RÉPUBLIQUE ALGERIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :...........
N° de Série :..............

MÉMOIRE
Pour obtenir le diplôme de :
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

OPTION : **ANALYSE**

THÈME :

Contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques avec un seul contrôle

présenté et soutenu publiquement par :

ABABSA Amina épouse ZOUATINE

le 14 / 06 /2012

JURY

Président	Mr. Mohamed DENCHE	Pr.	Université Mentouri de Constantine
Rapporteur	Mr. Abdelhamid AYADI	Pr.	Université Larbi Ben M'hidi d'O.E.B
Examinateurs	Mr. Mohamed DALAH	M.C.	Université Mentouri de Constantine
	Mr.Marzoug DJEBARNI	M.C.	Université Larbi Ben M'hidi d'O.E.B

Table des matières

Notations

Ω : domaine borné (ouvert) de $\mathbb{R}^N$.

X, Y deux espaces de Banach.

A désigne un opérateur différentiel élliptique du second ordre.

A^* désignera l'opérateur adjoint de A.

$\|.\|_X, \|.\|_Y$ les normes des espaces X, Y.

$[0, T]$: interval de temps, $T > 0$.

$L(X, Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y.

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to R; f$ mesurable et $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$.

$\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to R; f$ mesurable et $\exists C > 0 : |f(x)| \leq C.p.p.\}$.

$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C.p.p.\}$.

$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx, \forall f, g \in L^2(\Omega)$.

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega)$ tel que $\int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi, \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\}$.

$H^1(\Omega) = \{v/v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$.

$L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions f fortement mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans X.

$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

$\langle f, g\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_X dt$.

$W(0, T) = \{y/y \in L^2(0, T; X), \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; X')\}$ un espace de Hilbert.

$\|y\|_{W(0,T)} = (\|y\|^2_{L^2(0,T;X)} + \|y'\|^2_{L^2(0,T;X')})^{\frac{1}{2}}$.

∂_t : désigne $\frac{\partial}{\partial t}$.

$S(t)_t \geq 0$: semi-groupe fortement continu.

(Ω_0, g) : actionneur zone.

v et u sont des foctions de contrôles.

$\xi \in L^2(Q)$ est une source de chaleur donnée.

Introduction

De nombreux phénomènes physiques, chimiques ou biologiques sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires. Un système physique peut être défini brièvement comme un ensemble d'objets (d'entités ou de sous-systèmes) interconnectés et interagissant entre eux.

Mathématiquement le système sera représenté par une maquette virtuelle à base d'équations et de signes, c'est-à-dire un modèle. Ce système est dit distribué (ou à paramètres distribués ou encore à paramètres répartis) lorsqu'il évolue dans le temps et l'espace ainsi que des variables d'entrée (commandes) et de sortie (mesures). Les systèmes distribués évoluent donc en fonction de la variable de temps t et d'une variable d'espace indépendante x, cette variable est définie dans un domaine qui représente la configuration géométrique du système réel). Ce système est lié à son environnement par l'intermédiaire d'entrées (les sources ou actions ou contrôles, exercés par l'intermédiaire d'actionneurs) et de sorties (les mesures ou observations, utilisant des capteurs).

La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, son extension à la dimension infinie a connu plusieurs temps. La théorie de la contrôlabilité aux trajectoires a été développée, dans les années 70', en particulier autour des systèmes paraboliques. Les années 90' sont marquées par un point fort, A.Fursikov et O.Y.Imanuvilov [2] donnent la démonstration et l'utilisation d'inégalités globales de Carleman (et également, pour l'équation de la chaleur en particulier, par G.Lebeau et L.Robbiano [15]) pour la contrôlabilité aux trajectoires des équations paraboliques du second ordre.

Le contrôle des systèmes d'équations aux dérivées partielles constitue un champ mathématique en plein essor. Même si de grandes avancées ont été effectuées ces dernières années, de nombreuses questions restent encore ouvertes. Le contrôle consiste à agir sur une partie de la dynamique afin d'orienter l'évolution. L'objectif général de la théorie de contrôle est d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques et plus rapides. Pour un système biologique. La contrôlabilité peut réduire la douleur et de prolonger la vie. Par exemple, on étudie un régulateur de pression sanguine destiné à maintenir cette pression à niveau constant et convenable, un autre exemple l'étude de la thérapie des tumeurs au cerveau (Modèle de glioblastome) qui est modélisé par un système de deux équations paraboliques couplées avec un seul contrôle.

Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité à zéro d'un système à deux équations paraboliques avec un seul contrôle. Les outils utilisés pour atteindre ce but sont essentiellement les semi-groupes, les actionneurs et l'inégalité d'observabilité.

Dans ce travail, on rassemble dans le premier châpitre l'essentiels des espaces fonctionnels utilisés, des notions sur l'optimisation et la théorie de semi-groupe, nous donnons des théorèmes sur l'existence, l'unicité et la régularité du problème parabolique.([1][4][8][11][21][22])
Dans le deuxième châpitre, nous donnons les définitions, les divers caractérisations liées au notion du contrôlabilité, la contrôlabilité à zéro et les actionneurs.([2][5][9][10][15][16][17])
Enfin dans la première partie du troisième châpitre, nous donnons une caractérisation pour le problème de contrôlabilité à zéro, dans la deuxième partie, nous abordons le problème : trouver le contrôle qui assure la contrôlabilité à zéro pour une équation parabolique. Dans la dernière partie de ce châpitre nous traitons la propriété de contrôlabilité à zéro d'un système à deux équations paraboliques quand un contrôle distribué unique est exercé sur ce système.([3][6][7][12][13][14]...)

Chapitre 1

Résultats Préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert borné de R^n muni de la mesure de lebesgue dx, et de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. X et Y sont deux espaces de Banach des normes respectives $\|.\|_X, \|.\|_Y$.

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ - Espaces de Sobolev.

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans R ($\int_\Omega |u| < +\infty$). On pose

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|dx.$$

Définition 1.1 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to R; u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

On vérifie que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

définis une norme dans $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.1 *L'espase $L^p(\Omega)(1 \leq p < \infty)$ muni de la norme (1.1) est complet.*

Dans le cas particulier $p = 2$, la relation

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ \forall u, v \in L^2(\Omega), \tag{1.2}$$

définie un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, dont la norme associée n'est autre que la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ définit dans (1.1), et l'on a :

Proposition 1.2 *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.2) est un espace de Hilbert.*

Définition 1.2 *Pour $p = \infty$,l'espace de Banach $L^\infty(\Omega)$ tel que :*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to R; u \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |u(x)| \leq C.p.p.\}$$

est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C; |u(x)| \leq C.p.p.\}$$

Définition 1.3 *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_\Omega (uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i})dx = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \tag{1.3}$$

et on note :

$$\|u\|_{1,\Omega} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{1,\Omega} = (\int_\Omega (u^2 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2)dx)^{\frac{1}{2}} = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

la norme correspondante.

Proposition 1.3 *L'espase $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (1.3).*

Désignons par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact dans Ω.

Définition 1.4 *On définit $H^1_0(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c-à-d :*

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

Proposition 1.4 *$H^1_0(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 1.1 *(Théorème de trace) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, il existe un opérateur linéaire continue $\gamma_0 \in L(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ tel que*

$$\gamma_0 u = u \mid_{\partial\Omega}, \forall u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

$L^2(\partial\Omega)$ est l'espace de (classe de) fonctions réelles, de carré intégrable sur $\partial\Omega$.

D'après le théorème de trace, on peut donner la caractérisation suivante des fonctions de $H_0^1(\Omega)$ qui explique le rôle important joué par ce dernier dans la résolution des équations différentielles couplées avec des conditions au bord, c'est-à-dire quand la valeur u est prescrite sur la frontière $\partial\Omega$:

Définition 1.5 *les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$,*

$$H_0^1(\Omega) = \{u/u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma\} = \text{ le noyau de } \gamma_0.$$

Théorème 1.2 *(de Rellich) Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, i.e. tout ensemble borné de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On écrit :*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte } (\hookrightarrow \text{ injection continue }).$$

On peut identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, alors on a les inclusions :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.(voir[4])

Remarque 1.1 *On désigne l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ par $H^{-1}(\Omega)$.*

1.1.2 L'espace $L^p(0, T; X)$

Pour tout $T > 0$, on pose $Q = \Omega\times]0, T[$ le cylindre de frontière $\Sigma = \Omega\times]0, T[$.

Définition 1.6 *Pour tout $p \in R$ avec $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions u fortement mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans X tel que :*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1.5}$$

c'est un espace de Banach pour la norme(1.5).

Si X est de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_X, L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

1.1.3 L'espace $W(0,T)$

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur R, V' (resp.H') est le dual de V (resp.H), On suppose

$$\begin{cases} V \hookrightarrow H, \\ V \text{ dense dans } H. \end{cases}$$

identifiant H à son dual, on peut alors identifier H à un sous espace de V' de sorte que

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue. On introduit l'espace W(0,T) :

$$W(0,T) = \{y/y \in L^2(0,T;V), \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;V')\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|y\|_{W(0,T)} = (\|y\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|y'\|^2_{L^2(0,T;V')})^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.5 *Toute fonction $y \in W(0,T)$ est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T] \to H$. En écrira en bref*

$$W(0,T) \subset C^0([0,T];H)$$

où $C^0([0,T];H)$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans H, munit du norme de la convergence uniforme.

1.2 Notions élémentaires dans les espaces de Hilbert.

Soit $(H, \|.\|_H)$ un espace de Hilbert.

Définition 1.7 *Une suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in H$ dans l'espace de Hilbert H si :*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u),$$

pour toute forme linéaire f continue sur H, ou de manière équivalente si :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v) = (u, v), \forall v \in H,$$

et on note :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H.$$

Comme la topologie faible est séparé, on a :

Proposition 1.6 *Si la limite faible d'une suite existe, elle est unique.*

Définition 1.8 *On appelle convergence forte, et on note $u_n \to u$, la convergence au sens de la norme, i.e.*

$$u_n \to u \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_H = 0.$$

Remarque 1.2 *Si $u_n \to u$ dans H, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H.*

Enonçons un résultat de compacité faible largement utilisé pour passer à la limite dans la plupart des méthodes constructives de résolutions des problèmes variationnels.

Théorème 1.3 *(Théorème de compacité faible) Soit H un espace de Hilbert, et soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans H. Alors, on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement dans H.*

1.3 Optimisation

Donnons d'abord les définitions de fonction convexe et de fonction semi- continue inférieurement.

Soit U un espace de Hilbert sur R, U_{ad} (ensemble des contrôles admissible) est un sous ensemble convexe fermé dans U. On considère une fonction J définit sur U à valeur dans R, que l'on cherche à minimiser sur U_{ad}.

Définition 1.9 *On dit que la fonction $J : U \to R$ est convexe si :*

$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v), \forall u, v \in U, \forall \lambda \in [0,1]$$

On dit que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte, pour $\lambda \in]0,1[$.

Définition 1.10 *une fonction $J : U \to R$ est dite semi continue inferieurement (s.c.i) si et seulement si les ensembles*

$$\{u \in U, J(u) \leq \lambda\}$$

sont fermés pour tout $\lambda \in R$

Proposition 1.7 (4) *1. J est s.c.i si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in N}$ de U telle que $u_n \to u \in U$, on a :*

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u)$$

2. Si U est compact et si J est s.c.i alors J atteint sa borne inferieure sur U(cf.[4]).

On s'interesse au problème de minimisation suivant :
$$\begin{cases} \text{trouver u} \in U_{ad} \\ J(u) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v), v \in U_{ad}.(1.6) \end{cases}$$

1.3.1 Existence et unicité d'optimum

Théorème 1.4 *Soit $v \to J(v)$ une fonction de U_{ad} vérifie :*

1. *$J(v) \to \infty$ si $\|v\|_U \to \infty, v \in U_{ad}$;*
2. *$v \to J(v)$ est s.c.i et convexe.*

Alors il existe un élément $u \in U_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v).$$

Cet élément est unique si J est strictement convexe.

Preuve

Existence :

Soit $(v_n)_{n\in N}$ une suite minimisante :

$$\lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v) < \infty.$$

D'aprés l'hypothèse (1) la suite (v_n) est bornée dans U, et comme ce dernier est de Hilbert, on utilise le Théorème de compacité faible, donc on peut extraire de (v_n) une sous-suite $(v_\mu)_\mu$ telle que :

$$v_\mu \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } U$$

U_{ad} est fermé convexe, donc il est faiblement fermé et $u_0 \in U_{ad}$ la fonction $J(v)$ est faiblement s.c.i car elle est convexe, donc :

$$\lim_{\mu\to\infty} \inf_{v_\mu \in U_{ad}} J(v_\mu) \geq J(u_0).$$

Alors

$$\inf_{v\in U_{ad}} J(v) = \lim_{\mu\to\infty} J(v_\mu) \geq \lim_{\mu\to\infty} \inf_{v_\mu\in U_{ad}} J(v_\mu) \geq J(u_0),$$

donc on a :

$$J(u_0) \leq \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \text{ et } u_0 \in U_{ad},$$

donc nécessairement :

$$J(u_0) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

Unicité :

Soient u_1, u_2 deux solutions différentes de (1.6), c'est-à-dire :

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v),$$

U_{ad} est un ensemble convexe donc $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ est aussi une solution

$$J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

Mais J est strictement convexe :

$$J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) < \frac{1}{2}(J(u_1) + J(u_2)) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$$

d'où la contradiction.

$\blacksquare$

1.3.2 Caractérisation de l'optimum

Théorème 1.5 *Soit la fonction $v \mapsto J(v)$ strictement convexe, différentiable et vérifiant $J(v) \to +\infty$ si $\|v\| \to +\infty, v \in U_{ad}$. Alors l'unique élément u de U_{ad} vérifiant $J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$ est caractérisé par :*

$$J'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}. \tag{1.7}$$

Preuve

Soit $J'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$, par la convexité de J on a :

$J((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v)$, et donc

$\frac{1}{\lambda}[J((1 - \lambda)u + \lambda v) - J(u)] \leq J(v) - J(u), \forall v \in U_{ad}$, et alors

$J'(u)(v - u) \leq J(v) - J(u), \forall v \in U_{ad}$, d'où

$J(v) - J(u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$, ce qui donne :

$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$

Réciproquement :

Soit $J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v), v \in U_{ad}$, pour $u, v \in U_{ad}$, $(1-\lambda)u + \lambda v \in U_{ad}, \forall \lambda \in [0,1]$ donc :
$J(u) \leq J((1-\lambda)u + \lambda v), \forall v \in U_{ad}, \forall \lambda \in [0,1]$, et alors
$J((1-\lambda)u + \lambda v) - J(u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}, \forall \lambda \in [0,1]$, et donc
$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\lambda}[J((1-\lambda)u + \lambda v) - J(u)] \geq 0, \forall v \in U_{ad}$, d'où
$J'(u)(v-u) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$ ■

Remarque 1.3 *Si $U_{ad} = U$, (1.7) est équivaut à : $J'(u) = 0$ dans U.*

1.4 Semi-groupe

Soit $(H, \|.\|_H)$ un espace de Hilbert.

1.4.1 Définitions

Définition 1.11 *Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ linéaires bornés définit sur H est dite semi-groupe si :*

1. *S(0)=I (I est l'opérateur d'identité) ;*
2. *$S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0$.*

avec la propriété :

$$\lim_{t \to 0} S(t)x = x, \forall x \in H, t \geq 0. \tag{1.8}$$

Le semi-groupe est fortement continu (ou de classe C^0), ou plus simplement C^0-semi-groupes.

Si en remplace (1.8) *par :*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0, t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Définition 1.12 *On appelle générateur infinitésimal du C^0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ définit par*

$$x \mapsto Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} S(t)x|_{t=0}.\forall t > 0$$

quand cette limite existe.

Le domaine de l'opérateur A est défini par :

$$D(A) = \{x \in H ; \forall t > 0 \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} existe\}.$$

1.4.2 Théorème de Hille-Yosida

Une caractérisation des semi-groupes est donnée par le théorème de Hille-yosida :

Théorème 1.6 *(Hille-Yosida) Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire (non borné) sur* H*. Si :*

1. *L'opérateur* A *est fermé tel que* $\overline{D(A)} = H$ *;*
2. $\exists \omega \in R, M \geq 1$ *tel que* $\forall \lambda$*, l'ensemble* $\{\lambda, \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$*(l'ensemble résolvant de* A*);*
3. $\|R(\lambda, A)^n\|_{L(H)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \forall n \in N.$

Alors A *génère un* C^0*-semi groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *satisfaisant :*

$$\exists \omega \in R, \exists M \geq 1; \|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0,$$

où $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est la résolvante de* A*.*

1.4.3 Semi-groupe adjoint

L'adjoint de A noté A^* engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual H^* de H. Si $D(A)$ est dense dans $H, D^*(A)$ est dense dans H^*.

1.5 Problème d'évolution parabolique

Soient V et H deux espaces de Hilbert vérifiant les hypothèses données dans 1.1.3. On désigne par $\|\|\|(resp.|\|)$ la norme de $V(resp.H)$.

On considère une forme bilinéaire $\varphi, \psi \mapsto a(\varphi, \psi)$ définit sur $V \times V$ telle que :

$$\begin{cases} \exists c > 0 : |a(\varphi, \psi)| \leq c\|\varphi\|_V\|\psi\|_V, & \forall \varphi, \psi \in V; \\ \exists \alpha > 0 : a(\varphi, \psi) \geq \alpha\|\varphi\|_V^2, & \forall \varphi \in V. \end{cases} \tag{1.9}$$

On se donne le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction y telle que :} & \\ \frac{d}{dt}(y(t), x) + a(y(t), x) = (f(t), x) & f \text{ donné dans } L^2(0, T; V'); \\ y(0) = y_0 & y_0 \text{ donné dans } H. \end{cases} \tag{1.10}$$

D'après le théorème de représentation de Riez, il existe un élément $A\varphi \in H$ unique telle que :

$$a(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_{V' \times V}, A \in \mathcal{L}(V, V')$$

Donc le problème (1.10) équivaut à chercher $y \in W(0,T)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = f, & f \text{ donné dans } L^2(0,T;V') \\ y(0) = y_0, & y_0 \text{ donné dans } H \end{cases} \tag{1.11}$$

1.5.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.7 *Si l'on suppose que (1.9) est vérifiée, le problème (1.10) admet une solution unique y dans $W(0,T)$ dépend continûment des données, c'est-à-dire l'application linéaire*

$$(f, y_0) \to y$$

est continue de $L^2(0,T;V') \times H \to W(0,T)$.(Lions)

Remarque 1.4 *La solution générale de (1.10) peut se représenter sous la forme :*

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, t \in [0,T].$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe engendré par l'opérateur A.

1.5.2 Régularité de la solution

Théorème 1.8 *On suppose que (1.9) a lieu et que $f \in L^2(0,T;H), y_0 \in D(A)$. Alors la solution de (1.10) qui était donnée par le théorème (1.7)vérifie en plus :*

$$y \in C^0(0,T;D(A)),$$

$$y' \in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H).$$

Théorème 1.9 *supposons que :*

1. *La forme bilinéaire $a(.,.)$ vérifie (1.9) et symétrique ;*
2. *L'injection canonique de V dans H est compacte ;*
3. *$y_0 \in V, f \in L^2(0,T;H)$.*

Alors, la solution du problème (1.10) qui était donnée par le théorème (1.7) vérifie aussi :

$$y \in L^2(0,T;D(A)) \cap C^0(0,T;V),$$

$$y' \in L^2(0,T;H).$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes distribués

2.1 Description du système

Soit l'ouvert Ω représente le domaine géométrique du système, et soit $T > 0$.

Considérons les système décrits par l'équation différentielle opérationnelle d'état :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t) = Ay(t) + Bu(t), & \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ y(0) = y_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $A \in L(V, H)$ est un opérateur différentiel engendre un C^0-semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'état H (espace de Hilbert séparable),
- $B \in L(U, H)$ avec U est un espace de Hilbert séparable dit espace de contrôle,
- $u \in L^2(0, T; U)$ dite fonction de contrôle,
- $y_0 \in L^2(\Omega)$ donnée initial.

Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors le système (2.1) admet une solution faible unique continue sur $[0, T]$ donnée par :

$$y_u(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds \tag{2.2}$$

on note :

$$y_u(t) = y(x, t; u)$$

On considère $L_t : L^2(0, T; U) \rightarrow H$ l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds; \forall u \in L^2(0, T; U)$$

L_t sera utilisé, par la suite, pour divers définitions et propriétés.

2.2 Contrôlabilité et notions de contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi à priori.

Contrairement aux systèmes de dimension finie, pour les systèmes distribués on est amené à considérer divers degrés de contrôlabilité. On va introduire les notions de contrôlabilité suivantes : exacte, faible, aux trajectoires, à zéro et finalement la contrôlabilité régionale.

2.2.1 Contrôlabilité exacte

Définition 2.1 *Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *si :*

$$\forall y_d \in H, \exists u \in L^2(0, T; U) : \text{ tel que } y(T) = y_d.$$

Lemme 2.1 *La définition précédente est équivalente à :* $Im(L_T) = H$.

Proposition 2.2 *Le système (2.1) est exactement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *si et seulement si :*

$$\exists c > 0 \text{ tel que } : \|\psi\| \leq c\|B^*S^*(.)\psi\|_{L^2(0,T;U^*)}, \forall \psi \in H^*. \quad (2.3)$$

La preuve découle du résultat plus générale suivant :

Lemme 2.3 *Soient* V, W, Z *des espaces de Banach réflexifs, et* $F \in \mathcal{L}(V, Z), G \in \mathcal{L}(W, Z)$ *alors on a l'equivalence entre :*

1. $ImF \subset ImG$;
2. $\exists \gamma > 0$ *tel que* $\|F^*y^*\|_{V^*} \leq \gamma\|G^*y^*\|_{W^*}, \forall y^* \in Z^*$.

Preuve

On prend $F = Id_H, G = L_T$. On a alors $L_T^*y^* = B^*S^*(.)y^*, \forall y^* \in H^*$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\langle y^*, L_T u\rangle &= \langle y^*, \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds\rangle \\
&= \int_0^T \langle B^*S^*(T-s)y^*, u(s)\rangle ds \\
&= \langle L_T^* y^*, u\rangle,
\end{aligned}$$

et donc $L_T^*y^* = B^*S^*(.)y^*$.

On suppose que le système (2.1) est exactement contrôlable, et soit $y \in ImF = H$. Pour $y_d = S(T)y_0 + y$ il existe $u \in L^2(0,T;U)$ tel que $y_u(T) = y_d$, alors on a :

$$\int_0^T S(t-s)Bu(s)ds = y.$$

On a $L_T u = y$. Donc $ImF \subset ImL_T$, d'aprés le lemme précédent nous avons la relation (2.3).

Inversement, on suppose que (2.3) est vérifiée, alors d'après lemme 2.3, $ImF = H \subset ImL_T$ et par conséquent on a controlabilité exacte. ■

Remarque 2.1 *Le système (2.1) n'est pas exactement contrôlable si un des opérateurs B, L_T est compacte ou le semigroupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est compacte.*

2.2.2 Contrôlabilité faible

Définition 2.2 *Le système (2.1) est dit faiblement (approximativement) contrôlable dans H sur $[0,T]$ si :*

$$\forall y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) : \|y(T) - y_d\|_H \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.4 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système (2.1) est faiblement contrôlable sur $[0,T]$;*
2. $\overline{Im(L_T)} = H$;
3. $Ker(L_T^*) = Ker(L_T^* L_T) = \{0\}$;
4. $(\langle B^* S^*(s)y, v\rangle_H = 0, \forall s \in [0,T]$ *et* $\forall v \in U) \Rightarrow y = 0$;
5. *Si le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique, alors on a :*

$$\overline{\bigcup_{n\in N} Im(A^n S(s)B)} = H, \forall s \in [0,T].$$

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2) : Le système (2.1) est faiblement contrôlable sur $[0,T]$

$$\Leftrightarrow \forall y_d \in H, \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } \|y_u(T) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

On a $y_u(T) = L_T u$ alors

$$\forall y_d \in H, \forall \epsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } \|L_T(u) - y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

$\Leftrightarrow \overline{Im(L_T)} = H.$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons (2) et soit $y^* \in H^*$ tel que $L_T^* y^* = 0$, on a alors :

$$\langle y^*, L_T u\rangle_{H^* \times H} = 0, \forall u \in L^2(0,T;U)$$

Cela implique que :

$$y^* \in (\overline{ImL_T})^\perp = \{0\}.$$

Donc $y^* = 0$, et comme $(\overline{ImL_T})^\perp = \ker(L_T^*)$ alors :

$$\ker(L_T^*) = \{0\}.$$

On calcule $\ker(L_T^* L_T)$, supposons que :

$$\exists x \in H : \langle (L_T^* L_T)x, y\rangle = 0, \forall y \in H$$

$$\Rightarrow \exists x \in H : \langle L_T^* x, L_T^* y\rangle = 0, \forall y \in H$$

Pour $y = x$ on a :

$$\exists x \in H : \langle L_T^* x, L_T^* x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in H : \|L_T^* x\| = 0$$

et comme $\ker L_T^* = \{0\}$, $x = 0$ donc $\ker(L_T^* L_T) = \{0\}$ d'où :

$$\ker(L_T^*) = \ker(L_T^* L_T) = \{0\}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : Supposons :

$$\ker(L_T^*) = \ker(L_T^* L_T) = \{0\}.$$

Il est facile de voir que $L_T^* y = B^* S^*(T-s)y, \forall y \in H$. Si : $\langle B^* S^*(s)y, v\rangle_H = 0, \forall s \in [0,T]$ et $\forall v \in U$ alors :

$$\langle B^* S^*(T-s)y, v\rangle_H = 0, \forall s \in [0,T], \forall v \in U$$

et comme : $\ker(L_T^*) = \{0\}$ donc $L_T^* y = 0$ d'où $y = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (5) : On suppose qu'il existe $s \in]0,T[$ tel que :

$$\overline{\bigcup_{n \in N} Im(A^n S(s)B)} \neq H, \forall s \in [0,T].$$

Donc

$$\exists y \neq 0, \text{ tel que } \langle y, A^n S(s)Bv\rangle = 0, \forall n \in N, \forall v \in U$$

Alors :

$$\frac{d^n}{ds^n}\langle y, S(s)Bv\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall v \in U$$

et par l'hypothèse d'analyticité on déduit que $\langle y, S(s)Bv\rangle_{H'\times H} = 0, \forall v \in U$ et t voisin de s, alors $\langle B^*S^*(s)y, v\rangle = 0, \forall v \in U, \forall s \in [0,T]$. D'où $B^*S^*(s)y = 0$, celà implique que $y = 0$, d'où la contradiction.

(5) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que $\overline{Im(L_T)} \neq H$, alors $\exists y^* \neq 0$ tel que :

$$\langle y^*, \int_0^T S(T-s)Bvds\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall v \in U$$

Alors : $\langle y^*, S(T-s)Bvds\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall s \in]0,T], \forall v \in U$, et donc :
$\frac{d^n}{ds^n}\langle y^*, S(T-s)Bvds\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in [0,T], \forall v \in U$, et alors :
$\langle y^*, \frac{d^n}{ds^n}S(T-s)Bvds\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in]0,T], \forall v \in U$, d'où :
$\langle y^*, A^nS(T-s)Bvds\rangle_{H^*\times H} = 0, \forall n \in N, \forall s \in]0,T], \forall v \in U$, ce qui donne :
$y^* \in \overline{(\cup_n ImA^nS(s)B)}^{\perp}, \forall s \in]0,T]$
d'où $\overline{\cup_n ImA^nS(s)B} \neq H$. (Cf.[5]) ■

Mais cette notion est malheureusement insuffisante lorsqu'on veut par exemple stabiliser le système autour d'un état stationnaire instable, puisqu'il faudrait contrôler tout le temps pour rester dans un voisinage de la solution, ce qui est impossible dans la pratique, donc la contrôlabilité approchée est trop faible. Pour celà, nous proposons les concepts suivants :

2.2.3 Contrôlabilité aux trajectoires

Ici il s'agit de raisonner non pas sur les états finaux du système, mais sur les trajectoires. Nous allons modifier notre problème pour dire que nous voulons non pas atteindre n'importe quel état final, mais coïncider avec une trajectoire donnée à l'instant T. Considerons donc une trajectoire libre de notre système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bar{y}(t) = A\bar{y}(t), & \text{dans } Q = \Omega \times (0,T), \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Supposons notre état initial $y_0 \in H$ différent de $\bar{y}_0$. Alors nous voulons trouver un contrôle u tel que la solution de (2.1) vérifie

$$y(T) = \bar{y}(T).$$

Définition 2.3 *(Contrôlabilité sur les trajectoires) On dit que le système* (2.1) *est contrôlable sur les trajectoires en temps T si, de toute donnée initiale, on peut atteindre n'importe quelle trajectoire en temps T.*

Donc, c'est amener la solution exactement sur une trajectoire libre du système au temps T.

Supposons que le système que l'on considère est a l'état y_0 en $t = 0$. L'idée est que l'on veut être exactement sur $\bar{y}$ au temps $t = T$, c'est-à-dire que l'on veut avoir, en posant $z = y - \bar{y}$, $z(T) = 0$, avec une condition initiale $z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ qui décrit l'espace U_0 quand y_0 parcoure U_0. On est donc ramené au problème de contrôlabilité exacte sur les trajectoires, ou encore de contrôlabilité à zéro (notions équivalentes sur des problèmes linéaires).

Enfin nous remarquons que, pour un problème linéaire, le problème se réduit à la contrôlabilité à zéro.

2.2.4 Contrôlabilité à zéro

Définition 2.4 *(Contrôlabilité à zéro) On dit que le système* (2.1) *est contrôlable à zéro en temps T si, de toute donnée initiale, on peut atteindre la trajectoire nulle en temps T.*

Autrement dit, le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps T si pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$ il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ tel que la solution y de (2.1) satisfait $y(T) \equiv 0$ dans Ω.

Donc, c'est amener la solution exactement à zéro au temps T.

Ce concept semble le plus intéressant des trois que nous avons mentionnés, c'est celui qui a le plus de sens physique.

Remarque 2.2 *On peut définir la contrôlabilité à zéro en utilisant les semi-groupes comme suit :*

Le système (2.1) *est contrôlable à zéro si, pour chaque $y_0 \in H$ et pour chaque $\tilde{y}_0 \in H$, il existe $u \in L^2((0, T); U)$ tel que la solution du problème* (2.1) *satisfait $y(T) = S(T)\tilde{y}_0$.*

Rappelons que, par linéarité, on obtient une définition équivalente de «contrôlable à zéro dans le temps T» si, dans la définition ci-dessus, on suppose que $\tilde{y}_0 = 0$. Ceci explique la terminologie usuelle "contrôlabilité à zéro".

Proposition 2.5 *Soit $T > 0$. Le système* (2.1) *est contrôlable à zéro dans H sur $[0, T]$ si et seulement si :*

$$\exists c > 0 \text{ tel que } : \|S^*(T)\psi\| \leq c\|B^*S^*(.)\psi\|_{L^2(0,T;U^*)}, \forall \psi \in H^*. \tag{2.5}$$

Preuve L'outil principal pour la preuve du Proposition 2.5 est le lemme suivant :

Lemme 2.6 *Soit H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert. Soit C_2 une application linéaire continue de H_2 en H_1 et Soit C_3 être un opérateur linéaire fermé densément défini à partir de $\mathcal{D}(C_3) \subset H_3$ en $H1$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1 - Il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\|C_2^* h_1\|_{H_2} \leq M \|C_3^* h_1\|_{H_3}, \forall h_1 \in \mathcal{D}(C_3^*). \tag{2.6}$$

2- On a l'inclusion suivante :

$$C_2(H_2) \subset C_3(\mathcal{D}(C_3)). \tag{2.7}$$

De plus, si $M \geq 0$ est que (2.6) possède, il exist une application linéaire continue C_1 de H_2 en H_3 telle que

$$C_1(H_2) \subset \mathcal{D}(C_3), C_2 = C_3 C_1, \tag{2.8}$$

$$\|C_1\|_{\mathcal{L}(H_2;H_3)} \leq M. \tag{2.9}$$

Appliquons le lemme 2.6 avec les espaces et les applications suivantes :

- les espaces H_1, H_2 et H_3 sont donnés par

$$H_1 = H, H_2 = H, L^2((0,T);U).$$

- l'application linéaire C_2 de $y_0 \in H$ vers $y(T) \in H$, où $y \in C^0([0,T];H)$ est la solution du problème

$$y' = Ay, y(0) = y_0.$$

En d'autre terme,

$$C_2 = S(T).$$

- l'application linéaire C_3 de $u \in L^2((0,T);U)$ vers $y(T) \in H$, où $y \in C^0([0,T];H)$ est la solution du problème

$$y' = Ay + Bu(t), y(0) = 0.$$

En d'autre terme,

$$C_3 = L_T.$$

On note que C_3, dans ce cas-ci, est un opérateur linéaire continu de $L^2((0,T);U)$ dans H.

Avec ces choix, la contrôlabilité à zéro du système linéaire $y' = Ay + Bu$ est équivalente à l'inclution (2.7). En effet, Supposons d'abord que (2.7) est vérifier et prouver la contrôlabilité à zéro. soit y_0 et $\tilde{y}_0$ dans H. Soit $u \in L^2((0,T);U)$ tel que $C_3u = C_2(\tilde{y}_0 - y_0)$,c-à-d, $L_Tu = S(T)(\tilde{y}_0 - y_0)$. Soit $y \in C^0([0,T];H)$ est la solution du problème

$$y' = Ay + Bu(t), y(0) = y_0.$$

Alors $y = y_1 + y_2$, où $y_1 \in C^0([0,T];H)$ est la solution du problème

$$y_1' = Ay_1, y_1(0) = y_0.$$

où $y_2 \in C^0([0,T];H)$ est la solution du problème

$$y_2' = Ay_2 + Bu, y_2(0) = y_0.$$

En particulier,

$$y(T) = y_1(T) + y_2(T) = C_2y_0 + C_3u = S(T)y_0 + S(T)(\tilde{y}_0 - y_0) = S(T)\tilde{y}_0,$$

ce qui prouvent la contrôlabilité à zéro. La preuve de l'inverse est semblable.

Remarque 2.3 *supposons que le système (2.1) est contrôlable à zéro au temps T. Soit $y_0 \in H$ Pour $\psi \in D(A^*)$,on pose*

$$J(\psi) = \frac{1}{2}\int_0^T \|B^*S^*(t)\psi\|_U^2 dt + \langle S(T)^*\psi, y_0\rangle_H.$$

La fonctionnelle J est strictement convexe, et, d'après l'inégalité d'observabilité (2.5), est coercive. Soit ψ un minimiseur. Définissons le contrôle u par

$$u(t) = B^*S^*(T-t)\psi,$$

pour toute $t \in [0,T]$, et soit y la solution correspondante de (2.1). Alors, on a $y(T) = 0$. De plus, u est le contrôle minimal pour la norme L^2, parmi tout les contrôles associées au trajectoire qui satisffaite $y(T) = 0$.

Cette remarque montre que l'observabilité implique la contrôlabilité, et donne une manière constructive d'établir le contrôle de L^2 norme minimal.

2.3 Application : L'équation de la chaleur

On considère un matériau caractérisé par sa température $y(x,t) \in R$ dans un domaine Ω borné et régulier. Alors la loi d'évolution de la température, au présence d'une source, est donnée par

$$\begin{cases} \partial_t y - \triangle y = f & \Omega \times (0,T); \\ y = 0 & \partial\Omega; \\ y(t=0) = y_0 & . \end{cases} \tag{2.10}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$, pour tout $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$, il existe une fonction y solution de l'équation (2.10) avec*

$$\begin{cases} y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t y \in L^2(0,T; H^-1(\Omega)), \end{cases}$$

et par consequent, $y \in C([0,T], L^2(\Omega))$.

Nous allons considérer un problème avec contrôle distribué, et l'operateur $B = 1_\omega$ avec ω un sous ouvert de Ω, et on aura $u \in L^2(0,T; L^2(\omega))$ qui satisfait :

$$\begin{cases} \partial_t y - \triangle y = u1_\omega & \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \partial\Omega, \\ y(t=0) = y_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Remarquons tout de suite que, l'équation de la chaleur étant linéaire, il nous suffit de regarder la contrôlabilité à zéro.

Pour $\omega = \Omega$, le problème de contrôlabilité à zéro est essentiellement trivial

$$\begin{cases} \partial_t y - \triangle y = u & \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \partial\Omega, \\ y(t=0) = y_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

En effet, prenons $u = 0$ sur $[0, \frac{T}{2}]$. Alors on a atteint une fonction $y(\frac{T}{2})$ de classe C^∞. Considérons ensuite une fonction $\eta : [0,T] \to R$ de classe C^∞ telle que $\eta = 1$ sur $[0, \frac{T}{2}]$ et $\eta = 0$ sur $[\frac{3T}{4}, T]$. Posons alors $u = \eta \triangle y(\frac{T}{2}) + \partial_t \eta . y(\frac{T}{2})$ sur $[\frac{T}{2}, T]$. Alors $\eta y(\frac{T}{2})$ est la solution de l'équation sur $[\frac{T}{2}, T]$ et on a bien $y(T) = 0$ pour ce contrôle.

Contrôlabilité approchée

Théorème 2.2 *L'équation de la chaleur est contrôlable de façon approchée en tout temps $T > 0$.*

Preuve Il suffit de montrer que $R(T,0)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, et donc que son orthogonal est reduit a $\{0\}$. Prenons donc un $\phi_T \in L^2(\Omega)$ et dans $R(T,0)^{\perp}$. On Considère l'équation adjointe de donnée finale ϕ_T :

$$\begin{cases} -\partial_t \phi - \triangle \phi = 0 & \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 & \partial\Omega, \\ \phi(t=T) = \phi_T. \end{cases} \tag{2.13}$$

Alors, par hypothèse, on a

$$\forall u \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \int_\Omega y(T,x)\phi(T,x)dx = 0,$$

et donc

$$\forall u \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \int\int_{(0,T)\times\Omega} (\partial_t - \triangle) y(t,x)\phi(t,x)dtdx = \int\int_{(0,T)\times\Omega} (-\partial_t - \triangle)\phi(t,x)y(t,x)dtdx,$$

et donc

$$\forall u \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \int\int_{(0,T)\times\omega} u(t,x)\phi(t,x)dtdx = 0.$$

On a donc $\phi = 0$ sur $(0,T)\times\omega$, ce qui implique que $\phi \equiv 0$, en admettant la propriété de continuation unique de l'équation de la chaleur, qui est une conséquence immédiate de l'inégalité de Carleman, et donc que $\phi_T = 0$. ■

Théorème 2.3 *(Saut et Scheurer [21]) Soit ϕ solution de* (2.13)*. Alors, si $\phi = 0$ sur $\omega \times (0,T)$, ϕ est identiquement nulle sur $\Omega \times (0,T)$.*

Contrôlabilité exacte sur les trajectoires

Théorème 2.4 *(Lebeau-Robbiano [15] et Fursikov-Imanuvilov [2]) L'équation de la chaleur est contrôlable exactement sur les trajectoires, pour tout temps $T > 0$.*

Preuve Ici le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathrm{u}_\epsilon \in L^2(0,T;L^2(\omega)) \text{ telle que la solution de l'état :} & \\ \partial_t y - \triangle y = u 1_\omega & \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \partial\Omega \\ y(t=0) = y_0 & \end{cases} \tag{2.14}$$

vérifie

$$y(T) = 0$$

Le problème principale de cette approche est qu'il n'y a pas à priori uncité du contrôle. L'idée qui pourrait sembler naturelle, c'est de regarder un u_ϵ. qui vérifie $\|y(u_\epsilon)\| \leq \epsilon$, et extraire une sous suite convergente. Le problème est que le contrôle peut être à priori trés grand et il y en a à priori beaucoup. On préfére donc selectionner un contrôle de norme la plus petite possible.

Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$A_\epsilon = \{u \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \|y(u)(T)\| \leq \epsilon\}.$$

Cet ensemble est fermé, convexe, et non vide, d'après le point précédent. On peut donc trouver une solution u_ϵ au problème

$$min_{u \in A_\epsilon} \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}$$

Mieux : D'après le théorème de Fenchel,

Théorème 2.5 *(de Fenchel) Soit $f : F \to \bar{R}$ Si f est convexe s.c.i., alors*

$$f = f^{\circ\circ}$$

Une telle fonction est en particulier minorée par une fonction réelle affine continue.

où f° est la fonction conjuguée de f donnée par

$$f^\circ(\mu) = \sup_{\varphi \in F}[Re\langle \varphi \backslash \mu \rangle - f(\varphi)] \in \bar{R}, \forall \mu \in F',$$

et F' est le semi-dual topologique de l'espace vectoriel F.

On a

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} = min_{\psi_T \in L^2(\Omega)} J_\epsilon(\psi_T),$$

où J_ϵ est définit par

$$J_\epsilon(\psi_T) = \frac{1}{2} \int\int_{(0,T)\times\omega} |\psi(t,x)|^2 dtdx + \epsilon \|\psi_T\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega u_0(x)\psi(0,x)dx, \tag{2.15}$$

avec $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ solution du problème

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \triangle \psi = 0 & \Omega \times (0,T), \\ \psi = 0 & \partial\Omega, \\ \psi(t = T) = \psi_T. \end{cases} \tag{2.16}$$

De plus, il est facile de voir que le problème de minimisation de J_ϵ, qui admet forcément une solution ψ_T^ϵ par le théorème de Fenchel, vérifie $u_\epsilon = 1_\omega.\psi_\epsilon$.

En effet, nous ne sommes pas obligés d'utiliser le théorème de Fenchel pour voir que J_ϵ admet un minimum, il est facile de voir que l'inégalité de Carleman implique la coercivité de cette fonctionnelle. Nous pouvons aussi nous demander pourquoi ne pas essayer de trouver un minimum sur la fonctionnelle limite J obtenue en prenant $\epsilon = 0$. En effet, cette fonctionnelle n'est pas coercive à priori, et donc il est très difficile de montrer qu'elle admet un minimum, ce qui va se révéler être vrai par la suite, par exemple par le théorème de Fenchel, que l'on pourra appliquer puisque l'ensemble A_0 sera non vide, résultat que l'on n'a pas à priori. Désormais, nous devons essayer de trouver une borne sur les u_ϵ. Pour celà, nous pouvons remarquer que $J_\epsilon(\psi_T^\epsilon) \leq J_\epsilon(0) = 0$, d'où

$$\frac{1}{2}\|u_\epsilon\|^2_{L2(0,T;L^2(\omega))} + \int_\Omega u_0(x)\psi_\epsilon(0,x)dx \leq 0.$$

Donc, si on arrive a démontrer que

$$|\int_\Omega \psi_\epsilon(0,x)^2 dx| \leq C\|u_\epsilon\|_{L2(0,T;L^2(\omega))}, \tag{2.17}$$

alors on a le résultat facilement, puisqu'on aura

$$\|u_\epsilon\|_{L2(0,T;L^2(\omega))} \leq 2C\|y_0\|_{L^2(\Omega)},$$

et donc on pourra extraire une sous suite, encore notée u_ϵ par abus de langage, qui converge faible $L^2(0,T;L^2(\omega))$ vers un élément u. De là, on déduit des résultats classiques sur l'équation de la chaleur, que $z_\epsilon = y(u_\epsilon)$ converge vers $z = y(u)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$. Notamment, on peut passer à la limite dans les conditions aux bords, et on obtient :

$$z(T) = 0.$$

Il s'agit donc désormais de démontrer l'inégalité (2.17) dite d'observabilité. Là encore, il s'agit d'une conséquence de l'inégalité de Carleman. ■

Inégalité de Carleman et applications à la contrôlabilité

Nous avons besoin ici d'introduire une fonction poids qui vérifie certaines hypothèses, et dont l'existence nous est assurée par le lemme suivant.

Lemme 2.7 *Soit ω_0 un sous ouvert tel que $\bar{\omega_0} \subseteq \omega$. Alors il existe une fonction $\psi \in C^2(\Omega)$ tel que*

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, \psi(x) > 0, \\ \forall x \in \partial\Omega, \psi(x) = 0, \\ \forall x \in \bar{\Omega} - \omega_0, |\nabla\psi| > 0. \end{cases}$$

Posons, pour $\lambda > 0$,

$$\zeta(x,t) = \frac{exp\lambda(\psi(x) + m_1)}{t(T.t)}$$

$$\eta(x,t) = \frac{exp\lambda(|\psi|_{L^\infty(\Omega)} + m_1) - exp\lambda(\psi(x) + m_1)}{t(T.t)}$$

avec $m_1 = |\psi|_{L^\infty(\Omega)} + 2$ et $m_2 = |\psi|_{L^\infty(\Omega)} + 3$.

Ainsi on obtient pour tout $\lambda > 0$

$$\begin{cases} |\partial_t\zeta| \leq T\zeta^2, \\ |\partial_t\eta| \leq T\zeta^2, \\ |\partial_t t^2\zeta| \leq T^2\zeta^3, \\ |\partial_t t^2\zeta| \leq T^2\zeta^3. \end{cases}$$

D'aprés ces relations, on peut démontrer l'inégalité suivante :

Théorème 2.6 *(Inégalité de Carleman). Il existe $s_0 > 0, \lambda_0 > 0$, tels que il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \omega_0, \psi, T$, telle que pour tout $g \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, la solution $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ du problème suivant*

$$\begin{cases} \partial_t y - \triangle y = g & \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \partial\Omega, \\ y(t=0) = y_0. \end{cases} \tag{2.18}$$

satisfait $\forall s \geq s_0, \forall\lambda \geq \lambda_0$,

$\frac{1}{s}\int\int_{(0,T)\times\Omega} \frac{\exp(-2s\eta)}{\zeta}(|\partial_t y|^2 + \sum_{i,j=1}^N |\partial_{ijt}^2 y|^2)dtdx+$

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \int\int_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)\zeta|\nabla y|^2 dtdx+ \\ & s^3\lambda^4 \int\int_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)\zeta^3|y|^2 dtdx+ \\ & \leq C(\int\int_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)|g|^2 dtdx+ \\ & s^3\lambda^4 \int\int_{(0,T)\times\omega} \exp(-2s\eta)\zeta^3|y|^2 dtdx). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Corollaire 2.8 *(Inégalité d'observabilité) L'inégalité d'observabilité (2.17) est vraie.*

Preuve On veut montrer que

$$\int_{\Omega} \phi(0)^2 dx \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} \phi(0,T)^2 dxdt$$

En posant $v(t,x) = \eta(t).\phi(t,x)$, avec η une fonction cut-off positive qui vaut 1 sur $[0, \frac{T}{4}]$, et 0 sur $[\frac{3T}{4}, T]$, on a facilement en intégrant l'équation

$$\begin{cases} -\partial_t u - \triangle u = -\partial_t \eta & \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \partial\Omega, \\ u(T) = 0. \end{cases}$$

que

$$\int_{\Omega} \phi(0)^2 dx \leq C \int\int_{\Omega\times(\frac{T}{4},\frac{3T}{4})} \phi(t,x)^2 dxdt, \tag{2.20}$$

et il est facile d'obtenir une majoration du terme de droite par le terme désiré en remarquant que les coefficients de l'inégalité de Carleman sont minorés et majorés sur $[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]$. ■

Corollaire 2.9 *La fonctionnelle J_ϵ définie par (2.15) est coercive.*

Preuve L'idée est de considérer une suite telle que $\|\phi_{T,n}\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ et $J_\epsilon(\phi_{T,n}) \leq K$. En posant

$$\tilde{\phi}_{T,n} = \frac{\phi_{T,n}}{\|\phi_{T,n}\|_{L^2(\Omega)}},$$

on remarque alors que $\tilde{\phi}_n \to 0$ dans $L^2((0,T)\times\omega)$, et donc, d'après l'inégalité d'observabilité, $\|\tilde{\phi}_n(0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, mais on a que

$$\int_{\Omega} u_0(x)\tilde{\phi}_n(0,x)dx \leq -\epsilon,$$

et donc on arrive à une contradiction, et on a bien prouvé que la fonctionnelle était coercive.
■

2.4 Comparaison des différentes notions

On a clairement
(contrôlabilité exacte) ⇒ (contrôlabilité à zéro et contrôlabilité approximative (faible)).

La réciproque est fausse en général. Toutefois, la réciproque est vraie si S est un groupe fortement continu d'opérateurs linéaires. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.7 *(contrôlabilité à zéro / contrôlabilité exacte) Supposons que $S(t), t \in R$, est un groupe fortement continu d'opérateurs linéaires. Soit $T > 0$. Supposons que le système (2.1) est contrôlable à zéro dans le temps T. Alors, il est exactement contrôlable dans le temps T.*

Preuve Soit $y_0 \in H$ et $y_d \in H$. D'aprés l'hypothèse de contrôlabilité à zéro appliquée aux données initiales $y_0 - S(-T)y_d$, il existe $u \in L^2((0,T);U)$ tels que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{y}(t) = A\tilde{y}(t) + Bu(t); \\ \tilde{y}(0) = y_0 - S(-T)y_d. \end{cases}$$

satisfait

$$\tilde{y}(T) = 0. \tag{2.21}$$

On voit facilement que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y = Ay + Bu(t); \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$y(t) = \tilde{y}(t) + S(t-T)y_d, \forall t \in [0,T]. \tag{2.22}$$

En particulier, de (2.21) et (2.22),

$$y(T) = y_d.$$

Ceci conclut la preuve du théorème. ■

Proposition 2.10 *On a :*

(i) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité approchée mais la réciproque est fausse.

(ii) La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité aux trajectoires mais la réciproque est fausse.

(iii) Il n'y a aucune relation entre contrôlabilité approchée et contrôlabilité aux trajectoires.

2.5 Notion d'actionneur

Les actionneurs peuvent être de nature, de forme, de conceptions diverses. Ceux que l'on rencontre, dans les systèmes physiques, peuvent être de type

1. Ponctuel, tel un brûleur dans un système de diffusion.
2. Zone, c'est le cas, par exemple, d'un système de diffusion chauffé sur une zone.

3. Filament, cas d'un four chauffé par une résistance électrique.

Ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'interieur du domaine Ω ou bien sur sa frontière $\partial\Omega$.

2.5.1 Définitions

Définition 2.5 *Soit Ω_0 une partie non vide, fermée de Ω, et soit $g \in L^2(\Omega_0)$ on appelle actionneur zone le couple (Ω_0, g) où*

1. Ω_0 représente le support de l'actionneur.

2. g représente la répartition spatial de l'acctioneur.

Dans le cas d'action ponctuelle ou frontière les définitions restent les mêmes. Nous parlerons

- d'actionneur zone frontière (Γ_0, g) où $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ et $g \in L^2(\Gamma_0)$.
- d'actionneur ponctuel $(b, \delta_b), b \in \Omega$ ou $b \in \partial\Omega$, tel que δ_b est la masse de Dirac au point b.

2.6 Notion d'actionneur stratégique

La contrôlabilité d'un système peut être affectée par le choix des actionneurs, que ce soit par la localisation du support des actionneurs, ou par la répartition de l'action sur ces supports. Nous introduisons les définitions suivantes.

2.6.1 Définitions

Définition 2.6 *On dit qu'un actionneur (Ω_0, g) ou (b, δ_b) est stratégique si le système qu'il excite est faiblement contrôlable dans l'espace d'état E.*

Définition 2.7 *Soit E_0 un sous-espace vectoriel de l'espace d'état E. Nous dirons que l'actionneur (Ω_0, g) (ou (b, δ_b)) est stratégique dans E_0 si le système qu'il excite est exactement contrôlable dans E_0.*

Ces définitions restent valables pour des actionneurs de type frontière.

Remarque 2.4 *1. Dans le cas de plusieurs actionneurs* $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ *(ou ponctuels* $(b_i, \delta_{b_i})_{1\leq i\leq p}$*), on dira que la suite d'actionneurs est stratégique si le système exciteé par ces p actionneurs est faiblement contrôlable.*

2. Il est évident que si le système est excité par p actionneurs et si, pour un certain $i_0, 1 \leq i_0 \leq p$*, l'actionneur d'indice* i_0 *est stratégique, alors la suite des p actionneurs est stratégique.*

2.6.2 Caractérisation des actionneurs stratégiques

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Supposons que A est auto-adjoint à résolvante compacte, engendre un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E, et admet un système orthonormé complet de fonctions propres (ϕ_{n_j}) associées aux valeurs propres $(\lambda_n), \lambda_n$ étant de multiplicité r_n.

Nous avons alors la propriété de caractérisation suivante.

Proposition 2.11 *La suite d'actionneurs* $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ *est stratégique si et seulement si :*

1) $p \geq \sup_n(r_n)$.

2) $rg(G_n) = r_n$*, pour tout n, où* G_n *est la matrice d'ordre* (p, r_n) *et d'éléments :*

$$(G_n)_{ij} = \langle g_i, \phi_{nj} \rangle_{L^2(\Omega_i)}, i = 1, ..., p \text{ et } j = 1, ..., r_n.$$

(ϕ_{nj}) *est un système complet de fonctions propres de* $L^2(\omega)$ *et les valeurs propres associées supposées de multiplicité* r_n.

Cette caractérisation suppose donc, en particulier, que le plus grand ordre de multiplicité des valeurs propres de A est fini.

2.6.3 Existence d'actionneurs stratégiques

Supposons que le système (2.23) est excité par p actionneurs dont les supports $(\Omega_i)_{1\leq i\leq p}$ sont fixés.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.12 *Supposons que* $p \geq \sup_n(r_n)$.

pour toute suite $(\Omega_i)_{1\leq i\leq p}$ *d'ouverts contenus dans* Ω*, il existe des fonctions* $(g_i)_{1\leq i\leq p}$ *telles que :*

1) $supp(g_i) \subset \Omega_i$ et $g_i \in L^2(\Omega_i), \forall i, ..., p$.

2) la suite d'actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ est stratégique.

Chapitre 3

Contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques

3.1 Position du problème

Soit $\Omega \subset R^N, N \geq 1$, un ensemble ouvert borné connexe avec la frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Soient ω et $\mathcal{O}$ deux sous-ensembles ouverts non vide de Ω. Pour $T > 0$, nous dénotons $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Nous considérons une équation linéaire de la chaleur avec des conditions initiale partiellement connues

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + a(x)y = \xi + v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) + \tau\hat{y}_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\xi \in L^2(Q)$ est une source de chaleur donnée, y_0 et $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ données initiales,et $v \in L^2(Q)$ est une fonction de contrôle à déterminer. χ_ω est la fonction caractéristique d'ensemble de contrôle ω, et $a(x) \in L^\infty(\Omega)$.

les données de l'équation d'état (3.1) sont incomplètes dans le sens suivant :

- $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega)$ est inconnu avec $\|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$.
- τ est un nombre réel inconnu et assez petit.

Le problème d'insensibilité des contrôles a été présenté par J. L. Lions [19] et peut être énoncé, rudement, comme suit :

Définition 3.1 *Nous disons que la fonctionnelle différentiable $\phi(y)$ définit par*

$$\phi(y) = \frac{1}{2} \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |y(x,t;\tau,v)|^2 dxdt, \tag{3.2}$$

est insensible si

$$\frac{\partial \phi(y(.,.;\tau,v))}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \forall \hat{y}_0 \in L^2(\Omega) \text{ avec } \|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1. \tag{3.3}$$

Où $y = y(.,.;\tau,v)$ est une solution de (3.1) associée à τ et v.

Cette condition d'insensibilité signifie que nous cherchons une fonction contrôle v agisse sur $\omega \times (0,T)$, tel que ϕ est localement insensible à petites perturbations dans la condition initiale.

Théorème 3.1 *(Théorème de régularité) Soit $a = a(x) \in L^\infty(\Omega)$ nous rappelons (voyez [29]) l'existence de $C > 0$(depend de a, Ω et T) tels que pour chaque $k \in L^2(Q)$ et $w_0 \in L^2(\Omega)$ la solution w de*

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + a(x)w = k, & \text{dans } Q \\ w = 0, & \text{sur } \Sigma \\ w(x,0) = w_0, & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

satisfait $w \in H^{2,1}(\Omega) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ et

$$\begin{cases} \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{L^2(Q)}), \\ \|w\|_{X^2(0,T)} \leq C(\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{L^2(Q)}), \end{cases}$$

De plus, quand $w_0 = 0$et $a(x) = 0$, on a $w \in H^{2,1}(\Omega) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

3.2 Caractérisations

On va rappeler un théorème plus intéressant de prolongement unique par continuité

Théorème 3.2 *(Propriété de prolongement unique par continuité) du système d'adjoint*

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit φ solution de (3.5), si $\varphi = 0$ sur $\omega \times (0,T)$ alors $\varphi = 0$ sur Q.

Dans ce cas-ci la condition d'insensibilité (3.2) est équivalente à un problème de contro-labilité à zéro. Cette équivalence est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t y^0 - \Delta y^0 + a(x)y^0 = \xi + v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y^0 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y^0(x,0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

où y^0 est la solution (correspandante à $\tau = 0$) de (3.6).

On dérive (3.1) par rapport à τ

$$\begin{cases} \partial_t y_\tau - \Delta y_\tau + a(x) y_\tau = 0, & \textit{dans } Q \\ y_\tau = 0, & \textit{sur } \Sigma \\ y_\tau(x,0) = \hat{y}_0, & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

y_τ la dérivée de la solution y de (3.1) à $\tau = 0$.

Prenant q la solution du système adjoint de (3.7) qui correspondant à un deuxième membre $y\chi_{\mathcal{O}}$, en d'autres termes, q est la solution de :

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + a(x) q = y\chi_{\mathcal{O}}, & \textit{dans } Q \\ q = 0, & \textit{sur } \Sigma \\ q(x,T) = 0, & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

où y est la solution de (3.1).

Alors, la condition d'insensibilité (3.3) est équivalente à :

$$q(0) = 0. \tag{3.9}$$

Preuve

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} y y_\tau dx dt$$

Multipliant (3.7) par q et integrant sur Q, on a

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t y_\tau - \Delta y_\tau + a(x) y_\tau) q dx dt = 0.$$

Par intégration par partie sur $(0,T)$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega y_\tau q dx dt = \int_0^T \int_\Omega -\frac{\partial q}{\partial t} y_\tau dx dt + \int_\Omega [q y_\tau]_0^T dx$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t} y_\tau dx dt + \int_\Omega [q(T) y_\tau(T) - q(0) y_\tau(0)] dx$$

et comme $y_\tau(x,0) = \hat{y}_0(x)$ et $q(x,T) = 0$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega y_\tau q dx dt = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t} y_\tau dx dt - \int_\Omega q(0) \hat{y}_0 dx$$

et comme $-\Delta$ est un opérateur auto-adjoint alors

$$\int_0^T \int_\Omega -\Delta y_\tau q dx dt = \int_0^T \int_\Omega -\Delta q y_\tau dx dt.$$

Donc

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t q - \Delta q + a(x)q) y_\tau dxdt = \int_\Omega q(0)\hat{y}_0 dx$$

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} y y_\tau dxdt = \int_\Omega q(0)\hat{y}_0 dx.$$

■

Alors, on a le résultat suivant :

Lemme 3.2 *S'il existe un* $v \in L^2(Q)$ *tel que* $\hat{y}_0 \in L^2(\Omega), \|\hat{y}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ *donc* $q(0) = 0$

Alors

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} y y_\tau dxdt,$$

d'où

$$\frac{\partial \phi(y(.,.;\tau,v))}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0.$$

3.3 Problème de contrôlabilité

Considérons le système :

$$\begin{cases} -\partial_t z - \Delta z + a(x) z = u\chi_{\mathcal{O}} & Q, \\ z = 0 & \Sigma, \\ z(T) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Le système (3.10) peut être mis sous forme d'équation d'état en posant $A = -\Delta + a$ et $Bu = u\chi_{\mathcal{O}}$.

L'opérateur A est auto-adjoint a résolvante compacte, donc il admet un système orthonormée complet de fonctions propres (ϕ_{ij}) associées aux valeurs propres (λ_i) , (λ_i) étant de multiplicité r_n.

Le système (3.10) admet une solution unique $z_u(.) \in L^2(0,T;X)$. Ce système est contrôlé par p-actionneur zone $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i<p}$ avec $p \geq \sup_n(r_n)$, $\Omega_i \subset \Omega$ le support de l'actionneur et $g_i \in L^2(\Omega_i)$ sa distribution spatiale.

Dans ce cas on a :

$$Bu(t) = \sum_{i=1}^{p} \chi_{\Omega_i} g_i(x) u_i(t).$$

Considérons le problème de contrôlabilité à zéro du système (3.10) sur la région ω. Autrement dit, il s'agit de trouver un contrôle $u \in U$ tel que

$$z(x,0,u) = 0, \forall x \in \omega.$$

On pose

$$G = \{g \in X/g = 0 \text{ sur } \omega\}, \tag{3.11}$$

et

$$\tilde{G} = \{\tilde{g} \in X^*/g = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}. \tag{3.12}$$

Il est alors facile de voir que

$$(g, \tilde{g}) = \int_\Omega g\tilde{g}dx = \int_\omega g\tilde{g}dx + \int_{\Omega\setminus\omega} g\tilde{g}dx = 0. \tag{3.13}$$

La méthode de la construction du contrôle est basé sur les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Pour $\varphi^0 \in \tilde{G}$ on considère le système

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi + A^*\varphi = 0 & Q, \\ \varphi = 0 & \Sigma, \\ \varphi(0) = \varphi^0 & \Omega, \end{cases} \tag{3.14}$$

qui admet une solution unique $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega))$.

Etape 2 :

On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t\psi(t) = A\psi(t) + \sum_{i=1}^p \langle g_i, \varphi_i(t)\rangle_{L^2(\Omega_i)} g_i(x)\chi_{\Omega_i} & Q, \\ \psi = 0 & \Sigma, \\ \psi(T) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Pour $\varphi^0 \in G$, l'équation (3.14) fournit φ puis l'équation (3.15) donne $\psi(0)$.

Considérons alors l'opérateur M définis de $\tilde{G} \to \tilde{G}^\perp$ par

$$M\varphi^0 = P_{\tilde{G}^\perp}(\psi(T)) \text{ où } P_{\tilde{G}^\perp} = \chi^*_{\Omega_i}\chi_{\Omega_i}.$$

M s'écrit

$$M\varphi^0 = P_{\tilde{G}^\perp}(\psi_0(T) + \psi_1(T)),$$

où ψ_0 est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\psi_0(t) = A\psi_0(t) & Q, \\ \psi_0 = 0 & \Sigma, \\ \psi_0(T) = 0 & \Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

et ψ_1 satisfait l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\psi_1(t) = A\psi_1(t) + \sum_{i=1}^p \langle g_i, \varphi_i(t)\rangle_{L^2(\Omega_i)} g_i(x)\chi_{\Omega_i} & Q, \\ \psi_1 = 0 & \Sigma, \\ \psi_1(T) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Etape 3 : On définit l'opérateur linéaire $\Lambda : \tilde{G} \to \tilde{G}^{\perp}$ par :

$$\forall \varphi^0 \in \tilde{G}, \Lambda \varphi^0 = P\psi_1(t).$$

Le problème de contrôle revient à résoudre l'équation

$$\Lambda \varphi^0 = -P_{\tilde{G}^{\perp}} \psi_0(T). \tag{3.18}$$

Si on multipliant l'équation (3.17) par φ et en intégrant sur Q par parties, on obtient :

$$\langle \Lambda \varphi^0, \varphi^0 \rangle = \int_0^T |\varphi|^2 dt.$$

Pour assurer l'existence de la solution du l'équation (3.18), on introduit l'application

$$\varphi^0 \in \tilde{G} \to \|\varphi^0\|^2 = \int_0^T (\sum_{i=1}^{p} \langle g_i, \varphi_i(t) \rangle_{L^2(\Omega_i)})^2 dt \tag{3.19}$$

qui définit une semi-norme sur G. Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Si la suite d'actionneur $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ est ω-stratégique alors l'équation* (3.18) *admet une solution unique $\varphi^0 \in \tilde{G}$. Le contrôle optimal qui permet le transfert du système (3.10) de y^0 à 0 sur ω est donné par $u(t) = -\langle g_i, \varphi(t) \rangle_{L^2(\Omega_i)}$.*

Preuve 1.Montrons que la suite d'actionneur $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ est ω-stratégique, alors (3.19) définit une norme sur $\tilde{G}$, pour cela il suffit de vérifier que :

$$\|\varphi^0\|_{\tilde{G}} = 0 \Leftrightarrow \varphi^0 = 0.$$

On a :

$$\|\varphi^0\|_{\tilde{G}} = 0 \Rightarrow \langle g_i, \varphi(t) \rangle^2_{L^2(\Omega_i)} = 0 \text{ p.p. sur } [0, T] \Rightarrow \int_{\Omega_i} g_i \varphi(t) dx = 0$$
$$\Rightarrow \int_{\Omega_i} g_i S^*(T-t) \varphi^0 dx = 0$$
$$\Rightarrow g_i S^*(T-t) \varphi^0 = 0 \text{ p.p. sur } \Omega_i.$$

Ou encore

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp(\lambda_i (T-t)) \langle \varphi^0, \varphi_i \rangle \langle g_i, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0,$$

cela entraîne

$$\langle \varphi^0, \varphi_i \rangle \langle g_i, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0 \forall i = 1, \infty.$$

la suite $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ est ω-stratégique c'est-à-dire $\langle g_i, \varphi_i\rangle \notin \ker H^*\chi_\omega^*$ donc on a :

$$\langle g_i, \varphi_i\rangle \neq 0, \forall i = 1, \infty \Rightarrow \langle \varphi^0, \varphi_i\rangle = 0, \forall i = 1, \infty,$$

on déduit que

$$\varphi^0 = 0,$$

il resulte que (3.19) définit une norme sur $\tilde{G}$.

2. Montrons que l'équation (3.18) admet une solution unique. Pour cela nous allons montrer que Λ est un isomorphisme de $\tilde{G} \to \tilde{G}^\perp$.

Calculons

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\varphi^0, \varphi^0\rangle_{\tilde{G}^*,\tilde{G}} &= \langle P_{\tilde{G}^\perp}(\psi_1(T)), \varphi^0\rangle \\ &= \langle \psi_1(T), \varphi^0\rangle\end{aligned}$$

On multiplie l'équation (3.17) par φ, on intégre par parties et on utilise la formule de green, On obtient :

$$\langle \psi_1(T), \varphi(T)\rangle - \langle \psi_1(0), \varphi^0\rangle - \int_Q \psi_1(-\varphi' - A^*\varphi)dQ$$

$$-\int_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu_A}d\Sigma + \int_\Sigma \psi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A^*}d\Sigma = \int_0^T (\sum_{i=1}^p \langle g_i, \varphi_i(t)\rangle_{L^2(\Omega_i)})^2 dt$$

Tenant compte des conditions initiales et aux limites on a

$$\langle \Lambda\varphi^0, \varphi^0\rangle = \|\varphi^0\|^2_{\tilde{G}}$$

On en déduit que Λ est un isomorphisme de $\tilde{G}$ dans $\tilde{G}^\perp$, d'où l'équation (3.18) admet une solution unique. De plus il est claire que le contrôle $u(t) = -\langle g_i, \varphi(t)\rangle_{L^2(\Omega)}$ amène le système (3.10) à 0 sur ω.

Ce contrôle est optimal. En effet, pour $u, v \in L^2(0,T)$, on a

$$\begin{aligned}J'(u)\cdot(v-u) &= \int_0^T u(t)(v(t)-u(t))dt \\ &= \int_0^T \langle g_i, \varphi(t)\rangle(v(t)-u(t))dt\end{aligned}$$

on applique la formule de Green à $\{\varphi, z_v - z_u\}$, on obtient

$$\langle \varphi(T), z_v(T) - z_u(T)\rangle - \langle \varphi(0), z_v(0) - z_u(0)\rangle$$

$$-\int_\Sigma (z_v - z_u)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A^*}d\Sigma + \int \Sigma\varphi(\frac{\partial z_v}{\partial\nu_A} - \frac{\partial z_u}{\partial\nu_A})d\Sigma$$

$$= \int_0^T (v(t) - u(t))\langle g_i, \varphi(t)\rangle dt.$$

à partir des conditions initiales et aux limites, on a

$$\langle \varphi^0, z_v(T) - z_u(T)\rangle = \int_0^T (v(t) - u(t))\langle g_i, \varphi(t)\rangle dt$$

comme $z_v(T), z_u(T), z_y - z_u(T) \in G$ et $\varphi^0 \in \tilde{G}$,

mais

$$z_v(T) - z_u(T) = \chi_\omega z_v(T) - \chi_\omega z_u(T),$$

ce qui imlique que

$$\langle \varphi^0, z_v(T) - z_u(T)\rangle = 0,$$

par conséquent

$$J'(u)(v - u) = 0.$$

d'où la convexité de J, on déduit le résultat. ■

D'après les propositions (3.1) et (3.2) on déduit qu'il existe un v tel que y ce coincïde avec u ($u(t) = -\langle g_{i_0}, \varphi(t)\rangle_{L^2(\Omega_{i_0})}, i_0 \in \{1, p\}$)

3.4 Problème de contrôlabilité pour deux équations

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + a(x)y = \xi + v\chi_\omega & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q + b(x)q = y\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } Q \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ q(x,T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

où $a, b \in L^\infty(Q)$ et les ensembles ouvert $\omega, \mathcal{O}$ sont donnés, avec $\omega \cap \mathcal{O} \neq 0$.

Le but de cette section est d'établir un contrôle $v \in L^2(Q)$, tel que la solution de (3.20)(3.21) vérifie

$$q(x,0) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{3.22}$$

la démonstration est basée sur deux étapes : En utilisant une inégalité d'observabilité, nous construirons des contrôles en $L^2(Q)$.

Proposition 3.4 *Soient $a, b \in L^\infty(Q)$ donnés et soit $\zeta \in L^2(Q)$ vérifient*

$$\int\int_Q exp(\frac{CM}{t})|\zeta|^2 dxdt < \infty \tag{3.23}$$

avec $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O})$ et $M = M(T, \|a\|_\infty, \|b\|_\infty)$. Alors, il existe une fonction de contrôle $\hat{v} \in L^2(Q)$ tel que supp$\hat{v} \subset \bar{B}_\times[0,T]$ et la solution correspondante $(\hat{y}, \hat{q})$ de (3.20)(3.21) satisfait (3.22). D'ailleurs, $\hat{v}$ peut être choisi d'une telle manière que

$$\|\hat{v}\|_{L^2} \leq exp(\frac{C}{2}H)(\int\int_Q exp(\frac{CM}{t})|\zeta|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \tag{3.24}$$

où $H = H(T, \|a\|_\infty, \|b\|_\infty)$

La preuve de ce résultat peut être trouvée en De Teresa [34]. Le point clé dans cette preuve est d'obtenir une inégalité appropriée dobservabilité pour les systèmes adjoint correspondants :

$$\begin{cases} \partial_t\varphi - \Delta\varphi + b\varphi = 0 & \text{dans } Q \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \varphi(x,0) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{cases} -\partial_t\psi - \Delta\psi + a\psi = \varphi\chi_{\mathcal{O}} & \text{dans } Q \\ \psi = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \psi(x,T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

avec $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ et $a, b \in L^\infty(Q)$.

Le résultat suivant établit l'inégalité d'observabilité mentionné ci-dessus :

Proposition 3.5 *Supposons que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Soit B_0 un sous-ensemble ouvert arbitraire de $\omega \cap \mathcal{O}$. Alors, il existe des constantes positives C, M et H tels que, pour chaque $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$, la solution correspondante (φ, ψ) de (3.25)(3.26) satisfait*

$$\int\int_Q exp(-\frac{CM}{t})|\psi|^2 dxdt \leq exp(CH)\int\int_{B_0\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt.$$

avec $M = M(T, \|a\|_\infty, \|b\|_\infty) = 1 + T(1 + \|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|b\|_\infty^{\frac{1}{2}} + \|a-b\|_\infty^{\frac{1}{2}})$,

$$H = H(T, \|a\|_\infty, \|b\|_\infty) = 1 + \frac{1}{T} + T(1 + \|a\|_\infty + \|b\|_\infty) + \|a\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|b\|_\infty^{\frac{2}{3}} + \|a-b\|_\infty^{\frac{1}{2}}$$

et $C = C(\Omega, \omega, \mathcal{O}, B_0)$.

Cette inégalité a été prouvée la première fois en De Teresa [34] comme conséquence d'inégalité de Carleman global pour l'équation de la chaleur (cf. Fursikov et Imanuvilov, [36]).

Application

E. Fernández-Cara (Université de Seville) aussi traite la thérapie des tumeurs sur le contrôle des équations aux dérivées partielles et applications. Il présente l'exemple suivant :

Modèle de glioblastome (tumeur du cerveau)

$$\begin{cases} c_t - \nabla \cdot (D(x)\nabla c) = f(c) - F(c,\beta), & Q = \Omega \times (0;T) \\ \beta_t - \mu\Delta\beta = h(\beta) - H(c,\beta) + v1_\omega, & Q \\ \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial n} = 0, & \Sigma = \partial\Omega \times (0;T) \\ c(0) = c_0, \beta(0) = \beta_0, & \Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

où

- Ω : cerveau (matière blanche et grise).
- c, β cellules tumorales, concentration d'inhibiteurs.
- D constante par morceaux.
- $v = v(x,t)$ thérapie (contrôle), seulement dans ω

pour plus d'information voir Jérôme LE Rousseau [22], E. Alvord, K. Swanson, J.D. Murray [33].

Conclusion

Observons que (3.22) est une propriété de contrôlabilité à zéro pour le système de cascade (3.20)-(3.21).On note que cette situation est plus complexe que la standard puisque le contrôle qui agit sur l'équation de q est y, la solution de (3.20), restreint à $\mathcal{O}$, qui est la solution de l'équation de la chaleur dans laquelle le contrôle v est appliquée. Ainsi, le contrôle v agit sur l'équation (3.21) d'une manière indirecte et ceci ajoute des difficultés importantes en ce qui concerne les problèmes standard de contrôle.

Mentionnons quelques papiers sur cette question :

(1) J. L. Lions [17] a obtenu la contrôllabilité à zéro pour deux systèmes non couplées. La preuve de cette notion est basée sur la théorie des sentinelles simultanées et l'ptimisation.

(2) J. L. Lions [17] et Manuel González-Burgos et Rosario Pérez-Garcia [26] démontrent la contrôllabilité à zéro pour deux systèmes non couplées.

(3) Un premier travail va paraître dans [35]. De son coté, Manuel Gonzalés Burgos travaille aussi dans le groupe de math-bio (sur les tumeurs au cerveau) des universités de Séville et Cordou. Une collaboration des équipes dans ce domaine de la thérapie des tumeurs semblent trés naturelle et très prometteuse.

Bibliographie

[1] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, Applied Mathematical Sciences, 1983.

[2] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Series 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[3] A.Ayadi, M. Djbarni, *Pollution terms estimation in parabolic system with incomplete data*, Pushpa Publishing House, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 17(3)2005, 317-328.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle . Théorie et application*, Masson,1993.

[5] Britchard-Aljai, *Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribuées*, Masson, 1986.

[6] A. Benabdallah, *Contrôlabilité de systèmes de réaction-diffusion par l'action partielle d'une force localisée.* Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités CNRS / Université de Provence.

[7] De Teresa, L, *Insensitizing controls for a semilinear heat equation* : Comm. Partial Differential Equations, 25(12),39-72.

[8] E, B, Davies. *One-parameter Semigroups*, Academic Press, 1980.

[9] E. H. Zerrik, *Analyse régionale des systèmes distribués* : Thèse d'état, Univ Moulay-Ismail . Meknes .Maroc. 1993.

[10] F. Ammar Khodja , A. Benabdallah, *Une introduction à la théorie du contrôle.* 2005.

[11] Francis Hirsch,Gilles Lacombe, *Elements of functional analysis*, second Edition, vol. 68 - 1997.

[12] F. Ammar Khodja , A. Benabdallah, C. Dupaix, *Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force.* J. Math. Anal. Appl. 320. 2006. 928-943.

[13] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix et I. Kostin, *Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force.* EDP Sciences, SMAI 2005.

[14] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. DUPAIX, et I. KOSTIN, *Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force.* SIAM J. CONTROL OPTIM. Vol. 42, No. 5, pp. 1661-1680.

[15] G. Lebeau and L. Robbiano , *Contrôle exact de l'´equation de la chaleur*, Comm. P. D. E., 20 , 335-356, 1995.

[16] J. L. Lions, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod , Paris 1968.

[17] J. L. Lions, *Controlabilité exacte .Perturbation et stabilisation des systèmes distribués* . Tome 1 .Masson 1988.

[18] J. L. Lions, *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes* .Masson 1992.

[19] J. L. Lions, *Remarques préliminaires sur le contrôle des systèmes à données incomplèètes*, (CEDYA), Université de Málaga, 1989, 43-54.

[20] Jean-Michel Coron, *control and nonlinearity*, AMS Bookstore, 2007.

[21] J.C. Saut and B. Scheurer, *Unique continuation for some evolution equations*, Journal of differential equations, 66 :118-139, 1987.

[22] Jérôme LE ROUSSEAU, *Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems*, Elsevier Science, 2005.

[23] K. Yoshida, *Functional analysis* . Springer Verlag 2nd Edit . 1968.

[24] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1921.

[25] L. Rosier, *Contrôlabilité de systèmes paraboliques avec un couplage non linéaire* Séminaire de Mathématiques Appliquées Collège de France, le 11/12/2009

[26] Manuel González-Burgos, Rosario Pérez-Garcia, *Controllability of some coupled parabolic systems by one control force*, Partial Differential Equations/Optimal Control, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340, 2005. 125-130.

[27] O. Bodart, *Existence of Insensitizing Controls for a Semilinear Heat Equation with a Superlinear Nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 29, Nos. 7 8, pp. 1017-1050, 2004.

[28] O. Bodart, C. Fabre, *Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation.* J. Math. Anal. Appl. 195(3) :658-683, 1995.

[29] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'ceva *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, A.M.S., Rhode Island, 1968.

[30] Roger Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, second Edition, vol. 68 - 1997.

[31] S, Axler. K, A, Ribet. *A short course on opérator semigroups*, springer, 2005.

[32] Stéphane Labbé, Emmanuel Trélat, *Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems*, Elsevier Science, 2005.

[33] E. Alvord, K. Swanson, J.D. Murray, *A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter Cell Prolif* 33 : 317-329, 2000.

[34] De Teresa, L. *Insensitizing controls for a semilinear heat equation.* Comm. Partial Differential Equations 25(12) :39-72.2000.

[35] D. Barbolosi, A. Benabdallah, F. Hubert, F. Verga, *Mathematical and numerical analysis for a model of growing metastatic tumors* , A parâtre dans Mathematical Biosciences, 2008.

[36] Fursikov, A., Imanuvilov, O. Yu. *Controllability of Evolution Equations. Lecture Notes Series 34. Seoul : Seoul National University.1996.*

ABSTRACT

The aim of the thesis is to study the null controllability of the systems to two parabolic equations with a single control. First we look at the problem of null controllability for a linear parabolic system. Subsequently we explore the concept of null controllability of systems of two linear parabolic equations, with a single control through examples available in a lot of researches which treat this problem.

Key words : parabolic problem, null controllability, sentinels method, observability inequality

RESUMÉ

Le but de la thèse consiste à étudier la contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques avec un seul contrôle. D'abord on s'intéresse au problème de contrôlabilité à zéro pour un système parabolique linéaire. Par la suite on explore le concept de contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques linéaires et avec un seul contrôle à travers des exemples disponible dans beaucoup de recherches qui traitent ce problème.

Mots clef : problème parabolique, contrôlabilité à zéro,théorie des sentinelles, inégalité d'observabilité.