I},\alpha_{m}^{J}\right]_{+}-\left[\alpha_{-m}^{J},\alpha_{m}^{I}\right]_{+}+\left[\widetilde{\alpha}_{-m}^{I},\widetilde{\alpha}_{m}^{J}\right]_{+}-\left[\widetilde{\alpha}_{-m}^{J},\widetilde{\alpha}_{m}^{I}\right]_{+}\Big)\left[\frac{Q\left(D-3\right)}{12}\left(n-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}a-2n\right] \tag{4.112}$$

qui doit être nul pour les conditions

$$D=3+\frac{24}{Q} \tag{4.113}$$

$$a=2 \tag{4.114}$$

En particulier, on peut avoir des membranes parabosoniques avec des dimensions critiques $D=27$, 15, 11, 9, 7, 6, 5 et 4, respectivement pour les ordres $Q=1$, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Ce résultat, qui peut être réécrit sous la forme $D-1=2+\frac{24}{Q}$, reflète la relation $D'=2+\frac{24}{Q}$ pour les cordes parabosoniques [18, 54], car, comme il était mentionnée ci-dessous, la corde est dérivée d'une réduction dimensionnelle de la membrane, de sorte que, l'une des dimension de la membrane est absorbée par une jauge.

4.5 La membrane parabosonique dans un champ de fond constant

Comme il a été brièvement évoqué dans l'introduction, nous allons étudier la membrane bosonique qui se propage en présence d'un champ (3-form) $A_{\mu\nu\rho}$. Comme il a été mentionné ci-dessous, ici, et à cause des difficultés dans les sections precédentes, on est obligé de trouver un système plus simple qui tire profit des caractéristiques essentielles de la dynamique d'une membrane ouverte dans un champ constant à 3-form. Puisque la paraquantification directe de la membrane est difficile, jusqu'à présent, nous sommes amenés à travailler dans le même secteur des solutions utilisées dans les sections précédentes de ce chapitres c'est à dire : dans le cas libre : la limite à basse énergie d'un rayon faible d'une membrane cylindrique.

Le problème est réduit à l'étude d'une corde étendue qui se propage en présence d'un champ à 2-form $B_{\mu\nu}$. Puisque, dans le cas quantique, l'origine de la noncommutativité est la présence du champ de fond qui est couplé à la corde, on est conduit à poser la question quel serait le résultat dans le cas paraquantique ?

L'action de Polyakov d'une membrane bosonique en présence d'un champ de fond $A_{\mu\nu\rho}$ s'écrit [8, 55] :

$$S = -\frac{T_m}{2}\int d^3\sigma \left[\sqrt{-h}\left(h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1\right) + \frac{1}{3}A_{\mu\nu\rho}\epsilon^{abc}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_c X^\rho\right] \tag{4.115}$$

En utilisant la troncature (4.3) avec l'écriture de la métrique h^{ab} (4.4-4.6), l'action (4.115) sera réduite à l'expression :

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta}D_\alpha Z^\mu D_\beta Z^\nu \eta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha Z^\mu \partial_\beta Z^\nu\right) \tag{4.116}$$

avec

$$B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu\rho}W^\rho \tag{4.117}$$

Maintenant, dans la jauge $\phi_0 = 0$ utilisée dans les sections précédentes, l'expression du moment conjugué canonique est donnée par :

$$\Pi_Z^\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_0 Z^\mu + B_{\mu\nu}\partial_1 Z^\nu\right) \tag{4.118}$$

La variation de Z^μ dans l'action conduit à l'équation du mouvement (4.37), avec les nouvelles conditions aux bords :

$$\partial_0 Z^\mu + B_{\mu\nu}\partial_1 Z^\nu\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0 \tag{4.119}$$

($l=\pi$ pou une corde ouverte et 2π pour une fermée)

On peut obtenir la solution sous la forme suivante

$$Z^{\mu}(\tau,\sigma)=z_0^{\mu}+2\alpha'\left(p^{\mu}\tau-B^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}\sigma\right)+i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^{\mu}\cos n\sigma-iB^{\mu}{}_{\nu}\alpha_n^{\nu}\sin n\sigma\right)e^{-in\tau} \tag{4.120}$$

pour le cas ouvert et

$$\begin{aligned}Z^{\mu}(\tau,\sigma)&=z_0^{\mu}+2\alpha'\left(p^{\mu}\tau-B^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}\sigma\right)\\&+\frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left[\left(\alpha_n^{\mu}-iB^{\mu}{}_{\nu}\alpha_n^{\nu}\right)e^{-2in(\tau-\sigma)}+\left(\widetilde{\alpha}_n^{\mu}+iB^{\mu}{}_{\nu}\widetilde{\alpha}_n^{\nu}\right)e^{-2in(\tau+\sigma)}\right]\end{aligned} \tag{4.121}$$

pour le cas fermée.

On considère maintenant, uniquement le cas ouvert.

Rappelons d'abord que, dans le cas ordinaire, la quantification de $Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ doit être différente des relations de commutation canoniques habituelles pour un champ libre, parce que les relations de commutation standards sont incompatibles avec les conditions aux bords (4.119). Il faut modifier la quantification d'une manière cohérente. En effet, alors que les relations de commutation sont standards pour tout point situé à l'intérieur de la corde ouverte, aux deux extrémités, nous trouvons que les coordonnées de l'espace-temps sont noncommutatives.

Ici, dans le cas paraquantique, nous procéderons de même, à savoir là encore, il faut modifier la paraquantification d'une manière cohérente.

La manière habituelle de la quantification d'un système classique consiste à commencer par la structure symplectique sur l'espace des phases. En appliquant la même procédure que dans [9], étendue au cas paraquantique, on trouve que la forme symplectique symétrisée est :

$$\Omega=\frac{1}{2}\left\langle\int d\sigma\eta^{\mu\nu}\left[dZ_{\mu},d\Pi_Z^{\mu}\right]_+\right\rangle \tag{4.122}$$

avec

$$\langle A \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} d\tau A \tag{4.123}$$

En termes des composantes de Green, on peut écrire

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^{Q} \Omega^{(\alpha\alpha)} + \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} \Omega^{(\alpha\beta)}$$

avec ($2\alpha' = 1$)

$$\Omega^{(\alpha\alpha)} = \left\langle \int d\sigma \eta^{\mu\nu} dZ_{\mu}^{(\alpha)} d\Pi_{Z}^{\mu(\alpha)} \right\rangle \tag{4.124}$$

$$= M_{\mu\nu} dp^{\mu(\alpha)} \left(dz_0^{\nu(\alpha)} + \frac{\pi}{2} B^{\nu}{}_{\rho} dp^{\rho(\alpha)} \right) + i \sum_{n=1} \frac{1}{n} M_{\mu\nu} d\alpha_n^{\mu(\alpha)} d\alpha_{-n}^{\nu(\alpha)} \tag{4.125}$$

$$\Omega^{(\alpha\beta)} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.126}$$

où $M^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - B^{\mu\rho} B^{\nu}{}_{\rho}$

Ce qui nous conduit à écrire les relations bilinéaires anormales suivantes :

$$\left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\alpha)}\right] = n \left(M^{-1}\right)^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \qquad ; \qquad \left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.127}$$

$$\left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = i\pi \left(M^{-1}\right)^{\mu\nu} \qquad ; \qquad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.128}$$

$$\left[z_0^{\mu(\alpha)}, z_0^{\nu(\alpha)}\right] = i\pi \left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu} \qquad ; \qquad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, z_0^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.129}$$

$$\left[p^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = 0 \qquad ; \qquad \left[p^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha \neq \beta \tag{4.130}$$

qui sont équivalentes aux relations de commutation trilinéaires suivantes

$$\left[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho]_+\right] = 2n\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\alpha_l^\rho + \left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\alpha_m^\nu\right] \tag{4.131}$$

$$\left[\alpha_n^\mu, [A^\nu, \alpha_m^\rho]_+\right] = 2n\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\delta_{n+m,0}A^\nu \tag{4.132}$$

$$\left[z_0^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\pi\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}p^\rho + \left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}p^\nu\right] \tag{4.133}$$

$$\left[z_0^\mu, [z_0^\nu, z_0^\rho]_+\right] = 2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}z_0^\rho + \left(BM^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{4.134}$$

$$\left[z_0^\mu, [z_0^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}p^\rho + \left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{4.135}$$

$$\left[z_0^\mu, [z_0^\nu, \alpha_n^\rho]_+\right] = 2i\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\alpha_n^\rho \tag{4.136}$$

$$\left[z_0^\mu, [\alpha_n^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\pi\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\alpha_n^\nu \tag{4.137}$$

$$\left[p^\mu, [z_0^\nu, z_0^\rho]_+\right] = -2i\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}z_0^\rho + \left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{4.138}$$

où $A^\mu = z_0^\mu$ ou p^μ et les autres relations trilinéaires sont nulles.

Il n'est pas difficile de voir que les relations trilinéaires pour le champ Z^μ et son moment conjuqué Π_Z^μ peuvent être écrites comme suit :

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma), [Z^\nu(\tau,\sigma'), Z^\rho(\tau,\sigma'')]_+\right] = 2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}Z^\rho\varepsilon(\sigma,\sigma') + \left(BM^{-1}\right)^{\mu\rho}Z^\nu\varepsilon(\sigma,\sigma'')\right] \tag{4.139}$$

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma), [\Pi_Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')]_+\right] = 2i\left[\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma') + \eta^{\mu\rho}\Pi_Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{4.140}$$

$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma), [Z^\nu(\tau,\sigma'), Z^\rho(\tau,\sigma'')]_+\right] = -2i\left[\eta^{\mu\nu}Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma') + i\eta^{\mu\rho}Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{4.141}$$

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma), [Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')]_+\right] = 2i\left[\pi\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\varepsilon(\sigma,\sigma') + \eta^{\mu\rho}Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{4.142}$$

$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma), [Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')]_+\right] = -2i\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma') \tag{4.143}$$

avec

$$\varepsilon\left(\sigma,\sigma'\right)=\begin{cases}1 & pour \quad \sigma=\sigma'=0\\ -1 & pour \quad \sigma=\sigma'=\pi\\ 0 & ailleurs.\end{cases} \tag{4.144}$$

et

$$\Delta_{+}\left(\sigma-\sigma'\right)=\frac{1}{\pi}\left(1+\sum_{n\neq0}\cos n\sigma\cos n\sigma'\right) \tag{4.145}$$

notons que, en termes de composantes de Green, on peut écrire :

$$\left[Z^{\mu(\alpha)}\left(\tau,\sigma\right),Z^{\nu(\beta)}\left(\tau,\sigma'\right)\right]_{q_{\alpha\beta}}=i\pi\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\varepsilon\left(\sigma,\sigma'\right) \tag{4.146}$$

$$\left[Z^{\mu(\alpha)}\left(\tau,\sigma\right),\Pi_{Z}^{\nu(\beta)}\left(\tau,\sigma'\right)\right]_{q_{\alpha\beta}}=i\pi\eta^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\Delta_{+}\left(\sigma-\sigma'\right) \tag{4.147}$$

$$\left[\Pi_{Z}^{\mu(\alpha)}\left(\tau,\sigma\right),\Pi_{Z}^{\nu(\beta)}\left(\tau,\sigma'\right)\right]_{q_{\alpha\beta}}=0 \tag{4.148}$$

où le commutateur q-déformé est défini par [56] :

$$[A,B]_{q}=AB-qBA \tag{4.149}$$

$$q_{\alpha\beta}=2\delta_{\alpha\beta}-1 \tag{4.150}$$

On peut enfin conclure qu'en plus de l'approche générale de la paraquantification, l'incohérence des relations de commutation standards (pour un champ libre) avec les conditions aux bords (4.119), conduisent à deux modifications des relations de commutation aux deux extrémités de la cordes étendue ouverte (noncommutativité et q-déformation) que nous baptisons : la q-noncommutativité

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé un modèle limite de la membrane bosonique perturbative classique et démontré la fermeture de l'algèbre des contraintes pour un choix spécifique de jauges. On a paraquantifié ce modèle, il est observé que dans l'approche covariante, l'algèbre de Poincaré est maintenue, sauf pour le commutateur $[p^\mu, p^\nu]$ qui est modifié comme une relation trilinéaire $\left[p^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 0$.

Pour la deuxième approche, fondée sur la jauge transverse avec les conditions supplémentaires (4.80-4.82), différentes possibilités des dimensions de l'espace-temps D autres que $D = 27$ sont trouvées pour la membrane parabosonique à travers la relation $D = 3 + \frac{24}{Q}$. On a utilisé la structure symplectique d'une corde généralisée dans le cas paraquantique pour étudier la membrane parabosonique qui interagit dans un champ constant B. On a également modifié les relations de commutation de base afin d'établir une cohérence des conditions aux bords avec ces relations. Cette modification conduit à une noncommutativité déformée aux deux extrimités de la corde étendue et une déformation à l'intérieur. Il serait très intreressant de remarquer que l'extension parasupersymétrique de ce travail est une nécessité. En effet, on s'attend à ce que la troncature utilisée peut également être appliquée à l'action d'une parasupermembrane qui donnerait une version supersymétrique pour le modèle considéré. À partir du résultat $D = 3 + \frac{24}{Q}$ pour le secteur de la membrane parabosonique, on s'attend à de nouvelles possibilités de dimensions critiques pour la parasupermembrane, c'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

La membrane fermionique et parafermionique

5.1 Introduction

Il est bien connu que, pour les cordes, les deux extensions supersymétrique : espace-temps et world-sheet sont possibles, la première est ce qu'on appelle les supercordes qui peuvent être construites classiquement dans des dimensiens d'espace-temps $D = 3, 4, 6, 10$, et toutes les supercordes, sauf celle pour $D = 10$, présentent des anomalies qui rendent les théories quantiques incohérentes [31]. La seconde est ce qu'on appelle la corde fermionique qui, sous certaines conditions, est une formulation équivalente à celle des supercordes, de sorte que, pour la corde, les extensions supersymétriques des deux types existent. Il est également bien connu que l'extension supersymétrique de l'espace-temps de la membrane bosonique appelé supermembrane existe pour $D = 4, 5, 7, 11$ [17], où seule la dimension $D = 11$ survit dans la théorie quantique [31, 57]. Comme dans la théorie des cordes, il est naturel de se demander s'il existe aussi une extension supersymétrique du world volume de l'action de la membrane bosonique que nous appellerons la membrane fermionique. Une tentative par Howe et Tucker [50], utilisant les méthodes standards des calculs du tenseur à $d = 3$ sans l'introduction du terme Einstein-Hilbert a été faite [50], une telle construction s'avère impossible. L'objectif de ce chapitre est, d'abord de tenter une construction de ce que nous appellerons l'équivalent d'une membrane fermionique à la limite basse énergie, ensuite, de chercher une version paraquantique du modèle.

5.2 Construction du modèle

5.2.1 Action

A partir de l'action d'une membrane bosonique à basse énergie donnée par l'expression (4.7) et en utilisant les techniques standards, on peut introduire la partie fermionique comme une extension supersymétrique $N = 1$ du world-sheet. Les supercoordonnées du world-sheet sont $\sigma^m \equiv (\tau, \sigma)$ et $\theta_\alpha \equiv \left(\theta, \overline{\theta}\right)$, où θ_α est un spineur de Majorana à 2d. L'introduction des superchamps donne la forme la plus générale de l'action comme suit $(T_s^{-1} = \pi)$:

$$S = \frac{i}{4\pi} \int_M d^2\sigma d^2\theta E \nabla_\alpha Y^\mu \nabla^\alpha Y_\mu \tag{5.1}$$

E_M^A représentent les superzweibeins tangents au world-sheet, E est le superdéterminant (A : les indices du word-sheet plat et M : les courbés) et

$$\nabla_\alpha Y^\mu = D_\alpha Y^\mu + E_\alpha^a \phi_a U^\mu \tag{5.2}$$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^\alpha} + (\gamma^a \theta)_\alpha \partial_a \tag{5.3}$$

$$Y^\mu = Z^\mu + \overline{\theta}\psi^\mu + \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta B^\mu \tag{5.4}$$

$$U^\mu = W^\mu + \overline{\theta}\omega^\mu + \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta C^\mu \tag{5.5}$$

ψ^μ (resp. ω^μ) est le partenaire supersymétrique de Z^μ (resp. W^μ).

Ici, ω^μ et C^μ sont des champs constants, et γ^a représentent les matrices de Dirac à

2d suivantes :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

$$\left[\gamma^a, \gamma^b\right]_+ = 2\eta^{ab} \tag{5.7}$$

L'absence des termes cosmologiques implique que l'action (5.1) est invariante par les transformations de super-Weyl :

$$E_M^a \to \Xi E_M^a \tag{5.8}$$

$$E_M^\alpha \to \Xi^{\frac{1}{2}} \left[E_M^\alpha - \frac{i}{4}\Xi^{-1} E_M^a \left(\gamma_a\right)^{\alpha\beta} D_\alpha \Xi\right] \tag{5.9}$$

où Ξ est un paramètre d'échelle.

L'avantage de ce modèle est qu'on peut utiliser la jauge superconforme $E_M^A = \widehat{E}_M^A$, les superzweibeins plats correspondant au super-espace plat sont alors :

$$\widehat{E}_m^a = \delta_m^a \tag{5.10}$$

$$\widehat{E}_m^\alpha = 0 \tag{5.11}$$

$$\widehat{E}_\alpha^a = i\theta^\beta \left(\gamma^a\right)_{\beta\alpha} \tag{5.12}$$

$$\widehat{E}_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha \tag{5.13}$$

Dans cette jauge, il n'est pas difficile de réduire l'action (5.1) sous la forme suivante (le champ auxiliaire B est éliminé on-shell) :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\eta^{ab} D_a^B Z^\mu D_b^B Z_\mu + \overline{\psi}^\mu \gamma^a D_a^F \psi_\mu\right) \tag{5.14}$$

avec les notations

$$D_a^B Z^\mu = \partial_a Z^\mu + \phi_a W^\mu \tag{5.15}$$

$$D_a^F \psi^\mu = \partial_a \psi^\mu + \phi_a \omega^\mu \tag{5.16}$$

$$\text{et} \qquad \overline{\psi} = i\psi^\dagger \gamma^0$$

cette action décrit un modèle basse énergie pour la théorie des membranes fermioniques.

En termes de composantes de spineurs de Majorana à 2d

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix} \qquad , \qquad \omega^\mu = \begin{pmatrix} \omega_-^\mu \\ \omega_+^\mu \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

et en coordonnées du cône de lumière $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, l'action (5.14) prend la forme

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left\{ 4D_-^B Z^\mu D_+^B Z_\mu - 2i \left[\psi_-^\mu \left(\partial_+ \psi_{-\mu} + \phi_+ \omega_{-\mu} \right) + \psi_+^\mu \left(\partial_- \psi_{+\mu} + \phi_- \omega_{+\mu} \right) \right] \right\} \tag{5.18}$$

où $\phi_\pm = \frac{1}{2} \left(\phi_0 \pm \phi_1 \right)$

en variant l'action (5.14), les équations du mouvement pour les champs Z^μ et ψ^μ sont alors :

$$\partial_a \left(\partial^a Z^\mu + \phi^a W^\mu \right) = 0 \tag{5.19}$$

$$\gamma^a \left(\partial_a \psi^\mu + \phi_a \omega^\mu \right) = 0 \tag{5.20}$$

avec les conditions aux bords (B.C) nécessaires suivantes (pour une corde fermionique ouverte étendue)

$$D_1^B Z^\mu (\tau, 0) = D_1^B Z^\mu (\tau, \pi) = 0 \tag{5.21}$$

$$\overline{\psi}^\mu \gamma^1 \delta\psi_\mu \Big|_0^\pi = 0 \qquad or \qquad \left(\psi_-^\mu \delta\psi_{-\mu} - \psi_+^\mu \delta\psi_{+\mu} \right) \Big|_0^\pi = 0 \tag{5.22}$$

Notons ici que la dernière B.C coïncide avec celle d'une corde fermionique ouverte ordinaire. Maintenant et dans ce qui suit, on ne considère que la condition de Ramond :

$$\psi_{-}^{\mu}(\tau, \pi) = \psi_{+}^{\mu}(\tau, \pi) \tag{5.23}$$

Notons encore que l'action (5.14) ou (5.18) est invariante (on-shell) sous la symétrie supplémentaire de paramètre Λ

$$\delta_{\Lambda} Z^{\mu} = W^{\mu} \Lambda \tag{5.24}$$

$$\delta_{\Lambda} \psi^{\mu} = \omega^{\mu} \Lambda \tag{5.25}$$

$$\delta_{\Lambda} \phi_{\alpha} = -\partial_{\alpha} \Lambda \tag{5.26}$$

qui représente l'extension supersymétrique de la transformation (4.9-4.10).

Ceci est dû à la présence d'une contrainte primaire additionnelle de la corde fermionique ordinaire, exprimée par (l'annulation) du moment conjugué du champ ϕ_a et qui est donnée comme suit :

$$W^{\mu} D_a^B Z_{\mu} + \overline{\psi}^{\mu} \gamma_a \omega_{\mu} \equiv 0 \tag{5.27}$$

Pour tenir compte de la solution de l'équation de la contrainte (5.27), afin de réduire la solution de la première équation du mouvement (5.19) à un cas ordinaire, on doit imposer la jauge suivante

$$\varphi_a = W^{\mu} \partial_a Z_{\mu} + \lambda \overline{\psi}^{\mu} \gamma_a \omega_{\mu} \equiv 0 \tag{5.28}$$

$$\lambda \neq 0, 1 \tag{5.29}$$

Dans cette jauge les deux équations du mouvement (5.19) et (5.20) prennent les formes suivantes :

$$\partial_-\partial_+ Z^\mu + \frac{1-\lambda}{\lambda}\partial_-\partial_+ Z_\nu W^{\mu\nu} = 0 \tag{5.30}$$

$$\partial_-\psi_+^\mu + i\,(\lambda-1)\,\psi_{-\nu}\Omega^{\nu\mu} = 0 \tag{5.31}$$

$$\partial_+\psi_-^\mu - i\,(\lambda-1)\,\psi_{+\nu}\Omega^{\mu\nu} = 0 \tag{5.32}$$

avec

$$W^{\mu\nu} = W^\mu W^\nu = W^{\nu\mu} \tag{5.33}$$

$$\eta^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = W^\mu{}_\mu = 1 \tag{5.34}$$

$$\Omega^{\mu\nu} = \omega_-^\mu \omega_+^\nu \tag{5.35}$$

A partir de la B.C (5.21), on peut démontrer :

$$\phi_1|_0^\pi = 0 \tag{5.36}$$

ceci implique que

$$(\psi_-^\mu \omega_{-\mu} - \psi_+^\mu \omega_{+\mu})|_0^\pi = 0 \tag{5.37}$$

Si on prend en cosidération la condition de Ramond (5.23), on peut obtenir la condition suivante pour le spineur constant :

$$\omega_-^\mu = \omega_+^\mu = \omega^\mu \tag{5.38}$$

Alors, dans cette condition, les équations du mouvement (5.30-5.32) avec les B.Cs donnent les solutions générales suivantes :

$$Z^{\mu}(\tau,\sigma) = z_0^{\mu} + p^{\mu}\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu}e^{-in\tau}\cos n\sigma \tag{5.39}$$

$$\psi_-^{\mu}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) = d_0^{\mu} + i\left(1-\lambda\right)d_{0\nu}\Omega^{\nu\mu}\left(\sigma^+ + \sigma^-\right) + \sum_{n\neq 0}\left(d_n^{\mu}e^{-in\sigma^-} - \frac{1-\lambda}{n}d_{n\nu}\Omega^{\nu\mu}e^{-in\sigma^+}\right) \tag{5.40}$$

$$\psi_+^{\mu}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) = d_0^{\mu} + i\left(1-\lambda\right)d_{0\nu}\Omega^{\nu\mu}\left(\sigma^+ + \sigma^-\right) + \sum_{n\neq 0}\left(d_n^{\mu}e^{-in\sigma^+} - \frac{1-\lambda}{n}d_{n\nu}\Omega^{\nu\mu}e^{-in\sigma^-}\right) \tag{5.41}$$

Maintenant, si on introduit le moment conjugué Π_Z^{μ} pour le champ Z^{μ} où on pose la condition $\phi_0 = 0$, on peut écrire un croché de Poisson (PB) ordinaire pour le couple (Z^{μ}, Π_Z^{ν}) comme suit :

$$\left\{Z^{\mu}(\sigma), \Pi_Z^{\nu}(\sigma')\right\}_{PB} = -\eta^{\mu\nu}\delta\left(\sigma-\sigma'\right) \tag{5.42}$$

$$\Pi_Z^{\mu} = \frac{1}{\pi}\partial_0 Z^{\mu} \tag{5.43}$$

aussi, les crochés de Dirac (DB) pour la partie fermionique peuvent être écrits sous la forme :

$$\left\{\psi_A^{\mu}(\tau,\sigma), \psi_B^{\nu}(\tau,\sigma')\right\}_{DB} = -i\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}\delta\left(\sigma-\sigma'\right) \tag{5.44}$$

où A et B décrivent les indices de spin $\pm$.

A partir des solutions (5.39-5.41), et en utilisant la propriété antisymétrique du tenseur $\Omega^{\mu\nu}$, on peut dériver les relations ordinaires suivantes pour les modes

$$\left\{\alpha_n^{\mu}, \alpha_m^{\nu}\right\}_{PB} = -in\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{5.45}$$

$$\left\{d_n^{\mu}, d_m^{\nu}\right\}_{DB} = -i\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{5.46}$$

L'action (5.14) est maintenant invariante par les transformations supersymétriques ordinaires suivantes de paramètre ε.

$$\delta Z^{\mu} = \bar{\varepsilon}\psi^{\mu} \tag{5.47}$$

$$\delta\psi^{\mu} = \gamma^{a}\partial_{a}Z^{\mu}\varepsilon \tag{5.48}$$

La supersymétrie locale du world-sheet donne l'expression du supercourant comme suit :

$$J_a = \frac{-1}{2}\gamma^{b}\gamma_{a}\psi^{\mu}D_{b}^{B}Z_{\mu} \equiv 0 \tag{5.49}$$

aussi, en plus du supercourant, le tenseur énergie-impulsion peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} T_{ab} = D_{a}^{B}Z^{\mu}D_{b}^{B}Z_{\mu} + \frac{1}{4}\overline{\psi}^{\mu}\left(\gamma_{a}D_{b}^{F} + \gamma_{b}D_{a}^{F}\right)\psi_{\mu} \\ - \frac{1}{2}\eta_{ab}\left(\eta^{cd}D_{c}^{B}Z^{\mu}D_{d}^{B}Z_{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\psi}^{\mu}\gamma^{a}D_{a}^{F}\psi_{\mu}\right) \end{aligned} \tag{5.50}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les deux courants de Noether (5.49) et (5.50) sont conservés.

Notons ici que nous avons utilisé la solution de la contrainte (5.27), mais nous n'avons pas encore fixé la jauge pour les variables superflux. En effet, la fixation de jauge sera imposée dans la section suivante (paraquantification transverse).

5.2.2 La superalgèbre des contraintes

Les deux composantes indépendantes du tenseur énergie-impulsion sont

$$\chi_1 = 2T_{00} = \Pi_{Z}^{2} + D_{1}^{B}Z^{\mu}D_{1}^{B}Z_{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\psi}^{\mu}\gamma_{0}\partial_{0}\psi_{\mu} + \frac{1}{2}\overline{\psi}^{\mu}\gamma_{1}D_{1}^{F}\psi_{\mu} \equiv 0 \tag{5.51}$$

$$\chi_2 = T_{01} = \Pi_{Z}^{\mu}D_{1}Z_{\mu} + \frac{1}{4}\overline{\psi}^{\mu}\gamma_{1}\partial_{0}\psi_{\mu} + \frac{1}{4}\overline{\psi}^{\mu}\gamma_{0}D_{1}^{F}\psi_{\mu} \equiv 0 \tag{5.52}$$

On adopte la même procédure donnée dans [59] où, les ψ^{μ} sont on-shell, alors, les équations des contraintes se réduisent à $(\lambda = -1)$:

$$\chi_1 = 2T_{00} = \Pi_Z^2 + (\partial_1 Z^\mu)^2 - 2\left(W^\rho \partial_1 Z_\rho\right)^2 + i\left(-\psi_-^\mu \partial_1 \psi_{-\mu} - \psi_+^\mu \partial_1 \psi_{+\mu}\right) \equiv 0 \tag{5.53}$$

$$\chi_2 = \Pi_Z^\mu \partial_1 Z_\mu + \frac{i}{2}\left(\psi_-^\mu \partial_1 \psi_{-\mu} + \psi_+^\mu \partial_1 \psi_{+\mu}\right) \tag{5.54}$$

La première contrainte correspond à celle d'une corde fermionique ordinaires décalée par le terme $-2\left(W^\rho \partial_1 Z_\rho\right)^2$ tandis que la seconde est inchangée.

D'un autre coté, les deux composantes du supercourant prennent les formes suivantes :

$$J_- \sim \psi_-^\mu \left[\Pi_{Z\mu} - \left(\partial_1 Z_\mu - 2\partial_1 Z^\rho W_{\mu\rho}\right)\right] \equiv 0 \tag{5.55}$$

$$J_+ \sim \psi_+^\mu \left[\Pi_{Z\mu} + \left(\partial_1 Z_\mu - 2\partial_1 Z^\rho W_{\mu\rho}\right)\right] \equiv 0 \tag{5.56}$$

On peut démontrer que l'ensemble de ces contraintes satisfont la fermeture de la superalgèbre suivante, où le champ W^μ est choisi de telle sorte que $W_\mu \partial_1 \psi_\pm^\mu = 0$

$$\{\chi_1(\sigma), \chi_1(\sigma')\} = 4\left[\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.57}$$

$$\{\chi_2(\sigma), \chi_2(\sigma')\} = \left[\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.58}$$

$$\{\chi_2(\sigma), \chi_1(\sigma')\} = \left[\chi_1(\sigma) + \chi_1(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.59}$$

$$\{J_-(\sigma), J_-(\sigma')\} = -i\left[\chi_1(\sigma) - 2\chi_2(\sigma')\right]\delta(\sigma - \sigma') \tag{5.60}$$

$$\{J_+(\sigma), J_+(\sigma')\} = -i\left[\chi_1(\sigma) + 2\chi_2(\sigma')\right]\delta(\sigma - \sigma') \tag{5.61}$$

$$\{J_-(\sigma), J_+(\sigma')\} = 0 \tag{5.62}$$

$$\{\chi_1(\sigma), J_-(\sigma)\} = -2\left[J_-(\sigma) + \frac{1}{2}J_-(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.63}$$

$$\{\chi_1(\sigma), J_+(\sigma)\} = 2\left[J_+(\sigma) + \frac{1}{2}J_+(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.64}$$

$$\{\chi_2(\sigma), J_-(\sigma)\} = \left[J_-(\sigma) + \frac{1}{2}J_-(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.65}$$

$$\{\chi_2(\sigma), J_+(\sigma)\} = \left[J_+(\sigma) + \frac{1}{2}J_+(\sigma')\right]\partial_1 \delta(\sigma - \sigma') \tag{5.66}$$

Ce résultat complète la cohérence du modèle classique. Il est alors utile de mentionner que, contrairement à la possibilité de l'extension supersymétrique de la corde bosonique qui conduit à une théorie cohérente de la corde fermionique, dans le cas de la membrane, une extension supersymétrique du world-volume de la membrane bosonique s'avère impossible par les techniques standards, et une membrane fermionique cohérente ne peut être construite sans imposer certaines conditions de jauge. Etudions maintenant la version paraquantique du modèle.

5.3 Paraquantification du modéle et dimensions critiques

5.3.1 Paraquantifiction covariante

Les variables canoniques parabosoniques $Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ et $\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ (resp. parafermioniques $\psi_A^{\mu}(\tau,\sigma)$) vérifient les relations trilinéaires suivantes

$$\left[Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[\Pi_Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\left[\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^{\rho}\delta(\sigma-\sigma')+\eta^{\mu\rho}\Pi^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{5.67}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\left[\eta^{\mu\nu Z\rho}\delta(\sigma-\sigma')+i\eta^{\mu\rho}Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{5.68}$$

$$\left[Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\eta^{\mu\rho}Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'') \tag{5.69}$$

$$\left[Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[\psi_A^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\eta^{\mu\rho}\psi_A^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'') \tag{5.70}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\Pi_Z^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^{\rho}\delta(\sigma-\sigma') \tag{5.71}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\psi_A^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\eta^{\mu\nu}\psi_A^{\rho}\delta(\sigma-\sigma') \tag{5.72}$$

$$\left[\psi_A^{\mu}(\tau,\sigma),\left[\psi_B^{\nu}(\tau,\sigma'),\psi_C^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_-\right]=2\left[\eta^{\mu\nu}\delta_{AB}\psi_C^{\rho}\delta(\sigma-\sigma')-\eta^{\mu\rho}\delta_{AC}\psi_B^{\nu}\delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{5.73}$$

$$\left[\psi_A^{\mu}(\tau,\sigma),\left[Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\psi_B^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]_+=2\eta^{\mu\rho}\delta_{AB}Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{5.74}$$

$$\left[\psi_A^{\mu}(\tau,\sigma),\left[\Pi_Z^{\nu}(\tau,\sigma'),\psi_B^{\rho}(\tau,\sigma'')\right]_+\right]_+=2\eta^{\mu\rho}\delta_{AB}\Pi_Z^{\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{5.75}$$

On peut aussi définir les générateurs du moment angulaire associés à la transformation de Poincaré comme suit

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma \left\{ \frac{1}{2} [Z^\mu, \Pi_Z^\nu]_+ - \frac{1}{2} [Z^\nu, \Pi_Z^\mu]_+ - \frac{2i}{\pi} [\psi^\mu, \psi^\nu]_- \right\} \tag{5.76}$$

Ces générateurs avec le moment total vérifient une (para) algèbre de Poincaré fermée donnée par :

$$\left[p^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 0 \tag{5.77}$$

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = -i\eta^{\mu\nu} p^\rho + i\eta^{\mu\rho} p^\nu \tag{5.78}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\nu\rho} M^{\sigma\mu} - i\eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} + i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} \tag{5.79}$$

On peut voir ici que la relation $[p^\mu, p^\nu] = 0$ est brisée.

En terme de modes, les relations trilinéaire (5.67-5.75) deviennent :

$$\left[\alpha_n^\mu, [\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho]_+\right] = 2n \left(\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \alpha_l^\rho + \eta^{\mu\rho} \delta_{n+l,0} \alpha_m^\nu\right) \tag{5.80}$$

$$\left[\alpha_n^\mu, [A_i^\nu, \alpha_m^\rho]_+\right] = 2n\eta^{\mu\rho} \delta_{n+m,0} A_i^\nu \tag{5.81}$$

$$\left[z_0^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i \left(\eta^{\mu\nu} p^\rho + \eta^{\mu\rho} p^\nu\right) \tag{5.82}$$

$$\left[z_0^\mu, [B_i^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\eta^{\mu\rho} B_i^\nu \tag{5.83}$$

$$\left[p^\mu, [z_0^\nu, z_0^\rho]_+\right] = -2i \left(\eta^{\mu\nu} z_0^\rho + \eta^{\mu\rho} z_0^\nu\right) \tag{5.84}$$

$$\left[p^\mu, [C_i^\nu, z_0^\rho]_+\right] = -2i\eta^{\mu\nu} C_i^\nu \tag{5.85}$$

$$\left[d_n^\mu, [d_m^\nu, d_l^\rho]_-\right] = 2 \left(\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} d_l^\rho - \eta^{\mu\rho} \delta_{n+l,0} d_m^\nu\right) \tag{5.86}$$

$$\left[d_n^\mu, [D_i^\nu, d_m^\rho]_+\right]_+ = 2\eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} D_i^\nu \tag{5.87}$$

$$\left[d_n^\mu, \left[D_i^\nu, D_j^\rho\right]_+\right] = 0 \tag{5.88}$$

$$\left[D_i^\mu, [d_m^\nu, d_l^\rho]_-\right] = 0 \tag{5.89}$$

les opérateurs A_i^μ, B_i^μ, C_i^μ et D_i^μ sont respectivement les éléments des ensembles A^μ, B^μ, C^μ et D^μ avec :

$A^\mu = \{z_0^\mu, p^\mu, d_n^\mu\}$.

$B^\mu = \{z_0^\mu, \alpha_n^\mu, d_n^\mu\}$.

$C^\mu = \{p^\mu, \alpha_n^\mu, d_n^\mu\}$.

$D^\mu = \{z_0^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu\}$.

A partir de la relation (5.86), le mode zéro vérifie la relation trilinéaire suivante :

$$\left[d_0^\mu, [d_0^\nu, d_0^\rho]_-\right] = 2\left(\eta^{\mu\nu} d_0^\rho - \eta^{\mu\rho} d_0^\nu\right)$$

qui coïncide avec l'algèbre de Dirac suivante

$$[\Gamma^\mu, M^{\rho\sigma}] = i\left(\eta^{\mu\nu}\Gamma^\rho - \eta^{\mu\rho}\Gamma^\nu\right)$$

où Γ^μ sont les matrices de Dirac vérifiant la relation $[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]_+ = -2\eta^{\mu\nu}$ et $M^{\mu\nu}$ sont les générateurs de la représentation spinorielle.

En identifiant les modes zéro avec les matrices de Dirac par la relation $d_0^\mu = \frac{-i}{\sqrt{2}}\Gamma^\mu$, ils obéissent à une relation bilinéaire ordinaire

$$[d_0^\mu, d_0^\nu]_+ = \eta^{\mu\nu}$$

Ainsi, l'état fondamental de Ramond est un spineur de $SO\,(D-1,1)$.

Les variables dynamiques sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} Z^{\mu}\left(\tau,\sigma\right) &= \sum_{\beta=1}^{Q} Z^{\mu(\beta)}\left(\tau,\sigma\right) \\ &= \sum_{\beta=1}^{Q}\left[z_0^{\mu(\beta)} + p^{\mu(\beta)}\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu(\beta)}e^{-in\tau}\cos n\sigma\right] \end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned} \psi_-^{\mu}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) &= \sum_{\beta=1}^{Q}\psi_-^{\mu(\beta)}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) \\ &= \sum_{\beta=1}^{Q}\left[d_0^{\mu(\beta)} + 2id_{0\nu}^{(\beta)}\Omega^{\nu\mu}\left(\sigma^+ + \sigma^-\right) + \sum_{n\neq 0}\left(d_n^{\mu(\beta)}e^{-in\sigma^-} - \frac{2}{n}d_{n\nu}^{(\beta)}\Omega^{\nu\mu}e^{-in\sigma^+}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned} \psi_+^{\mu}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) &= \sum_{\beta=1}^{Q}\psi_+^{\mu(\beta)}\left(\sigma^+,\sigma^-\right) \\ &= \sum_{\beta=1}^{Q}\left[d_0^{\mu(\beta)} + 2id_{0\nu}^{(\beta)}\Omega^{\nu\mu}\left(\sigma^+ + \sigma^-\right) + \sum_{n\neq 0}\left(d_n^{\mu(\beta)}e^{-in\sigma^+} - \frac{2}{n}d_{n\nu}^{(\beta)}\Omega^{\nu\mu}e^{-in\sigma^-}\right)\right] \end{aligned} \tag{5.92}$$

où les composantes de Green [46, 47, 48] vérifient les relations de commutation bilinéaires anormales suivantes :

$$\left[\alpha_n^{\mu(\alpha)},\alpha_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \qquad ; \qquad \left[\alpha_n^{\mu(\alpha)},\alpha_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \tag{5.93}$$

$$\left[z_0^{\mu(\alpha)},p^{\nu(\alpha)}\right] = i\eta^{\mu\nu} \qquad ; \qquad \left[z_0^{\mu(\alpha)},p^{\nu(\beta)}\right]_+ = \qquad \alpha\neq\beta \tag{5.94}$$

$$\left[d_n^{\mu(\alpha)},d_m^{\nu(\alpha)}\right]_+ = \eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \qquad ; \qquad \left[d_n^{\mu(\alpha)},d_m^{\nu(\beta)}\right] = 0 \qquad \alpha\neq\beta \tag{5.95}$$

$$\left[D_i^{\mu(\alpha)},d_m^{\nu(\alpha)}\right] = 0 \qquad ; \qquad \left[D_i^{\mu(\alpha)},d_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \tag{5.96}$$

5.3.2 Paraquantification transverse, superalgèbre de Virasoro et dimensions critiques

De même que précédemment, le choix particulier en question correpond à imposer les conditions de jauge supplémentaires suivantes :

– La première consiste en la substitution de la contrainte (5.27) dans les autres (5.49) et (5.50) afin de réduire le problème à une théorie des cordes fermioniques, ceci se traduit par les choix spécifiques suivants :

$$p^{D-1} = \alpha_n^{D-1} = 0 \tag{5.97}$$

$$\psi^{D-1} = 0 \qquad \left(d_n^{D-1} = 0\right) \tag{5.98}$$

$$Z^{\mu}(\tau, \sigma) = \left(z_0^{D-1}, Z^i(\tau, \sigma)\right) \tag{5.99}$$

$$i = \overline{0, D-2}$$

– La seconde correspond à la jauge du cône de lumière habituelle donnée par les équations

$$Z^{+}(\tau, \sigma) = z^{+} + p^{+}\tau \text{ (corde ouverte)} \tag{5.100}$$

$$\alpha_n^{+} = 0 \quad \text{pour } n \neq 0 \tag{5.101}$$

$$\psi^{+} = 0 \tag{5.102}$$

donc, les variables dynamiques vérifient les relations trilinéaires suivantes

$$\left[\alpha_n^I, \left[\alpha_m^J, \alpha_l^K\right]_+\right] = 2n\left(\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}\alpha_l^K + \delta_{n+l,0}\delta^{IK}\alpha_m^J\right) \tag{5.103}$$

$$\left[\alpha_n^I, \left[A_i, \alpha_m^J\right]_+\right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}A \tag{5.104}$$

$$\left[d_n^I, \left[d_m^J, d_l^K\right]_-\right] = 2\left(\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}d_l^K - \delta^{IK}\delta_{n+l,0}d_m^J\right) \tag{5.105}$$

$$\left[d_n^I, \left[B_i, d_m^J\right]_+\right]_+ = 2\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}B \tag{5.106}$$

$$\left[z_0^I, \left[p^J, p^K\right]_+\right] = 2i\left(\delta^{IJ}p^K + \delta^{IK}p^J\right) \tag{5.107}$$

$$\left[z_0^I, \left[C_i, p^J\right]_+\right] = 2i\delta^{IJ}C \tag{5.108}$$

$$\left[p^I, \left[z_0^J, z_0^K\right]_+\right] = -2i\left(\delta^{IJ}z_0^K + \delta^{IK}z_0^J\right) \tag{5.109}$$

$$\left[p^I, \left[D_i, z_0^J\right]_+\right] = -2iD \tag{5.110}$$

$$\left[z_0^-, \left[p^+, p^+\right]_+\right] = -4ip^+ \tag{5.111}$$

$$\left[z_0^-, \left[E_i, p^+\right]_+\right] = -2iE \tag{5.112}$$

$$\left[p^+, \left[z_0^-, z_0^-\right]_+\right] = 4iz_0^- \tag{5.113}$$

$$\left[p^+, \left[F_i, z_0^-\right]_+\right] = 2iF \tag{5.114}$$

$$\left[B_i, \left[d_m^I, d_l^J\right]_-\right] = 0 \tag{5.115}$$

où les indices transverses I prennent les valeurs $\overline{1, D-3}$

et les opérateurs A_i, B_i, C_i, D_i, E_i et F_i sont respectivement les éléments des ensembles A, B, C, D, E et F où :

$A = \left\{z_0^I, d_n^I, z_0^-, p^+, p^I\right\}$.

$B = \left\{z_0^I, \alpha_n^I, z_0^-, p^+, p^I\right\}$.

$C = \left\{\alpha_n^I, d_n^I, z_0^-, p^+, z_0^I\right\}$.

$D = \left\{\alpha_n^I, d_n^I, z_0^-, p^+, p^I\right\}$.

$E = \left\{z_0^I, d_n^I, z_0^-, \alpha_n^I, p^I\right\}$.

$F = \left\{z_0^I, d_n^I, p^+, \alpha_n^I, p^I\right\}$.

les autres relations trilinéaires de type $\left[a, [b, c]_+\right] = 0$ sont nulles.

En termes de composantes de Green, les relations trilinéaires (5.103-5.115) sont réécrites sous les formes bilinéaires anormales suivantes :

$$\left[\alpha_n^{I(\alpha)},\alpha_n^{J(\alpha)}\right]=n\delta^{IJ}\delta_{n+m}\qquad;\qquad\left[\alpha_n^{I(\alpha)},\alpha_n^{J(\beta)}\right]_+=0\qquad\alpha\neq\beta\tag{5.116}$$

$$\left[d_n^{I(\alpha)},d_m^{J(\alpha)}\right]_+=\delta^{IJ}\delta_{n+m}\qquad;\qquad\left[d_n^{I(\alpha)},d_m^{J(\beta)}\right]=0\qquad\alpha\neq\beta\tag{5.117}$$

$$\left[z_0^{I(\alpha)},p^{J(\alpha)}\right]=-i\delta^{IJ}\qquad;\qquad\left[z_0^{I(\alpha)},p^{J(\beta)}\right]_+=\qquad\alpha\neq\beta\tag{5.118}$$

$$\left[z_0^{-(\alpha)},p^{+(\alpha)}\right]=i\qquad;\qquad\left[z_0^{-(\alpha)},p^{+(\beta)}\right]_+=\qquad\alpha\neq\beta\tag{5.119}$$

$$\left[B_i^{(\alpha)},d_m^{J(\alpha)}\right]=0\qquad;\qquad\left[B_i^{(\alpha)},d_m^{J(\beta)}\right]_+=0\qquad\alpha\neq\beta\tag{5.120}$$

Si on choisit $W^{D-1}=0$, on peut écrire la partie transverse des générateurs de contraintes (5.53-5.56) comme suit :

$$L_n^{tr}=\frac{1}{4}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\alpha_{n-m}^I,\alpha_n^I\right]_++(m+n)\left[d_{n-m}^I,d_n^I\right]_-\right\}\tag{5.121}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left\{:\alpha_{n-m}^{I(\alpha)}\alpha_n^{I(\alpha)}:+(m+n):d_{n-m}^{I(\alpha)}d_n^{I(\alpha)}:\right\}\equiv\sum_{\alpha=1}^{Q}L_n^{tr(\alpha\alpha)}\tag{5.122}$$

$$F_n^{tr}=\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{-m}^I,d_{n+m}^I\right]_+=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\alpha_{-m}^{I(\alpha)}d_{n+m}^{I(\alpha)}\equiv\sum_{\alpha=1}^{Q}F_n^{tr(\alpha\alpha)}\tag{5.123}$$

ces générateurs vérifient la fermeture d'une superalgèbre de Virasoro ordinaire avec une charge centrale modifiée

$$\left[L_n^{tr},L_m^{tr}\right]=(n-m)L_{n+m}^{tr}+\frac{Q(D-3)}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0}\tag{5.124}$$

$$\left[L_n^{tr},F_n^{tr}\right]=\frac{1}{2}(n-2m)F_{n+m}^{tr}\tag{5.125}$$

$$\left[F_n^{tr},F_m^{tr}\right]=2L_{n+m}^{tr}+\frac{Q(D-3)}{8}n^3\delta_{n+m,0}\tag{5.126}$$

Les composantes $(I-)$ du moment angulaire donné par (5.76) peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}
M^{I-} &= \frac{1}{2}\left[z_0^I, p^-\right]_+ - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ \\
&- \frac{i}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+}L_m^{tr}\right]_+ - \left[\frac{1}{p^+}L_{-m}^{tr}, \alpha_m^I\right]_+\right) \\
&- \frac{i}{8}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\left[d_{-m}^I, \frac{1}{p^+}F_m^{tr}\right]_- - \left[\frac{1}{p^+}F_{-m}^{tr}, d_m^I\right]_-\right)
\end{aligned} \tag{5.127}$$

avec les définitions suivantes

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}L_n^{tr} \quad ou \quad \alpha_n^{-(\beta)} = \frac{1}{p^+}L_n^{tr(\beta\beta)} \tag{5.128}$$

$$d_n^- = \frac{1}{p^+}F_n^{tr} \quad ou \quad d_n^{-(\beta)} = \frac{1}{p^+}F_n^{tr(\beta\beta)} \tag{5.129}$$

$$\alpha_0^- = p^- = \frac{1}{p^+}L_0^{tr} \tag{5.130}$$

$$d_0^- = \frac{1}{p^+}F_0^{tr} \quad ou \quad d_0^{-(\beta)} = \frac{1}{p^+}F_0^{tr(\beta\beta)} \tag{5.131}$$

en utilisant les expressions

$$[AB, C]_+ = A\,[B, C]_+ - [A, C]\,B \;ou\; A\,[B, C] + [A, C]_+\,B \tag{5.132}$$

$$[A, BC]_+ = [A, B]_+\,C - B\,[A, C] \;\; ou \;\; [A, B]\,C + B\,[A, C]_+ \tag{5.133}$$

$$[A, BC] = [A, B]_+\,C - B\,[A, C]_+ \tag{5.134}$$

$$[A, BC] = A\,[B, C]_+ - B\,[A, C]_+ \tag{5.135}$$

$$\zeta\,(0) = -\frac{1}{2} \tag{5.136}$$

et les relations trilinéaires (5.103-5.115), il n'est pas difficile de montrer que l'expression (5.127) se réduit à :

$$\begin{aligned} M^{I-} &= \frac{1}{2}\left[z_0^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ L_0^{tr} - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ \\ &- \frac{i}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ L_m^{tr} - L_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, \alpha_m^I\right]_+\right) \\ &- \frac{i}{8}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\left[d_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ F_m^{tr} - F_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, d_m^I\right]_+\right) \end{aligned} \tag{5.137}$$

cette formule coïncide exactement avec la forme imposée dans [60].

En utilisant les relations (5.103-5.119) et (5.137), un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \left[M^{I-}, M^{J-}\right] &= \frac{-1}{2\left(p^+\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\alpha_{-n}^I, \alpha_n^J\right]_+ - \left[\alpha_{-n}^J, \alpha_n^I\right]_+\right)\left[\left(\frac{(D-3)\,Q}{8} - 1\right)n\right] \\ &- \frac{1}{2\left(p^+\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[d_{-n}^I, d_n^J\right]_- - \left[d_{-n}^J, d_n^I\right]_-\right)\left[\left(\frac{(D-3)\,Q}{8} - 1\right)n^2\right] \end{aligned} \tag{5.138}$$

qui ne peut être nul que pour la condition

$$D = 3 + \frac{8}{Q} \tag{5.139}$$

Le résultat intéressant ici, c'est le fait que nous retrouvons exactement les dimensions 11, 7, 5 et 4 (correspondant à $Q = 1$, 2, 4 et 8) pour lesquelles les supermembranes classique (un espace-temps supersymétrique) peuvent être formulées [61]. De sorte que, contrairement au cas ordinaire, où la seule dimension $D = 11$ survit, ici toutes les quatres dimensions sont possibles.

5.4 Conclusion

Contrairement à la corde classique où les deux difféomorphismes et la symétrie d'échelle sont suffisantes pour donner une description complète de la métrique du world-sheet par une fixation de jauge, conduisant à une extension supersymétrique consistante du world-sheet d'une action de la corde bosonique, pour la membrane, les trois seules symétries de difféomorphisme sont insuffisantes et en particulier nous n'avons pas l'invariance de Weyl. Alors que la construction d'une membrane fermionique s'avère impossible, en utilisant des jauges supplémentaires, nous avons été capables de contourner la difficulté, pour une possibilité d'une membrane fermionique. Après une construction classique cohérente, une paraquantification de ce modèle a été étudiée. En vérifiant la fermeture de l'algèbre de Poincaré paraquantique dans ces jauges, nous avons dérivé les dimensions d'espace-temps 11, 7, 5 et 4 comme des conditions nécessaires pour la cohérence paraquantique. Ce sont exactement celles pour lesquelles les supermembranes classiques (l'action de Green Schwarz éq. (2.25)) peuvent être formulées. En notant cependant qu'en plus du cas ordinaire ($D = 11$), un autre cas est intéressant, celui pour lequel $D = 7$. En effet, dans un précédent travail [62], un résultat important obtenu est le fait que, en plus du cas ordinaire $(D, D') = (26, 10)$ des dimensions de l'espace-temps dans lesquelles les deux théories des cordes hétérotiques ($E_8 \otimes E_8$ et $SO\,(32)$) peuvent être formulées, dans le cas des paracordes hétérotiques, ne survit que le cas $(14, 6)$ qui est construit à partir du seul groupe lacé possible E_8.

Alors, pour $D = 6$, on ne peut avoir que quatre types de théories des parasupercordes (I, IIA, IIB et E_8) au lieu de cinq. Ce résultat avec la possibilité d'une parasupermembrane à $D = 7$ nous laisse penser à une nouvelle possibilité d'une M-Theory pour $D = 7$ $(Q = 2)$, équivalente à celle pour $D = 11$ $(Q = 1)$.

Chapitre 6

La densité d'états asymptotique pour les parasupercordes et (parasuper)- p-branes

6.1 Introduction

Les excitations dans le spectre de la corde constitue un point très intéressant et pourtant à peine exploré dans la théorie des cordes. Dans des processus impliquant des distances de Planck, comme par exemple certains aspects de la physique des trous noirs, le spectre entier de la corde est appelé à jouer un rôle. Des états hautement excités sont responsables de divergences ultraviolettes de la théorie de perturbation des cordes, ce qui conduit à des effets très interéssants, en particulier la densité d'états augmente rapidement où la fonction de partition d'un gaz de cordes ne peut pas être définie pour une certaine température [63]. Une explication de la mécanique statistique de l'entropie de Bekenstein-Hawking [64] des trous noirs est inconnue. L'horizon de trou noir se comporte comme un système obéissant aux quatres lois de la thermodynamique, mais leur entropie n'a jamais été expliquée en terme de nombre d'états quantiques. 't Hooft a souligné qu'une telle explication doit fournir une nouvelle définition de la nature fondamentale de la matière [65]. La théorie quantique ordinaire des champs n'a certainement pas donné des résultats corrects de l'entropie (pour plus de détails voir [64, 66, 67]).

Dans ce chapitre, on va étudier le comportement asymptotique de la densité d'états pour la théorie des parasupercordes, on dérivera les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait de parasupercordes. Une autre étude très intéressante conduit à l'écriture cohérente des états pour les parasupercordes, enfin, on généralisera l'étude au cas de la théorie des (parasuper) p-brane.

6.2 Parasupercordes

Dans la jauge transverse, l'action des supercordes est donnée par :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left(\partial_a X^i \partial^a X_i - i\overline{S}^{Aa} \rho^B \partial_B S^{Aa} \right) \tag{6.1}$$

avec :

$A, B = 1, 2$ et a est l'indice des composantes du spineur S^A

où

$$S = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \overline{S} = S^T \rho^1$$

et

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \left[\rho^A, \rho^B\right]_+ = -2\eta^{AB}$$

Les solutions sont (pour les supercordes de type I) :

$$X^i(\sigma, \tau) = x^i + p^i \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i \exp(-in\tau) \cos n\sigma \tag{6.2}$$

$$S^{1a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} S_n^{1a} \exp[-in(\tau - \sigma)] \tag{6.3}$$

$$S^{2a}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} S_n^{2a} \exp[-in(\tau + \sigma)] \tag{6.4}$$

où $i, a = \overline{1, D-2}$

6.2.1 Paraquantification

La théorie des parasupercordes peut être formulée dans des dimensions de l'espace-temps liées par la relation $D = 2 + 8/Q$, c'est à dire $D = 3,\ 4,\ 6,\ 10$ respectivement pour $Q = 8,\ 4,\ 2,\ 1$. Les opérateurs paraquantiques x^-, p^+, x^i, p^i ,α_n^i et s_n^a vérifient les relations trilinéaire [68] :

$$\left[s_n^a\ ,\left[s_m^b\ ,s_l^c\ \right]_-\right] = 2\left(\delta^{ab}\delta_{n+m}s_l^c\ - \delta^{ac}\delta_{n+l}s_m^b\ \right) \tag{6.5}$$

$$\left[\alpha_n^i, \left[\alpha_m^j, \alpha_l^k\right]_+\right] = 2(\delta^{ij}n\delta_{n+m}\alpha_l^k + n\delta^{ik}\delta_{n+l}\alpha_m^j) \tag{6.6}$$

$$\left[x^i, \left[p^j, p^k\right]_+\right] = 2i\left(\delta^{ij}p^k + \delta^{ik}p^j\right) \tag{6.7}$$

$$\left[\alpha_n^i, \left[\alpha_m^j, A\right]_+\right] = 2\delta^{ij}n\delta_{n+m}A \tag{6.8}$$

$$\left[s_n^a\ ,\left[s_m^b\ ,B\right]_+\right]_+ = 2\delta^{ab}\delta_{n+m}B \tag{6.9}$$

$$\left[x^i, \left[p^j, C\right]_+\right] = 2\imath\delta^{ij}C \tag{6.10}$$

$$\left[x^-, \left[p^+, D\right]_+\right] = 2iD \tag{6.11}$$

et toutes les autres relations sont nulles. Ici D, E, F et G représentent les opérateurs suivants

$A = x^-,\ p^+,\ x^k,\ p^k$ ou s_l^a .

$B = x^-,\ p^+,\ x^i,\ p^i$ ou α_n^i.

$C = x^-,\ p^+,\ x^k,\ \alpha_n^k$ ou s_n^a

$D = x^-,\ x^i,\ p^i\ \alpha_n^i$ ou s_n^a

En termes de composantes de Green

$$\begin{aligned} x^i = \sum_{\alpha=1}^{Q} x^{i(\alpha)} \quad &; \quad p^i = \sum_{\alpha=1}^{Q} p^{i(\alpha)} \quad ; \quad \alpha_n^i = \sum_{\beta=1}^{Q} \alpha_n^{i(\beta)} \\ x^- = \sum_{\alpha=1}^{Q} x^{-(\alpha)} \quad &; \quad p^+ = \sum_{\alpha=1}^{Q} p^{+(\alpha)} \quad ; \quad s_n^a = \sum_{\beta=1}^{Q} s_n^{a(\alpha)} \end{aligned} \tag{6.12}$$

les relations de commutation trilinéaires précédentes sont équivalentes aux relations bilinéaires anormales suivantes :

$$\left[x^{i(\alpha)}, p^{j(\alpha)}\right] = i\delta^{ij} \quad ; \quad \left[x^{i(\alpha)}, p^{j(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{6.13}$$

$$\left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}\right] = i \quad ; \quad \left[x^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{6.14}$$

$$\left[\alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\alpha)}\right] = n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{i(\alpha)}, \alpha_m^{j(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{6.15}$$

$$\left[s_n^{a(\alpha)}, s_m^{b(\alpha)}\right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[s_n^{a(\alpha)}, s_m^{b(\beta)}\right] = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{6.16}$$

$$\left[\alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\alpha)}\right] = 0 \quad ; \quad \left[\alpha_n^{i(\alpha)}, s_m^{a(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{6.17}$$

et tous les autres commutateurs (et anticommutateurs) de type $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\alpha)}\right] = 0$ (et $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0$, pour $\alpha \neq \beta$)

6.3 La densité d'états asymptotique

La condition de mass-shell implique que l'opérateur de masse peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8/Q}\left[\alpha_{-n}^i, \alpha^i\right]_+ + \sum_{a=1}^{8/Q} n\left[s_{-n}^a, s_n^a\right]_-\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{8/Q}\alpha_{-n}^{i(\alpha)}\alpha_n^{i(\alpha)} + \sum_{a=1}^{8/Q} n s_{-n}^{a(\alpha)} s_n^{a(\alpha)}\right) \end{aligned} \tag{6.18}$$

et l'hamiltonien H sous la forme :

$$H = \left(p^i\right)^2 + N \tag{6.19}$$

N est l'opérateur nombre donné par

$$N = \alpha' M^2 = \sum_{i=1}^{8/Q} \sum_{n=1}^{\infty} n N_n^i (PB) + \sum_{a=1}^{8/Q} \sum_{n=1}^{\infty} n N_n^a (PF) \tag{6.20}$$

$$N_n^i (PB) = \frac{1}{2} \left[a_n^{\dagger i}, a_n^i\right]_+ - \frac{Q}{2} \tag{6.21}$$

$$N_n^a (PF) = \frac{1}{2} \left[s_{-n}^a, s_n^a\right]_- + \frac{Q}{2} \tag{6.22}$$

où $\alpha_n^i = \sqrt{n} a_n^i$ et $N |\Psi\rangle = n |\Psi\rangle$. Le vide de (Fock) dans le secteur solitonique vérifie les conditions suivantes

$$a_n^i |0\rangle = s_n^a |0\rangle = 0 \qquad n > 0 \tag{6.23}$$

$$a_n^i a_n^{\dagger i} |0\rangle = s_n^a s_{-n}^a |0\rangle = Q |0\rangle \tag{6.24}$$

L'état fondamental est une paricule vectorielle sans masse avec $\frac{8}{Q}$ composantes transverses décrite par $|i\rangle$ et son patenaire supersymétrique représentée par $|a\rangle$.

Calculons alors la fonction de partition :

$$P_{PSS}(\omega) = Tr \left[\exp(-\beta H)\right] \tag{6.25}$$

avec $\beta = 1/k_B T$

On obtient les expressions suivantes (en négligeant les energies du mode zéro dans la relation (6.19)) :

$$P_{PSS}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{PSS}(n)\,\omega^{n} \tag{6.26}$$

$$Tr\omega^{nN_n(PB)} = \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\omega^{nm} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\omega^{n}} = P(\omega) \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} Tr\omega^{nN_n(PF)} &= \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{Q}\omega^{nm} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\omega^{n}+\omega^{2n}+...+\omega^{Qn}\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\omega^{n(Q+1)}}{1-\omega^{n}} = P_Q(\omega) \end{aligned} \tag{6.28}$$

ici $\omega = \exp(-\beta)$

Dans (6.28), nous considérons que les possibilités d'états occupés pour un champ parafermionique sont $Q+1$ (les états prennent les valeurs $|0\rangle, ..., |Q\rangle$), donc l'équation (6.28) coincide exactement avec les définitions du [69] (voir aussi par exemple [70]), on peut voir que, $P_{\infty}(\omega) = P(\omega)$ et le champ parafermionique devient un champ bosonique (parabosonique).

La forme compacte de la fonction de partition pour les parasupercordes est

$$P_{PSS}(\omega) = \frac{16}{Q}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\omega^{n(Q+1)}}{(1-\omega^{n})^{2}}\right)^{\frac{8}{Q}} \tag{6.29}$$

où le facteur $\frac{16}{Q}$ représente les composantes de l'état fondamental.

la formule (6.25) prend la forme suivante

$$P_{PSS}(\omega) = \frac{16}{Q}\left[\frac{f\left(\omega^{Q+1}\right)}{\left(f(\omega)\right)^{2}}\right]^{8/Q} \tag{6.30}$$

ici $\omega = \exp(2i\pi\tau)$ et $f(\tau)$ est liée à la fameuse fonction eta de Dedekind comme suit

$$\eta(\tau) = \exp(i\pi\tau/12)\, f(2i\pi\tau)$$

La fonction de partition (6.30) peut être exprimée en termes de fonctions de Jacobi comme suit

$$P_{PSS}(\omega) = \frac{16}{Q}\omega^{(1-Q)/12}\left[\frac{\partial_z\theta_1\left(z|\left(Q+1\right)\tau\right)|_{z=0}}{\partial_z\theta_1\left(z|\tau\right)|_{z=0}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{6.31}$$

En utilisant la propriété S de la fonction eta

$$\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\,\eta(\tau) \tag{6.32}$$

l'expression (6.30) prend la forme

$$P_{PSS} = \frac{16}{Q}\left(\frac{-\ln\omega}{2\pi\left(1+Q\right)}\right)^{4/Q}\omega^{(1-Q)/3Q}q^{-\frac{2}{3}\frac{2Q+1}{Q(Q+1)}}\left[f\left(q^{2/(Q+1)}\right)\right]^{8/Q}\left[f\left(q^2\right)\right]^{-16/Q} \tag{6.33}$$

où $q = \exp\left(\frac{2\pi^2}{\ln\omega}\right)$. Dans la limite $\omega \to 1$ ($\beta \to 0$), on déduit la formule asymptotique

$$P_{PSS}(\beta) \simeq const.\beta^{4/Q}\exp\left[\frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{2Q+1}{Q\left(Q+1\right)}\right)\beta^{-1}\right] \tag{6.34}$$

On peut maintenant définir le comportement asymptotique de la densité d'états $d_{PSS}(n)$ en utilisant le théorème de l'intégrale de Cauchy

$$d_{PSS}(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint d\beta e^{\beta n}P_{PSS}(\beta) \tag{6.35}$$

où le contour de l'intégrale est un petit cercle autour de l'origine.

L'intégrale sur β peut être approchée par l'évaluation standard du point-col (saddle-point), ce qui nous conduit, pour n grand, à écrire la formule asymptotique suivante :

$$d_{PSS}(n) \simeq const.n^{-\frac{8+3Q}{4Q}}\exp\left[4\pi\sqrt{\frac{2Q+1}{3Q\left(Q+1\right)}}\sqrt{n}\right] \tag{6.36}$$

6.4 Thermodynamique et trous noirs

Dans cette section, nous étudions les propriétés thermodynamiques d'un gaz parfait de parasupercordes, après avoir dérivé la fonction de partition, il est facile d'obtenir toutes les autres quantités thermodynamiques.

A partir de l'expression (6.29), on dérive l'énergie libre

$$F_{PSS} = -\frac{1}{\beta}\ln P_{PSS} = -\frac{4\pi^2}{3}\left[\frac{2Q+1}{Q(Q+1)}\right]\beta^{-2} - \beta^{-1}\ln\left(\frac{16}{Q}\right) \tag{6.37}$$

il n'est pas difficile de trouver l'expression de l'entropie S_{PSS} :

$$S_{PSS} = k_B\beta^2\frac{\partial F_{PSS}}{\partial\beta} = k_B\left\{\frac{8\pi^2}{3}\left[\frac{2Q+1}{Q(Q+1)}\right]\beta + \ln\left(\frac{16}{Q}\right)\right\} \tag{6.38}$$

En fonction de n, on peut écrire :

$$S_{PSS} = k_B\left\{4\pi\sqrt{\frac{2Q+1}{3Q(Q+1)}}\sqrt{n} + \ln\left(\frac{16}{Q}\right)\right\} \tag{6.39}$$

La température de Hagedorn (HT) est la température critique introduite par Hagedorn dans le contexte des ineractions fortes [63], dans laquelle l'énergie libre est une divergence ultraviolette. La HT est définie par la relation

$$k_B T_H^{PSS} = \frac{1}{\beta_H^{PSS}} = k_B\frac{\partial E}{\partial S_{PSS}} \tag{6.40}$$

Alors, pour les très grandes énergies $E = M = \sqrt{n/\alpha'}$, on peut en déduire que pour les parasupercordes HT prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} k_B T_H^{PSS} &= \sqrt{\frac{3Q(Q+1)}{2Q+1}}\left(4\pi\sqrt{\alpha'}\right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{6D+36}{D^2+12D-28}}\left(2\pi\sqrt{\alpha'}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.41}$$

il est facile de voir que, si le paramètre de paraquantification $Q = 1$ $(D = 10)$, on retrouve la fameuse HT des supercordes donnée dans [31] (page 277 eq. 5.3.42))

$$\frac{1}{\beta_H} = k_B T_H = \left(\pi\sqrt{8\alpha'}\right)^{-1} \tag{6.42}$$

Notons ici que, pour les supercordes la HT prend la forme $k_B T_H = \left(\pi\sqrt{(D-2)\,\alpha'}\right)^{-1}$, cette relation est différente de celle qui est donnée par l'expression (6.41) et les deux relations sont équivalentes uniquement pour $D = 10$.

A partir de la relation suivante :

$$\beta = \frac{1}{k_B}\frac{dS_{PSS}}{dE} \tag{6.43}$$

et pour un n très grand, on peut en déduire que pour les parasupercordes, la chaleur spécifique à haute énergie prend la forme

$$\begin{aligned} C_{PSS} &= -k_B\beta^2\frac{dE}{d\beta} \\ &= -\frac{(D+1)\,(D-2)\,(D+14)}{6D+36}\left(\frac{\pi^2 E^2\alpha'}{k_B}\right) \end{aligned} \tag{6.44}$$

Comme dans la théorie des cordes ordinaires, la capacité calorifique négative signifie qu'une réduction de l'énergie du système augmente avec la température. Cette propriété est caractéristique des systèmes avec des forces attractives à longue portée (voir par exemple [71]).

L'entropie de Bekenstein des trous noirs est donnée par l'expression [72]

$$S_{BH} = 4\pi k_B G m^2 \tag{6.45}$$

De l'équation (6.45), la relation de correspondance généralisée entre les parasupercordes et les trous noirs est donnée par l'expression suivante

$$M_{PSS} = 2\sqrt{\frac{6\,(D+6)}{(D-2)\,(D+14)}}Gm^2\left(\sqrt{\alpha'}\right)^{-1} \tag{6.46}$$

6.5 La fonction de partition pour les parasupercordes à température non nulle

A partir de (6.20) et (6.36), nous pouvons définir une densité d'états asymptotique ρ_{PSS} comme une fonction de la masse qui peut s'écrire comme suit (en négligeant la constante dans (6.36)) :

$$\rho_{PSS}\,(M) \simeq \left(\sqrt{\alpha'}M\right)^{-\frac{8+3Q}{2Q}} \exp\left(\beta_H^{PSS}M\right) \tag{6.47}$$

Il est bien connu que la fonction de partition à une boucle dans une dimension $(D-1)$ de l'espace est donnée par l'expression :

$$P_{PSS}^{app} = \int_{M_0}^{\infty} dM\rho_{PSS}\,(M)\int \frac{d^{D-1}\overrightarrow{p}}{(2\pi)^{D-1}}\exp\left(-\beta\sqrt{\overrightarrow{p}^2+M^2}\right) \tag{6.48}$$

où $\overrightarrow{p}$ désigne le moment spatial paraquantifié, et M_0 est défini de tel sorte que, lorsque $M \geq M_0$ la densité d'états est approchée par (6.46).

L'expression (6.48) peut être écrite comme suit :

$$P_{PSS}^{app} = C\int_{M_0}^{\infty} dMM^{\frac{D-3}{2}}\exp\left(\beta_H^{PSS}M\right)\frac{d}{d\,(\beta M)}\left[(\beta M)^{-(D-1)(D-2)/2}K_{(D-1)/2}\,(\beta M)\right] \tag{6.49}$$

$$C = -2^{(4-D)/2}\pi^{D/2}V_{D-1}\,(\alpha')^{-\frac{D-3}{4}} \tag{6.50}$$

avec $K_\nu\,(x)$ est la fonction de Bessel modifiée qui a le comportement asymptotique suivant :

$$K_\nu(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{(\nu - 1/2)(\nu + 1/2)}{x} + ...\right] \exp(-x) \tag{6.51}$$

Après intégration, l'utilisation de (6.49) et (6.51) conduit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} P_{PSS}^{app} \simeq \frac{V_{D-1}}{\pi} \left(\frac{\beta^{(D-1)/2}\left(\beta_H^{PSS}\right)^{(D+1)/2}}{\beta - \beta_H^{PSS}}\right) \left(\frac{D^2 + 12D - 28}{6D + 36}\right)^{(D+1)/4} \\ \times \exp\left[-2\pi\sqrt{\frac{D^2 + 12D - 28}{6D + 36}} \left(\frac{\beta - \beta_H^{PSS}}{\beta_H^{PSS}}\right) M_0\right] \end{aligned} \tag{6.52}$$

Pour $\beta \to \beta_H^{PSS}$, cette expression prend la forme

$$\begin{aligned} P_{PSS}^{app} &\simeq (4\alpha')^{D/2} \pi^{D-1} V_{D-1} \left(\frac{D^2 + 12D - 28}{6D + 36}\right)^{(3D+1)/4} \frac{1}{\beta - \beta_H^{PSS}} \\ &= \frac{V_{D-1}}{(4\alpha')^{(D+1)/2} \pi^{(3D+1)/2}} \frac{\left(\beta_H^{PSS}\right)^{(3D+1)/2}}{\beta - \beta_H^{PSS}} \end{aligned} \tag{6.53}$$

Pour $\beta \gg \beta_H^{PSS}$, l'expression (6.52) se réduit à (6.34)

Ceci montre une singularité pour n'importe quelle valeur de D (ou Q), typique pour un système de cordes avec une HT intrinsèque, et indique une transition de phase de type de Carlitz à un état de condensation d'énergie finie [63, 74]. Ici la transition a lieu à $\beta = \beta_H^{PSS}$ vers un condensat microscopique d'énergie finie de la taille de la longueur de la corde.

6.6 Le spectre généralisé

A partir de équation (6.29), on peut écrire les formes explicites pour toutes les valeurs possibles de Q (en utilisant Maple)

$$
\begin{aligned}
P_{PSS}^{Q=1}(\omega) &= 16\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\omega^n}{1-\omega^n}\right)^8 \\
&= 16 + 256\omega + 2304\omega^2 + 15\,360\omega^3 + 84\,224\omega^4 + 400\,896\omega^5 + 1711\,104\omega^6 \\
&+ 6690\,816\omega^7 + 24\,332\,544\omega^8 + 83\,219\,712\omega^9 + O\left(\omega^{10}\right) \qquad (6.54) \\
P_{PSS}^{Q=2}(\omega) &= 8\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\omega^{3n}}{(1-\omega^n)^2}\right)^4 \\
&= 8 + 64\omega + 352\omega^2 + 1504\omega^3 + 5552\omega^4 + 18\,304\omega^5 + 55\,504\omega^6 \\
&+ 78\,560\omega^7 + 210\,276\omega^8 + 536\,544\omega^9 + O\left(\omega^{10}\right) \qquad (6.55) \\
P_{PSS}^{Q=4}(\omega) &= 4\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\omega^{5n}}{(1-\omega^n)^2}\right)^2 \\
&= 4 + 16\omega + 56\omega^2 + 160\omega^3 + 420\omega^4 + 1000\omega^5 + 2264\omega^6 \\
&+ 4848\omega^7 + 10\,000\omega^8 + 19\,880\omega^9 + O\left(\omega^{10}\right) \qquad (6.56) \\
P_{PSS}^{Q=8}(\omega) &= 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\omega^{9n}}{(1-\omega^n)^2}\right) \\
&= 2 + 4\omega + 10\omega^2 + 20\omega^3 + 40\omega^4 + 72\omega^5 + 130\omega^6 + 220\omega^7 \\
&+ 370\omega^8 + 598\omega^9 + O\left(\omega^{10}\right) \qquad (6.57)
\end{aligned}
$$

On se demande que serait l'écriture du spectre dans le cas paraquantique ?

Les conditions du vide (6.23, 6.24) sont toutes nécessaires pour déterminer les différents niveaux de masse pour le spectre. Elles sont déterminées par les relations suivantes (en utilisant les relations trilinéaire (6.5)-(6.11)) :

$$\left[H, \alpha_n^i\right] = 2n\alpha_n^i \qquad (6.58)$$

$$\left[H, s_n^a\right] = 2ns_n^a \qquad (6.59)$$

H est l'Hamiltonien symétrisé donné par l'expression (6.19). Donc, la masse d'un état est obtenue en agissant sur le vide les opérateurs de création :

$$\alpha^{i_1}_{-n_1}\alpha^{i_2}_{-n_2}...\alpha^{i_p}_{-n_p}, s^{a_1}_{-m_1}...s^{a_q}_{-m_q}\left|0;k\right\rangle \tag{6.60}$$

avec $n_1, ..., n_p, m_1, ..., m_q > 0$.

Mais, dans le cadre paraquantique, bien qu'ils semblent à priori deux états differents dans l'exemple suivant : $\alpha^{i}_{-n_1}s^{a}_{-n_2}\left|0;k\right\rangle$ et $s^{a}_{-n_2}\alpha^{i}_{-n_1}\left|0;k\right\rangle$, ils sont en fait similaires dans le cas quantique. Nous suggérons alors de symétriser l'écriture $\frac{1}{2}\left[\alpha^{i}_{-n_1}, s^{a}_{-n_2}\right]_{+}\left|0;k\right\rangle$ pour décrire un seul état.

Afin d'éliminer les variables superflux, il n'est pas difficile de voir que dans le cas paraquantique, les contraintes imposées sur le vide doivent être symétrisées ou antisymétrisées. Donc, dans le cas transverse, les états du spectre sont naturellement écrits sous la forme :

$$\left\langle\alpha^{i_1}_{-n_1}, \alpha^{i_2}_{-n_2}, ..., \alpha^{i_p}_{-n_p}, s^{a_1}_{-m_1}, ..., s^{a_q}_{-m_q}\right\rangle\left|0;k\right\rangle \tag{6.61}$$

où la nouvelle notation introduite $\langle A_1, A_2, ..., A_l\rangle$ définit le produit symétrisé ou antisymétrisé d'opérateurs. Les états physiques des trois premiers niveaux sont donnés dans le tableau suivant :

$Niveau$	$Notation\ de\ l'état$	$Forme\ Explicite$
1	α^i_{-1}	-
	s^a_{-1}	-
2	$\left\langle \alpha^i_{-1}, \alpha^j_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[\alpha^i_{-1}, \alpha^j_{-1}\right]_+$
	$\left\langle s^a_{-1}, s^b_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[s^a_{-1}, s^b_{-1}\right]_-, \left(s^a_{-1}\right)^2$
	$\left\langle \alpha^i_{-1}, s^a_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[\alpha^I_{-1}, s^a_{-1}\right]_+$
	α^i_{-2}	-
	s^a_{-2}	-
3	$\left\langle \alpha^i_{-1}, \alpha^j_{-1}, s^a_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{3!}\alpha^{(i}_{-1}\alpha^j_{-1}s^{a)}_{-1}$
	$\left\langle \alpha^I_{-1}, s^a_{-1}, s^b_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{3!}\alpha^{(i}_{-1}s^a_{-1}s^{b]}_{-1}, \left\langle \alpha^i_{-1}, \left(s^a_{-1}\right)^2 \right\rangle$
	$\left\langle s^a_{-1}, s^b_{-1}, s^c_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{3!}s^{[a}_{-1}s^b_{-1}s^{c]}_{-1}, \left\langle \left(s^a_{-1}\right)^2, s^b_{-1} \right\rangle$
	$\left\langle \alpha^i_{-1}, \alpha^j_{-1}, \alpha^k_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{3!}\alpha^{(i}_{-1}\alpha^j_{-1}\alpha^{k)}_{-1}$
	$\left\langle \alpha^i_{-1}, s^a_{-2} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[\alpha^i_{-1}, s^a_{-2}\right]_+$
	$\left\langle \alpha^i_{-2}, s^a_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[\alpha^I_{-2}, s^a_{-1}\right]_+$
	$\left\langle \alpha^i_{-2}, \alpha^j_{-1} \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[\alpha^i_{-2}, \alpha^j_{-1}\right]_+$
	$\left\langle s^a_{-2}\ , s^b_{-1}\ \right\rangle$	$\frac{1}{2}\left[s^a_{-2}\ , s^b_{-1}\ \right]_-$
	s^a_{-3}	-
	α^i_{-3}	-

avec

$$A^{[a}B^bC^{c]} = A^a\left[B^b, C^c\right]_- + B^b\left[C^c, A^a\right]_- + C^c\left[A^a, B^b\right]_- \tag{6.62}$$

$$A^{(i}B^jC^{k)} = A^i\left[B^j, C^k\right]_+ + B^j\left[A^i, C^k\right]_+ + C^k\left[A^i, B^j\right]_+ \tag{6.63}$$

et $\left\langle \left(s^a_{-1}\right)^2, s^b_{-1} \right\rangle = \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(s^a_{-1}\right)^2, s^b_{-1}\right]_-, \left(s^a_{-1}\right)^3 \right\}$, aussi

$$\alpha^{(i}_{-1}s^a_{-1}s^{b]}_{-1} = \alpha^i_{-1}\left[s^a_{-1}, s^b_{-1}\right]_- + s^a_{-1}\left[\alpha^i_{-1}, s^b_{-1}\right]_+ + \left[\alpha^i_{-1}, s^a_{-1}\right]_+ s^b_{-1} \tag{6.64}$$

notons ici que $\alpha^{(i}_{-1}s^a_{-1}s^{b]}_{-1} = -\alpha^{(i}_{-1}s^b_{-1}s^{a]}_{-1}$ (avec $\left[s^a_{-1}, \left[B, s^b_{-1}\right]_+\right]_+ = 0$ pour $B \neq s^b_n$).

En utilisant la propriété de nilpotence des nombres de paraGrasman $\left(s_n^i\right)^{Q+1} = 0$, le nombre d'états peut être donné dans le tableau suivant (où l'état fondamental $|0\rangle$ prend $2\,(D-2)$ valeurs) :

$Niveau$	$Etat$	$Nombre$
1	$\alpha_{-1}^{i}\,\|0\rangle$	$2\,(D-2)^2$
	$s_{-1}^{a}\,\|0\rangle$	$2\,(D-2)^2$
2	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, \alpha_{-1}^{j} \right\rangle \|0\rangle$	$(D-2)^2(D-1)$
	$\left\langle s_{-1}^{a}, s_{-1}^{b} \right\rangle \|0\rangle$	$\begin{cases} \left[s_{-1}^{a}, s_{-1}^{a}\right]_{-} \|0\rangle \to (D-2)^2(D-3) \\ \left(s_{-1}^{a}\right)^2 \|0\rangle \to \begin{cases} 2(D-2)^2 \quad pour \quad D \neq 10 \\ 0 \quad for \quad Q=1 \quad (D=10) \end{cases} \end{cases}$
	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, s_{-1}^{a} \right\rangle \|0\rangle$	$2(D-2)^3$
	$\alpha_{-2}^{i}\,\|0\rangle$	$2(D-2)^2$
	$s_{-2}^{a}\,\|0\rangle$	$2(D-2)^2$
3	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, \alpha_{-1}^{j}, s_{-1}^{a} \right\rangle \|0\rangle$	$(D-2)^3\,(D-1)$
	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, s_{-1}^{a}, s_{-1}^{b} \right\rangle \|0\rangle$	$\begin{cases} (D-2)^3\,(D-1) \quad pour \quad D \neq 10 \\ (D-2)^3\,(D-3) = 3584 \quad pour \quad D=10 \end{cases}$
	$\left\langle s_{-1}^{a}, s_{-1}^{b}, s_{-1}^{c} \right\rangle \|0\rangle$	$\begin{cases} s_{-1}^{[a} s_{-1}^{b} s_{-1}^{c]} \|0\rangle \to \frac{1}{3}(D-2)^2(D-3)(D-4) \\ \left[\left(s_{-1}^{a}\right)^2, s_{-1}^{b}\right]_{-} \|0\rangle \to 2(D-2)^2(D-3) \\ \left(s_{-1}^{a}\right)^3 \|0\rangle \to \begin{cases} (D-3)^2 \quad pour \quad D \neq 10, 6 \\ 0 \quad pour \quad D=10 \quad or \quad 6 \end{cases} \end{cases}$
	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, \alpha_{-1}^{j}, \alpha_{-1}^{K} \right\rangle \|0\rangle$	$\frac{1}{3}(D-2)^2\,(D-1)\,D$
	$\left\langle \alpha_{-1}^{i}, s_{-2}^{a} \right\rangle \|0\rangle$	$2(D-2)^3$
	$\left\langle \alpha_{-2}^{i}, s_{-1}^{a} \right\rangle \|0\rangle$	$2(D-2)^3$
	$\left\langle \alpha_{-2}^{i}, \alpha_{-1}^{j} \right\rangle \|0\rangle$	$2(D-2)^3$
	$\left\langle s_{-2}^{a}, s_{-1}^{b} \right\rangle \|0\rangle$	$2(D-2)^3$
	$s_{-3}^{a}\,\|0\rangle$	$2(D-2)^2$
	$\alpha_{-3}^{i}\,\|0\rangle$	$2(D-2)^2$

On peut maintenant généraliser l'écriture des états comme suit :

$$\left\langle \alpha_{-n}^{i_1}, \alpha_{-n}^{i_2}, ..., \alpha_{-n}^{i_p} \right\rangle \equiv \frac{1}{p!} \alpha_{-n}^{(i_1} \alpha_{-n}^{i_2} ... \alpha_{-n}^{i_p)} \tag{6.65}$$

$$\begin{aligned} \left\langle s_{-n}^{a_1}, s_{-n}^{a_2}, ..., s_{-n}^{a_p} \right\rangle &\equiv \left\{ \frac{1}{p!} s_{-n}^{[a_1} s_{-n}^{a_2} ... s_{-n}^{a_p]}, \left\langle \left(s_{-n}^{a_1} \right)^2, s_{-n}^{a_3}, ..., s_{-n}^{a_p} \right\rangle \right\} \\ &\equiv \left\{ \frac{1}{p!} s_{-n}^{[a_1} s_{-n}^{a_2} ... s_{-n}^{a_p]}, \frac{1}{(p-1)!} \left(s_{-n}^{[a_1} \right)^2 s_{-n}^{a_3} ... s_{-n}^{a_p]}, ..., \left(s_{-n}^{a_1} \right)^p \right\} \end{aligned} \tag{6.66}$$

$$\left\langle \alpha_{-n}^{i_1}, ..., \alpha_{-n}^{i_p}, s_{-m}^{a_1}, ..., s_{-m}^{a_q} \right\rangle \equiv \frac{1}{(p+q)!} \alpha_{-n}^{(i_1}, ..., \alpha_{-n}^{i_p}, s_{-m}^{a_1}, ..., s_{-m}^{a_q]} \tag{6.67}$$

Les dimensionnalités de ces états sont

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_{-n}^{i_1}, \alpha_{-n}^{i_2}, ..., \alpha_{-n}^{i_p} \right\rangle &\rightarrow \left[\frac{1}{1!} \binom{0}{p-1} (D-2) + \frac{1}{2!} \binom{1}{p-1} (D-2)(D-3) ... \right. \\ &\left. ... + \frac{1}{p!} \binom{p-1}{p-1} (D-2)(D-3)...(D-p-1) \right] \\ &= \sum_{q=1}^{p} \binom{q-1}{p-1} \binom{q}{B} = \binom{p}{B+p-1} \end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned} \left\langle s_{-n}^{a_1}, s_{-n}^{a_2}, ..., s_{-n}^{a_p} \right\rangle &\rightarrow \left[\frac{1}{1!} \theta(Q-p) \binom{0}{p-1} (D-2) \right. \\ &+ \frac{1}{2!} \theta(Q-p+1) \binom{1}{p-1} (D-2)(D-3) + ... \\ &\left. ... + \frac{1}{p!} \theta(Q-1) \binom{p-1}{p-1} (D-2)(D-3)...(D-p-1) \right] \\ &= \sum_{q=1}^{p} \theta(Q-p+q-1) \binom{q-1}{p-1} \binom{q}{B} \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\left\langle \alpha_{-n}^{i_1}, ..., \alpha_{-n}^{i_p}, s_{-m}^{a_1}, ..., s_{-m}^{a_q} \right\rangle \rightarrow \binom{p}{B+p-1} \sum_{r=1}^{q} \theta(Q-q+r-1) \binom{r-1}{q-1} \binom{r}{B} \tag{6.70}$$

avec

$$\theta(A) = \begin{cases} 1 & si \quad A \geq 0 \\ 0 & si \quad A < 0 \end{cases} \tag{6.71}$$

ici $B = D - 2$. Il est clair que pour $Q \rightarrow \infty$ les deux relations (6.68) et (6.69) sont équivalentes.

On peut, enfin, récapituler dans la tableau suivant, les resultats obtenus pour les différentes valeurs de D, le parfait accord du spectre avec les différents developpements des fonctions de partition confirme la cohérence de cette étude.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	*Fonction de Partition*
$D=3$	2	4	10	40	$2+4\omega+10\omega^2+20\omega^3+...$
$D=4$	4	16	56	160	$4+16\omega+56\omega^2+160\omega^3+...$
$D=6$	8	64	352	1504	$8+64\omega+352\omega^2+1504\omega^3+...$
$D=10$	16	256	2304	15 360	$16+256\omega+2304\omega^2+15\,360\omega^3+...$

6.7 La densité d'états asymptotique pour les (parasuper)-p-branes

Dans cette section, on va dériver le comportement asymptotique de la (parasuper) p-brane qui se propage dans un espace-temps à D dimensions. On commence par une paraquantification semi-classique de la p-brane compactifiée sur une variété de topologie $S^p \times R^{D-p}$ qui conduit à l'hamiltonien (symétrisé) suivant (en négligeant le mode zéro) :

$$H_p = N_p = \sum_{i=1}^{D-p-1} \sum_{n \in Z^p/\{0\}} \omega_n \left[N_n^i (PB) + N_n^i (PF) \right] \tag{6.72}$$

avec

$$n = (n_1, n_2, ..., n_p) \in Z^p$$
$$\omega_n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + ... + n_p^2}$$

Notons ici que la dimension de l'espace-temps D est une fonction du paramètre de la paraquantification Q, par exemple pour $p=2$, nous avons démontré dans le chapitre précédent que $D(Q) = 3 + 8/Q$ ($D = 11$, 7, 5 et 4 respectivement pour $Q = 1$, 2, 4 et 8).

En utilisant la formule (6.72), on peut en déduire les expressions des fonctions génératrices :

$$P_{PB}^{p}(\omega) = Tr\omega^{\omega_n \sum_{i=1}^{(D-p-1)1} N_n^i(PB)} = \prod_{n\in Z^p/\{0\}} \left(\frac{1}{1-\omega^{\omega_n}}\right)^{D-p-1} \tag{6.73}$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} d_{PB}^{p}(m)\,\omega^{m} \tag{6.74}$$

$$P_{PF}^{p}(\omega) = Tr\omega^{\omega_n \sum_{i=1}^{D-p-1} N_n^i(PF)} = \prod_{n\in Z^p/\{0\}} \left(\frac{1-\omega^{\omega_n(Q+1)}}{1-\omega^{\omega_n}}\right)^{D-p-1} \tag{6.75}$$

$$\equiv \sum_{m=0}^{\infty} d_{PF}^{p}(m)\,\omega^{m} \tag{6.76}$$

ici $\beta = x + 2\pi i y$ et $\mathrm{Re}\,\beta > 0$

On peut utiliser les résultats de Meinardus [75, 76]. Dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\beta \to 0$ (x et $y \to 0$), on peut en déduire le comportement asymptotique des expressions (6.73) et (6.75) :

$$P_{PB}^{p}(\beta) = \exp\left\{\frac{1}{2}(D-p-1)\left[2\pi^{p/2}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\zeta(p+1)\,\beta^{-p} - Z_p(0)\ln\beta + Z_p'(0) + O\left(y^{a_1}\right)\right]\right\} \tag{6.77}$$

$$P_{PF}^{p}(\beta) = \exp\left\{\frac{1}{2}(D-p-1)\left[2\pi^{p/2}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\zeta_{(Q+1)}(p+1)\,\beta^{-p} - Z_p(0)\ln(Q+1) + O\left(y^{a_2}\right)\right]\right\} \tag{6.78}$$

$a_1 > 0$ et $a_2 < 1$

avec $Z_p(s)$ est la fonction zêta d'Epstein définie comme suit [77, 78, 79] :

$$Z_p(s) = Z_p\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(s) = \sum_{n\in Z^p/\{-g\}}{}' \, \Omega_p^{-s/2} \exp\left[2\pi i\,(n,h)_p\right] \tag{6.79}$$

où

$$\Omega_p = \sum_{i=1}^{p} (n_i + g_i)^2 \tag{6.80}$$

$$(n,h)_p = \sum_{i=1}^{p} n_i h_i \qquad g_i \text{ et } h_i \in R \tag{6.81}$$

$Z_p(s)$ a un pôle simple $s = p$, alors $Z_p(p+\epsilon) = \frac{2\pi^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} B_p \, \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon)$ (B_p sont des constantes, pour plus de détails voir par exemple [77, 78, 79]). Aussi, on a $\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} n^{-s}$ est la fameuse fonction Zeta de Riemann, et $\zeta_{(m)}(s)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}\zeta_{(m)}(s) &= \left(1 - m^{1-s}\right)\zeta(s) \\ &= 1^{-s} + 2^{-s} + ... + (m-1)^{-s} - m(m-1)^{-s} \\ &+ (m+1)^{-s} + ... + (2m-1)^{-s} + (m-1)(2m)^{-s} \\ &+ ...\end{aligned} \tag{6.82}$$

cette expression coïncide avec la formule donnée dans [80]. En utilisant la représentation des séries de Dirichlet comme une intégrale définie

$$\begin{aligned}D(s) &= \sum a_n \exp(-\mu_n s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx x^{s-1} \left(\sum a_n \exp(-\lambda_n s)\right) \\ \mu_n &= \ln \lambda_n \qquad for \qquad \sigma > 0\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\zeta_{(m)}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{\exp(mx) - 1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \exp(nx) - m\right)$$

pour $Q = 1$, on peut en déduire l'expression bien connue

$$\zeta_{(2)}(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} \tag{6.83}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{\exp(x) + 1} \tag{6.84}$$

En utilisant l'approximation de saddle-point donnée par (6.35), on peut définir le comportement asymptotique de la densité d'états $d^p_{PB;PF}(m)$:

$$d^p_{PB;PF}(m) = A_{PB;PF}(p)\, m^{B(p,D)} \exp\left[C_{PB,PF}(p,D)\, m^{p/p+1}\right]$$

avec

$$A_{PB}(p,Q) = \frac{(D-p-1)}{2\sqrt{2\pi(p+1)}} \left[2\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \zeta(p+1)\right]^{\frac{1-(D-p-1)Z_p(0)}{2p+2}} \exp\left(\frac{1}{2}(D-p-1) Z_p'(0)\right) \tag{6.85}$$

$$A_{PF}(p,Q) = \frac{(D-p-1)}{2\sqrt{2\pi(p+1)}} \left[2\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \zeta_{(Q+1)}(p+1)\right]^{\frac{1-(D-p-1)Z_p(0)}{2p+2}}$$

$$\times \exp\left(\frac{-1}{2}(D-p-1) Z_p(0) \ln(Q+1)\right) \tag{6.86}$$

$$B(p,Q) = \frac{(D-p-1) Z_p(0) - p - 2}{2p+2} \tag{6.87}$$

$$C_{PB}(p,Q) = \frac{p+1}{p} \left[(D-p-1)\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \zeta(p+1)\right]^{\frac{1}{p+1}} \tag{6.88}$$

$$C_{PF}(p,Q) = \frac{p+1}{p} \left[(D-p-1)\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \zeta_{(Q+1)}(p+1)\right]^{\frac{1}{p+1}} \tag{6.89}$$

Ainsi, la fonction génératrice de la parasuper p-branes est donnée par (en négligeant la polarisation du vide) :

$$P_{PSB}^{p}(\omega) = P_{PB}^{p}(\omega)\, P_{PF}^{p}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{PSB}^{p}(m)\, \omega^{m} = \prod_{n \in Z^{p}/\{0\}} \left(\frac{1-\omega^{\omega_n (Q+1)}}{\left(1-\omega^{\omega_n}\right)^{2}} \right)^{D-p-1} \tag{6.90}$$

Cette expression a le comportement suivant (pour $\beta \to 0$)

$$P_{PB}^{p}(\beta) = A \beta^{\frac{1}{2}(D-p-1) Z_p(0)} \exp\left\{ \frac{1}{2}(D-p-1) \left[2\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left[2-(Q+1)^{-p}\right] \zeta(p+1)\, \beta^{-p} \right] \right\} \tag{6.91}$$

$$A = (Q+1)^{\frac{-1}{2}(D-p-1) Z_p(0)} \exp\left[\frac{1}{2}(D-p-1)\, Z_p'(0) \right] \tag{6.92}$$

et le comportement asymptotique de la densité d'états prend la forme suivante (approximation du point-saddle) :

$$d_{PSB}^{p}(m) = A_{PSB}(p)\, m^{B(p,D)} \exp\left[C_{PSB}(p,D)\, m^{p/p+1} \right] \tag{6.93}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{PSB}(p,D) = {} & \frac{(D-p-1)}{2\sqrt{2\pi(p+1)}} \left\{ 2\pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left[2-(Q+1)^{-p}\right] \zeta(p+1) \right\}^{\frac{1-(D-p-1)Z_p(0)}{2p+2}} \\ & \times (Q+1)^{\frac{-1}{2}(D-p-1) Z_p(0)} \exp\left[\frac{1}{2}(D-p-1)\, Z_p'(0) \right] \end{aligned} \tag{6.94}$$

$$B(p,D) = \frac{(D-p-1)\, Z_p(0) - p - 2}{2p+2} \tag{6.95}$$

$$C_{PSB}(p,D) = \frac{p+1}{p} \left[(D-p-1)\, \pi^{p/2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left[2-(Q+1)^{-p}\right] \zeta(p+1) \right]^{\frac{1}{p+1}} \tag{6.96}$$

On peut voir que pour $p = 1$, et en utilisant des propriétés des fonctions d'Epstein et zeta-Riemann

$$Z_1(s,0,0) = \zeta(s)$$

et la formule bien connue trouvée par Von Mangoldt que la valeur numérique de la constante $\psi(x)$ est $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln 2\pi$, on retrouve les expressions (6.34) et (6.36) données dans la deuxième section avec les valeurs exactes des constantes (en négligeant le facteur de polarisations du vide $\frac{16}{Q}$)

$$P_{PSS}(\beta) \simeq \frac{2.}{Q}\left[2\pi(Q+1)\right]^{4/Q}\beta^{4/Q}\exp\left[\frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{2Q+1}{Q(Q+1)}\right)\beta^{-1}\right] \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} d_{PSS}(n) &\simeq \frac{2.}{Q}\left[2\pi(Q+1)\right]^{4/Q}\left[\frac{2\pi^2}{3}\frac{2Q+1}{Q+1}\right]^{\frac{Q+8}{4Q}} n^{-\frac{8+3Q}{4Q}} \\ &\times \exp\left[4\pi\sqrt{\frac{2Q+1}{3Q(Q+1)}}\sqrt{n}\right] \end{aligned} \tag{6.98}$$

ce résultat, nous conduit à étudier les concepts de la HT et les trous noirs supersymétriques pour les objets étendus dans le cas paraquantique qui n'ont pas encore été élaborés.

Conclusion

Dans cette thèse nous pouvons voir qu'il a été principalement question d'étude de la théorie des cordes étendues (membranes et supermenbranes à la limite basse énergie) et des supercordes dans le formalisme de la paraquantification.

Contrairement au cas de la théorie des cordes, l'étude de la membrane demande plus de soins puisque les équations sont non linéaires. En effet pour simplifier l'étude de la dynamique des membranes, on a recours aux symétries de la théorie, mais l'absence de la symétrie d'échelle suggère que certaines techniques de base en théorie des cordes telle que la théorie conforme ne sont plus possibles. Ce qui nous a conduit à développer un modèle d'une théorie classique perturbative de la membrane bosonique à la limite basse énergie, un choix spécifique de jauge a permis la fermeture de l'algèbre des contraintes. La paraquantification du modèle nous a conduit à différentes possibilités de dimensions de l'espace-temps D autres que $D = 27$ retrouvées par la relation $D = 3 + \frac{24}{Q}$.

L'interaction de la membrane parabosonique dans un champ de fond B a été traitée, la nécessité de la cohérence des conditions aux bords avec les relations de commutation de base a conduit à une modification de ces dernières traduite par une noncommutativité déformée aux extrémités de la corde étendue.

Malgré l'impossibilité de construire la théorie de la membrane fermionique, en utilisant des jauges supplémentaires, nous avons été capables de contourner les difficultés et de construire un modèle consistant d'une membrane à la limite basse énergie par une extension supersymétrique du world-sheet du modèle de la corde bosonique étendue. La version paraquantique a été développée et les dimensions d'espace-temps $D = 4, 5, 7, 11$ ont été dérivées comme conditions nécessaires à la cohérence du modèle paraquantique. Ces dernières représentent exactement les dimensions pour lesquelles sont formulées les supermembranes classiques. La possibilité d'une parasupermembrane à $D = 7$ nous fait penser à une nouvelle possibilité d'une M-Theory pour $D = 7$ $(Q = 2)$, équivalente à celle pour $D = 11$ $(Q = 1)$.

Un autre point intéressant, c'est l'étude thermodynamique des parasupercordes et des (parasuper) p-branes, on a dérivé le comportement asymptotique de la densité d'états pour ces théories. Une écriture cohérente et consistante des états pour les parasupercordes a été élablie.

Une étude d'un gaz parfait de parasupercordes nous a permis de déterminer la température critique de Hagedorn, ce qui a mis en evidence la presence d'une singularité pour n'importe quelle valeur de D (ou Q), typique pour un système de cordes avec une HT intrinsèque, et indique une transition de phase de type de Carlitz à un état de condensation d'énergie finie. La transition a lieu à $\beta = \beta_H^{PSS}$ vers un condensat microscopique d'énergie finie de la taille de la longueur de la corde.

L'étude d'une paraquantification semi-classique de la p-brane compactifiée sur une variété de topologie $S^p \times R^{D-p}$, et l'utilisation de certains outils mathématiques rigoureux nous a permis de dériver le comportement asymptotique de la densité d'états, ce résultat, nous conduit à étudier les concepts de la HT et les trous noirs supersymétriques pour les objets étendus dans le cas paraquantique qui n'ont pas encore été élaborés.

Bibliographie

[1] E. Witten, Nucl. Phys. B 443, 85 (1995)

[2] P.K. Townsend, arXiv :hep-th/9612121

[3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032 (1999)

[4] E. Bergshoeff, D. S. Berman, J. P. van der Schaar and P. Sundell, Nucl. Phys. B 590, 173 (2000)

[5] S. Kawamoto and N. Sasakura, JHEP 0007, 014 (2000)

[6] A. Das, J. Maharana and A. Melikyan, JHEP 0104, 016 (2001)

[7] Ken-Ichi Tezuka, Eur. Phys. J. C 25, 465 (2002)

[8] S. Gangopadhyay, Phys. Lett. B 659, 399 (2008)

[9] C. S. Chu and P. M. Ho, Nucl. Phys. B 550, 151 (1999)

[10] F. Ardalan, H. Arfaei, M. M. Sheikh-Jabbari, Nucl. Phys. B 576, 578 (2000)

[11] R. Banerjee, B. Chakraborty and K. Kumar, Nucl. Phys. B 668, 179 (2003)

[12] H. Kamo and T Sohkawa, Prog. Theor. Phys. 57, 1749 (1977)

[13] K. Kikkawa and M. Yamasaki, Prog. Theor. Phys. 76, 1379 (1986)

[14] K. Fujikawa and J. Kubo, Phys. Lett. B 199, 75 (1987)

[15] J. Kubo, Phys. Lett. B 202, 315 (1988)

[16] U. Marquard and M. Scholl, Phys. Lett. B 227, 227 (1989)

[17] U. Marquard and M. Scholl, Phys. Lett. B 227, 234 (1989)

[18] F. Ardalan and F. Mansouri, Phys. Rev. D 9, 3341 (1974)

[19] V. Alessandrini, D.Amati, M.le Bellac and D. I. Olive, *The operator Approch to Dual multiparticle Theory*, Physics reports 1C (1971).

[20] J. H Schwarz, *Dual Resonance Theory*, Physics Reports 8C, 269 (1973).

[21] Dual Theory, Physics Reports reprint vol. I, ed. M.Jacob (North- Holland, Amsterdam, 1974).

[22] J. Sherk, Rev. Mod. Phys. 47, 123 (1975).

[23] Th. Kaluza, Sitzungsher, Press. Akad.Wiss.berlin, Math.Phys. K1, 966 (1921).

[24] O. Klein, Z.Phys. 37, 895 (1926).

[25] M. B. Green and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B181, 502 (1981).

[26] M. B. Green and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B198, 252 (1982).

[27] M. B. Green and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B198, 474 (1982).

[28] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, Nucl. Phys. B198, 441 (1982).

[29] M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B109, 444 (1982).

[30] M. Kaku, *Introduction to Superstings*, Spinger-Verlag 1990.

[31] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Supersting Theory*, Vol.I, Cambridge University Press 1987.

[32] J. Polchinski, *Sting Theory*, Vol.I, II ; Cambridge University Press 1998.

[33] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohni, Nucl. Phys.B256, 253 (1985).

[34] D. J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec and R. Rohni, "*Heterotic String Theory, II- the interacting heterotic string*" Princeton preprint, june 85 ; Nucl. Phys. B267, 75 (1986).

[35] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, Ann. Phys. 185, 330 (1988).

[36] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, Proceedings, Conference, Trieste, Italy, July 17-21, 1989.

[37] M. J. Duff. arXiv :hep-th/9611203.

[38] K. S. Stelle, arXiv :hep-th/9701088.

[39] B. de Wit, arXiv :hep-th/9802073.

[40] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk Phys. Lett. B76, 409 (1978).

[41] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, Phys. Lett. B209, 451 (1988).

[42] M. Henneaux and L. Mezincescu, Phys. Lett., B152, 340 (1985).

[43] B. de Wit, K. Peeters, and J. C. Plefka, arXiv :hep-th/9803209.

[44] W. Siegel, Phys. Lett. B128, 397 (1983).

[45] W. Siegel, Class. Quant. Grav. L95, 2 (1985).

[46] E. P. Wigner, Phys. Rev. 77, 711 (1950).

[47] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.

[48] H. S. Green, Phys. Rev. 90, 270 (1953).

[49] L. Khodja et N. Belaloui, Braz. J. Phys. 39, 652 (2009)

[50] W. Taylor, Rev. Mod. Phys. 73, 419 (2001) ; P. A. Collins and P. W. Tucker, Nucl. Phys. B 112, 150 (1976) ; P. S. Howe and P. W. Tucker, J. Phys. A 10, L155 (1977) ; A. Sugamoto, Nucl. Phys. B 215, 381 (1983)

[51] A. A. Deriglazov, Nucl. Phys. B 597, 299 (2001)

[52] L. Smolin, Phys. Rev. D 57, 6216 (1998)

[53] I. Bars and C. Kounnas, Phys. Rev. D 56, 3664 (1997)

[54] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 53, 769 (2003)

[55] M. J. Duff, arXiv :hep-th/9611203

[56] O. W. Greenberg and A. K Mishra, Phys. Rev. D 70, 125013 (2004)

[57] A. Achucarra, J. Evans, P.K. Townsend and D.L. Wiltshire, Phys. Lett. B 198, 441 (1987).

[58] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin and K. S. Stelle, Nucl. Phys. B 297, 515 (1988)

[59] B. Chakraborty , S. Gangopadhyay, A. Ghosh Hazra , F. G. Scholtz, Phys. Lett. B 625, 302 (2005).

[60] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 54, 621 (2004)

[61] H. Nicolai, R. Helling, arXiv :hep-th/9809103 pp 6

[62] N. Belaloui and L. Khodja, AIP Conf. Proc.881, 267 (2007)

[63] R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. 3, 147 (1965)

[64] L. Susskind, *Some speculations about black hole entropy in string theory*, Rutgers University preprint, RU-93-44 (1993).

[65] G. 't Hooft, Phys. Scripta T36, 247 (1991).

[66] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B256, 727 (1985).

[67] L. Susskind and J. Uglum, *Black hole entropy in canonical quantum gravity*, Stanford University preprint, SU-ITP-94-1 (1994).

[68] L. Khodja, These de Magister 2005.

[69] Honsberger, R. Mathematical Gems III. Washington, DC : Math. Assoc. Amer., pp. 241-242, 1985.

[70] George E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1976.

[71] V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics : Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp 485.

[72] J.D. Bekenstein, Phys Rev D7, 2333 (1973) ; S.W. Hawking, Nature 248, 30 (1974) ; G.W. Gibbons and S.W. Hawking, Phys Rev D15, 2752 (1977).

[73] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook ofMathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.

[74] R.D. Carlitz, Phys. Rev D5, 3231, (1972).

[75] G. Meinardus, Math. Z. 59, 338 (1954).

[76] G. Meinardus, Math. Z. 61, 289 (1954).

[77] A.A. Bytsenko, K. Kirsten and S. Zerbini, Phys. Lett. B 304, 235 (1993).

[78] P. Epstein, Math. Ann. 56 (1903) 615.

[79] P. Epstein, Math. Ann. 63 (1907) 205.

[80] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2ed., Oxford, 1986, pp16

Low-Energy Parabosonic Membrane: New Critical Dimensions and Deformed Noncommutativity

L. Khodja* and N. Belaloui
Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri, Route Ain El-Bey, Constantine 25000, Algeria
(Received on 25 June, 2009)

We study a classical perturbative membrane based on the string-limit model and we discuss the consistency of the theory where the closure of the classical constraints algebra is verified. We paraquantize the model (extended string) both in the covariant and the transverse approaches. From the generalized Poincaré algebra, the so-called Poincaré (para) algebra, we show that the space-time critical dimensions D are related to the order of the paraquantization Q by the relation $D = 3 + 24/Q$. The symplectic structure is generalized for the paraquantum case and applied to the parabosonic membrane coupled to a constant 3-form field. This leads to a deformed noncommutative relations at the ends of the membrane (extended string) describing a geometry which might be called a q-noncommutativity.

Keywords: Membranes, q-deformation, Noncommutativity

I. INTRODUCTION

In the last three decades, a new revolutionary theory known as string theory has emerged and seemed to be a serious candidate for the fundamental theory of nature by the fact that it was the alone theory which seemed reconcile the classical theory of general relativity at large distance scales with the standard model of quantum particle physics at short distance scales.

It has been shown that there are five consistent quantum superstring theories which can be constructed by choosing different sets of fields on the string world-sheet. These are the types I, IIA, IIB, heterotic $E_8 \otimes E_8$ and $SO(32)$ theories.

The multiplicity of these theories added with the fact that the supergravity is an eleven dimentional theory while the consistent ten-dimensional superstring theories give microscopic models for quantum gravity goes against the successful of the string theory.

In 1995, a remarkable new idea caused a substantial change in the dominant picture of superstring theory as the main candidate for fundamental description of the world. Indeed, all the known consistent string theories seem be special limit cases of a more fundamental theory which has been baptized M-theory [1, 2], and which seems to be most naturally described in eleven dimensions. The string has also lost its position as the main candidate. It is important, however, to notice that the string theory contains dynamical objects of several differential dimensionalities; in particular, a two-dimensional string excitation known as membrane gives some interesting properties like the eleven-dimensional supermembrane which let us think to a microscopic description of the eleven-dimensional supergravity through a quantization of a supermembrane.

Before the emergence of the eleven-dimensional M-theory, much more attention was given to the ten-dimensional theories (superstrings) at the expense of the eleven-dimensional ones because of the misreading of the eleven-dimensional space-time properties.

Another intringuing fact emerging in this context is the connection between string theory and noncommutative geometry [3]. There has been a flurry of activity in analysing noncommutativity in strings and membranes, in particular, those derived in either string coupled to the two-form or the membrane coupled to the three-form [4–11].

Unlike the string theory, the study of the membrane theory is more involved than the analogue study in the string case, since the equations to be resolved are nonlinear [12].

The specificity of the membrane is the fact that the Lagrangian has no Weyl invariance [12], which suggests that some of the basic techniques in string theory such as the conformal mapping are not available. In string theory the critical dimension such as $D = 26$ is well-known, it is for example related to Lorentz invariance in the light cone gauge. The critical dimension of the membrane has mainly been discussed with regard to its spectrum [13, 14], to the truncated versions of the BRST [15] or the Lorentz algebra [16], where the $D = 27$ emerges as a necessary condition. Notice however that, it is not clear wether the dimension of embedding space plays as crucial a role for membranes as it does for strings. A natural way to find a critical dimension for the membrane is to relate this latter to the string theory via dimensional reduction [17]. In this string limit, it is natural to obtain $D-1 = 26$ for the bosonic membrane, since one of the D dimension in the membrane is absorbed by the gauge freedom [16, 18–23].

The purpose of this paper is to investigate the paraquantum extension of a bosonic membrane. The paraquantization, as a generalization of the quantization, was first introduced by Green [24]. Indeed, in 1950, Wigner [25] demonstrated that, for satisfying the wave particle duality, which is a direct consequence of the Heisenberg equations of motion, the set of the usual bilinear canonical commutation relations is a particular solution. Based on trilinear commutation relations, the paraquantization consists in a generalization of the creation-annihilation operators algebra for the bosons and the fermions. We note also that the paraquantization is characterized by a parameter Q, the order of the paraquantization, such that $Q = 1$ corresponds to the ordinary quantization [26].

A first study of a paraquantum string theory was done by F. Ardalan and F. Mansouri [27]. This study is based on the

*Electronic address: lamine.khodja@yahoo.fr

particular manner in which the center of mass variables of the string are to be handled. Indeed, these authors impose on the center of mass coordinates and the total energy momentum operators of the string x^μ, p^μ to satisfy ordinary commutation relations. This is done by the choice of a specific direction in the paraspace of the Green components, characterized by the anzatz $x^{\mu(\beta)} = x^\mu \delta_{\beta 1}$ and $p^{\mu(\beta)} = p^\mu \delta_{\beta 1}$, where $x^{\mu(\beta)}$ (resp. $p^{\mu(\beta)}$) are the Green components of x^μ (resp. p^μ). This requires relative paracommutation relations between the center of mass coordinates and the excitation modes of the string which are exclusively anomalous bilinear commutation relations in terms of the Green components. Because of the separation of $\beta = 1$ and $\beta \neq 1$ in the precedent anzatz, these bilinear commutations relations can not be rewritten in trilinear commutation relations form which are the basis of the paraquantization.

A second study of the parastring theory is proposed [28, 29], where the paraquantization is done by requiring that both the center of mass variables and the excitation modes of the string verify paraquantum commutation relations. Indeed, in this study, paraquantizing the string theory consists in reinterpreting the classical bosonic and fermionic string variables $X^\mu(\sigma,\tau)$, $\mathcal{P}^\nu(\sigma',\tau)$, and $\psi^\rho(\sigma'',\tau)$ as operators satisfying the paraquantum trilinear commutation relations (τ is a time like evolution parameter, while the parameter σ labels points on the string).

Notice however that in these two approaches, the resulting parabosonic (resp. paraspinning) string theories are Poincaré invariant if the dimension D of the space-time and the order Q of the paraquantization are related by the expressions $D = 2 + \frac{24}{Q}$ (resp. $D = 2 + \frac{8}{Q}$).

The paper is organized as follows: In section II, a classical perturbative bosonic membrane theory based on the study of a string-limit model is reviewed, the closure of the constraints algebra is discussed. In sections III and IV, we paraquantize this model both in the covariant and in the transverse approaches, where from the closure of Poincaré (para) algebra, a relation between the spacetime dimension D and the order of the paraquantizations Q is derived implying in this other possibilities of the critical dimensions other than $D = 27$. In section V, we discuss the interacting bosonic membrane and the symplectic structure of the string in B-field, the paraquantization appears as a q-deformation of the noncommutative relations, which we baptize as a q-noncommutative relations. The last section is devoted to discussion.

II. REVIEW OF A CLASSICAL PERTURBATIVE BOSONIC MEMBRANE

II.1. Action

An open membrane is a two dimensional object which when it is moving in $(D-1)$ spatial dimensions sweeps out a three dimensional world-volume (in D dimensional spacetime) parametrized by σ^a, $a = 0, 1, 2$. We use a metric with a signature $(-,+,...,+)$ in the target space and $X^\mu(\tau,\sigma,\rho)$ a membrane coordinates. The Polyakov action for the bosonic membrane is then given by [30]:

$$S = -\frac{T_m}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-h}\left(h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1\right) \tag{1}$$

where

$$h = \det h_{ab} \tag{2}$$

and $\mu,\nu = 0,1,...,D-1$. T_m describes the tension of the membrane.

To simplify the study of the membrane dynamics, we are leading to use the symmetries of the theory. Unfortunately, unlike the case of the classical string, where there are three components of the metric and three continious symmetries (two diffeomorphism and one scale symmetries) leading to a complete specification of the metric by gauge fixing, for the membrane, we have six independent components and only three diffeomorphism symmetries and in particular no scale symmetry.

As a consequence, the membrane equations of motion are intrinsically non linear, which do not allows one to obtain their general solutions. Some special solutions were considered in the literature. A particular sector of the solution is the study of the low-energy limit of small radius for the cylindrical membrane where we take the $\sigma^2 = \rho$ direction of the membrane to be wrapped around a circle with radius R $(0 \leq \rho \leq 2\pi R)$.

We look for solutions of the membrane coordinates $X^\mu(\tau,\sigma,\rho)$ with a judicious ansatz introduced by [23] as follows:

We consider $d = 2$ reparametrization invariant truncation of the coordinates $(a = (\alpha, 2))$ [23, 31]:

$$X^\mu(\tau,\sigma,\rho) = Z^\mu(\tau,\sigma) + \rho W^\mu(\tau,\sigma) \tag{3}$$

and of the metric

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(\tau,\sigma) \tag{4}$$
$$h^{\alpha 2} = g^{\alpha\beta}(\tau,\sigma)\phi_\beta(\tau,\sigma) \tag{5}$$
$$h^{22} = 1 + g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta \tag{6}$$
$$\alpha,\beta = 0,1$$

where W^μ is a normed constant field.

Notice however that in [31], the perturbative theory is considered up to the order ε^2.

In the begining, the h^{ab} metric possess 6 independent components but in this writing of h^{ab}, it remains 5 independent components while the sixth is fixed by the gauge $h^{22} = 1 + g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta$ to satisfy the condition $\det h^{ab} = \det g^{\alpha\beta}$.

The action takes then the form

$$S = -\frac{T_s}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}D_\alpha Z^\mu D_\beta Z^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{7}$$

where $D_\alpha Z^\mu = \partial_\alpha Z^\mu + \phi_\alpha W^\mu$, and the tension of the membrane T_m reduces to the scale of the string tension T_s, through the relation

$$T_s = 2\pi R T_m = \frac{R}{l_p^3} \tag{8}$$

where l_p is the Planck's length.

Notice here that the ρ reparametrization is hidden by its absence in the action. However, the field ϕ_α plays the part of ρ with respect to the hidden membrane symmetry which became an additional symmetry to the extended string and which takes the form [23, 32]

$$\delta_\Lambda Z^\mu = W^\mu \Lambda \tag{9}$$
$$\delta_\Lambda \phi_\alpha = -\partial_\alpha \Lambda \tag{10}$$

This additional symmetry may be seen as an additional gauge invariance of the string in the spirit of gauged Wess-Zumino-Witten models [32].

Finally, this action is invariant under Poincaré, local and Weyl symmetries, with also the additional gauge invariance with the parameter Λ.

The canonical momenta for the fields Z^μ, $g_{\alpha\beta}$, ϕ_α are respectively:

$$\Pi_Z^\mu = -T_s\sqrt{-g}D_0 Z^\mu \tag{11}$$
$$\Pi_g^{\alpha\beta} = 0 \tag{12}$$
$$\Pi_\phi^\alpha = 0 \tag{13}$$

It is clear that, while Π_Z^μ is a genuine momentum, $\Pi_g^{\alpha\beta}$ and Π_ϕ^α are the primary constraints of the theory. The first one is equivalent to the vanishing of the symmetric energy-momentum tensor:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = \\ &= -T_s\left(D_\alpha Z^\mu D_\beta Z_\mu - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}D_\rho Z^\mu D_\sigma Z_\mu\right) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

and the second is the same as the equation of ϕ_α given by

$$W^\mu D_\alpha Z_\mu = 0 \tag{15}$$

One can then set the three equations of constraints of the theory as follows:

$$\chi_1 = 2gT_sT_{00} = \Pi_Z^2 + T_sD_1Z^\mu D_1 Z_\mu = 0 \tag{16}$$
$$\chi_2 = \sqrt{-g}T_{01} = \Pi_Z^\mu D_1 Z_\mu = 0 \tag{17}$$
$$\chi_3 = W^\mu \Pi_\mu = 0 \tag{18}$$

which represent the three restrictions on the world-volume metric through the previous detailed constrained Hamiltonian analysis of the free Polyakov membrane [31].

The classical Hamiltonian is expressed as:

$$H = \int d\sigma \mathcal{H}_0 \tag{19}$$

where

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\sqrt{-g}}{2T_sg_{11}}\chi_1 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\chi_2 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\phi_1\chi_3 = 0 \tag{20}$$

The time evolution of the field Z^μ and momenta Π_Z^μ is governed by:

$$\partial_0 Z^\mu = \{Z^\mu, H\}_{PB} = \{Z^\mu, \Pi_Z^\nu\}_{PB}\frac{\partial H}{\partial \Pi_{Z\nu}} + \{Z^\mu, Z^\nu\}_{PB}\frac{\partial H}{\partial Z_\nu} \tag{21}$$

This latter with the particular choice corresponding to $\phi_0 = 0$ leads to an ordinary form of the Poisson brackets (P.B) as the following:

$$\{Z^\mu(\sigma), \Pi_{Z\nu}(\sigma')\}_{PB} = -\delta_\nu^\mu \delta(\sigma-\sigma') \tag{22}$$
$$\{g_{\alpha\beta}(\sigma), \Pi_g^{\rho\sigma}(\sigma')\}_{PB} = \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\rho\right)\delta(\sigma-\sigma') \tag{23}$$
$$\left\{\phi_a(\sigma), \Pi_\phi^\beta(\sigma')\right\}_{PB} = \delta_\alpha^\beta\delta(\sigma-\sigma') \tag{24}$$
$$\{otherwise\}_{PB} = 0$$

where now and later $\Pi_Z^\mu = -T_s\sqrt{-g}\partial_0 Z^\mu$.

Notice here that the P.B for the induced field ϕ_0 is not verified, this case is identical to the electrodynamic field A_0 in QED, where the Lorentz gauge is used.

From the P.B (22-24), one can easily show that the constaints (16-18) satisfy the following closed algebra

$$\{\chi_1(\sigma), \chi_1(\sigma')\}_{PB} = 4T_s^2\left[\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')\right]\partial_1\delta(\sigma-\sigma') \tag{25}$$
$$\{\chi_2(\sigma), \chi_2(\sigma')\}_{PB} = \left[\chi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma')\right]\partial_1\delta(\sigma-\sigma') \tag{26}$$
$$\{\chi_3(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = 0 \tag{27}$$
$$\{\chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma')\}_{PB} = -T_s\left[\chi_1(\sigma) + \chi_2(\sigma')\right]\partial_1\delta(\sigma-\sigma') \tag{28}$$
$$\{\chi_1(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = T_s^2\left[\chi_3(\sigma) + \chi_3(\sigma')\right]\partial_1\delta(\sigma-\sigma') \tag{29}$$
$$\{\chi_2(\sigma), \chi_3(\sigma')\}_{PB} = \left[\chi_3(\sigma) + \chi_3(\sigma')\right]\partial_1\delta(\sigma-\sigma') \tag{30}$$

the set of these relations is equivalent to the closure of the constraints algebra of the membrane given in [11].

Now, as it is mentioned above, it is possible to use the two dimentional world-sheet symmetry: The Weyl symmetry to fix the gauge $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, which is one of the most advandage of the model.

One can then adopt the usual strategy in string theory with respect to the Virasoro algebra by regrouping the previous constraints in a compact writing, this is done by the substitution of the constraint χ_3 in the two others. We proceed as follows:

Let us redefine the Π_Z^μ momentum as

$$\widetilde{\Pi}_Z^\mu = \Pi_Z^\mu - (\Pi_Z)_\nu W^{\mu\nu} \tag{31}$$

where $W^{\mu\nu}$ is a symmetric constant tensor verifying

$$W^{\mu\nu} = W^\mu W^\nu \tag{32}$$
$$\eta^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = W^\mu{}_\mu = 1 \tag{33}$$

We can then write

$$\chi_1 - \chi_3^2 = \widetilde{\Pi}_Z^2 + T_sD_1Z^\mu D_1Z_\mu = 0 \tag{34}$$
$$\chi_2 - \chi_3\varphi_3 = \widetilde{\Pi}_Z^\mu D_1 Z_\mu = 0 \tag{35}$$

where φ_3 is the condition given by the equation $\varphi_3 = W^\mu D_1 Z_\mu \equiv 0$

It is easy to see that

$$\left[\widetilde{\Pi}_Z^\mu \pm T_sD_1Z^\mu\right]^2 = 0 \tag{36}$$

which correspond to the well-known form of the constraints in classical string theory.

The equation of motion of the field Z^μ is

$$\partial_\alpha D^\alpha Z^\mu = 0 \tag{37}$$

we consider the Neumann boundary conditions (for a closed string)

$$D_1 Z^\mu(\tau,0) = D_1 Z^\mu(\tau,2\pi) = 0 \tag{38}$$

Substituting (15) in the equation (37), with the boundary conditions (38), the general solution coincides with the ordinary equation of the usual string which is given by:

$$\begin{aligned} Z^\mu(\tau,\sigma) &= z_0^\mu + \frac{1}{\pi T_s} p^\mu \tau + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi T_s}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \times \\ &\times \left(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \widetilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

we can also rewrite the P.B relations (22-24) in terms of modes as follows

$$\{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\}_{PB} = -in\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{40}$$
$$\{\widetilde{\alpha}_n^\mu, \widetilde{\alpha}_m^\nu\}_{PB} = -in\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m} \tag{41}$$
$$\{z_0^\mu, p^\nu\}_{PB} = -\eta^{\mu\nu} \tag{42}$$

resolving the equation (15), the equation (36) is rewritten in the form $B_\pm^2 = 0$ where:

$$B_-^\mu = (\partial_0 - \partial_1)\left(Z^\mu - W^{\mu\rho} Z_\rho\right) \tag{43}$$
$$B_+^\mu = (\partial_0 + \partial_1)\left(Z^\mu - W^{\mu\rho} Z_\rho\right) \tag{44}$$

let us now introduce the corresponding Virasoro generators L_n and $\widetilde{L}_n$ defined through the Fourier transformations of the previous constraints:

$$B_-^2 = \frac{2}{\pi T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} L_n e^{-2n(\tau-\sigma)} \tag{45}$$
$$B_+^2 = \frac{2}{\pi T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}_n e^{-2n(\tau+\sigma)} \tag{46}$$

In term of modes, L_n and $\widetilde{L}_n$ take the following forms:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_m A_{n-m}^\mu A_n^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}^\mu \alpha_n^\nu \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{47}$$
$$\widetilde{L}_n = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{A}_{n-m}^\mu \widetilde{A}_n^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\alpha}_{n-m}^\mu \widetilde{\alpha}_n^\nu \left(\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}\right) \tag{48}$$

where

$$A_n^\mu = \alpha_n^\mu - W^{\mu\rho}\alpha_{n\rho} \tag{49}$$
$$\widetilde{A}_n^\mu = \widetilde{\alpha}_n^\mu - W^{\mu\rho}\widetilde{\alpha}_{n\rho} \tag{50}$$

and which verify the usual form of the classical Virasoro algebra.

One can also see that the Poincaré generators are unchanged and verify the classical closed algebra.

III. COVARAINT PARAQUANTIZATION AND ALGEBRAS CLOSURE

III.1. Covaraint paraquantization of the model

The paraquantization of the theory is carried out by reinterpreting the classical dynamical variables as operators satisfying the following trilinear relations:

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma), \left[\Pi_Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = 2i\left[\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho \delta(\sigma-\sigma') + \eta^{\mu\rho}\Pi^\nu \delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{51}$$
$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma), \left[Z^\nu(\tau,\sigma'), Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = -2i\left[\eta^{\mu\nu} Z^\rho \delta(\sigma-\sigma') + i\eta^{\mu\rho} Z^\nu \delta(\sigma-\sigma'')\right] \tag{52}$$
$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma), \left[Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = 2i\eta^{\mu\rho} Z^\nu \delta(\sigma-\sigma'') \tag{53}$$
$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma), \left[Z^\nu(\tau,\sigma'), \Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right] = -2i\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho \delta(\sigma-\sigma') \tag{54}$$

In terms of modes:

$$\left[\alpha_n^\mu, \left[\alpha_m^\nu, \alpha_l^\rho\right]_+\right] = 2n\left(\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\alpha_l^\rho + \eta^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\alpha_m^\nu\right) \tag{55}$$
$$\left[\alpha_n^\mu, [A^\nu, \alpha_m^\rho]_+\right] = 2n\eta^{\mu\rho}\delta_{n+m,0}A^\nu \tag{56}$$
$$\left[\widetilde{\alpha}_n^\mu, \left[\widetilde{\alpha}_m^\nu, \widetilde{\alpha}_l^\rho\right]_+\right] = 2n\left(\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\widetilde{\alpha}_l^\rho + \eta^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\widetilde{\alpha}_m^\nu\right) \tag{57}$$
$$\left[\widetilde{\alpha}_n^\mu, \left[B^\nu, \widetilde{\alpha}_l^\rho\right]_+\right] = 2n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}B^\nu \tag{58}$$
$$\left[z_0^\mu, [p^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\left(\eta^{\mu\nu}p^\rho + \eta^{\mu\rho}p^\nu\right) \tag{59}$$
$$\left[z_0^\mu, [C^\nu, p^\rho]_+\right] = 2i\eta^{\mu\rho}C^\nu \tag{60}$$
$$\left[p^\mu, \left[z_0^\nu, z_0^\rho\right]_+\right] = -2i\left(\eta^{\mu\nu}z_0^\rho + \eta^{\mu\rho}z_0^\nu\right) \tag{61}$$
$$\left[p^\mu, \left[D^\nu, z_0^\rho\right]_+\right] = -2i\eta^{\mu\nu}D^\nu \tag{62}$$

where the operators A^μ, B^μ, C^μ and D^μ are given by:

$A^\mu = z_0^\mu$, $\widetilde{\alpha}_n^\mu$ or p^μ.
$B^\mu = z_0^\mu$, α_n^μ or p^μ
$C^\mu = \alpha_n^\mu$, $\widetilde{\alpha}_n^\mu$ or z_0^μ.
$D^\mu = \alpha_n^\mu$, $\widetilde{\alpha}_n^\mu$ or p^μ

the other remaining trilinear relations are null.

The Green components of a paraboson A can usually be expressed as [24, 26]:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{Q} A^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{Q} e^\alpha A^\alpha \tag{63}$$

where $\alpha = \overline{1,Q}$, Q is a parameter of paraquantization and e^{α} are elements of a Clifford algebra satisfying the following relations

$$e^{\alpha}e^{\beta} + e^{\beta}e^{\alpha} = 2\delta^{\alpha\beta} \tag{64}$$

$$\left[e^{\alpha}, A^{\beta}\right] = 0 \tag{65}$$

then, the decomposition of the dynamical variables can be written in the form

$$\begin{aligned} Z^{\mu}(\tau,\sigma) &= \sum_{\beta=1}^{Q} Z^{\mu(\beta)}(\tau,\sigma) \\ &= \sum_{\beta=1}^{Q}\left\{ z_0^{\mu(\beta)} + \frac{1}{\pi T_s}p^{\mu(\beta)}\tau + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi T_s}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^{\mu(\beta)}e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{\mu(\beta)}e^{-2in(\tau+\sigma)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{66}$$

In terms of the Green components, the trilinear commutation relations (55-62) transform to the bilinear ones of an anomalous case:

$$\left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{67}$$

$$\left[\tilde{\alpha}_n^{\mu(\alpha)}, \tilde{\alpha}_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\tilde{\alpha}_n^{\mu(\alpha)}, \tilde{\alpha}_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{68}$$

$$\left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = i\eta^{\mu\nu} \quad ; \quad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{69}$$

all the remaining other relations are of the type: $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\alpha)}\right] = 0$ or $\left[A^{\mu(\alpha)}, B^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0$ for $\alpha \neq \beta$.

III.2. Poincaré and constraints (para) algebras

In the parastatistical case, the constraint generators L_n and $\tilde{L}_n$ have the same writing as in the classical case with an adequate symmetrization, one can then write:

$$L_n = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{n-m}^{\mu}, \alpha_n^{\nu}\right]_+ (\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^{\mu(\alpha)}\alpha_n^{\nu(\alpha)} : (\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) \tag{70}$$

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\tilde{\alpha}_{n-m}^{\mu}, \tilde{\alpha}_n^{\nu}\right]_+ (\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \tilde{\alpha}_{n-m}^{\mu(\alpha)}\tilde{\alpha}_n^{\nu(\alpha)} : (\eta_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) \tag{71}$$

One can easily verify that the Virasoro algebra is unchanged except the central charge which takes the form $c_Q = Q(D-1)/12$ through the relations:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{Q(D-1)}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0} \tag{72}$$

$$\left[\tilde{L}_n, \tilde{L}_m\right] = (n-m)\tilde{L}_{n+m} + \frac{Q(D-1)}{12}n\left(n^2-1\right)\delta_{n+m,0} \tag{73}$$

$$\left[L_n, \tilde{L}_m\right] = 0 \tag{74}$$

In the same way, and with also an adequate symmetrization, we can define the angular momentum generators associated to the Poincaré transformations as follows:

$$\begin{aligned}M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma\left([Z^\mu,\Pi_Z^\nu]_+ - [Z^\nu,\Pi_Z^\mu]_+\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[z_0^\mu,p^\nu\right]_+ - \frac{1}{2}\left[z_0^\nu,p^\mu\right]_+\\ &-\frac{i}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\left(\left[\alpha_{-m}^\mu,\alpha_m^\nu\right]_+ - \left[\alpha_{-m}^\nu,\alpha_m^\mu\right]_+ + \left[\tilde{\alpha}_{-m}^\mu,\tilde{\alpha}_m^\nu\right]_+ - \left[\tilde{\alpha}_{-m}^\nu,\tilde{\alpha}_m^\mu\right]_+\right)\end{aligned} \tag{75}$$

These generators with the total momentum verify a closed Poincaré (para) algebra given by:

$$\left[p^\mu,[p^\nu,p^\rho]_+\right] = 0 \tag{76}$$

$$[p^\mu,M^{\nu\rho}] = -i\eta^{\mu\nu}p^\rho + i\eta^{\mu\rho}p^\nu \tag{77}$$

$$[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\nu\rho}M^{\sigma\mu} - i\eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} + i\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} \tag{78}$$

Where the usual relation $[p^\mu,p^\nu]=0$ is broken.

We can show also that the physical state conditions are invariant under Lorentz transformations, we can see this through the relations

$$[M^{\mu\nu},L_n] = \left[M^{\mu\nu},\tilde{L}_n\right] = 0 \tag{79}$$

IV. TRANSVERSE PARAQUANTIZATION AND CRITICAL DIMENSIONS

IV.1. Transverse paraquantization

Now that we have explored the paraquantization of a low-energy limit of small radius for the cylindrical Polyakov membrane in the covariant gauges imposing the Virasoro conditions as subsidiary constraints on physical states, there is still a residual gauge symmetry that remains after setting the gauges and can be used to make further specific gauge choices. Indeed, by making a particular non covariant choice, it becomes possible to solve the constraint equations, and describe the theory in a Fock space that describes physical degrees of freedom only.

This particular choice correpond to impose additional gauge conditions which will be non covariant but quite convenient.

- The first one is as follows: The substitution of the constraint χ_3 in the two others χ_1 and χ_2 in (36) in order to reduce the problem to a string theory, is decribed by the following specific and convenient choices:

$$Z^{D-1} = z_0^{D-1} \tag{80}$$

$$p^{D-1} = \alpha_n^{D-1} = \tilde{\alpha}_n^{D-1} = 0 \quad \text{for all } n \tag{81}$$

$$Z^\mu(\tau,\sigma) = \left(z_0^{D-1},Z^i(\tau,\sigma)\right) \quad , \quad i=\overline{0,D-2} \tag{82}$$

which reduces the model to an ordinary parabosonic closed extended string moving in $(D-1)$ flat spacetime.

- The second one corresponds to the usual light-cone gauge given by the equations:

$$Z^+(\tau,\sigma) = z^+ + \alpha' p^+\tau \text{ (closed string)} \tag{83}$$

$$\alpha_n^+ = \tilde{\alpha}_n^+ = 0 \quad \text{for } n\neq 0 \tag{84}$$

in which the Virasoro constraints equations will be solved to obtain the dynamical variables α_n^I, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, p^+, z_0^I and p^I where $I=\overline{1,D-3}$, and $T_s^{-1}=2\pi\alpha'$.

These latters verify the following trilinear relations:

$$\left[\alpha_n^I,\left[\alpha_m^J,\alpha_l^K\right]_+\right] = 2n\left(\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}\alpha_l^K + \delta_{n+l,0}\delta^{IK}\alpha_m^J\right) \tag{85}$$

$$\left[\alpha_n^I,\left[A,\alpha_m^J\right]_+\right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}A \tag{86}$$

$$\left[\tilde{\alpha}_n^I,\left[\tilde{\alpha}_m^J,\tilde{\alpha}_l^K\right]_+\right] = 2n\left(\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}\tilde{\alpha}_l^K + \delta_{n+l,0}\delta^{IK}\tilde{\alpha}_m^J\right) \tag{87}$$

$$\left[\tilde{\alpha}_n^I,\left[B,\tilde{\alpha}_m^J\right]_+\right] = 2n\delta_{n+m,0}\delta^{IJ}B \tag{88}$$

$$\left[z_0^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] = 2i\left(\delta^{IJ}p^K + \delta^{IK}p^J\right) \tag{89}$$

$$\left[z_0^I,\left[C,p^J\right]_+\right] = 2i\delta^{IJ}C \tag{90}$$

$$\left[p^I,\left[z_0^J,z_0^K\right]_+\right] = -2i\left(\delta^{IJ}z_0^K + \delta^{IK}z_0^J\right) \tag{91}$$

$$\left[p^I,\left[D,z_0^J\right]_+\right] = -2iD \tag{92}$$

$$\left[z_0^-,\left[p^+,p^+\right]_+\right] = -4ip^+ \tag{93}$$

$$\left[z_0^-,\left[E,p^+\right]_+\right] = -2iE \tag{94}$$

$$\left[p^+,\left[z_0^-,z_0^-\right]_+\right] = 4iz_0^- \tag{95}$$

$$\left[p^+,\left[F,z_0^-\right]_+\right] = 2iF \tag{96}$$

where the operators A, B, C, D, E and F are given by:

$A = z_0^I$, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, p^+ or p^I.
$B = z_0^I$, α_n^I, z_0^-, p^+ or p^I
$C = \alpha_n^I$, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, p^+ or z_0^I.
$D = \alpha_n^I$, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, p^+ or p^I
$E = z_0^I$, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, α_n^I or p^I
$F = z_0^I$, $\tilde{\alpha}_n^I$, z_0^-, α_n^I or p^I

and the other remaining trilinear relations are null.

In terms of Green components, one can write the following anomalous bilinear relations:

$$\left[\alpha_n^{I(\alpha)}, \alpha_m^{J(\alpha)}\right] = n\delta^{IJ}\delta_{n+m} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{I(\alpha)}, \alpha_m^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{97}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{J(\alpha)}\right] = n\delta^{IJ}\delta_{n+m} \quad ; \quad \left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}, \widetilde{\alpha}_m^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{98}$$

$$\left[z_0^{I(\alpha)}, p^{J(\alpha)}\right] = -i\delta^{IJ} \quad ; \quad \left[z_0^{I(\alpha)}, p^{J(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{99}$$

$$\left[z_0^{-(\alpha)}, p^{+(\alpha)}\right] = i \quad ; \quad \left[z_0^{-(\alpha)}, p^{+(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \tag{100}$$

all the remaining other relations are of the type $\left[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}\right] = 0$ or $\left[A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}\right]_+ = 0$ for $\alpha \neq \beta$.

IV.2. New critical dimensions

In order to check the consistency of this paraquantum model, let us construct the Lorentz generators and check their commutation relations. The only source of the anomaly is the $\left[M^{I-}, M^{J-}\right]$ commutator which must be zero. From the relation (75) one can write the following expression for the M^{I-} generators (we have choosen $W^{D-1} = 0$):

$$\begin{aligned} M^{I-} = {} & \frac{1}{2}\left[z_0^I, p^-\right]_+ - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ \\ & - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+}L_m^{tr}\right]_+ - \left[\frac{1}{p^+}L_{-m}^{tr}, \alpha_m^I\right]_+ \right. \\ & \left. + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\widetilde{L}_m^{tr}\right]_+ - \left[\frac{1}{p^+}\widetilde{L}_{-m}^{tr}, \widetilde{\alpha}_m^I\right]_+\right) \end{aligned} \tag{101}$$

where the paraquantum form of the modes are imposed as:

$$\alpha_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{p^+}L_n^{tr} \quad or \quad \alpha_n^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{p^+}L_n^{tr(\beta\beta)} \tag{102}$$

$$\widetilde{\alpha}_n^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{p^+}\widetilde{L}_n^{tr} \quad or \quad \widetilde{\alpha}_n^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{p^+}\widetilde{L}_n^{tr(\beta\beta)} \tag{103}$$

$$\alpha_0^- = \widetilde{\alpha}_0^- = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^- \quad or \quad \widetilde{\alpha}_0^{-(\beta)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{p^+}\left(L_0^{tr(\beta\beta)} - a\right) \tag{104}$$

(a is the usual ordering constant, and $a = \widetilde{a}$)

and where the transverse part of the generators L_n and $\widetilde{L}_n$ are given by

$$L_n^{tr} = \sum_{\alpha=1}^{Q} L_n^{tr(\alpha\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\alpha_{n-m}^I, \alpha_n^I\right]_+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^{I(\alpha)}\alpha_n^{I(\alpha)} : \tag{105}$$

$$\widetilde{L}_n^{tr} = \sum_{\alpha=1}^{Q} \widetilde{L}_n^{tr(\alpha\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\widetilde{\alpha}_{n-m}^I, \widetilde{\alpha}_n^I\right]_+ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{I=1}^{D-3}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \widetilde{\alpha}_{n-m}^{I(\alpha)}\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)} : \tag{106}$$

Now, using the following expressions:

$$[AB, C]_+ = A[B, C]_+ - [A, C]B \; or \; A[B, C] + [A, C]_+ B \tag{107}$$

$$[A, BC]_+ = [A, B]_+ C - B[A, C] \; or \; [A, B]C + B[A, C]_+ \tag{108}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \tag{109}$$

where $\zeta(s)$ is the well-known Zeta-Riemann function defined as:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{110}$$

By the use of the set of the trilinear relations (85-96), one can see that the following relations hold $\left[\frac{1}{p^+}, L_n^{tr}\right] = \left[\frac{1}{p^+}, \widetilde{L}_n^{tr}\right] = 0$. It is not difficult to reduce the expression (101) of M^{I-} to the following form:

$$M^{I-} = \frac{1}{\alpha'}\left[z_0^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ \left(L_0^{tr} - a\right) - \frac{1}{2}\left[z_0^-, p^I\right]_+ - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ L_m^{tr} - L_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, \alpha_m^I\right]_+ + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^I, \frac{1}{p^+}\right]_+ \widetilde{L}_m^{tr} - \widetilde{L}_{-m}^{tr}\left[\frac{1}{p^+}, \widetilde{\alpha}_m^I\right]_+\right) \quad (111)$$

which coincides exactely with those imposed in [28].

Now, using the relations (85-100) and (111), straightforward calculations give

$$\left[M^{I-}, M^{J-}\right] = \frac{1}{2\alpha'(p^+)^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\left[\alpha_{-m}^I, \alpha_m^J\right]_+ - \left[\alpha_{-m}^J, \alpha_m^I\right]_+ + \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^I, \widetilde{\alpha}_m^J\right]_+ - \left[\widetilde{\alpha}_{-m}^J, \widetilde{\alpha}_m^I\right]_+\right)\left[\frac{Q(D-3)}{12}\left(n - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}a - 2n\right] \quad (112)$$

which is zero under the conditions

$$D = 3 + \frac{24}{Q} \quad (113)$$

$$a = 2 \quad (114)$$

In particular, one can have parabosonic membranes with the critical dimensions $D = 27$, 15, 11, 9, 7, 6, 5 and 4 respectively in the orders $Q = 1$, 2, 3, 4, 6, 8, 12 and 24.

This result, which can be rewritten in the form $D - 1 = 2 + \frac{24}{Q}$, reflect the relation $D' = 2 + \frac{24}{Q}$ for the parabosonic string [27–29], since, as it was yet mentioned above, a string is derived from a dimensional reduction of the membrane, so that, one of the D dimension in the membrane is absorbed by the gauge freedom.

V. PARABOSONIC MEMBRANE IN A CONSTANT BACKGROUND FIELD

As it was briefly discussed in the introduction, let us examine the study of the bosonic membrane propagating in the presence of a three form field $A_{\mu\nu\rho}$. As it was mentioned above, here, we are led to the problem of finding a simpler system which captures the essential features of the open membrane dynamics in a constant 3-form field. Since the direct paraquantization of the membrane is difficult, so far, we are led to work in the same sector of solutions used above in the free case: the low-energy limit of small radius for the cylindrical membrane.

The problem is reduced to the study of the extended string propagating in the presence of a 2-form field $B_{\mu\nu}$. Since, in the quantum case, the noncommutativity comes from the 2-form field $B_{\mu\nu}$ which is coupled to the string world-sheet, one may wonder what result will be obtained in the paraquantum case?

Let us consider the Polyakov action of a bosonic membrane in the presence of a constant field [8, 34]:

$$S = -\frac{T_m}{2}\int d^3\sigma\left[\sqrt{-h}\left(h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - 1\right) + \frac{1}{3}A_{\mu\nu\rho}\varepsilon^{abc}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_c X^\rho\right] \quad (115)$$

Applying the above $d = 2$ reparametrization invariant truncation of the coordinates (3) with the writing (4-6) of the metric h^{ab}, the action (115) will be reduced to the expression

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\left(\eta^{\alpha\beta}D_\alpha Z^\mu D_\beta Z^\nu \eta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha Z^\mu \partial_\beta Z^\nu\right) \quad (116)$$

where

$$B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu\rho}W^\rho \quad (117)$$

Now, in the gauge $\phi_0 = 0$ used in the second section, the expression of the canonical conjugate momentum is given by:

$$\Pi_Z^\mu = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\partial_0 Z^\mu + B_{\mu\nu}\partial_1 Z^\nu\right) \quad (118)$$

The Z^μ variation of the action leads to the equation of motion (37), with the new boundary conditions

$$\partial_0 Z^\mu + B_{\mu\nu}\partial_1 Z^\nu\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0 \quad (119)$$

($l = \pi$ for an open string and 2π for a closed one)

One can obtain the solution in the following form

$$Z^\mu(\tau,\sigma) = z_0^\mu + 2\alpha'\left(p^\mu\tau - B^\mu{}_\nu p^\nu\sigma\right) + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu\cos n\sigma - iB^\mu{}_\nu\alpha_n^\nu\sin n\sigma\right)e^{-in\tau} \quad (120)$$

for the open case and

$$
\begin{aligned}
Z^{\mu}(\tau,\sigma) &= z_0^{\mu} + 2\alpha'\left(p^{\mu}\tau - B^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}\sigma\right) \\
&+ \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left[\left(\alpha_n^{\mu} - iB^{\mu}{}_{\nu}\alpha_n^{\nu}\right)e^{-2in(\tau-\sigma)} + \left(\widetilde{\alpha}_n^{\mu} + iB^{\mu}{}_{\nu}\widetilde{\alpha}_n^{\nu}\right)e^{-2in(\tau+\sigma)}\right] \qquad (121)
\end{aligned}
$$

for the closed one.

In the following, we will consider only the open case.

Let us first recall that, in the ordinary case, the quantization of $Z^{\mu}(\tau,\sigma)$ has to be different from the usual canonical commutation relations for a free fields, because, the standard equal time commutation relations are inconsistent with the boundary conditions (119). One has to modify the quantization in a consistent manner. Indeed, while the commutation relations are the standard ones for any point in the interior of the open extended string, at the two end points, we find that the space time coordinates are noncommutative.

Here, in the paraquantum case, we will do the same in the following, where again, one has to modify the paraquantization in a consistent manner.

The usual way to quantize a classical system is to start with the symplectic structure on the phase space. Applying the procedure of [9] in the paraquantum case, one find that the symmertized symplectic form is

$$
\Omega = \frac{1}{2}\left\langle \int d\sigma \eta^{\mu\nu}\left[dZ_{\mu}, d\Pi_Z^{\mu}\right]_+ \right\rangle \qquad (122)
$$

where

$$
\langle A\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} d\tau A \qquad (123)
$$

In terms of a Green components, we can write

$$
\Omega = \sum_{\alpha=1}^{Q}\Omega^{(\alpha\alpha)} + \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}\Omega^{(\alpha\beta)}
$$

where ($2\alpha' = 1$)

$$
\begin{aligned}
\Omega^{(\alpha\alpha)} &= \left\langle \int d\sigma \eta^{\mu\nu} dZ_{\mu}^{(\alpha)} d\Pi_Z^{\mu(\alpha)} \right\rangle \qquad (124) \\
&= M_{\mu\nu} dp^{\mu(\alpha)}\left(dz_0^{\nu(\alpha)} + \frac{\pi}{2}B^{\nu}{}_{\rho} dp^{\rho(\alpha)}\right) + i\sum_{n=1}\frac{1}{n}M_{\mu\nu} d\alpha_n^{\mu(\alpha)} d\alpha_{-n}^{\nu(\alpha)} \qquad (125) \\
\Omega^{(\alpha\beta)} &= 0 \qquad \alpha\neq\beta \qquad (126)
\end{aligned}
$$

with $M^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - B^{\mu\rho}B^{\nu}{}_{\rho}$ these imply the following anomalous bilinear relations

$$
\begin{aligned}
&\left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\alpha)}\right] = n\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{\mu(\alpha)}, \alpha_m^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \qquad (127) \\
&\left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = i\pi\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu} \quad ; \quad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \qquad (128) \\
&\left[z_0^{\mu(\alpha)}, z_0^{\nu(\alpha)}\right] = i\pi\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu} \quad ; \quad \left[z_0^{\mu(\alpha)}, z_0^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \qquad (129) \\
&\left[p^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\alpha)}\right] = 0 \quad ; \quad \left[p^{\mu(\alpha)}, p^{\nu(\beta)}\right]_+ = 0 \qquad \alpha\neq\beta \qquad (130)
\end{aligned}
$$

which are equivalent to the following trilinear commutation relations for the modes

$$\left[\alpha_n^\mu,\left[\alpha_m^\nu,\alpha_l^\rho\right]_+\right]=2n\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\alpha_l^\rho+\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\delta_{n+l,0}\alpha_m^\nu\right] \tag{131}$$

$$\left[\alpha_n^\mu,\left[A^\nu,\alpha_m^\rho\right]_+\right]=2n\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\delta_{n+m,0}A^\nu \tag{132}$$

$$\left[z_0^\mu,\left[p^\nu,p^\rho\right]_+\right]=2i\pi\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}p^\rho+\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}p^\nu\right] \tag{133}$$

$$\left[z_0^\mu,\left[z_0^\nu,z_0^\rho\right]_+\right]=2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}z_0^\rho+\left(BM^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{134}$$

$$\left[z_0^\mu,\left[z_0^\nu,p^\rho\right]_+\right]=2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}p^\rho+\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{135}$$

$$\left[z_0^\mu,\left[z_0^\nu,\alpha_n^\rho\right]_+\right]=2i\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\alpha_n^\rho \tag{136}$$

$$\left[z_0^\mu,\left[\alpha_n^\nu,p^\rho\right]_+\right]=2i\pi\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}\alpha_n^\nu \tag{137}$$

$$\left[p^\mu,\left[z_0^\nu,z_0^\rho\right]_+\right]=-2i\left[\left(M^{-1}\right)^{\mu\nu}z_0^\rho+\left(M^{-1}\right)^{\mu\rho}z_0^\nu\right] \tag{138}$$

where $A^\mu=z_0^\mu$ or p^μ and the other remaining trilinear relations are null.

It is not dificult to see that the corresponding trilinear commutation relations for the field Z^μ and their momentum conjugate Π_Z^μ, can be given as follows

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma),\left[Z^\nu(\tau,\sigma'),Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\pi\left[\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}Z^\rho\varepsilon(\sigma,\sigma')+\left(BM^{-1}\right)^{\mu\rho}Z^\nu\varepsilon(\sigma,\sigma'')\right] \tag{139}$$

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma),\left[\Pi_Z^\nu(\tau,\sigma'),\Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\left[\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma')+\eta^{\mu\rho}\Pi_Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{140}$$

$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma),\left[Z^\nu(\tau,\sigma'),Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\left[\eta^{\mu\nu}Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma')+i\eta^{\mu\rho}Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{141}$$

$$\left[Z^\mu(\tau,\sigma),\left[Z^\nu(\tau,\sigma'),\Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=2i\left[\pi\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\varepsilon(\sigma,\sigma')+\eta^{\mu\rho}Z^\nu\Delta_+(\sigma-\sigma'')\right] \tag{142}$$

$$\left[\Pi_Z^\mu(\tau,\sigma),\left[Z^\nu(\tau,\sigma'),\Pi_Z^\rho(\tau,\sigma'')\right]_+\right]=-2i\eta^{\mu\nu}\Pi_Z^\rho\Delta_+(\sigma-\sigma') \tag{143}$$

where

$$\varepsilon(\sigma,\sigma')=\begin{cases}1 & for \quad \sigma=\sigma'=0\\ -1 & for \quad \sigma=\sigma'=\pi\\ 0 & otherwise.\end{cases} \tag{144}$$

and

$$\Delta_+(\sigma-\sigma')=\frac{1}{\pi}\left(1+\sum_{n\neq0}\cos n\sigma\cos n\sigma'\right) \tag{145}$$

notice that in terms of a Green components, we can write

$$\left[Z^{\mu(\alpha)}(\tau,\sigma),Z^{\nu(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_{q_{\alpha\beta}}=i\pi\left(BM^{-1}\right)^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\varepsilon(\sigma,\sigma') \tag{146}$$

$$\left[Z^{\mu(\alpha)}(\tau,\sigma),\Pi_Z^{\nu(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_{q_{\alpha\beta}}=i\pi\eta^{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\Delta_+(\sigma-\sigma') \tag{147}$$

$$\left[\Pi_Z^{\mu(\alpha)}(\tau,\sigma),\Pi_Z^{\nu(\beta)}(\tau,\sigma')\right]_{q_{\alpha\beta}}=0 \tag{148}$$

where the q-deformed commutator is defined in [35] as

$$[A,B]_q=AB-qBA \tag{149}$$

$$q_{\alpha\beta}=2\delta_{\alpha\beta}-1 \tag{150}$$

One can finally conclude that the inconsistency of the standard equal time commutation relations (for a free fields) with the boundary conditions (119) in addition to the general approach of the paraquantization lead to a two times modified commutation relations at the two end points of the open extended string (noncommutativity and q-deformation) which we baptize: *q-noncommutativity*, and a one time modified commutation relations for the interior of the string (q-deformation)

VI. DISCUSSION

In this paper, we have developed a string-limit model of a classical perturbative bosonic membrane and demonstrated the closure of the constraints algebra for a specific choice of a gauge. We have paraquantized this model. It is observed that in the covariant approach, the Poincaré algebra is maintained, except the $[p^\mu,p^\nu]$ commutator which is modified as a trilinear relation $\left[p^\mu,[p^\nu,p^\rho]_+\right]=0$.

For the second approach, based on the transverse gauge with the additional one (80-82), different possibilities for the space-time dimensions D, other than $D=27$, are found for the parabosonic membrane through the relation $D = 3 + \frac{24}{Q}$. We employ the symplectic structure of the string generalized to the paraquantum case to study the interacting parabosonic membrane in the constant B-field. We have also modified the basic P.B in order to establish a consistency of the boundary conditions with the basic P.Bs. The modification consisted of a q-deformed noncommutativity of the two ends of the extended string and a q-deformation for the interior. It would be very intreresting to notice that the paraspinning extension of this work is an investigation which suggests itself. Indeed, one expects that the truncation used can be equally applied to the parasupermembrane action which would give a supersymmetry version for the model considered. From the result $D = 3 + \frac{24}{Q}$ for the parabosonic membrane sector, one expects new possibilities of critical dimensions for the parasupermembrane [36].

[1] E. Witten, Nucl. Phys. B 443, 85 (1995)
[2] P.K. Townsend, arXiv:hep-th/9612121
[3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032 (1999)
[4] E. Bergshoeff, D. S. Berman, J. P. van der Schaar and P. Sundell, Nucl. Phys. B 590, 173 (2000)
[5] S. Kawamoto and N. Sasakura, JHEP 0007, 014 (2000)
[6] A. Das, J. Maharana and A. Melikyan, JHEP 0104, 016 (2001)
[7] Ken-Ichi Tezuka, Eur. Phys. J. C 25, 465 (2002)
[8] S. Gangopadhyay, Phys. Lett. B 659, 399 (2008)
[9] C. S. Chu and P. M. Ho, Nucl. Phys. B 550, 151(1999)
[10] F. Ardalan, H. Arfaei, M.M. Sheikh-Jabbari, Nucl. Phys. B 576, 578 (2000)
[11] R. Banerjee, B. Chakraborty and K. Kumar, Nucl. Phys. B 668, 179 (2003)
[12] H. Kamo and T Sohkawa, Prog.Theor. Phys. 57, 1749 (1977)
[13] K. Kikkawa and M. Yamasaki, Prog. Theor. Phys. 76, 1379 (1986)
[14] K. Fujikawa and J. Kubo, Phys. Lett. B 199, 75 (1987)
[15] J. Kubo, Phys. Lett. B 202, 315 (1988)
[16] U. Marquard and M. Scholl, Phys. Lett. B 227, 227 (1989)
[17] G. T. Horowitz and L. Susskind, J. Math. Phys. 42, 3152 (2001)
[18] I. Bars, C. N. Pope and E. Sezgin, Phys. Lett. B 198, 455 (1987)
[19] U. Marquard and M. Scholl, Phys. Lett. B 209, 434 (1988)
[20] U. Marquard, R. Kaiser and M. Scholl, Phys. Lett. B 227, 234 (1989)
[21] I. Bars, Nucl. Phys. B 343, 398 (1990)
[22] P. Bozhilov, Mod. Phys. Lett. A 13, 2571 (1998)
[23] A. A. Deriglazov, Nucl. Phys. B 597, 299 (2001)
[24] H. S. Green, Phys. Rev. 90, 270 (1953)
[25] E. P. Wigner, Phys. Rev. 77, 711 (1950)
[26] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, Quantum Field Theory and parastatistics, (Springer-Verlag, 1982)
[27] F. Ardalan and F. Mansouri, Phys. Rev. D 9, 3341 (1974)
[28] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 53, 769 (2003)
[29] N. Belaloui and H. Bennacer, Czech. J. Phys. 54, 621 (2004)
[30] W. Taylor, Rev. Mod. Phys. 73, 419 (2001); P. A. Collins and P. W. Tucker, Nucl. Phys. B 112, 150 (1976); P. S. Howe and P. W. Tucker, J. Phys. A 10, L155 (1977); A. Sugamoto, Nucl. Phys. B 215, 381 (1983)
[31] L. Smolin, Phys. Rev. D 57, 6216(1998)
[32] I. Bars and C. Kounnas, Phys. Rev. D 56, 3664 (1997)
[33] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Supersting Theory, Vol.I, (Cambridge University Press, 1987)
[34] M. J. Duff, arXiv:hep-th/9611203
[35] O. W. Greenberg and A. K Mishra, Phys. Rev. D 70, 125013 (2004)
[36] L. Khodja and N. Belaloui, in progress

Heterotic parastrings

N. Belaloui and L. Khodja

Département de physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri, Constantine, Algeria

Abstract. We investigate a parabose parafermi version of the heterotic strings. When we impose the modular invariance of the one-loop amplitude, we find an other possibility of the heterotic strings based on the group E_8. In this case, a consistent analysis of the spectrum with respect to the partition function is done, and the SUSY generators algebra which correspond to the algebra of the SUSY Quantum Mechanics is constructed.

Keywords: strings, supersymmetry, parastatistics
PACS: 11.30.Pb, 11.25.-w, 11.25.Hf

INTRODUCTION

Paraquantum bosonic and superstring were constructed in various critical dimensions depending on the order of the paraquantization. The first study of the parabosonic and paraspinning string theories was done by F. Ardalan and F. Mansouri [1] .This study is based on the particular manner in which the center of mass variables of the string are to be handled. In this hypothesis, they find that the resulting parabosonic (resp paraspinning) string theories are consistent if the dimension D (resp. D') of the space-time and the order Q of the paraquantization are related by the expressions $D = 2 + \frac{24}{Q}$ (resp $D' = 2 + \frac{8}{Q}$).

A second study of these two cases without Ardalan and Mansouri hypothesis on the center of mass variables of the string is done by Bennacer and Belaloui [2,3]. Like in Ardalan and Mansouri work [1], D (resp. D') is again given as a function of the paraquantization order through the relation $D = 2 + \frac{24}{Q}$ (resp $D' = 2 + \frac{8}{Q}$).

In particular, one can have paraspinning strings with critical dimensions $D' = 10, 6, 4, 3$ (respectively in orders $Q = 1, 2, 4, 8$). This coincides with the dimensions in which the classical superstrings can be formulated.

Another work is done by L. Khodja , N. Belaloui and H. Bennacer [4,5] which consists to investigate the existence possibilities of the $D = 3, 4, 6$ parasuperstrings.

As superstrings can be viewed as $Q = 1$ parasuperstrings, this theory presented some anomalies vanished for the two gauge groups $SO(32)$ and $E_8 \otimes E_8$.

In this work, we investigate the consequences of the study of [4,5] on the heterotic parastring, in this case, three points are developped

- Modular invariance of the one-loop amplitude for external massless string states which imposes some conditions on the lattice, this imply that, in addition to the ordinary case $(D, D') = (26, 10)$,where the two theories exist ($SO(32)$ and $E_8 \otimes E_8$), the heterotic parastring can only survives in the case (14,6) which is constructed from the only possible group E_8.

CP881, *Cairo International Conference on High Energy Physics (CICHEP II),*
edited by S. Khalil

- The susy generators algebra. We found that : a parabosonic-parafermionic susy system conducts to the algebra of the susy Qantum Mechanic .
- The spectrum: we found a common chord between the number of degenerations of the states and the one given by the partition function.

HETEROTIC PARASTRINGS

As heterotic string can be viewed as $Q=1$ heterotic parastring, one might be tempted to seek what hybrid combination one can construct from closed parabosonic string and parasuperstrings .

We consider the light-cone gauge. The right-moving sector consists of the right-modes of the oriented parasuperstring that is $\frac{8}{Q}$ transverse parabosonic coordinates $X^i(\tau-\sigma)$ $(i=\overline{1,\frac{8}{Q}})$and a Majorana and (or) Weyl parafermionic coordinates $S^a(\tau-\sigma)$ where $(a=\overline{1,2^{\frac{D'}{2}}})$. The left-moving sector consists of the left-modes of the oriented parabosonic string that is $\frac{8}{Q}$ transverse coordinates $X^i(\tau+\sigma)$ with $(i=\overline{1,\frac{8}{Q}})$ .The remaining $\frac{16}{Q}$coordinates $X^I(\tau+\sigma)$ with $(I=\overline{1,\frac{16}{Q}})$ are compactified on a lattice which properties will be determined.

The light cone gauge action describing the dynamics of the free heterotic strings is given by (see for example [6])

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau\left(\partial_a X^i\partial^a X^i+\sum_{I=1}^{D-D'}\partial_a X^I\partial^a X^I+i\bar{S}\gamma^-\left(\partial_\tau+\partial_\sigma\right)S\right) \tag{1}$$

where in addition, the constraints $(\partial_\tau-\partial_\sigma)X^i=0$ and $\gamma^+S^a=0$ have to be imposed.

The solutions of the equations of motion are given by the following oscillators expansions:

$$\begin{aligned}
X^i(\tau-\sigma) &= \frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}p^i(\tau-\sigma)+\frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n^i\exp\left[-2\imath n(\tau-\sigma)\right] && (2)\\
X^i(\tau+\sigma) &= \frac{1}{2}x^i+\frac{1}{2}p^i(\tau+\sigma)+\frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\widetilde{\alpha}_n^i\exp\left[-2\imath n(\tau+\sigma)\right] && (3)\\
S^a(\tau-\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}S_n^a\exp\left[-2\imath n(\tau-\sigma)\right] && (4)\\
X^I(\tau+\sigma) &= x^I+p^I(\tau+\sigma)+\frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\widetilde{\alpha}_n^I\exp\left[-2\imath n(\tau+\sigma)\right] && (5)
\end{aligned}$$

In this gauge, the paraquantum operators $x^-,p^+,x^i,p^i,\alpha_n^i,x^I,p^I;\widetilde{\alpha}_n^I$ and s_n^a verify the trilinear relations

$$\left[x^i,\left[p^j,p^k\right]_+\right] = 2i\left(\delta^{ij}p^k+\delta^{ik}p^j\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\left[x^i,\left[p^j,A\right]_+\right] &= 2\imath\delta^{ij}A && (7)\\
\left[\alpha_n^i,\left[\alpha_m^j,\alpha_l^k\right]_+\right] &= 2(n\delta^{ij}\delta_{n+m,0}\alpha_l^k+n\delta^{ik}\delta_{n+l,0}\alpha_m^j) && (8)\\
\left[\alpha_n^i,\left[\alpha_m^j,B\right]_+\right] &= 2\delta^{ij}n\delta_{n+m}B && (9)\\
\left[\widetilde{\alpha}_n^I,\left[\widetilde{\alpha}_m^J,\widetilde{\alpha}_l^K\right]_+\right] &= 2(n\delta^{IJ}\delta_{n+m,0}\widetilde{\alpha}_l^K+n\delta^{IK}\delta_{n+l,0}\widetilde{\alpha}_m^J) && (10)\\
\left[\widetilde{\alpha}_n^I,\left[\widetilde{\alpha}_m^J,C\right]_+\right] &= 2\delta^{IJ}n\delta_{n+m}C && (11)\\
\left[s_n^a,\left[\bar{s}_m^b,\bar{s}_l^c\right]_-\right] &= 2\left[\left(\gamma^+h\right)^{ab}\delta_{n+m}\bar{s}_l^c-\left(\gamma^+h\right)^{ac}\delta_{n+l}\bar{s}_m^b\right] && (12)\\
\left[s_n^a,\left[\bar{s}_m^b,D\right]_+\right]_+ &= 2\left(\gamma^+h\right)^{ab}\delta_{n+m}D && (13)\\
\left[x^I,\left[p^J,p^K\right]_+\right] &= i\left(\delta^{IJ}p^K+\delta^{IK}p^J\right) && (14)\\
\left[x^I,\left[p^J,E\right]_+\right] &= \imath\delta^{IJ}E && (15)\\
i,j,k...... &= \overline{1,D'-2} && (16)\\
a,b,c..... &= \overline{1,D'-2} && (17)\\
and\ I,J,K.... &= \overline{1,D-D'}=\overline{1,\frac{16}{Q}} && (18)
\end{aligned}$$

and all the others are null. Here A, B, C, D and E represent the following operators
$A=x^k,\alpha_n^k,\widetilde{\alpha}_n^I,s_n^a,x^I,p^I$
$B=x^k,p^k,\widetilde{\alpha}_n^I,s_n^a,x^I,p^I$
$C=x^i,p^i,\alpha_n^i,s_n^a,x^K,p^K$
$D=x^i,p^i,\alpha_n^i,\widetilde{\alpha}_n^I,x^I,p^J$
$E=x^i,p^i,\alpha_n^i,\widetilde{\alpha}_n^K,s_n^a,x^K$
applying the Green decomposition [7], the set of the precedent trilinear commutation relations is equivalent to the following anomalous bilinear relations:

$$\begin{aligned}
\left[x^{i(\alpha)},p^{j(\alpha)}\right] &= \imath\delta^{ij} \quad ; \quad \left[x^{i(\alpha)},p^{j(\beta)}\right]_+=0 \quad \alpha\neq\beta && (19)\\
\left[\alpha_n^{i(\alpha)},\alpha_m^{j(\alpha)}\right] &= n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\alpha_n^{i(\alpha)},\alpha_m^{j(\beta)}\right]_+=0 \quad \alpha\neq\beta && (20)\\
\left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)},\widetilde{\alpha}_m^{J(\alpha)}\right] &= n\delta^{IJ}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)},\widetilde{\alpha}_m^{J(\beta)}\right]_+=0 \quad \alpha\neq\beta && (21)\\
\left[s_n^{a(\alpha)},\bar{s}_m^{b(\alpha)}\right]_+ &= \delta^{ab}\delta_{n+m,0} \quad ; \quad \left[s_n^{a(\alpha)},\bar{s}_m^{b(\beta)}\right]=0 \quad \alpha\neq\beta && (22)\\
\left[\alpha_n^{i(\alpha)},s_m^{a(\alpha)}\right] &= 0 \quad ; \quad \left[\alpha_n^{i(\alpha)},s_m^{a(\beta)}\right]_+=0 \quad \alpha\neq\beta && (23)\\
\left[x^{I(\alpha)},p^{J(\alpha)}\right] &= \frac{1}{2}i\delta^{IJ} \quad ; \quad \left[x^{I(\alpha)},p^{J(\beta)}\right]_+=0 \quad \alpha\neq\beta && (24)
\end{aligned}$$

and all the other commutators (and anticommutators) of the type $[A^{(\alpha)},B^{(\alpha)}]=0$ (and $[A^{(\alpha)},B^{(\beta)}]_+=0$), for $\alpha\neq\beta$.

MODULAR INVARIANCE

In order to have a consistent theory, one has to deal with left-moving and right-moving coordinates with the same order Q. this imposes contraintes on Q

$$\begin{aligned}
Q &= 1 \longrightarrow \left(D, D'\right) = (26, 10) \\
Q &= 2 \longrightarrow \left(D, D'\right) = (14, 6) \\
Q &= 4 \longrightarrow \left(D, D'\right) = (8, 4) \\
Q &= 8 \longrightarrow \left(D, D'\right) = (5, 3)
\end{aligned}$$

Before developping this point, one can recall that the finiteness of the one-loop amplitude for external massless string states is subject to their modular invariance.

By analogy with the ordinary case, one can impose to the one-loop amplitude in the paraquantum case to be modular invariante.

From the expressions of the one-loop amplitude of the parabosonic string established by Ardalan and Mansouri [8] and the one of the heterotic string given by Gross et al [9,10]. In the paraquantum case, This latter turned out that it is equivalent to the one of the ordinary case with the following substitutions

$$\begin{aligned}
D &\rightarrow Q(D-2)+2 \\
D' &\rightarrow Q(D'-2)+2
\end{aligned}$$

so that, it takes the form

$$A_{Loop} \sim \int \prod_{i=1}^{4} d^2 z_i \, |\omega|^{-2} \left[-\frac{4\pi}{\ln|\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} \times \prod_{1 \le i \le 4} \left[\chi(C_{JI}, \omega)\right]^{\frac{1}{2} k_i k_j} B(\overline{\omega}, \overline{z}_i, K_i) \quad (25)$$

where

$$B(\overline{\omega}, \overline{z}_i, K_i) = \overline{\omega}^{-1} f(\overline{\omega})^{-Q(D-2)} \left[\psi(\overline{C}_{JI}, \overline{\omega})\right]^{K_i K_j} L(\overline{\omega}, \overline{z}_i, K_i) \quad (26)$$

and

$$\chi(z, \omega) = \exp\left[\frac{\ln^2 |z|}{2 \ln \overline{\omega}}\right] \left| \frac{1-z}{\sqrt{z}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\omega^m z)\left(1 - \frac{\omega^m}{z}\right)}{(1-\omega^m)^2} \right| \quad (27)$$

$$\psi(\overline{z}, \overline{\omega}) = \exp\left[\frac{\ln^2 \overline{z}}{2 \ln \overline{\omega}}\right] \frac{1-\overline{z}}{\sqrt{\overline{z}}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(1-\overline{\omega}^m \overline{z})\left(1 - \frac{\overline{\omega}^m}{\overline{z}}\right)}{(1-\overline{\omega}^m)^2} \right) \quad (28)$$

$$L(\overline{\omega}, \overline{z}_i, K_i) = \sum_{P \in \Lambda} \exp\left[\frac{1}{2} \ln \overline{\omega} \left(P - \sum_{i=1}^{4} \frac{\ln \overline{z}_i}{\ln \overline{\omega}} Q_i \right)^2 \right] \quad (29)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i-1} K_i \quad (30)$$

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\ln z_i}{2\pi i} \tag{31}$$

$$\tau = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \tag{32}$$

$$C_{ji} = z_i z_{i+1} ....z_j \tag{33}$$

$$f(\omega) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-\omega^m) \tag{34}$$

here, the sum $\sum_{P\in\Lambda}$ runs over the points P of a $(D-D'$) dimensional lattice Λ and the notations are the same as in [10], in particular:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{i-1} j, \;\; \nu_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\ln z_j}{2\pi i}, \;\; \tau = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \tag{35}$$

$$C_{ji} = z_i z_{i+1} ....z_j, \;\; f(\omega) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-\omega^m) \tag{36}$$

MODULAR TRANSFORMATION

Now, we consider the modular transformation:

$$\tau = \frac{\ln \omega}{2\pi i} \to \tau' = -\frac{1}{\tau} = -\frac{2\pi i}{\ln \omega'} \tag{37}$$

and the jacobian:

$$\prod_{i=1}^{4} d^2 z_i \, |\omega|^{-2} \sim d^2\tau \prod_{i=1}^{3} d^2 \nu_i \tag{38}$$

from the transformations (37), we can write

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{4} d^2 z_i \, |\omega|^{-2} \left[-\frac{4\pi}{\ln|\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} \\ \to \quad & \frac{1}{|\tau|^4} d^2\tau \frac{1}{|\tau|^6} \prod_{i=1}^{3} d^2\nu_i \left[-\frac{4\pi}{\ln|\omega|} \right]^{\frac{Q(D'-2)+2}{2}} |\tau|^{2\frac{Q(D'-2)+2}{2}} \end{aligned} \tag{39}$$

and

$$\begin{aligned} &\overline{\omega}^{-1} f(\overline{\omega})^{-Q(D-2)} \prod_{1\le i<j\le 4} \left[\chi(C_{JI},\omega)\right]^{\frac{1}{2}k_i k_j} \left[\psi\left(\overline{\nu}_{ji},\tau\right)\right]^{K_i K_j} L(\tau,\nu_i) \\ \to \quad & \overline{\omega}'^{-1} f(\overline{\omega}')^{-Q(D-2)} \overline{\tau}^{\frac{Q(D-2)}{2}} \times \prod_{1\le i<j\le 4} \left[\psi\left(\overline{\nu}'_{ij},\tau'\right) \overline{\tau} \exp\left(\frac{i\pi \overline{\nu}_{ij}^2}{\overline{\tau}} \right) \right]^{K_i K_j} \end{aligned}$$

$$\times L^*(\tau', \nu_i')\overline{\tau}^{-\frac{Q(D-D')}{2}} \exp\left(-\frac{i\pi}{\overline{\tau}}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i \overline{\nu}_i\right)^2\right) \tag{40}$$

where $L^* \equiv L(\sum_{P\in\Lambda^*})$ and $\sum_{1\leq i<j\leq 4} k_i k_j = 0$
Λ^* is the dual lattice of Λ
by the use of the identities

$$\prod_{1\leq i<j\leq 4} \overline{\tau}^{K_i K_j} = \overline{\tau}^{-4} \text{ and } \sum_{1\leq i<j\leq 4} \overline{\nu}_{ij}^2 K_i K_j = \left(\sum_{i=1}^{4} Q_i \overline{\nu}_i\right)^2 \tag{41}$$

the modular invariance is satisfied provided that $D' = 2 + \frac{8}{Q}$ and $\Lambda = \Lambda^*$ (the lattice Λ is self-dual)

Finally, the fact that the string is closed imposes a self dual even lattice.

Let us recall that the self-dual-even lattices exist only in eight n dimensions, i.e $D - D' = 8n$ and for $n = 1$, there exists only one such lattice which is the E_8 lattice This imply that in addition to the ordinary case $(Q = 1)$ where $(D, D') = (26, 10)$ based on the groups $E_8 \otimes E_8$ or $SO(32)$, there is a second possibility for $Q = 2$ where $(D, D') = (14, 6)$ based on the only semi-laced group E_8!

Notice that, in $D' = 6$, the spinors are Weyl and the number of internal coordinates is eight $\left(I = \overline{1,8}\right)$

SUPERALGEBRA

Like in the parasuperstrings theory [4,5], in this case, we define the parasupercharges in the same way as follows :

$$Q^a = \frac{i}{2}\left[\left(p^+\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\gamma^+ s_0\right)^a\right]_+ + i\left(p^+\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\gamma_i s_{-n}\right)^a \alpha_n^i\right]_+ \tag{42}$$

these generators obey to an ordinary supersymmetric quantum mechanic algebra, i.e to the following ordinary anticommutation relations

$$\left[Q^a, \overline{Q}^b\right]_+ = -2\left(h\gamma_\mu p^\mu\right)^{ab} \tag{43}$$

This result is in accordance with what we find in the litterature about the parasupersymmetric quantum mechanics systems.

PARTITION FUNCTION

In this section, the spectrum is analysed through the development of the partition function. We introduce the mass operator

$$\frac{1}{4}M^2 = N + \left(\widetilde{N} - 1\right) + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{8}\left(p^I\right)^2 \tag{44}$$

where N is the number operator for the right-sector and $\widetilde{N}$ for the left-sector. p^I are the momentum of the internal space.

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left(\alpha_{-n}^{i(\alpha)}\alpha_{n}^{i(\alpha)} + \frac{1}{2}\bar{s}_{-n}^{(\alpha)}\gamma^{-} s_{n}^{(\alpha)}\right) \tag{45}$$

$$\widetilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left(\widetilde{\alpha}_{-n}^{i(\alpha)}\widetilde{\alpha}_{n}^{i(\alpha)} + \widetilde{\alpha}_{-n}^{I(\alpha)}\widetilde{\alpha}_{n}^{I(\alpha)}\right) \tag{46}$$

The closure of the strings imposes the constraint:

$$\widetilde{N} + \frac{1}{2}p_L^2 - 1 = N \tag{47}$$

where the left hand side $\left(\widetilde{N} + \frac{1}{2}p_L^2 - 1\right)$ corresponds to the left sector and the right hand side (N) to the right sector, with $p_L^2 = \sum_{I=1}^{8}\left(p^I\right)^2$.

Let us define the partition functions F_L for the left-sector, F_R for the Right-sector and F for the heterotic parastring by the folowing relations:

$$F_L(x) = \sum_{N=-1}^{+\infty} d_L(N)\,x^N \tag{48}$$

$$F_R(x) = \sum_{N=1}^{+\infty} d_R(N)\,x^N \tag{49}$$

$$F(x) = \sum_{N} d(N)\,x^N \tag{50}$$

where :

$d_L(N)$ represents the degeneracy of the parabosonic left-moving modes at the Nth mass level compactified on an eight dimensional lattice Λ_{E_8}.

$d_R(N)$: degeneracy of parasuperstring right-moving modes at the Nth mass level

$d(N)$: the number of the heterotic parastring states at the Nth mass level

One can then write F$(x) = F_L(x) \otimes F_R(x)$ where the notation $\otimes$ means d$(N) = d_L(N).d_R(N)$

and where

$$F_L(x) = \frac{1}{x}P_{E_8}.F_L\left(\widetilde{\alpha}_n^i, \widetilde{\alpha}_n^I\right) \tag{51}$$

P_{E_8} is the partition function for the lattice Λ_{E_8} given by the relation (see for example [11]):

$$\begin{aligned} P_{E_8} &= \sum_{w} e^{i\pi\tau|w|^2} = \sum_{w} q^{\frac{1}{2}|w|^2} \\ &\equiv 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)\,q^n \\ &= 1 + 240x + 2160x^2 + 6720x^3 + 17520x^4 + 30240x^5 + \ldots \end{aligned} \tag{52}$$

with

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d/n} d^\alpha \ \ (d/n \text{ integer divisors of } n)$$

and $F_L\left(\widetilde{\alpha}_n^i, \widetilde{\alpha}_n^I\right)$ is the partition function for $(14-2)$ dimensions parabosonic string given by:

$$\begin{aligned}
F_L\left(\widetilde{\alpha}_n^i, \widetilde{\alpha}_n^I\right) &= \sum_n d(n)\, x^n = Trx^{\widetilde{N}} \\
&= Trx^{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left(\widetilde{\alpha}_{-n}^{i(\alpha)}\widetilde{\alpha}_n^{i(\alpha)}+\widetilde{\alpha}_{-n}^{I(\alpha)}\widetilde{\alpha}_n^{I(\alpha)}\right)} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^n}\right)^{12} \\
&= 1+12x+90x^2+520x^3+2535x^4+10\,908x^5+42\,614x^6+\ldots
\end{aligned} \quad (53)$$

then

$$\begin{aligned}
F_L(x) &= \sum_N^{\infty} d_L(N)\, x^N \\
&= 252+5130x+54\,760x^2+419\,895x^3+2587\,788x^4+\ldots..
\end{aligned}$$

in the same way:

$$\begin{aligned}
F_R(x) &= \sum_N d_R(N)\, x^N = Trx^{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\alpha_{-n}^i,\alpha_n^i\right]_+ + n\left[s_{-n}^a\ ,s_n^a\ \right]_-\right)} \\
&= 8\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^n+x^{2n}}{1-x^n}\right)^4 \\
&= 8\Big[1+8x+44x^2+188x^3+694x^4+1640x^5+5688x^6 \\
&\quad +12224x^7+33542x^8+71188x^9+O(x^{10})\Big]
\end{aligned} \quad (54)$$

Finally

$$\begin{aligned}
F(x) &= F_L(x)\otimes F_R(x) \\
&= \left(252+5130x+54\,760x^2+\ldots\right)\otimes\left(8+64x+352x^2+\ldots\right) \\
&= (252\times 8)+(5130\times 64)\,x+\ldots.
\end{aligned} \quad (55)$$

SPECTRUM

Let us now, describe the spectrum . The zero mass level is given by the set of the following states:

$M^2 = 0$

Left	Right
$\widetilde{\alpha}^i_{-1} \|0\rangle_L \rightarrow 4$	$\|i\rangle \rightarrow 4\, parabosons$
$\widetilde{\alpha}^I_{-1} \|0\rangle_L \rightarrow 8$	$\|a\rangle \rightarrow 4 parafermions$
$\left\| p^I; \left(p^I\right)^2 = 2 \right\rangle \rightarrow 240$	

where

- $|i\rangle$: represents the four physical transverse polarizations of a massless vector field
- $|a\rangle$: represent the four components spinorial partner
- In the left-sector we use i for the space time modes and I for the internal modes.The states $\left| p^I; \left(p^I\right)^2 = even \right\rangle$ are the lattice vectors. In the right-sector, we use i for the parabosonic modes and a for the parafermionic modes

The total number of the states in the lowest level is $252 \times 8 = 2016$ states

As in the ordinary case, the breakdown of these states describes the (para)supergravity (PSG) and the(para)super Yang-Mills theories.

Indeed, the states $\widetilde{\alpha}^i_{-1} |0\rangle_L \times |jora\rangle_R$ describe what we will call the $D' = 6$ PSG, where their break down into distinct states gives

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}^i_{-1} |0\rangle_L \times |j\rangle_R + \widetilde{\alpha}^j_{-1} |0\rangle_L \times |i\rangle_R \quad &\rightarrow \tfrac{4\times 3}{2} + 4 = 10 \quad \rightarrow \text{graviton} \\
\widetilde{\alpha}^i_{-1} |0\rangle_L \times |j\rangle_R - \widetilde{\alpha}^j_{-1} |0\rangle_L \times |i\rangle_R \quad &\rightarrow \tfrac{4\times 3}{2} = 6 \quad \rightarrow \text{antisym. tensor} \\
\widetilde{\alpha}^i_{-1} |0\rangle_L \times |a\rangle_R \quad &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \quad \rightarrow \text{gravitino}
\end{aligned}
$$

The remaining states belong to what we will call the PSYM theory defined on E_8 and represented by the (992×2) states

$$
\left[\widetilde{\alpha}^I_{-1} |0\rangle_L + \left| p^I; \left(p^I\right)^2 = 2 \right\rangle \right] \quad \times \quad |i \text{ or } a\rangle_R
$$

One can again write all the physical states in the first and the second levels as follows:

1^{st} level

$M^2 = 8$

Left		Right	
State	**Number**	**State**	**Number**
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^I_{-1}, \widetilde{\alpha}^J_{-1}\right]_+ \lvert 0\rangle_L$	$8 + \frac{8\times 7}{2} = 36$	$\alpha^i_{-1}\lvert 0\rangle_R$	32
$\widetilde{\alpha}^I_{-2}\lvert 0\rangle_L$	8	$s^a_{-1}\lvert 0\rangle_R$	32
$\left\lvert p^I; \left(p^I\right)^2 = 4\right\rangle$	2160		
$\widetilde{\alpha}^I_{-1}\left\lvert p^J; \left(p^J\right)^2 = 2\right\rangle$	$8 \times 240 = 1920$		
$\widetilde{\alpha}^i_{-1}\left\lvert p^J; \left(p^J\right)^2 = 2\right\rangle$	$4 \times 240 = 960$		
$\widetilde{\alpha}^i_{-2}\lvert 0\rangle_L$	4		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^i_{-1}, \widetilde{\alpha}^I_{-1}\right]_+ \lvert 0\rangle_L$	$4 \times 8 = 32$		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^i_{-1}, \widetilde{\alpha}^j_{-1}\right]_+ \lvert 0\rangle_L$	$4 + \frac{4\times 3}{2} = 10$		

2^{nd} level

$M^2 = 16$

Left		Right	
State	**Number**	**State**	**Number**
$\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}^{I}_{-1}\left[\widetilde{\alpha}^{J}_{-1},\widetilde{\alpha}^{K}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	120	$\left\langle s^{a}_{-1},s^{b}_{-1}\right\rangle \vert 0\rangle_R$	80
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{I}_{-1},\widetilde{\alpha}^{J}_{-2}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	64	$\frac{1}{2}\left[\alpha^{i}_{-1},\alpha^{j}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_R$	128
$\widetilde{\alpha}^{I}_{-3}\vert 0\rangle_L$	8	$\frac{1}{2}\left[\alpha^{i}_{-1},s^{a}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_R$	80
$\widetilde{\alpha}^{I}_{-1}\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=4\right\rangle$	17280	$\alpha^{i}_{-2}\vert 0\rangle_R$	32
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{I}_{-1},\widetilde{\alpha}^{J}_{-1}\right]_{+}\left\vert p^{J};\left(p^{J}\right)^{2}=2\right\rangle$	8640	$s^{a}_{-2}\vert 0\rangle_R$	32
$\widetilde{\alpha}^{I}_{-2}\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=2\right\rangle$	1920		
$\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}^{i}_{-1,}\left[\widetilde{\alpha}^{j}_{-1},\widetilde{\alpha}^{k}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	2		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-1},\widetilde{\alpha}^{j}_{-2}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	16		
$\widetilde{\alpha}^{i}_{-3}\vert 0\rangle_L$	4		
$\widetilde{\alpha}^{i}_{-3}\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=4\right\rangle$	8640		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-1},\widetilde{\alpha}^{j}_{-1}\right]_{+}\left\vert p^{J};\left(p^{J}\right)^{2}=2\right\rangle$	2400		
$\widetilde{\alpha}^{i}_{-2}\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=2\right\rangle$	960		
$\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}^{I}_{-1}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-1},\widetilde{\alpha}^{j}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	80		
$\frac{1}{2}\widetilde{\alpha}^{i}_{-1}\left[\widetilde{\alpha}^{I}_{-1},\widetilde{\alpha}^{J}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	144		
$\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=6\right\rangle$	6720		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-1},\widetilde{\alpha}^{I}_{-1}\right]_{+}\left\vert p^{I};\left(p^{I}\right)^{2}=2\right\rangle$	7680		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-1},\widetilde{\alpha}^{I}_{-2}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	32		
$\frac{1}{2}\left[\widetilde{\alpha}^{i}_{-2},\widetilde{\alpha}^{I}_{-1}\right]_{+}\vert 0\rangle_L$	32		

where $\vert 0\rangle_R$ means $\vert i\rangle$ or $\vert a\rangle$ and where, by considering the trilinear commutation relations, we use these general forms (in the precedent tables) to describe all the different possibilities for the states, in particular, we introduce the following notation $\left\langle s^{a}_{-1},s^{b}_{-1}\right\rangle \to \left\{\frac{1}{2}\left[s^{a}_{-1},s^{b}_{-1}\right]_{-},\left(s^{a}_{-1}\right)^{2}\right\}$ to describe the product of the parafermionic operators s^{a}_{n}, where $(s^{a}_{n})^{3}=0$ describes the second order of the paraquantization.

Notice here that, in the ordinary case ($Q=1$), $(s^{a}_{n})^{2}=0$ and it is clear that the last notation is equivalent to the ordinary product $s^{a}_{-1}s^{b}_{-1}$.

One can then determine the degeneration of the first three levels and recapitulate all the results in the following table as well as the polynomials describing the left-moving sector partition function and the ones of the right-moving sector.

	Left moving sector	Right moving sector
$Partition\ Fct.$	$252+5130x+54760x^2+\dots$	$8+64x+352x^2+\dots$
$Fund.state$	252	8
1^{st} $level$	5130	64
2^{nd} $level$	54760	352
3^{rd} $level$	419895	1504

SUMMARY

In this work, we are interested in the construction of an heterotic string theory from the combination of a closed parabosonic srting and parasuperstring with the same order Q.

A number of results are obtained:

- The modular invariance imposed that, in addition to the ordinary case $(D,D') = (26,10)$, only survives the case $(14,6)$ for the order $Q=2$, based on the only semi-laced group E_8.
- The SUSY generators algebra is equivalent to an ordinary SUSYQM algebra.
- The spectrum is analysed and the total partition function is derived. A coherence between the coefficients of the development of the total partition function and the number of the degenerated states is obtained

ACKNOWLEDGMENTS

One of the authors (N.B) would like to thank the organizers of this conference particularly prof. Shaaban Khalil. This work is supported by the Algerian Ministry of the Higher Education and Scientific Research under contract: No.D1602/04/2004

REFERENCES

1. F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. D9 (1974) 3341.
2. N. Belaloui and H. Bennacer: Czech. J. Phys. 53 (2003) 769.
3. N. Belaloui and H. Bennacer: Czech. J. Phys. 54 (2004) 621.
4. N. Belaloui, L. Khodja and H. Bennacer: JINR, Dubna, 2004 ISBN 5-9530-0069-3.
5. N. Belaloui and L. Khodja: proceedings of the International Conference on High Energy and Mathematical Physics, Marrakech, 04-07 April 2005 (to appear)
6. M.Kaku, *Introduction to Superstings*, Spinger-Verlag 1990.
7. H.S Green, Phys.Rev. 90, (1953) 270.
8. F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2456.
9. D.J. Gross, J.A.Harvey, E.Martinec and R.Rohni, Nucl.Phys.B256 (1985) 253.
10. D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec and R.Rohni; Nucl.Phys. B267(1986)75-124.
11. D. Lűst and S. Theisen : Lectures on string theory (Springer, Berlin Heidelberg 1989).

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة بعض نظريات الاوتار كلاسيكيا وفي اطار الميكانيكا شبه الكمية وهي نظريات الغشاء , الغشاء الفائق والأوتار الفائقة.

تحصلنا على النتائج التالية

بناء نموذج لنظرية كلاسيكية اضطرابية لغشاء بوزوني من اجل طاقة دنيا, النسخة شبه الكمية لهذا النموذج تعطي ابعاد جديدة للزمان-مكان لنظرية الغشاء البوزوني تتعلق بمعيار الميكانيكا شبه الكمية.

تفاعل الغشاء شبه البوزوني في حقل B , يعطي هندسة لا تبديلية مشوهة لنهايات الوتر البوزوني المفتوح الممدد.

رغم استحالة بناء نظرية لغشاء فرميوني بالطرق المألوفة, قمنا بمحاولة لوضع نموذج لهذه النظرية من اجل طاقة دنيا والتي اعطتنا نظرية كلاسيكية متينة تحت بعض الشروط العيارية.

عكس النظرية الكمية للغشاء الفائق والتي تبنى من اجل D=11 , في اطار الميكانيكا شبه الكمية للغشاء شبه الفرميوني او الغشاء شبه الفائق , فان الابعاد الاربعة 4, 5 ,7, D=11 التي تبنى من اجلها نظرية الغشاء الفائق كلاسيكيا تبقي موجودة

استنباط المنحى المقارب لكثافة المستويات انظرية الاوتار الفائقة وتعميمها من اجل نظرية شبه p- غشاء فائق. دراسة بعض المقادير الكمية لغاز مثالي من الاوتار الفائقة وبالاخص درجة حرارة هجدورن.

الكلمات المفتاح: اوتار, غشاء , الميكانيكا شبه الكمية , هندسة لا تبديلية

Abstract

The purpose of this thesis is the study of some string theories classically and in the paraquantum formalism. It is about the membrane, the supermembrane, and the superstring theories.

Important results are obtained :

Construction of a consistent model of a low-energy limit of a classical perturbative bosonic membrane and the paraquantum version. New critical spacetime dimensions in term of the paraquantization parameter Q are derived. The interaction of the paraquantized membrane in the presence of a constant background B-field leads to a deformed noncommutativity at the two end points of the open extended string.

The spinning membrane theory turns out to be impossible by the standard techniques, additional gauges lead to the consistency of a classical construction of a world-sheet supersymmetric extension of the extended bosonic string action. Unlike the supermembrane quantum theory which is only defined in D=11, in the case of the parasupermembrane theory, the four spacetime dimensions D=4, 5, 7 and 11, in which the classical supermembrane can be formulated, survive.

The asymptotic level state densities for the parasuperstrings and the (parasuper) p-branes are derived. The study of some themordynamic properties of an ideal gas of the parasuperstrings is done, in particular the Hagedorn temperature.

Keywords: Strings, Membranes, Paraquantization, Noncommutativity.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines théories des cordes aussi bien au niveau classique que paraquantique. Il s'agit des théories des membranes bosoniques, supermembranes et supercordes.

D'importants résultats ont été obtenus :

Construction d'un modèle consistant d'une théorie classique perturbative de la membrane bosonique à une limite basse énergie et sa version paraquantique. De nouvelles dimensions de l'espace-temps dépendant du paramètre de la paraquantification Q ont été dérivées. L'interaction de la membrane parabosonique dans un champ de fond B est à l'origine d'une noncommutativité déformée aux extrémités de la corde ouverte étendue.

Malgré l'impossibilité de construire la théorie de la membrane fermionique faisant appel aux méthodes standards, l'introduction de jauges supplémentaires a permis une construction classique et cohérente de l'extension supersymétrique du world-volume de l'action de la membrane bosonique.

A la différence de la théorie quantique des supermembranes où seule survit la dimension D=11 de l'espace-temps, dans le cas paraquantique, les quatres dimensions D=4, 5, 7 et 11, pour lesquelles sont formulées les supermembranes classiques sont maintenues.

Dérivation du comportement asymptotique de la densité d'états pour les parasupercordes et la généralisation au cas de la théorie des (parasuper) p-branes. Etude des propriétés thermodynamiques d'un gaz de parasupercordes, en particulier la température de Hagedorn.

Mots clés : Cordes, Membranes, Paraquantification, Noncommutativité.