

292

phy

ORSAY
n° d'ordre : 1589

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ès-sciences

PAR

Monsieur GABARRO-ARPA Jaime

SUJET: Contribution à la phénoménologie des interactions fortes : études sur la dualité, les pôles fixes et les réactions inclusives.

soutenue le 18 décembre 1975 devant la Commission d'examen

MM. LURCAT Président

TRAN THANH VAN

CAPELLA

DIU

REISS

ORSAY

n° d'ordre : 1589

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ès-sciences

PAR

Monsieur GABARRO-ARPA Jaime

ST4/3923.

SUJET: Contribution à la phénoménologie des interactions fortes : études sur la dualité, les pôles fixes et les réactions inclusives.

soutenue le 18 décembre 1975 devant la Commission d'examen

MM. LURCAT Président

TRAN THANH VAN

CAPELLA

DIU

REISS

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Mr Capella, grâce à qui j'ai pu mener à bien cette thèse, par ses conseils et l'encouragement qu'il m'a dispensé pendant toute sa durée.

Je remercie également Mr Jancovici qui a bien voulu m'accueillir dans le Laboratoire de Physique Théorique.

Que MM. Lurçat, Reiss, Diu et Tran Thanh Van, qui ont bien voulu faire partie du jury, veuillent trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie également L. Oliver, L. Gonzalez et D. Schiff, qui, par leurs conseils et leurs critiques pertinentes, m'ont aidé pendant la rédaction de la thèse.

Je remercie également MMes Bourdois, Macek et Piton qui ont imprimé cette thèse.

Cette thèse est dédiée à la machine UNIVAC du Centre de Calcul, avec laquelle j'ai passé des moments très agréables.

INTRODUCTION

Jusqu'à la fin des années 60, la phénoménologie des interactions fortes a été dominée - toujours dans le cadre général de la relativité, l'unitarité, le croisement et l'analyticité - par la notion d'échange. A basse énergie, l'échange de résonances dans la voie s domine; l'analyse en déphasages a mis en évidence toute une spectroscopie hadronique que le modèle des quarks interprète avec succès. D'autre part, à haute énergie, les amplitudes de diffusion à deux corps sont dominées par les échanges de pôles de Regge dans les voies croisées.

Ces dernières années, la phénoménologie des interactions fortes a été bouleversée par deux grands axes d'activité sur les plans théorique et expérimental.

Du point de vue théorique, le concept de dualité, en unifiant les basses et les hautes énergies, a été très fructueux. Les applications phénoménologiques de la dualité ont été très nombreuses, sous la forme de Règles de Somme à Energie Finie ou des amplitudes explicitement duales introduites par Veneziano. D'autre part, le modèle de Veneziano a donné lieu aux grands développements des modèles duaux qui, introduisant l'unitarité, ont apporté, en particulier, quelques éclaircissements sur la nature du pomeron.

Sur le plan expérimental, les nouveaux accélérateurs - à Serpukov, aux ISR, à Fermilab - ont mis en jeu des grandes énergies. En plus de l'importante découverte de la croissance des sections efficaces totales aux énergies dites "asymptotiques", un grand effort expérimental s'est porté vers l'étude des réactions hadroniques à grande multiplicité à l'aide des spectres inclusifs. Parallèlement, la phénoménologie des pôles de Regge s'est étendue à l'étude des spectres inclusifs à l'aide du théorème optique de Mueller pour la diffusion de trois particules.

Notre thèse porte sur une série de contributions à ces différents sujets récents de la phénoménologie des interactions fortes.

La première partie de la thèse traite de la dualité sous différents aspects: la construction d'amplitudes duales du type Veneziano ("Dual Amplitudes with ω -Coupling for Six Pions and for Spinning Bosons", *Lettere Nuovo Cimento* 4, 86 (1970), en collaboration avec L. González), application d'amplitudes duales à l'étude de l'annihilation nucléon-antinuécléon au repos ("A dual model for $\bar{p}n \rightarrow \bar{K}K\pi\pi$ at rest", LPTHE 71/40), et l'étude de la dualité dans le sens de Règles de Somme à Energie Finie ("Comparison between phase shift analysis amplitudes and high energy amplitudes in πN charge exchange", *Nuovo Cimento* 16A, 37 (1973), en collaboration avec C. Pajares).

Les Règles de Somme à Energie Finie permettent d'étudier dans certaines réactions à deux corps la possibilité de l'existence, dans le plan complexe du moment angulaire d'autres singularités que les pôles de Regge: les pôles fixes. La Partie II est dédiée à ce problème ("Fixed poles in the t-channel helicity flip amplitude in charge- and hypercharge exchange reactions", *Nuclear Physics* B49, 285 (1972), en collaboration avec C. Pajares).

Finalement, la Partie III traite de l'analyse phénoménologique du spectre inclusif $pp \rightarrow pX$ jusqu'aux énergies des ISR à l'aide des couplages à trois reggeons.

TABLe DES MATIERES

	<u>page</u>
<u>PARTIE I. DUALITE</u>	4
<u>I.1. Introduction</u>	5
<u>I.2. Construction d'amplitudes duales: "Dual Amplitudes with ω-Coupling for Six Pions and Spinning Bosons" (Lettere Nuovo Cimento 4, 86 (1970))</u>	11
<u>I.3. Application des amplitudes duales à l'annihilation NN au repos: "A Dual Model for $\bar{p}n \rightarrow \kappa \bar{\kappa} \pi \pi$ at rest" (LPTHE 71/40)</u>	18
<u>I.4. La dualité dans le sens de règles de somme à énergie finie: "Comparison between phase shift analysis amplitudes and high energy amplitudes for πN charge exchange" (Nuovo Cimento 16A, 37 (1973))</u>	39

<u>PARTIE II. POLES FIXES DANS LE PLAN COMPLEXE DU MOMENT ANGULAIRE DANS LES REACTIONS HADRONIQUES</u>	48
<u>II.1. Introduction</u>	49
<u>II.2. "Fixed Poles in the t- Channel Helicity-Flip Amplitude in Charge- and Hypercharge Exchange Reactions" (Nuclear Physics B49, 285 (1972))</u>	57

<u>PARTIE III. REACTIONS INCLUSIVES</u>	74
<u>III.1. Introduction</u>	75
<u>III.2. Analyse des réactions inclusives avec le couplage au triple Regge: "The leading proton effect in proton-proton collisions" (Nuclear Physics B64, 493 (1973))</u>	89

<u>CONCLUSION</u>	95

PARTIE I. DUALITE.

I.1. Introduction.

Avec l'apparition de l'idée de dualité, la théorie et la phénoménologie des interactions fortes a fait un grand pas en avant. La dualité est devenue, avec l'analyticité et les pôles de Regge (qu'elle complète et développe), un des piliers de la phénoménologie des interactions fortes. Dans cette introduction nous nous proposons de retracer ses principales caractéristiques et les développements qu'elle a connus.

En 1966, V. Alfaro et al. établirent les relations de superconvergence ⁽¹⁾: pour une amplitude donnée, analytique satisfaisant des relations de dispersion et se comportant à la Regge, avec une trajectoire dominante telle que $\alpha < -L-1$, on a les relations suivantes:

$$\int_0^{\infty} \nu^n \text{Im } T(\nu, t) d\nu = 0 \quad n \leq L \quad (1)$$

où $\nu = (s-u)/4$ et s, t, u sont les variables de Mandelstam. Ce résultat peut se généraliser pour le cas où l'on a une amplitude avec une trajectoire dominante telle que $\alpha > -L-1$: on soustrait de l'amplitude la contribution de cette trajectoire et le résultat doit évidemment satisfaire la relation (1).

A partir de ces relations de superconvergence, Dolen, Horn et Schmid ⁽²⁾ ont développé les règles de somme à énergie finie, qui peuvent être écrites sous la forme,

$$\int_0^N \nu^n \text{Im } \{ T(\nu, t) - T_{\text{Regge}}(\nu, t) \} d\nu = 0 \quad (2)$$

où N est une valeur de l'énergie à partir de laquelle l'amplitude est correctement décrite par l'échange de pôles de Regge dans la voie t (c'est à dire, $T(\nu, t) \approx T_{\text{Regge}}(\nu, t)$). Si l'on écrit

$$T_{\text{Regge}}(\nu, t) = \sum_i \beta_i(t) \nu^{\alpha_i(t)}$$

la formule (2) devient

$$\int_0^N v^n \operatorname{Im} T(v, t) dv = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t) + n + 1} N^{\alpha_i(t) + n + 1} \quad (3)$$

La relation (2) nous indique que si l'on extrapole la partie imaginaire de l'amplitude de hautes énergies, on obtient en moyenne la forme de $\operatorname{Im} T(v, t)$ aux basses énergies, qui est dominée par les résonances. Aussi, la famille de règles de somme (3) nous suggère la possibilité de saturer sa partie de gauche par des données de basse énergie (résonances paramétrisées par les déphasages, par exemple) et d'obtenir la trajectoire de Regge $\alpha(t)$ et le résidu $\beta(t)$ point par point pour tout t . Puisque l'amplitude de Regge est construite à partir de résonances dans la voie croisée, les règles de somme (3) nous montrent que les paramètres de ces résonances ne sont pas indépendants de ceux des résonances dans la voie directe: ceci exprime le contenu de la notion de dualité.

C'est dans ce sens qu'Ademollo et al. (3) ont étudié la réaction $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$ au moyen des règles de somme à énergie finie. Cette réaction a la propriété que la trajectoire dominante est celle du ρ que l'on échange dans les voies s et t . Ils ont trouvé que, pour une valeur appropriée de la borne N , le ρ introduit dans la ~~nombre~~ membre de gauche de (3) se reproduit de façon auto-consistante dans le membre de droite. Ils ont d'ailleurs aussi remarqué que si on augmente N , pour saturer les règles de somme on doit introduire en plus de la trajectoire du ρ ses trajectoires filles.

(4) C'est à partir de cette étude phénoménologique que Veneziano a formulé sa fameuse amplitude pour le processus $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$,

$$T(p_1, p_2, p_3, E) = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\mu p_2^\nu p_3^\rho E^\sigma \{ V(s, t) + V(u, t) + V(s, u) \} \quad (4)$$

$$\text{où} \quad V(s, t) = \frac{\Gamma(1 - \alpha_s(s)) \Gamma(1 - \alpha_s(t))}{\Gamma(1 - \alpha_s(s) - \alpha_s(t))}$$

p_1, p_2, p_3 sont les impulsions des trois mesons π et ξ est la polarisation du ω . Cette amplitude possède la symmétrie de croisement, se comporte asymptotiquement à la Regge, contient les résonances à basse énergie, et est duale dans le sens précédent. Mais elle n'est pas compatible avec l'unitarité: les résonances sont à largeur nulle et elle ne contient pas de coupure d'unitarité.

Malgré cela, les modèles duaux basés sur la formule (4) ont connu un grand développement, aussi bien du point de vue théorique que phénoménologique. En particulier, on s'aperçut vite que d'amplitudes duales de ce type permettaient une description unifiée dans les diverses voies et régions cinématiques des processus à plusieurs particules. L'amplitude de Veneziano fut généralisée pour des réactions à plusieurs particules scalaires par divers auteurs (⁵). Ensuite, ce modèle fut généralisé à des particules avec spin et à l'échange de trajectoires avec des caractéristiques non triviales (parité anormale, intercepte positive, etc.).

Dans le sens de ces recherches, nous présentons dans I.2 une contribution: nous construisons une amplitude duale pour six pions avec des trajectoires d'intercepte positive, ayant la trajectoire du ω et les bonnes propriétés de spin et parité pour tous les échanges dominants. D'une façon consistante nous déduisons par factorisation des amplitudes impliquant des bosons avec spin:

$$\pi\rho \rightarrow \pi\rho \quad , \quad \pi\pi \rightarrow \pi\omega \quad \text{et} \quad \rho \rightarrow 4\pi \quad .$$

Les modèles du type Veneziano pour N particules ont été appliqués avec succès à la phénoménologie des réactions d'annihilation, réactions à plusieurs corps, zéros des amplitudes, etc. (⁶). Dans ces applications, les amplitudes sont modifiées en les rendant plus réalistes: en particulier en introduisant une largeur non nulle aux résonances, en ajoutant une partie imaginaire à la trajectoire de Regge.

Dans ce sens nous apportons une contribution à ces études dans le paragraphe I.3, où nous étudions la réaction d'annihilation au repos $\bar{p}n \rightarrow \kappa \bar{K} \pi \pi$ à l'aide d'amplitudes phénoménologi-

ques duales ayant les trajectoires du π et du K. Les spectres de masse sont correctement décrits par ces modèles.

Cependant, en raison du problème de l'unitarité, les applications phénoménologiques du modèle de Veneziano ne pouvaient être que restreintes. Plusieurs tentatives ont été envisagées en vue de construire des modèles duaux unitaires, notamment la méthode préconisée par Kikkawa, Sakita et Virasoro (⁷), qui prend l'amplitude de Veneziano comme terme de Born ou développement d'une série perturbative; ce programme a été partiellement réalisé par une série d'auteurs (⁸). Mais pour diverses raisons les résultats obtenus ne sont pas en mesure d'être utilisés en phénoménologie.

C'est pourquoi, au cours de ces dernières années, le travail phénoménologique a été réalisé principalement dans deux directions bien plus modestes que l'ambitieux programme d'unitarisation. D'une part, on s'est efforcé de tester la dualité et ses prédictions à partir de sa formulation générale: règles de somme à énergie finie, règles de somme de moment continu, etc. D'autre part, indépendamment du modèle de Veneziano, il y a eu des tentatives dans le cadre de la dualité en vue de construire la forme asymptotique de l'amplitude à partir des résonances dans la voie s.

C'est dans cet esprit que les modèles duaux périphériques ont été conçus: dans ces modèles l'interaction est dominée par la production de résonances périphériques dans la voie directe, avec un paramètre d'impacte de l'ordre du fermi. Ces résonances se trouvant sur une trajectoire $\alpha(s)$, la dépendance en t de la partie imaginaire de l'amplitude serait donnée essentiellement par le polynôme de Legendre

$$P_{\alpha(s)}^{\Delta K}(\cos \theta) \quad (5)$$

ΔK étant le transfert d'hélicité dans la voie t. Cette approche a connu des succès phénoménologiques importants (¹⁰), mais sur le plan théorique il n'y a pas de liaison satisfaisante avec l'approche analytique de la voie t (Regge plus coupures).

En liaison avec ces derniers points, nous présentons dans I.3 une étude comparative entre des données de basse énergie (paramétrisées par des déphasages) et les paramétrisations des amplitudes à haute énergie, au moyen des règles de somme de moment continu pour la réaction πN avec échange de charge. On trouve que, en général, elles sont bien satisfaites et qu'elles reproduisent le zéro de la trajectoire du ρ à $-t = 0.5 \text{ GeV}^2$ pour l'amplitude d'hélicité-flip. On trouve également que l'amplitude d'hélicité-flip a justement la forme prédite par les modèles duaux périphériques, $J_1(R\sqrt{-t})$ ($R = 1 \text{ fermi}$).

REFERENCES

- (¹) V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan et G. Rossetti, *Phys. Letters* 21, 576 (1966); L.A.P. Balázs et J.M. Cornwall, *Phys. Rev.* 160, 1313 (1967).
- (²) R. Dolen, D. Horn et C. Schmid, *Phys. Rev.* 166, 1768 (1968).
- (³) M. Ademollo, H.R. Rubinstein, G. Veneziano et M.H. Virasoro, *Phys. Rev.* 176, 1904 (1968).
- (⁴) G. Veneziano, *Nuovo Cimento* 57A, 190 (1968).
- (⁵) K. Bardakçi et H. Ruegg, *Phys. Letters* 28B, 342 (1968);
M.A. Virasoro, *Phys. Rev. Letters* 22, 37 (1969);
H.M. Chan, *Phys. Letters* 28B, 425 (1968);
Z. Koba et H.M. Nielsen, *Nucl. Phys.* B10, 633 (1969).
- (⁶) E.L. Berger et C.G. Fox, *Phys. Rev.* 188, 2120 (1969) et les références mentionés dans cet article;
R. Odorico, *Phys. Letters* 34B, 65 (1971).
- (⁷) K. Kikkawa, B. Sakita et M.A. Virasoro, *Phys. Rev.* 184, 1701 (1969).
- (⁸) "Dual Theory", vol. 1, édité par M. Jacob, North-Holland, 1974.
- (⁹) H. Harari, *International Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics*, Tel Aviv (1971).
- (¹⁰) B. Schrempp et F. Schrempp, *Nucl. Phys.* B54, 525 (1973) et B60, 110 (1973).
-

I.2. Construction d'amplitudes duales.

J. GABARRÓ, *et al.*

11 Luglio 1970

Lettere al Nuovo Cimento

Serie I, Vol. 4, pag. 86-92

**Dual Amplitudes with ω -Coupling
for Six Pions and for Spinning Bosons.**

J. GABARRÓ (*) and L. GONZÁLEZ MESTRES (**)

*L.P.T.H.E. - Orsay (**)*

(ricevuto il 27 Maggio 1970)

Recently, some efforts have been made (¹⁻⁴) in order to construct Veneziano-like amplitudes suitable for the description of reactions involving physical particles. Let us restrict ourselves to the case in which only bosons are present. Basically, two kinds of problems call our attention:

1) In general, we have to deal with Regge trajectories with positive intercept, i.e. negative squared mass for $\alpha = 0$. This forces us to construct amplitudes without the pole at $\alpha = 0$. As is well known, ordinary n -point B -functions have these spin-0 poles (ghosts).

2) In ordinary n -point B -functions the parity of the mother trajectory is normal, that is, one has

$$(1) \quad P = \left(\prod_i \eta_i \right) (-1)^J.$$

where η_i are the parities of the incident particles that form the intermediate ones of the channel under consideration. However, it is evident that nature does not only present normal parities. For example, the ω -trajectory in a three-pion channel has abnormal parity.

Abnormality induces us to introduce kinematical factors multiplying the ordinary B -functions. These factors in turn force us to modify the B -functions in order to preserve

(*) Postal address: Laboratoire de Physique Théorique, Bât. 211, Faculté des Sciences, Orsay.

(**) Laboratoire associé au C.N.R.S.

(1) A. CAPELLA, B. DIU, J. KAPLAN and D. SCHIFF: *Lett. Nuovo Cimento*, **1**, 655 (1969); *Nuovo Cimento*, **64 A**, 381 (1969).

(2) V. RITTENBERG and H. R. RUBINSTEIN: Weizmann preprint (1970); D. OLIVE and W. J. ZAKSZEWSKI: Cambridge preprint (1970).

(3) J. D. DORREN, V. RITTENBERG and R. RUBINSTEIN: Weizmann preprint (1970); E. ABERG and V. TEPLITZ: *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 909 (1969).

(4) Y. MIYATA: Tokyo preprint, April 1970.

correct Regge and multi-Regge behaviour. Finally, spin complications give us also, in general, kinematical factors.

In this paper, we construct Veneziano-type formulae for processes involving six pseudoscalar bosons. We also construct four-point formulae involving spinning bosons. The latter can be obtained from the former using factorization. Alternatively one can obtain them by multiplying the four-point B -function by the corresponding kinematical factors. As will be seen, the results are identical with both procedures. In what follows, we use standard notations.

Let us consider, for example, the 6π case with ω - A_1 and ρ - f trajectories dominating the 3π and 2π channels respectively. We have to kill all the ghosts corresponding to $\alpha = 0$ and also to change parity in the 3π channels as explained above. For the 13-channel, the kinematical factor that gives us the correct spin-parity relation is the following:

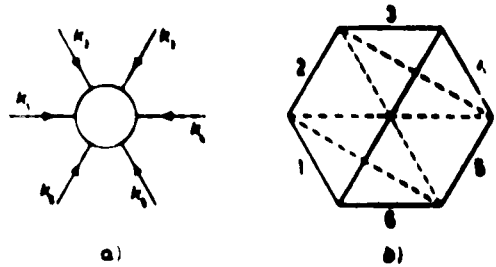


Fig. 1. - Diagrams representing six-pion processes. Channel 13 is indicated by the full line and its dual channels 31, 32, 24, 25 by the dashed ones.

$$(2) \quad \Phi(123; 456) \rightarrow \Phi(p_i) = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P_1^\mu P_2^\nu P_3^\alpha P_4^\beta P_{5\alpha} P_{6\nu} P_{7\mu} P_{8\nu}$$

where p_i denote the four-momenta of the six pions (Fig. 1).

Then, one term of the amplitude we have to construct will be given by a suitable B -function multiplied by the factor (2):

$$(3) \quad A = \Phi(p_i) B(\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{13} - \alpha_{12}, \dots, \alpha_{45} - \alpha_{44})$$

and the first problem is then to determine the smallest integers $\alpha_{ij} > 0$ compatible with Regge behaviour and the dominance of the desired parity in the various channels (j). All the α_{ij} will turn out to be > 1 , which prevents the ghosts at $\alpha = 0$ from appearing.

In order to make this, one can proceed in two different ways:

1) analyse the spin-parity content of the factor $\Phi(123; 456)$ in the various channels (j). Then, one must put:

a) $\alpha_{ij} = J_{ij}$ if the naturality (i.e. $P(-1)^j$) is well defined and coincides with the one of the trajectory exchanged in the channel (j).

b) $\alpha_{ij} = J_{ij} + 1$ if either both naturalities are present or the naturality is opposite to the one we want. In this way, the undesired parity is shifted to the daughter's level.

The justification is the following: let J_{ij} be the spin content of a factor Φ in the channel (j) of an n -particle vertex and let us consider the multi-Regge limit:

$$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1, n-1}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2, n-1} = \frac{\alpha_{12} \alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \dots, \alpha_{n-2, n-1} = \frac{\alpha_{n-2, n-3} \alpha_{n-2, n-1}}{\alpha_{n-3, n-1}}$$

fixed and

$$(4) \quad \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{n-2, n-1} \rightarrow \infty.$$

Then one has

$$(5) \quad \Phi(p_i) \sim s_{23}^{j_1} s_{24}^{j_2} \dots s_{n-2, n-1}^{j_{n-2}}$$

independently of the particular structure (parity, normality or any other property) of the tensors we have to consider (⁴).

2) Calculate $\Phi(p_i)$ as a function of the s_{ij} and then compute its asymptotical limit (see below). This procedure has two drawbacks. First the apparent necessity of tedious calculations. Secondly, the difficulty of analysing the parity content of $\Phi(p_i)$ in the various channels.

As an illustrative example, we will apply the two methods to (3) for comparison. Let us begin with the method 1). It is sufficient to look at the channels 13, 24, 12 and 34. The spin-parity content of the other channels follows from the symmetry properties of the factor (2). It is immediate to find that $a_{13} = a_{12} = 1$, as expected. For 24, in the c.m. frame of this channel we have

$$(6) \quad \Phi(p_i) = [p_1 \cdot (p_1 \wedge p_2)] [p_1 \cdot (p_3 \wedge p_4)] - \\ - [p_1^0(p_2 \wedge p_3) + p_2^0(p_3 \wedge p_1) + p_3^0(p_1 \wedge p_2)] [p_4^0(p_3 \wedge p_1) + p_1^0(p_3 \wedge p_4) + p_4^0(p_1 \wedge p_2)].$$

Taking into account that $(a \cdot b)(c \cdot d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$, it is easy to convince oneself that $\Phi(p_i)$ has, in the 24 channel, $J = 2$ and mixed parity. This gives us $a_{24} = 3$. Similarly, we can see that one must write $a_{31} = 2$. In this way we find

$$(7) \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{45} = 1, \quad a_{24} = a_{34} = 2, \quad a_{35} = a_{25} = 3.$$

Let us now turn to method 2). The steps to follow are: First, we express $\Phi(p_i)$ as a function of the s_{ij} . The result is

$$(8) \quad \Phi(123; 456) \propto s_{12}^2(s_{24} + s_{25} - s_{24} - s_{25}) + 2s_{12}(s_{24}s_{25} - s_{24}s_{25}) + \\ + s_{12}(s_{12}s_{24} + s_{23}s_{25} + s_{14}s_{26} - s_{24}s_{45} - s_{12}s_{25} - s_{23}s_{24} - s_{14}s_{25} - s_{24}s_{45}) + s_{12}s_{14}s_{25} + s_{23}s_{14}s_{26} + \\ + s_{23}s_{24}s_{45} + s_{12}s_{24}s_{45} + s_{13}(s_{12}s_{45} + s_{23}s_{14}) - (s_{12}s_{23}s_{45} + s_{12}s_{23}s_{14} + s_{12}s_{14}s_{45} + s_{23}s_{14}s_{45}) + \\ + m_\pi^2 s_{12}(2s_{24} + 2s_{25} - 2s_{25} - 2s_{24} - s_{14} - s_{23} - s_{12} - s_{45}) - m_\pi^2 s_{12}(s_{14} + s_{23} + s_{12} + s_{45}) + \\ + 2m_\pi^2(s_{23}s_{12} + s_{14}s_{45}) - m_\pi^4(4s_{24} + 4s_{24} - 2s_{25} - 2s_{24}) + m_\pi^4(s_{12} + s_{45} + s_{14} + s_{23}) - 4m_\pi^6.$$

Next, let us concentrate as an example on a_{13} (Fig. 1). We take the independent variables of the multiperipheral configuration with origin 1 which are given in (4). It is well known that in such a configuration s_{12} appears as an exponent of s_{24} for $s_{24} \rightarrow \infty$ and all the other variables in the configuration kept fixed. One finds immediately that s_{24} and s_{25} tend to infinity like s_{24} , all the other variables being fixed excepting s_{45} . The dependence of s_{25} on the variables of the configuration is obtained through the vanishing of the Gram's determinant, i.e. $\det(p_i, p_j) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). In this way, one finds

(⁴) See for instance M. TOLLER: *Nuovo Cimento*, **37**, 331 (1965); N. F. BALL, G. F. CREW and A. FROTTI: *Phys. Rev.*, **163**, 1572 (1967).

for $s_{23} \rightarrow \infty$ (*)

$$(9) \quad s_{23} \sim \frac{s_{23}^2 e_{23}}{s_{23}}$$

As a consequence, one sees that $\Phi(p_i)$ tends to infinity linearly in s_{23} ; thus one gets $e_{23} = 1$. Proceeding in an analogous way with the various channels ij one arrives at the same result of formula (7).

It is evident that the amplitude given by (3) and (7) satisfies automatically Adler's condition and reproduces by factorization the well-known Veneziano formula for $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$. Isospin will be described by the Chan-Paton (4) factor $\text{Tr}(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6)$ and sum over all permutations is understood. Finally, a coupling constant must be introduced.

From the 6-pion amplitude obtained in this way, we can deduce the $\pi\rho \rightarrow \pi\rho$ amplitude by factorization. Let us choose a reaction with definite signature, such as $\pi^+\rho^0 \rightarrow \pi^+\rho^0$. In order to make this, we form a ρ^0 -boson (ρ_1) with the pions 5 and 6 and another ρ^0 (ρ_2) with 3 and 4 (see Fig. 2). One puts

$$(10) \quad p_2 = k_3 + k_4, \quad e_2 \propto k_3 - k_4, \quad p_1 = k_5 + k_6, \quad e_1 \propto k_5 - k_6.$$

Then, after rearranging some terms, one arrives at (**)

$$(11) \quad \mathcal{A} = e_1^\mu e_2^\nu (g_{\mu\nu} A_1 + k_{1\mu} k_{2\nu} A_2 + k_{1\nu} k_{2\mu} A_3 + (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{2\mu} k_{1\nu}) A_4)$$

with

$$(11a) \quad A_1 = -\frac{6}{2} [(S^2 + 2st)(B(x, -1, \alpha_s - 2) - B(x, -1, \alpha_s - 3)) + (Q^2 + 2st)(B(x_s - 1, \alpha_s - 2) - B(x_s - 1, \alpha_s - 3))]$$

$$(11b) \quad A_2 = -a(t - 2\mu^2)(B(x, -1, \alpha_s - 2) - B(x_s - 1, \alpha_s - 3)) + 2ua(B(x_s - 1, \alpha_s - 2) - B(x_s - 1, \alpha_s - 3)).$$

(*) In fact, the explicit resolution of Gram's determinant gives two physical solutions for s_{23} , but they differ only in nonleading terms

(4) H. M. CHAN and J. E. PATON: CERN preprint 1969, published in *Nucl. Phys.*

(**) Actually, (11) could be obtained directly without departing from $\pi\rho \rightarrow \pi\rho$ and using only four point B -functions. In order to make this, one must consider contributions from the different dual diagrams for this reaction, with the kinematical factor $\Phi = \epsilon_{12\alpha\beta} \epsilon_{1\gamma} \epsilon_{\mu\nu\delta} p_2^\alpha k_1^\beta k_3^\gamma e_1^\delta e_2^\mu$ and using as before the method 1), because it holds equally for the case of spinning external particles. $s \leftrightarrow t$ signature must be introduced by hand. Of course, there is an immediate correspondence between the kinematical factors Φ and Φ' . Such a correspondence is clearly given by (10).

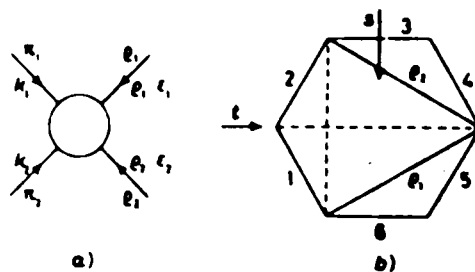


Fig. 3. - a) Schematic representation of the $\pi\rho\rho$ vertex. b) The same process factorized from the 6π amplitude. The vertical dashed line corresponds to t -channel resonances.

90

J. GABARRÓ and L. GONZÁLEZ MESTRES

$$(11c) \quad A_0 = -a(t - 2\mu^2)(B(\alpha_n - 1, \alpha_1 - 2) - B(\alpha_n - 1, \alpha_2 - 3)) + \\ + 2aa(B(\alpha_n - 1, \alpha_1 - 2) - B(\alpha_n - 1, \alpha_2 - 3)),$$

$$(11d) \quad A_0 = a[(s + \mu^2 - m^2)(B(\alpha_n - 1, \alpha_1 - 2) - B(\alpha_n - 1, \alpha_2 - 3)) + \\ + (u + \mu^2 - m^2)(B(\alpha_n - 1, \alpha_1 - 2) - B(\alpha_n - 1, \alpha_2 - 3))],$$

and

$$(11e) \quad \begin{cases} m = m_\rho, \\ \mu = m_\pi, \\ \mathcal{S} = \sqrt{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}, \\ \mathcal{U} = \sqrt{[u - (m + \mu)^2][u - (m - \mu)^2]}. \end{cases}$$

One can verify that this amplitude satisfies all the requirements deduced by CAPELLA *et al.* (2), but without saturating the asymptotic behaviour at fixed t , $s \rightarrow \infty$. This is related to the fact that, for the moment, couplings in the t -channel have not been properly included. On the contrary, we have made an explicit decoupling isolating the $\pi\rho\omega$ vertex from the $\rho\rho\rho$ one, which has not yet been introduced.

In order to arrive at a suitable complete description, it is necessary to include the vertex formed by three two-pion resonances, with coupling constants independent of the one in (11) and of the one understood in (3). To make this, we have to introduce as before the corresponding kinematical factors multiplying suitable B -functions. To kill all the ghosts, these kinematical factors must carry at least spin one in each of the 2π -channels we consider. On the other hand, a triple ρ -pole must be present in the 6π amplitude and equally we must have the ρ -pole in the t -channel of, for instance, the $\pi^+\rho^-\pi^-\rho^+$ amplitude, which can be obtained by the factorization of the 6π one.

This tells us that there exists a minimal and at the same time unavoidable set of terms, i.e. the one whose kinematical factors carry spin 1 in the three 2π -channels, because higher kinematical factors must multiply B -functions that do not have some of the three ρ -poles.

We will make explicit the simplest possibility, that is, the case in which only this unavoidable set of terms is present. As a matter of fact, higher kinematical factors such as those having as primary elements the couplings $\rho\rho f$, $\rho f g$, etc. can be introduced and treated in the same way.

We write

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} A' &= \alpha [k_2^\mu(k_3 + k_4)_\mu k_3^\nu(k_4 + k_5)_\nu k_4^\rho(k_1 + k_2)_\rho] \cdot \\ &B(\alpha_{12} - 1, \alpha_{13} - 3, \alpha_{23} - 2, \alpha_{14} - 1, \alpha_{24} - 3, \alpha_{25} - 1, \alpha_{35} - 3, \alpha_{36} - 2, \alpha_{46} - 2) + \\ &+ \beta (k_3 \cdot k_4) k_2^\mu(k_3 + k_4)_\mu \cdot \\ &\cdot B(\alpha_{12} - 1, \alpha_{13} - 3, \alpha_{14} - 1, \alpha_{23} - 2, \alpha_{24} - 2, \alpha_{15} - 1, \alpha_{25} - 1, \alpha_{35} - 3, \alpha_{45} - 1). \end{aligned} \right.$$

The first term in (12) represents a coupling between 3ρ of the kind $(e_1 \cdot p_2)(e_1 \cdot p_3)(e_2 \cdot p_1)$, while the second one is for the other three, i.e. $(e_1 \cdot e_2)(e_2 \cdot p_1)$, $(e_2 \cdot e_3)(e_1 \cdot p_2)$, $(e_3 \cdot e_1)(e_2 \cdot p_3)$. These last three couplings correspond to each other by cyclic permutation and therefore they give only one independent term in (12) and also in the 3ρ -vertex.

As before, we introduce isospin and sum over all permutations. We can also obtain by factorisation the contribution of (12) to $\pi^\pm \rho^0 \rightarrow \pi^\pm \rho^0$. The result, added to (11), gives us the following total amplitude:

$$(13) \quad T(\pi^\pm \rho^0 \rightarrow \pi^\pm \rho^0) = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu (T_1 g_{\mu\nu} + T_2 k_{1\mu} k_{1\nu} + T_3 k_{2\mu} k_{2\nu} + T_4 (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{2\mu} k_{1\nu}))$$

with

$$(13a) \quad T_1 = -\frac{a}{2} [(\mathcal{S}^2 + 2st)(B(\alpha_s - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_s - 1, \alpha_u - 3)) + (\mathcal{Q}^2 + 2ut) \cdot \\ \cdot (B(\alpha_u - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_u - 1, \alpha_s - 3))] - \frac{b}{2} [(s - m^2 - \mu^2) B(\alpha_s - 2, \alpha_t - 1) + \\ + (u - m^2 - \mu^2) B(\alpha_u - 2, \alpha_t - 1)],$$

$$(13b) \quad T_2 = -a[(t - 2\mu^2)(B(\alpha_s - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_s - 1, \alpha_u - 3)) - \\ - 2u(B(\alpha_u - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_u - 1, \alpha_s - 3))] + b(2B(\alpha_u - 3, \alpha_t - 1) + \\ + B(\alpha_t - 2, \alpha_u - 3)) + c[(s - m^2 - \mu^2) B(\alpha_s - 3, \alpha_t - 1) + (u - m^2 - \mu^2) B(\alpha_u - 3, \alpha_t - 1)],$$

$$(13c) \quad T_3 = T_2(s \leftrightarrow u),$$

$$(13d) \quad T_4 = a[(s + \mu^2 - m^2)(B(\alpha_s - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_s - 1, \alpha_u - 3)) + \\ + (u + \mu^2 - m^2)(B(\alpha_u - 1, \alpha_t - 2) - B(\alpha_u - 1, \alpha_s - 3))] + b[B(\alpha_s - 3, \alpha_t - 1) + \\ + B(\alpha_u - 3, \alpha_t - 1)] + c[(s - m^2 - \mu^2) B(\alpha_s - 3, \alpha_t - 1) + (u - m^2 - \mu^2) B(\alpha_u - 3, \alpha_t - 1)].$$

where b, c are simply related to β, α .

It can be verified that (13) satisfies and saturates all the constraints of ref. (4). Although the equations (12) and (13) are no more than an example, they constitute the simplest one, have the ρ pole and saturate the asymptotic behaviour at t fixed, s going to infinity. A lot of more complicated things can, of course, be added. But this occurs already in the s -channel in $\pi\rho \rightarrow \pi\rho$ and its corresponding channel in the 6π amplitude. Starting from the $\rho\pi\pi$, $\rho\rho\rho$ and $\rho\pi\omega$ couplings, the choice made in (3), (11) and (12), (13) generates all the other couplings and can perhaps be taken as the 'minimality principle' CARRUTHERS and LASLEY (7) were looking for. Of course, this is nothing more than a speculation and we do not claim that it actually happens in nature. Our method is a 'term by term' one. Probably it is possible to extrapolate the ideas of ref. (7) to 6 pions, 8 pions, etc. but we have not searched in this direction.

A similar construction can be made for the $4\pi K\bar{K}$, $2\pi 2K 2\bar{K}$ etc. amplitudes by replacing the isospin factor by the SU_3 one of ref. (6). Such a method gives some typical results of SU_3 (6). Note also that the $2\pi 2K 2\bar{K}$ amplitude enables us to obtain the $\pi\omega \rightarrow \pi\omega$ one.

Finally, our method can be extended in a straightforward manner to amplitudes involving eight or a higher number of pions. This and other things that we have not discussed in this letter will be treated in a more detailed paper.

(7) P. CARRUTHERS and E. LASLEY: Pasadena preprint, submitted to *Phys. Rev.*, October 1969.

Note. After completion of this work, we have received a preprint by **DORREN et al.** (*) where the same problem is dealt with and the results (7)-(11) are equally obtained.

We thank **A. CAPELLA** and **J. KAPLAN** for their great help and encouragement, for critical reading of the manuscript before the definitive version, and also **J. NUYTS** for reading the English one. We are indebted to Profs. **B. JANCOVICI** and **PH. MEYER** for their kind hospitality at Orsay Laboratory and to members of **L.P.T.H.E.** for their interest. We are grateful to the **Ministère des Affaires Etrangères (France)** and to **G.I.F.T. (Spain)** for their financial support during 1969-70.

(*) **J. D. DORREN, V. RITTENBERG, H. R. RUBINSTEIN, M. CHAICHIAN and K. J. SQUIRES: Weizmann preprint (1970).**

I.3. Application des amplitudes duales à l'annihilation $N\bar{N}$ au repos.

A Dual Model for $\bar{p}n \rightarrow K\bar{K}\pi\pi$ at rest.

J. GABARRO'

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Orsay*

Abstract : A study of the reaction $\bar{p}n \rightarrow K\bar{K}\pi\pi$ at rest is presented here.

The model is obtained from a 6-point dual amplitude containing the π and K trajectories.

July 1971

THE 71/40

* Laboratoire Associé au C N R S

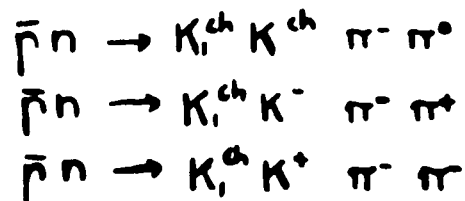
Postal Address : Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies.

Bâtiment 211 - Université Paris sud 91 - Orsay (France)

1 - Recent progress in the framework of dual n-point functions, allows us to write n-amplitudes, with exchange of any intermediate states and with any external particle.

In particular, dual models for π and K trajectories have been constructed [1,2], and it would be interesting to know how well they describe the data.

In this paper, it is attempted to describe the reactions :



at rest, by means of such models, "à la Lovelace".

As usual, we suppose that our amplitude will be the incoherent superposition of the two amplitudes :

$$" \pi " \rightarrow K \bar{R} \pi \pi$$

$$" \rho " \rightarrow K \bar{R} \pi \pi$$

The total amplitude (normalized to unity) being :

$$M = g |A_{\pi}|^2 + (1-g) |A_{\rho}|^2$$

" π " and " ρ " being the singlet and triplet respectively for the system $\bar{p}n$ at rest.

2 - Let's now describe the amplitude for the reaction $\rho \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$

The ρ being a $J^P = 1^+$ particle, we must find a consistent way to introduce it in a dual model.

The simplest method to do this is by constructing an amplitude for $\pi \pi \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$, and then, by factorization get $\rho \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$

Let's now look at the diagram of fig. 1, in order to see the possible exchanges.

There we see that in the $3-\pi$ channels, the π can be exchanged, and in the $K\pi\pi$ ones we have the K. We take the K to be an effective trajectory degenerate with the $Q(1235)$.

In order to construct the six point amplitude with π -exchange, we use a generalization of the Lovelace model, described in [2].

Let's briefly discuss how it works. The Lovelace's amplitude has the following kinematical factor :

$$\alpha_{ij} (1 - U_{ij})$$

and the amplitude looks like : $\alpha_s \beta_t (-\alpha_s, 1 - \alpha_t)$

Let's recall the properties of these factors : α_{ij} kills the spin-0 particle in the trajectory (ij), and raises of 1 unity the spin of the particles lying on dual channels.

$(1 - U_{ij})$ shifts the dual trajectories to the daughter level.

* α_{ij} stands for the Regge trajectory exchanged in the ij channel and U_{ij} is the corresponding internal variable associated to this channel.

So there is a compensating effect between these two factors that is the asymptotic behaviour is not modified.

A natural generalization of this factor for the 6-point scattering amplitude will be :

$$\alpha_{12} (1 - u_{12}) \alpha_{34} (1 - u_{34}) (1 - u_{13}) \quad (1)$$

The 6-point amplitude with the factor (1) will be :

$$\alpha_{12} \alpha_{34} B_6(-\alpha_{12}, -\alpha_{13}, -\alpha_{14}, 1 - \alpha_{23}, 2 - \alpha_{34}, 3 - \alpha_{25}, 1 - \alpha_{34}, 2 - \alpha_{35}, 1 - \alpha_{45})$$

As a matter of fact (1), is not the only possible structure.

We depict the basic structures used here in fig.(2), we use the polygon representation for the B6 function, in which the factor $\alpha_{ij} (1 - u_{ij})$ is represented by a continuous line joining the sides ij, and $(1 - u_{ij})$ by a dotted one.

All the terms we need can be deduced from these by cyclic permutation or twisting.

In order to get a fully crossing symmetric and well behaved amplitude, we must add these terms, each one multiplied by the corresponding isospin factor in the way described in ref.[2].

So the final amplitude will look like :

$$\sum_{\sigma} \sum_z T_R (z_R z_{n_1} z_{n_2} z_{n_3} z_{n_4} z_K) \alpha_{12} \alpha_{34} B_6(-\alpha_{12}, -\alpha_{13}, \dots)$$

where σ stands for the permutations of the external particles and z for the internal structures.

In factorizing the B_6 from a given channel, there are two kinds of terms, depending on whether the channel under consideration carries a factor α_{ij} or not. In the first case the lowest spin carried by the trajectory will be 1 (because of the ghost killing factor α_{ij}) and the residue obtained factorizing (1) for instance, will be (at the mother level) [3]

$$\alpha' \int^1 dy d\omega (P_2 \cdot P_3 + P_2 \cdot P_4 y + P_2 \cdot P_5 y\omega) \phi_5(P_i, y, \omega)$$

where the positions of the internal variables y, ω is indicated in fig.(2), ϕ_5 stands for the integrand of the B5 function and α' for the slope.

In the other case the spin would be carried by the kinematical factor and the factorization is immediate.

Finally, for $\pi \rightarrow \kappa \bar{K} \pi \eta$ we use the Bardakci-Ruegg amplitude :

$$\sum_{\sigma} T_R (\tau_R \tau_{n_1} \tau_{n_2} \tau_{n_3} \tau_{\kappa}) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^{\mu} p_2^{\nu} p_3^{\rho} p_4^{\sigma} B_5(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{15})$$

$$a_{ij} = 1 - \alpha_{ij}$$

The exchanges are indicated in fig.4.

3 - The trajectory parameters have been obtained a priori fitting the masses and widths of the particles.

These are :

$$\alpha_p = 0.482 + 0.967s + i 0.146 \sqrt{s - 0.078} \theta (s - 0.078)$$

$$\alpha_{\kappa^*} = 0.355 + 0.817s + i 0.072 (s - 0.4) \theta (s - 0.4)$$

$$\alpha_{\pi} = - 0.169 + 0.887s$$

$$\alpha_{\kappa} = - 0.18 + 0.713s + i 0.084 (s - 0.244) \theta (s - 0.244)$$

$$\alpha_{\omega} = 0.403 + 0.967s + i 0.076 (s - 0.991) \theta (s - 0.991)$$

Due to the position of ρ meson, the slope of the K is smaller than for the other cases.

The data for these reactions were taken from ref.[4], and the distributions were made with a modified version of FOWL and the Hopkinson program for B5 [5].

As we can see in the pictures, there is a good agreement with

the data, and we are able to reproduce the main features of these reactions.

The amplitude normalized to unity has only one parameter g , which is a measure of the contribution of the singlet.

We find for it :

$$g = 20\%$$

From this the frequencies of the different modes can be predicted, and we get the following values.

<u>reaction</u>	<u>predicted values</u>	<u>theoretical values</u>
$K_1^{ch} K^+ \pi^- \pi^-$	$7,8 \times 10^{-4}$	$(8,5 \pm 0,9) \times 10^{-4}$
$K_1^{ch} K^- \pi^+ \pi^-$	$11,5 \times 10^{-4}$	$(11,7 \pm 1,2) \times 10^{-4}$
$K_1^{ch} K_1^{ch} \pi^- \pi^0$	$13,7 \times 10^{-4}$	$(12 \pm 1,3) \times 10^{-4}$

4 - In conclusion, we have tested a rather sophisticated dual model, base on theoretical developments of the Veneziano formula, including the ρ and the K trajectories.

The picture seems to be good, as with only one parameter and without satellites we get a global description for $\bar{p} n \rightarrow \kappa \bar{K} \pi \pi$

In the way that the amplitude has been constructed, the results can also be used, to describe $p \bar{p} \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$, and partially $\bar{N} N \rightarrow K K \pi \pi$ by factorization [6].

I am indebted to A. Capella, A. Ferrer and L. Gislén for discussions, and to GIFT (Spain) for financial support.

REFERENCES

- [1] J.D. Dorren, V. Rittenberg and H. R. Rubinstein, Nucl. Phys. 20B, 663 (1970), D. Olive and W.J. Zakrzewski, Nucl. Phys. B21, 303
- [2] J.D. Dorren, V. Rittenberg and H.R. Rubinstein, CERN preprint TH-1192 (to be published in Nuovo Cimento)
- [3] S. Fubini and G. Veneziano, Nuovo Cimento 64A, 811
- [4] A. Bettini et al., Nuovo Cimento 62A, 1039 (1969)
- [5] In that case the usual B5 function program does not work, and it must be put in double precision. (J.F.L. Hopkinson private communication).
- [6] C. Benfatto et al., Nuovo Cimento 1A, 255 (1971).

FIGURE CAPTIONS

1 - Regge exchanges for the allowed configurations in $p \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$

2 - Basic structures for B6 :

$$a) \alpha_{12} (1 - U_{12}) \alpha_{14} (1 - U_{14}) (1 - U_{13})$$

$$b) \alpha_{12} (1 - U_{12}) \alpha_{45} (1 - U_{45}) (1 - U_{13})$$

$$c) \alpha_{23} (1 - U_{23}) \alpha_{14} (1 - U_{14}) (2 - U_{13})$$

$$d) \alpha_{23} (1 - U_{23}) \alpha_{45} (1 - U_{45}) (2 - U_{13})$$

4 - Regge exchanges in $\pi \rightarrow K \bar{K} \pi \pi$

Mass distributions :

$$\bar{p} n \rightarrow K_1^{ch} K_1^{ch} \pi \pi^0$$

5 - Invariant mass of $K_1^{ch} \pi^0$

6 - Invariant mass of $K_1^{ch} K_1^{ch}$

7 - Invariant mass of $K_1^{ch} \pi^-$ if K^{*0} ($0.850 < M < 0.950 \text{ GeV}/c^2$)

$$\bar{p} n \rightarrow K_1^{ch} K^- \pi^- \pi^+$$

8 - Invariant mass of $K^- \pi^+$

9 - Invariant mass of $K_1^{ch} \pi^-$

10 - Invariant mass of $K^- \pi^-$

$$\bar{p} n \rightarrow K_1^{ch} K^+ \pi^- \pi^-$$

11 - Invariant mass of $K^{ch} \pi^-$

12 - Invariant mass of $K_1^{ch} K^+$

13 - Invariant mass of $K^+ \pi^- \pi^-$

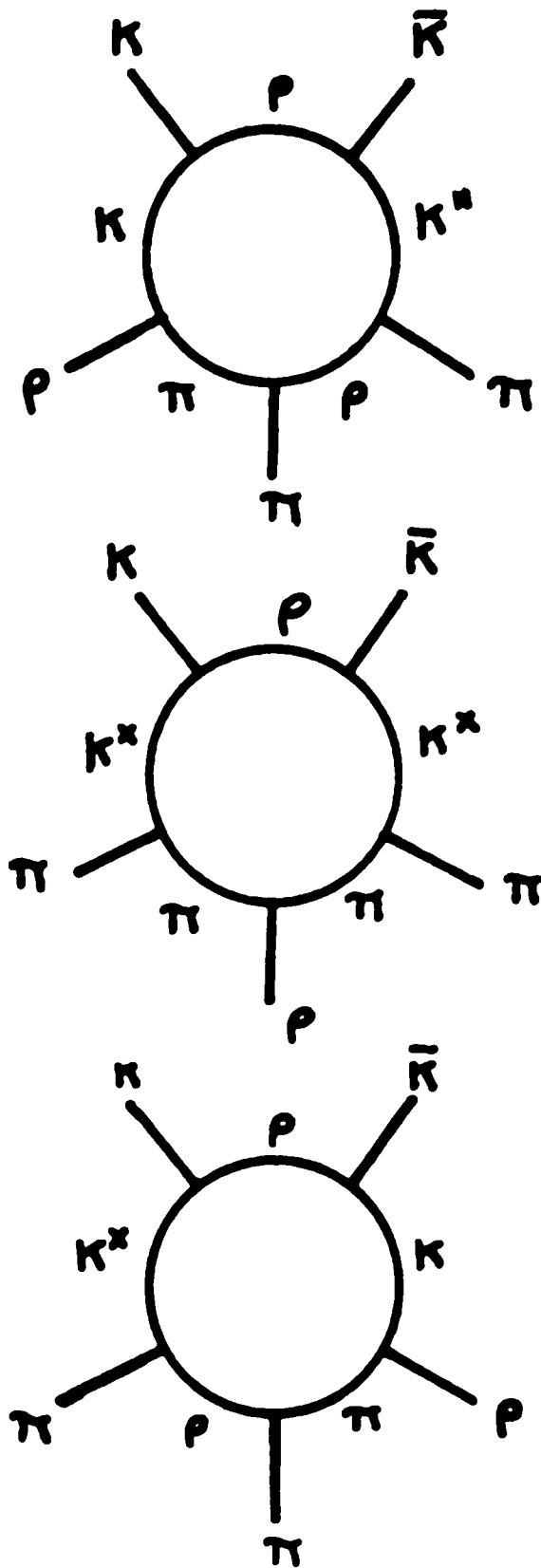


FIG. 1

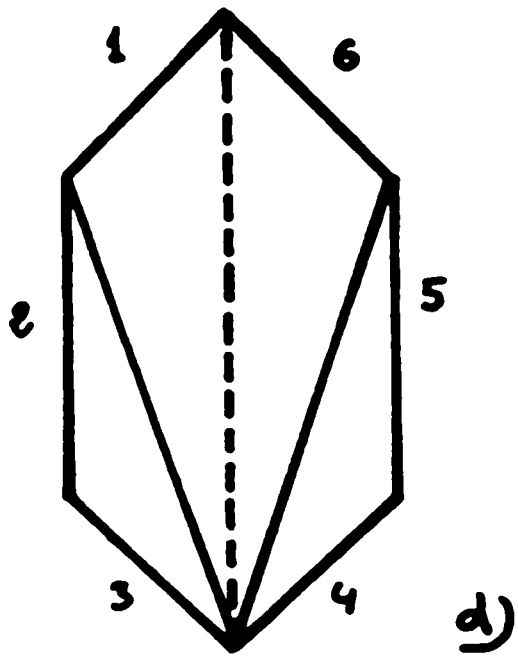
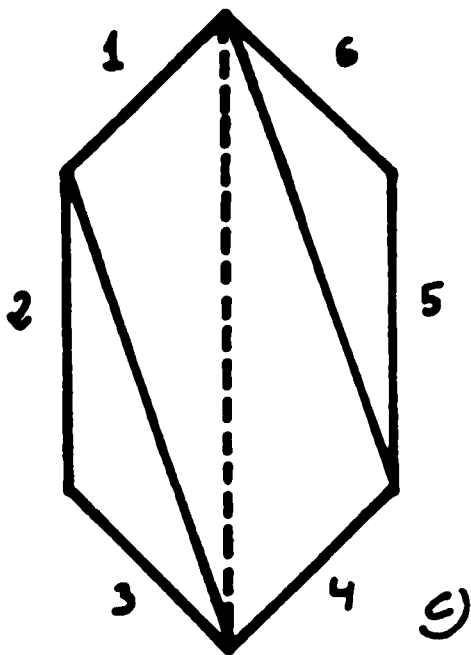
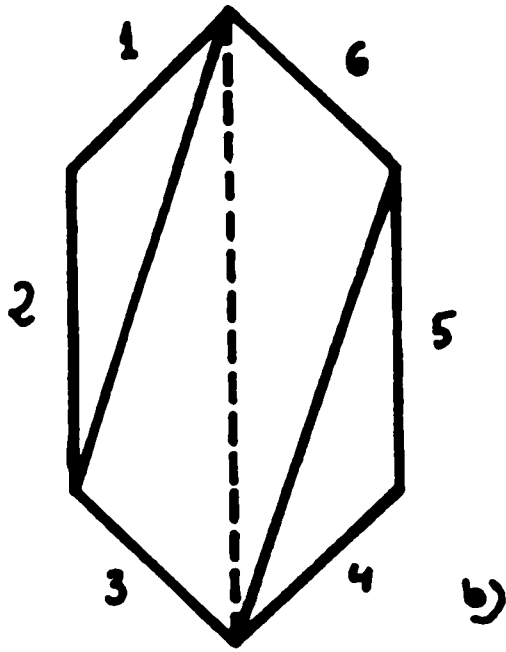
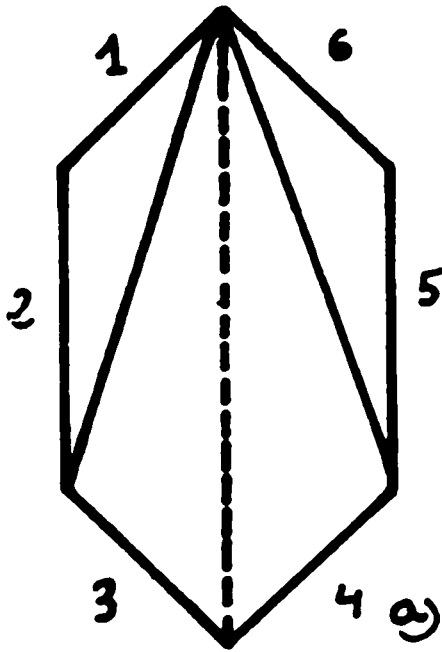


FIG. 2

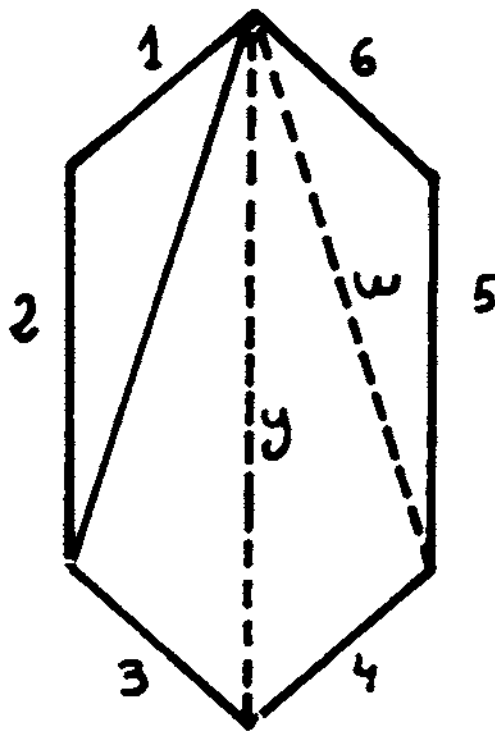


FIG.3

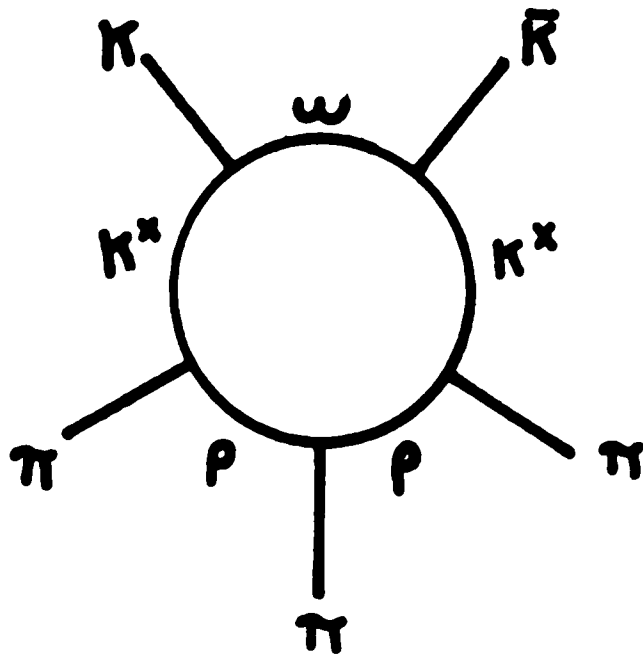


FIG.4

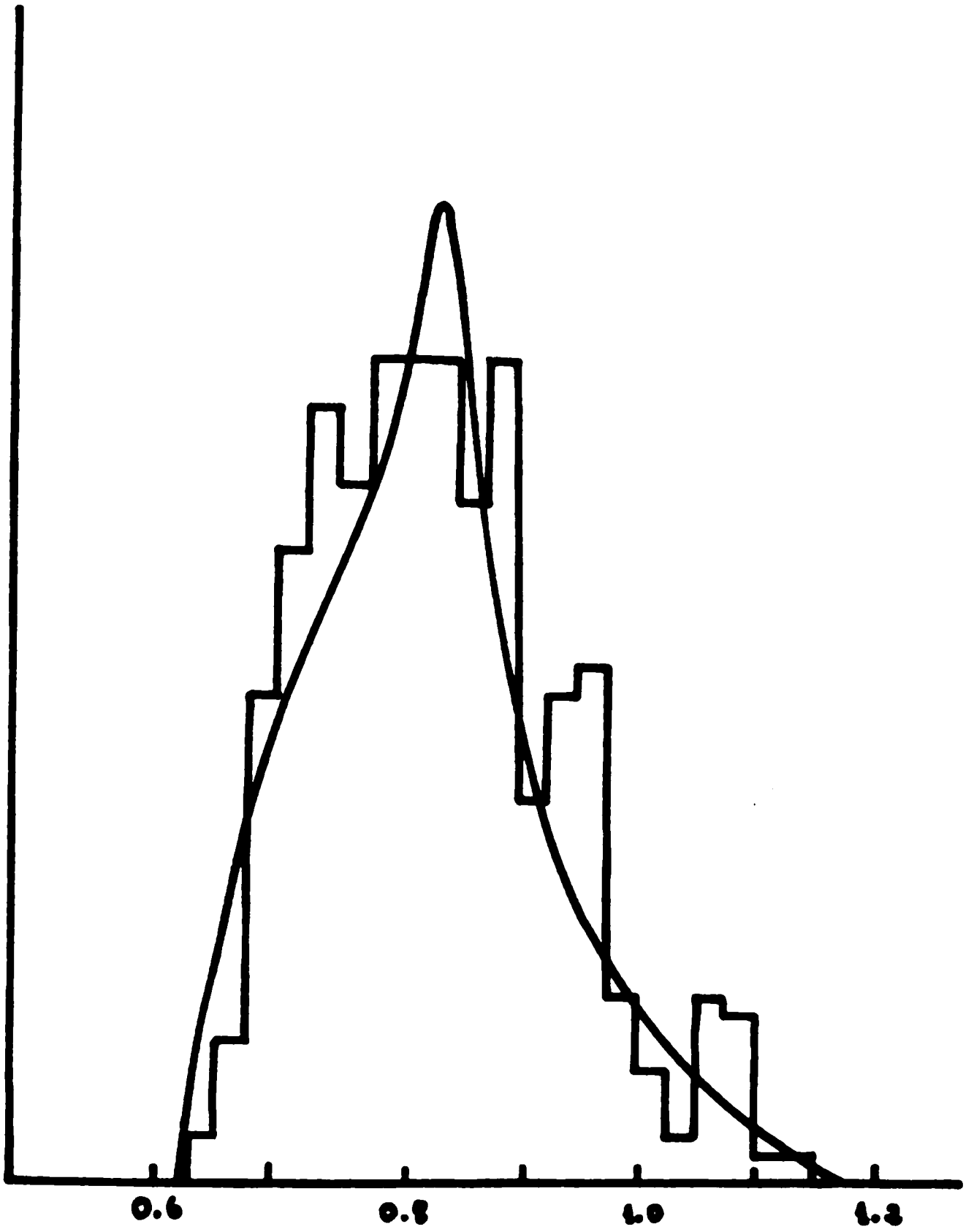


FIG. 5

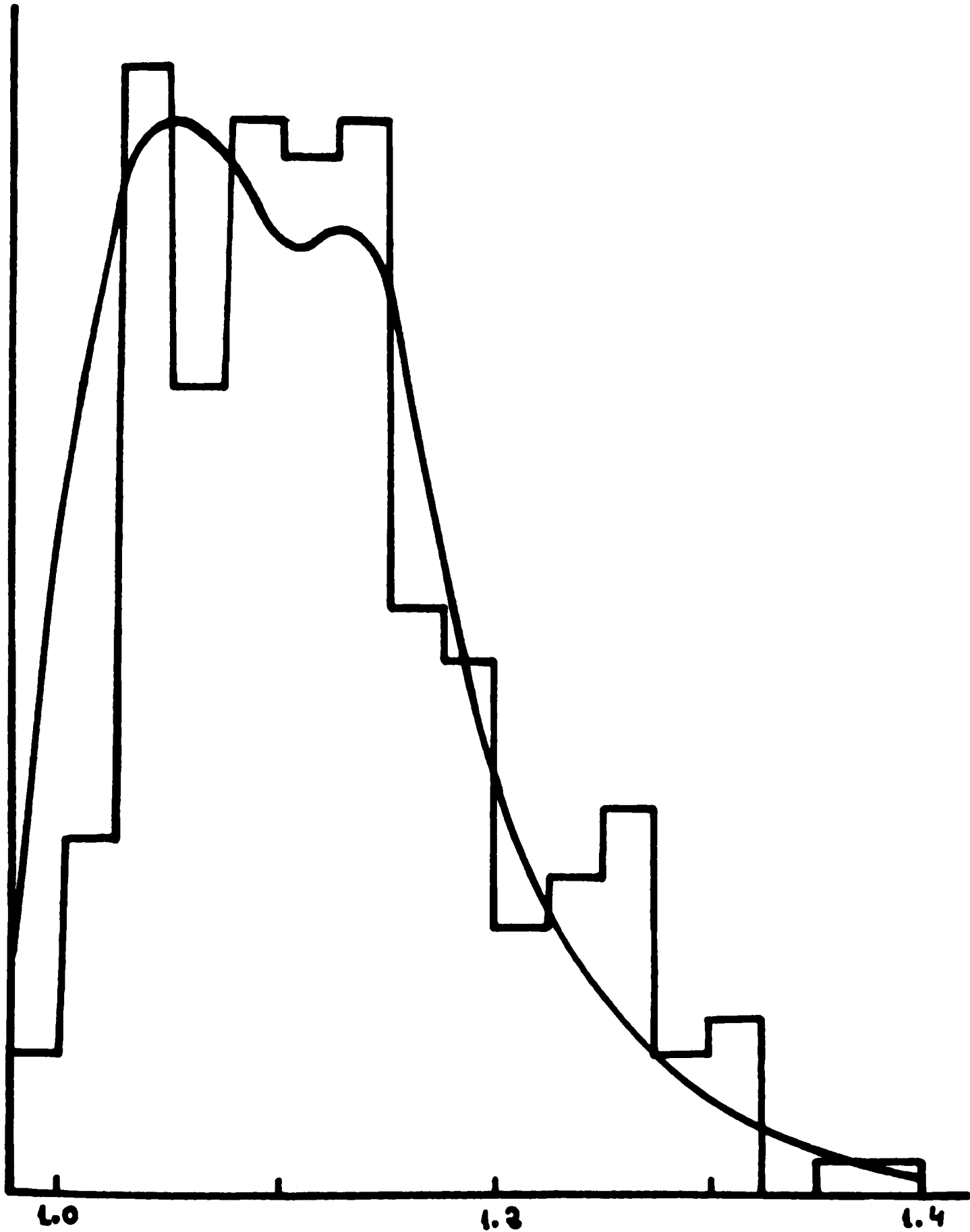


FIG. 6

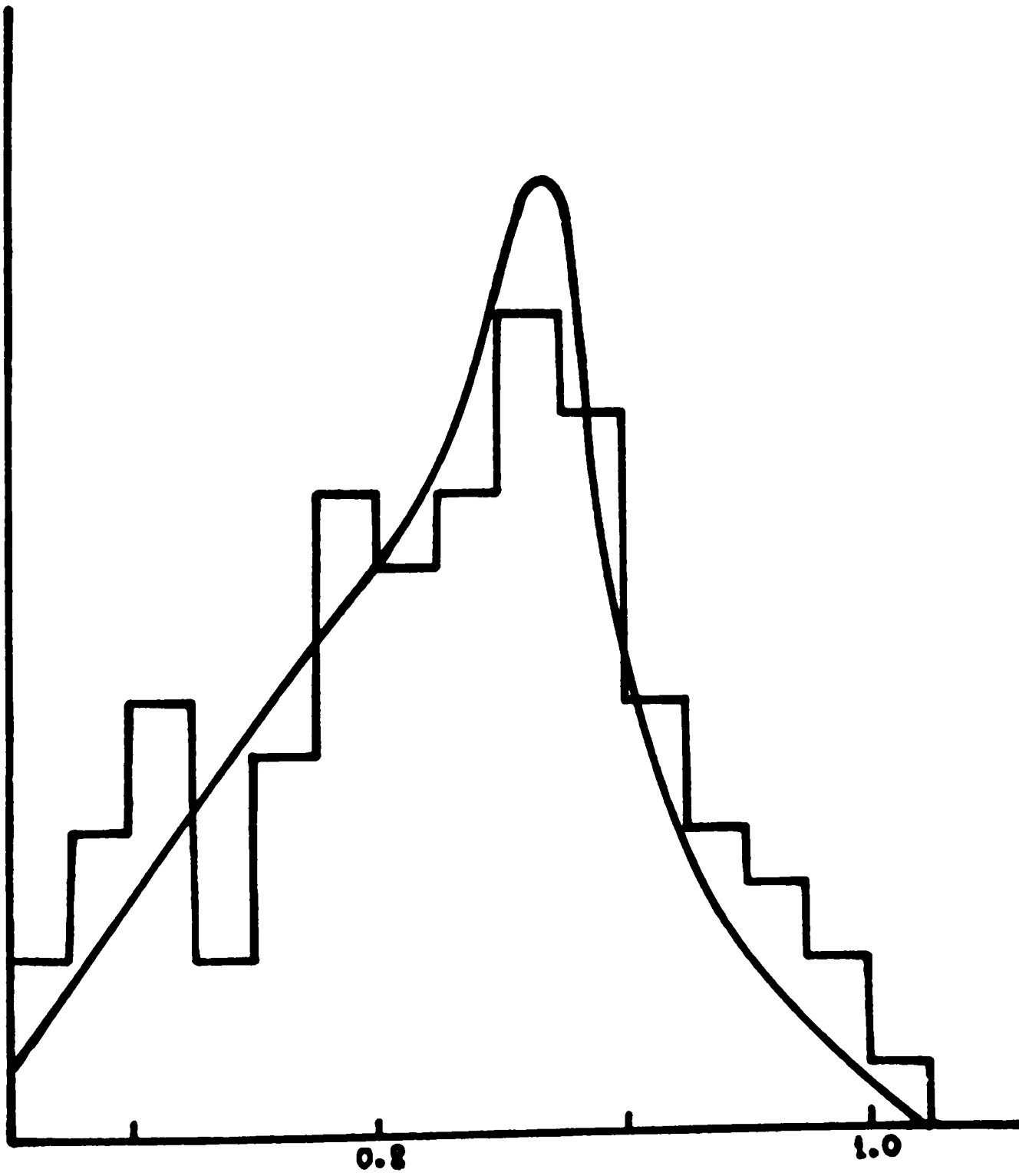


FIG. 7

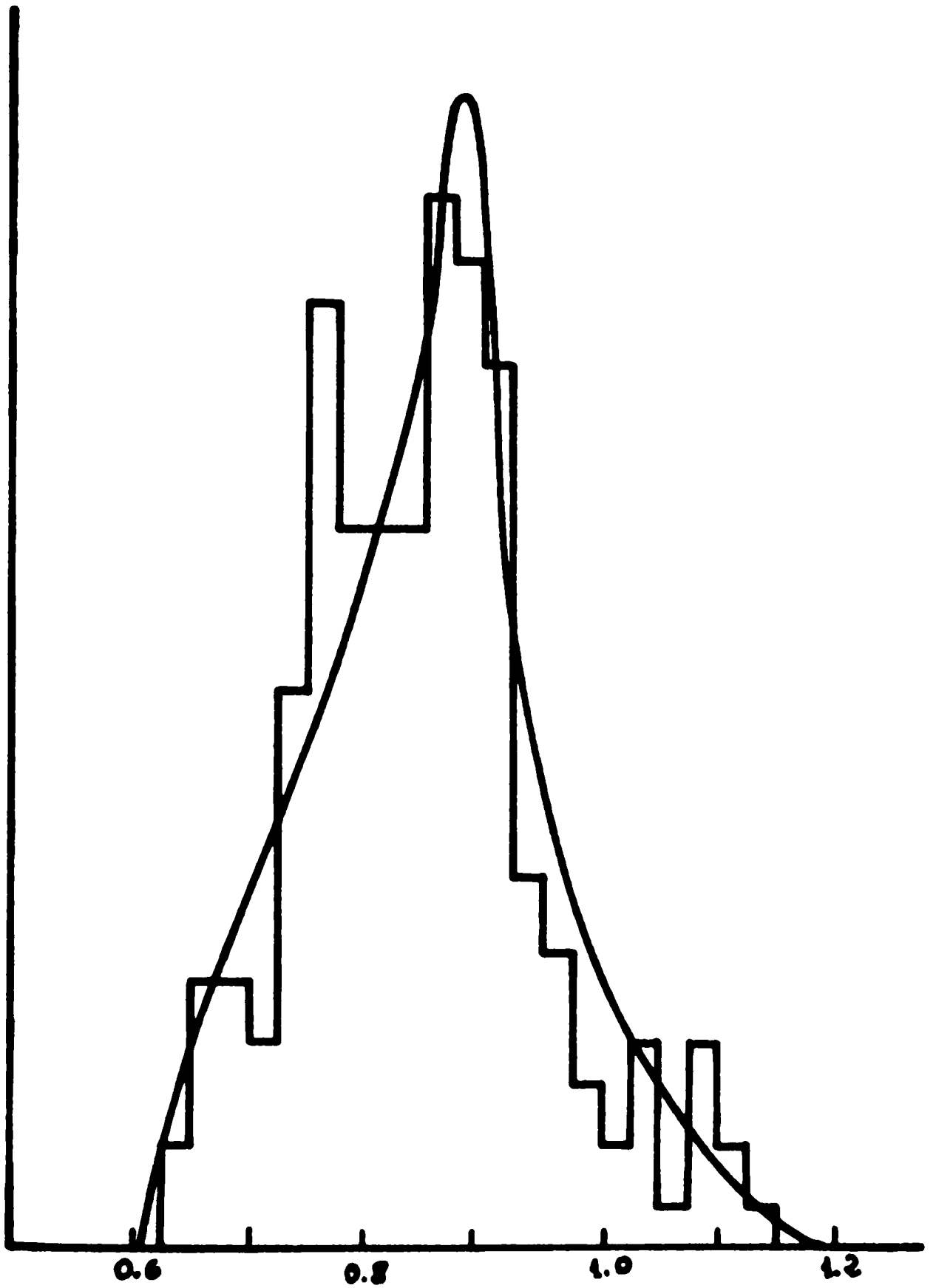


FIG. 8

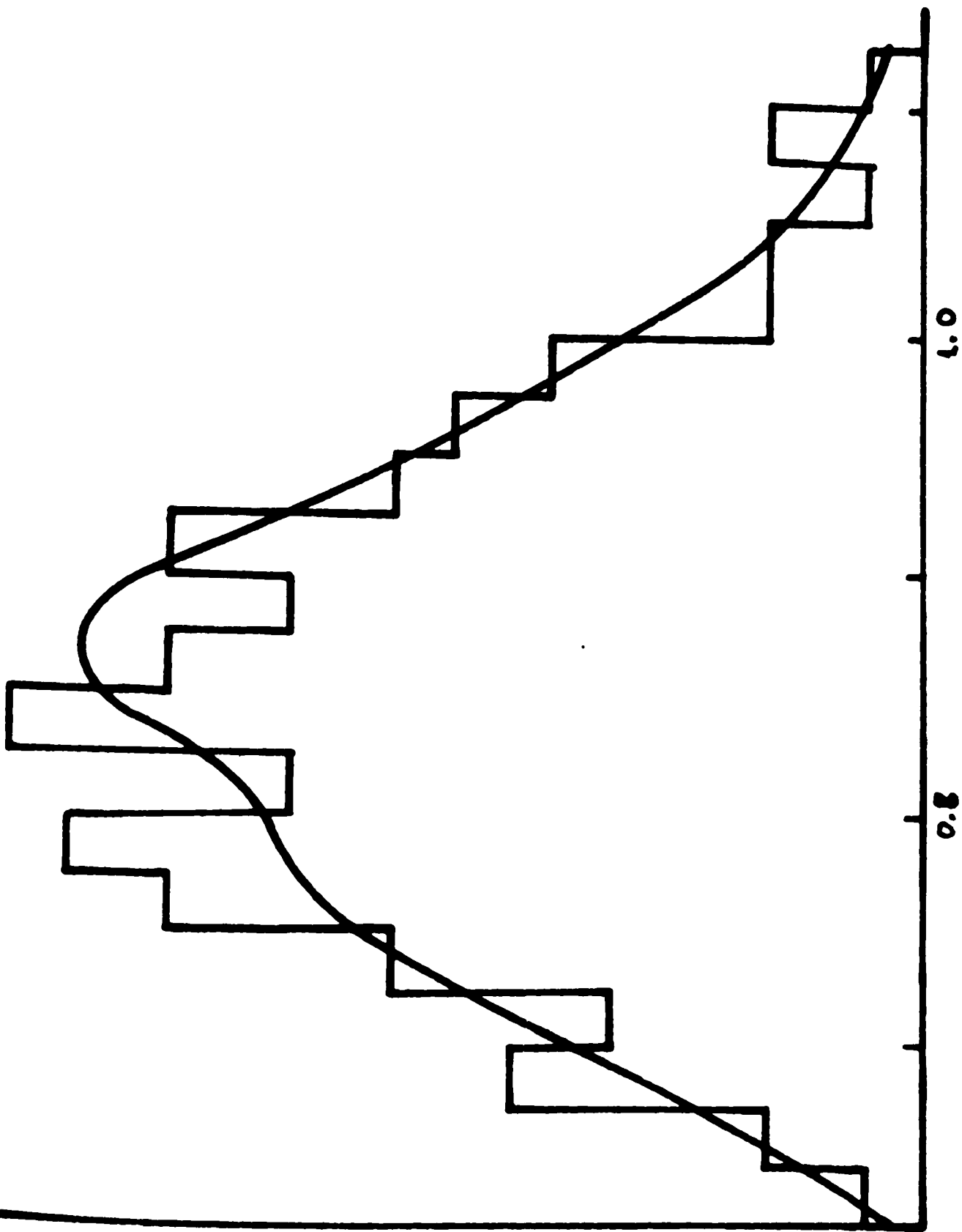


FIG. 9

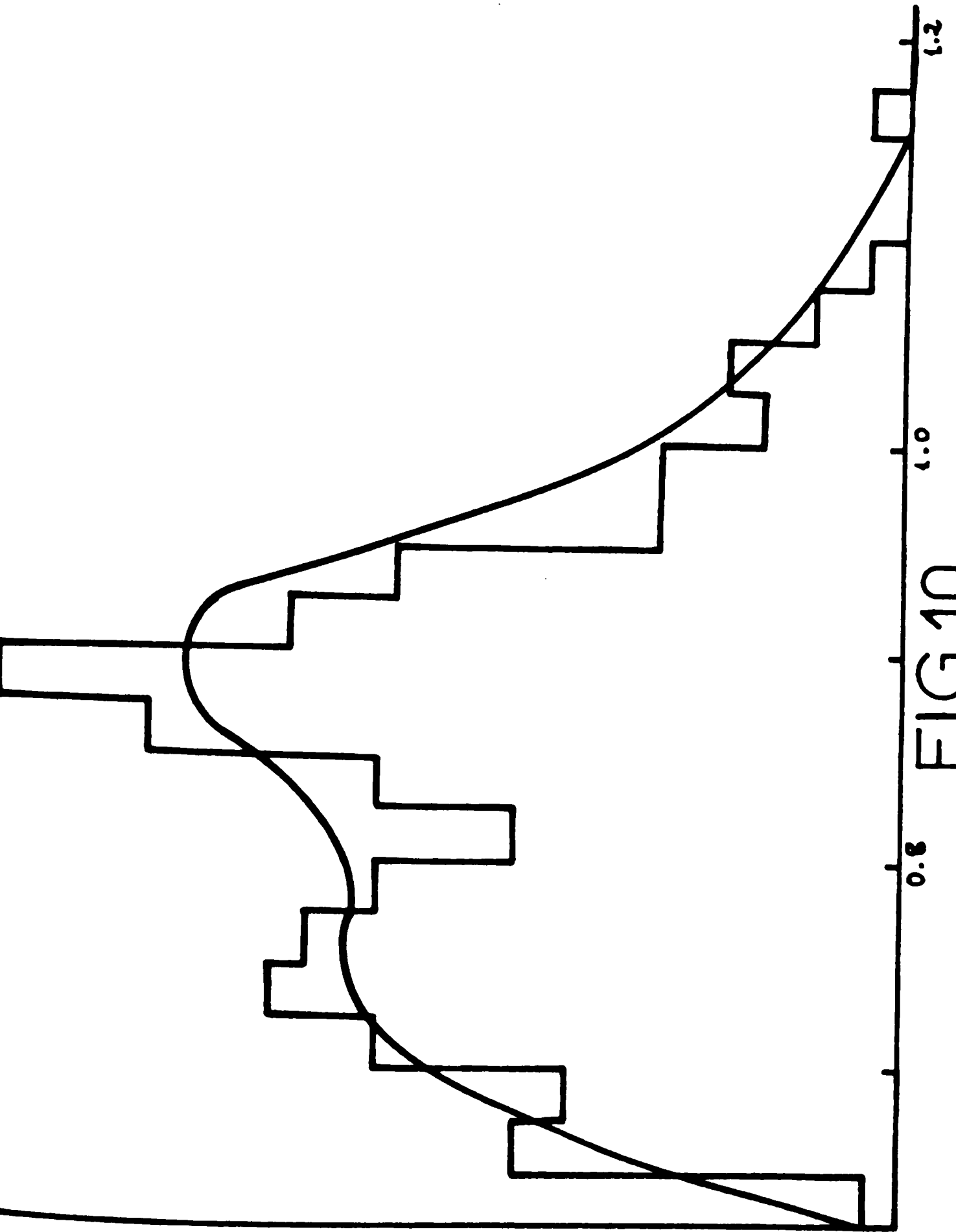


FIG.10

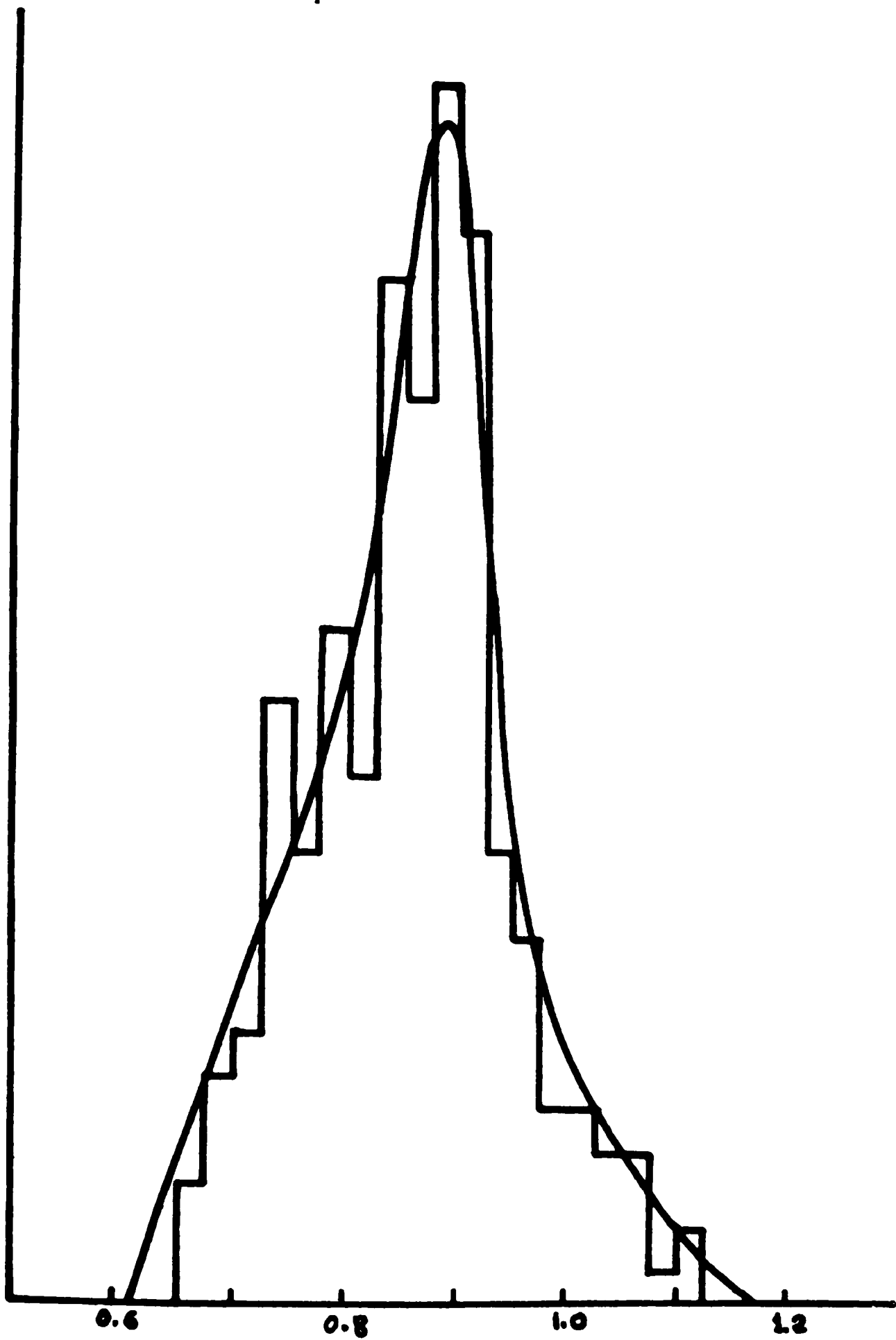


FIG.11

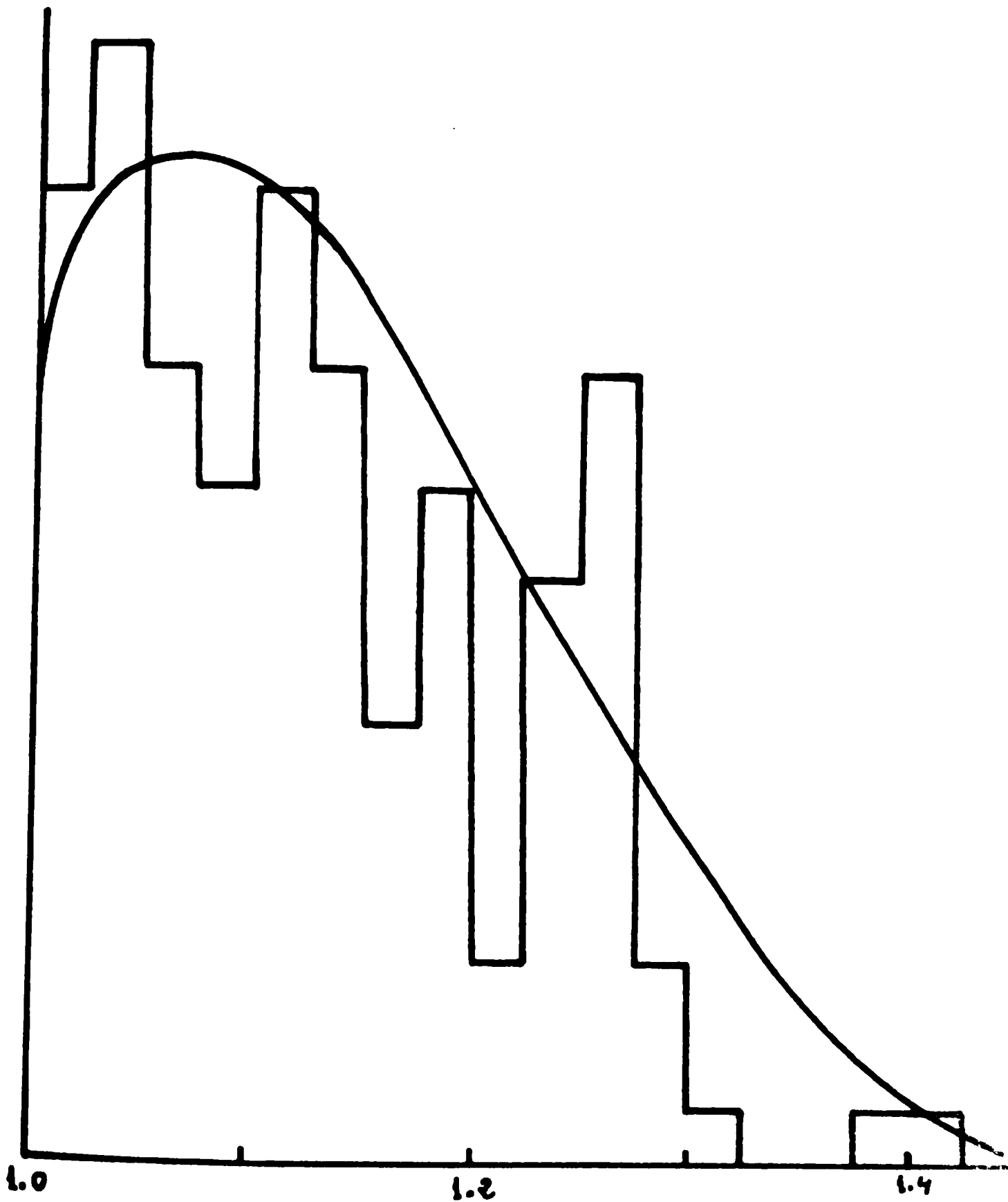


FIG.12

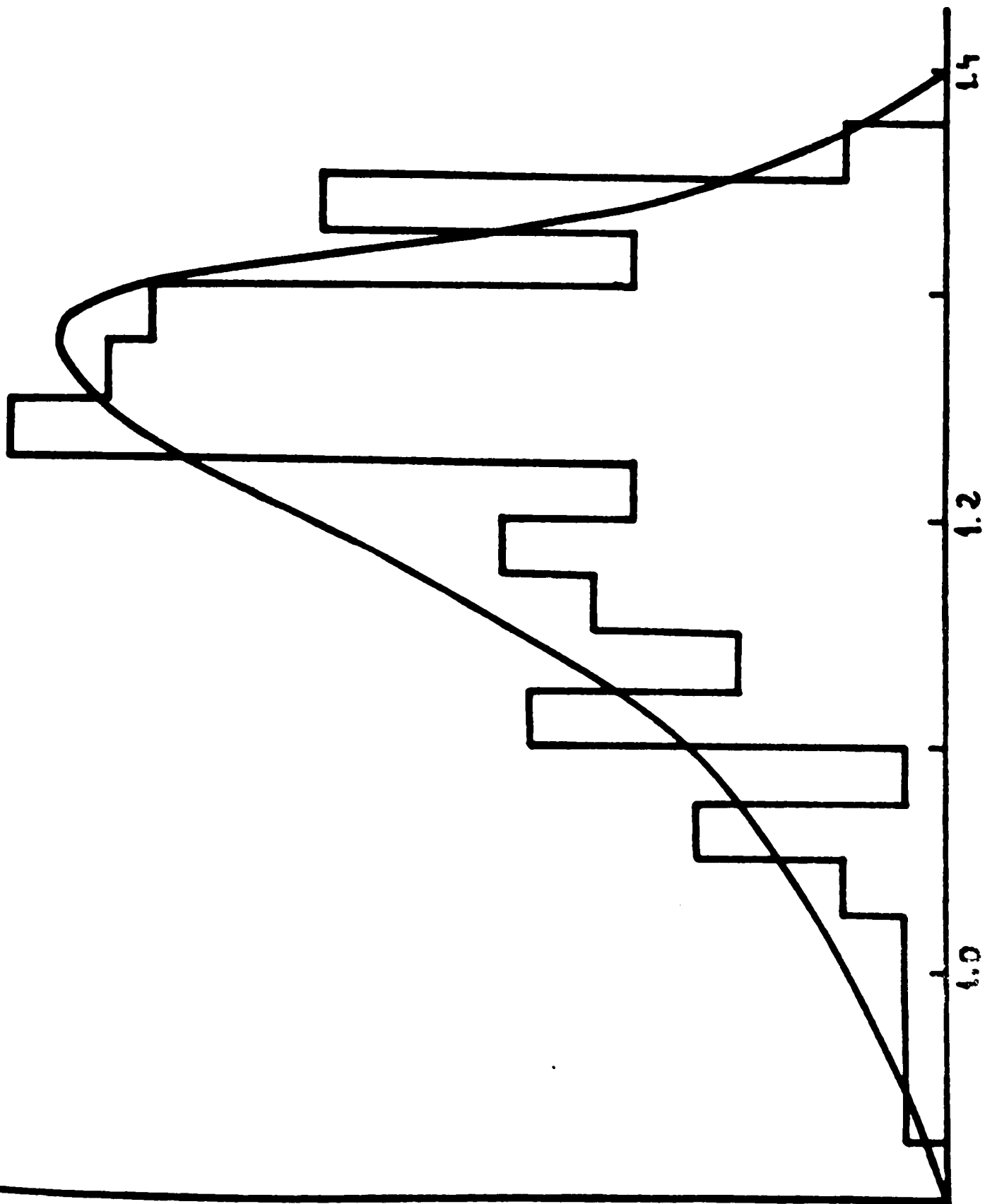


FIG 13

I.4. La dualité dans le sens de règles de somme à énergie finie.

IL NUOVO CIMENTO

Vol. 16 A, N. 1

1 Luglio 1973

Comparison between Phase-Shift Analysis Amplitudes and High-Energy Amplitudes in πN Charge Exchange.

J. GABARRO and C. PAJARES

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies - Orsay ()*

(ricevuto il 10 Novembre 1972)

Summary. — A comparative study of the new phase-shift amplitudes and the high-energy amplitudes is done. The behaviour of the modulus of the phase-shift amplitudes at $\sqrt{s} = 2.2$ GeV/c is very similar to the amplitude analysis of Halzen and Michel at 6 GeV/c, but the phases of the amplitudes are different. The dependence on t of the two new phase-shift analyses presents some difference. The imaginary part of the spin-flip s -channel helicity amplitude for the Saclay phase shift has just the $J_1(r\sqrt{-t})$ form at $\sqrt{s} = 2.2$ GeV/c. The continuous-momentum sum rules are also studied with this new phase-shift analysis, and the Harari-Freund hypothesis is tested.

1. - Introduction.

Recently two new πN phase-shifts analyses have been available, the CERN⁽¹⁾ and the Saclay⁽²⁾ ones. The highest energy reached by these two analyses is

(*) Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique. Postal address: Bâtiment 211, Université Paris Sud, 91-Orsay.

(1) S. ALMEHED and C. LOVELACE: Rutgers preprint (1972) and CERN TH 1408 (1972).

(2) R. AYED, P. BAREYRE and Y. LEMOIGNE: *Batavia Conference* (Sept. 1972).

respectively $\sqrt{s} = 2.2$ GeV and $\sqrt{s} = 2.5$ GeV, which are very close to the range where the high-energy models are applied. In particular, in order to study the FESR the high-energy models are forced to be used in the highest phase-shift energy. On the other hand, we have model-independent high-energy amplitudes at $p_{lab} = 6$ GeV/c from the amplitude analysis of HALZEN and MICHEL^(*). Therefore, a direct comparison between these amplitudes and the new phase-shift amplitudes can give us an appreciation about how far are the phase-shift amplitudes from the high-energy region. This comparison is done in Sect. 2.

In Sect. 3 we make the comparison between low- and high-energy amplitudes by means of the continuous-momentum sum rules (CMSR) and finally in Sect. 4 we test the Harari-Freund hypothesis.

2. - Phase-shift analysis and amplitude analysis.

In Fig. 1, the phase and the modulus of the amplitudes have been plotted for the CERN, Saclay and Halzen-Michel analyses. The modulus of the two s -channel helicity amplitudes have a similar behaviour in the three cases, but differences arise in the phases of the helicity amplitudes. In the range $|t| > 0.4$ the Saclay phase $\delta_{\Delta_{1-1}}$ and the Halzen-Michel phase $\delta_{\Delta_{1-1}}$ almost coincide, however the CERN phase $\delta_{\Delta_{1-1}}$ is very different. For $|t| < 0.3$ is the CERN phase $\delta_{\Delta_{1-1}}$ which is most similar to the Halzen-Michel one. The phase $\delta_{\Delta_{1-0}}$ is not very different in the three cases.

In Fig. 2 we have plotted the helicity and invariant amplitudes for CERN and Saclay analyses. For Saclay we plot the amplitudes at two energies: a) $\sqrt{s} = 2.2$ (the maximum CERN energy), b) $\sqrt{s} = 2.5$ (the maximum Saclay energy). The imaginary part of the nonflip amplitude has its zero for all cases (CERN at $\sqrt{s} = 2.2$, Saclay at $\sqrt{s} = 2.2$ and $\sqrt{s} = 2.5$) at $|t|$ larger than 0.2, and for Saclay at $\sqrt{s} = 2.5$ this zero is at exaggeratedly high $|t|$ value. This shows the fact that the phase-shift analyses are doubtful at their highest energies. In the spin-flip amplitude these appears a large difference between CERN and Saclay at $\sqrt{s} = 2.2$. It is remarkable that the imaginary part of the spin-flip amplitude of Saclay has just the $J_1(r\sqrt{-t})$ behaviour ($r \simeq 1$ fm).

(*) F. HALZEN and C. MICHEL: *Phys. Lett.*, **36 B**, 347 (1971).

COMPARISON BETWEEN PHASE-SHIFT ANALYSIS AMPLITUDES ETC.

39

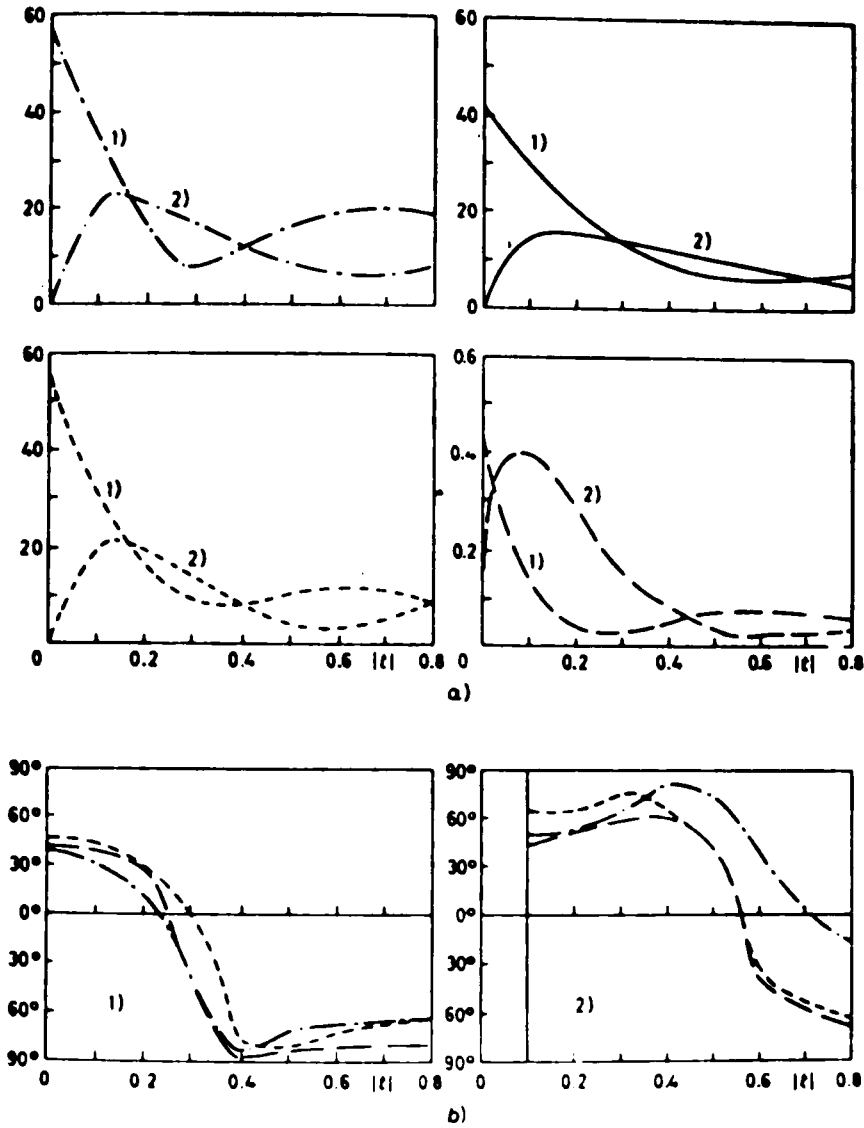


Fig. 1. - Comparison between the phase-shift amplitudes and the amplitude analysis. Figure 1a) shows the modulus of the amplitude: 1) $|\Delta_{l-0}|$, 2) $|\Delta_{l-1}|$. \cdots stands for CERN at $\sqrt{s} = 2.2$, $\cdots\cdots$ for Saclay at $\sqrt{s} = 2.2$, --- for Saclay at $\sqrt{s} = 2.5$ and $\text{---}\cdot\text{---}$ for the amplitudes of HALZEN and MICHEL (these are taken from their paper and therefore with their normalization). Figure 1b) represents the phases of the amplitudes: 1) $\delta_{\Delta_{l-0}}$, 2) $\delta_{\Delta_{l-1}}$. \cdots and $\cdots\cdots$ stand respectively for CERN and Saclay at $\sqrt{s} = 2.2$. --- is the amplitude analysis.

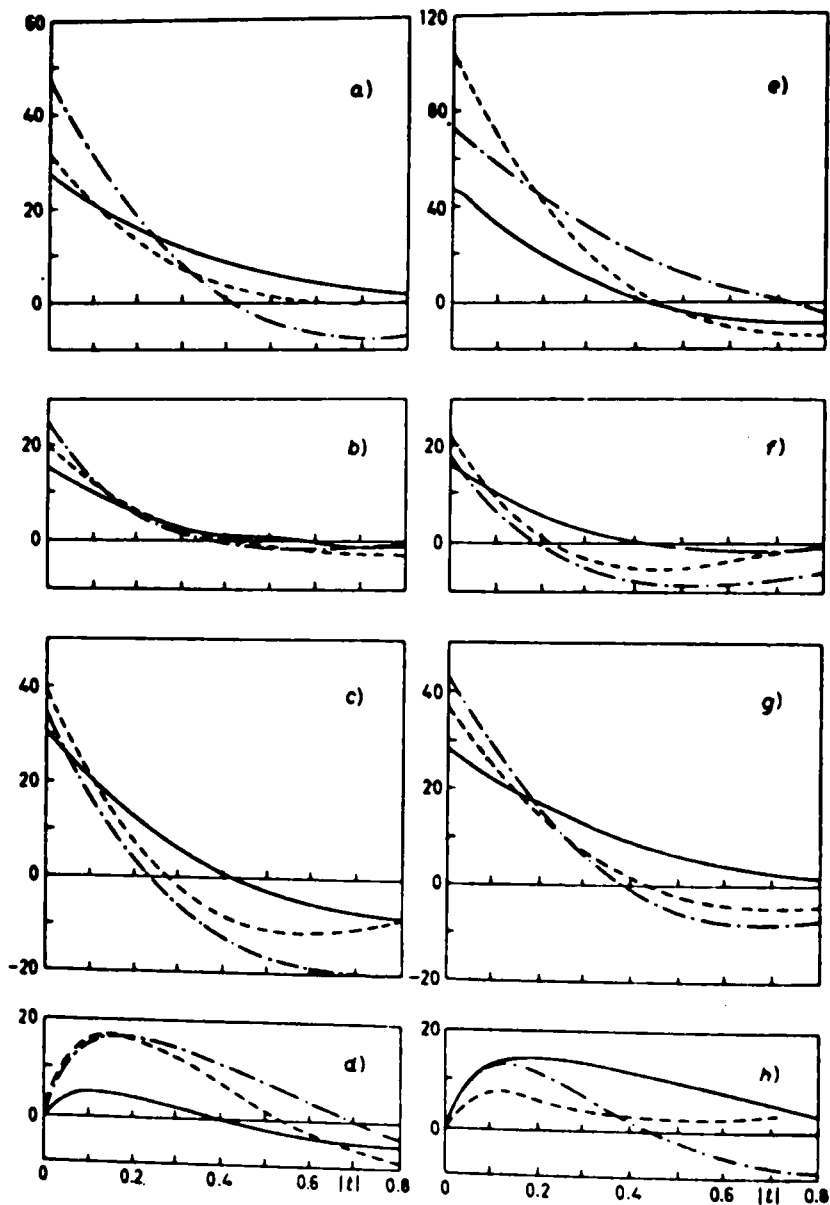


Fig. 2. - s -channel helicity amplitudes and invariant amplitudes --- stands for CERN at $\sqrt{s} = 2.2$, ---- and ——— stand respectively for Saclay at $\sqrt{s} = 2.2$ and $\sqrt{s} = 2.5$. a) $\text{Re } B^{(-)}$, b) $\text{Re } A^{(-)}$, c) $\text{Im } f_{\Delta_{1-0}}^{(+)}$, d) $\text{Im } f_{\Delta_{1-1}}^{(+)}$, e) $\text{Im } B^{(-)}$, f) $\text{Im } A^{(-)}$, g) $\text{Re } f_{\Delta_{1-0}}^{(+)}$, h) $\text{Re } f_{\Delta_{1-1}}^{(+)}$.

3. - Continuous-momentum sum rules.

The continuous-momentum sum rules for this new phase shifts are expected to work like the old ones because the dependence on s at fixed $|t|$ is very similar, only there is a smoother s behaviour at high $|t|$.

We are going to use the CMSR of DRONKERS ⁽⁴⁾ which differs from the conventional ones in that the expansion in Legendre polynomials at low energy of the scattering amplitude is used only in the part of the t -plane where it is expected to be convergent.

This CMSR is

$$(1) \quad (N^2 - \nu_0^2)^{\epsilon/2} \left\{ \text{Im} \int_{\nu_0}^{\nu^1} (\nu_1^2 - \nu^2)^{-(\epsilon+1)/2} (F^{(\nu,t)} - F_{\text{nonres.}}(\nu, t)) d\nu + \text{Born} \right\} = 0,$$

ν_0 is the threshold and ν_1 is defined by $\nu_1 = \nu_0$ if $t > 4\mu^2$ and $\nu_1 = \nu_R = (1/4m) \cdot \sqrt{t + 4\mu^2 - 4m^2}$ if $t < 4\mu^2$. In this way the integral can be divided into two parts: one over the range (ν_0, ν_1) where only the imaginary part contributes and another over the range (ν_1, N) in which both the imaginary and real parts of the amplitude appear. As the boundary of the physical region ν^1 is such that $\nu^1 > \nu_0$, the integral (1) extends over a part of the nonphysical region. The necessary extrapolation of the phase-shift amplitudes for the imaginary part ⁽⁵⁾ is reasonable and moreover the contribution of this part to the whole integral is small. The real part always appears in the region where its expansion in Legendre polynomials converges, because ν_R is just the limit of the convergence region. For $F_{\text{nonres.}}(\nu, t)$ we take the high-energy parametrization of BARGER and PHILLIPS ⁽⁶⁾, which as is well known, describes rightly the high-energy data and agrees with the amplitude analysis ⁽⁷⁾. We know, *a priori*, that the CMSR for this parametrization must work well because it was obtained by fitting the conventional CMSR evaluated with the old phase shift.

The results are presented in Fig. 3. The agreement found is excellent except when ϵ approaches zero; for these ϵ values the errors introduced evaluating numerically the integral can be very large because the function $(\nu_1^2 - \nu^2)^{-(\epsilon+1)/2}$ appearing in (1) becomes infinite for $\epsilon > -1$, when $\nu \rightarrow \nu_1$. The Figure shows that the CMSR are not sensitive to the two phase shifts used, which is due to a similar dependence on the energy of the two analyses.

For $\epsilon = -1$ in formula (1) we obtain the conventional first right-signature finite-energy sum rule ⁽⁷⁾. If we look at this sum rule for the amplitude $A^{(-)}$,

⁽⁴⁾ J. DRONKERS: *Nuovo Cimento*, **13** A, 217 (1973).

⁽⁵⁾ F. STEINER: *Phys. Lett.*, **32** B, 294 (1970).

⁽⁶⁾ V. BARGER and R. J. N. PHILLIPS: *Phys. Rev.*, **187**, 2210 (1969).

⁽⁷⁾ R. DOLEN, D. HORN and C. SCHMID: *Phys. Rev.*, **166**, 1768 (1968).

42

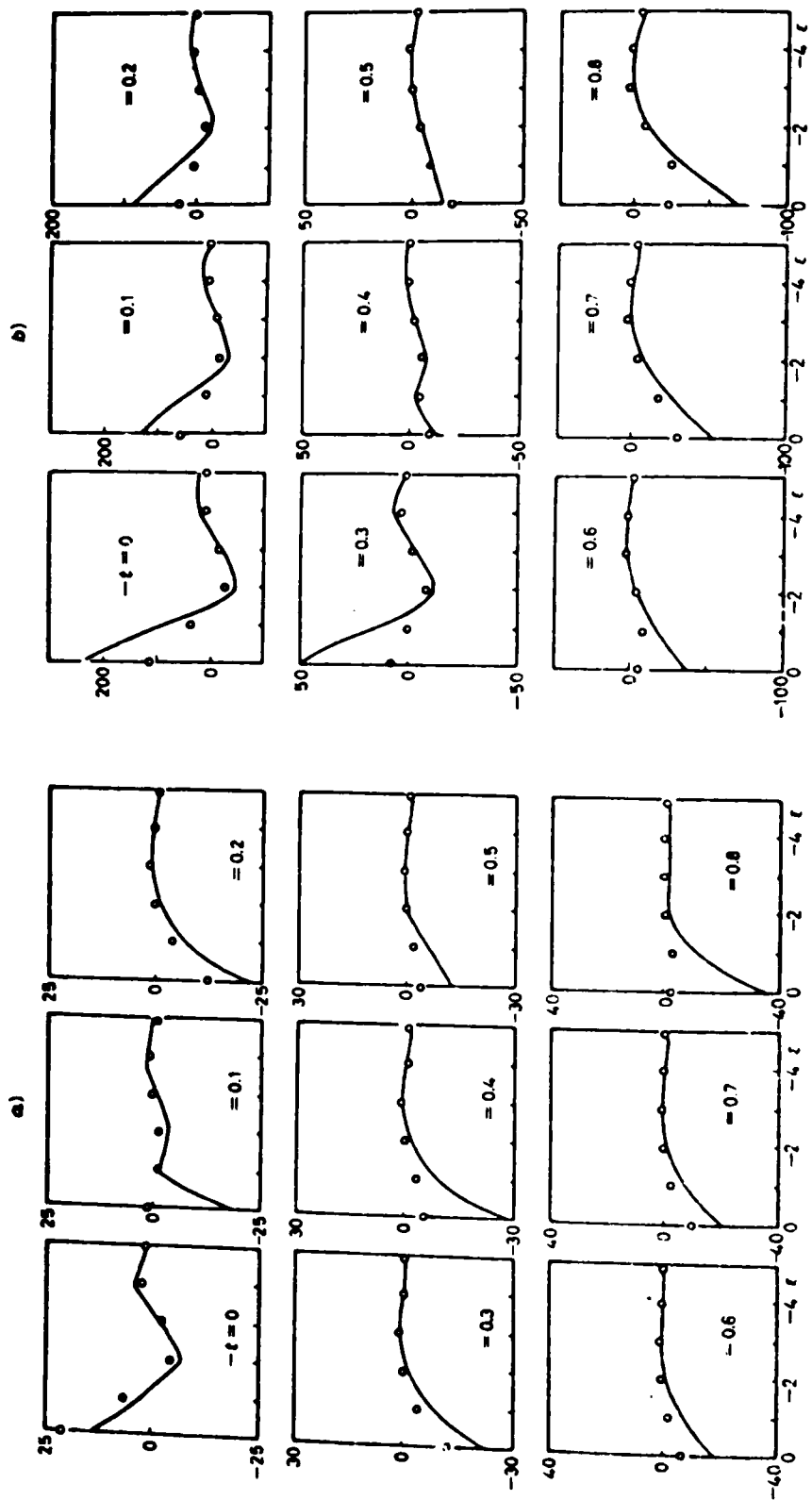


Fig. 3. - Results of the CMSR. N corresponds to $\sqrt{s} = 2.2$. --- represents the low-energy integral. — represents the high-energy integral. Figures 3a) and 3b) show the results for the CERN, $F(\nu, t)$ being respectively $A^{(-)}$ and $\nu B^{(-)}$.

COMPARISON BETWEEN PHASE-SHIFT ANALYSIS AMPLITUDES ETC.

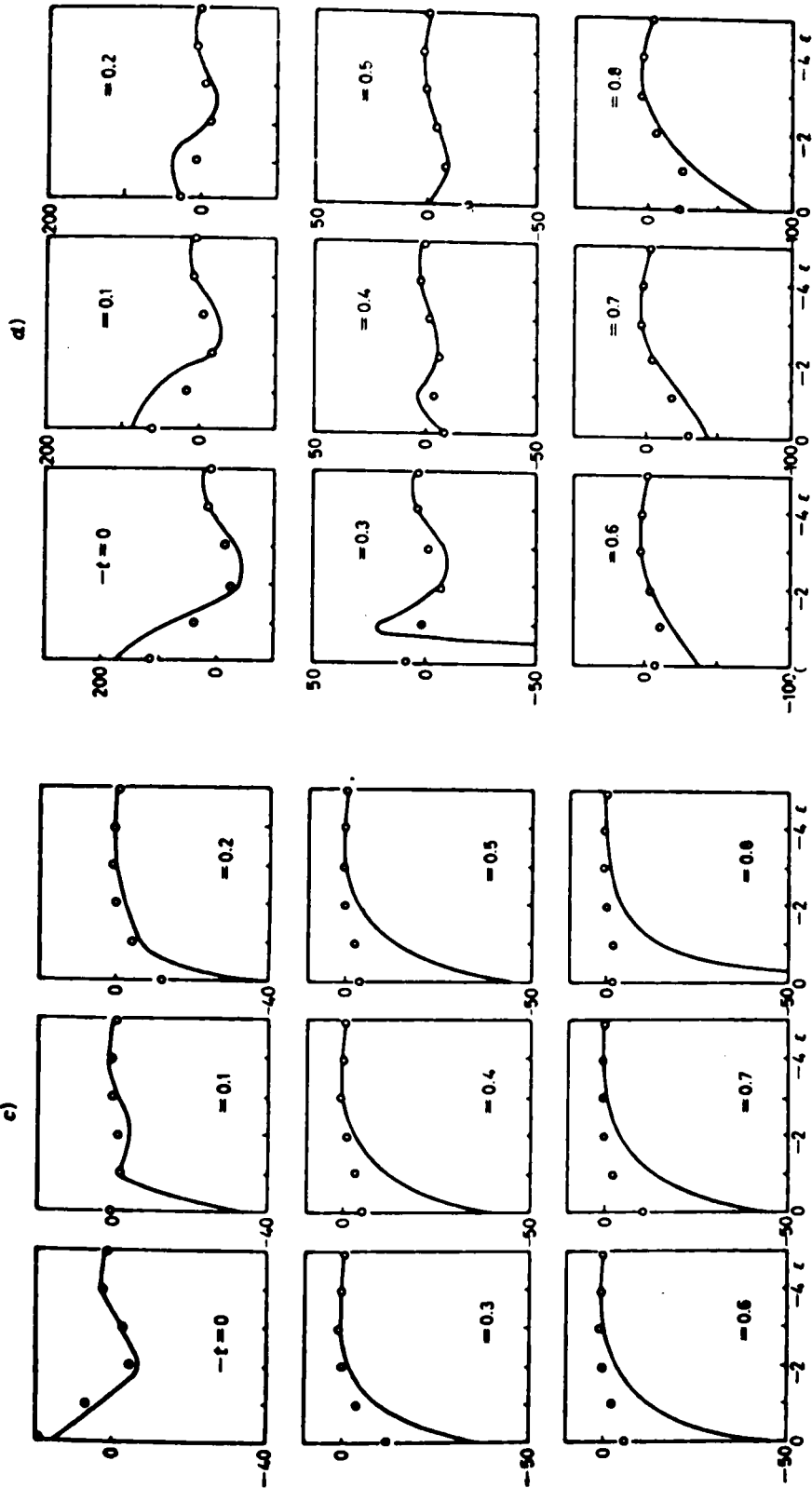


Fig. 3. - Results of the CMSR. N corresponds to $\sqrt{s} = 2.2$. --- represents the low-energy integrals. - - - - - represents the high-energy integrals. Figures 3c) and 3d) are similar to Fig. 3a) and 3b) but using Saclay analysis.

we see that the low-energy integral vanishes at a value close to $t = -0.1$; this is in agreement with the zero that the parametrization of BARGER and PHILLIPS presents. However from Fig. 1 we see that $\text{Im } A^{(-)}$ at $\sqrt{s} = 2.2$ given by both phase shift analyses presents the zero at values close to $t = -0.2$. This fact reflects some inconsistency between the phase-shift analysis and analyticity.

The ρ contribution to the $B^{(-)}$ amplitude vanishes at $\alpha = 0$, therefore the low-energy integral at this t should cross the ρ' contribution. Figure 4 shows that this is achieved.

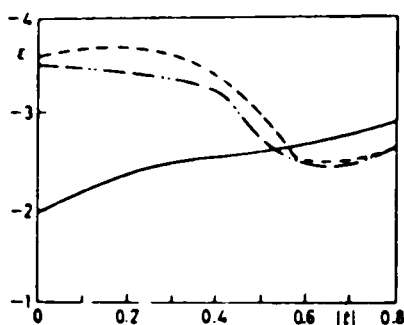


Fig. 4. - (s, t) diagram showing the crossing of the curve on which the $\nu B^{(-)}$ CMSR vanishes. - - - - and - - - - stand respectively for CERN and Saclay and the curve on which the ρ' contribution to the $\nu B^{(-)}$ CMSR vanishes (—).

At $\sqrt{s} = 2.05$ the CMSR must work better than at $\sqrt{s} = 2.2$. We have investigated the CMSR at $\sqrt{s} = 2.5$ for Saclay and the agreement is not better; this could be due to the strange t behaviour at high energy of the Saclay phase shift.

4. - The Harari-Freund hypothesis.

It has been pointed out (*) that the sum of resonances does not build up completely the imaginary part of the amplitudes in disagreement with the Harari-Freund (*) hypothesis. It was found that the difference between $\int_0^{\infty} \text{Im } \nu B^{(-)} d\nu$, computed with the new CERN phase shift, and the sum of Breit-Wigner resonances was 27% at $t = 0$. At high $|t|$ values this difference was smaller. On the contrary, the difference for $\int_0^{\infty} \text{Im } A^{(-)} d\nu$ was smaller at small $|t|$.

(*) S. KOGITZ, P. LEE and R. K. LOGAN: *Phys. Rev. D*, **6**, 935 (1972).

(*) P. G. O. FREUND: *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 235 (1968); H. HARARI: *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 1395 (1968); H. HARARI and Y. ZARMI: *Phys. Rev.*, **187**, 2230 (1969); R. JOHNSON: *Phys. Rev.*, **183**, 1406 (1968).

In Fig. 5 are plotted the values of $\int_0^N \text{Im } \nu B^{(-)} d\nu$ evaluated for the two phaser shifts together with the sum of the resonances. At $t = 0$ there is a difference between the values of the two phase shifts of 9%. Also, the values corresponding to the Saclay phase shift and the sum of resonances are not equal. Their difference is about 36%. An first sight this is incompatible with the Harari-

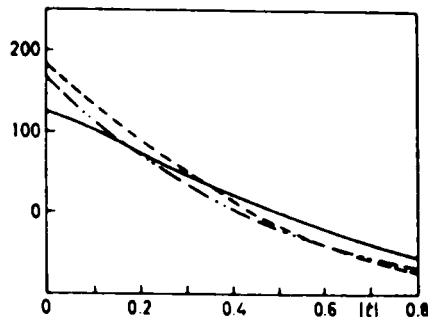


Fig. 5. - $\int_0^N \text{Im } \nu B^{(-)} d\nu$ for N corresponding to $\sqrt{s} = 2.2$. - - - - and - . - . stand respectively for CERN and Saclay. — is the sum of resonances taken from ref. (4).

Freund hypothesis. However, as we see from Fig. 4 the two phase-shift analyses at $\sqrt{s} = 2.2$ give a different $\nu B^{(-)}$ amplitude and therefore the value of the integral would be very different for the two analyses if N were taken higher than $\sqrt{s} = 2.2$. This fact together with other sources of errors (for instance widths used in the sum of resonances) could make the situation compatible with the Harari-Freund hypothesis.

5. - Conclusion.

In this comparative study, we have seen that differences appear between the two new phase-shift analyses when one looks at the t -dependence of the amplitudes at its highest energy. There appears a strange behaviour for the Saclay amplitudes at $\sqrt{s} = 2.5$ in conflict with the cross-over and current ideas of peripherality. Also the CERN amplitudes at their highest energies show unwanted features. Moreover the CMSR show the zero of the spin-flip amplitude at a t value lower than the one corresponding to the zero shown by the phase-shift analyses at their highest energies, in conflict with analyticity. These features are a reflection of the instability of the phase shifts at their highest energies. However, at lower energies, the phase-shift analyses show roughly the high-energy behaviour, so the s -channel spin-flip amplitude of Saclay, at $\sqrt{s} = 2.2$ GeV, has just the $J_1(\tau\sqrt{-t})$ behaviour. Also the modulus and phases of the amplitudes have the same shape as the Halzen and Michel amplitudes.

The CMSR work essentially like with the old phase shifts. They are in agreement with the zero at $t = 0.55$ of the ρ contribution to the $B^{(-)}$ amplitude. The Harari-Freund hypothesis is not completely satisfied with both phase-shift analyses.

• • •

We thank Prof. A. CAPELLA for a critical reading of the manuscript and useful discussions, Profs. H. HÖGAASEN and B. PETERSSON are acknowledged for useful discussions. We thank Profs. R. AYED and P. BAREYRE for making their phase shifts available to us prior to publication; useful discussions with them are also acknowledged. One of us (C.P.) thanks the kind hospitality of the LPTPE and the G.I.F.T. for financial support.

PARTIE II. POLES FIXES DANS LE PLAN COMPLEXE DU MOMENT ANGULAIRE
DANS LES REACTIONS HADRONIQUES.

II.1. Introduction.

En plus des pôles de Regge et, éventuellement des coupures, des pôles fixes "nonsensés" (c'est à dire, appartenant à des valeurs non-physiques du moment angulaire) peuvent apparaître dans le plan complexe de J lorsqu'on prolonge analytiquement les amplitudes partielles.

Considérons un processus à deux corps de particules identiques élastique et sans spin pour lequel on a une amplitude $T(\nu, t)$ pour cette réaction. La continuation analytique des amplitudes partielles $T_l^\pm(t)$ est donnée par la formule ⁽²⁾,

$$T_l^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dz Q_l(z) \{ T(\nu, t) \pm T(-\nu, t) \} \quad (1)$$

où $\nu = (s-u)/4 = q^2 z$, q étant l'impulsion et z l'angle de diffusion dans le centre de masse de la voie t , et C_1 le contour de la Fig. 1,

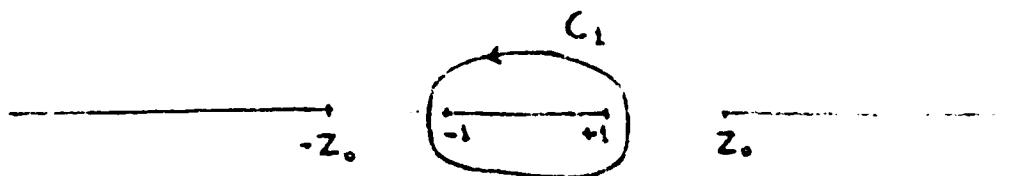


Fig. 1

Pour les valeurs négatives de l , Q_l a des pôles analogues

$$Q_l(z) \sim \frac{1}{l+n} P_{n-1}(z) \quad (2)$$

et, par la relation (1), on doit retrouver ces pôles dans $T_l^\pm(t)$.

L'intégrale (1) se fait sur le contour C_1 , qui doit être essentiellement la coupure de la fonction Q_l . Ce contour peut être déformé comme l'on veut, à condition qu'il ne passe pas par les pôles de Q_l . On peut alors dire que l'intégrale s'effectue sur les coupures de Q_l qui tendent de $z = 1 + \epsilon \mu^{2l/n}$ à l'infini, et de $-z_0$ à moins

ce qui nous permettra de faire intervenir directement des magnitudes observables, ceci en vue d'exprimer les résidus des pôles fixes en fonction de ces quantités.

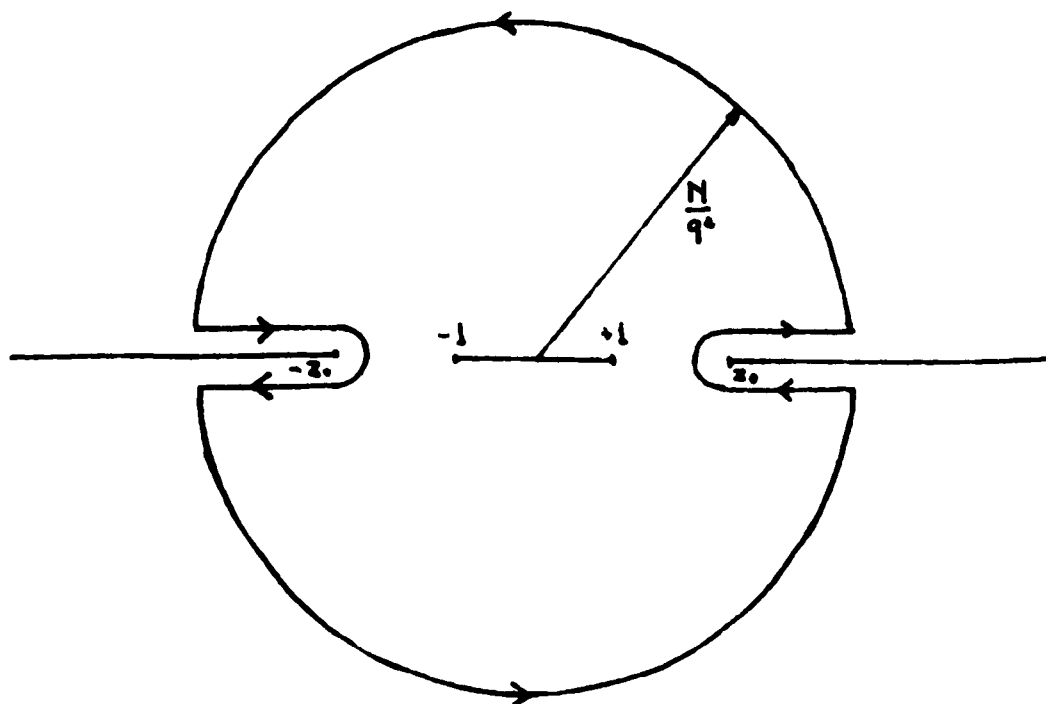


Fig. 2

Dans ce cas, la relation (1) se transforme en l'expression suivante (2),

$$T_1^{\pm}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{q^2} O_1\left(\frac{\nu}{q}\right) \{D_s(\nu, t) \pm D_u(-\nu, t)\} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z| = \frac{N}{q^2}} dz O_1(z) \{T(\nu, t) \pm T(-\nu, t)\}$$

où $D_s(\nu, t)$ et $D_u(\nu, t)$ sont les discontinuités respectives de l'amplitude $T(\nu, t)$ le long des coupures de droite et de gauche.

Si l'on prend N assez grand, on peut substituer dans la deuxième intégrale de (3) $T(\nu, t)$ par son comportement asymptotique:

$$T^{\pm}(\nu, t) = \sum_i \{ \beta_s^i(t) \nu^{\alpha_i(t)} \pm \beta_u^i(t) (-\nu)^{\alpha_i(t)} \} \quad (4)$$

Tenant compte du fait que

$$Q_l(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} f(l) z^{-l-1} \quad \text{ou} \quad f(l) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+1}} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} \quad (5)$$

on peut évaluer la deuxième intégrale et l'on arrive à

$$T_l^{\pm}(t) = \frac{1}{\pi} \int_u^N \frac{d\nu}{q^2} Q_l\left(\frac{\nu}{q}\right) \{D_s(\nu, t) \pm D_u(-\nu, t)\} \\ + \frac{1}{\pi} f(l) (q^2)^l \sum \frac{N^{\alpha_i(t)-l}}{\alpha_i(t)-l} \{B_s^i \pm B_u^i\} \sin \pi \alpha_i(t) \quad (6)$$

On peut voir dans cette formule que, en particulier, la contribution des puissances entières de ν dans (4) s'annule à cause du facteur $\sin \pi \alpha_i$ et il ne reste que les pôles de Regge habituels.

Tenant compte de (2) et du fait que

$$\Gamma(l+1) \underset{l \rightarrow -n}{\sim} \frac{1}{l+n} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \quad (7)$$

on peut calculer le résidu du pôle fixe à $l = -n$, ce qui nous donne finalement

$$f_n^{\pm}(t) = \frac{1}{\pi} \int_u^N \frac{d\nu}{q^2} P_{n-1}\left(\frac{\nu}{q}\right) \{D_s(\nu, t) \pm D_u(-\nu, t)\} \\ + \frac{1}{\pi} (q^2)^n \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} \sum_i \frac{N^{\alpha_i+n}}{\alpha_i+n} \{B_s^i \pm B_u^i\} \sin \pi \alpha_i \quad (8)$$

Pour une valeur de n on a un pôle pour chaque signature. Si l'amplitude possède la signature $(-1)^n$, on dit que l'on a un pôle de bonne signature; ces pôles donnent une contribution à la partie asymptotique de l'amplitude (voir ref. (2)). Si l'amplitude a la signature $(-1)^{n+1}$, on dit que c'est un pôle de mauvaise signature et il ne contribue pas à l'amplitude.

Si le résidu du pôle fixe s'annule, la formule (8) devient

une règle de somme à énergie finie (de bonne ou mauvaise signature). Puisque

$$\text{Im } T^{\pm}(\nu, t) = D_3(\nu, t) \pm D_4(-\nu, t)$$

il est intéressant de comparer (8) avec les règles de somme comme on les avait présenté dans I.1. En particulier, on voit que pour qu'une règle de somme soit satisfaite, il faut que le résidu du pôle fixe s'annule.

II.1.1. Pôles fixes et unitarité.

L'existence de pôles fixes dans le plan complexe du moment angulaire a fait l'objet de controverses pendant longtemps. Si bien Mandelstam et Wang ⁽³⁾ ont démontré qu'ils devaient être présents si la troisième fonction spectrale ρ_{su} ne s'annule pas, les pôles fixes posaient un problème du point de vue de l'unitarité ⁽⁴⁾. En effet, si l'amplitude $T^{\pm}(J, s)$ se comporte comme

$$\frac{f_{n_0}^{\pm}(s)}{J - n_0}$$

pour $J \rightarrow n_0$, l'équation d'unitarité

$$T^{\pm}(J, s+i\epsilon) - T^{\pm}(J, s-i\epsilon) = 2i T^{\pm}(J, s+i\epsilon) \rho(s) T^{\pm}(J, s-i\epsilon) \quad (9)$$

ne peut évidemment être satisfaite. On supposait généralement que si les pôles fixes étaient présents dans l'amplitude, ils seraient associés à une coupure ("shielding-cut") qui les placerait dans un autre feuillet, l'équation d'unitarité (5) restant ainsi satisfaite.

(2)

Dans cet esprit, Capella, Diu et Kaplan montrèrent que, quand on considère l'unitarité à plusieurs voies, la présence de pôles fixes dans certains cas n'est pas incompatible avec celle-ci. Ils ont également prouvé que si un pôle fixe est présent dans une voie, il se propage par le biais de l'unitarité à d'autres réactions.

Considérons par exemple les réactions $K\pi \rightarrow K\pi$,

$\pi N \rightarrow \pi N$ et $K N \rightarrow \bar{K} N$. Dans l'intervalle $(2m\pi)^2 < t < (4m\pi)^2$, l'unitarité dans la voie t pour l'amplitude de spin-flip de $\bar{K} N$ s'écrit

$$H_1(J, t+i\epsilon) - H_1(J, t-i\epsilon) = 2i \rho(t) K_1(J, t+i\epsilon) F(J, t-i\epsilon) \quad (10)$$

où $F(J, t)$, $K_1(J, t)$ et $H_1(J, t)$ correspondent respectivement à $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$, $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ et $N\bar{N} \rightarrow K\bar{K}$ (on considère seulement les amplitudes de signature négative). Si un pôle fixe de mauvaise signature existe à $J=0$ pour $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ (comme Dolen et al. l'on montré ⁽⁶⁾), le comportement de $K_1(J, t)$ pour $J \rightarrow 0$ doit être (voir référence ⁽⁷⁾),

$$K_1(J, t) = \frac{k_1(t)}{\sqrt{J}} \quad (11)$$

$F(J, t)$ étant régulière, on voit donc que pour que l'équation (10) soit satisfaite il faut que

$$H_1(J, t) = \frac{h_1(t)}{\sqrt{J}} \quad (12)$$

Le pôle fixe de mauvaise signature à $J=0$ pour $\pi N \rightarrow \pi N$ engendre donc un pôle fixe de mauvaise signature à $J=0$ pour la réaction $\bar{K} N \rightarrow \bar{K} N$.

II.1.2. Analyse des réactions $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ et $K^- N \rightarrow \pi^- \Lambda$ avec les règles de somme à énergie finie.

Dans la première partie de ce paragraphe II.1, nous avons vu que les règles de somme nous permettent de calculer les résidus des pôles fixes pour une réaction donnée à partir des paramétrisations des amplitudes de basse et de haute énergie. Ceci fait l'objet de II.2 où nous calculons le résidu du pôle fixe de mauvaise signature pour $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ et $K^- N \rightarrow \pi^- \Lambda$.

Pour la réaction πN échange de charge, on évalue la première règle de somme de mauvaise signature pour l'amplitude invariante $B^{(-)}$,

$$\int_0^N d\nu \operatorname{Im} B^{(-)}(\nu, t) = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t)} N^{\alpha_i(t)} + C(t) \quad (13)$$

où $C(t)$ correspond au résidu du pôle fixe. La partie de gauche est évaluée par des analyses en déphasages ⁽⁸⁾, et la partie de droite par des paramétrisations à la Regge.

Nous trouvons $C(t)$ nettement non négligeable, même assez important; nous trouvons également que, en faisant varier N pour une gamme assez large de valeurs en énergie, $C(t)$ demeure à peu près constant, ce qui montre la consistance du calcul. Nous confirmons donc l'existence du pôle fixe de mauvaise signature à $J=0$ dont l'existence avait déjà été mise en évidence par Dolen et al. ⁽⁶⁾.

Nous trouvons également que, en saturant la partie de gauche de (3) avec seulement le terme de Born et les résonances non-périphériques, on reproduit $C(t)$.

Comme l'on a vu dans le paragraphe II.1.1, si un pôle fixe existe pour πN échange de charge, l'unitarité implique qu'il existe un autre pôle fixe pour $\bar{K}N$ échange de charge. Pour trouver ce pôle fixe, dans II.2.3 nous évaluons la première règle de somme de mauvaise signature,

$$\int_0^N \operatorname{Im} \{ B_1^{(-)}(\nu, t) - B_2^{(-)}(\nu, t) \} d\nu = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t)} N^{\alpha_i(t)} + D(t) \quad (14)$$

où B_1 et B_2 sont, respectivement, les amplitudes invariantes B , pour la réaction $K\bar{p} \rightarrow \bar{K}^0 n$ et $K^+ n \rightarrow K^0 p$; $D(t)$ est le résidu du pôle fixe. Nous calculons la partie de gauche de (14) en utilisant l'approximation à résonances étroites. Parmi plusieurs paramétrisations pour la partie de Regge, on a choisi celles qui satisfont mieux la première règle de somme de bonne signature,

$$\int_0^N \nu \operatorname{Im} \{ B_1^{(-)}(\nu, t) - B_2^{(-)}(\nu, t) \} d\nu = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t) + 1} N^{\alpha_i(t) + 1}$$

Nous trouvons $D(t)$ non nul, bien que nos résultats soient dans ce cas un peu ambigus puisque les constantes de couplage utilisés ne sont pas aussi bien connues que dans le cas précédent.

Comme dans le cas $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ nous observons que si l'on sature le membre de gauche de (16) avec des résonances non périphériques plus le terme de Born, on reproduit le résidu du pôle fixe.

Le rôle inespéré que semblent jouer les résonances non-périphériques en relation avec les pôles fixes, nous a amené à considérer des réactions où celles-ci jouent un rôle important, comme $K^- N \rightarrow \pi^- \Lambda$. Pour cette réaction, comme dans les cas précédents, nous évaluons la première règle de somme de mauvaise signature,

$$\int_0^M \text{Im} \frac{1}{2} \{ B_1^{(-)}(\nu, t) - B_2^{(-)}(\nu, t) \} d\nu = \frac{b^-(t)}{\alpha^-(t)} \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^{\alpha^-(t)} + F(t) \quad (16)$$

où B_1 et B_2 correspondent respectivement aux réactions $K^- n \rightarrow \pi^- \Lambda$ et $\pi^+ n \rightarrow K^+ \Lambda$, et $F(t)$ est le résidu du pôle fixe. L'évaluation de (16) nous donne une nette différence entre le membre de gauche (calculé avec des résonances étroites) et le membre de droite (Regge), qui ne peut pas être attribuée aux approximations faites. Comme précédemment, nous trouvons que les résonances non-périphériques construisent à peu près le résidu du pôle fixe.

REFERENCES

- (¹) P.D.B. Collins et E.J. Squires, "Regge Poles in Particle Physics", Springer-Verlag, 1968, p. 133.
 - (²) A. Capella, B. Diu et J.M. Kaplan, Nucl. Phys. B47, 365 (1972); A. Capella, Proc. Rencontre de Moriond, 1972.
 - (³) S. Mandelstam et L.L. Wang, Phys. Rev. 160, 1490 (1967).
 - (⁴) P.D.B. Collins et E.J. Squires, "Regge Poles...", p.132.
 - (⁵) R. Oehme, Trieste preprint (1971).

 - (⁶) R. Dolen, D. Horn et C. Schmid, Phys. Rev. 166, 1768 (1968).
 - (⁷) P.D.B. Collins et E.J. Squires, "Regge Poles...", p.106, 107.
 - (⁸) S. Almeded et C. Lovelace, Nucl.Phys. 40B, 157 (1972).
 - (⁹) XVII International Conference on High Energy Physics, London 1974, Section I.
-

Paragraphe II.2.

7.B.1

Nuclear Physics B49 (1972) 285 - 301. North-Holland Publishing Company

**FIXED POLES IN THE t -CHANNEL HELICITY-FLIP AMPLITUDE
IN CHARGE- AND HYPERCHARGE-EXCHANGE REACTIONS**

J. GABARRÓ and C. PAJARES

*Laboratoire de Physique Théorique et Particules Élémentaires, Orsay **

Received 5 July 1972

(Revised 31 July 1972)

Abstract: We try to find evidence for fixed poles in two-body meson-baryon scattering. The contributions of wrong-signature fixed poles occur in wrong-signature sum rules. We evaluate the first wrong-signature sum rule for the t channel helicity flip amplitude in πN , $\bar{K}N$ charge-exchange and in hypercharge-exchange scatterings. According to recent theoretical analysis the $J = 0$ $\bar{K}N$ charge-exchange wrong-signature fixed pole is generated, via t -channel unitarity, from the πN one. Its existence implies a $J = 0$ $\bar{K}N$ charge-exchange right-signature fixed pole. Evidence for the existence of a $J = 0$ wrong-signature fixed pole is found in all of them. It is also found that the non-peripheral resonances are mainly responsible for all these fixed poles.

1. INTRODUCTION

Recently, it has been shown [1], by applying unitarity in the t -channel, that the $J = 0$ πN CEX wrong-signature (WS) fixed pole of the $B^{(-)}$ amplitude, (t -channel helicity-flip amplitude) found by Dolern, Horn and Schmid [2], is propagated to other reactions, in particular to KN CEX, generating in this one a WS fixed pole in the t -channel helicity-flip amplitudes. Also in the last reaction, there will exist a $J = 0$ right-signature (RS) fixed pole in the opposite-signature amplitude. The residues of both fixed poles, WS fixed pole and RS fixed pole are equal up to a sign. This result follows from the assumption that the s -channel imaginary part approximately vanishes in exotic reactions without pomeron exchange.

In this paper, firstly we examine in sect. 2 the $J = 0$ πN CEX WS fixed pole. For this, we study the first wrong-signature sum rule [20] (WS FESR) for the amplitude $B^{(-)}$. To evaluate the left-hand side of this sum rule the old CERN Kirsopp [3] phase shifts as well as the new ones [4] are used. The range of integration is larger than

* Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique Postal address: Laboratoire de Physique Théorique et Particules Élémentaires, Bâtiment 211, Université Paris Sud, 91 - Orsay, France.

the one used in ref. [2]. Also better high-energy parametrization is used. The existence of the fixed pole is confirmed.

Sect. 3 is devoted to the problem of a possible $J = 0 \bar{K}N$ CEX, WS (RS) fixed pole. Here, we find more difficulties than in πN CEX due to the scarce knowledge of this interaction, in particular there are not phase shifts for the reactions involved, but evidence for the existence of a $J = 0$ WS fixed pole is also found.

The πN and $\bar{K}N$ CEX WS FESR show that the fixed poles are mainly built by non-peripheral resonances. In hypercharge-exchange reactions these resonances seem to be important [14], what induces us to look at these reactions. This is done in sect. 4 where we study the first WS FESR for the B -amplitude, (defined as the difference between the B -amplitudes of the reactions $K^- n \rightarrow \pi^- \Lambda$ and $\pi^+ n \rightarrow K^+ \Lambda$). Again evidence of the existence for a WS fixed pole is found.

In order to be consistent with our WS FESR evaluations, we choose as high-energy parametrizations the ones that satisfy better the conventional FESR.

Finally in sect. 5, the conclusions are presented.

2. πN CEX WS FIXED POLE

The first WS FESR for the πN CEX B -amplitude is given by the expression

$$\int_0^M \text{Im } B^{(-)}(\nu, t) d\nu = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t)} N^{\alpha_i(t)} + C(t). \quad (1)$$

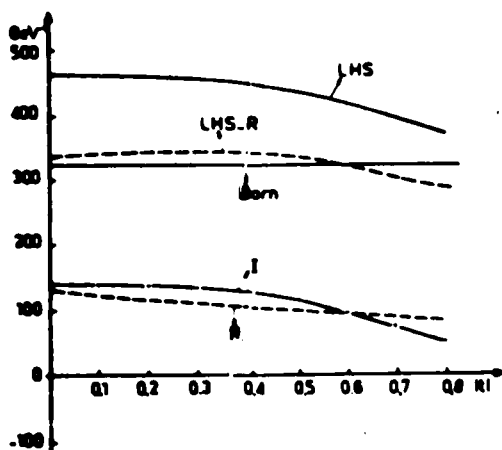


Fig. 1. Different contributions to the WS FESR in πN CEX; LHS stand for the left-hand side evaluated with the old phase shifts; R is the high energy contribution using the parametrization (1); I is the left-hand side of (1) without Born term; N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$.

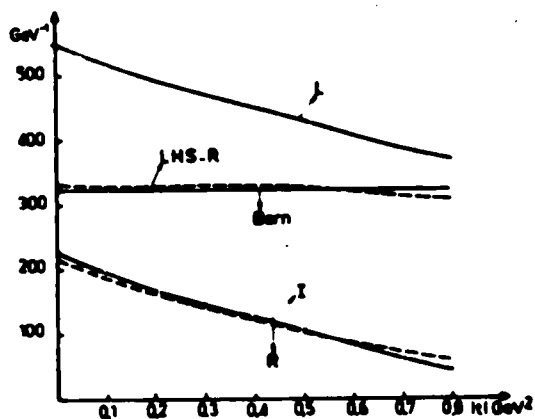


Fig. 2. The same quantities of fig. 1 but N corresponds to $\sqrt{s} = 2.075$.

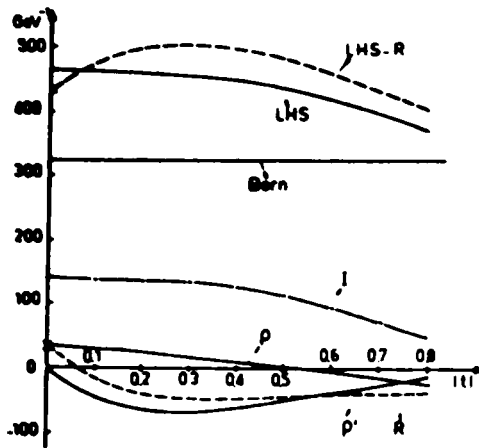


Fig. 3. The same quantities of fig. 1, but using the high-energy parametrization (II) for R. The ρ and ρ' contributions are also plotted; N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$.

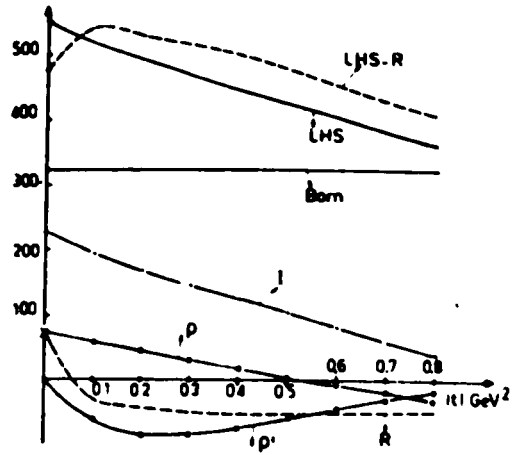


Fig. 4. The same quantities of fig. 3; N corresponds to $\sqrt{s} = 2.075$.

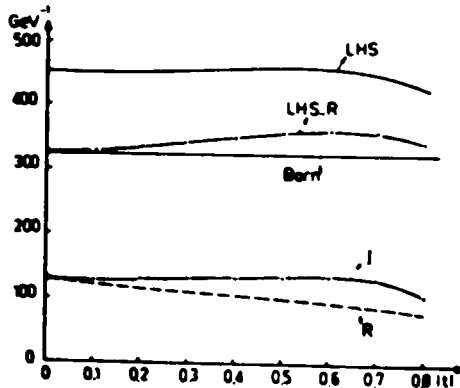


Fig. 5. The same quantities of fig. 3 but using the high energy parametrization (III) for R; N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$.

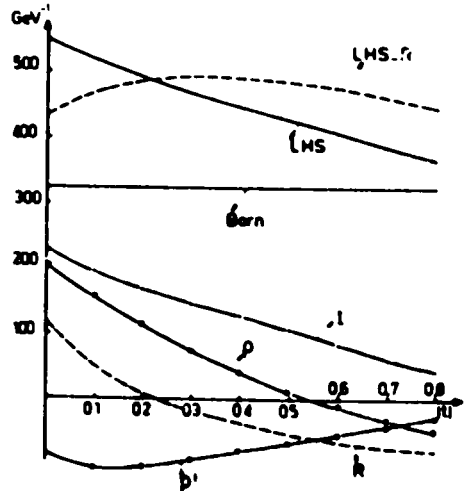


Fig. 6. The same quantities of fig. 5; N corresponds to $\sqrt{s} = 2.075$.

The Regge contribution to formula (1) comes from a high energy parametrization of the form

$$\text{Im } B^{(-)}(\nu, t) = \sum_i \beta_i(t) \nu^{\alpha_i - 1}$$

(In this section we use also high-energy parametrizations of the form

$$B^{(-)}(\nu, t) = \sum_i B_i(\nu_0^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}(\alpha_i - 1)},$$

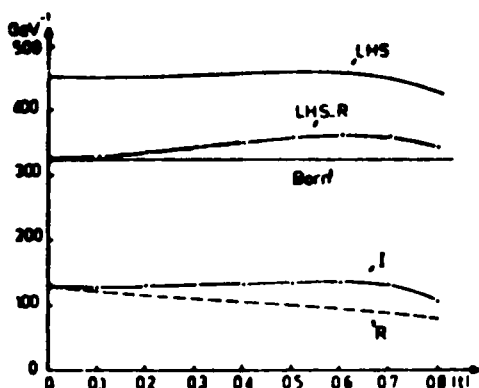


Fig. 7. Difference between the left-hand side (LHS) of the WS FESR in πN CEX evaluated with the new phase shifts and the Regge contribution (R). We use I as high-energy parametrization; N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$.

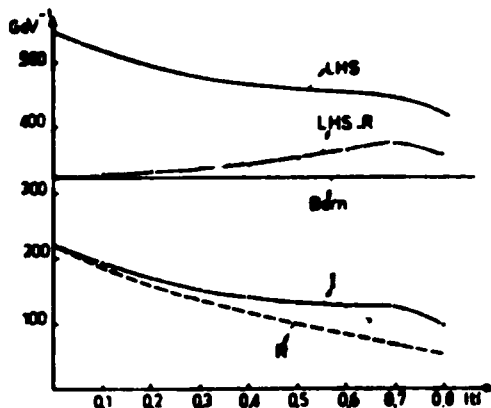


Fig. 8. The same quantities of fig. 7; $\sqrt{s} = 2.075$.

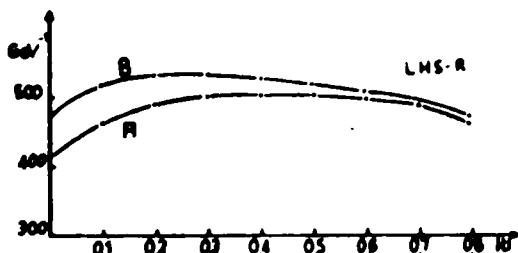


Fig. 9. Difference between LHS and R using the phase shifts (b) and the high-energy parametrization (II) (A) N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$. (B) N corresponds to $\sqrt{s} = 2.075$.

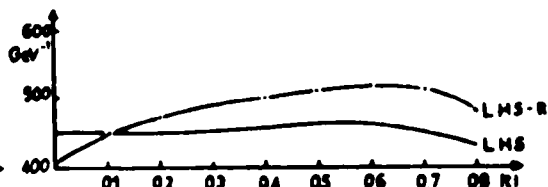


Fig. 10. Difference between LHS and R using (b) and (III). The left-hand side is also plotted; N corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$.

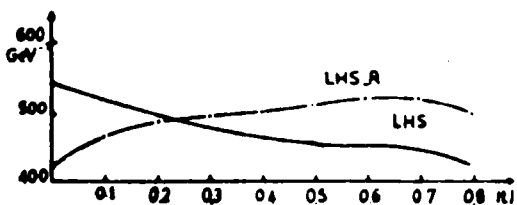


Fig. 11. Similar to fig. 10 but $\sqrt{s} = 2.075$.

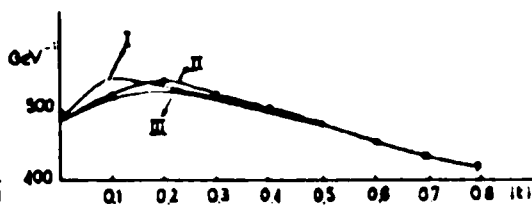


Fig. 12. Difference LHS Regge using (a) and (II); N corresponds to I: $\sqrt{s} = 2.075$; II: $\sqrt{s} = 1.96$; III: $\sqrt{s} = 1.845$.

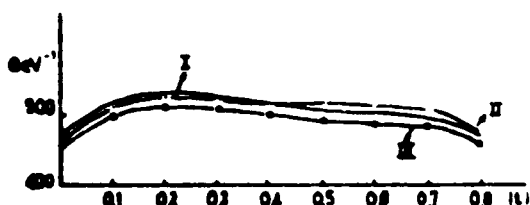


Fig. 13. Similar to fig. 12 but using the phase shifts (b).

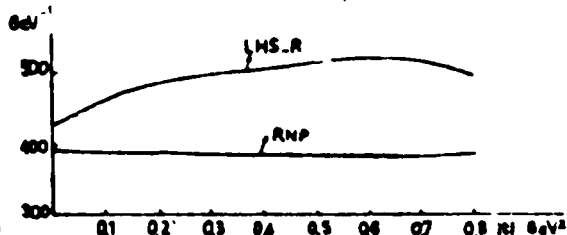


Fig. 14. LHS R using (b) and (III). RNP means the sum of the non-peripheral resonances.

therefore in these cases the integral of this expression over the circle of radius N will replace the expression

$$\sum_i (\beta_i(r)/\alpha_i(r)) N^{\mu_i(r)}$$

in formula (1)); $C(r)$ denotes the residue of the $J = 0$ WS fixed pole.

To evaluate the sum rule (1), we use in the left-hand side the phase shifts of CERN Kirsopp [3] and also the new ones of Almeded and Lovelace [4]. For each phase-

Table 1
 πN resonances, used in the evaluation of LHS of (1).

	l	J^P	Wave	$\Gamma(\text{MeV}) \rightarrow \pi N$
N(1470)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	P_{11}	155
N(1520)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^-$	D_{13}	56
N(1535)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^-$	S_{11}	27
N(1670)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^-$	D_{15}	61
N(1688)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	F_{15}	75
N(1700)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^-$	S_{11}	182
N(1780)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	P_{11}	121
N(1860)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	P_{13}	75
N(1990)	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}^+$	F_{17}	25
N(2040)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^-$	D_{13}	49
N(2190)	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}^-$	G_{17}	75
$\Delta(1236)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^+$	P_{33}	119
$\Delta(1650)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}^-$	S_{31}	43
$\Delta(1670)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^-$	D_{33}	29
$\Delta(1890)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}^+$	F_{35}	42
$\Delta(1910)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}^+$	P_{31}	75
$\Delta(1950)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}^+$	F_{37}	94

The partial widths are in the range of values of Particle Data Group [9]. They are the average over the possible values.

shift set the highest cut-off used is, respectively: N corresponding to $\sqrt{s} = 2.075$ and $\sqrt{s} = 2.2$ GeV. From now on the two phase shifts will be denoted by (a) and (b). For the Regge contribution we use three different parametrizations: (I) the old parametrization of Arbab and Chiu [5]. It has only a ρ -Regge pole. It is the parametrization used in ref. [2]; (II) the Barger and Phillips [6] parametrization, which uses ρ and ρ' Regge poles. It was obtained by fitting high-energy data and CMSR; (III) the de Briom and Derem [7] parametrization, also with a ρ and a ρ' . It was obtained by fitting the high-energy data. It satisfies [8] also the CMSR. It is very similar to the parametrization (II).

In figs. 1 to 11 we have plotted the left-hand side of (1), the Regge contribution and the difference between them. The figs. 1 to 6 show the results for the phase shifts (a). The figs. 7 to 11, for (b). For each high-energy parametrization there are two plots corresponding to two different N . One corresponds to $\sqrt{s} = 1.5$ GeV and other to $\sqrt{s} = 2.075$ GeV. In this way, we can look at the dependence on N of $C(t)$.

From the figures, we see that $C(t)$ cannot be zero. On the contrary it must be very large. Moreover $C(t)$ does not depend on N . Although the range of N explored is very large, including extremely low N -values, in which the eq. (1) would not hold, we see that $C(t)$ remains constant on N . Only a smooth variation on N occurs, when we use the parametrization (II). However if we take a range of N more reasonable, the dependence on N is very small, as it is seen from figs 12 and 13. The large contribution of $C(t)$ to (1) leads to disregard any other interpretation of $C(t)$ but a $J = 0$ WS fixed pole.

The main contribution to the fixed pole comes from the Born term. However for the best parametrizations (II) and (III), the residue of the fixed pole is much larger than the Born term. In order to study this point, we compute the contributions of the resonances to the WS FESR (1) in the narrow-width resonance approximation (NWA). The details of widths and resonances included in our evaluation are given in table 1. They are taken from Particle Data Group [9]. We sum all the non-peripheral resonances, and from fig. 14, we see that the WS fixed pole is almost built up from them. Here in order to state something definite, we have some incertitudes which come from the NWA used, also from the values of the widths and from the fact that slight different Regge parametrizations give rise to some changes in the results. Anyway, we can say that the fixed pole is not only constructed by the Born term and the sum of non-peripheral resonances reproduces better the fixed pole.

3. $\bar{K}N$ CEX FIXED POLES

3.1. Theoretical arguments

For completeness we repeat here the arguments of ref. [1]. These arguments show that the existence of a $J = 0$ WS fixed pole in πN CEX imply the existence of a $J = 0$ WS fixed pole in $\bar{K}N$ CEX.

We consider the reactions: $\bar{K}\pi \rightarrow \bar{K}\pi$, $\pi N \rightarrow \pi N$, $\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N$. In the range $(2m_\pi)^2 < t < (4m_\pi)^2$. The t -channel unitarity for the $\bar{K}N$ t -channel spin flip amplitude is written:

$$H_1^1(J, t) - H_1^0(J, t) = 2i\rho(t)K_1^1(J, t)F^0(J, t), \quad (2)$$

where $F(J, t)$, $K_1^1(J, t)$ and $H_1^1(J, t)$ stand respectively for the prolonged $\bar{K}\bar{K} \rightarrow \pi\pi$, $\bar{N}\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ and $\bar{N}\bar{N} \rightarrow \bar{K}\bar{K}$ t -channel partial waves with neutral parity. The index 1 denotes spin flip in the t -channel and $\rho(t)$ is the $\pi\pi$ phase space factor. The eq. (2) holds for both signatures. From now on, we consider negative signature. The behaviour of the amplitudes $K_1^1(J, t)$ and $F(J, t)$ near the point $J = 0$, will be

$$K_1^1(J, t) = \frac{K_1^1(t)}{\sqrt{J}}, \quad F(J, t) = f(t), \quad (3)$$

because $J = 0$ is a point sense for F and non-sense for K_1^1 , $K_1^1(t)$ is proportional to the function $C(t)$ of formula (1) and therefore does not vanish.

If one assumes that $f(t)$ is not identically zero (i.e. the scattering $\pi K \rightarrow \pi K$ exists) the right-hand side of (2) has a singularity $1/\sqrt{J}$, which must be on the left-hand side. So, the $J = 0$ πN CEX WS fixed pole gives rise to a $J = 0$ WS fixed pole in $\bar{K}N$ CEX.

Moreover, the u -channel $K^+n \rightarrow K^0p$ is exotic; assuming that the imaginary part of this reaction is zero, the first WS FESR for the negative-signature amplitude coincides with the first RS FESR for the positive signature amplitude. So the existence of the WS fixed pole implies the existence of a $J = 0$ RS fixed pole with the same residue.

3.2. $\bar{K}N$ CEX WS FESR

We are going to look for the WS fixed pole in the following WS FESR

$$\int_0^N \text{Im} [B_1(\nu, t) - B_2(\nu, t)] = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t)} N^{\alpha_i(t)} + D(t), \quad (4)$$

where B_1 and B_2 stand respectively for the invariant B -amplitudes of $K^-p \rightarrow \bar{K}^0n$ and $K^+n \rightarrow K^0p$; $D(t)$ denotes the residue of the possible $J = 0$ WS fixed pole. The observations done in sect. 2 about the Regge expression contributing to (1) are also valid for the formula (4).

Unfortunately the knowledge of $\bar{K}N$ CEX scattering is much poorer than the πN one, both at low and high energies. So, our evaluation will have more troubles than in the πN case.

We begin with five different parametrizations for Regge. Four of them come from fits to the differential cross sections of $\bar{K}N$, $\bar{K}N$ and πN scatterings. In all of them, only a ρ -Regge pole is used. From now on they will be denoted by (IV), (V), (VI)

and (VII); (IV) and (V) come from ref. [10], (VI) and (VII) from ref. [11]. The fifth one, is the (III) πN parametrization used in sect. 2 with the proper SU(3) coefficient. This one has ρ and ρ' Regge poles, and therefore it is expected to describe better than the other ones the high-energy data. This parametrization will be denoted by (VIII).

The left-hand side of eq. (4) is computed in the NWA. The resonances included are listed in table 2. The contribution to (4) of the four poles $\Lambda(1115)$, $\Sigma(1190)$, $Y_0^*(1405)$, $Y_0^*(1385)$ is given by

$$\begin{aligned} \text{Im } B_1(\nu, t) - \text{Im } B_2(\nu, t) = \frac{\pi}{2\nu} & \left[g_{\Lambda K p}^2 \delta(\nu - \nu_\Lambda) - g_{\Sigma K p}^2 \delta(\nu - \nu_\Sigma) + g_{Y_0^* K p}^2 \delta(\nu - \nu_{Y_0^*}) \right. \\ & \left. - g_{Y_1^* K p}^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{[(m_{Y_1^*} + m)^2 - \mu^2][(m_{Y_1^*} - m)^2 - \mu^2 - 2mm_{Y_1^*}]}{6m_{Y_1^*}^2} \right] \delta(\nu - \nu_{Y_1^*}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

We use as coupling constants of the $\Lambda(1405)$ and $\Sigma(1385)$ (ref. [17]),

$$g_{Y_0^* K p}^2 / 4\pi = 0.32 \text{ and } g_{Y_1^* K p}^2 / 4\pi = 1.9/m^2.$$

For the other two poles the sets of values are used. The Kim's values [12]

$$g_{\Lambda K p}^2 / 4\pi = 13.5, g_{\Sigma K p}^2 / 4\pi = 0.2$$

and other values close to the Zovko's values [13]

$$g_{\Lambda K p}^2 / 4\pi = 5.0, g_{\Sigma K p}^2 / 4\pi = 1.7.$$

(The Λ -coupling is taken 5.0 instead of the Zovko value 5.7 in order to have a wider range of variation.)

Between the first high-energy parametrizations we choose the one that satisfies better the first RS FESR:

$$\int_0^N \nu [\text{Im } B_1(\nu, t) - \text{Im } B_2(\nu, t)] d\nu = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i + 1} N^{\alpha_i + 1}. \quad (6)$$

The left-hand side is computed in the NWA. This sumrule is not very sensitive to the $\Lambda(1115)$ and $\Sigma(1190)$ pole coupling constants. The fig. 15 shows the left-hand side of (6) for the two sets of values of the pole coupling constants together with the parametrization (VIII) which turns out to be the best one. The parametrizations are plotted in fig. 16.

The results of the WS FESR (4) are shown in fig. 17. In fig. 18 are plotted the contributions of the other parametrizations. It is seen that these parametrizations have a large dependence on t very different from the left-hand side. From now on, we regard only the (VIII).

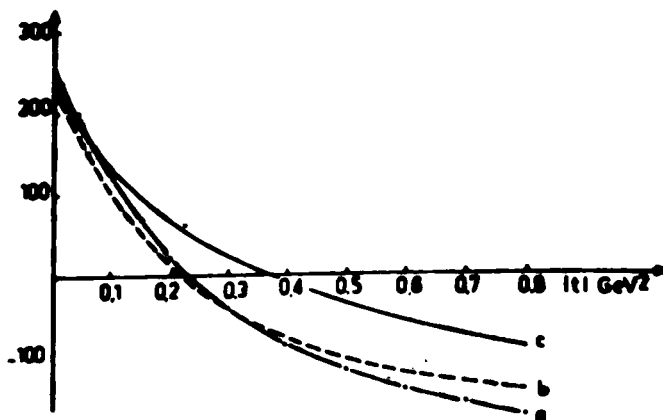


Fig. 15. Different contributions to the first RS FESR in KN CEX (formula (6)). (a) LHS using the Kim values (b) LHS using the other values; (c) Regge contribution using the parametrization (VIII).

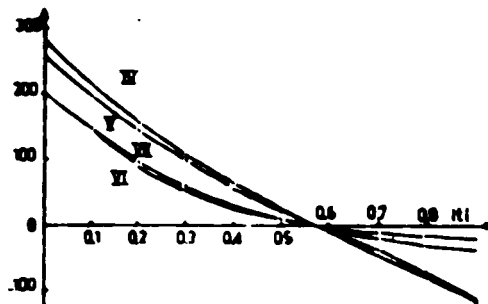


Fig. 16. Regge contributions to formula (6) for the parametrizations (IV), (V), (VI), (VII).

If we take the values close to the Zovko ones, we could say that the situation is compatible with the non-existence of the fixed pole. Both sum rules, (4) and (6), are approximately satisfied. However, recent independent model evaluations, prefer values closer to Kim's ones [19]. This would indicate that in eq. (4) $D(t) \neq 0$ as far as the NWA is good (see appendix).

The sum of the non-peripheral resonances $\Lambda(1115)$, $\Lambda(1405)$, $\Lambda(1.67)$, $\Lambda(1.69)$, $\Sigma(1190)$, $\Sigma(1.75)$ computed in the NWA for both Kim and Zovko values are plotted in fig. 19, together with the difference between the integral and the (VIII) parametrization. At low t , in both cases, this difference is built up by non peripheral resonances.

Finally, for each set of pole coupling constants, we have investigated the dependence of the left-hand side of (4) on the resonance widths. We have used the maximum (minimum) value of the width allowed in the Particle Data Group [9], if the contribution of the resonance to the left-hand side of (4) is positive (negative). The opposite case also has been explored. It is found that the results are practically unchanged for $|t| \geq 0.3 \text{ GeV}^2$.

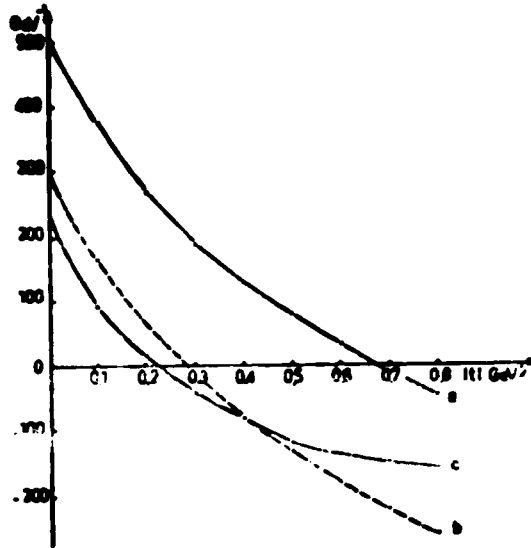


Fig. 17. Different contributions to the WS FESR in KN CEX (formula (4)) (a) LHS for Kim's values; (b) LHS for the other values; (c) Regge contribution using the parametrization (VIII).

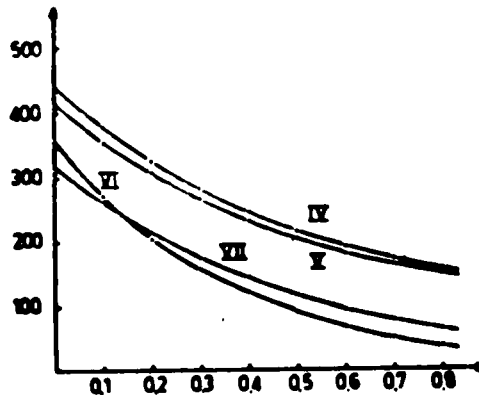


Fig. 18. Regge contribution to formula (4) for the parametrizations (IV), (V), (VI), (VII).

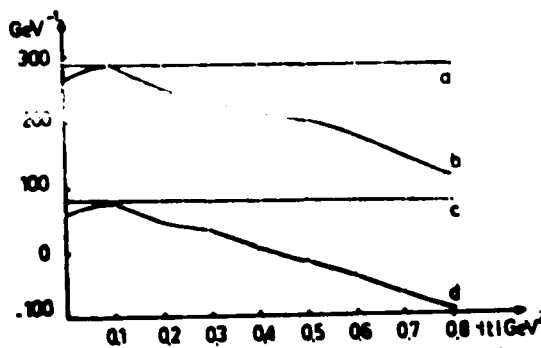


Fig. 19. Comparison between non-peripheral resonances and fixed-pole residue in KN CEX. (a) and (c) stand respectively for the sum of the non-peripheral resonances using the Kim's values and the other values. (b) and (d) stand respectively for LHS-R evaluated using Kim's values and Regge parametrization (VIII) and the other values and the parametrization (VIII).

Table 2
Resonances $\bar{K}N$ taken into account in the evaluation of (4) and (6).

	l	J^P	Wave	$\Gamma \rightarrow \bar{K}N(\text{MeV})$
$\Lambda(1520)$	0	$\frac{3}{2}^-$	D_{03}	7.2
$\Lambda(1670)$	0	$\frac{1}{2}^-$	S_{01}	3.9
$\Lambda(1690)$	0	$\frac{3}{2}^-$	D_{03}	7.2
$\Lambda(1815)$	0	$\frac{3}{2}^+$	F_{05}	48.2
$\Lambda(1830)$	0	$\frac{3}{2}^-$	D_{05}	6.0
$\Lambda(2100)$	0	$\frac{7}{2}^-$	G_{07}	42.0
$\Sigma(1670)$	1	$\frac{3}{2}^-$	D_{13}	3.9
$\Sigma(1750)$	1	$\frac{1}{2}^-$	S_{11}	10.6
$\Sigma(1765)$	1	$\frac{3}{2}^-$	D_{15}	45.0
$\Sigma(1910)$	1	$\frac{3}{2}^+$	F_{15}	4.8
$\Sigma(2030)$	1	$\frac{7}{2}^+$	F_{17}	12

The partial widths are in the range of the values of Particle Data Group [9] and are the values of Levi Setti [18].

4. $K^-N \rightarrow \pi^- \Lambda$ FIXED POLE

The role of the non-peripheral resonances, seen above suggest look at the hypercharge-exchange reactions, where these resonances are important [14], and that we look for the existence of fixed poles there. Unfortunately, the situation at high energy is not clear. Recently Field [15] has been able to fit differential cross sections and polarizations. He introduces lower j -plane singularities which are built from non-peripheral resonances. Here we are going to choose some high-energy parametrization which satisfies the first RS FESR and with it, we will see how the corresponding first WS FESR works. We use the same amplitude as in the above sections, say

$$B^{(-)}(\nu, t) = \frac{1}{2} [B_1(\nu, t) - B_2(\nu, t)] ,$$

where B_1 and B_2 denote respectively the invariant B -amplitudes in $K^-n \rightarrow \pi^- \Lambda$ and $\pi^+n \rightarrow K^+ \Lambda$.

The first WS FESR for $B^{(-)}(\nu, t)$ writes

$$\int_0^N \text{Im } B^{(-)}(\nu, t) d\nu = \frac{b^-(t)}{\alpha^-(t)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^{\alpha^-(t)} + F(t) , \tag{7}$$

where the Regge contribution is taken from Field and Jackson [14]. Their residues and trajectories are extracted directly from the first RS FESR; $F(t)$ denotes the residue of the possible $J = 0$ WS fixed pole.

The left-hand side of (7) is evaluated in the NWA using the same coupling constants and resonances as in ref. [14] (the $\Sigma(1940)$ is included).

The results are in fig. 20. There is a large difference between the left-hand side of (4) and the Regge parametrization. We think that this large difference cannot be explained by the errors introduced by the two approximations done: NWA and rough high-energy parametrization. The high-energy parametrization we have used describes rightly the differential cross section $K^-n \rightarrow \pi^- \Lambda$ and although it does not explain the other high-energy data, we do not expect that a better parametrization would give rise to a change of a factor 2.48 as it is required if $F(t) = 0$. Moreover this factor would not appear in the RS FESR.

Again, we see in fig. 20, that the non-peripheral resonances construct, approximately, the WS fixed pole. The non-peripheral resonances which are taken into account are: $\Sigma(1190)_{\frac{1}{2}}^+$, $\Sigma(1750)_{\frac{1}{2}}^-$, $\Sigma(1940)_{\frac{3}{2}}^-$, $\Sigma(2080)_{\frac{3}{2}}^+$, $\Sigma(1920)_{\frac{1}{2}}^+$, $N(938)_{\frac{1}{2}}^+$, $N(1470)_{\frac{1}{2}}^+$, $N(1550)_{\frac{1}{2}}^-$, $N(1710)_{\frac{1}{2}}^-$, $N(1860)_{\frac{3}{2}}^+$ and $N(1780)_{\frac{1}{2}}^+$.

In passing we remark that the parametrization used verifies the first RS FESR for the $B^{(*)}$ amplitude [14] without a RS fixed pole. This fact, together with the result found above $F(t) \neq 0$ implies that

$$\int_0^N \text{Im } B_1(\nu, t) d\nu \neq 0.$$

In fact, in our negative t -values this integral does not vanish. (The duality diagrams predict that the reaction $K^-n \rightarrow \pi^- \Lambda$ in the absence of fixed poles, must be purely

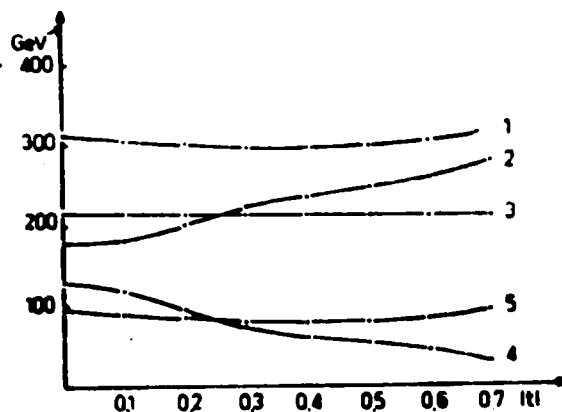


Fig. 20. Different contributions to the WS FESR in $K^-n \rightarrow \pi^- \Lambda$: (1) is the LHS; (2) is the difference LHS-Regge; (3) the sum of non-peripheral resonances; (4) Regge contribution; (5) the sum of peripheral resonances.

real at high energy and real on the average at low energy. This fact has been tested by Schmid and Storrow [16] only at $t = m_K^2$. However in our t -range we find that the integral of the imaginary part is not negligible.)

5. CONCLUSIONS

The existence of a $J = 0$ πN CEX WS fixed pole is clearly confirmed. A large contribution coming from it is necessary to explain the difference between the low- and high-energy contributions to the first WS FLSR for the invariant B -amplitude.

The existence of a corresponding $J = 0$ fixed pole in $\bar{K}N$ CEX has been predicted from unitary arguments. Here the situation is less clear than in πN due to the poor knowledge of the interaction $\bar{K}N$ at low energy. It has been shown that the evidence for the existence of this fixed pole is large if the pole coupling constants are closed to the Kiin's values. The existence of this WS fixed pole implies a RS fixed pole with approximately the same residue. The breaking of this approximate equality would mean that the imaginary part of the B -amplitude in $K^+n \rightarrow K^0p$ is very different from zero.

For hypercharge exchange, in the amplitude $B^{(-)}(\nu, t)$ defined in sect. 4, also a WS fixed pole is found. The situation is more clear than in $\bar{K}N$. An additional contribution larger than the Regge contribution is required to satisfy the first WS FLSR.

On the other hand, it seems that non-peripheral resonances build up the residues of these fixed poles. This fact suggests a duality between both. In this picture, only the peripheral resonances will construct the ordinary Regge trajectories and Regge cuts. However this is nothing more than a possible hypothesis checked only in the first WS fixed pole studied above. Further work in this direction is in progress.

We thank Professor A. Capella and B. Petersson for their interest in this work, useful discussions and a critical reading of the manuscript. Also useful discussions with Dr. J. L. Alonso and Prof. H. Hogaasen are acknowledged. We thank the LPTPE for their kind hospitality during the time in which this work was done. The GIFT is acknowledged for financial support.

APPENDIX

In this appendix, we are going to study the effects of the background in our NWA. We have evaluated

$$\int_0^N \text{Im } B^{(-)}(\nu, t) d\nu$$

for πN by using (a) old phase shifts, (b) new phase shifts, (c) contribution to this in-

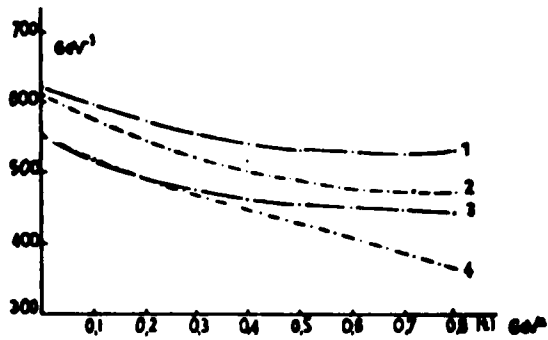


Fig. 21. LHS of formula (1) computed using (1) NWA; (2) only SU(3) partners of RN resonances in NWA; (3) new phase shift; (4) old phase shifts.

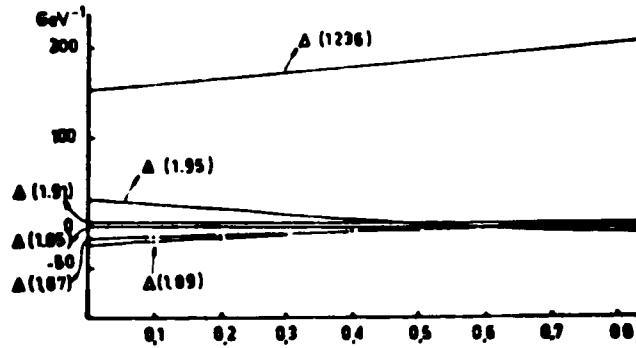


Fig. 22a.

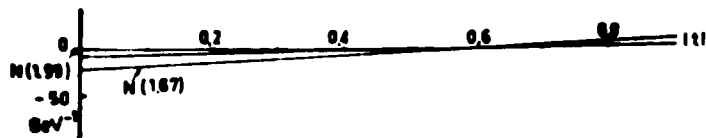


Fig. 22b.

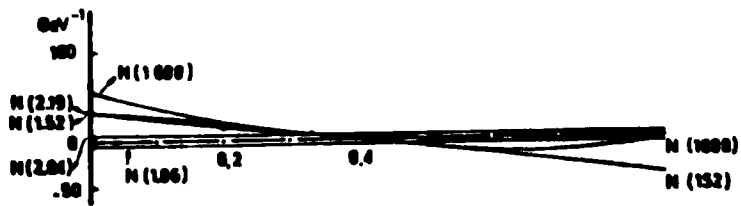


Fig. 22c.

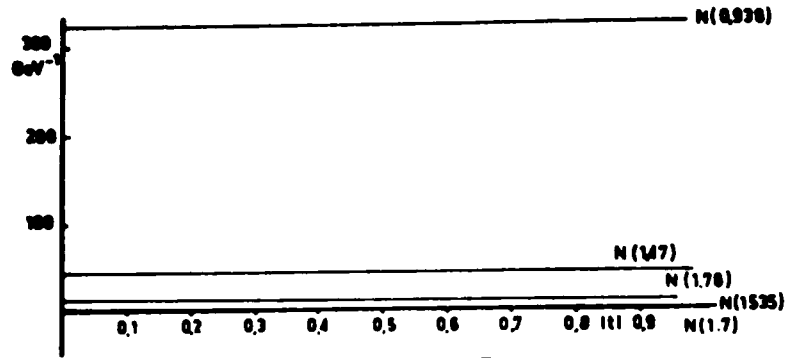


Fig. 22d.

Fig. 22. Contributions of the N-resonances to (1), (a) $\Delta(1236)$, $\Delta(1.95)$, $\Delta(1.65)$, $\Delta(1.91)$, $\Delta(1.67)$, $\Delta(1.89)$; (b) $N(1.99)$, $N(1.67)$; (c) $N(1.688)$, $N(2.19)$, $N(1.52)$, $N(2.04)$, $N(1.86)$; (d) $N(0.938)$, $N(1.47)$, $N(1.78)$, $N(1.535)$, $N(1.7)$.

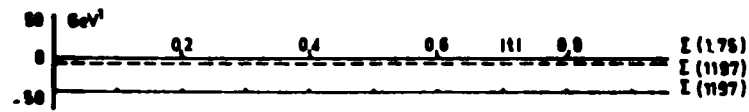


Fig. 23a.

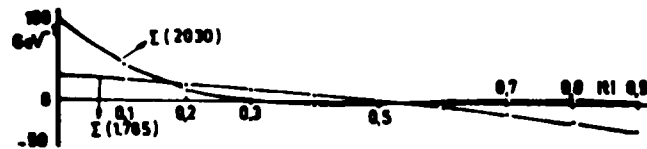


Fig. 23b.

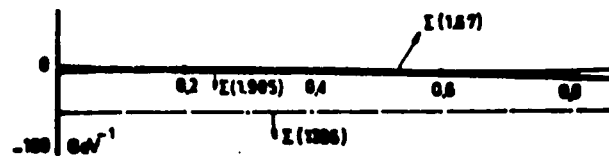


Fig. 23c.

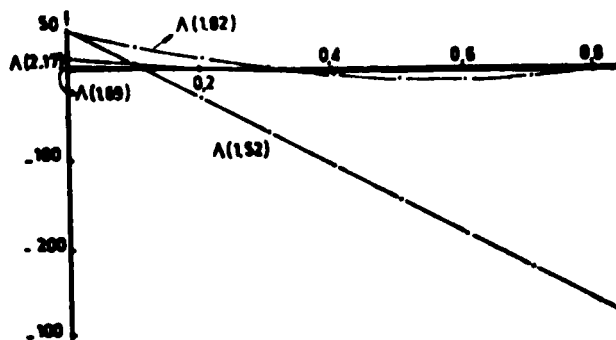


Fig. 23d.

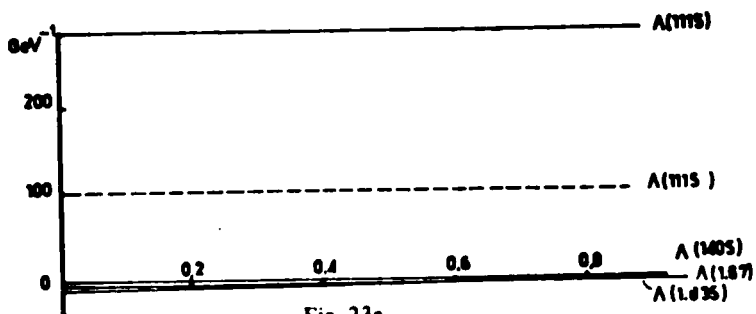


Fig. 23c.

Fig. 23. Contributions of the $\bar{K}N$ resonances to (4). (a) $\Sigma(1.75)$, $\Sigma(1.19)$ (Zovko value) $\Sigma(1.19)$ (Kim value); (b) $\Sigma(2.03)$, $\Sigma(1.765)$; (c) $\Sigma(1.67)$, $\Sigma(1.905)$, $\Sigma(1.395)$; (d) $\Lambda(1.82)$, $\Lambda(2.1)$ $\Lambda(1.69)$; $\Lambda(1.52)$; (e) $\Lambda(1.115)$ (Kim value) $\Lambda(1.115)$ (z.v.) $\Lambda(1.405)$, $\Lambda(1.67)$, $\Lambda(1.835)$.

tegral of those resonances in πN which are $SU(3)$ partners of resonances in $\bar{K}N$, (d) NWA. The results are plotted in fig. 21. From these results we see that the contribution of the background is small.

Let us remark, that including only eight resonances: $N(939)$, $N(1535)$, $N(1520)$, $N(1688)$, $N(1670)$, $N(2190)$, $\Delta(1236)$ and $\Delta(1950)$, $SU(3)$ partners of $\bar{K}N$ resonances, and neglecting another 10 resonances the integral changes very little. In figs. 22 and 23 is shown the contribution of each resonance separately. In passing, we notice that the dependence on t is given mainly by the peripheral resonances.

REFERENCES

- [1] A. Capella, B. Diu and J.M. Kaplan, Nucl. Phys. B, to be published; A. Capella, Proc. of Rencontre de Moriond, 1972, to be published.
- [2] R. Dolern, D. Horn and C. Schmid, Phys. Rev. 166 (1968) 1768.
- [3] Particle Data Group, UCRL 20030 πN , February, 1970.
- [4] S. Almeded and C. Lovelace, Nucl. Phys. 40B (1972) 157.
- [5] F. Arbab and C.B. Chiu, Phys. Rev. 147 (1966) 1045.

- [6] V. Barger and R.J.N. Phillips, *Phys. Rev.* 187 (1969) 2210.
- [7] J.P. de Brion and A. Derem, Note CEA-N-1373 (1970).
- [8] J. Dronkers, *Nuovo Cimento*, to be published.
- [9] Particle Data Group, April, 1971.
- [10] A. Derem and G. Smadja, *Nucl. Phys.* B3 (1967) 628.
- [11] G. Plaut, *Nucl. Phys.* B9 (1969) 306.
- [12] J.K. Kim, *Phys. Rev. Letters* 19 (1967) 1079.
- [13] N. Zovko, *Z. Phys.* 192 (1966) 346.
- [14] R.D. Field, Jr., and J.D. Jackson, *Phys. Rev.* D4 (1971) 693.
- [15] R.D. Field, Jr., Thesis, Berkeley LRL-33, August, 1971.
- [16] C. Schmid and J.K. Storrow, *Nucl. Phys.* B29 (1971) 219.
- [17] R.L. Warnock and G. Frye, *Phys. Rev.* 138B (1965) 947.
- [18] R. Levi Setti, *Lund Proc.*, June, 1969, p. 339.
- [19] C. Lopez and F.J. Yndurain, CERN preprint TH 1511 (1972).
- [20] J.H. Schwarz, *Phys. Rev.* 162 (1967) 1671.

PARTIE III. REACTIONS INCLUSIVES.

III.1. Introduction.

III.1.1. Aperçu sur la cinématique des réactions inclusives.

Dans les réactions du genre $a + b \rightarrow c + X$ plusieurs mécanismes dynamiques sont possibles suivant la région cinématique étudiée et suivant les régions il y a un ensemble de variables appropriées pour décrire les phénomènes. C'est pourquoi tout d'abord nous donnons un bref aperçu sur la cinématique des réactions inclusives.

Dans le repère du laboratoire, on peut décomposer le moment de la particule observée en une composante longitudinale et une composante transverse:

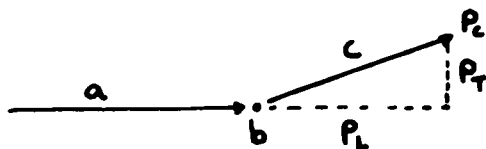


Fig. 1

Alors, la relation entre l'impulsion $\vec{p}_c = (p_L, \vec{p}_T)$ et l'énergie peut s'écrire $E_c^2 = m_c^2 + p_c^2$ où $m_T = (m_c^2 + p_T^2)^{1/2}$ est appelée masse transverse. Une autre variable utile est x définie par Feynman (4),

$$x = \frac{p_{Lc.m.}}{p_{Lc.m. \max}} \quad x \underset{s \rightarrow \infty}{=} \frac{2 p_{Lc.m.}}{\sqrt{s}} \quad (5)$$

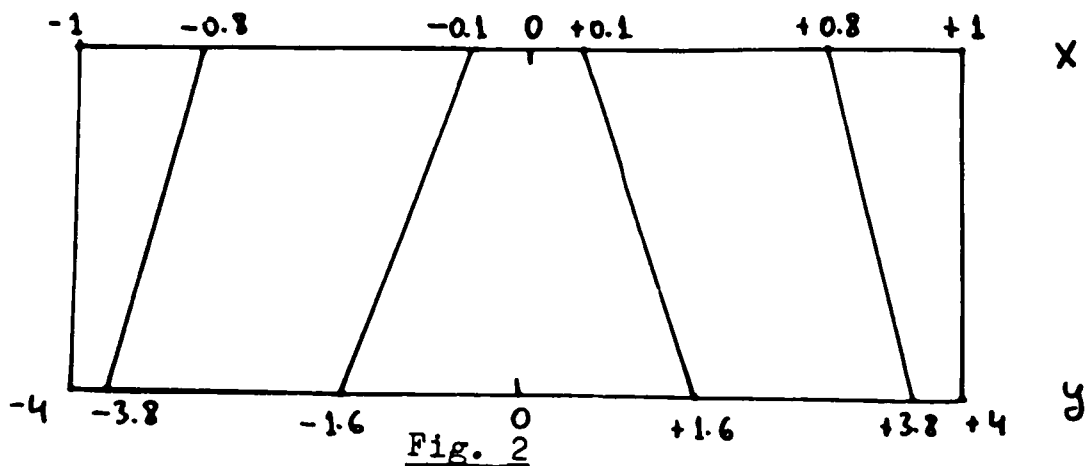
où $p_{Lc.m.}$ est l'impulsion longitudinale dans le repère du centre de masse. Une autre variable très utile est la rapidité y définie par

$$y = \sinh^{-1}(p_L / m_T) = \ln \left(\frac{E + p_L}{m_T} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right)$$

Cette variable croît logarithmiquement avec l'énergie.

Pour préciser l'utilité des variables x et y

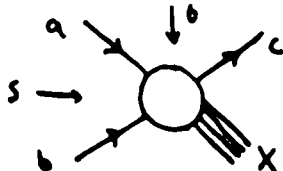
rentes régions cinématiques (considérant p_T comme fixé), considérons par exemple la réaction $pp \rightarrow pX$ aux énergies des ISR (pour un s typique de l'ordre de 500 GeV^2).



Dans la Fig. 2 nous voyons que la partie centrale qui couvre 40% de l'espace de rapidité correspond à seulement 10% en x . Inversement, chaque région latérale couvrant 2.5% en y correspond à plus de 10% dans la variable x . Nous voyons donc l'intérêt que l'on a à choisir les bonnes variables pour chaque région de l'espace des phases.

Les trois régions montrés dans la Fig. 2 correspondent à trois régions cinématiques distinctes. Dans la région centrale, la particule produite est lente dans le système du centre de masse; ici, la variable la plus appropriée est la rapidité. Dans les régions latérales, la particule produite est lente alternativement dans le système au repos de l'une ou de l'autre des particules incidentes, et on peut considérer la particule c comme un "fragment" de l'une ou de l'autre particule incidente. Ces régions sont appelées régions de "fragmentation".

De même que pour les réactions exclusives, on peut aussi définir les variables invariantes suivantes,



$S = (P_a + P_b)^2$, $t = (P_a - P_c)^2$, $u = (P_a - P_x)^2$ et la variable "masse"

manquante" $M^2 = (P_a + P_b - P_c)^2$. On a

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + M^2$$

Dans la région de fragmentation de la cible on a $t \ll s$ et $t \ll M^2$, et les variables appropriées seront s , t et M^2 , en particulier elles permettent de généraliser de façon naturelle le modèle des pôles de Regge à cette région. Dans la région de fragmentation du projectile, les variables appropriées seront s , u et M^2 . Dans la région centrale, t et u deviennent simultanément grands.

Dans le système du centre de masse, on aura

$$M^2 = s - 2\sqrt{s} E_c + m_c^2 \quad (3)$$

pour $P_L \gg P_T$ et $s \rightarrow \infty$,

$$\frac{M^2}{s} \approx 1 - \frac{2P_L}{\sqrt{s}} = 1 - x \quad (4)$$

En fonction de ces variables, la section efficace inclusive covariante peut s'exprimer ⁽¹⁾,

$$f(s, P_c) = E_c \frac{d^3\sigma}{d\vec{P}_c^3} = \frac{E_c}{\pi} \frac{d\sigma}{dP_L dP_T^2} = E_c \frac{d\sigma}{dy dP_T^2} \approx \frac{1}{\pi} \frac{d\sigma}{dt d(\frac{M^2}{s})} \quad (5)$$

III.1.2. Théorème optique de Mueller.

L'étude des réactions inclusives avec les pôles de Regge repose sur le théorème optique de Mueller ⁽²⁾, qui n'est qu'une généralisation du théorème optique pour l'amplitude de diffusion élastique à deux corps, que l'on peut représenter graphiquement sous la forme

$$\sum_x \left\{ \begin{array}{c} a \\ \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \\ b \end{array} \right\} x = \text{Disc} \left\{ \begin{array}{c} a \\ \bigcirc \\ \text{---} \\ \bigcirc \\ b \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_a = P_a' \\ P_b = P_b' \end{array} \quad (6)$$

correspondant à la relation

$$\sigma_T \sim \frac{1}{s} \operatorname{Im} T_{ab \rightarrow ab} |_{\epsilon=0} \quad (7)$$

où $\operatorname{Im} T_{ab \rightarrow ab}$ est la discontinuité

$$T(s+i\epsilon) - T(s-i\epsilon)$$

De façon analogue, Mueller a généralisé ce résultat aux réactions inclusives, en relationnant la section efficace inclusive $E_c \frac{d\sigma}{d^3p_c}$ à l'amplitude de la réaction $ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}$ vers l'avant

($p_a = p'_a, p_b = p'_b, p_c = p'_c$). Ceci peut se représenter sous la forme

$$\sum_X \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \rightarrow \text{---} X \right\} = \text{DISC} \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \rightarrow \text{---} \right\} \begin{array}{l} p_a = p'_a \\ p_b = p'_b \\ p_c = p'_c \end{array} \quad (8)$$

Cette généralisation, si simple quelle puisse paraître, rencontre des difficultés du point de vue théorique car dans la réaction $ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}$, la particule c se trouve hors de la région physique de la réaction $ab \rightarrow cX$, et $s_{bz} = (p_b - p_c)^2$, qui est une variable de masse pour $ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}$, est une variable de transfert pour $ab \rightarrow cX$. De plus, l'amplitude de la réaction élastique $ab\bar{c} \rightarrow ab\bar{c}$ possède des discontinuités dans les trois variables $s_{ab} = (p_a + p_b)^2$, $s'_{ab} = (p'_a + p'_b)^2$ et $s_{abz} = (p_a + p_b - p_c)^2$, et la discontinuité de l'amplitude s'écrit

$$\begin{aligned} \text{DISC } T = & T(s_{ab} + i\epsilon, s'_{ab} + i\epsilon, s_{abz} + i\epsilon) \\ & - T(s_{ab} - i\epsilon, s'_{ab} - i\epsilon, s_{abz} - i\epsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

et dans (8) on ne prend que la discontinuité dans la variable

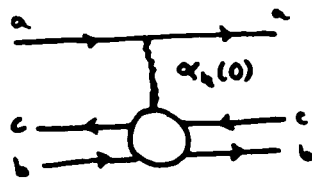
s_{abz} . A cause de ces complications, ce théorème n'a jamais été prouvé rigoureusement. Cependant, il n'a pas soulevé aucune objection sérieuse et il peut être considéré comme un résultat très plausible.

III.1.3. Région de fragmentation et invariance d'échelle.

L'application des pôles de Regge aux réactions inclusives, en particulier à l'étude de la région de fragmentation et de la région centrale a été développée par Mueller et al. (2,8). La dérivation originale de Mueller, dépassant le cadre de cet exposé, nous préférons donner une dérivation intuitive de l'approche de Regge pour la région de fragmentation.

Dans la région de fragmentation de la cible, par exemple, l'on a $t = (p_b - p_c)^2$ petit, c'est à dire $s \gg |t|$. Dans ce cas, on peut imaginer le système $b\bar{c}$ comme une pseudoparticule. Si en plus un état lié existe dans la voie $b\bar{c}$, B, notre problème se ramène à l'étude du processus $aB \rightarrow aB$, après extrapolation hors de la couche de masse pour B.

Pour s et M^2 grands et M^2/s fixé et petit, on peut considérer la réaction comme étant décrite par le diagramme de Regge suivant



et on pourra écrire

$$E_c \frac{d^3\sigma}{dP^3} = f(s, p_c) = \sum_k F_k s^{\alpha_k(0)-1} \tag{10}$$

Mueller a prouvé que F_k doit être une fonction de la forme

$$F_k \equiv F_k(t, M^2/s) .$$

Si maintenant nous supposons que l'on échange le pomeron avec intercepte $\alpha_p(0) = 1$, et la somme des contributions de Regge à (10) se réduit au pomeron et à la trajectoire dominante ($\alpha_n(0) = 1/2$), on aura

$$f(s, p_c) = F_p(t, M^2/s) + F_n(t, M^2/s) / \sqrt{s} \tag{11}$$

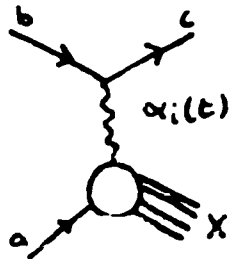
à la limite, la formule (11) devient

$$\int_{s \rightarrow \infty} (s, p_c) = F_p(t, M^2/s) \equiv F_p(t, X) \quad (12)$$

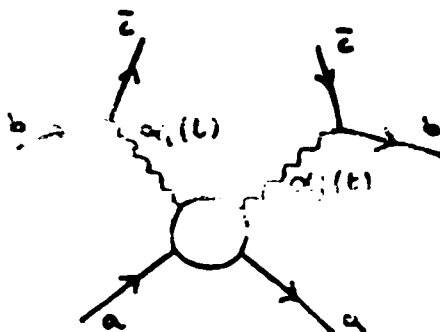
C'est à dire, en supposant la dominance du pomeron on rencontre l'invariance d'échelle telle qu'avait été formulée à l'origine par Feynman et Yang (4). La formulation de Regge (11) nous indique que l'invariance d'échelle est approchée comme $S^{-1/2}$. La contribution du pomeron étant celle qui la vérifie.

III.1.4. Couplage de triple Regge.

Dans la région de fragmentation on peut considérer la zone particulière pour laquelle $s/M^2 \rightarrow \infty$ tout en laissant $s \gg |t|$ et $M^2 \gg |t|$. On peut considérer la réaction $ab \rightarrow cX$ comme une pseudo-réaction à deux corps étant décrite par le diagramme de Regge suivant:



Si l'on prend le module au carré de cette amplitude et l'on somme sur tous les états intermédiaires on obtient l'amplitude



que l'on peut écrire analytiquement

$$\int (s, p_c) = \frac{1}{S} \sum_{ij} B_{b_c}^i E_i(t) B_{a_c}^j E_j^*(t) S^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t)} \times \text{Im} \{ R_{a \rightarrow a} (M^2, t) \} \quad (13)$$

où $\xi_i(t)$ est le facteur de signature, β_{bz}^i est le couplage



et $R_{ia \rightarrow ja}$ est l'amplitude pour le processus Reggeon-particule \longrightarrow Reggeon-particule. De Tar et al. (5) ont montré qu'elle correspond à la continuation analytique de l'amplitude du maximum d'hélicité-flip dans le centre de masse de la voie croisée, $\alpha \bar{a} \rightarrow \alpha_i \bar{\alpha}_j$.

Si maintenant nous supposons $M^2 \gg |t|$ et $M^2 \rightarrow \infty$ tout en ayant $s \gg M^2$, l'amplitude $R_{ia \rightarrow ja}$ deviendra dominé par les pôles de Regge échangés dans la voie croisée, et elle sera donc de la forme

$$\text{Im } R_{ia \rightarrow ja}(M^2, t) = \beta_{az}^h g_{ij}^h(t) (M^2)^{\alpha_n(0) - \alpha_i(t) - \alpha_j(t)} \quad (14)$$

Le terme $-\{\alpha_i + \alpha_j\}$ dans l'exposant de (14) vient du fait que $R_{ia \rightarrow jb}$ correspond au transfert maximal d'hélicité.

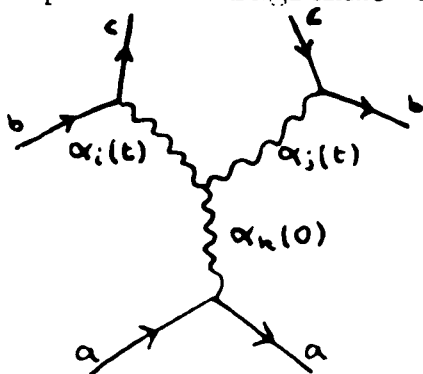
Combinant (13) et (14), on obtient

$$f(s, t) = \sum_{ijh} G_{ijh}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t) - \alpha_n(0)} s^{\alpha_n(0) - 1} \quad (15)$$

où

$$G_{ijh}(t) = \beta_{bz}^i \beta_{bz}^j \xi_i(t) \xi_j^*(t) g_{ij}^h(t) \beta_{az}^h \quad (16)$$

Ceci correspond au diagramme suivant



qui correspond au vertex à trois reggeons.

Si l'on compare (15) avec (10) et (11), on trouve que la forme de l'invariance d'échelle dans la région du triple Regge doit être

$$F_n(t, s/M^2) = \sum_{ij} G_{ijk}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{\alpha_i(t) + \alpha_j(t) - \alpha_k(0)} \quad (17)$$

Nous voyons ici explicitement que ce terme ne dépend que de t et de s/M^2 , comme Mueller avait démontré.

III.1.5. Diffraction, couplage triple pomeron et la réaction $pp \rightarrow pX$.

Les réactions inclusives offrent la possibilité d'étudier le vertex à trois reggeons, et plus particulièrement à trois pomerons, constituant un test pour plusieurs modèles. Pour étudier ce problème nous choisissons une réaction diffractive typique $pp \rightarrow pX$.

Nous supposons que les termes triple-Regge intervenant dans cette réaction sont PPP, PPR, RRP et RRR et on exclut les termes d'interférence comme PRP. Cette exclusion n'est justifiable qu'en termes pratiques: leur présence augmente le nombre de paramètres rendant l'analyse plus difficile; les modèles courants peuvent expliquer le comportement des sections efficaces sans avoir recours aux termes d'interférence.

Donnons un aperçu qualitatif du comportement de la section efficace avec ce modèle. Supposons pour simplifier: $\alpha_p(t) = \frac{1}{2}t + 1$ et $\alpha_n(t) = t + \frac{1}{2}$; on a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} f(s, t) = & G_{PPP}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_p(t)-1} + G_{RRP}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_n(t)-1} \\ & + G_{PPR}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_p(t)-1/2} s^{-1/2} + G_{RRR}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_n(t)-1} s^{-1/2} \end{aligned} \quad (18)$$

Des quatre termes du membre de droite de (18), les deux premiers possèdent l'invariance d'échelle; les autres ont un comportement en $S^{-1/4}$.

Si l'on évalue l'expression (18) pour $t = -0.25 \text{ GeV}^2$ et l'on suppose que

$$G_{PPP}(t) = G_{RRP}(t) = G_{PPR}(t) = G_{RRR}(t)$$

on obtient le résultat de la figure:

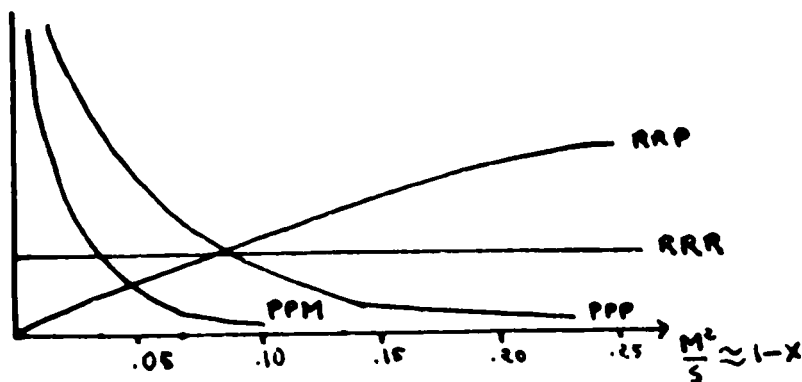


Fig. 3

Pour $x \gg .9$ on aura donc une région essentiellement diffractive, dominée par le poméron; par contre la région $x \leq .9$ est essentiellement non-diffractive, et dominée par des trajectoires mésoniques. Les données expérimentales semblent confirmer ce schéma ⁽⁶⁾. Dans la Fig. 4 on voit le spectre de la réaction $pp \rightarrow pX$ pour les énergies $s = 551, 930$ et 1995 GeV^2 ; on peut voir clairement un pic pour x proche de 1 qui correspond clairement au pic diffractif; en plus, la dépendance en énergie de ce pic semble être petite, ce qui confirme approximativement l'hypothèse d'invariance d'échelle.

III.1.6. Quelques considérations théoriques et phénoménologiques sur les couplages à trois régéons.

Pour la dépendance en t des vertex triple pomeron on adopte en général une paramétrisation naïve de la forme

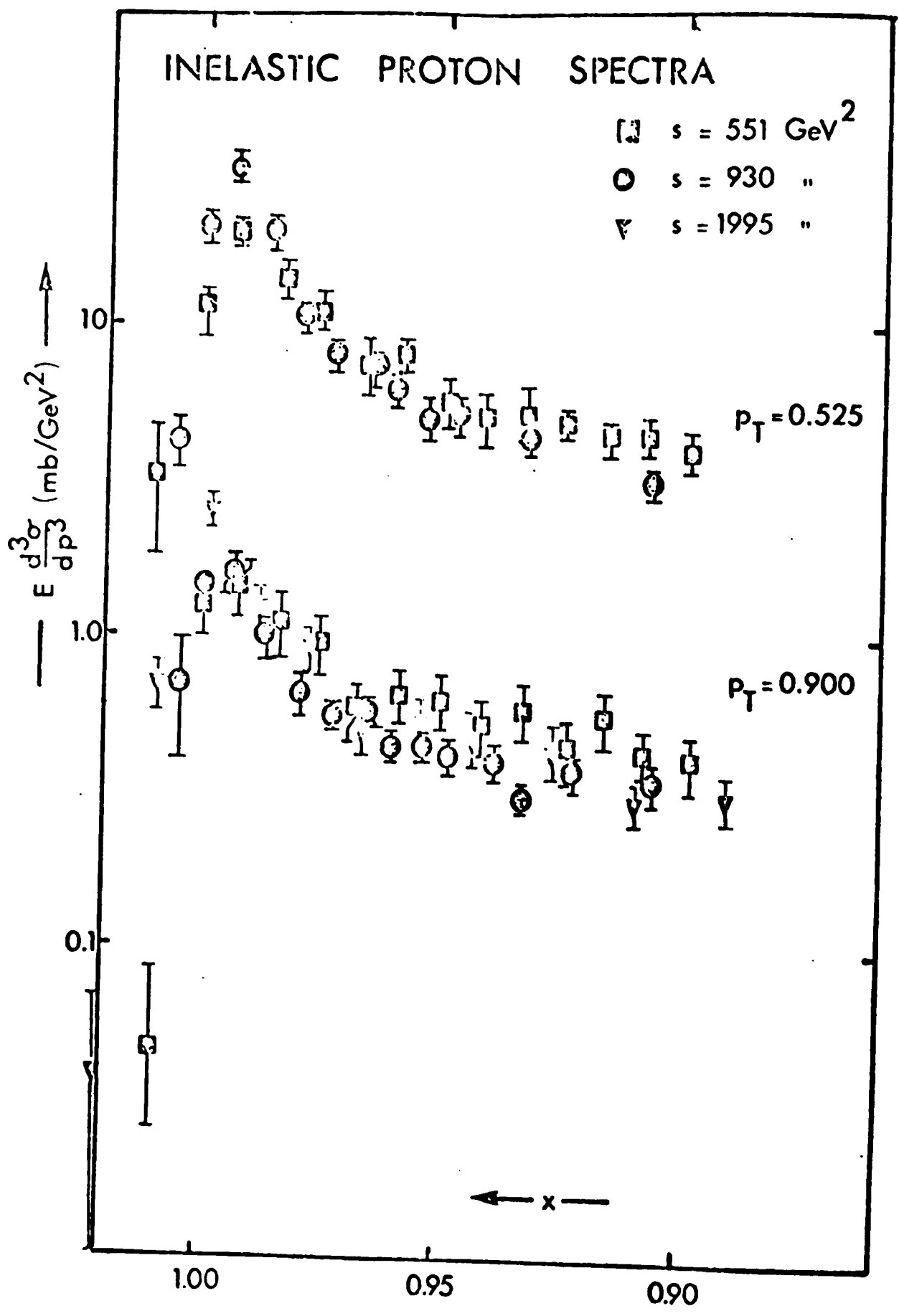


Fig. 4

$$G_{\tau\alpha}(t) = C e^{Nt} \quad (19)$$

ce couplage est essentiellement le couplage Reggeon-particule. Cette forme simple des couplages à trois régéons s'avère parfois ne pas être satisfaisante du point de vue phénoménologique ou bien des considérations théoriques font apparaître des complications dans la forme de ces couplages. Nous allons discuter maintenant de quelques uns de ces problèmes.

a) Couplage à trois pomérons.

Si l'on considère la section efficace totale pour un processus $a b$ dans lequel le pomeron est l'échange dominant, asymptotiquement on doit trouver

$$S \sigma_{ab}^T \underset{S \rightarrow \infty}{\sim} S^{\alpha_p(0)} \quad (20)$$

Si maintenant on considère le processus $ab \rightarrow cX$, dans lequel on échange le triple pomeron, on trouve asymptotiquement,

$$\frac{d^2\sigma}{dt d(\frac{M^2}{s})} \underset{\substack{M^2 \rightarrow \infty \\ \frac{s}{M^2} \rightarrow \infty}}{\sim} G_{PPP}(t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_p(t) - \alpha_p(0)} S^{\alpha_p(0) - 1} \quad (21)$$

et la relation suivante doit se vérifier,

$$\int dt d(\frac{M^2}{s}) \frac{d^2\sigma}{dt d(\frac{M^2}{s})} \leq \sigma_{ab}^T \quad (22)$$

Si le pomeron est un pôle factorisable, et son intercepte est $\alpha_p(0) = 1$, en intégrant (22) on obtient

$$\sigma_{ab}^T \sim \ln \ln S \quad (23)$$

en contradiction avec (20).

Cette difficulté peut être levée si l'on suppose que le couplage à trois pomérons s'annule à $t=0$ ($G_{PPP}(0)=0$) (7).

Expérimentalement, pour mettre en évidence ceci il faut que les données à petit t présentent un renversement du comportement en t ("turnover"), ce qui est difficile à mettre en évidence à cause des difficultés que l'on rencontre aux énergies des ISR pour accéder aux petites valeurs de t .

b) Couplage RRP.

Un inconvénient apparaît lorsqu'on essaye d'extrapoler le couplage triple Regge à la région $.7 > |x| > .5$. La valeur prédite de la section efficace est sousestimé par rapport à l'expérience.

Une analyse quantitative faite par plusieurs auteurs (8), fit apparaître que la section efficace avait, dans la région mentionnée, un comportement exponentiel en x , plutôt que polynomial. Pour résoudre ce problème on paramétrise le terme RRP comme

$$RRP = B(t) e^{A M^2/s} \quad (24)$$

L'introduction de ce terme est purement empirique, et on peut regarder cette approche comme une façon effective de paramétriser des effets secondaires. Une possible interprétation de cette paramétrisation, donnée par les auteurs de la ref. (8), est que si l'on suppose $\alpha_R(0) = 1/2$ et $\alpha_P(0) = 1$, et on développe (24) en puissances de M^2/s pour petit t , le premier terme de ce développement coïncide avec le terme RRP; le second terme a la forme d'une contribution RRP avec $\alpha_R(0) = 0$, pouvant venir d'une trajectoire fille; les autres termes du développement apparaissent aussi comme contributions procédant de trajectoires filles.

III.1.7. Analyse phénoménologique de la réaction $pp \rightarrow pX$.

Dans l'article qui suit nous étudions la réaction $pp \rightarrow pX$

sur une large région en énergie, ce qui nous permettra de séparer les différents termes à trois régéons qui y contribuent, la force relative des couplages et aussi leur forme. Nous utilisons des données s'étendant de $s=28 \text{ GeV}^2$ à $s=1995 \text{ GeV}^2$.

La section efficace est donnée par

$$\frac{s d^2\sigma}{dt dM^2} = PPP + PPR + RRP + RRR \quad (25)$$

où chaque terme est paramétrisé comme nous avons indiqué plus haut. Nous étudions la structure des différents couplages, nous examinons le problème de l'annulation du couplage à trois pomérons et la possibilité de tester le "turnover" prédit. Ces questions sont largement développés dans l'article.

REFERENCES

- (¹) D. Horn, "Many Particle Production", Phys. Rep. 4, n^o 1 (1972).
- (²) A.H. Mueller, Phys. Rev. D2, 2963 (1970).
- (³) H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. D3, 2227 (1971).
- (⁴) R.P. Feynman, Phys. Rev. Letters 23, 1415 (1969);
J. Beneche, T.T. Chou, C.N. Yang et E. Yen, Phys. Rev. 188,
2159 (1969).
- (⁵) C.E. De Tar et al., Phys. Rev. Letters 26, 675 (1971).
- (⁶) M.G. Albrow et al., Nucl. Phys. 51B, 388 (1973);
F. Sannes et al., Phys. Rev. Letters 30, 766 (1973).
- (⁷) H.D.I. Abarbanel et al., Phys. Rev. Letters 26, 937 (1971);
"Symposium on the Pomeron", Argonne preprint ANL/HEP 7327
(1973).
- (⁸) A. Capella, H. Hogaasen et B. Petersson, Nuovo Cimento 17A, 1
(1973).
-

III.2. Analyse des réactions inclusives avec le couplage à trois régéons.

Nuclear Physics B64 (1973) 493-498. North-Holland Publishing Company

THE LEADING PROTON EFFECT IN PROTON-PROTON COLLISIONS

J. GABARRO and C. PAJARES

*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Orsay, France**

Received 29 June 1973

Abstract: The p spectrum data in the range $s = 28$ to $s = 1995$ are described with the triple Regge formula. The behaviour of the various couplings at small $|t|$ is explored. It is found that the non-scaling terms, at $s \approx 400 \text{ GeV}^2$ remove the turnover expected if the triple pomeron vanishes at $t = 0$. The results are discussed in connection with the expected behaviour of the terms in several models.

The triple Regge region is the one where several models can be crucially tested, for example, in the multiperipheral absorption model [3] the triple pomeron coupling does not vanish at $t = 0$. Also in models where the pomeron intercept is lower than one the triple pomeron coupling does not vanish [2, 7]. On the contrary if the pomeron intercept is one the triple pomeron coupling vanishes [1]. Other couplings are also strongly constrained in some models. In particular, in several duality approaches the PPR is required to be zero or small [4-7]. As it is important to look at the largest possible energy range to disentangle the various terms and to determine their strength, destroying in this way the correlations between them, we examine in this note the proton spectrum in proton-proton collisions in the energy range $s = 28$ to $s = 1995 \text{ GeV}^2$ in order to see the present status of the data in the above mentioned points.

We begin with the parametrization of the residues of the various couplings. This will be done in the most economical way. The inclusive cross section in the triple Regge region [8] is given by

$$\frac{s d^2\sigma}{dt dM^2} = \text{PPP} + \text{PPR} + \text{RRP} + \text{RRR}, \quad (1)$$

where we neglect the cross terms RPR although there is not any convincing reason to do it at $t \neq 0$. At $t = 0$ this term must vanish under the same conditions as for the PPP term.

* Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique. Postal address: Bâtiment 211, Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY, France.

For the RRP instead of using the conventional single power of s and M^2 we use an exponential as it has been used in several works previously [9, 10]. This fact is clearly required by the data. We take the form

$$\text{RRP} : A_1 \exp(A_2 t + A_3 t^2) \exp(A_4 M^2 / s). \quad (2)$$

In this way we take into account all the daughters of the R trajectory. It can be seen as an effective way to parametrize secondary effects.

The PPR and RRR are taken in the conventional way:

$$\text{PPR} : (\alpha_R(0) + 1 - 2\alpha_P(t)) \frac{B_1}{s} \exp(B_2 t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_P(t)} (M^2)^{\alpha_R(0)}, \quad (3)$$

$$\text{RRR} : \frac{C_1}{s} \exp(C_2 t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_R(t)} (M^2)^{\alpha_R(0)}.$$

For PPP we begin with

$$\text{PPP} : \frac{D_1 t}{s} \exp(D_2 t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_P(t)} (M^2)^{\alpha_P(0)}. \quad (4)$$

we have performed two fits to the data of refs. [12-14] in the triple Regge region in the range $M^2 > 4 \text{ GeV}^2$, $s/M^2 > 4$, $|t| < 1.05 \text{ GeV}^2$. In the first fit we take $\text{PPR} = 0$ and the other one we let it vary. For the A parameters we take those of ref. [10]. The two fits described correctly all the data included. The numerical values of the parameters are in table 1. Therefore the data are compatible with PPR small, even zero. We have allowed the PPP term be non-zero at $t = 0$ and a good fit is also obtained. However with the values obtained in all these fits we cannot describe qualitatively the preliminary data of ref. [16]. At this energy $s = 377 \text{ GeV}^2$, with the values obtained, even if the PPP term vanishes at $t = 0$ the turnover does not appear at M^2 fixed ($5 \leq M^2 \leq 10$) and small t , because the RRR and PPR terms remove the turnover. In the case when $\text{PPR} \neq 0$ on the contrary, a sharp peak appears. Therefore the data around $s \approx 400$, $M^2 \approx s$ and $|t| < 0.06$ would give the behaviour not only of the PPP term but also of another term decreasing with M^2 . In order to describe the turnover at this energy we must require the vanishing at $t = 0$ of some other coupling. We will assume that the PPR term vanishes at $t = 0$, but this could only mean one way of parametrizing some other thing vanishing at $t = 0$. We take

$$\text{PPR} : \frac{t}{s} B_1 (\alpha_R(0) + 1 - 2\alpha_P(t)) \exp(B_2 t) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{2\alpha_P(t)} (M^2)^{\alpha_R(0)}.$$

We made a fit to the data of ref. [12-15]. The values found are given in table 1. The fit describes correctly all the data as can be seen in figs. 1-4. In fig. 5 we plot the spectrum expected at $s = 377 \text{ GeV}^2$.

Table I

	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	C_1	C_2	D_1	D_2	$\sigma^i p$	$\sigma^i R$	$\sigma^i R(0)$
1	24.6	5.37	2.11	5.6	0	0	264.2	10.48	-25.06	6.13	0.43	1.04	0.51
2	24.6	5.37	2.11	5.6	-43.7	36.6	132.1	7.56	-17.4	5.39	0.496	1.06	0.52
3	14.96	8.1	4.46	8.58	1095.0	32.2	120.8	3.21	-10.29	3.06	0.5	1.1	0.5

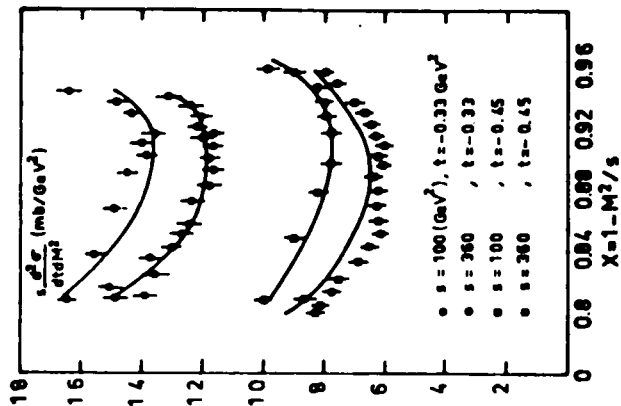


Fig. 2. Comparison of our fit 3 with the data of ref. [15].

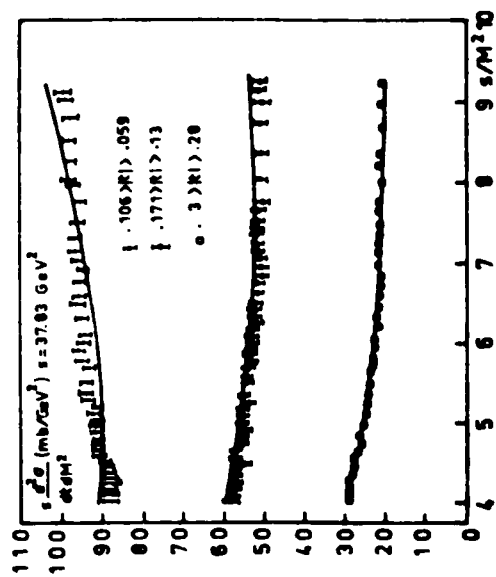


Fig. 1. Comparison of our fit 3 with the data of ref. [12].

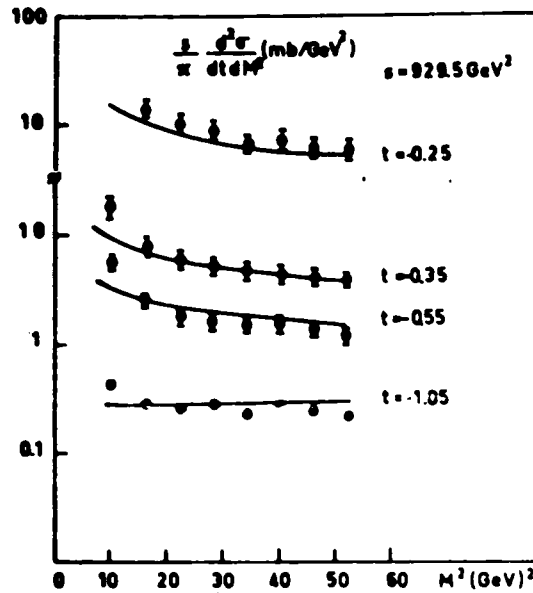


Fig. 3. Comparison of our fit 3 with the data of ref. [13].

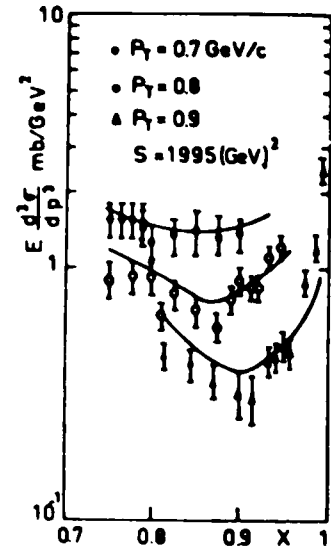


Fig. 4. Comparison of our fit 3 with the data of ref. [14].

The triple pomeron couplings calculated in our fits are very similar in the range $0.15 < |t| < 0.25$, to the triple pomeron coupling extracted from the first finite mass sum rule by saturating the left hand side with resonances [7]. At larger t our couplings become larger, (particularly the couplings coming from our fit 3).

As a matter of fact, we remark that all our fits will give a very different behaviour to the Glauber corrections to πd scattering. The total πd cross section defect is mainly given by the PPR term [11], the value of which is very hard to obtain with the present data. Also if the PPP term does not vanish at $t = 0$, it can contribute.

Let us finally summarize our main results. The existing data can be well described by the triple Regge formula with a minimum of parameters. At energies around $s \approx 400 \text{ GeV}^2$ the non-scaling terms RRR and PPR are not yet negligible. At small t and M^2 , they remove the turnover produced by the vanishing of the triple pomeron. Therefore at this energy the turnover could not exist even if the triple pomeron vanishes at $t = 0$. The existence of a deep turnover, as shown by the preliminary data, indicates the vanishing of a secondary term. A good candidate could be the cross term RPR which, if $\alpha_P(0) = 1$, must vanish. The strength of the PPP coupling, although with large errors, is compatible with the sum of resonances as was pointed out in several analyses and in the duality approach [4, 5, 7]. The couplings with the present status of the data must be regarded as having large errors because the correlations between the parameters are not completely destroyed with the existing data. The most uncertain coupling is PPR although it must be small and

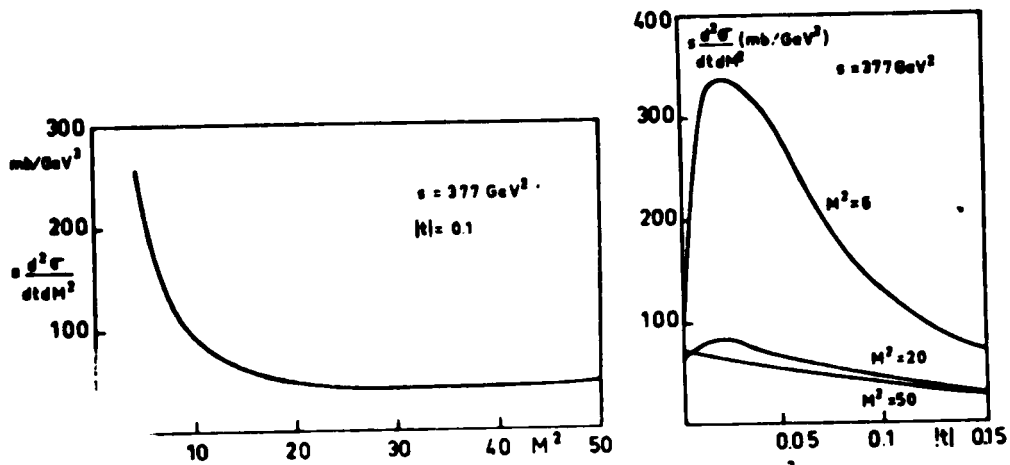


Fig. 5. Proton spectrum at $s = 377 \text{ GeV}^2$. (a) $|t|$ kept fixed, (b) M^2 kept fixed.

quite negligible for $|t| > 0.2$.

We thank Prof. B. Petersson for useful discussions and a critical reading of the manuscript and Prof. J. M. Wang for having brought to our notice the existence of the data of ref. [16]. One of us (C.P.) thanks the LPHE for its kind hospitality and the GIFT for financial support.

Note added in proof

The data of ref. [16] have been reanalysed and now the turnover is not very sharp. On the other hand new data from Coley et al., at the same energy do not show any turnover. This last data can be fitted very well with a PPR intermediate between the one of our two fits in which the PPP vanish at $t = 0$.

In order to reproduce the turnover of the new data of Franzini et al. the vanishing at $t = 0$ of another term in addition to the PPP term is still necessary.

- [1] V.N. Gribov and A.A. Migdal, *Sov. J. Nucl. Phys.* 8 (1969) 583;
 J.B. Bronzan, *Phys. Rev.* D7. (1973) 480;
 C.E. DeTar, D.Z. Freedman and G. Veneziano, *Phys. Rev.* D4 (1971) 1906;
 A.R. White, 8th Rencontre de Moriond (1973).
 [2] H.P.I. Arbarbanel, G.F. Chew, M.L. Goldberger and L.M. Saunders, *Phys. Rev. Letters* 26 (1971) 937.

- [3] L. Caneschi and A. Schwimmer, CERN TH 1541 (1972).
- [4] M.B. Einhorn, M.B. Green and M.A. Virasoro, Phys. Letters 37B (1971) 292;
M.B. Einhorn, M.B. Green and M.A. Virasoro, Phys. Rev. D6 (1972)1675; LBL preprint 768 (1972).
- [5] H.M. Chan, H.I. Miettinen and R.G. Roberts, Nucl. Phys. 54B (1973) 411.
- [6] S.H.H. Tye and G. Veneziano, Nuovo Cimento 14A (1973) 711.
- [7] A. Capella, SLAC PUB 1176 (1973);
A. Capella and M.S. Chen, SLAC preprint (1973);
A. Capella, M.S. Chen, M. Kugler and R.D. Pecci, SLAC PUB 1241 (1973).
- [8] C.E. DeTar, C.E. Jones, F.E. Low, J.H. Weis, J.E. Young and C.I. Tan, Phys. Rev. Letters 26 (1971) 675.
- [9] Ph. Salin and G.H. Thomas, Nucl. Phys. 38B (1972) 375;
E.D. Berger, Ph. Salin and G.H. Thomas, Phys. Letters 39B (1972) 265;
Ph. Salin, 7th Rencontre de Moriond (1972);
A. Capella, H. Hogaasen and V. Rittenberg, SLAC PUB 1776 (1973).
- [10] A. Capella, H. Hogaase and B. Petersson, LPTHE 72/33 (1972).
- [11] S.A. Gurvits and M.S. Marinov, Phys. Letters 32B (1970) 55;
O.V. Kanchelli and S.G. Matinyan, JETP Letters (Sov. Phys.) 12 (1970) 50;
V.V. Anisovich, P.E. Volkovitsky and L.D. Dokhno, Phys. Letters 42B (1972) 227;
C. Quigg and J.T. Wong, Phys. Letters 43B (1973) 314;
G. Torchi, Proc. of the GIFT seminar, Barcelona, 1973.
- [12] J.V. Allaby et al., CERN-ROME Collaboration, Oxford Conf., 1972;
J.V. Allaby et al., CERN report 70-12 (1970);
U. Amaldi et al., Phys. Letters 34B (1971) 485.
- [13] M.G. Abrow et al., Nucl. Phys. 54B (1973) 6.
- [14] M.G. Albrow et al., Nucl. Phys. 51B (1973) 388.
- [15] F. Sannes et al., Phys. Rev. Letters 30 (1973) 766.
- [16] P. Franzini et al., preliminary results, NAL 1973.

CONCLUSION

Dans la première partie de cette thèse, nous étudions différents aspects de la dualité: la construction d'amplitudes explicitement duales et le test de la dualité dans le sens de règles de somme à énergie finie.

Dans I.2 nous avons construit une amplitude duale pour six pions avec des trajectoires d'intercepte positive, et ayant la trajectoire de parité anormale du ω . Moyennant l'introduction d'un facteur cinématique approprié, cette amplitude a les bonnes propriétés de spin et parité pour tous les échanges dominants. Nous déduisons, par factorisation, des amplitudes pour bosons avec spin: $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$, $\pi\rho \rightarrow \pi\rho$ et $\rho \rightarrow 4\pi$.

Dans I.3 nous avons utilisé ce genre de modèles dans des analyses phénoménologiques, en étudiant la réaction $\bar{p}n \rightarrow \kappa\bar{\kappa}\pi\pi$ au repos. La méthode consiste à déduire par factorisation des amplitudes duales à partir d'amplitudes à six points. Nous trouvons que les spectres de masse de la réaction sont correctement décrits par notre modèle.

Dans I.4 nous étudions la réaction πN avec échange de charge à l'aide des règles de somme à moment continu. Nous trouvons que, en général, les règles de somme à moment continu sont bien satisfaites, et qu'elles reproduisent le zéro de la trajectoire du ρ à $t = -0.5 \text{ GeV}^2$. Nous trouvons également que la partie imaginaire de l'amplitude d'hélicité-flip, construite à partir des données d'analyses en déphasages, présente justement la forme prédite par les modèles duaux périphériques, $J_1(R\sqrt{-t})$ ($R \approx 1$ fermi).

La Partie II est consacré à l'étude des pôles fixes dans le plan complexe du moment angulaire pour les réactions méson-baryon à deux corps. Nous évaluons la première règle de somme à énergie finie de mauvaise signature pour l'amplitude d'hélicité-flip des réactions πN et $\bar{\kappa}N$ avec échange de charge, et $\bar{\kappa}N$ avec échange d'hypercharge. Nous trouvons une contribution

non nulle d'un pôle fixe de mauvaise signature à $J=0$ pour toutes ces réactions. Notre étude confirme donc la prédiction théorique d'un pôle fixe de mauvaise signature à $J=0$ pour $\bar{K}N$ échange de charge à partir d'un pôle fixe à $J=0$ pour πN échange de charge, par le biais de l'unitarité dans la voie t . Nous constatons également que si on sature les règles de somme avec des résonances non périphériques, celles-ci construisent le résidu du pôle fixe.

Finalement, dans la partie III, nous faisons une analyse phénoménologique du spectre inclusif de la réaction $pp \rightarrow p\bar{\pi}$ à l'aide des couplages à trois régéons. Nous obtenons une description correcte du spectre pour des données aux ISR de 28 à 1995 GeV^2 . Nous trouvons que les termes qui ne satisfont pas à l'invariance d'échelle contribuent encore de façon appréciable à ces énergies. Pour la question théorique de l'annulation du couplage PPP à $t=0$, nous ne trouvons pas de réponse inambigüe.