

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

جامعة منتوري قسنطينة

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

كلية العلوم - قسم الفيزياء

N° d'ordre : 64 /T.E/2006

N° de série: 08/Ph/2006

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de DOCTORAT D'ETAT

En PHYSIQUE ENERGETIQUE

***ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE THERMIQUE ET
MASSIQUE LAMINAIRE ET PERMANENTE DANS LA COUCHE
LIMITE AUTOUR D'UN TRONC DE CONE À PAROI
SINUSOÏDALE***

Par

MAYOUF SI ABDALLAH

Soutenue le 06 /09/ 2006 devant le jury :

Président :	L. BAH	Prof.	Université Mentouri Constantine
Co-Rapporteur :	E. MEZAACHE	Prof.	Université de Skikda
Examineurs :	A. CHAKER	Prof.	Université Mentouri Constantine
	N. ATTAF	M.C.	Université Mentouri Constantine
	H. BENMOUSSA	M.C.	Université de Batna
	C. BOUGRIOU	M.C.	Université de Batna
Directeur de Thèse :	B. ZEGHMATI	Prof.	Université de Perpignan - France

AVANT-PROPOS

Ce travail a été réalisé conjointement au Laboratoire de Physique Energétique de l'Université Mentouri de Constantine et au Laboratoire de Thermodynamique et Energétique de l'Université de Perpignan (France).

Monsieur Michel DAGUENET, Professeur à l'Université de Perpignan, m'a proposé ce sujet. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Monsieur Belkacem ZEGHMATI, Professeur à l'Université de Perpignan, responsable de l'encadrement de ce travail, m'a accordé sa confiance tout au long de mes recherches. Je le remercie pour l'aide qu'il m'a apporté dans de nombreuses situations. Je lui exprime ma reconnaissance pour le soutien dont il a fait preuve tout le long de cette étude. Je lui rends hommage pour son esprit critique et scientifique et sa patience. Je le remercie aussi pour l'accueil dans son laboratoire pendant mes stages.

Je remercie très sincèrement Monsieur El-Hacène MEZAACHE, Professeur à l'Université de Skikda, d'accepter d'être co-rapporteur de ma thèse et pour le soutien qu'il m'a apporté dans de nombreuses situations.

Je remercie très sincèrement Madame Abla CHAKER, Maître de Conférences et Directeur de notre Laboratoire de Physique Energétique de l'Université Mentouri Constantine, de m'avoir encouragé pour finaliser ma thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Nadir. ATTAF, Maître de Conférences à l'Université Mentouri Constantine, dont ses conseils et son soutien m'ont été d'une grande utilité.

Je remercie Monsieur Lakhdar BAHY, Professeur à l'Université Mentouri Constantine, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Je remercie également messieurs Hocine BENMOUSSA et Cherif BOUGRIOU, Maîtres de Conférences à l'Université de Batna, que malgré leurs très nombreuses occupations, ont accepté d'examiner mon travail de thèse et de participer à mon jury de soutenance.

Je tiens à remercier monsieur Ioan POP, Professeur à l'Université de Cluj Napoca, Roumanie, pour ses précieux conseils pendant mon stage dans son laboratoire, en juin 2004.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à divers titres, et tout particulièrement, mes collègues du Département de Physique, de Génie Mécanique, de Technologie et du Laboratoire de Thermodynamique et Energétique de l'Université de Perpignan.

SOMMAIRE

Nomenclature.....	1
Introduction.....	3

Chapitre I : Formulation Mathématique du Problème

I.1 Description du problème.....	8
I.2 Hypothèses simplificatrices	9
I.3 Formulation du problème.....	9
I.3.1 Equations de transfert.....	9
I.3.2 Conditions aux limites.....	10
I.3.3 Fonction de courant.....	10
I.4 Adimensionnellisation des équations	11
I.4.1 Grandeurs adimensionnelles.....	11
I.5 Transformation des coordonnées.....	13
I.6 Grandeurs de transfert de chaleur, de masse et d'impulsion	16
I.7 Cas d'un tronc de cône à surface lisse.....	18
I.8 Coefficient de frottement, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood moyens.....	18
Conclusion.....	19

Chapitre II : Formulation numérique du problème

II.1 Choix de la méthode de résolution	20
II.2 Maillage du domaine de calcul.....	21
II.3 Equation du modèle physique dans le système de coordonnées.....	21
II.4 Discrétisation des équations	22
II.5 Méthode de résolution.....	26
Organigramme	28

Chapitre III : Résultats et discussions

III.1 Introduction.....	30
-------------------------	----

III.2	Choix du maillage du domaine de calcul.....	30
III.3	Validation du code de calcul.....	31
III.4	Convection naturelle thermique autour d'un cône à paroi sinusoïdale.....	34
III.4.1	Champ des vitesses	34
III.4.2	Champ de températures	36
III.4.3	influence de L'amplitude.....	37
III.4.4	Nombres de Nusselt locaux et moyens.....	42
III.4.5	Structure de l'écoulement	47
III.5	Cas de la convection naturelle thermique et massique.....	51
III.5.1	Champs des vitesses et coefficient de frottement.....	51
III.5.2	Champs des températures et des concentrations.....	53
III.5.3	Nombres de Nusselt et de Sherwood	54
III.5.4	Corrélations	56
III.5.5	Isoconcentrations.....	58
Conclusion générale.....		59
Références		61
 Annexes		
	Annexe A : Equations de base en convection naturelle.....	67
	Annexe B : Complément mathématique.....	77
	Annexe C : Analyse géométrique de la surface d'étude.....	82

NOMENCLATURE

a	amplitude du profil sinusoïdal (m)
A	amplitude adimensionnelle du profil sinusoïdal
c	concentration (mole.m ⁻³)
C	concentration adimensionnelle
c _o	concentration du fluide à la paroi (mole.m ⁻³)
c _∞	concentration du fluide à l'extérieur (mole.m ⁻³)
C _f	coefficient de frottement
C _p	capacité calorifique du fluide (J.kg ⁻¹ K ⁻¹)
D	coefficient de diffusion massique (m ² s ⁻¹)
g	accélération de la force de la pesanteur (m.s ⁻²)
Gr	nombre de Grashof
Gr _t	nombre de Grashof thermique
Gr _c	nombre de Grashof massique
f(x)	équation de la surface du profil de la paroi du tronc de cône
\vec{i}, \vec{j}	vecteurs unitaires suivant les axes x et y
l	longueur de la surface ondulée (m)
L	longueur d'onde du profil sinusoïdal (m)
\vec{n}	vecteur unitaire normal à la surface ondulée.
N _f	nombre de la force de flottabilité (N _f = Gr _c /Gr _t)
Nu _L	nombre de Nusselt moyen
Nu _x	nombre de Nusselt local
P	pression (N.m ⁻²)
Pr	nombre de Prandtl
q	densité du flux de chaleur ou massique (W/m ²)
Q	source d'énergie à l'intérieur du système (Joule)
r(x)	distance entre la surface et l'axe de symétrie du cône (m)
r [*]	distance adimensionnelle entre la surface et l'axe de symétrie du cône
Ra	nombre de Rayleigh
Ra _t	nombre de Rayleigh thermique
Ra _c	nombre de Rayleigh massique
Sh _L	nombre de Sherwood moyen

Sh_x	nombre de Sherwood local
Sc	nombre de Schmidt
T	température (K)
T_o	température du fluide à la paroi (K)
T_∞	température du fluide ambiant (K)
u, v	composantes de la vitesses dans les directions x et y ($m.s^{-1}$)
U, V	composantes adimensionnelles de la vitesse
x, y	coordonnées cartésiennes suivant la longueur et le long de la surface du cône
X, Y	coordonnées cartésiennes adimensionnelles

Lettres Grecques

α	diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$)
β_t	coefficient de compressibilité thermique du fluide
β_c	coefficient de compressibilité massique du fluide
φ	angle entre l'axe d'ondulation et la verticale
ρ	masse volumique du fluide ($kg.m^{-3}$)
μ	viscosité dynamique du fluide ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
κ	conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
ν	viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
ψ	fonction de courant ($m^2.s^{-1}$)
Ψ	fonction de courant adimensionnelle
θ	Température sans dimensions
Φ	fonction générale
ξ, η	coordonnées adimensionnelles dans le domaine de calcul

Indices

i, j	indices suivant les axes ξ, η des points du maillage de la grille de discrétisation
x, y	dérivation par rapport à x et y
∞	conditions à l'infini (loin de la paroi)

INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide par convection naturelle résulte de la variation de sa masse volumique sous l'effet des gradients de température ou de concentration. On distingue deux types de convection naturelle : la convection naturelle dans des enceintes fermées dont les parois sont soumises à des températures ou à des flux imposés, et la convection naturelle externe se développant au voisinage d'une paroi soumise à un chauffage ou un refroidissement, objet de notre travail de recherche.

L'intérêt manifesté pour les transferts couplés de chaleur et de masse par convection naturelle est suscité par de nombreux champs d'applications qui y sont associés à la vie quotidienne, que ce soit les phénomènes naturels, les applications technologiques et l'environnement. Pour les phénomènes naturels se développant sur une grande échelle, on distingue les courants marins froids ou chauds, les courants convectifs géophysiques, les mouvements des vents et leur influence sur les conditions météorologiques. Pour les applications industrielles et technologiques, les capteurs thermiques, les séchoirs, le confort thermique de l'habitat. Pour l'environnement, la diffusion des effluents gazeux dans l'atmosphère. Ces exemples ont fait l'objet d'études et de travaux scientifiques [1-8].

Les transferts par convection naturelle au voisinage des corps à symétrie de révolution ont fait l'objet de nombreux travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux en raison de leurs importances dans de nombreux domaines technologiques (échangeurs, centrales thermiques, capteurs solaires, agroalimentaire, ...). La majorité de ces travaux se sont intéressés aux écoulements de convection naturelle le long d'une surface ondulée décrite par un profil sinusoïdal en considérant différentes conditions de la surface en contact avec le fluide. L'état de la surface est l'un des paramètres géométriques qui conditionne les qualités fonctionnelles de la surface et les transferts dans le fluide. Ainsi, l'influence de la rugosité d'une paroi sur les transferts qui se déroulent en son voisinage par convection naturelle a fait l'objet de nombreuses études numériques et expérimentales [9-34]. Dans la suite, nous reportons quelques travaux concernant essentiellement, la convection naturelle au voisinage des plaques et des cônes à paroi lisse et ondulée.

Jer-Huan et al [21] ont étudié la convection naturelle thermique et massique développée le long d'une paroi verticale, de surface ondulée, maintenue à une température et à une

concentration constantes. Les équations de transfert sont résolues à l'aide d'une méthode implicite aux différences finies. Les résultats montrent que les nombres locaux de Nusselt, de Sherwood et du coefficient de frottement augmentent avec le rapport entre les forces volumiques d'origine massique et thermique (figure 1). L'augmentation du nombre de Schmidt s'accompagne d'un accroissement du nombre de Sherwood et d'une diminution du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt. L'augmentation de l'amplitude des ondulations de la surface de la paroi provoque une diminution du coefficient de frottement local et des nombres de Nusselt et de Sherwood (figure.1).

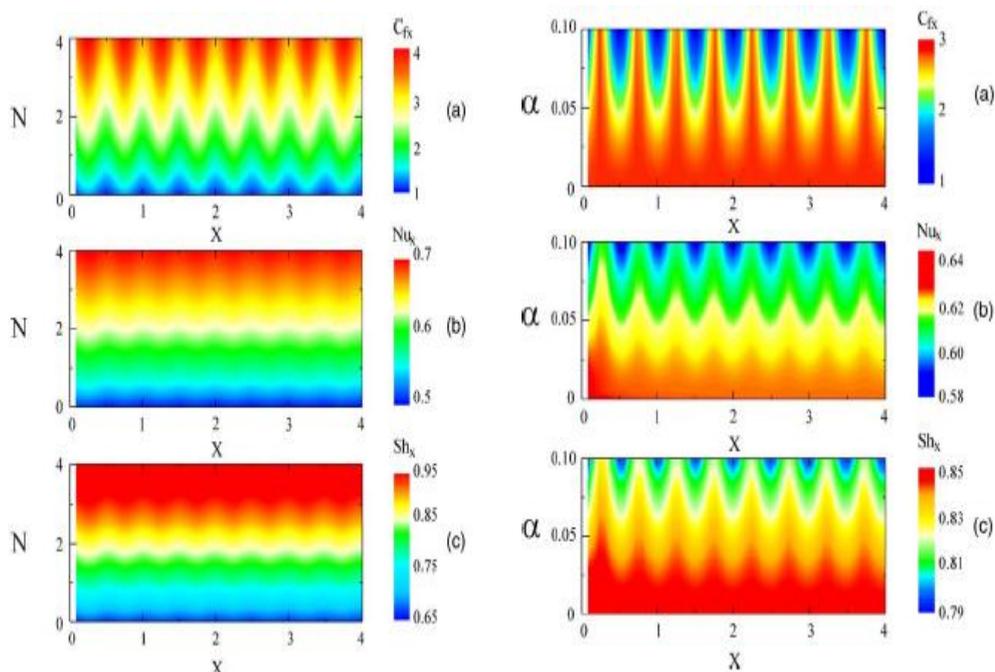


Figure 1 [21] : Influence du nombre de force de flottabilité N et de l'amplitude α sur les distributions de: (a) coefficient de frottement ; (b) nombre de Nusselt ; (c) nombre de Sherwood

Rahman [22], a analysé expérimentalement la convection naturelle thermique et massique le long d'une surface verticale ondulée. L'augmentation du rapport entre l'amplitude de la sinusoïde et la longueur d'onde (a/λ) provoque une diminution du transfert massique. Le nombre de Sherwood est présenté par une corrélation en fonction du rapport (a/λ) :

$$Sh = 0.915 Ra^{0.238} (1 + a/\lambda)^{-0.8577}$$

C. Chang et al [23] ont examiné la convection mixte d'un fluide non newtonien le long d'une plaque verticale ondulée. Les résultats montrent que l'augmentation du nombre de Prandtl et du rapport entre les forces volumiques d'origine massique et thermique conduisent à une croissance de l'influence de l'état de la surface sur le nombre de Nusselt.

Prétoit [25] a procédé à une étude théorique et expérimentale de la convection naturelle au-dessus des plaques horizontales de différentes topographies. Les équations de transfert sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis basée sur l'algorithme de Thomas. L'adéquation entre les champs de vitesse et de pression est assurée par l'algorithme SIMPLER. La topographie de la surface de la plaque modifie la morphologie de l'écoulement et par conséquent les transferts en son voisinage. Ainsi, les transferts sont, pour une plaque dont la surface n'est pas plane, moins intenses que dans le cas d'une plaque plane de même surface projetée. Pour une plaque dont la surface est décrite par un profil sinusoïdal, il apparaît dans les creux de la sinusoïde des zones de recirculation dans lesquelles le transfert de chaleur s'effectue essentiellement par conduction. Des corrélations permettant de décrire le transfert de chaleur entre la plaque et le fluide, incluant le rapport amplitude sur période des protubérances, sont proposées.

Les travaux reportés par Merk et al [26], ont concerné la convection naturelle thermique laminaire de type couche limite au voisinage d'un cône à surface lisse. Les résultats, pour les nombres de Nusselt local et moyen, sont présentés par des corrélations en fonction du nombre de Prandtl, du nombre de Grashof local et moyen :

$$Nu_x = 0.436 (Pr \cdot Gr_x)^{0.25}$$

$$Nu_L = 0.5076 (Pr \cdot Gr_L)^{0.25}$$

Abdurrachim [27] investit théoriquement et expérimentalement la convection naturelle laminaire au voisinage des surfaces lisses et ondulées. Pour le cas des surfaces lisses, ces résultats sont en accord avec ceux de Merk et al [26].

Md. Anwar et al [29] ont étudié l'influence de la variabilité des propriétés physiques tel que la conductivité thermique et la viscosité sur les transferts par convection naturelle développée au voisinage d'un cône à paroi ondulée. Les équations de transfert sont résolues à l'aide de la méthode aux différences finies de type Keller box. Les résultats montrent que l'augmentation de la viscosité provoque une diminution du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt moyen. Une analyse numérique, à l'aide de la méthode de «Keller box», de la convection naturelle développée autour d'un cône dont la paroi est décrite par une

sinusoïde montre que les transferts thermiques pour un cône à paroi ondulé sont inférieurs à ceux obtenus pour un cône à paroi lisse [34].

La plupart des travaux précédents ont montré que les surfaces ondulées modifient la morphologie de l'écoulement et les transferts thermique et massique. Les paramètres (amplitude, longueur d'onde,...) ont un rôle très important sur les caractéristiques de l'écoulement et des transferts thermique et massique. L'ensemble des connaissances acquises sur les transferts de chaleur permettent d'optimiser les échanges, et cela dans des conditions économiquement viables. Ces études font appel à divers modes d'investigation : analyses théoriques associées à des méthodes de résolution analytiques ou numériques, et techniques d'investigation expérimentales.

Les équations utilisées pour analyser le problème de la convection naturelle sont décrites dans un grand nombre d'ouvrages de transferts de chaleur et d'analyse numérique [35-50]. Ces équations se présentent sous forme d'équations différentielles partielles non linéaires résultant des principes de conservation de la masse (équation de continuité), de quantité du mouvement (équation de Navier-Stokes), de l'énergie (équation de la chaleur) et du transfert de masse (conservation d'espèces).

L'objet de ce travail est l'analyse de la convection naturelle thermique et massique se développant dans la couche limite externe d'un tronc de cône à paroi sinusoïdale. L'absence de travaux concernant les transferts thermiques et massiques caractérisant cette configuration, nous a motivé à réaliser ce travail de recherche.

On se propose de résoudre numériquement les équations régissant les transferts de chaleur et de masse par convection naturelle dans la couche limite développée autour d'un tronc de cône placé dans un fluide newtonien. Nous analyserons l'influence de la topographie de la surface sur les transferts et nous déterminerons des corrélations décrivant les transferts en fonction des paramètres caractéristiques de la topographie (amplitude, période, ...) de la surface. Les équations gouvernantes sont résolues à l'aide de la méthode implicite aux différences finies basée sur l'algorithme de Gauss-Seidel [43-49]. Les résultats sont présentés sous forme de profils de vitesse, de température et de concentration de vapeur d'eau, ainsi que des nombres locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood. L'influence de l'amplitude de la sinusoïde qui décrit la topographie de la surface de la paroi du tronc de cône et du nombre de Rayleigh sur les transferts thermiques et massiques sont également étudiés.

La thèse est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous définissons le problème de notre étude avec les hypothèses simplificatrices, les équations de transfert en coordonnées cartésiennes et les conditions aux limites qui leur sont associées. Ces équations sont exprimées en fonction de nouvelles coordonnées qui nous permettent de transformer le domaine physique en domaine de calcul rectangulaire.

L'exposé de la méthodologie numérique retenue pour résoudre les équations formulées dans le chapitre précédent fait l'objet du deuxième chapitre. Nous avons détaillé la discrétisation des équations ainsi que la méthode adoptée pour résoudre le système d'équations algébriques déduites de la discrétisation, à l'aide d'une méthode implicite aux différences finies, des équations de transfert et des conditions aux limites.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à l'interprétation des résultats obtenus pour la convection naturelle thermique d'une part et la convection naturelle thermique et massique d'autre part. Nous avons validé notre code de calcul par une comparaison entre nos résultats avec ceux reportés dans la littérature pour un cône à paroi lisse. Nous avons ensuite analysé l'influence de l'amplitude et de la période de la sinusoïde, du nombre de Rayleigh et du rapport entre les forces volumiques d'origine massique et celle d'origine thermique sur la distribution de vitesse, de température et de concentration dans la couche limite développée au voisinage du tronc de cône.

Les nombres de Nusselt (et / ou de Sherwood) local et moyen sont présentés sous forme de corrélations en fonction du nombre de Rayleigh et de l'amplitude de la sinusoïde qui décrit la topographie de la surface du tronc de cône.

Pour ne pas alourdir le texte, nous présentons, en annexe A, quelques rappels concernant les équations de base en convection naturelle et les équations dans la couche limite pour la convection naturelle. L'annexe B est consacrée au rappel mathématique de la méthode homotopique utilisée dans notre travail. Dans l'annexe C, nous rappelons quelques compléments mathématiques pour l'analyse géométrique de la surface d'étude.

CHAPITRE I

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

I.1 DESCRIPTION DU PROBLÈME

Considérons un tronc de cône à paroi sinusoïdale, d'axe de symétrie Δ , de rayon r , désignant la distance radiale d'un point de la surface à l'axe de symétrie (figure 1.1), complètement immergé dans un fluide newtonien. Associons à ce tronc de cône un repère cartésien Oxy dont l'origine O est placée en son sommet. L'abscisse x est comptée positivement en s'éloignant du sommet et l'ordonnée y est perpendiculaire à l'axe x . L'axe de symétrie Δ est vertical et orienté dans le sens contraire au champ gravitationnel. On suppose que le système est initialement en équilibre thermodynamique. La température T_0 et la concentration c_0 de la paroi sinusoïdale du tronc de cône sont constantes et supérieures à la température T_∞ et la concentration c_∞ du fluide loin de la surface. Une convection naturelle externe thermique et massique prend alors naissance dans le fluide pour rétablir l'équilibre thermodynamique entre la paroi et le fluide.

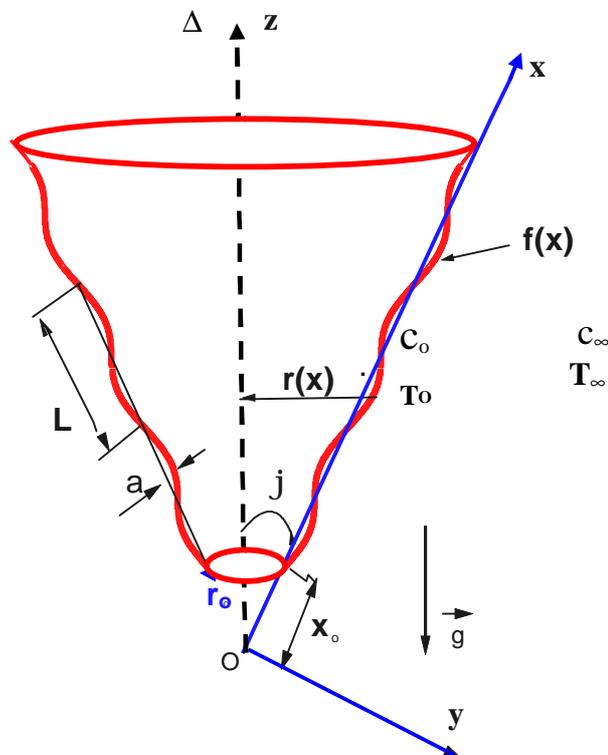


Figure 1.1 : Schéma du modèle physique et système de coordonnées

I.2 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la convection est laminaire et permanente.
- le fluide est incompressible.
- Dans l'équation de chaleur la fonction de dissipation visqueuse est négligée.
- Pour que les approximations de la couche limite soient valables, le rapport de l'amplitude d'ondulation de la surface du tronc de cône par rapport à la longueur d'onde est faible.
- Les effets Soret, Dufour sont négligés.
- La diffusion enthalpique est négligeable.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes, hormis la masse volumique dans l'équation du mouvement dont la variation obéit à l'approximation de Boussinesq :

$$\rho - \rho_{\infty} = -\rho_{\infty}\beta_t(T - T_{\infty}) - \rho_{\infty}\beta_c(c - c_{\infty}) \quad (1.1)$$

I.3 FORMULATION DU PROBLEME

I.3.1 Equations de transfert

Compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de transfert pour un écoulement axisymétrique de couche limite développée au voisinage de la paroi du tronc de cône s'écrivent dans le repère Oxy [42] :

Equation de Continuité

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Equation du Mouvement

L'équation de la quantité du mouvement suivant l'axe des x s'écrit sous la forme :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_t \cos(\varphi)(T - T_{\infty}) + g\beta_c \cos(\varphi)(c - c_{\infty}) \quad (1.3)$$

Dans le cas de l'absence du transfert de masse, l'équation précédente s'écrit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_t \cos(\varphi)(T - T_\infty) \quad (1.4)$$

Equation de la Chaleur

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

α = diffusivité thermique

Equation de transfert de masse

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (1.6)$$

D = diffusivité massique

I.3.2 Conditions aux limites

Associons aux équations de transfert précédentes les conditions aux limites suivantes, concernant la surface de la paroi et le fluide au repos situé loin de cette surface :

$$\text{A la paroi : } x \geq x_0 \text{ et } y = f(x) : \begin{cases} u = 0 ; v = 0 \text{ (condition d'adhérence)} \\ T = T_0 \text{ (température imposée)} \\ c = c_0 \text{ (concentration imposée)} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\text{Loin de la paroi (fluide au repos) : } y \rightarrow \infty : \begin{cases} u = 0 \\ T = T_\infty \\ c = c_\infty \end{cases} \quad (1.8)$$

Où $f(x)$ est une fonction qui décrit la surface de la paroi du tronc de cône définie par :

$$f(x) = a \cdot \sin \left[2\pi \frac{(x - x_0)}{L} \right] \quad (1.9)$$

"a" : amplitude de la surface sinusoïdale de la paroi ondulée et "L" sa longueur d'onde.

I. 3.3 Fonction de courant

La fonction de courant ψ est définie par :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} ; \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} \quad (1.10)$$

I.4 ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

I.4.1. Grandeurs adimensionnelles

Les équations (1.2)-(1.8) sont adimensionnalisées à l'aide des variables et grandeurs adimensionnelles suivantes :

Coordonnées cartésiennes :

$$X = \frac{x - x_0}{L} ; Y = \frac{y}{L} \quad (1.11)$$

Distance radiale au bord d'attaque, à la position x et amplitude de la surface ondulée :

$$r_0^* = \frac{r_0}{L} ; r^*(x) = \frac{r(x)}{L} ; A = \frac{a}{L} \quad (1.12)$$

Vitesses adimensionnelles :

$$U = \frac{u}{\frac{v}{L}} ; V = \frac{v}{\frac{v}{L}} \quad (1.13)$$

Fonction de courant, température et concentration massique :

$$\Psi = \frac{\Psi}{v} ; \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} ; C = \frac{c - c_\infty}{c_0 - c_\infty} \quad (1.14)$$

Notons que la distance radiale $r(x)$ est la distance d'un point de la surface à l'axe de symétrie Δ du tronc du cône, définie par (annexe C) :

$$r(x) = r_0 + (x - x_0) \sin \varphi + f(x) \cos \varphi \quad (1.15)$$

La substitution de (1.12) dans les équations (1.9) et (1.15) conduit aux expressions suivantes :

$$r^*(X) = r^* + X \sin \varphi + f(X) \cos \varphi \quad (1.16)$$

$$F(X) = \frac{a}{L} \sin(2pX) = A \sin(2pX) \quad (1.17)$$

I.4.2. Equations adimensionnelles de bilan

Les équations de transfert et les conditions aux limites adimensionnelles s'écrivent :

Equation de continuité.

$$\frac{\partial(r^* U)}{\partial X} + \frac{\partial(r^* V)}{\partial Y} = 0 \quad (1.18)$$

Equation du mouvement.

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + Gr_t (\theta + N_f C) \quad (1.19)$$

Où N_f est le rapport entre les forces volumiques d'origine massique et thermique ; Gr_t et Gr_c sont les nombres de Grashof modifiés. Ces trois grandeurs sont définies par :

$$N_f = \frac{Gr_c}{Gr_t} ; \quad Gr_t = g\beta_t \frac{(T_o - T_\infty)L^3}{v^2} \cos(\varphi) ; \quad Gr_c = g\beta_c \frac{(c_o - c_\infty)L^3}{v^2} \cos(\varphi) \quad (1.20)$$

Equation de la chaleur

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (1.21)$$

Avec, Pr , nombre de Prandtl, définie par $Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$

Equation de transfert de masse (diffusion massique)

$$U \frac{\partial C}{\partial X} + V \frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \quad (1.22)$$

Où, Sc , nombre de Schmidt, définie par $Sc = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{v}{D}$

Fonction de courant

$$U = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial Y} ; \quad V = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial X} \quad (1.23)$$

I.4.3. Conditions aux limites adimensionnelles

A la surface ondulée :

$$X \geq 0 \text{ et } Y = F(X) : U = 0 ; V = 0 ; \theta = 1 ; C = 1 \quad (1.24)$$

Loin de la surface :

$$Y \rightarrow \infty : U = 0 ; \theta = 0 ; C = 0 \quad (1.25)$$

On note que $X = 0$ désigne le bord d'attaque du tronc du cône et que la limite $Y \rightarrow \infty$ correspond à l'épaisseur de la couche limite.

I. 5 TRANSFORMATION DES COORDONNEES

I.5.1. Méthode de la transformation

Pour pallier la non-uniformité de la surface non plane autour du tronc de cône, nous utilisons une transformation homotopique qui permet de ramener le domaine physique exprimé en coordonnées cartésiennes en un domaine de calcul rectangulaire (figure 1.2).

Considérons les transformations homotopique définies par :

$$\xi = X \quad (1.26)$$

$$\eta = \frac{Y - f(X)}{g(X) - f(X)} \quad (1.27)$$

Où $g(X)$ est une fonction qui caractérise la frontière extérieure de la couche limite.

Anwar [29] et Pop [34] ont supposé que $g(x) = x^{1/4}$. Jang [21] a proposé une fonction $g(x) = (4x)^{1/4}$. Dans notre calcul, nous posons :

$$G(X) = bX^{1/4} \quad (1.28)$$

Où b est une constante dépendant du nombre de Prandtl et de Grashof. Cette constante dépend aussi du nombre de Schmidt dans le cas d'un transfert couplé de chaleur et de masse. Elle est déterminée numériquement (chapitre II).

La substitution de $g(x)$ donnée par l'expression (1.28) dans l'équation (1.27.) conduit à la relation suivante :

$$\eta = \frac{Y - F(X)}{bX^{1/4} - F(X)} \quad (1.29)$$

Soit :

$$\eta = \frac{Y - F(\xi)}{b\xi^{1/4} - F(\xi)} \quad (1.30)$$

Le domaine physique limité par les deux courbes curvilignes : surface ondulée désignant la frontière inférieure de la couche limite et la fonction $g(X)$ désignant sa frontière supérieure est ainsi transformée en un domaine de calcul rectangulaire en se basant sur la transformation formulée par l'équation (1.30).

$$\left\{ \begin{array}{l} X \geq 0 \\ F(x) \leq Y \leq G(x) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Transformation homotopique}} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 0 \leq h \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Le rayon $r(x)$ est transformé en fonction de ξ comme suit:

$$r^*(\xi) = r_0^* + \xi \sin(\varphi) + F(\xi) \cos(\varphi) \quad (1.32)$$

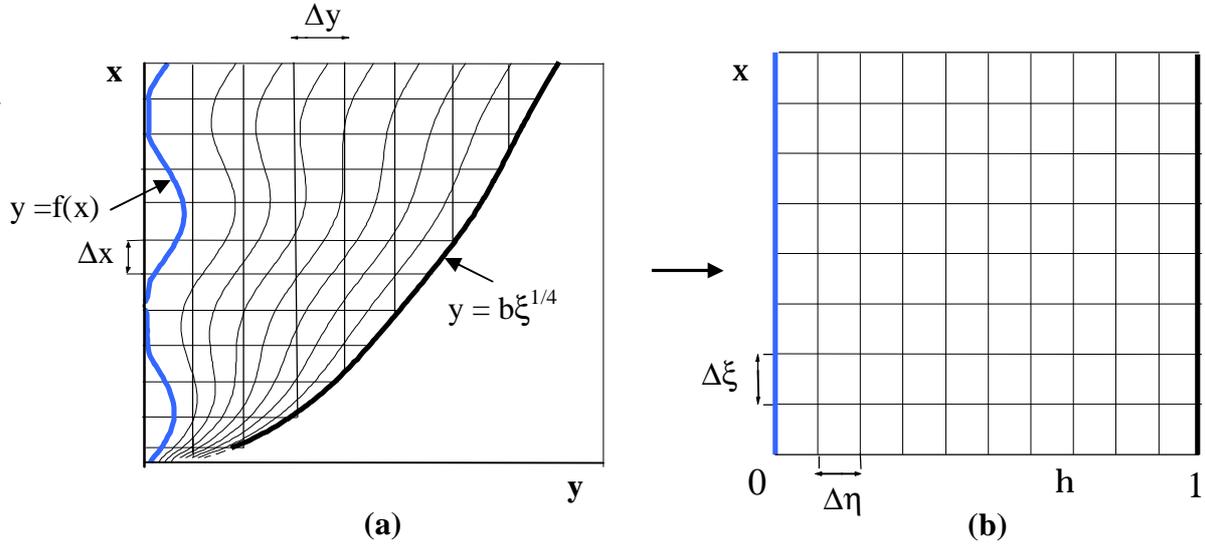


Figure 1.2 : (a) Domaine physique, (b) Domaine de calcul ;
 – surface ondulée, – épaisseur de la couche limite.

I.5.2 Transformation des équations de transfert

La transformation des équations du domaine physique représenté par le système de coordonnées cartésiennes OXY vers le domaine de calcul caractérisé par le système de coordonnées de $O\xi\eta$ est développée en annexes. Les nouvelles équations obtenues sont :

Equation de continuité

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{r_\xi^*}{r^*} U + \eta_y \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (1.33)$$

Où :

$$r_\xi^* = \frac{\partial r^*}{\partial \xi} = \sin(\varphi) + F'(\xi) \cos(\varphi) \quad (1.34)$$

Equation du mouvement

$$U\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + V \cdot \eta_y \frac{\partial U}{\partial \eta} = (\eta_y)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + Gr_t (\theta + N_f C) \quad (1.35)$$

Equation de la chaleur

$$U\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) + V \cdot \eta_y \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = (\eta_y)^2 \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (1.36)$$

Equation de diffusion massique

$$U\left(\frac{\partial C}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial C}{\partial \eta}\right) + V \cdot \eta_y \frac{\partial C}{\partial \eta} = (\eta_y)^2 \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (1.37)$$

Fonction de courant

$$U = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial Y} = \frac{1}{r^*} \left[r^* \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \Psi \frac{\partial r^*}{\partial Y} \right] = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \eta_y \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (1.38)$$

$$V = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial X} = -\frac{1}{r^*} \left[r^* \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \Psi \frac{\partial r^*}{\partial X} \right] = -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{1}{r^*} \frac{dr^*}{dX} \Psi \right]$$

$$V = -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right] - \frac{1}{r^*} \frac{dr^*}{d\xi} \Psi = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \eta_\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{1}{r^*} \frac{dr^*}{d\xi} \Psi \right) \quad (1.39)$$

I.5.3 Transformation des conditions aux limites

A la surface ondulée :

$$\xi \geq 0 \text{ et } \eta = 0 : U = 0 ; V = 0 ; \theta = 1 ; C = 1 \quad (1.40)$$

Loin de la surface :

$$\eta = 1 : U = 0 ; \theta = 0 ; C = 0 \quad (1.41)$$

I.6 GRANDEURS DE TRANSFERTS DE CHALEUR, DE MASSE ET D'IMPULSION

Afin de caractériser les transferts de chaleur et de masse, nous définissons les nombres de Nusselt, de Sherwood et le coefficient de frottement.

I.6.1 Densité du flux de chaleur et nombre de Nusselt

La densité du flux de chaleur pariétale transmise au fluide par conduction q_p est définie par la loi de Fourier :

$$q_p = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = -\kappa \frac{\Delta T}{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_p \quad (1.42)$$

Soit :

$$q_p = -\kappa \frac{\Delta T}{L} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \cos \beta_{nx} + \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = -\kappa \frac{\Delta T}{L} \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (1.43)$$

κ : conductivité thermique du fluide

$\Delta T = T_0 - T_\infty$: différence de température entre la paroi et le milieu ambiant extérieur ;

N : coordonnée adimensionnelle normale à la paroi définie par $N = n/L$ et L : longueur d'onde de la paroi ondulée.

β_{nx} : angle formé par la normale à la paroi et l'axe des x .

Le nombre de Nussel local au niveau de la surface s'écrit :

$$Nu_x = \frac{xq_p}{\lambda \Delta T} = -\frac{x}{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_p = -\xi \left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_p \quad (1.44)$$

$$Nu_x = -\xi \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (1.45)$$

I.6.2 Densité du flux massique et nombre de Sherwood

La densité pariétale de flux massique de diffusion est exprimée par la loi de Fick de la diffusion :

$$m_p = -D \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)_p = -D \frac{\Delta c}{L} \left(\frac{\partial C}{\partial N} \right)_p \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned}
 m_p &= -D \frac{\Delta c}{L} \left[\frac{\partial C}{\partial \xi} \cos \beta_{nx} + \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \\
 &= -D \frac{\Delta C}{L} \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left[\frac{\partial C}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Le nombre adimensionnel de Sherwood au niveau de la surface ondulée s'écrit :

$$\text{Sh}_x = \frac{x m_p}{D \Delta c} = -\frac{x}{L} \left(\frac{\partial C}{\partial N} \right)_p = -\xi \left(\frac{\partial C}{\partial N} \right)_p \tag{1.48}$$

$$\text{Sh}_x = -\xi \frac{1}{\sin \beta_{nx}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left[\frac{\partial C}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \tag{1.49}$$

I.6.3 Frottement pariétale et coefficient de frottement

La force de frottement exercée sur l'unité de surface est définie par [12] :

$$\tau_p(x) = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{y=f(x)} \tag{1.50}$$

$$\tau_p(X) = \left[\mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right]_{Y=F(X)} \tag{1.51}$$

Soit :

$$\tau_p(X) = \rho \left(\frac{v}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \tag{1.52}$$

Le coefficient adimensionnel de frottement est définie par :

$$C_f(X) = \frac{\tau_p(X)}{\rho u_r^2} = \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \tag{1.53}$$

Où u_r est la vitesse de référence définie dans l'expression (1.13) par $u_r = v/L$.

Notons que la contrainte de cisaillement peut être calculé aussi d'une autre manière à l'aide de l'expression suivante :

$$t_p(x) = m \left(\frac{\partial v_T}{\partial n} \right)_{n=0} \tag{1.54}$$

Où v_T est la composante de la vitesse, tangentielle à la surface ondulée, c'est-à-dire dans le système de coordonnées (\vec{u}_T, \vec{u}_N) , n désigne la position suivant l'axe normal à la surface ondulée.

I.7 CAS D'UN TRONC DE CÔNE A SURFACE LISSE

Pour un tronc de cône à paroi lisse, il suffit de remplacer la fonction d'ondulation $F(X)$ et sa dérivée par zéro. L'angle entre la normale à la surface ondulée et l'axe X est égale à 90° .

On obtient :

$$Cf(\xi) = \frac{1}{b\xi^{1/4}} \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (1.55)$$

$$Nu(\xi) = -\xi \frac{1}{b\xi^{1/4}} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (1.56)$$

$$Sh(\xi) = -\xi \frac{1}{b\xi^{1/4}} \left[\frac{\partial C}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (1.57)$$

I.8 COEFFICIENT DE FROTTEMENT, NOMBRE DE NUSSOLT ET NOMBRE DE SHERWOOD MOYENS

Le coefficient de frottement, le nombres de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} , moyens, sont obtenus en intégrant à l'aide de la méthode de Simpson [51], le coefficient de frottement, le nombre de Nusselt et de Sherwood, locaux., sur la longueur totale " l_p " de la paroi ondulée. Ce grandeurs sont définies par :

- Dans le repère cartésien Oxy

$$\overline{Nu} = \frac{1}{l_p} \int_{l_p} Nu(x) dl_p \quad (1.58)$$

$$\overline{Sh} = \frac{1}{l_p} \int_{l_p} Sh(x) dl_p \quad (1.59)$$

$$\overline{Cf} = \frac{1}{l_p} \int_{l_p} Cf(x) dl_p \quad (1.60)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes adimensionnelles OXY :

$$\overline{NU} = \frac{1}{L_P} \int_{L_P} Nu(X) dL_P \quad (1.61)$$

$$\overline{\text{Sh}} = \frac{1}{L_p} \int_{L_p} \text{Sh}(X) dL_p \quad (1.62)$$

$$\overline{\text{Cf}} = \frac{1}{L_p} \int_{L_p} \text{Cf}(X) dL_p \quad (1.63)$$

Ou $L_p = \frac{l_p}{L}$ et dL_p est donnée par :

$$dL_p = \sqrt{dX + dY} = dX \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX} \right)_{Y=F(X)}^2} \quad (1.64)$$

Dans ces conditions et dans le repère (O, ξ, η) , les expressions (1.61) - (1.64) deviennent :

$$dL_p = d\xi \sqrt{1 + F'^2} = \alpha \cdot d\xi \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{1 + F'^2}$$

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{1}{L_p} \int_0^{L_p} \alpha \cdot \text{Nu}(\xi) d\xi \quad (1.66)$$

$$\overline{\text{Sh}} = \frac{1}{L_p} \int_0^{L_p} \alpha \cdot \text{Sh}(\xi) d\xi \quad (1.67)$$

$$\overline{\text{Cf}} = \frac{1}{L_p} \int_0^{L_p} \alpha \cdot \text{Cf}(\xi) d\xi \quad (1.68)$$

et

$$L_p = \int_0^{L_p} dL_p = \int_0^{L_p} \sqrt{1 + F'^2} \cdot dx \quad (1.69)$$

CONCLUSION

A ce stade de notre travail, l'analyse théorique de notre problème est terminée. Le problème est mathématiquement formulé dans le système de coordonnées $O\xi\eta$ à l'aide d'une transformation homotopique, ce qui nous a permis de transformer le domaine physique de forme curviligne en un domaine de calcul rectangulaire. Dans cette analyse, nous avons aussi exprimé les nombres locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood, ainsi que le coefficient de frottement afin de caractériser les transferts de chaleur, de masse et d'impulsion.

Les équations adimensionnelles sont résolues en utilisant une méthode implicite aux différences finies que nous explicitons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II

FORMULATION NUMERIQUE DU PROBLEME

II.1 CHOIX DE LA METHODE DE RESOLUTION

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé les équations régissant les transferts qui s'effectuent par convection naturelle laminaire dans la couche limite développée le long d'un tronc de cône dont la surface de la paroi est décrite par un profil sinusoïdal. Le présent chapitre porte sur l'étude numérique du problème.

Considérons la variable adimensionnelle Φ , pouvant désigner la vitesse U , la température θ ou la concentration C . Les équations du bilan (1.35)-(1.37) peuvent alors être formulées, à l'aide de cette variable, en une seule équation obéissant à l'expression suivante:

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} + V \frac{\partial \Phi}{\partial Y} - B_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = B_2 \quad ; \quad \Phi \equiv \{U, \theta, C\} \quad (2.1)$$

Avec:

$$B_1 = 1 \quad \text{et} \quad B_2 = Gr_t (\theta + N_f C) \quad \text{pour} \quad \Phi = U \quad (2.2)$$

$$B_1 = \frac{1}{Pr} \quad \text{et} \quad B_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = \theta \quad (2.3)$$

$$B_1 = \frac{1}{Sc} \quad \text{et} \quad B_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi = C \quad (2.4)$$

La résolution du système d'équations non linéaires (2.1) ne peut être effectuée que par l'utilisation des méthodes numériques. Parmi les différentes méthodes numériques, nous avons choisi la méthode des différences finies basée sur le développement en série de Taylor d'une fonction autour d'un point x_0 [43-49]. Ainsi, les dérivées d'un ordre quelconque sont déterminées en fonction des valeurs que peut prendre la fonction considérée aux points situés aux alentours du point x_0 .

Dans le domaine de calcul, les équations de bilan sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les équations obtenues forment un système algébrique dont la résolution est faite par des méthodes appropriées.

II.2 MAILLAGE DU DOMAINE DE CALCUL

La discrétisation des équations différentielles partielles nécessite le choix d'un maillage de la géométrie considérée (domaine de calcul). Nous avons opté pour un maillage uniforme dans les deux directions de l'écoulement comme le montre la figure 2.1. Ceci est conforme avec certaines études déjà citées [43-49].

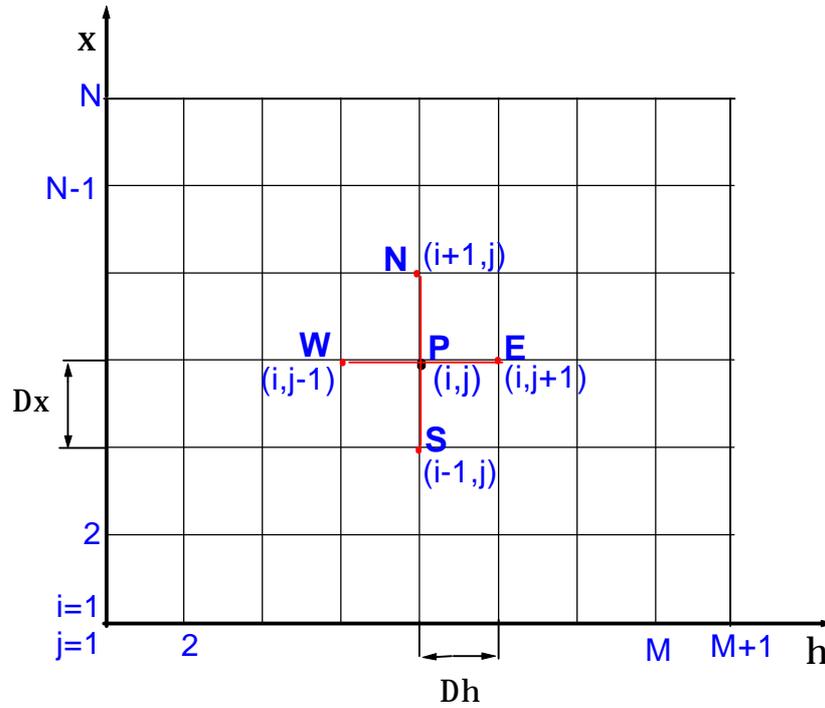


Figure 2.1 : Schéma du maillage

II.3. EQUATIONS DU MODELE PHYSIQUE DANS LE SYSTEME DE COORDONNEES DE CALCUL

II.3.1 Equation générale

Dans le repère $O\xi\eta$, l'équation générale (2.1) s'écrit :

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + (\eta_X U + \eta_Y V) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - B_1 \eta_Y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = B_2 \quad (2.5)$$

II.3.2 Conditions aux limites

A la paroi ($\eta=0$)

$$U(\xi,0) = 0 \quad ; \quad V(\xi,0) = 0 \quad (2.6)$$

$$\theta(\xi,0) = 1 \quad ; \quad C(\xi,0) = 1 \quad (2.7)$$

A l'épaisseur de la couche limite ($\eta=1$)

$$U(\xi,1) = 0 \quad (2.8)$$

$$\theta(\xi,1) = 0 \quad ; \quad C(\xi,1) = 0 \quad (2.9)$$

II.4 DISCRETISATION DES EQUATIONS

II.4.1 Approximation des dérivées du premier ordre :

Soit $P(i,j)$ un nœud quelconque de la figure 2.1. La dérivée d'ordre 1, par rapport à la direction ξ , est calculée à l'aide d'une différence finie régressive :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\Phi_j^i - \Phi_j^{i-1}}{\Delta \xi} \quad (2.10)$$

Et à l'aide d'une différence finie centrée pour la dérivée première par rapport à η , soit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\Phi_{j+1}^i - \Phi_{j-1}^i}{2\Delta \eta} \quad (2.11)$$

Pour la dérivée seconde par rapport à ξ ou η , on utilise une approximation par différence finie centrée :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \frac{\Phi_{j+1}^i - 2\Phi_j^i + \Phi_{j-1}^i}{\Delta \eta^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_j^{i+1} - 2\Phi_j^i + \Phi_j^{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.13)$$

II.4.2 Discrétisation de l'équation de continuité

Les termes de l'équation de continuité (1.33) sont discrétisés aux au nœud central P.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_p + \left(\eta_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_p + \left(\frac{r_\xi^*}{r^*} U \right)_p + \left(\eta_y \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_p = 0 \quad (2.14)$$

Les expressions des différents termes discrétisés du premier membre de cette équation sont données par :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_p = \frac{U_j^i - U_j^{i-1}}{\Delta \xi} \quad (2.15)$$

$$\left(\eta_x \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_p = (\eta_x)_j^i \frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2\Delta \eta} \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{r_\xi^*}{r^*} U \right)_p = \left(\frac{r_\xi^*}{r^*} \right)_i U_j^i \quad (2.17)$$

$$\left(\eta_y \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_p = (\eta_y)_j^i \frac{V_j^i - V_{j-1}^i}{\Delta \eta} \quad (2.18)$$

La substitution des expressions (2.15-2.18) dans l'équation (2.14) donne la forme discrétisée de l'équation de continuité :

$$\frac{U_j^i - U_j^{i-1}}{\Delta \xi} + (\eta_x)_j^i \frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2\Delta \eta} + \left(\frac{r_x^*}{r^*} \right)_i U_j^i + (\eta_y)_j^i \frac{V_j^i - V_{j-1}^i}{\Delta \eta} = 0 \quad (2.19)$$

De cette dernière relation, on déduit l'expression de la vitesse transversale de l'écoulement :

$$V_j^i = V_{j-1}^i - \frac{\Delta \eta}{(\eta_y)_j^i} \left[\frac{U_j^i - U_j^{i-1}}{\Delta \xi} + (\eta_x)_j^i \frac{U_{j+1}^i - U_{j-1}^i}{2\Delta \eta} + \left(\frac{r_x^*}{r^*} \right)_i U_j^i \right] \quad (2.20)$$

II.4.3 Discrétisation de l'équation générale

Cette équation est définie par la forme différentielle suivante :

$$\left(U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_p + \left[(\eta_x U + \eta_y V) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right]_p - \left[B_1 \eta_y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right]_p = (B_2)_p \quad (2.21)$$

Nous procédons de la même manière que précédemment pour rechercher la forme discrétisée de cette équation. La discrétisation des différents termes de cette équation conduit à :

$$\left(U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p = U_j^i \frac{\Phi_j^i - \Phi_j^{i-1}}{\Delta x} \quad (2.22)$$

$$\left[(\eta_X U + \eta_Y V) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right]_P = [(\eta_X U + \eta_Y V)]_j^i \frac{\Phi_{j+1}^i - \Phi_{j-1}^i}{2\Delta \eta} \quad (2.23)$$

$$\left[B_1 \eta_Y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right]_P = (B_1 \eta_Y^2)_j^i \frac{\Phi_{j+1}^i - 2\Phi_j^i + \Phi_{j-1}^i}{\Delta \eta^2} \quad (2.24)$$

$$(B_2)_P = (B_2)_j^i \quad (2.25)$$

La forme discrétisée de l'équation générale s'écrit :

$$U_j^i \frac{\Phi_j^i - \Phi_j^{i-1}}{\Delta \xi} + [(\eta_X U + \eta_Y V)]_j^i \frac{\Phi_{j+1}^i - \Phi_{j-1}^i}{2\Delta \eta} - (B_1 \eta_Y^2)_j^i \frac{\Phi_{j+1}^i - 2\Phi_j^i + \Phi_{j-1}^i}{\Delta \eta^2} = (B_2)_j^i \quad (2.26)$$

L'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme suivante :

$$A_P \Phi_j^i = A_E \Phi_{j+1}^i + A_W \Phi_{j-1}^i + A_S \Phi_j^{i-1} + (B_2)_j^i \quad (2.27)$$

Soit :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_S \Phi_S + (B_2)_j^i \quad (2.28)$$

Les coefficients $A_P, A_E, A_W,$ et A_S sont définis par :

$$A_P = 2 \frac{(B_1 \eta_Y^2)_j^i}{\Delta \eta^2} + \frac{U_j^i}{\Delta \xi} \quad (2.29)$$

$$A_E = \frac{(B_1 \eta_Y^2)_j^i}{\Delta \eta^2} - \frac{[(\eta_X U + \eta_Y V)]_j^i}{2\Delta \eta} \quad (2.30)$$

$$A_W = \frac{(B_1 \eta_Y^2)_j^i}{\Delta \eta^2} + \frac{[(\eta_X U + \eta_Y V)]_j^i}{2\Delta \eta} \quad (2.31)$$

$$A_S = \frac{U_j^i}{\Delta \xi} \quad (2.32)$$

Les grandeurs η_X, η_Y sont calculées en annexe et définies par :

$$\eta_x = - \frac{F_i' + \eta \left(\frac{b \xi_i^{-3/4}}{4} - F_i' \right)}{b \xi_i^{1/4} - F_i} ; \eta_y = \frac{1}{b \xi_i^{1/4} - F_i} \quad (2.33)$$

L'équation générale de discrétisation (2.28) forme un système d'équations algébriques non linéaires dont la résolution est basée sur l'algorithme de Gauss-Seidel [45-49]. A l'aide de cette méthode de résolution, cette équation est représentée par :

$$(\Phi_P)^{K+1} = (1-Cr)(\Phi_P)^K + \frac{Cr}{A_P} \left[A_E(\Phi_E)^K + A_W(\Phi_W)^K + A_S(\Phi_S)^K + (B_2)_j^i \right] \quad (2.34)$$

Où K représente le nombre d'itérations et Cr le coefficient de relaxation pouvant être différent d'une équation à une autre.

II.4.4 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant :

Dans le système de coordonnées de calcul, l'équation de la fonction de courant (1.38) se traduit par :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \\ &= \xi_Y \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \eta_Y \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \eta_Y \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial(\Psi r^*)}{\partial X} = -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right] - \frac{1}{r^*} \frac{dr^*}{dX} \Psi \\ &= -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \eta_X \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{r_X^*}{r^*} \Psi \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

En combinant les équations (2.35) et (2.36), la composante V de la vitesse peut être exprimée en fonction de la composante U selon la relation :

$$V = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\eta_X}{\eta_Y} U + \frac{r_X^*}{r^*} \Psi \right) \quad (2.37)$$

L'équation (2.37) peut être séparée en deux termes, l'un dépendant de la fonction de courant et l'autre des deux composantes de la vitesse :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{r_X^*}{r^*} \Psi \right) = -\left(\frac{\eta_X}{\eta_Y} U + V \right) \quad (2.38)$$

La discrétisation de l'équation précédente conduit à :

$$\frac{\Psi_j^i - \Psi_j^{i-1}}{\Delta \xi} + \left(\frac{r_X^*}{r^*} \right)_j^i \Psi_j^i = -\left[V_j^i + \left(\frac{\eta_X}{\eta_Y} \right)_j^i U_j^i \right] \quad (2.39)$$

Ou sous la forme équivalente suivante :

$$\Psi_j^i = \frac{1}{1 + \Delta\xi \left(r_x^* / r^* \right)^i} \left\{ \Psi_j^{i-1} - \Delta\xi \left[V_j^i + \left(\eta_x / \eta_y \right)_j^i U_j^i \right] \right\} \quad (2.40)$$

II.4.5 Discrétisation des conditions aux limites :

A la surface ondulée :

$$\xi \geq 0 \text{ et } \eta = 0 : U(i,1) = 0 ; V(i,1) = 0 ; \theta(i,1) = 1 ; C(i,1) = 1 \quad (2.41)$$

Loin de la surface :

$$\eta = 1 : U(i, M + 1) = 0 ; \theta(i, M + 1) = 0 ; C(i, M + 1) = 0 \quad (2.42)$$

II.5 Méthode de résolution

La résolution des équations du modèle physique exprimées dans le système de coordonnées de calcul et régissant l'écoulement de convection naturelle laminaire de type couche limite le long d'un tronc de cône est réalisée conformément à l'organigramme de calcul présenté dans les figures 2.2-2.3. La procédure de résolution comporte les principales étapes suivantes :

Étape 1 : choix des pas d'espaces $\Delta\xi$ et $\Delta\eta$

Étape 2 : choix du nombre de Grashof Gr_t et du nombre de la force de flottabilité N_f

Étape 3 : choix d'un coefficient de relaxation Cr adapté aux équations du mouvement, de la chaleur et de transfert de masse.

Étape 4 : choix d'un type de fluide caractérisé par le nombre de Prandtl Pr et le nombre de Schmidt Sc en cas d'un transfert couplé par convection thermique et massique.

Étape 5 : choix d'une amplitude A du profil sinusoïdal de la surface ondulée de la paroi du tronc de cône.

Étape 6 : initialisation des valeurs des composantes U , V de la vitesse, de la température θ et la concentration C dans le cas d'un transfert massique.

Étape 7 : résolution de l'équation de continuité (2.19) pour obtenir directement la composante $V(i,j)$ de la vitesse.

Étape 8 : calcul des coefficients A_P , A_E , A_W et A_S donnés par les équations (2.29-2.32) et le terme B_2 donné par l'équation (2.25).

Étape 9 : connaissant les valeurs des conditions aux limites de la fonction Φ , on détermine :

- a) la fonction U_P en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (2.34), (Φ_p est remplacé par U_p) avec la condition écrite dans l'équation (2.2)
- b) la fonction θ_P en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (2.34), (Φ_p est remplacé par θ_p) avec la condition écrite dans l'équation (2.3)
- c) la fonction C_P en tout point P de la grille de discrétisation donnée par l'équation (2.34), (Φ_p est remplacé par C_p) avec la condition écrite dans l'équation (2.4) dans le cas de la convection massique.

Étape 10 : satisfaction du test de convergence représenté par :

$$\left(\sum_{i,j} |\Phi_p^{k+1} - \Phi_p^k| \right) / \left(\sum_{i,j} |\Phi_p^{k+1}| \right) \leq 10^{-5}$$

Si le test de convergence suivant est vérifié : Les profils de vitesse, de température et de concentration sont alors déterminés. Nous calculons les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyen ainsi que le coefficient de frottement. Sinon, les calculs sont repris à partir de l'étape 7.

Enfin, on détermine la fonction du courant en appliquant l'équation (2.40).

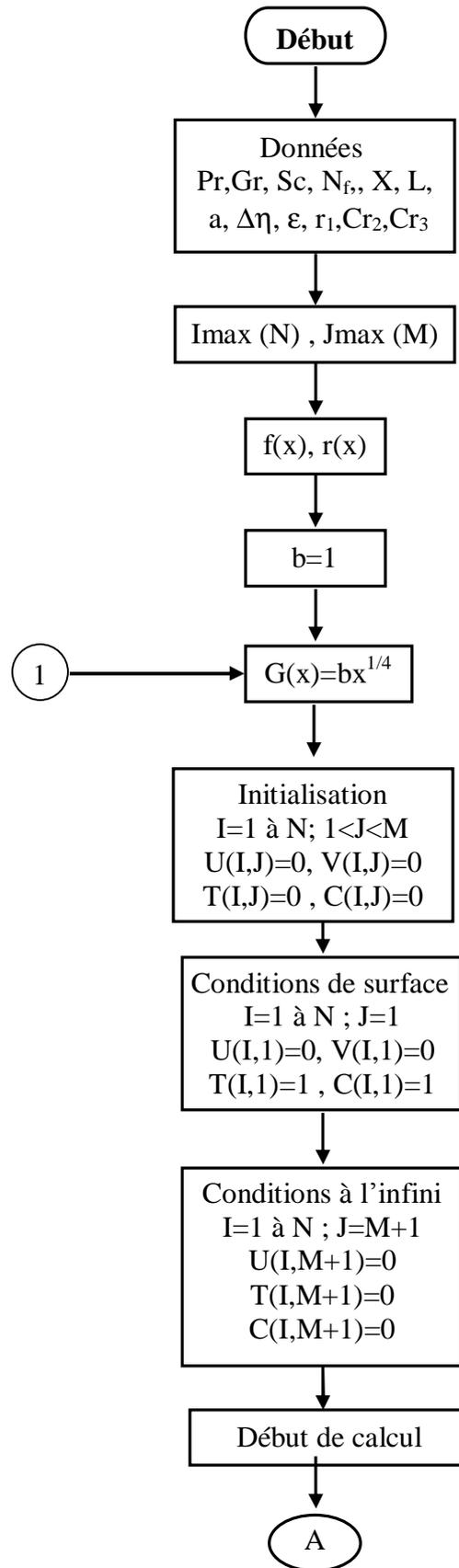


Figure 2.2 : Organigramme de calcul (partie A)

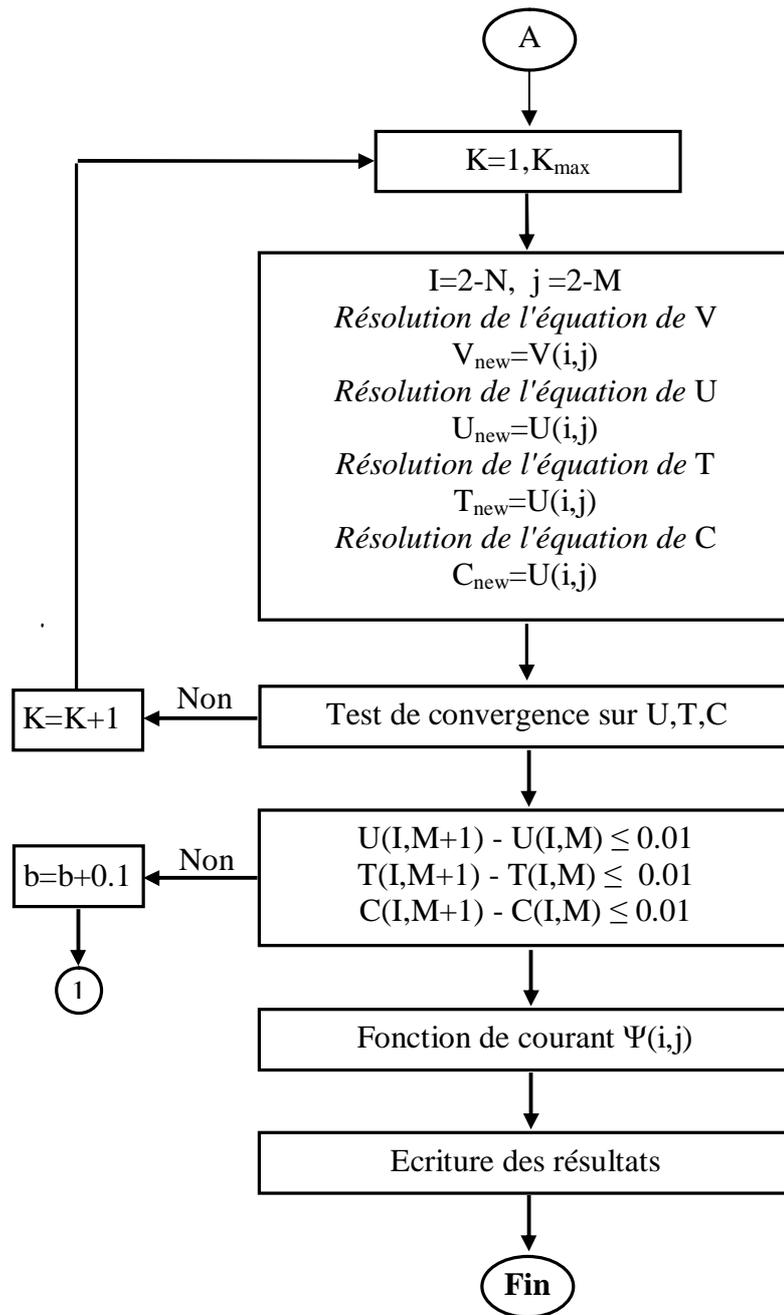


Figure 2.3 : Organigramme de calcul (partie B)

CHAPITRE III

RESULTATS ET DISCUSSIONS

I.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'analyse de l'influence de l'état de la surface de la paroi d'un tronc de cône sur les transferts qui se développent dans la couche limite par convection naturelle.

Nous commençons par étudier l'influence du maillage sur les résultats et procéder par la suite, à la validation de notre code de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux donnés par d'autres auteurs.

Afin de valider notre code de calcul, nous avons étudié d'une part la convection naturelle thermique et d'autre part la convection naturelle thermique et massique développée dans la couche limite d'un tronc de cône à paroi lisse. Nous avons également traité le cas de la convection naturelle développée dans la couche limite d'un tronc de cône dont la paroi est décrite par un profil sinusoïdal.

Nous analysons l'influence du nombre de Rayleigh thermique et massique et de l'amplitude de la sinusoïde représentant la forme de la surface de la paroi du cône sur les transferts de chaleur et de masse et le frottement.

Afin que le régime de l'écoulement soit laminaire, l'expérience montre que la valeur critique du nombre de Grashof se situe aux environs de 10^9 [41]. Nos calculs ont été effectués pour des valeurs du nombre de Grashof comprises entre 10^4 et 10^8 . La longueur de la paroi du tronc de cône est égale à 0.2 m.

III.2 CHOIX DU MAILLAGE DU DOMAINE D'ETUDE

Le calcul du champ de vitesses en utilisant trois maillages (161x61), (81x91) et (61x191) pour un tronc de cône à paroi lisse a conduit à des résultats quasi identiques (figure 3.1).

Pour nos calculs, nous retenons le maillage (61x191) qui correspond aux pas d'espace ($\Delta\xi=10^{-3}$) et ($\Delta\eta=10^{-4}$).

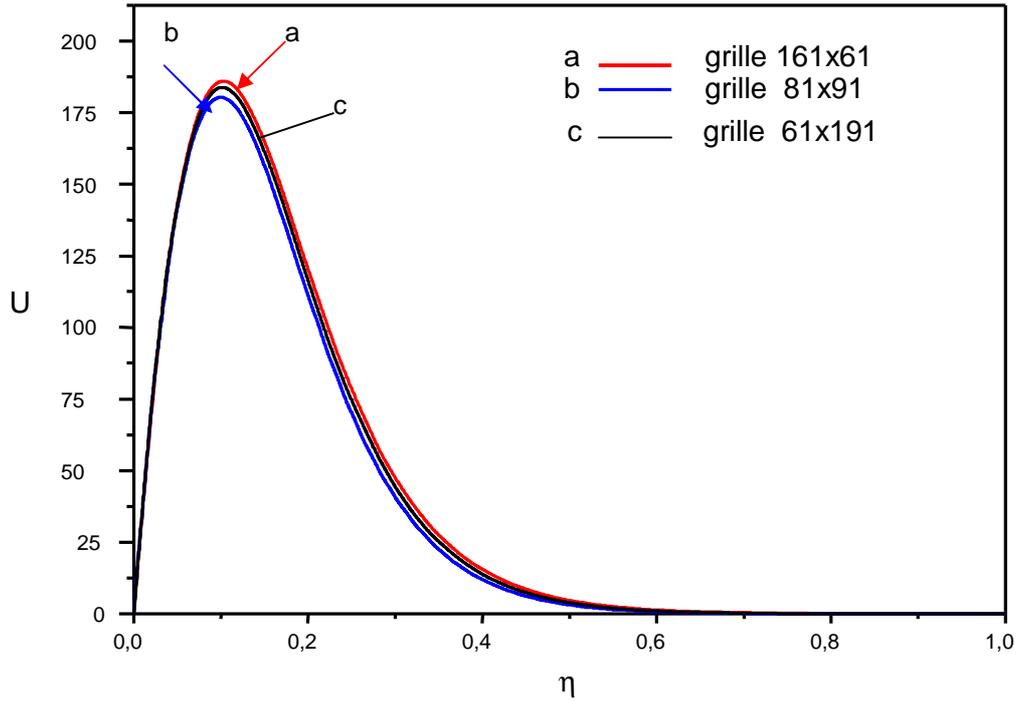


Figure 3.1: Profil de la composante longitudinale U de la vitesse dans la couche limite
Influence du maillage

III.3 VALIDATION DU CODE DE CALCUL

Pour valider notre code de calcul, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par Merk et Prins [26] et Abdurrachim [27]. La comparaison porte sur les nombres de Nusselt local et moyen obtenus en considérant un tronç de cône dont la surface de la paroi est lisse $A=0$ et pour $X_0=0$.

En convection naturelle, le nombre de Nusselt est une fonction des nombres de Grashof et de Prandtl ou du nombre de Rayleigh. Une telle dépendance peut être traduite par les expressions proposées par Braun et al [50] et définies par :

$$Nu(x) = B_1 Ra_x^{n_1} \quad (3.1)$$

$$\overline{Nu} = B_2 Ra_L^{n_2} \quad (3.2)$$

Où Ra est le nombre de Rayleigh donné par :

$$Ra_x = Pr Gr_t(x) \quad (3.3)$$

$$Ra_L = Pr Gr_t(L) \quad (3.4)$$

Où B_1 , B_2 , n_1 et n_2 sont déterminés par le lissage, à l'aide de la méthode des moindres carrés, des courbes $Nu(x)$ et Nu_L en fonction respectivement de Ra_x et Ra_L . Dans notre cas, figures 3.2-3.3, on obtient : $B_1= 0.435$, $B_2 = 0.513$, $n_1 = n_2 = 0.25$

Le tableau ci-dessous présente une comparaison entre nos résultats de calcul et ceux d'autres auteurs dans le cas où l'air est choisi comme fluide ayant un nombre de Prandtl, $Pr=0.72$.

	Nu_x	Ecart (%)	Nu_L	Ecart (%)
Nos résultats	$0.4350 Ra_x^{0.25}$		$0.5132 Ra_L^{0.25}$	
Merk et Prins [26]	$0.4436 Ra_x^{0.25}$	0.86	$0.5076 Ra_L^{0.25}$	0.56
Abdurrachim [27]	$0.4472 Ra_x^{0.25}$	1.22	$0.5111 Ra_L^{0.25}$	0.21

Tableau 3.1 : Nombres de Nusselt locaux et moyens.

L'examen du tableau 3.1 montre que nos résultats sont en bon accord quantitatif avec les travaux [26,27]. En effet, l'écart maximal est de 1.3 % pour le nombre de Nusselt local et de 0.6 % pour le nombre de Nusselt moyen.

Pour l'eau, le nombre de Prandtl a été pris égal à 7. Le lissage à l'aide de la même méthode des moindres carrés, utilisée pour établir le nombre de Nusselt local reporté dans le tableau 3.1, conduit à l'expression suivante :

$$Nu(x) = 0.435 Ra_x^{0.25} \quad (3.5)$$

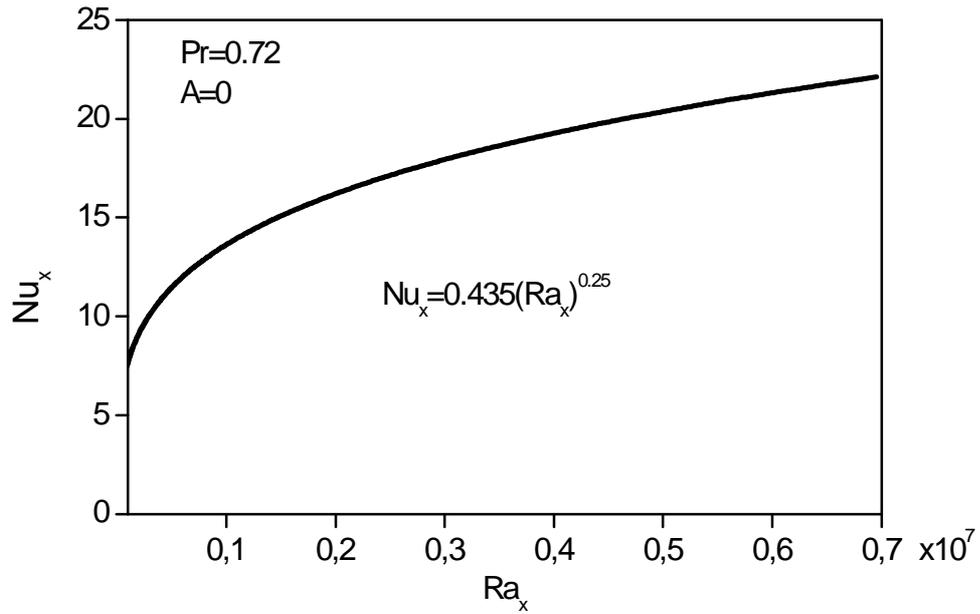


Figure 3.2 : Evolution du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Rayleigh pour un tronc de cône à paroi lisse.

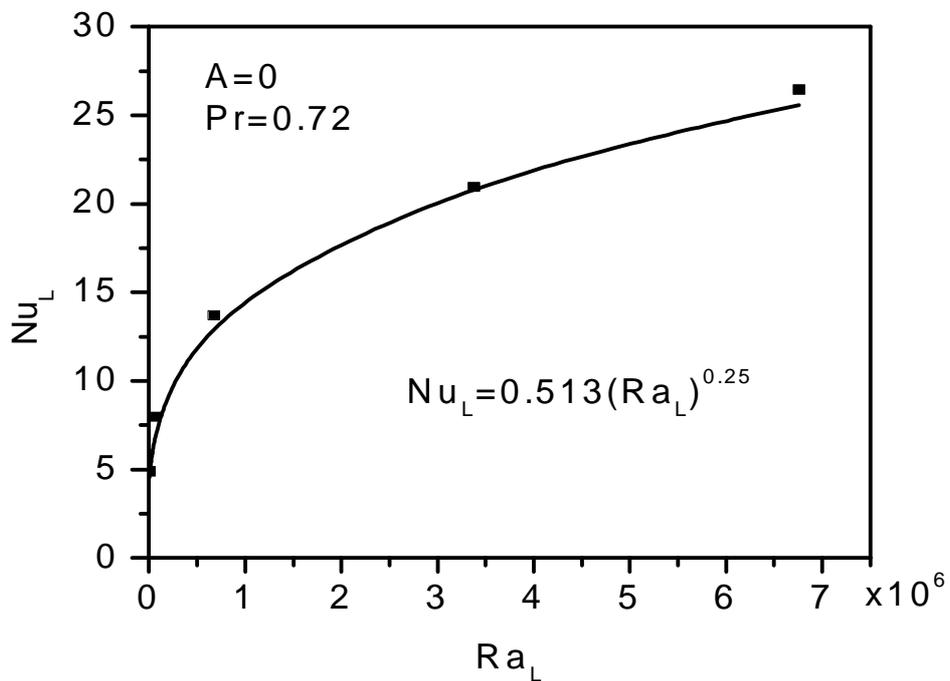


Figure 3.3 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour un tronc de cône à paroi lisse.

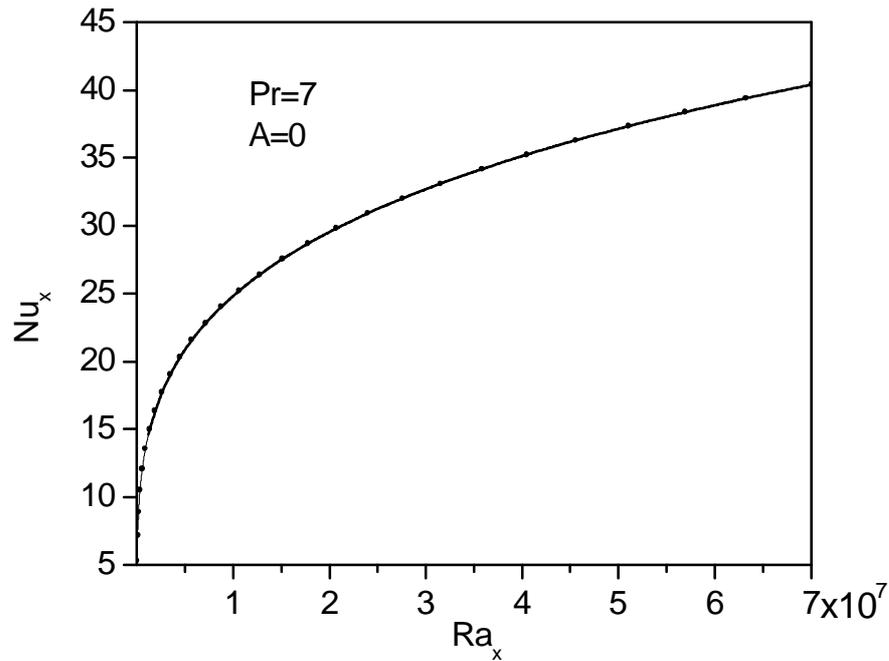


Figure 3.4 : Evolution du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Raleigh

III.4 CONVECTION NATURELLE THERMIQUE AUTOUR D'UN TRONC DE CÔNE A PAROI SINUSOÏDALE

III.4.1 Champs de vitesses

Les figures 3.5-3.6 présentent l'évolution de la composante longitudinale U de la vitesse adimensionnelle en fonction du nombre de Rayleigh pour l'abscisse $X=L$ et pour une valeur donnée de l'amplitude de la sinusoïde $A=0.05$.

On constate que le profil de la vitesse est similaire à celui d'une convection naturelle le long d'une surface verticale. Pour les mêmes conditions de l'écoulement, la composante longitudinale de la vitesse dans l'air est supérieure à celle dans l'eau. Elle est d'autant plus importante que le nombre de Rayleigh est élevé.

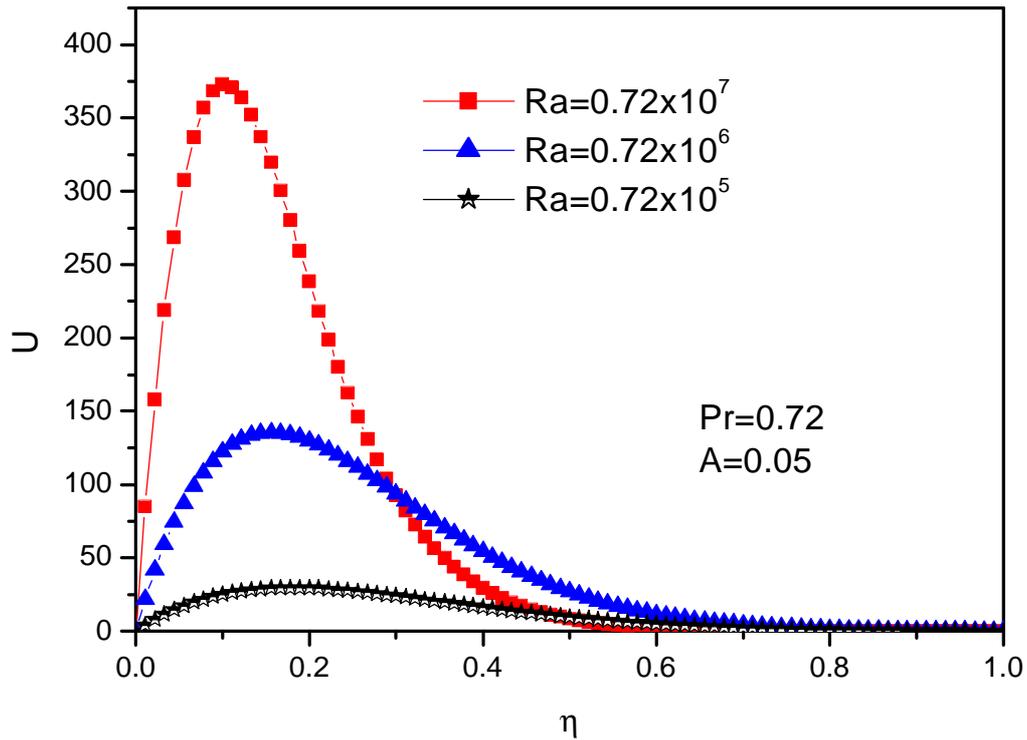


Figure 3.5 : Evolution de la composante de la vitesse longitudinale en fonction de η pour différents nombres de Rayleigh, air, $Pr = 0.72$

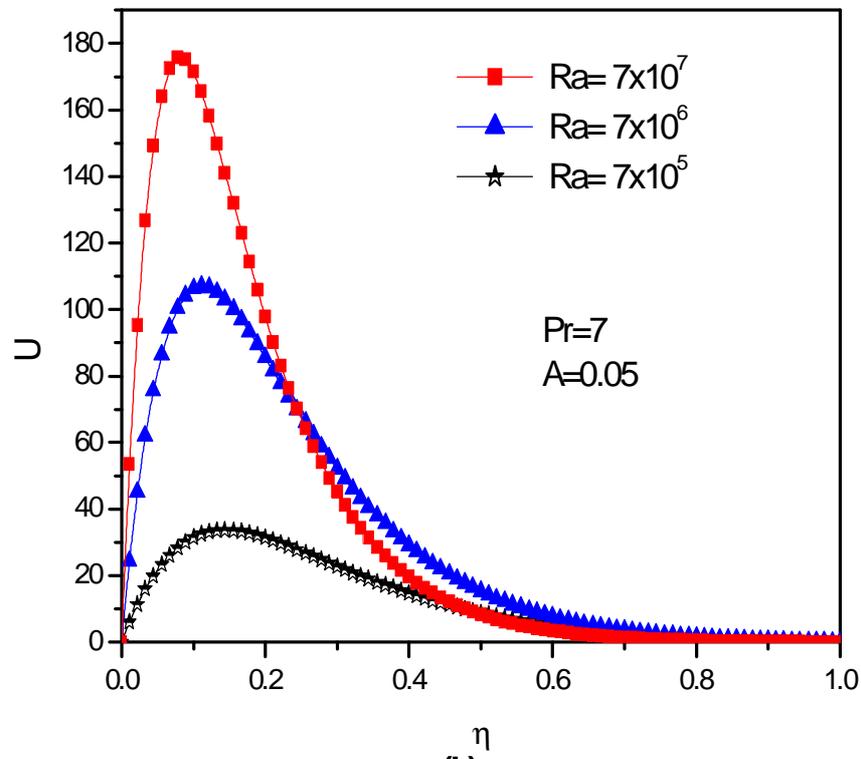


Figure 3.6 : Evolution de la composante de la vitesse longitudinale en fonction de η pour différents nombres de Rayleigh, eau, $Pr = 7$

III.4.2 Champs de températures

Le profil de température des figures 3.7-3.8 rejoint l'observation reportée ci-dessus. On note que l'augmentation du nombre de Rayleigh s'accompagne d'une diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique et dynamique pour les deux fluides considérés dans nos calculs. La viscosité du fluide influence les épaisseurs des couches limites thermique et dynamique. Les épaisseurs obtenues pour l'eau sont inférieures à celles obtenues pour l'air.

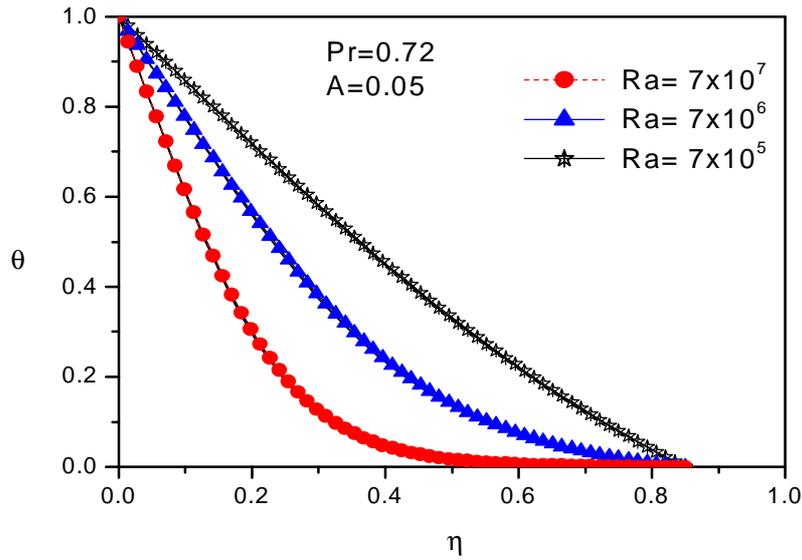


Figure 3.7 : Evolution des températures en fonction de η pour différents nombres de Rayleigh, air, $Pr=0.72$

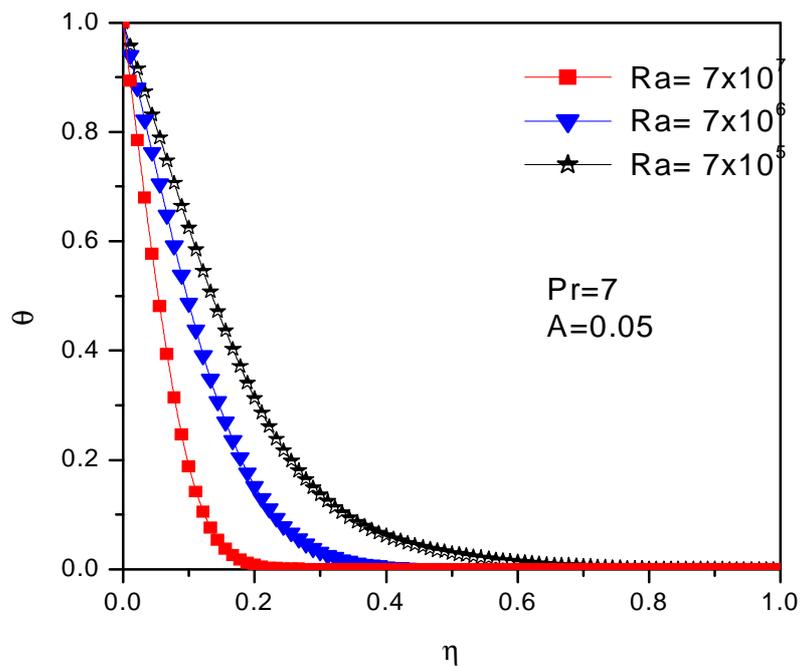


Figure 3.8 : Evolution des températures en fonction de η pour différents nombres de Rayleigh, eau, $Pr=7$

III.4.3 Influence de l'amplitude de la sinusoïde

La figure 3.9 montre l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la paroi du tronc de cône en fonction de l'amplitude de sa surface. On remarque que, quelque soit le type de fluide, l'air ou l'eau, l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la paroi est fortement influencée par la sinusoïde décrivant le profil du tronc de cône. Ainsi, les transferts de chaleur sont plus intenses au sommet de la sinusoïde parce que les transferts se déroulent par convection que dans les creux de la sinusoïde où les transferts par conduction sont prédominants. Sur cette figure, on remarque aussi que l'augmentation de l'amplitude réduit les transferts thermiques le long de la paroi. En effet, bien que la surface d'échange entre la paroi et le fluide augmente avec l'amplitude, cette augmentation entraîne une augmentation de l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique (figures 3.10-3.11) et une diminution du coefficient de frottement local le long de la paroi (figure 3.12). Ce phénomène traduit l'augmentation du transfert thermique par conduction à celui par convection, ce qui diminue, en général, les transferts thermiques.

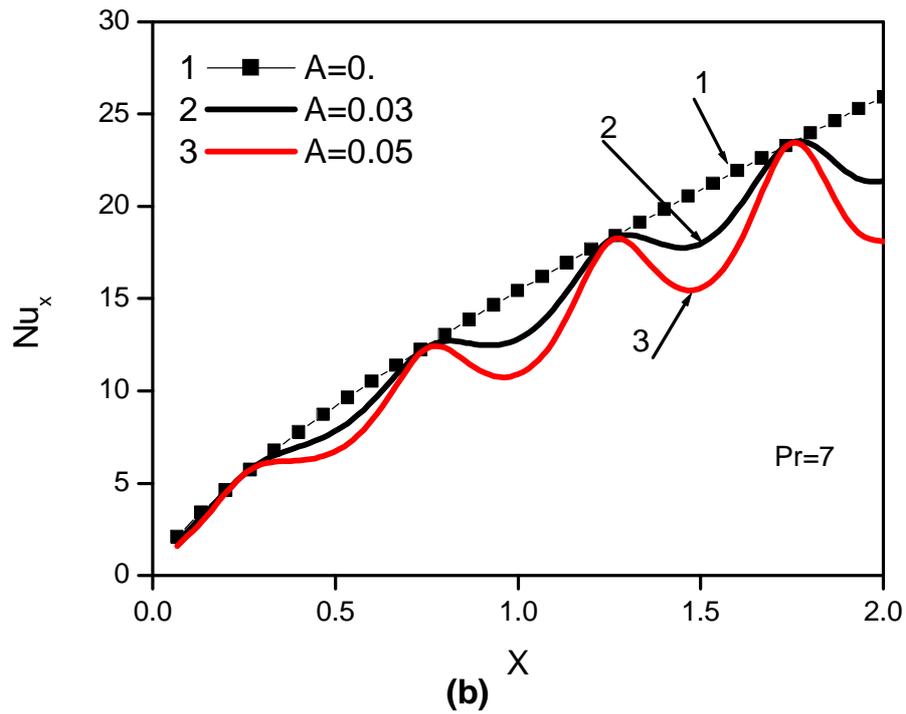
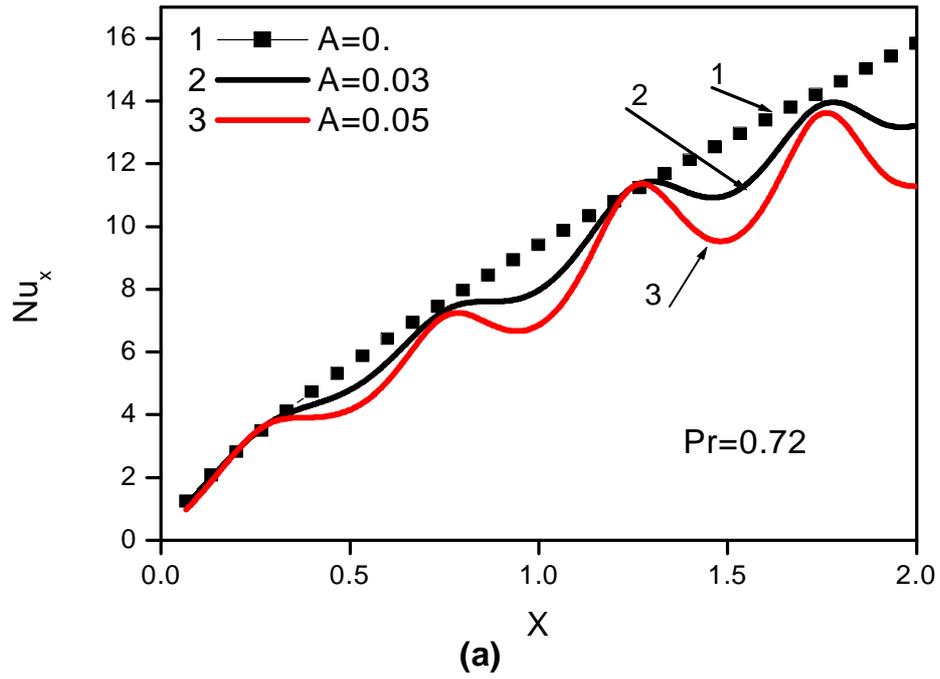


Figure 3.9 : Evolution du nombre de Nusselt local le long de la paroi : Influence de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi. (a) $Pr=0.72$, (b) $Pr=7$

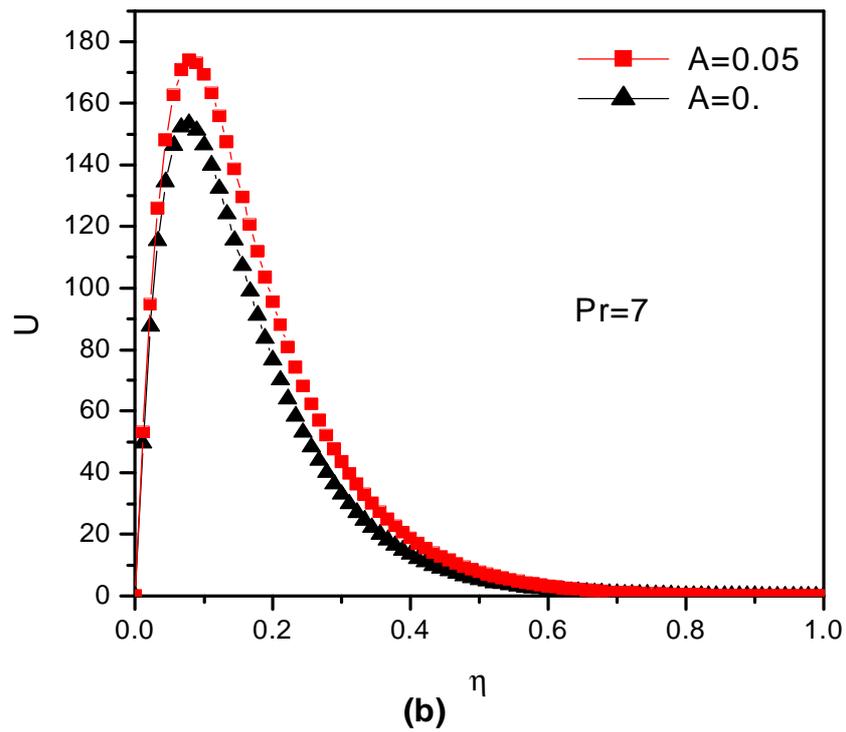
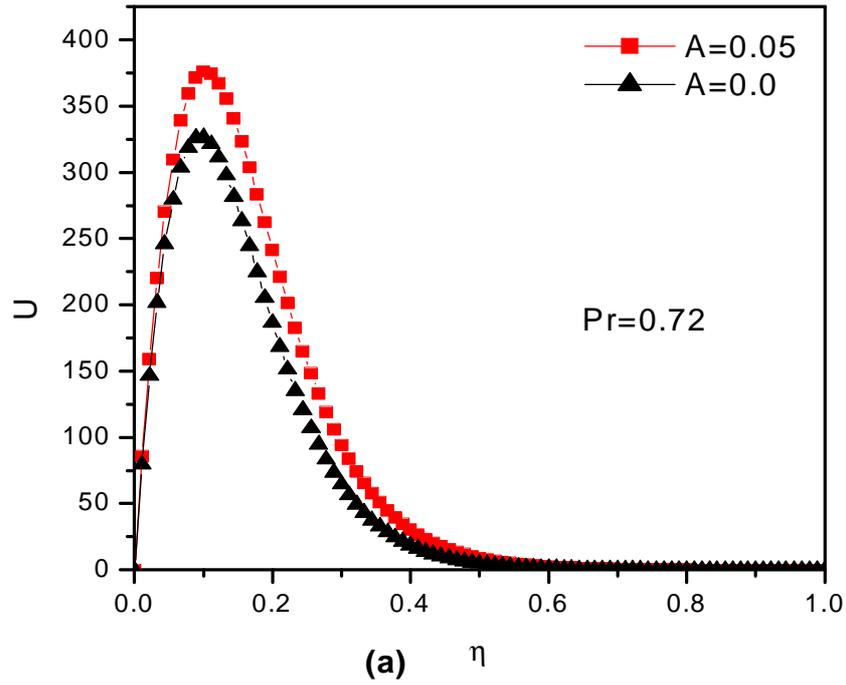


Figure 3.10: Evolution des vitesses en fonction de η : Influence de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi, (a) $Pr=0.72$, (b) $Pr=7$

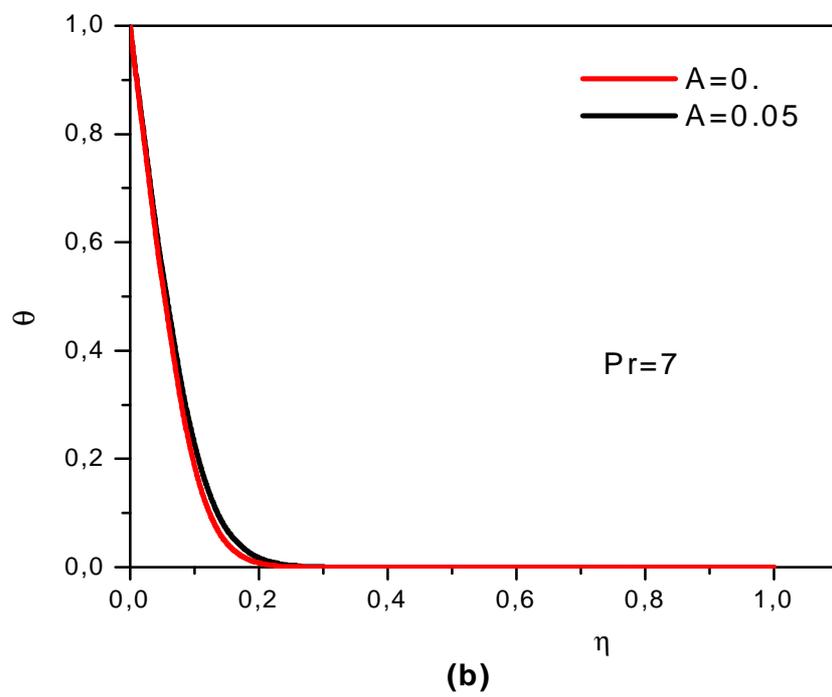
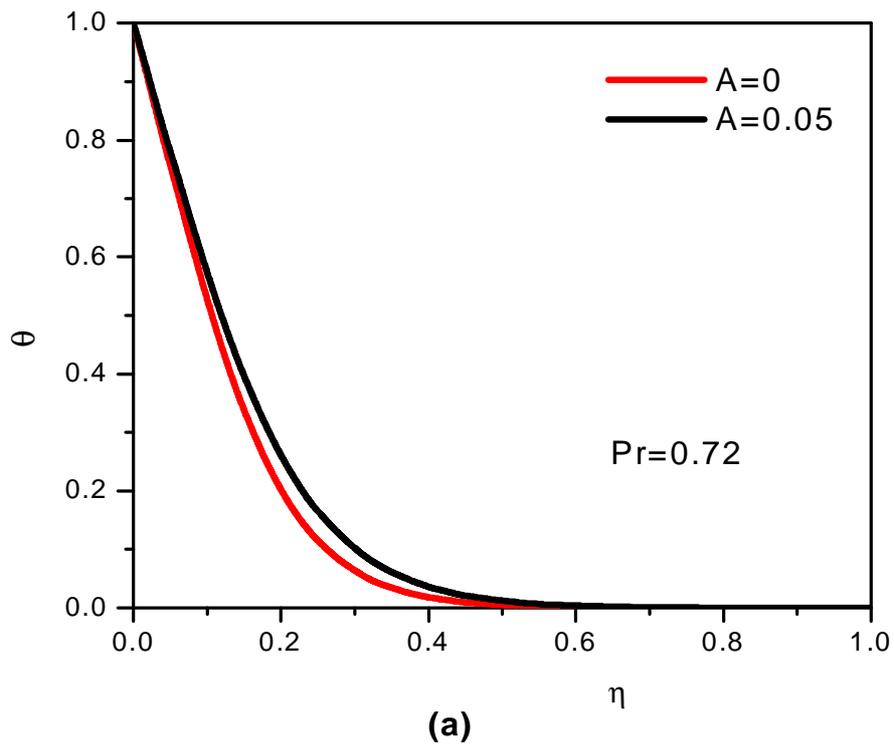


Figure 3.11 : Evolution des températures en fonction de η : Influence de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi. (a) $Pr=0.72$, (b) $Pr=7$

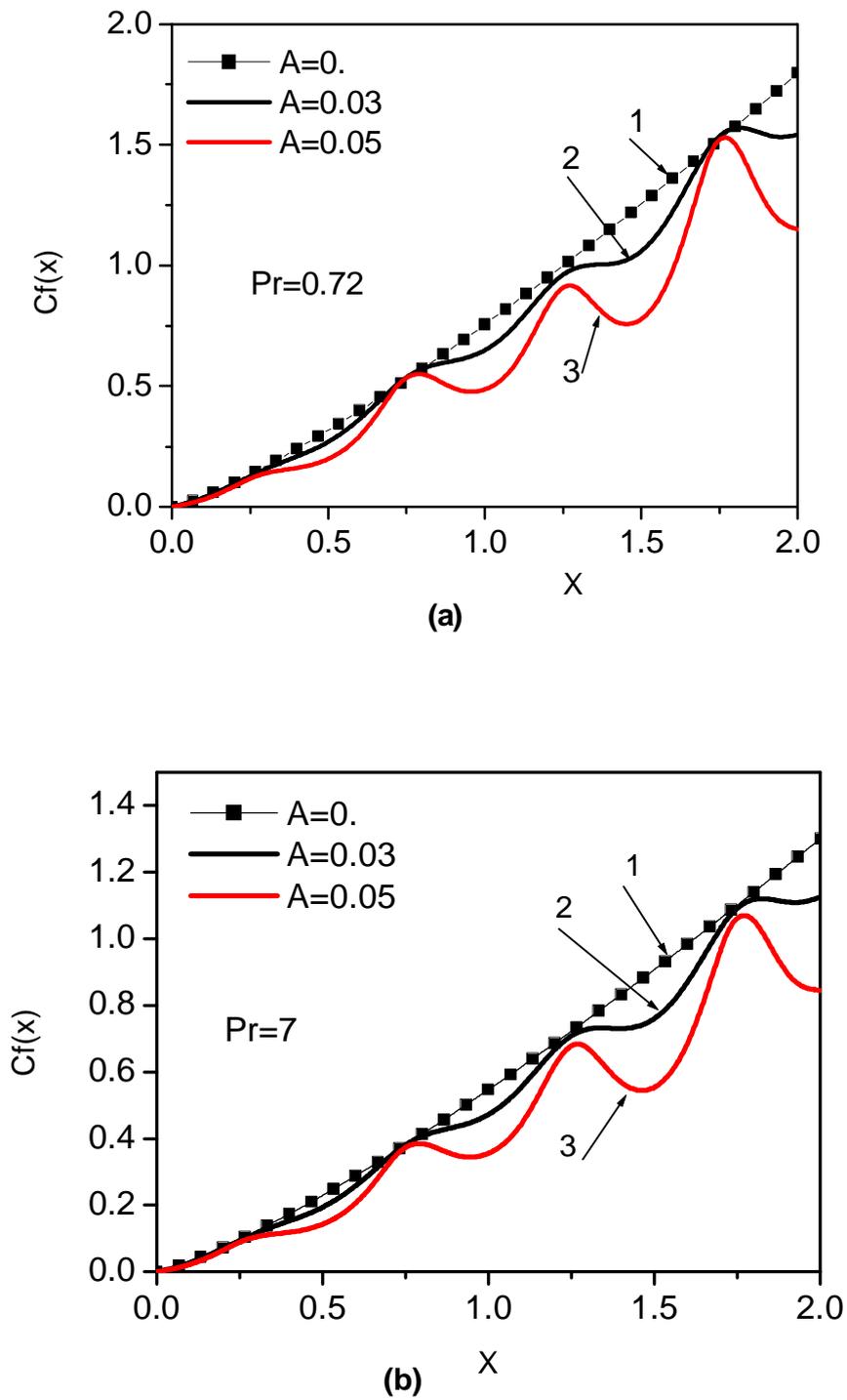


Figure 3.12 : Evolution du coefficient de frottement local du tronc du cône: Influence de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi

III.4.4 Nombres de Nusselt locaux et moyens

Les figures 3.13 et 3.14 représentent l'évolution des nombres locaux et moyens de Nusselt pour l'air et l'eau en fonction du nombre de Rayleigh modifié Ra et pour une valeur de l'amplitude $A=0.05$. On remarque que le nombre de Nusselt local et le nombre de Nusselt moyen augmentent avec le nombre de Rayleigh puisque les forces volumiques d'origine thermique sont d'autant plus élevées que la différence entre la température de la paroi et celle du milieu ambiant est importante.

Comme il a été précisé précédemment, l'accroissement de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi du tronc de cône réduit les transferts de chaleur

L'évolution des nombres de Nusselt locaux et moyens en fonction du nombre de Rayleigh peut être exprimée sous la forme suivante :

$$Nu = P_1 A^{P_2} (Pr Gr_x)^{P_3} \quad (3.6)$$

Où P_1 , P_2 et P_3 sont des constantes obtenues par le lissage, à l'aide de la technique des moindres carrés, des courbes reportées sur les figures 3.13-3.14.

Pour l'air et l'eau :

$$Nu_x = 0.437A^{-0.052} Ra_x^{0.238} \quad , \quad 10^4 < Ra_x < 10^7 \quad (3.7)$$

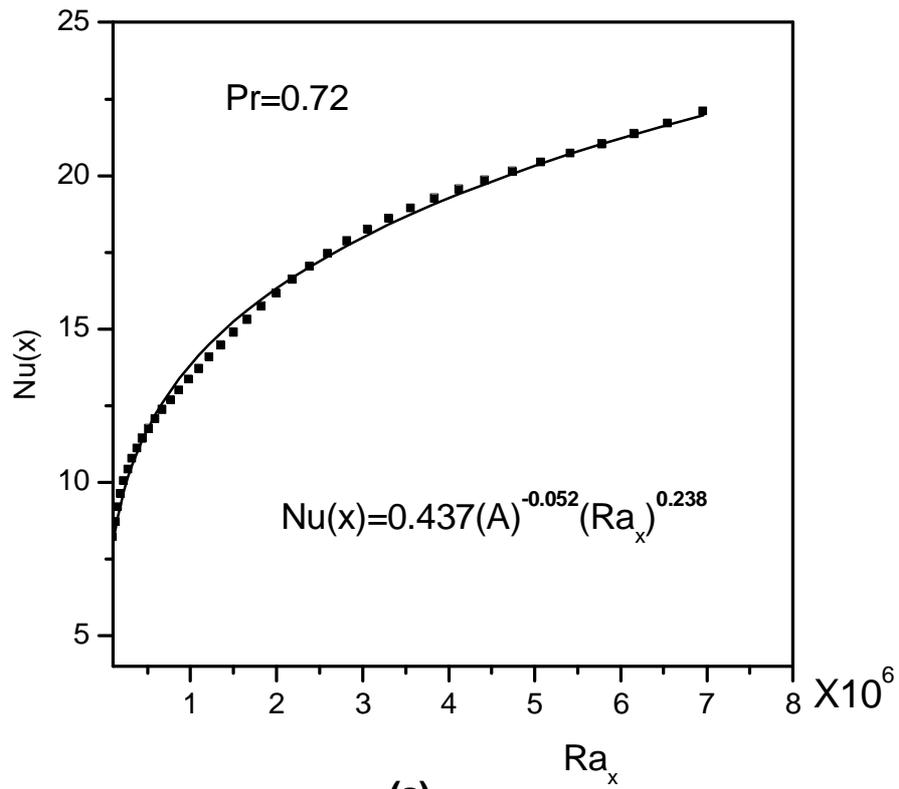
Pour l'air :

$$Nu_L = 0.434A^{-0.11} (Pr Gr_L)^{0.238} \quad , \quad 10^4 < Ra_L < 7.10^7 \quad (3.8)$$

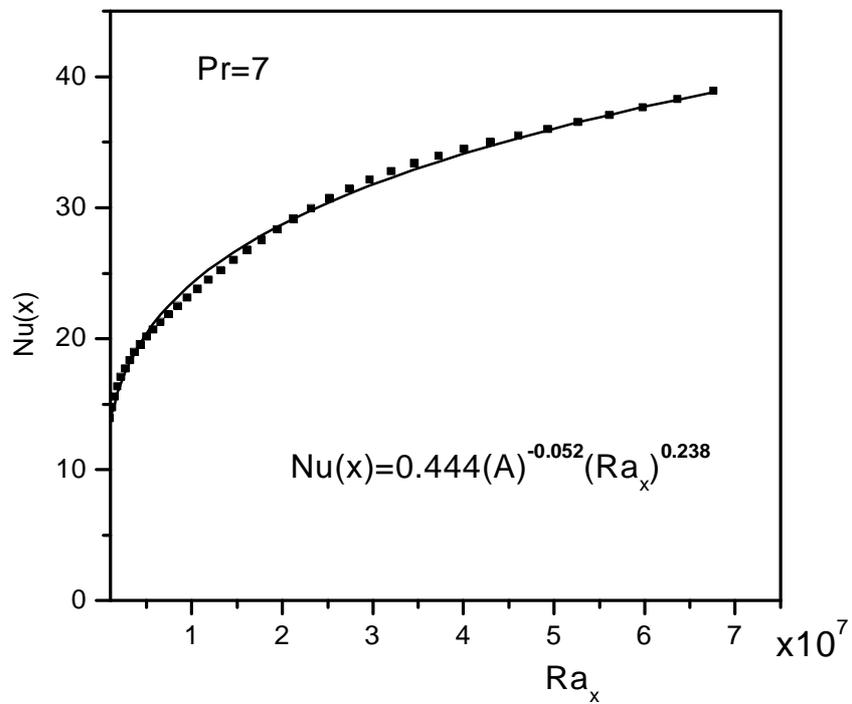
Pour l'eau :

$$Nu_L = 0.45A^{-0.11} (Ra_L)^{0.238} \quad , \quad 10^4 < Ra_L < 71.10^7 \quad (3.9)$$

La figure 3.16 illustre aussi l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh le long de la paroi d'un tronc de cône à paroi lisse et sinusoïdale. On note que l'augmentation de l'amplitude de la sinusoïde engendre un accroissement des épaisseurs des couches limite dynamique et thermique. Il s'ensuit une diminution des transferts thermiques convectifs et un accroissement dans les transferts par conduction entre le fluide et la paroi.

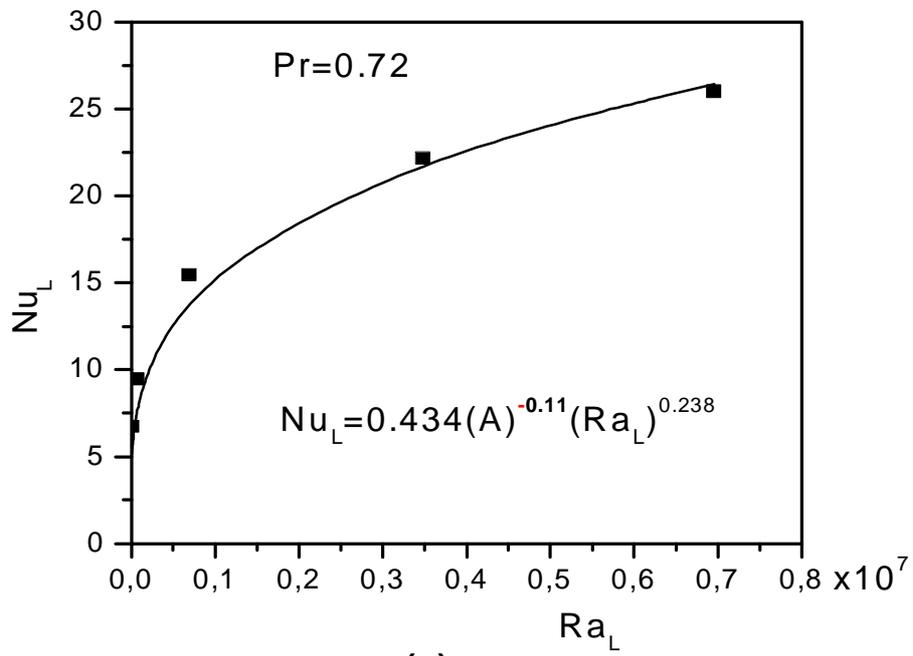


(a)

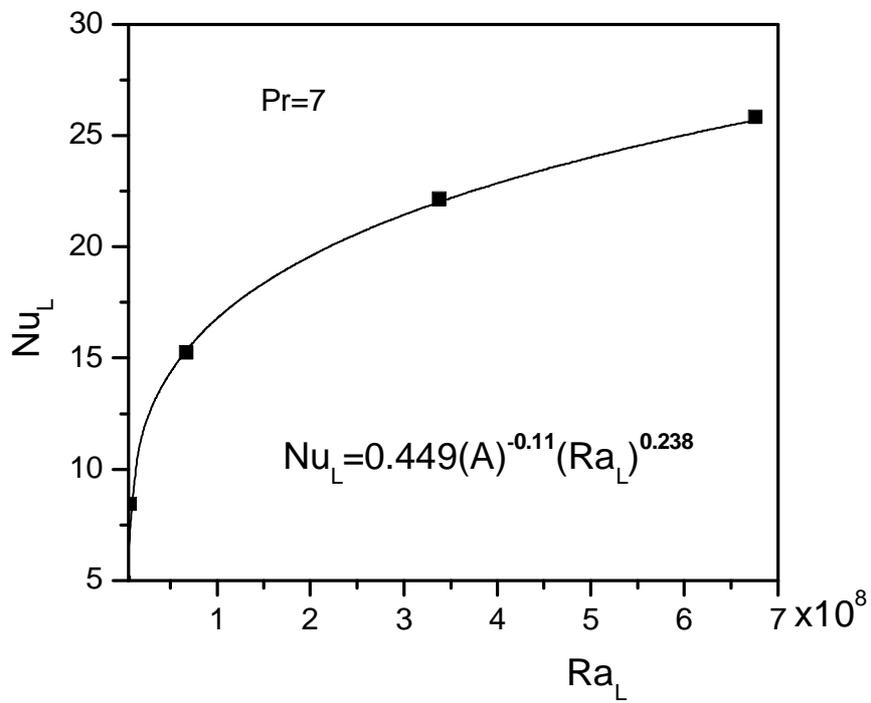


(b)

Figure 3.13 : Evolution du nombre de Nusselt local en fonction du nombre de Rayleigh.
(a) $Pr=0.72$, (b) $Pr=7$

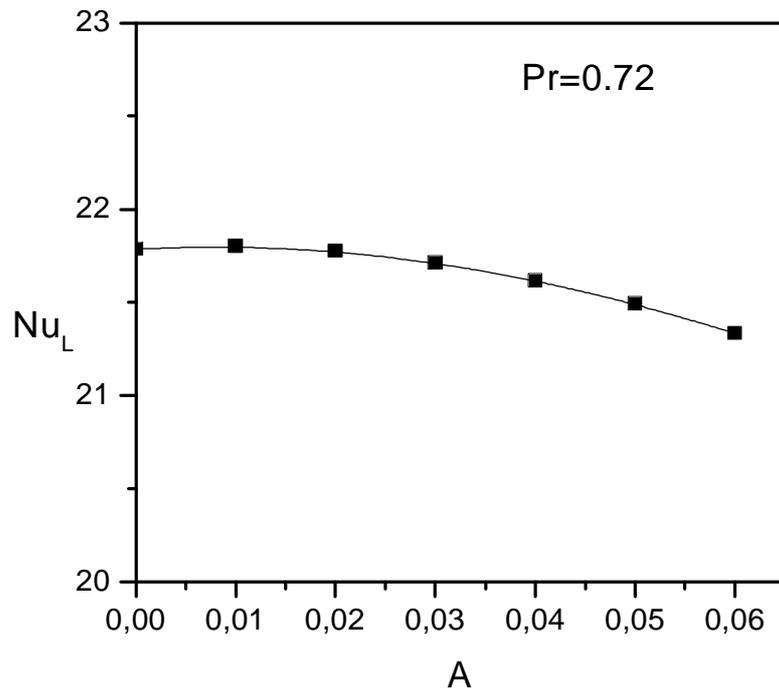


(a)

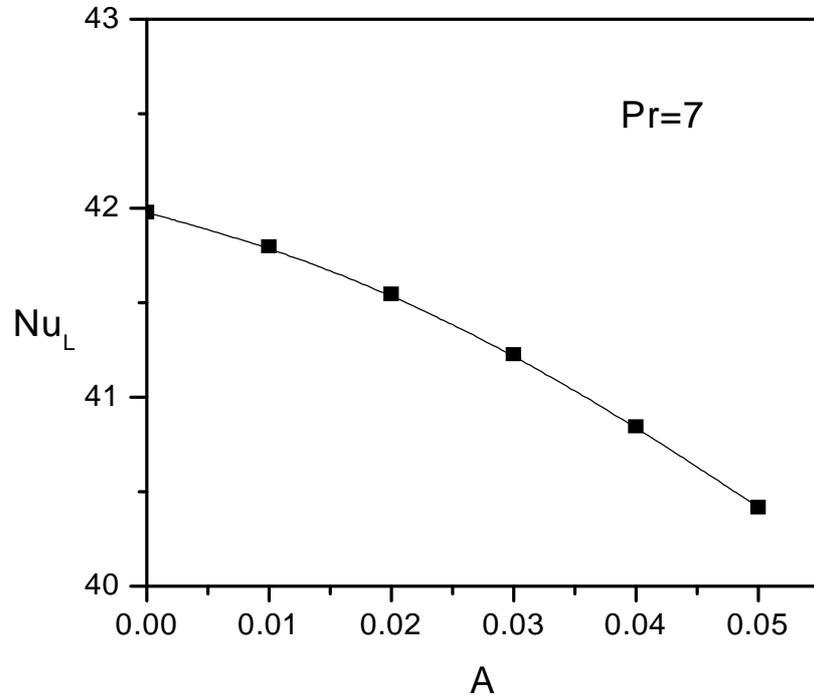


(b)

Figure 3.14 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh.
(a) $Pr=0.72$, (b) $Pr=7$

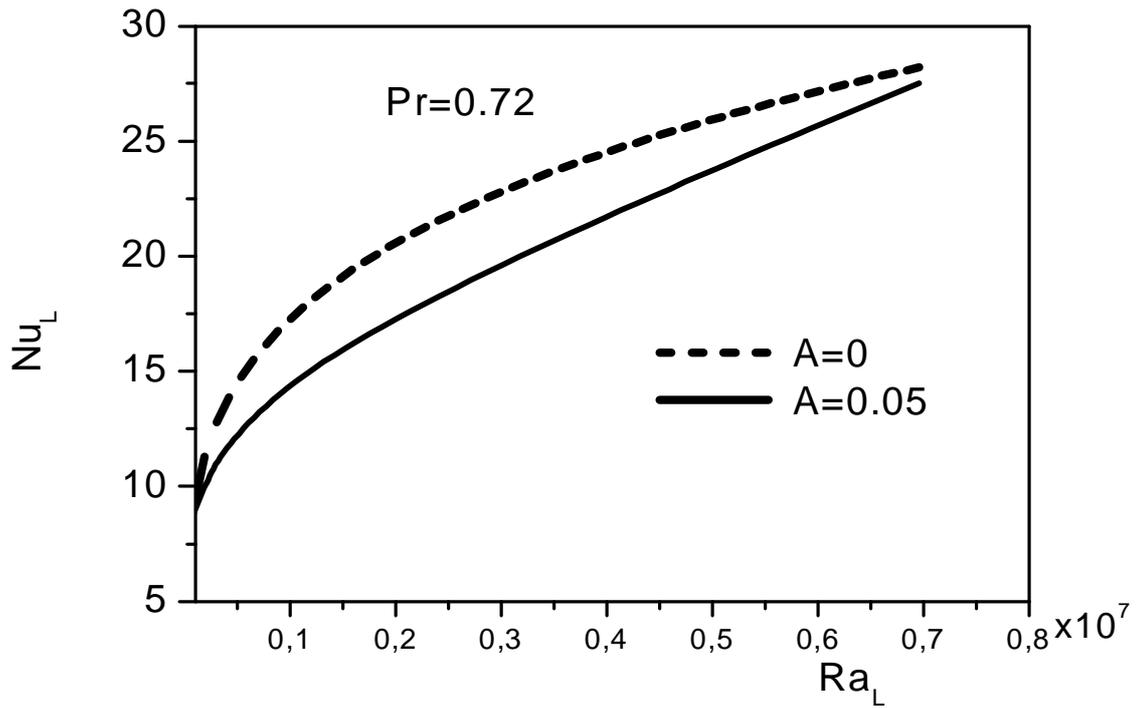


(a)

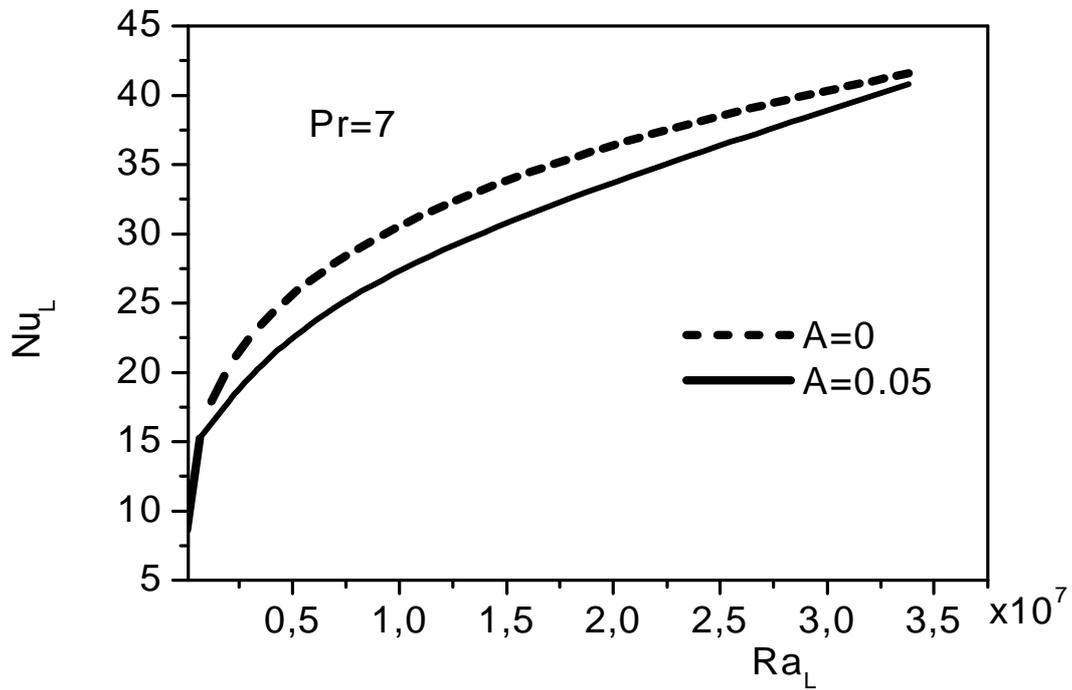


(b)

Figure 3.15 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'amplitude A .
(a) $Pr=0.7$ (b) $Pr=7$



(a)



(b)

Figure 3.16 : Evolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh: Influence de l'amplitude. (a) $Pr=0.7$, (b) $Pr=7$

III.4.5 Structure de l'écoulement

Les figures 3.17-3.22 illustrent l'influence de l'amplitude de la sinusoïde de la surface du tronc de cône sur la structure de l'écoulement et la répartition des isothermes. Ainsi, les lignes de courant qui épousent la forme de la paroi du tronc de cône se déforment, lorsque l'amplitude de la sinusoïde augmente (figures 3.17-3.18). Il apparaît dans le creux de la sinusoïde des cellules de recirculation qui interagissent avec l'écoulement principal. Les isothermes longent la paroi du tronc de cône et leur répartition est dans le creux de la sinusoïde très dense montrant ainsi que dans cette zone le transfert par conduction est prédominant (figures 3.19-3.22).

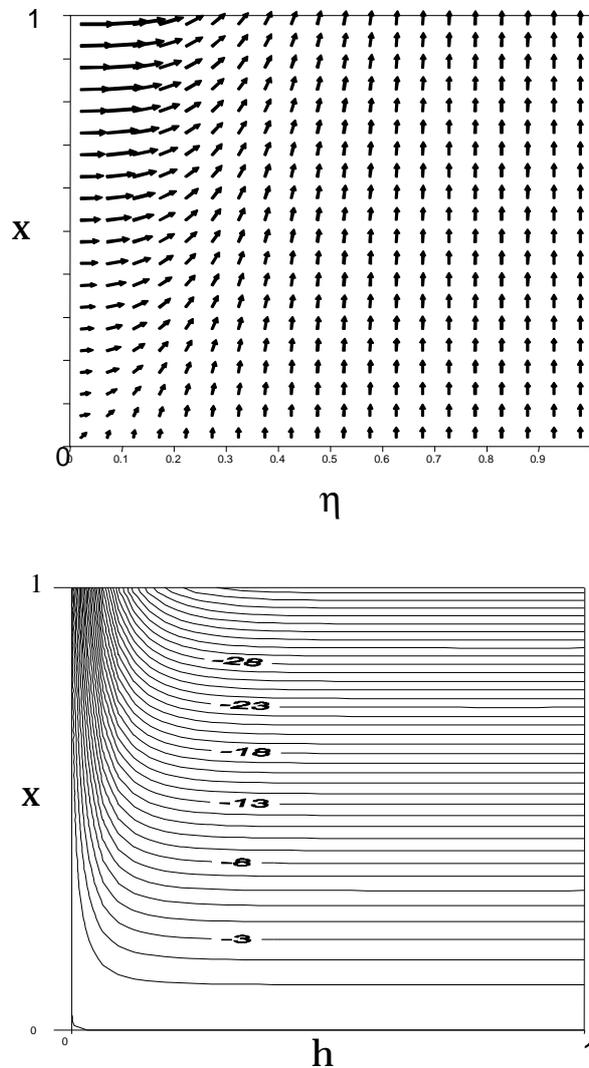


Figure 3.17 : Distribution des lignes de courant pour l'air, $Pr=0.72$, pour un tronc de cône à paroi lisse $A=0$

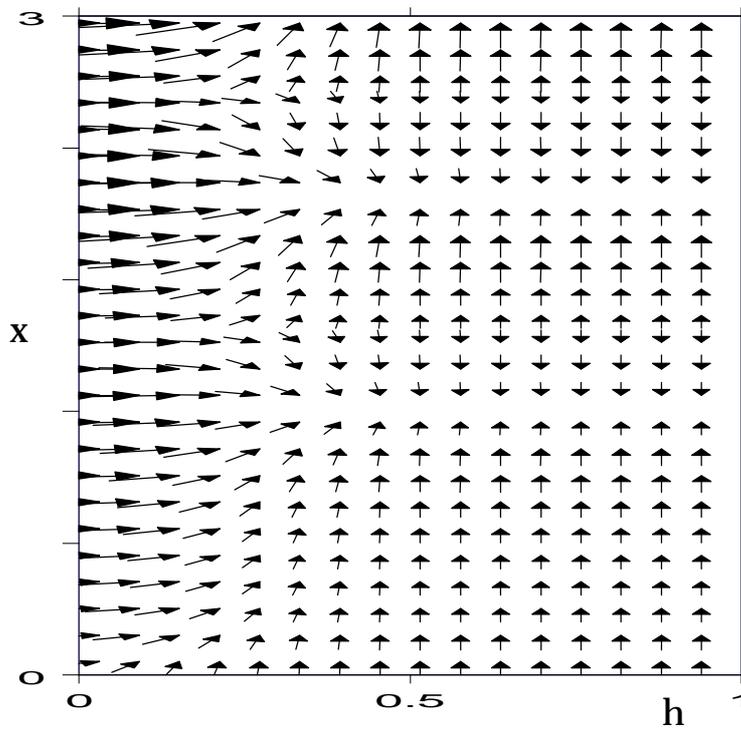
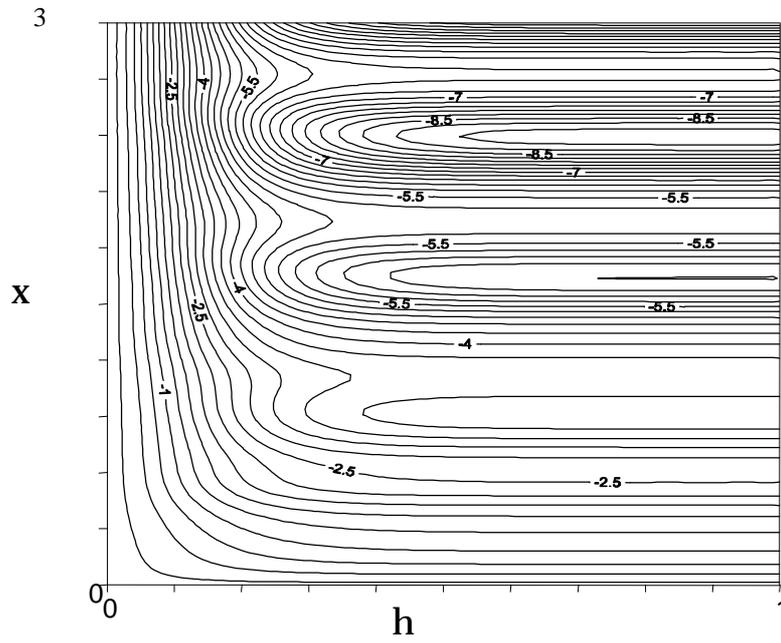


Figure 3.18 : Distribution des lignes de courant pour l'air, $Pr=0.72$, pour un tronç de cône à paroi sinusoïdale, $A=0.05$

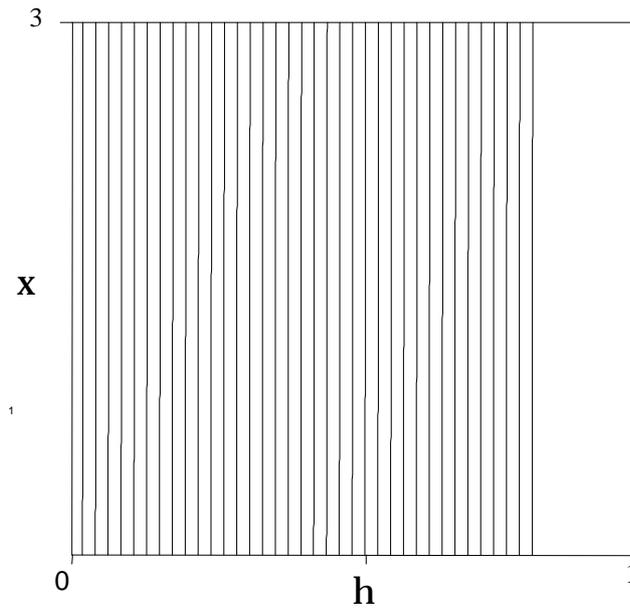


Figure 3.19 : Distribution des isothermes pour l'air, $Pr=0.72$, pour un tonc de cône à paroi lisse, $A=0$

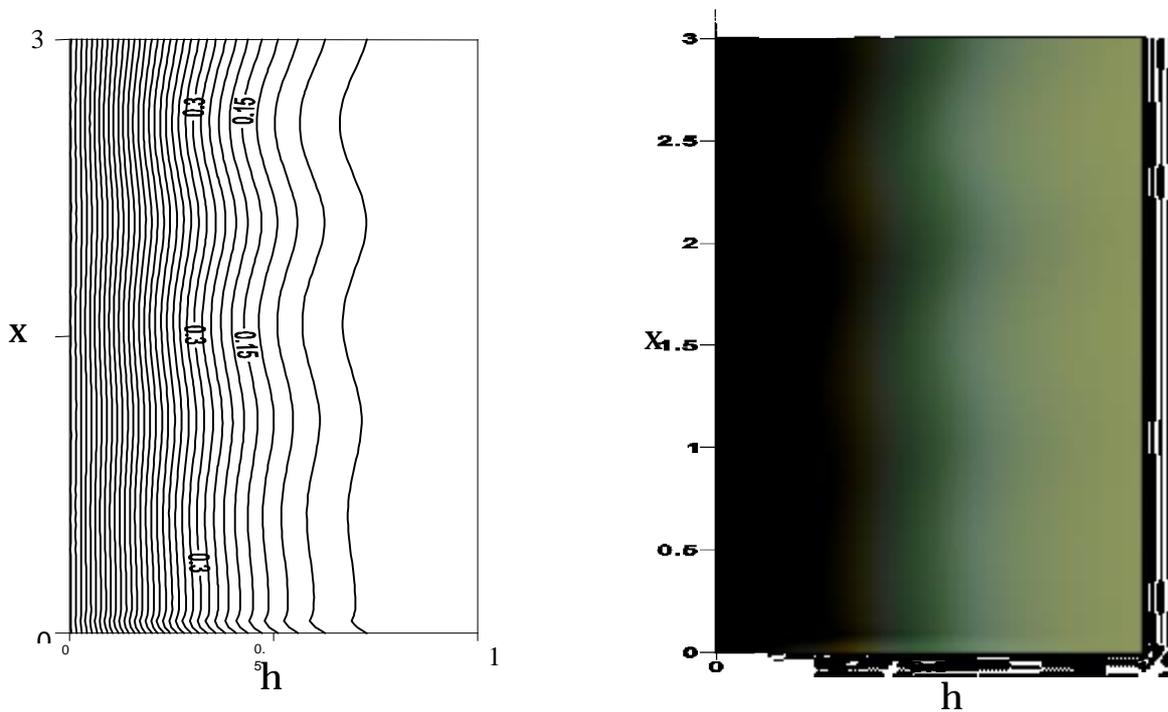


Figure 3.20 : Distribution des isothermes pour l'air, $Pr=0.72$, pour un tronc de cône à paroi lisse, $A=0.05$

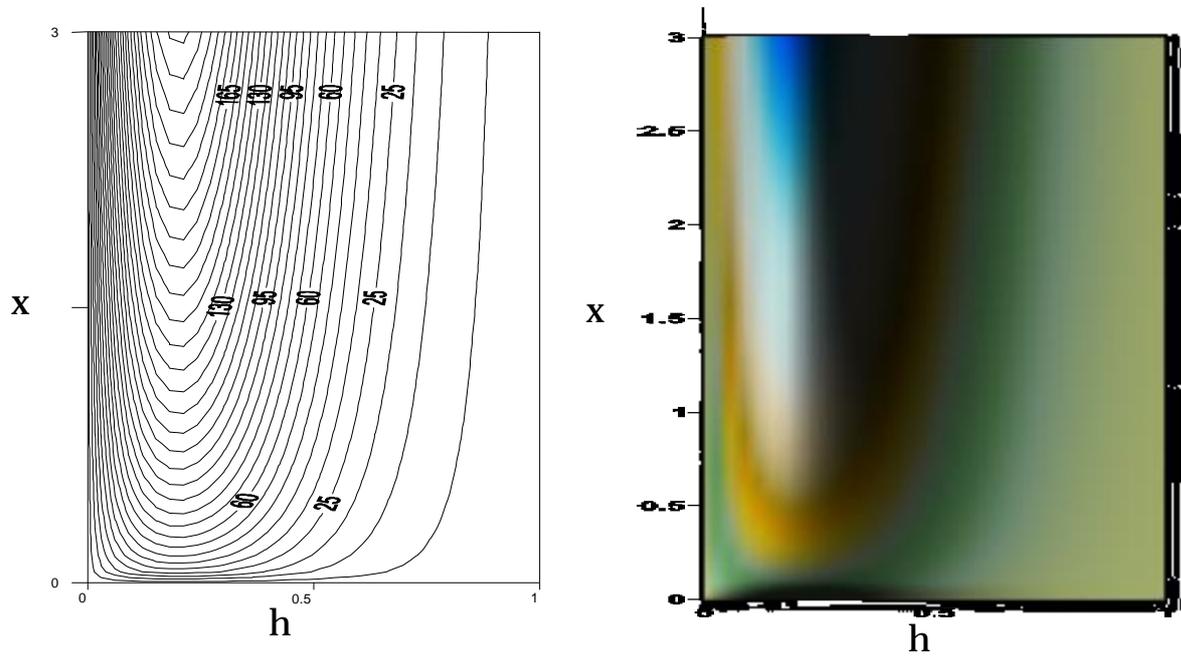


Figure 3.21 : Contours de la composante longitudinale de la vitesse pour l'air, $Pr=0.72$, pour un tronc de cône à paroi lisse, $A=0$

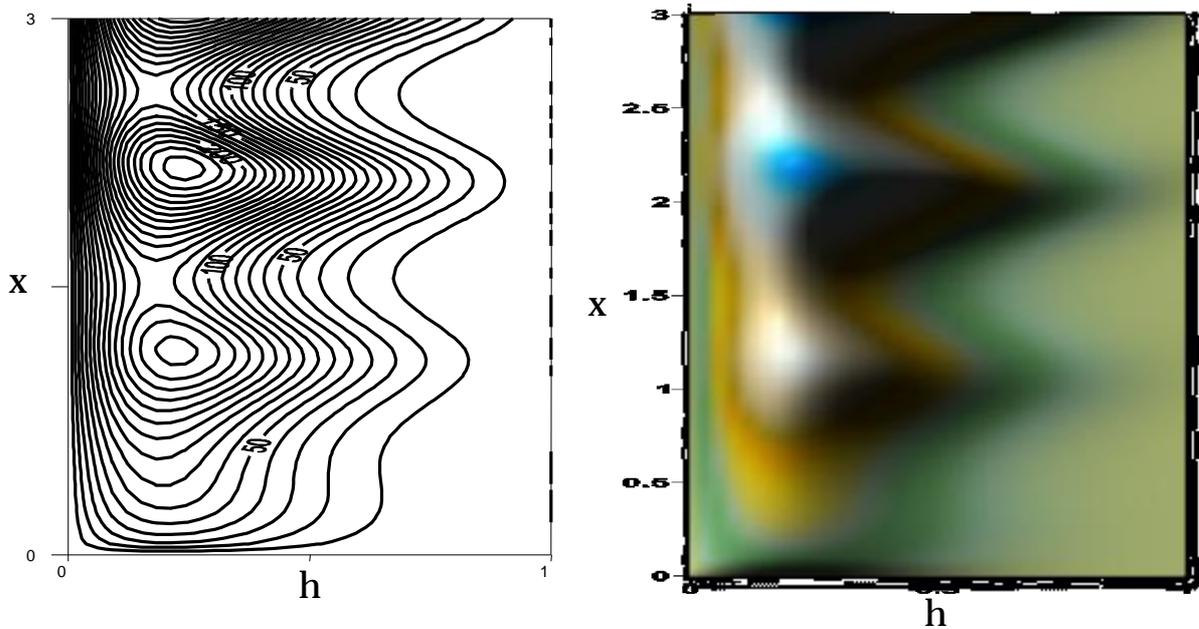


Figure 3.22 : Contours de la composante longitudinale de la vitesse pour l'air, $Pr = 0.72$, pour un tronc de cône à paroi sinusoïdale, $A=0.05$

III.5 CAS DE LA CONVECTION NATURELLE THERMIQUE ET MASSIQUE

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la convection naturelle thermique et massique se développant dans la couche limite entourant un tronc de cône à paroi ondulée. L'espèce diffusante est la vapeur d'eau qui correspond à un nombre de Schmidt $Sc=0.68$. Le modèle physique est représenté par les équations couplées de transfert de chaleur et de masse. Les paramètres physiques caractérisent l'écoulement sont : le rapport N_f , l'amplitude de la sinusoïde de la surface ondulée, le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood. .

III.5.1 Champs de vitesses et profil du coefficient de frottement.

La figure 3.23 représente l'évolution de la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite pour différentes valeurs du rapport N_f et pour une amplitude $A=0.05$. On note que la convection est d'autant plus intense que le rapport entre les forces volumiques d'origine massique et celles d'origine thermique est élevé. L'accroissement de N_f s'accompagne d'une prédominance du transfert par convection naturelle massique ce qui conduit à une augmentation du coefficient de frottement le long de la paroi (figure 3.24).

Au voisinage de la paroi, la composante de la vitesse V croît dans la couche limite avec N_f jusqu'à une certaine valeur de η inférieure à 0.2 (figure 3.25). Pour $\eta > 0.2$, la composante V prend une valeur négative qui résulte de l'interaction entre les cellules développées au creux de la sinusoïde et l'écoulement à son sommet.

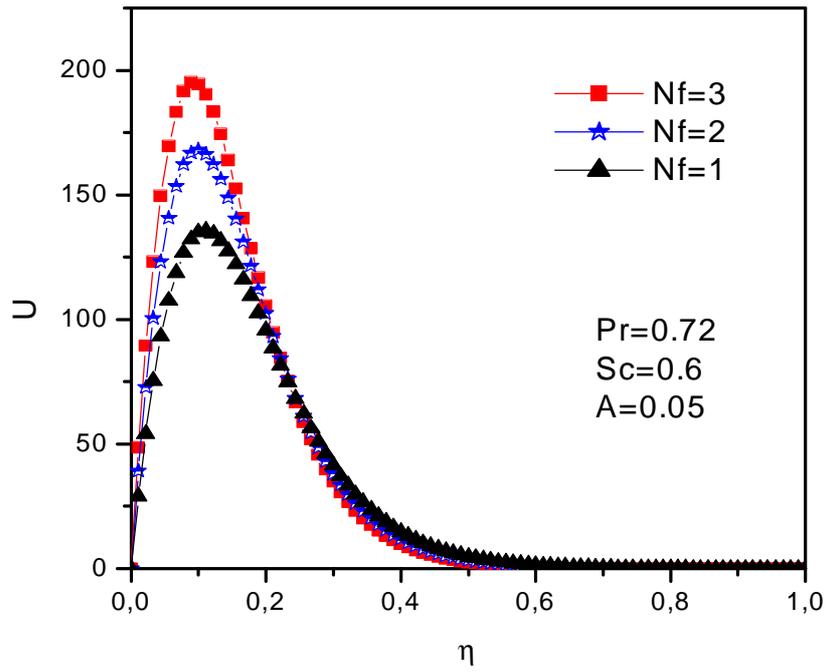


Figure 3.23 : Evolution de la composante longitudinale U de la vitesse en fonction de η . Influence du rapport N_f

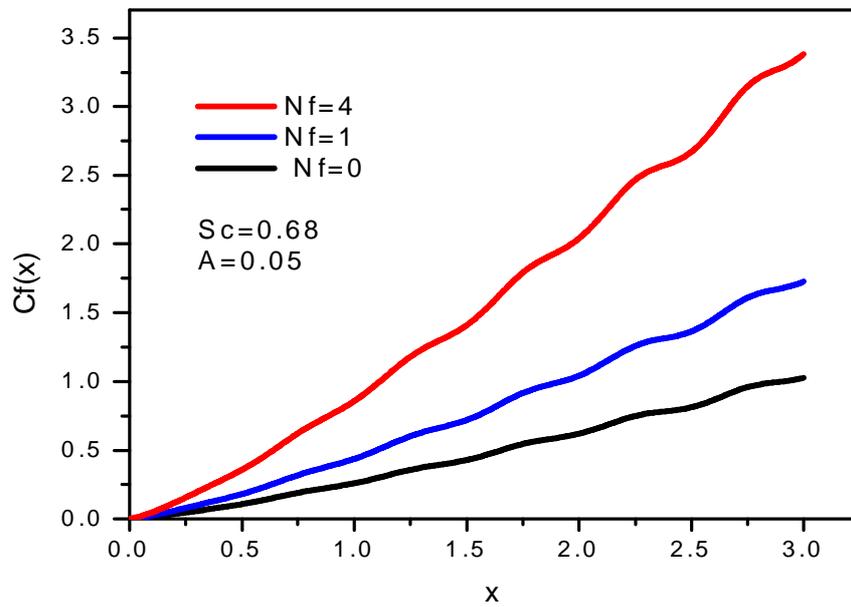


Figure 3.24 : Evolution du coefficient de frottement local le long de la paroi : Influence du rapport N_f

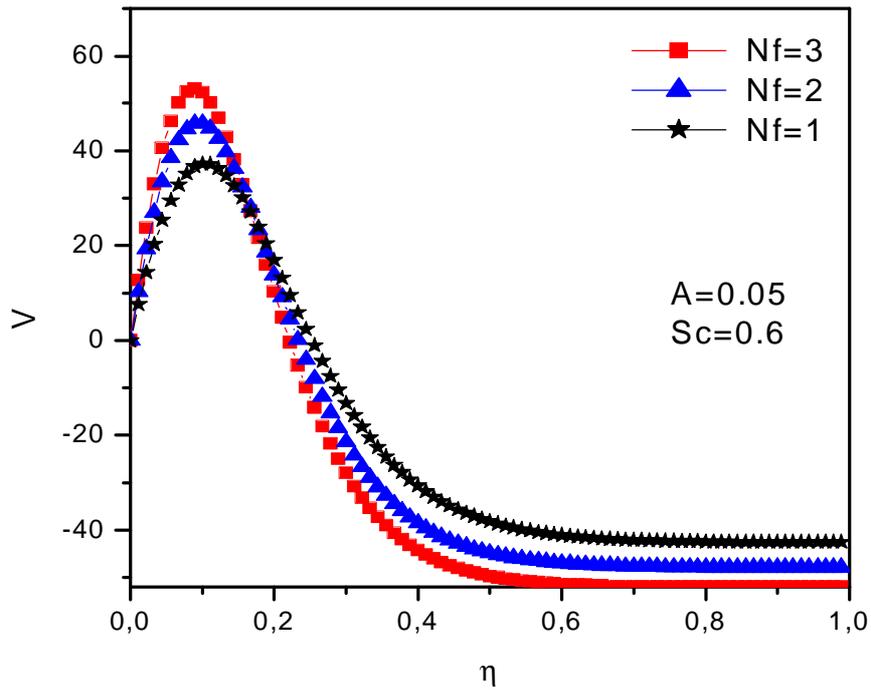


Figure 3.25 : Evolution de la composante V de la vitesse en fonction de η .
Influence du rapport N_f

III.5.2 Champs de températures et de concentrations

Les figures 3.26 et 3.27 représentent les profils des températures et des concentrations dans la couche limite pour différentes valeurs du rapport N_f . On remarque que l'épaisseur de la couche limite thermique et massique diminue quand le rapport N_f augmente. En effet, l'accroissement du rapport N_f engendre une augmentation de la convection naturelle massique qui provoque une diminution de la température et de la concentration du fluide dans la couche limite.

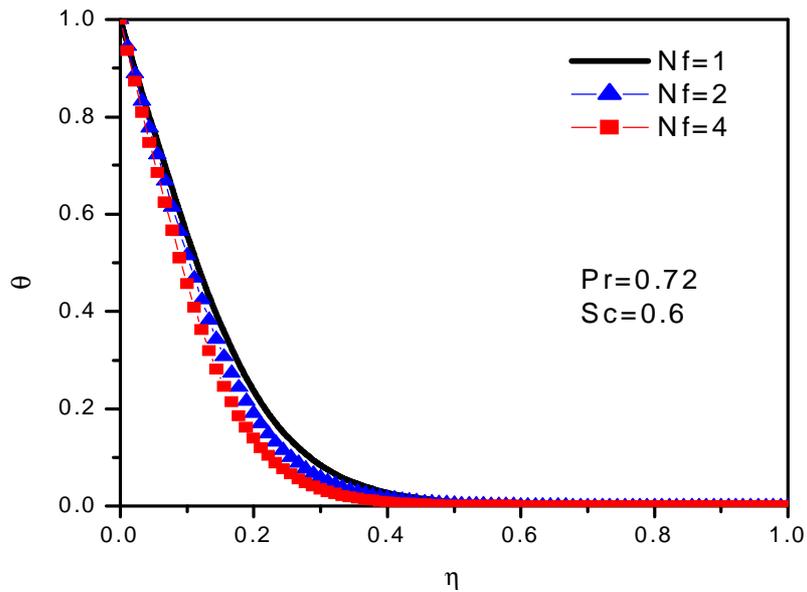


Figure 3.26 : Profils de la température dans la couche limite. Influence du rapport N_f

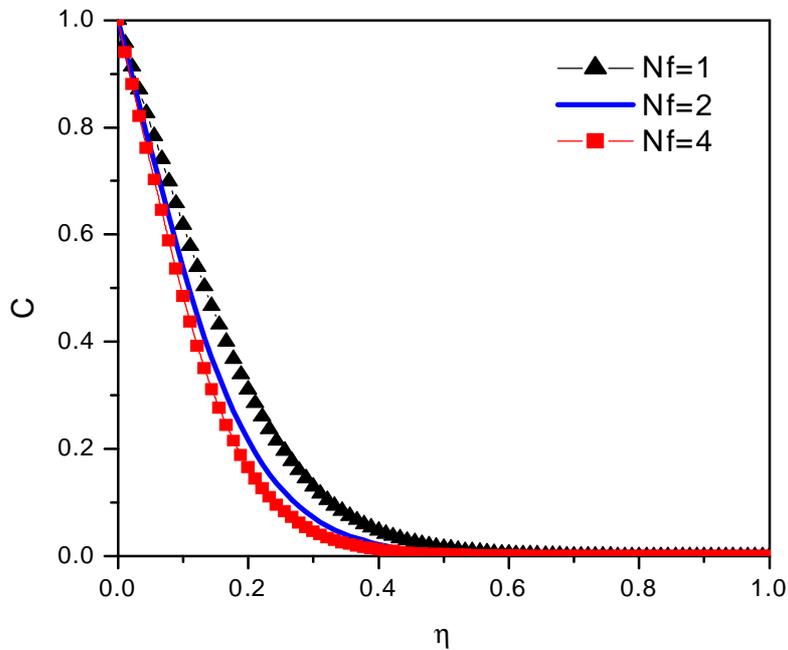


Figure 3.27 : Profils de la concentration dans la couche limite. Influence du rapport N_f

III.5.3 Nombres de Nusselt et de Sherwood

Les nombres locaux de Nusselt et de Sherwood augmentent avec le rapport entre les forces volumiques d'origine massique et celles d'origine thermique (figures 3.28-3.29). En effet, les grandeurs de transferts de chaleur et de masse dans la couche limite développée le long de la paroi du tronc de cône sont proportionnelles à la différence entre les températures et les concentrations de la paroi du milieu ambiant.

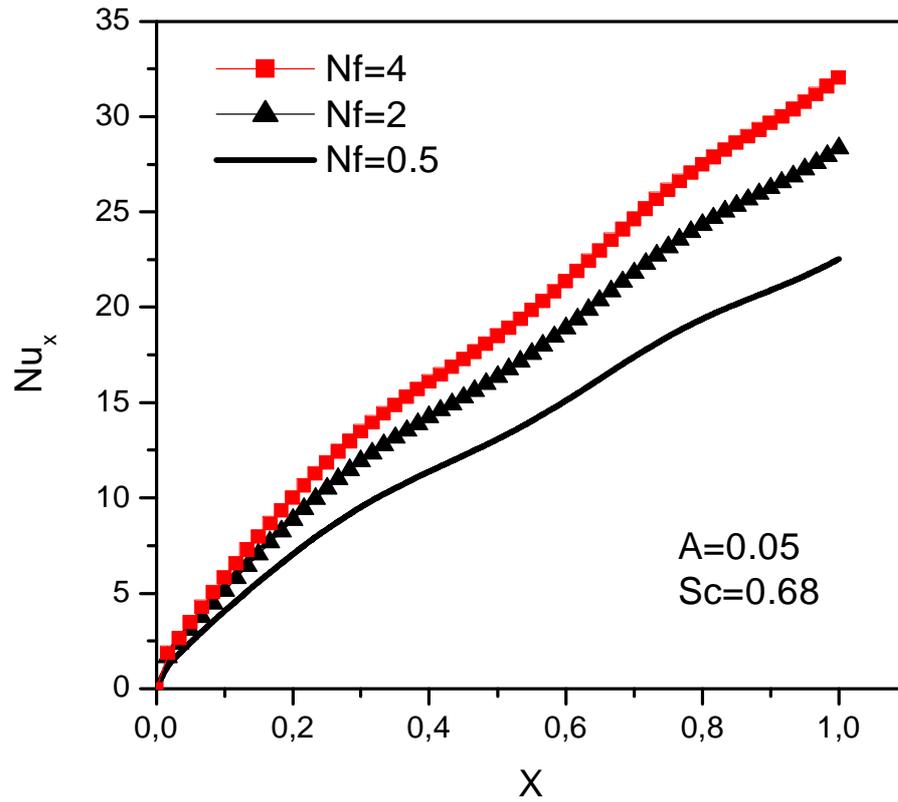


Figure 3.28 : Evolution du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du rapport N_f

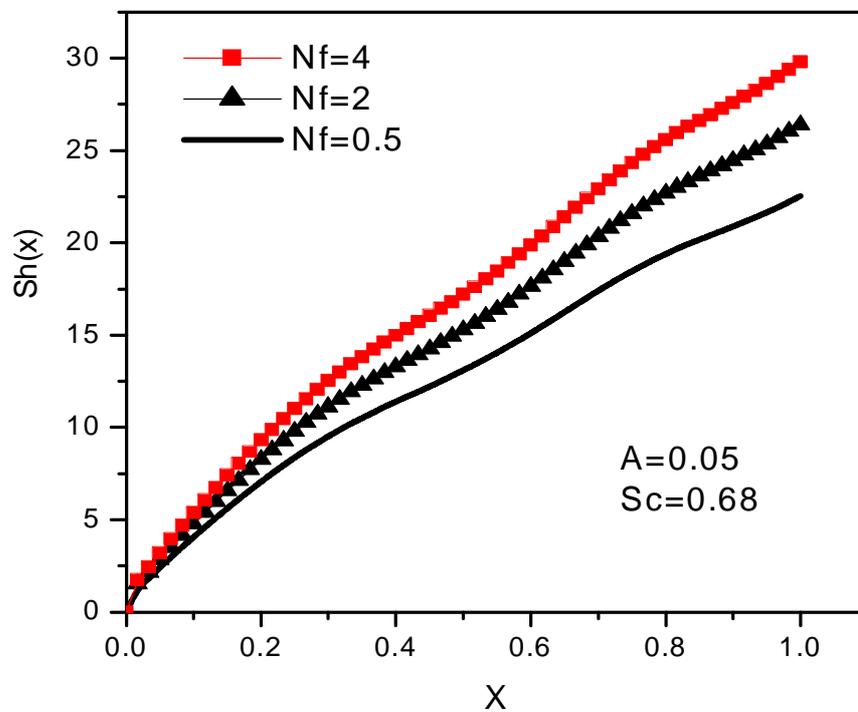


Figure 3.29 : Evolution du nombre de Sherwood local dans la couche limite. Influence du rapport N_f

III.5.4 Corrélations :

Nous avons établi des corrélations exprimant le nombre de Sherwood local et moyen en fonction du nombre de Rayleigh en appliquant la même procédure que celle développée lors de l'élaboration des corrélations du nombre de Nusselt local et moyen. Ainsi, nous supposons que pour un tronç de cône à paroi lisse, le nombre de Sherwood local obéit à l'expression suivante :

$$Sh(x) = P_1 Ra_c(x)^{n_1} \quad (3.10)$$

Avec $Ra_c(x)$: nombre de Rayleigh massique modifié défini par $Ra_c(x) = Sc Gr_c(x) \cos \varphi$

Le nombre de Sherwood moyen est défini par:

$$Sh_L = P_2 (Sc \cdot Gr_c(x))^{n_2} \quad (3.11)$$

Les constantes P_1 , n_1 , P_2 et n_2 sont déterminés en lissant, à l'aide de la technique des moindres carrée, les courbes représentant l'évolution des nombres de Sherwood en fonction du nombre de Rayleigh (figures 3.30-3.32). On obtient : $P_1=0.4758$, $n_1= 0.25$.

Pour un tronç de cône dont la surface de la paroi est décrite par une sinusoïde, les corrélations obtenues, en procédant comme pour le nombre de Nusselt, pour les nombres de Sherwood local et moyen vérifient les expression suivantes :

$$Sh_x = 0.4348A^{-0.077} (Sc \cdot Gr_c(x))^{0.238} \quad (3.12)$$

$$Sh_L = 0.433A^{-0.12} (Sc \cdot Gr_c(x))^{0.238} \quad (3.12)$$

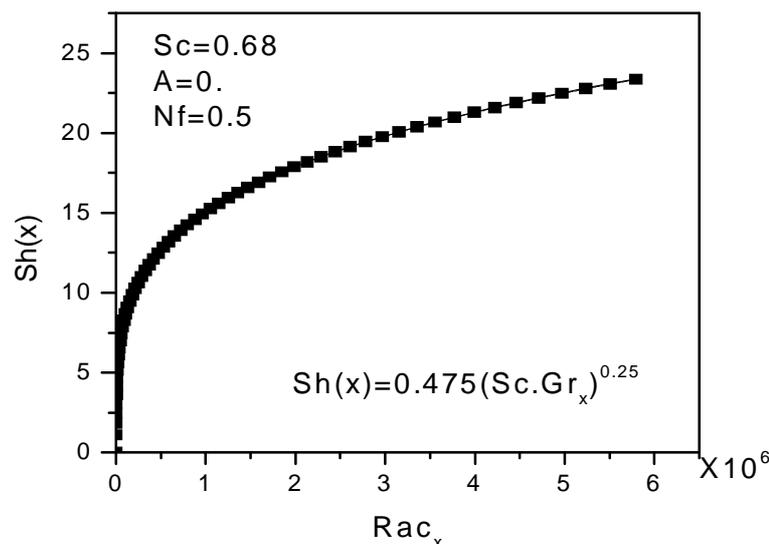


Figure 3.30 : Evolution du nombre de Sherwood local en fonction du nombre de Rayleigh massique, pour un tronç de cône à paroi lisse $A=0$.

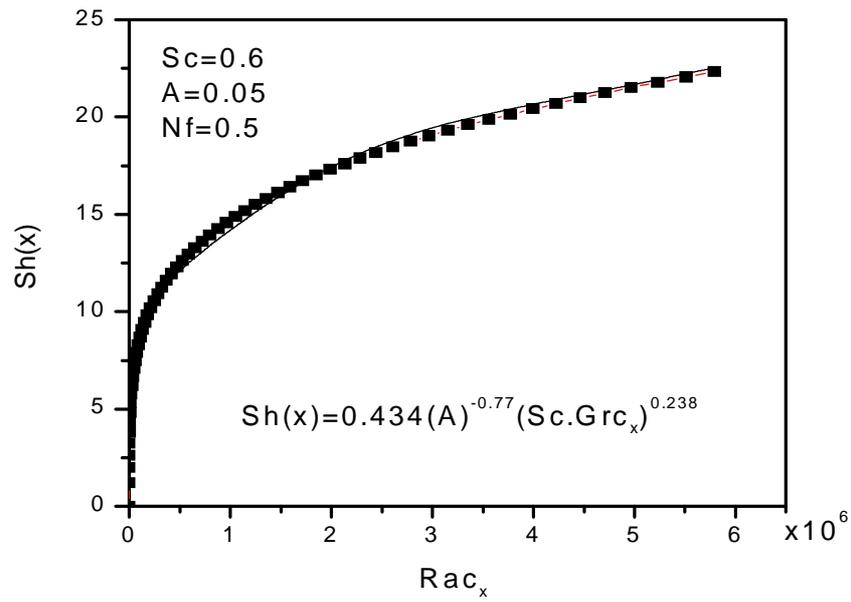


Figure 3.31 : Evolution du nombre de Sherwood local en fonction du nombre de Rayleigh massique pour $A \neq 0$.

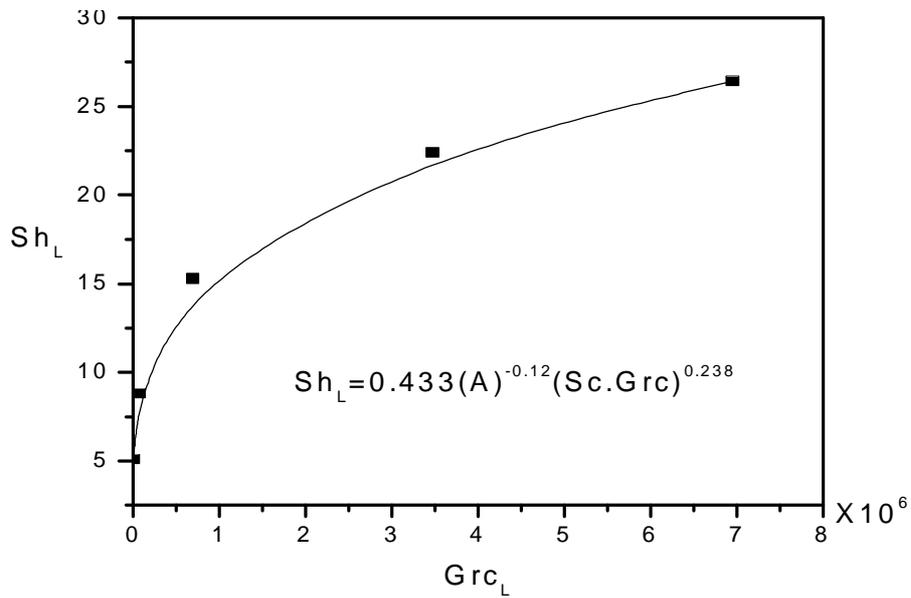


Figure 3.32 : Evolution du nombre de Sherwood moyen en fonction du nombre de Rayleigh massique pour $A \neq 0$

III.5.5 Isoconcentrations

La figure 3.33 représente les isoconcentrations pour un tronc de cône dont la surface est décrite par une fonction sinusoïdale. Ces isoconcentrations décrivent un profil similaire à celui des isothermes puisque pour la vapeur d'eau, les nombres de Prandtl et de Schmidt sont très voisins.

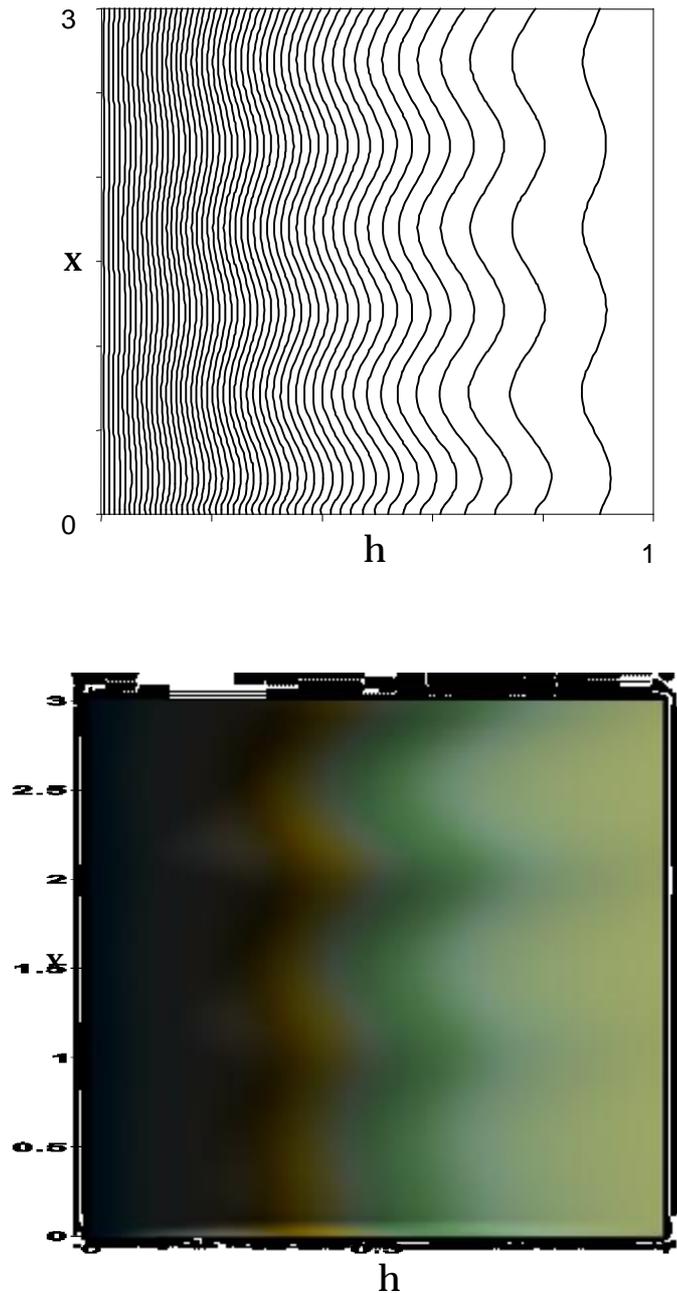


Figure 3.33 : Distribution des iso concentrations, cas d'un mélange air-vapeur, $Pr = 0.7$, $Sc = 0.62$

CONCLUSION GENERALE

L'étude présentée dans cette thèse a porté sur la convection naturelle thermique et massique se développant dans la couche limite entourant un tronc de cône à paroi sinusoïdale. Notre choix s'est portée sur un tronc de cône de longueur finie et dont la paroi est soumise à une température et à une concentration constantes.

Nous avons cherché à déterminer plus particulièrement les champs dynamique, thermique et massique. Les simulations sont faites pour des nombres de Grashof thermique et massique variant entre 10^4 et 10^8 pour que les transferts s'effectuent en régime laminaire et pour deux types de fluide l'eau et l'air.

Le domaine physique est transformé en un domaine rectangulaire en utilisant une transformation homotopique. Les équations de transfert de type couche limite et les conditions aux limites qui leurs sont associées ont été discrétisées avec une méthode implicite aux différences finies. Les systèmes d'équations algébriques ainsi obtenus ont été résolus par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Nous avons validé notre code de calcul par une étude comparative entre les champs de vitesses, de températures et des nombres de Nusselt locaux et moyen obtenus en considérant un tronc de cône à paroi lisse et ceux de la littérature.

L'augmentation de l'amplitude de la sinusoïde de la surface de la paroi du tronc de cône conduit, en général, à une diminution des nombres locaux et moyens de Nusselt et de Sherwood. L'accroissement du rapport entre les forces volumiques d'origine massique et celles d'origine thermique (N_f) entraîne une intensification des transferts. Nous avons établi des corrélations pour les nombres de Nusselt et de Sherwood en fonction du nombre de Rayleigh thermique et massique et en fonction de l'amplitude de la sinusoïde décrivant le profil de la paroi du tronc de cône.

Par ailleurs et pour conclure, notons que quelques extensions peuvent être donnée à notre travail, en se basant sur la même géométrie en en considérant différentes conditions de surface à savoir :

- paroi soumise à un flux de chaleur de densité constante
- écoulement en convection forcée laminaire ou turbulente
- Écoulement en convection naturelle turbulente

Une analyse expérimentale constitue un excellent moyen de validations de ces travaux.

REFERENCES

[1] **Cerisier P., Veyret D , and Rahal S.**

"Transferts de chaleur convectifs dans une enceinte rectangulaire inclinée avec trois parois imposées à des températures différentes", 8^{ème} Journées Internationales de Thermique., Marseille, 65-74, (1997).

[2] **Kitamura K. and Kimura F.**

"Heat transfer and fluid flow of natural convection adjacent to upward facing horizontal plates", Int. Journal of heat and mass transfer, Vol. 38, 3149-3159, (1995).

[3] **Heindel T.J, Incorpora.F and Ramadhyani S.**

"Enhancement of natural convection heat transfer from an array of discrete heat sources", Int. J. of heat and Mass transfer, Vol. 39, 479-490, (1996).

[4] **Leung C.W., Kang H.J. and Propert S.D.**

"Horizontal simulated printed circuit board assembly in fully development laminar flow convection", Applied Energy, Vol. 56, 71-91, (1997).

[5] **Nitin Darbh M. and Muralidar K.**

"Natural convection heat transfer from discrete protruding surface",
Int. Communication of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, 417-426, (1996).

[6] **Sarvar F., Witting P.A A and Poole N.J.**

"Examination of natural convection plumes from partially heated PCB plates and estimation of the heat transfer coefficients",
Journal of Electronic Material, Vol. 38, 573-577, (1993).

[7] **Incropera, F.P.**

"Convection heat transfer in electronic equipment cooling", Journal of Heat Transfer, **110**, 1097-1111, (1988).

[8] **Chiu, C.P. and Chou, H.M.,**

"Transient analysis of natural convection along a vertical wavy surface in micropolar fluids", Int. J. Engng. Sci. **32**, 19–33. (1994)

[9] **Pera L. and B.Gebhrart**

"Natural convection boundary layer flow over horizontal and slightly inclined surface", Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 16, 1131-1146, (1973).

[10] **Jaluria Y.**

"Interaction of natural convection wakes arising from thermal sources on a vertical surface", Journal of Heat Transfer, **107**, 883-892, (1985).

[11] **Bhavnani, S.H. and Bergles, A.E.**

"Effect of surface geometry and orientation on laminar natural convection heat transfer from a vertical flat plate with transverse roughness elements",

Int. J. of Heat and Mass Transfer, **33**, 965-981, (1990).

[12] **Jang J.H. and Yan W.M.**

"Transient analysis of heat and mass transfer by natural convection over a vertical wavy surface", Int. J. of heat and mass Transfer, Vol. **47**, 3695-3705, (2004).

[13] **Sushil H., Bhavani S.H and Bergles A.E,**

"Effect of surface geometry and orientation on laminar natural convection heat transfer from a vertical flat plate with transverse roughness elements",

Int. J. of Heat and Mass Transfer, **33**, 965-981, (1990).

[14] **Shakerin S., Bohn M. and Loehrck R.I.**

"Natural convection in an enclosure with discrete roughness element on a vertical heated wall", Int. J. of Heat and Mass Transfer, **31**, 1423-1430, (1988).

[15] **Jaluria Y.**

"Interaction of natural convection wakes arising from thermal sources on a vertical surface". Journal of Heat Transfer, **107**, 883-892, (1985).

[16] **Hossain M.A, Alam K.C. and Pop I.**

"Magneto-hydrodynamic free convection along a vertical wavy surface",

Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol. **1**, 555-566, (1997).

- [17] **Negny S., Meyer M. and Prevost M.**
"Study of a laminar falling film flowing over a wavy wall column: Part II. Experimental validation of hydrodynamic model",
Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, 2147-2154, (2001).
- [18] **Md. Mamun Molla, Md. Anwar Hossain and Lun Shin Ya**
"Natural convection flow along a vertical wavy surface with uniform surface temperature in presence of heat generation/absorption",
Int. Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, 157-163, (2004).
- [19] **Yao L.S.**
"Natural convection along a wavy surface". ASME J. Heat Transfer 105, 465-468, (1983).
- [20] **Yao L.S.**
"A note on Prandtl's transposition theorem". ASME J. Heat Transfer 110, 503-507, (1988).
- [21] **Jer-Huan J. ,Yan W.M. and L. Hui-Chung.**
"Natural convection heat and mass transfer along a vertical wavy surface",
Int. J. of heat and mass Transfer, Vol. 46, 1075-1083, (2003).
- [22] **Rahman S.U.**
"Natural convection along vertical wavy surfaces an experimental study".
Chemical Engineering Journal, Vol. 84, 587-591, (2001).
- [23] **Chi-Chang Wang and Cha'o-Kuang Chen**
"Mixed convection boundary layer flow of non-Newtonian fluids along vertical wavy plates", Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 23, 831-839, (2002).
- [24] **Prétot S., Zeghmami B. and Bresson J.**
"Influence of surface roughness on natural convection above a horizontal plate",
Advances in Engineering Software, Vol. 31, 793-801, (2000)
- [25] **Prétot S.**
"Contribution à l'étude de la convection naturelle au dessus de plaques horizontales de différentes topographies", Thèse de Docteur, Université de Franche Comté, (1999).

- [26] **Merk, H.J** and **Prins, J.A.**
"Thermal convection in laminar boundary layers",
 Int. Applied Sci. Research, Vol. **4**, 11-24, (1953).
- [27] **H. Abdurrachim**
"Etude théorique et expérimentale de la convection naturelle laminaire sure des surfaces ondulées", Thèse de Docteur es Sciences Physique, Université de Perpignan, (1980).
- [28] **NA T.Y.** and **Chiou P.**
"Laminar narural convection over a frustum of a cone", Applied Sci. Research,
 Vol. **35**, 409-421, (1979).
- [29] **Md. Anwar H., Md. Sazzad Munir** and **Pop I.**
"Natural convection with variable viscosity and thermal conductivity from a vertical wavy cone", Int. J. Therm. Sci., Vol. **40**, 437-443, (2001).
- [30] **Md. Anwar H., Md. Sazzad Muni** and **Pop I.**
"Natural convection flow of a viscous fluid with viscosity inversely proportional to linear function of temperature from a vertical wavy cone".
 Int. J. Therm. Sci., **40**, 366-371, (2000).
- [31] **Hering R.** and **Groch R.J.**
"Laminar free convection from a no-isothermal cone". Int. *J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. **5**, 1059-1067, (1962).
- [32] **Hering R.G.**
"Laminar free convection from a no-isothermal cone at low Prandtl numbers", Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. **8**, 1333-1337, (1965).
- [33] **Roy S.**
"Free convection from a vertical cone at high Prandtl numbers".
 J. of Heat Transfer, Trans ASME, Vol. **96** , 115-117, (1974).
- [34] **Pop, I.** and **Tsung-Yen Na**
"Natural convection over a vertical wavy frustum of a cone",
 Int J. Non-Linear Mechanics, Vol. **34**, 925-934, (1999).

- [35] **Gebhart B.**, "*Heat transfert*", 2nd edition, TATA Mc Graw Hill Pub Coy, Bobay, (1971).
- [36] **Schlichting H.**, "*Boundary layer Theory*", Mc Graw Hill, 4th ed., N.Y, (1960).
- [37] **Brown and Marco**, "*Introduction to heat transfer*", Int. Student Edition, Mc Graw Hill Book compagny, (1958).
- [38] **W.M. Kays and M. E. Crawford**
 "Convective heat and mass transfer", McGraw-Hill, U.S.A (1993)
- [39] **Giblin R.**, "Transmission de la chaleur par convection naturelle",
 Ed. Eyrolles, Paris, (1974).
- [40] **W.H Macadams**, "*Transmission de la chaleur*", Dunod, Paris, (1964).
- [41] **Saccadura J.F.** "*Initiation au transfert thermique*", Technique et documentation, Lavoisier, (1982).
- [42] **Schlichting H.**, "*Boundary layer theory*", Mac Graw Hill Book compagny, 6^{eme} édition, (1968).
- [43] **Andarson, Tannehill and Pletcher**,
 "*Computational fluid mechanics and heat transfer*", Hemisphere Publishing corporation, (1984).
- [44] **S.V Patankar., C.H Liu and E.M. Sparrow**
 "Fully developed flow and heat transfer in ducts having streamwise periodic variations of cross-sectional area", J. of Heat Transfer, Vol. **99**, 180-186, (1997)
- [45] **S.V. Patankar** "*Numerical heat transfer and fluid flow*",
 Hemisphere Publishing Corporation, Mc Graw Hill Book Company, (1980).
- [46] **Winowycz, Sparrow, Schneider and Pletcher**, "*Handbook and numerical heat transfer*", Willy Int. Science, (1988).

[47] **Nogotov E.F.**, "*Application of numerical heat transfer*", Mc Graw Hill book Company, New York (1978).

[48] **Cebeci T., Bradshaw P.**, "Physical computational aspects of convective heat transfer", Springer Verlag, New York, (1984).

[49] **Gordan A., and Boumahrat M.**, "*Méthodes numériques appliquées*", Office des publications Universitaires", Algérie, (1991).

[50] **Braun H.H., Ostrich S. and Heigway J.E.**, "*Free convection similarity flows about two-dimensional and axisymmetric bodies with closed lower ends*", Int. J. of Heat and Mass Transfer , Vol. **2**, 121-135, (1961).

[51] **Demidovitch B., Maron I.**, "*Elément de calcul numérique*", Edition Mir, Moscou, (1978).

ANNEXE A

EQUATIONS DE BASE DE LA CONVECTION NATURELLE

A.1 CONVECTION NATURELLE THERMIQUE

La convection naturelle ou libre est la forme d'échange convective le plus couramment observé. Au contact d'un corps chaud, la température du fluide augmente et sa masse volumique décroît. Le fluide ambiant, de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, la masse du fluide chaud s'élève en enlevant de la chaleur au corps. Le même phénomène peut s'observer pour des corps froids, le mouvement s'effectue en sens inverse.

A.2 CONVECTION NATURELLE MASSIQUE

Les fluides peuvent être des mélanges de plusieurs espèces. Par exemple :

- réacteur chimique : plusieurs espèces réagissent chimiquement ; il s'agit principalement de la convection massique forcée.
- moteur à combustion : un mélange réactif air - carburant.
- chaudière : eau en ébullition, soit un mélange eau - gaz.
- fumée industrielle : mélange de polluants (gaz, gouttes ou particules).

A.3 EQUATIONS GENERALES DE LA CONVECTION NATURELLE

En convection naturelle, le transfert d'impulsion est couplé au transfert de chaleur ou de matière. En d'autres termes, l'équation du mouvement ne peut pas être résolue indépendamment de l'équation de la chaleur ou de la matière.

Ecrivons les équations fondamentales de conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie et de la matière d'un fluide en supposant, comme, dans de notre travail, la convection résulte soit d'une variation de la masse volumique produite par une différence de température du fluide ou d'un gradient de la concentration des constituants de ce fluide.

- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{A1})$$

- Equation du mouvement

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{\nabla} \vec{V}) \right] = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \left(\mu \vec{\nabla} \vec{V} \right) + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{V}) \quad (\text{A2})$$

- Equation de l'énergie

$$\rho \left[\frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) E \right] = \underbrace{\vec{\nabla}(\kappa \vec{\nabla} T)}_{(1)} + \underbrace{Q}_{(2)} - \underbrace{P}_{(3)} - \underbrace{P \vec{\nabla} \vec{V}}_{(4)} + \underbrace{\Phi}_{(5)} \quad (\text{A3})$$

Les termes (1) à (5) désignent respectivement la variation de l'énergie interne, la densité du flux de chaleur par conduction, la densité du flux de chaleur générée par les sources de chaleur, l'effet de la pression et les pertes de chaleur par effet visqueux.

- Equation de transfert de masse

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) c = \vec{\nabla}(D \vec{\nabla} c) \quad (\text{A4})$$

Dans la plupart des cas usuels, les propriétés physiques μ , κ , D peuvent être considérés comme constantes. En outre, les équations (A1)-(A4) peuvent faire l'objet de simplifications lorsque le fluide est incompressible, c'est à dire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq [41]. Sous ces simplifications, les équations précédentes deviennent :

$$\vec{\nabla} \vec{V} = 0 \quad (\text{A5})$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\vec{\nabla} \vec{V}) \right] = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{V}) \quad (\text{A6})$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) E \right\} = \kappa \Delta T + Q - P \vec{\nabla} \vec{V} + \Phi \quad (\text{A7})$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) c = D \Delta c \quad (\text{A8})$$

Etant donné que :

$$\rho \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}) E \right\} = \rho \frac{dE}{dt} \quad (\text{A9})$$

L'équation de l'énergie devient alors :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \kappa \Delta T + Q - P \vec{\nabla} \vec{V} + \Phi \quad (\text{A10})$$

Introduisons l'enthalpie par unité de masse du fluide :

$$H = E + \frac{P}{\rho} \quad (\text{A11})$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \rho \frac{dH}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (\text{A12})$$

L'enthalpie étant fonction de P et de T, on a :

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt} \quad (\text{A13})$$

En introduisant, les relations thermodynamiques suivantes :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = C_p \quad ; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_P = \frac{1}{\rho} (1 - T\beta_T) \quad ; \quad \beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{A14})$$

Et en remplaçant, les expressions (A14) dans l'équation (A13), on obtient :

$$\frac{dH}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} (1 - T\beta_T) \frac{dP}{dt} \quad (\text{A15})$$

A l'aide de l'expression (A14), l'équation (A12) se réduit à :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - T\beta_T \frac{dP}{dt} \quad (\text{A16})$$

La forme de l'équation de l'énergie est donc :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} T) + Q + \beta_T T \frac{dP}{dt} + \Phi \quad (\text{A17})$$

Nous pouvons faire d'autres approximations sur l'équation du mouvement (A6) et de la chaleur (A17). On considère que l'écoulement est permanent, l'absence de source de chaleur dans le fluide, les termes de dissipation visqueuse et de travail de la pression sont négligeables. Les équations de transfert se réduisent à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{A18})$$

$$\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{A19})$$

$$\rho C_p (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \kappa \Delta T \quad (\text{A20})$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) c = D \Delta c \quad (\text{A21})$$

A.4 EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE EN CONVECTION NATURELLE

Dans le cadre des hypothèses de couche limites, les équations de la convection naturelle bidimensionnelle pour un écoulement laminaire externe sur une surface de géométrie à symétrie axiale sont exprimées par les équations de la couche limite. A savoir, l'équation de continuité, la projection de l'équation du mouvement suivant Ox , l'équation de la chaleur et l'équation de la diffusion convective de l'espèce diffusante.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A22})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g_x \quad (\text{A23})$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{A24})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (\text{A25})$$

Le système de coordonnées Oxy est représenté sur la figure 1.1. Les composantes de la vitesse u et v sont dirigées respectivement suivant les axes x et y . L'origine du repère est située au sommet du cône. Pour une couche limite en convection naturelle, le gradient de pression suivant y est nulle, la pression total p est égale à la pression du fluide au repos, c'est-à-dire à la pression statique P_s . La dérivation par rapport à x de la pression est exprimée par :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_s}{dx} = \rho_e g_x \quad (\text{A26})$$

L'équation du mouvement devient :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\rho - \rho_e) g_x \quad (\text{A27})$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation traduit la différence entre la densité volumique locale et celle de l'écoulement potentiel et peut être calculée à l'aide de l'approximation de Boussinesq :

$$(\rho - \rho_e) = -\rho_e \beta_t (T - T_e) - \rho_e \beta_c (c - c_e) \quad (\text{A28})$$

Ainsi, l'équation du mouvement suivant Ox , se transforme à :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho_e \beta_T (T - T_e) g_x - \rho_e \beta_c (c - c_e) g_x \quad (\text{A29})$$

A.5. EPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE

A.5.1. Hypothèses et mise en équations

Dans ce paragraphe, nous allons analyser l'effet de quelques grandeurs physiques sur l'épaisseur de la couche limite dans le cas d'un transfert thermique le long d'une plaque plane verticale chauffée, placée dans un fluide newtonien. Au voisinage de la plaque, deux couches limites dynamique et thermique se développent. Elles ont respectivement pour épaisseur $\delta(x)$ et $\delta_t(x)$, supposées très petites devant la longueur L de la plaque.

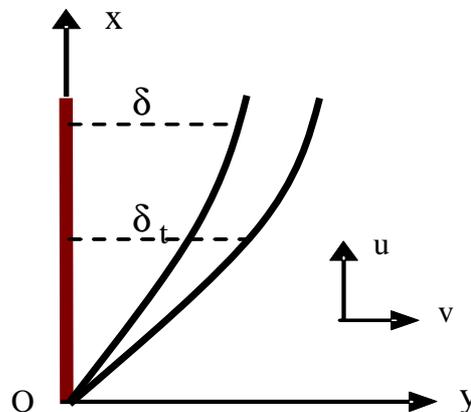


Figure A1 : Couches limites dynamique et thermique

Soit Oxy un repère cartésien dont l'origine est située au bord d'attaque de la plaque. En posant $\Delta = \delta/L, \Delta_t = \delta_t/L$, les études théoriques et les observations expérimentales ont montré que pour une couche limite Δ et Δ_t sont très petites devant l'unité.

A.5.2 Quelques ordres de grandeurs

On considère une convection naturelle thermique se développant le long d'une paroi verticale. Sous l'approximation de Boussinesq, les équations de transfert s'écrivent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (A30)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta (T - T_\infty) \quad (A31)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (A32)$$

Les champs dynamiques et thermiques sont déduits de la résolution des équations A30-A32. Nous avons trois grandeurs à évaluer u , v et T . Posons δ_t est l'épaisseur de la zone non isotherme où le fluide est soumis aux forces de poussée d'Archimède ; u_c et v_c les ordres de grandeur des composantes longitudinale et transversale de la vitesse dans la couche limite.

En remplaçant ces ordres de grandeurs de vitesses dans l'équation de continuité (A30), on obtient :

$$\frac{v_c}{\delta_t} \approx \frac{u_c}{L} \quad (A33)$$

L'égalité ci-dessus montre que les deux termes du premier membre de l'équation de l'énergie (A32) sont du même ordre :

$$\frac{v_c}{\delta_t} \Delta T \approx \frac{u_c}{L} \Delta T \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \quad (A34)$$

Cette dernière égalité permet d'établir deux relations entre u_c , v_c et δ_t :

$$u_c \delta_t^2 \approx \alpha L \text{ et } v_c \delta_t \approx \alpha \quad (\text{A35})$$

Maintenant, il nous reste à trouver les expressions des ordres de grandeurs des composantes de la vitesse et de l'épaisseur de la couche limite, en se basant sur l'équation du mouvement (A31), soit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{A36})$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_c^2/L & u_c v_c / \delta_t & \nu u_c / \delta_t^2 & g\beta\Delta T \end{array}$$

En divisant les deux membres de cette équation par $\nu u_c / \delta_t^2$ et en tenant compte des relations (A35), on obtient :

$$\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr} \approx 1 + \frac{g\beta\Delta T^2}{\nu u_c} \quad (\text{A37})$$

Trois cas distincts se présentent et peuvent être envisagés selon la valeur du nombre de Prandtl du fluide.

A.5.2.1 Fluides aux très petits nombres de Prandtl

Cette situation concerne les fluides très peu visqueux ou bon conducteurs de la chaleur, par exemple, cas des métaux liquides. Les forces d'inertie sont très grandes comparées aux forces de viscosité. Ce sont donc les forces d'inertie qui équilibrent les forces de poussées d'Archimède. Par conséquent, nous pouvons déduire de l'équation (A36) :

$$\frac{u_c^2}{L} = g\beta\Delta T \quad (\text{A38})$$

Soit :

$$u_c^2 \approx \frac{g\beta\Delta T L^3}{\alpha l} \frac{\nu \alpha^2}{\alpha L} \quad (\text{A39})$$

On obtient donc l'ordre de grandeur des trois inconnues principales, à savoir :

$$\begin{cases} u_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/2} \\ v_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/4} \\ \delta_t = L(\text{Pr.Gr})^{-1/4} \end{cases} \quad (\text{A40})$$

On déduit aussi que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme [41] :

$$\text{Nu} \approx (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{1/4} \quad (\text{A41})$$

Notons qu'il existe une grande différence entre la convection naturelle et la convection forcée. En convection naturelle, les forces de poussée d'Archimède existent tant qu'il y a un gradient de température. C'est-à-dire, l'épaisseur de la couche limite dynamique δ est au moins égale à celle de couche limite thermique. Or, les effets visqueux étant négligeables, on ne peut pas s'attendre à une extension supplémentaire de la couche limite dynamique, par conséquent $\delta = \delta_t$.

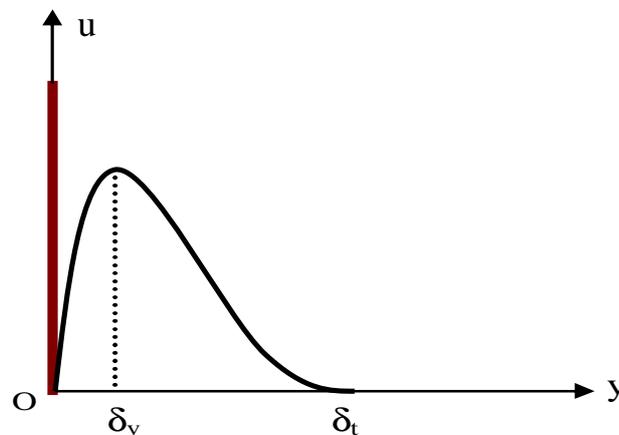


Figure A2 : Variation de la vitesse longitudinale dans la couche limite dynamique

Par contre, au voisinage de la paroi, les effets de la viscosité ne peuvent plus être négligés. On peut admettre alors l'existence d'une sous couche visqueuse, dont l'épaisseur δ_v , correspond approximativement à la zone comprise entre la paroi et le maximum de vitesse. Dans cette région, où l'on a équilibre entre les forces volumiques de viscosité et de poussée d'Archimède, on écrit :

$$\frac{\nu u_c}{\delta_v} \approx g \beta \Delta T \quad (\text{A42})$$

Et avec l'ordre de grandeur de u_c , donné en (A40), on obtient :

$$\delta_v^2 = L \text{Pr}^{1/4} \text{Gr}^{-1/4} \quad (\text{A43})$$

Ainsi,

$$\delta_v = \delta_t \text{Pr}^{1/2} \quad (\text{A44})$$

Cette abscisse δ_v fixe l'ordre de grandeur de la distance du point de vitesse maximale par rapport à la paroi.

A.5.2.2 Fluides aux nombres de Prandtl de l'ordre de l'unité

Dans ce cas, les couches limites thermiques et dynamiques sont des mêmes ordres de grandeur. Ni les effets d'inertie, ni les effets de viscosité dominent les phénomènes, il en résulte que :

$$\begin{cases} u_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/2} \\ v_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/4} \\ \delta_c = \delta_t = L(\text{Pr.Gr})^{-1/4} \end{cases} \quad (\text{A45})$$

Le nombre de Nusselt a pour ordre de Grandeur :

$$\text{Nu} \approx (\text{Pr.Gr})^{1/4} \quad (\text{A46})$$

A.5.2.3 Fluides aux grands nombres de Prandtl.

Ce cas concerne les fluides très visqueux. Pour de tels fluides, le bilan de quantité de mouvement indique que les forces d'inertie qui sont inversement proportionnelle au nombre de Prandtl Pr deviennent négligeables. Donc, il y'a équilibre entre les forces volumiques dues à la poussée d'Archimède et celles engendrées par la viscosité du fluide.

$$v_c \frac{u_c}{\delta_t^2} \approx g\beta \Delta T \quad (\text{A47})$$

Dans ces conditions et en tenant compte des relations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} u_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/2} \\ v_c = \frac{\alpha}{L} (\text{Pr.Gr})^{1/4} \\ \delta_t = L(\text{Pr.Gr})^{-1/4} \end{cases} \quad (\text{A48})$$

Pour les fluides caractérisés par de grands nombres de Prandtl, l'épaisseur de la couche limite dynamique (δ) est supérieure à celle de la couche limite thermique (δ_t) en raison de l'importance des effets de la viscosité. Le mouvement qui se déroulerait dans la zone externe à la couche limite thermique (zone isotherme), ne peut être régi que par l'équilibre entre les forces d'inertie et de viscosité. Ainsi, on :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_c^2}{L} \approx \nu \frac{u_c}{\delta^2} \\ \delta^2 \approx \frac{\nu}{\alpha} L^2 (\text{Pr.Gr})^{-1/2} \\ \delta \approx \delta_t \text{Pr}^{1/2} \end{array} \right. \quad (\text{A49})$$

Notons que dans le cas d'un transfert thermique et massique, on peut déduire avec le même raisonnement décrit dans les étapes précédentes que les grandeurs caractérisant la couche limite massique dépendent du nombre de Schmidt et du nombre de Grashof massique, étant donné que les équations de l'énergie et du transfert de masse sont similaires.

ANNEXE B

COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

B1. TRANSFORMATION HOMOTOPIQUE

La transformation homotopique consiste à transformer une courbe curviligne en une droite par changement de systèmes de coordonnées. Dans notre cas, on passe d'un système de coordonnées physique cartésien OXY à un nouveau système de coordonnées de calcul O ζ η . Sous forme adimensionnelle, cette transformation est définie par :

Expressions de (ζ, η) en fonction de (X,Y)

(X, Y) \rightarrow (ξ, η) :

$$\zeta = X + 0.Y \quad ; \quad \eta = \frac{Y - F_1(\xi)}{F_2(\xi) - F_1(\xi)} \quad ; \quad \eta = [0-1] \quad (B1)$$

Expressions de (X,Y) en fonction de (ζ, η)

(ξ, η) \rightarrow (X, Y) :

$$X = \xi \quad Y = (1 - \eta)F_1(\xi) + \eta F_2(\xi) \quad (B2)$$

Dérivées partielles de (X,Y) par rapport à (x, η)

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0 \quad (B3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \eta [F_2'(\xi) - F_1'(\xi)] + F_1'(\xi) \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = [F_2(\xi) - F_1(\xi)] \quad (B4)$$

Dérivées partielles de (x, η) par rapport à (X,Y)

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial Y} = 0 \quad (B5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{(\eta - 1) \cdot F_1'(\xi) - \eta \cdot F_2'(\xi)}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]} \quad (B6)$$

Dérivées partielles par rapport à X

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(\eta-1) \cdot F_1'(\xi) - \eta \cdot F_2'(\xi)}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (B7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial X} \right) = \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \quad (B8)$$

$$A = \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} + B \frac{\partial}{\partial \eta} ; \quad B = \frac{\eta[F_1'(\xi) - F_2'(\xi)] - F_1'(\xi)}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]} \quad (B9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2B \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + B^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (B10)$$

Dérivées partielles par rapport à Y

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (B11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial}{\partial Y} \right) = \frac{1}{[F_2(\xi) - F_1(\xi)]^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (B12)$$

Cas particuliers

Pour notre système physique, les fonctions $F_1(X)$ et $F_2(X)$ sont définies par :

$$F_1(X) = F(X) = A \sin(2\pi X) ; \quad F_2(X) = g(X) = bX^{1/4} \quad (B13)$$

D'où les relations de dépendance entre les coordonnées cartésiennes XY dans le domaine physique et les coordonnées $\xi\eta$ dans le domaine de calcul.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = X \\ \eta = \frac{Y - F(X)}{g(X) - F(X)} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \xi \\ Y = (1 - \eta)F(\xi) + \eta \cdot g(\xi) \end{array} \right. \quad (B14)$$

Ce développement permet de transformer les équations de bilan et les conditions aux limites correspondantes d'un système de coordonnées physique OXY vers un système de coordonnées de calcul O $\xi\eta$.

B2. METHODE DE SIMPSON

Les expressions sous forme intégrale (1.61)-(1.63), portant sur le coefficient de frottement, le nombres de Nusselt et de Sherwood, moyens, sont calculées à l'aide de la formule de Simpson [51]. Cette technique donne la valeur approchée de l'intégrale d'une fonction $y = f(x)$ sur une intervalle $[a,b]$, conformément à la figure B1 .

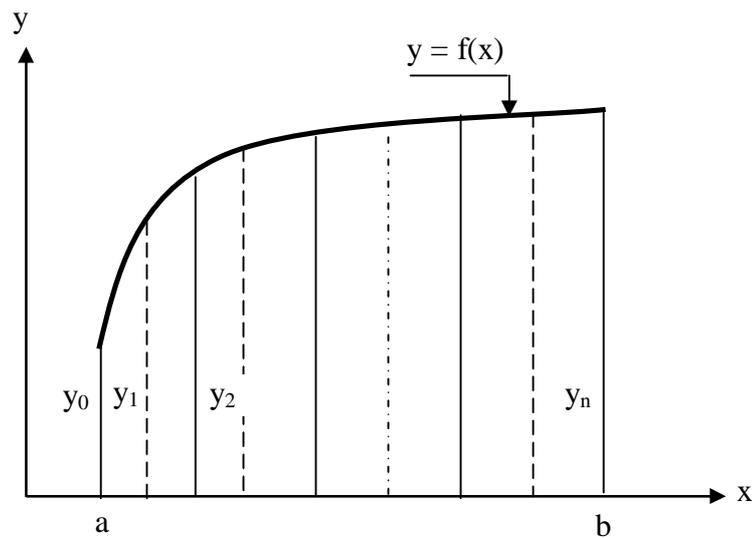


Figure B1 : Calcul d'une intégrale sur un intervalle (a, b) suivant la méthode de Simpson (n = entier, pair)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3} [f(0) + f(n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \quad (B15)$$

$$\sigma_1 = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(n-1) \quad (B16)$$

$$\sigma_2 = f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(n-2) \quad (B17)$$

Le segment $[a, b]$ est divisé en un nombre pair d'intervalles de longueur $\Delta x = (b - a)/n$. Appliquant la relation (B15) à l'équation (1.62) du chapitre 1, on obtient :

$$\overline{Nu} = \frac{\int_a^b \alpha(\xi) \cdot Nu(\xi) d\xi}{\int_a^b \alpha(\xi) d\xi} = \frac{\alpha(1) \cdot Nu(1) + \alpha(n) \cdot Nu(n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2}{\alpha(1) + \alpha(n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2} \quad (B18)$$

$$\left. \begin{aligned}
 s_1 &= \alpha(1) \cdot \text{Nu}(1) + \alpha(3) \cdot \text{Nu}(3) + \alpha(5) \cdot \text{Nu}(5) + \dots + \alpha(n-1) \cdot \text{Nu}(n-1) \\
 s_1' &= \alpha(1) + \alpha(3) + \alpha(5) + \dots + \alpha(n-1) \\
 s_2 &= \alpha(2) \cdot \text{Nu}(2) + \alpha(4) \cdot \text{Nu}(4) + \alpha(6) \cdot \text{Nu}(6) + \dots + \alpha(n-2) \cdot \text{Nu}(n-2) \\
 s_2' &= \alpha(2) + \alpha(4) + \alpha(6) + \dots + \alpha(n-2)
 \end{aligned} \right\} \text{(B19)}$$

Ou

$$\alpha = \sqrt{1 + F_x^2} \quad \text{et} \quad F_\xi = \frac{dF(\xi)}{d\xi}$$

De la même manière, on calcule les expressions du coefficient de frottement $\overline{\text{Cf}}_p$ et du nombre de Sherwood $\overline{\text{Sh}}_p$, données respectivement par (1.61) et (1.63).

B3. DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'application du théorème de Taylor à la fonction $\Phi(x,y)$, aux points $(x,\Delta y)$, $(x,2\Delta y)$ et au voisinage du point $(x,0)$ donne :

$$\Phi(x, \Delta y) = \Phi(x,0) + \Delta y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \varepsilon_1 (\Delta y)^2 \quad \text{(B19)}$$

$$\Phi(x, 2\Delta y) = \Phi(x,0) + 2\Delta y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{(2\Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \varepsilon_2 (2\Delta y)^2 \quad \text{(B20)}$$

Le terme $\partial^2 \Phi / \partial y^2$ déduit des deux expressions ci-dessus est exprimé par :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{2(\Phi(x, \Delta y) - \Phi(x,0))}{(\Delta y)^2} - \frac{2}{\Delta y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{(B21)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{(\Phi(x, 2\Delta y) - \Phi(x,0))}{2(\Delta y)^2} - \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{(B22)}$$

Ces deux expressions étant égales, par conséquent :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\Delta y}{2} \frac{(\Phi(x, 2\Delta y) - 4\Phi(x, \Delta y) + 3\Phi(x, 0))}{(\Delta y)^2} \quad \text{(B23)}$$

Soit :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\Phi(x, 2\Delta y) - 4\Phi(x, \Delta y) + 3\Phi(x, 0)}{2\Delta y} \quad (\text{B24})$$

Or, nous avons affecté à la position $y = 0$ l'indice $j = 1$, les positions $y = \Delta y$ et $y = 2\Delta y$ portent respectivement les indices 2 et 3. L'expression (B24) devient :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{-3\Phi_1^i + 4\Phi_2^i - \Phi_3^i}{2\Delta y} \quad (\text{B25})$$

Pour calculer les nombres locaux de Nusselt Nu_x , de Sherwood Sh_x et le coefficient de frottement local Cf_x , nous appliquons l'expression (B25) aux relations (1.44), (1.48), (1.53) du premier chapitre où la fonction Φ est remplacée par U , θ et C et la coordonnée y par la normale n à la surface ondulée.

ANNEXE C

ANALYSE GEOMETRIQUE DE LA SURFACE D'ETUDE

Cette annexe est consacrée à quelques rappels sur la géométrie d'un cône d'axe vertical dont la surface est affectée d'ondulations sinusoïdales (figure C1). Nous conservons un système de coordonnées cartésiennes. Pour cette configuration, à symétrie de révolution, nous devons déterminer le rayon r en fonction des paramètres de la surface sinusoïdale. La grandeur r désigne la projection d'un point de la surface sur l'axe de symétrie.

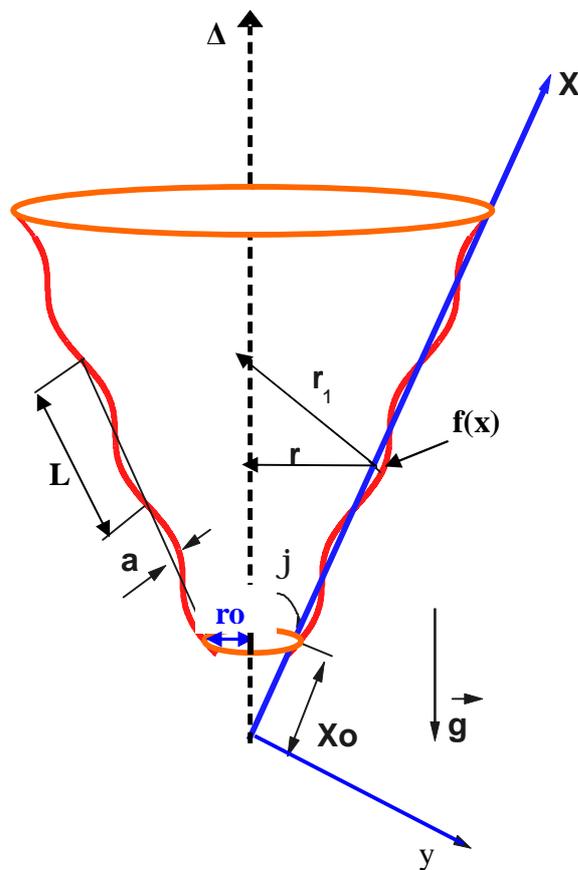


Figure C1 : paramètres géométriques d'un tronc de cône à surface ondulée de profil sinusoïdal

C-1 DISTANCE RADIALE D'UN POINT DE LA SURFACE A L'AXE DE SYMETRIE

En se basant sur la figure C1:

$$r = [f(x) + r_1] \cos \varphi \quad ; \quad r_1 = x \cdot \tan \varphi \quad (C1)$$

En combinant les équations C.1 et C.2, on déduit que :

$$r = x \sin \varphi + f \cos \varphi \quad (C2)$$

Etant donné que $x \geq x_0$, on a :

$$r = r(x) = r_0 + (x - x_0) \cdot \sin \varphi + f \cdot \cos \varphi \quad (C3)$$

Où f est une fonction sinusoïdale qui décrit le profil de la surface de la paroi du tronc de cône.

$$f(x) = a \cdot \sin \left(\frac{2\pi(x - x_0)}{L} \right) \quad (C4)$$

C.2 VECTEUR UNITAIRE NORMAL A LA SURFACE DU CONE DANS LE SYSTEME CARTESIEN OXY

La surface ondulée est définie par la grandeur $\eta(X, Y) = 0$. Le vecteur unitaire normal à cette surface est exprimée par :

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{\nabla} \eta}{|\vec{\nabla} \eta|} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \vec{j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y}\right)^2}} \quad (C5)$$

$$\vec{u}_n = \frac{\eta_x \vec{i} + \eta_y \vec{j}}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}} \quad (C6)$$

$$\xi = X \rightarrow \begin{cases} \xi_X = 1 \\ \xi_Y = 0 \end{cases} \quad (C7)$$

$$\eta = \frac{Y - F(X)}{bX^{1/4} - F(X)} \rightarrow \begin{cases} \eta_X = -\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \left[F'(X) + \eta \left(\frac{1}{4} bX^{-3/4} - F'(X) \right) \right] \\ \eta_Y = \frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \end{cases} \quad (C8)$$

$$\vec{u}_n = \frac{- \left[F' + \eta \left(\frac{1}{4} bX^{-3/4} - F' \right) \right] \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{\left[F' + \eta \left(\frac{1}{4} bX^{-3/4} - F' \right) \right]^2 + 1}} \quad (C9)$$

Le vecteur unitaire normal à la surface ondulée correspond à $\eta = 0$, soit :

$$\vec{u}_n (\eta = 0) = \frac{-F' \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{F'^2 + 1}} \quad (C10)$$

L'angle β_{nx} formé par la normale à la surface ondulée et l'axe X est définie par :

$$\operatorname{tg} \beta_{nx} = \left[\frac{\eta_y}{\eta_x} \right]_{\eta=0} = -\frac{1}{\frac{dF}{dX}} = -\frac{1}{F'} \quad (C11)$$

C.3 DERIVEE PAR RAPPORT A LA NORMALE DE LA SURFACE DU TRONC DE CONE

Considérons une fonction adimensionnelle $G(M)$ ou G pouvant désigner la grandeur physique scalaire : température θ ou concentration C . La dérivée par rapport à la normale de la surface du cône peut être calculée de la manière suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{\partial G}{\partial X} \frac{dX}{dN} + \frac{\partial G}{\partial Y} \frac{dY}{dN} = \frac{\partial G}{\partial X} \cos \beta_{nx} + \frac{\partial G}{\partial Y} \sin \beta_{nx} \quad (C12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right) \cos \beta_{nx} + \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right) \sin \beta_{nx} \quad (C13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right) \cos \beta_{nx} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \sin \beta_{nx} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos \beta_{nx} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X} \cos \beta_{nx} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \sin \beta_{nx} \right) \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (C14)$$

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{nx}} = \frac{\partial\eta/\partial y}{\partial\eta/\partial x} = \operatorname{tg}\beta_{\text{nx}} \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (\text{C15})$$

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos\beta_{\text{nx}} + \frac{1}{\cos\beta_{\text{nx}}} \frac{\partial\eta}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos\beta_{\text{nx}} + \frac{1}{\sin\beta_{\text{nx}}} \frac{\partial\eta}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (\text{C16})$$

$$\frac{\partial G}{\partial N} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \cos\beta_{\text{nx}} + \frac{1}{\sin\beta_{\text{nx}}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (\text{C17})$$

Le long de la surface ondulée $\eta = 0$, ainsi la dérivée par rapport à la normale au niveau de la surface s'écrit :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{\eta=0} = \cos\beta_{\text{nx}} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} + \frac{1}{\sin\beta_{\text{nx}}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{C18})$$

Dans le présent problème physique, la température et la concentration imposées à la surface ondulée sont constantes. Par conséquent, le premier terme du deuxième membre de l'équation (C18) est nulle, c'est-à-dire $(\partial G/\partial \xi)_{\eta=0} = 0$. Ainsi :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{\sin\beta_{\text{nx}}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{C19})$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial N} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{\sin\beta_{\text{nx}}} \frac{1}{(b\xi^{1/4} - F(\xi))} \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{C20})$$

C.4 FROTTEMENT PARIETALE ET COEFFICIENT DE FROTTEMENT

Frottement pariétal :

La force de frottement exercée par unité de surface ou contrainte de cisaillement est définie par [12] :

$$\tau_p = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{y=f(x)} \quad (\text{C21})$$

$$\tau_p = \left[\mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right]_{Y=F(x)} \quad (\text{C22})$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U(X, Y) \\ V(X, Y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U(\xi, \eta) \\ V(\xi, \eta) \end{cases}$$

$$\tau_p = \mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=F(X)} + m \frac{n}{L^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)_{Y=F(X)} \quad (C23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \xi_Y \frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta_Y \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad (C24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \xi_X \frac{\partial V}{\partial \xi} + \eta_X \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (C25)$$

$$\tau_p = \mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} + \mu \frac{v}{L^2} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \right]_{\eta=0} - \mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{F'(X)}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (C26)$$

$$\tau_p = \mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} + \mu \frac{v}{L^2} \left[\frac{\partial V}{\partial \xi} \right]_{\eta=0} \quad (C27)$$

$$\tau_p = \mu \frac{v}{L^2} \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (C28)$$

Ainsi, l'expression de la contrainte de cisaillement dans le système de coordonnées $O\xi\eta$ est donnée par :

$$\tau_p = \rho \left(\frac{v}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (C29)$$

Coefficient de Frottement pariétal :

Le coefficient de frottement local adimensionnel $C_f(X)$ est définie par :

$$C_f(X) = \frac{\tau_p(X)}{\rho u_r^2} \quad (C30)$$

Où u_r est la vitesse de référence définie, au chapitre 1, par $u_r = v/L$.

Par substitution de (C29) dans (C30), on déduit l'expression de $C_f(X)$, soit :

$$C_f(X) = \left(\frac{1}{bX^{1/4} - F(X)} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - F'(X) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (C31)$$

C5. Définition des vecteurs unitaires du nouveau système de coordonnées

Les vecteurs unitaires du nouveau système de coordonnées \mathbf{v}_ξ et \mathbf{v}_η sont définis par rapport aux vecteurs unitaires \mathbf{i} et \mathbf{j} du système de coordonnées cartésiennes, comme suit:

$$\mathbf{v}_\eta = \mathbf{j} \quad (C32)$$

La définition du vecteur \mathbf{v}_ξ passe par la définition du vecteur unitaire, normal à la surface élémentaire (figure C2), définie par $\eta=\text{constante}$. On a

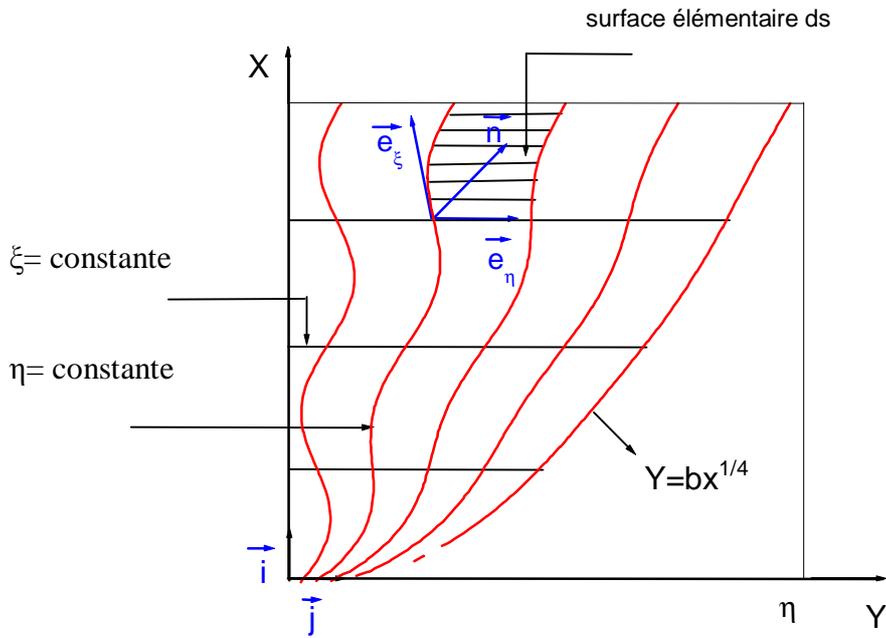


Figure. C2 : Lignes des η et ξ dans le domaine physique.

Pour cela, nous réécrivons l'équation (C9), on a :

$$\vec{u}_n = \frac{- \left[F' + \eta \left(\frac{1}{4} bX^{-3/4} - F' \right) \right] \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{\left[F' + \eta \left(\frac{1}{4} bX^{-3/4} - F' \right) \right]^2 + 1}} \quad (C33)$$

$$\text{Posons : } B = F' + \eta \left(\frac{b\xi^{-3/4}}{4} - F' \right) \quad (\text{C34})$$

$$\text{ou : } F' = \frac{dF}{d\xi} = 2\pi A \cos(2\pi x)$$

En utilisant l'équation (C33) ; il vient :

$$\vec{n} = \frac{-B \vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{B^2 + 1}} \quad (\text{C35})$$

Le vecteur \vec{e}_x peut être mis sous la forme :

$$\vec{e}_x = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \quad (\text{C36})$$

Comme \vec{e}_x est perpendiculaire au vecteur \vec{n} , alors, le produit scalaire des deux vecteurs est nul, on aura :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-B \vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{B^2 + 1}} \cdot (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}) = 0 \quad \rightarrow \quad -B \cdot a_1 + a_2 = 0 \quad (\text{C37})$$

$$\text{et comme: } a_1^2 + a_2^2 = 1$$

Alors, la solution des deux systèmes des équations à deux inconnues donne l'expression finale de \vec{e}_x .

$$\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2}} (\vec{i} + B \cdot \vec{j}) \quad (\text{C38})$$

$$\vec{e}_\eta = \vec{j} \quad (\text{C39})$$

$$\text{Avec : } B = F' + \eta \left(\frac{b\xi^{-3/4}}{4} - F' \right)$$

I.4.3 Relation entre les composantes du vecteur vitesse.

Soient U_ξ et U_η les composantes de vitesse \vec{V} dans le nouveau système de coordonnées (ξ, η) . Nous proposons de trouver une relation entre ces composantes et les composantes

U et V :

Les vecteurs vitesse peuvent être exprimés sous forme de deux vecteurs équivalents :

$$\vec{V} = U \vec{i} + V \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{V} = U_{\xi} \vec{e}_{\xi} + U_{\eta} \vec{e}_{\eta}$$

Multiplions les deux équations par \vec{i} et à l'aide des équations (C38) ,(C39) on a :

$$U = \vec{V} \cdot \vec{i} = (U_{\xi} \vec{e}_{\xi} + U_{\eta} \vec{e}_{\eta}) \cdot \vec{i} \quad \rightarrow \quad U = \frac{U_{\xi}}{\sqrt{1+B^2}} \quad (\text{C37})$$

$$V = \vec{V} \cdot \vec{j} = (U_{\xi} \vec{e}_{\xi} + U_{\eta} \vec{e}_{\eta}) \cdot \vec{j} \quad \rightarrow \quad V = U_{\xi} \frac{B}{\sqrt{1+B^2}} + U_{\eta} \quad (\text{C38})$$

De l'équation (C39) et (C38), nous déduisons les relations suivantes

$$U_{\xi} = U \sqrt{1+B^2} \quad \text{et} \quad U_{\eta} = V - U.B \quad (\text{C39})$$

RESUME

Une étude numérique de la convection naturelle thermique et massique autour d'un tronc de cône dont la forme de la paroi est décrite par une sinusoïde a été présentée. Le domaine physique est transformé en un domaine rectangulaire en utilisant une transformation homotopique. Les équations de transfert de type couche limite et les conditions aux limites qui leurs sont associées ont été discrétisées avec une méthode implicite aux différences finies. Les systèmes d'équations algébriques ainsi obtenus ont été résolus par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Nous avons montré que l'augmentation du rapport entre les forces volumiques d'origine thermique et celles d'origine massique augmente les transferts thermique et massique quel que soit l'amplitude de la paroi sinusoïdale. Ainsi que l'augmentation de l'amplitude de la sinusoïde décrivant la forme de la paroi du tronc de cône provoque une diminution des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens. Des corrélations ont été établies pour exprimer les nombres de Nusselt et de Sherwood en fonction de l'amplitude de la sinusoïde et des nombres de Rayleigh thermique et massique.

Mots clés : Convection naturelle, couche limite, transfert thermique et massique, force de flottabilité, nombre de Nusselt, nombre de Sherwood, surfaces ondulées.

ملخص

لقد تمت الدراسة العددية للإنسياب الحر و الصفحي الحراري الكتلي داخل الطبقة الحدية المحيطة بجذع مخروط سطحه تموجي الشكل. إن هذه السطح المتموج، الجيبي الشكل، قد تم تحويله إلى مساحة مسطحة الشكل بواسطة التحويلات الهوموتوبية. إن معادلات الطبقة الحدية ومعادلات الشروط الابتدائية قد تم حلها بواسطة التفريق المحدود والضمني وبواسطة خوارزم غوص سايدل. إن حل هذه المعادلات يؤدي إلى الحصول على سرعة المائع، درجة حرارته وتركيزه داخل الطبقة الحدية إضافة إلى عدد نيويسالت وشاروود. إن تأثير هندسة سطح الجذع المخروطي على كل من عدد نيويسالت وشاروود قد تمت دراستها بالتفصيل. إضافة وفي هذا السياق، فقد تم وضع علاقات جديدة بدلالة سعة المساحة التموجية لعدد نيويسالت وشاروود. إن النتائج المحصل عليها تبين بأن الزيادة في سعة المساحة الجيبية الشكل تؤدي على العموم في التقليل من التبادل الحراري والكتلي بين المائع والسطح. أيضا، إن عدد نيويسالت وشاروود المحلي و المتوسط بالنسبة لجذع مخروط ذو سطح متموج يكون أقل منه بالنسبة لجذع مخروط مسطحته.

كلمات المفاتيح: الإنسياب الحر، الطبقة الحدية، عدد نيويسالت، عدد شاروود، قوى الطفو، المساحات المتموجة.

ABSTRACT

A numerical study is presented for laminar free convection heat and mass transfer boundary layer along vertical cone with wavy surface. The wall, described by sinusoidal profile, is transformed into a flat surface by using homotopic transformation. The boundary layer equations are solved by an implicit finite difference scheme and the Gauss-Seidel algorithm. Numerical study is focused on velocity, temperature and concentration profiles, Nusselt number and Sherwood number. Effects of the wavy geometry, buoyancy ratio on the local Nusselt number and Sherwood number are studied. Moreover, correlation for the Nusselt number and Sherwood number are analyzed. Results show that the increasing of the amplitude tends to decrease in general the heat and mass transfer. Further, the mean Nusselt and Sherwood number for a wavy cone trunk are found in general to be smaller than that of the flat cone trunk.

Key words: free convection, boundary layer, Sherwood number, Nusselt number, buoyancy force, wavy surface.