

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :

N° série :

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

OPTION : Proba- Stat

PAR

Sara Leulmi

THEME

Inférence Statistique dans les Modèles Bilinéaires Périodiques

SOUTENU PUBLIQUEMENT LE :

DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

Président	: F. L. Rahmani	MC.	UMC
Rapporteur	: A. Bibi	Pr.	UMC
Examineurs	: M. Messaci	Pr.	UMC
	S. Djeddar	MC.	UMC

PROMOTION : 2009-2012

REMERCIEMENTS

A Mr. A. Bibi, Professeur à l'UMC, de m'avoir encadré et d'avoir contribué de très près dans ce travail. Mes sincères reconnaissances lui sont divulguées pour toutes ses qualités de maître, en la matière.

A Mr. F. Rahmani, Professeur à l'UMC, pour avoir accepté de présider le jury et surtout pour ses fructueux conseils et discussions.

A Mme. F. Messaci, Professeur à l'UMC et S. Djeddar, Maître de Conférences à l'UMC pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs de mon modeste travail et pour leurs conseils et discussions souhaités.

A Mr. S. Leulmi, Professeur à l'Université du 20 Août 1955, Skikda qui grâce à ses conseils et ses discussions, sur le plan fond et forme, le mémoire a vu son actuel finalité.

A Mr. F. Rahmani, Professeur à l'UMC, pour ses aides administratifs, ses fructueux conseils en tant qu'enseignant et parent. Mes sincères reconnaissances lui sont divulguées pour toutes ses qualités de responsable, en la matière.

A tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation, du primaire, au secondaire sans oublier ceux de l'université (en graduation & en post graduation) qu'ils trouvent, tous, ici mes reconnaissances et ma gratitude envers eux.....

A mes collègues de la promotion pour leurs services et aides appréciables et surtout pour leur soutien morale qu'ils m'ont toujours manifestée.....Un grand merci.

S. LEULMI

"التداخل الإحصائي في النماذج ثنائية الخطية الدورية "

ملخص

هذه المذكرة تعالج بعض مشاكل السلاسل الزمنية غير الخطية و المتعلقة بالزمن . القسم الخاص من النماذج غير الخطية الذي تمت دراسته بشكل متسع هو قسم النماذج الخطية الثنائية الدورية. الشروط الكافية للاستقرار الدوري بصفة دقيقة و من الدرجة الثانية، الانعكاسية و وجود العزوم من مراتب عليا تم التطرق إليها.

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو التقدير في النماذج الثنائية الخطية المتعلقة بالزمن باستعمال طريقة المربعات الدنيا. انطلاقا من شروط معينة نحصل على تقديرات ثابتة و تسلك سلوكا تقاربيا يتبع القانون الطبيعي. هذه الطريقة تعطي نتائج جد مرضية تم تبينها في جزء المحاكاة.

بعض الكلمات المفتاحية : النماذج الغير الخطية المتعلقة بالزمن ، السلاسل الزمنية الثنائية الخطية ، السلاسل الزمنية الثنائية الخطية الدورية ، التمثيل الماركوفي ، الانتظام ، الانتظام الدورية ، الانعكاسية ، حاصل ضرب كرونكر، العزوم من الدرجة العليا ، التقارب نحو القانون الطبيعي.

« Inférence Statistique dans les Modèles Bilinéaires Périodiques »

Résumé

Ce mémoire examine quelques problèmes de séries temporelles non linéaires à coefficients dépendant du temps. La classe particulière des modèles non linéaire qui a été extensivement discutée dans la littérature est la classe des modèles bilinéaires périodiques. Les conditions suffisantes pour la stationnarité périodique au sens strict et au second ordre, l'inversibilité et l'existence des moments d'ordre supérieur sont abordées.

L'objectif principal de ce travail est l'estimation dans les modèles bilinéaires périodique par la méthode de moindre carrées, à partir certain conditions on obtient des estimateurs consistants et asymptotiquement normales. Cette méthode donne des résultats très satisfaisants qui sont montrés dans la simulation.

Quelques mots clés : Les modèles Non linéaires à coefficients dépendant du temps, séries temporelles bilinéaires, séries temporelles bilinéaires périodiques, La représentation markovienne, Produit de Kronecker, Stationnarité, stationnarité périodique, L'inversibilité, Moments d'ordre supérieur, Estimation de Moindre Carrées, Consistance forte, Normalité Asymptotiques.

« Statistical Inference in Periodics bilinears models »

Abstract

The aim or goal of this work is to study some problems of nonlinear time series. The particular class of models nonlinear that was extensively discussed in the literature is the class of periodic bilinear models. The sufficient conditions for strict periodic stationary et second-order periodic stationary, the invertibility and the existence of higher-order moments are derived.

The main goal of this work is the estimation in periodic bilinear model by Least Squares; from some conditions one gets consistency estimators and asymptotic normality. This method gives of results very satisfactory that are shown in the simulation.

Key words : Time varying Nonlinear Models, Bilinear Time series, Periodic Bilinear Time series, Markovian representation, Kronecker Product, Stationarity, Periodic Stationary, Invertibility, Higher-order moments, LS estimator, Consistency, Asymptotic Normality.

Table des matières

ABREVIATIONS	2
1 INTRODUCTION GENERALE	4
2 MODELES BILINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS	9
2.1 Introduction	9
2.2 Théorème d'existence de la solution strictement stationnaire	10
2.3 Théorème d'existence de la solution stationnaire au second ordre	12
2.3.1 Modèles BL(p, q, p, 2)	12
2.3.2 Modèles BL(p, q, p, l) avec $l > 2$	16
2.4 Inversibilité	17
3 MODELES BILINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES	19
3.1 Modèles bilinéaires périodiques	19
3.2 Théorème d'existence de solutions stationnaires au sens périodique	22
3.2.1 Stationnarité stricte au sens périodique	22
3.2.2 Stationnarité au second ordre	26
3.3 Inversibilité	34
3.3.1 Inversibilité pour les modèles généraux	35
3.3.2 Inversibilité au sens fort	37
4 MOMENTS D'ORDRE SUPERIEUR, TCL & LIL	39
4.1 Expression des moments d'ordre supérieur pour les processus PBL(0,0,m,1)	39
4.2 Modèles périodiques bilinéaires avec $m = 2$	39
4.3 Modèles périodiques bilinéaires avec $m > 2$	40

4.4	Structures de covariances	42
4.5	TCL et LIL	43
5	ESTIMATION DES MOINDRES CARRÉS	46
5.1	Introduction	46
5.2	Rappel sur la méthode standard des moindres carrés	47
5.3	Consistance forte	49
5.4	Normalité asymptotique	53
6	SIMULATION	57
6.1	Introduction	57
6.2	Description des modèles	57
6.2.1	Modèle PBL(0, 0, 1, 1)	58
6.2.2	Modèle PBL(0, 0, 2, 1)	65
6.3	Commentaires	73
6.4	Conclusion	73
7	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	74
7.1	Conclusions	74
7.2	Perspectives	74
8	ANNEXE	76
8.1	Normes matricielles et rayon spectral	77
8.2	Opérateur Vect	79
8.3	Dérivation matricielle	80
	BIBLIOGRAPHE	81

ABREVIATIONS

<i>ARMA</i>	Autorégressif moyenne mobile.
<i>RCA</i>	Autorégressifs à coefficients aléatoires.
<i>BL</i>	Bilinéaires à coefficients constants.
<i>PBL</i>	Bilinéaires à coefficients périodiques.
<i>i.e.</i> ,	C'est-à-dire (<i>c - à - d</i>)
<i>i.i.d</i>	Indépendants et identiquement distribués.
\mathbb{R}^n	Espace euclidien usuel.
$\mathbb{L}_2 := L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espace des variables aléatoires de carrés <i>P</i> -intégrables.
<i>LSE</i>	Estimateur des moindres carrés
<i>Max, Min</i>	Maximum, minimum.
<i>m.q</i>	Moyenne quadratique.
<i>p.s.</i>	Presque sûrement.
\otimes	Produit tensoriel.
<i>SPS</i>	Stationnarité stricte périodique.
<i>PC</i>	Périodiquement corrélés
<i>TCL</i>	Théorème central limite.
<i>TCM</i>	Théorème de convergente monotone.
<i>LIL</i>	Loi du logarithme itéré.
<i>lim</i>	Limite
<i>v.a</i>	Variable aléatoire

Chapitre 1

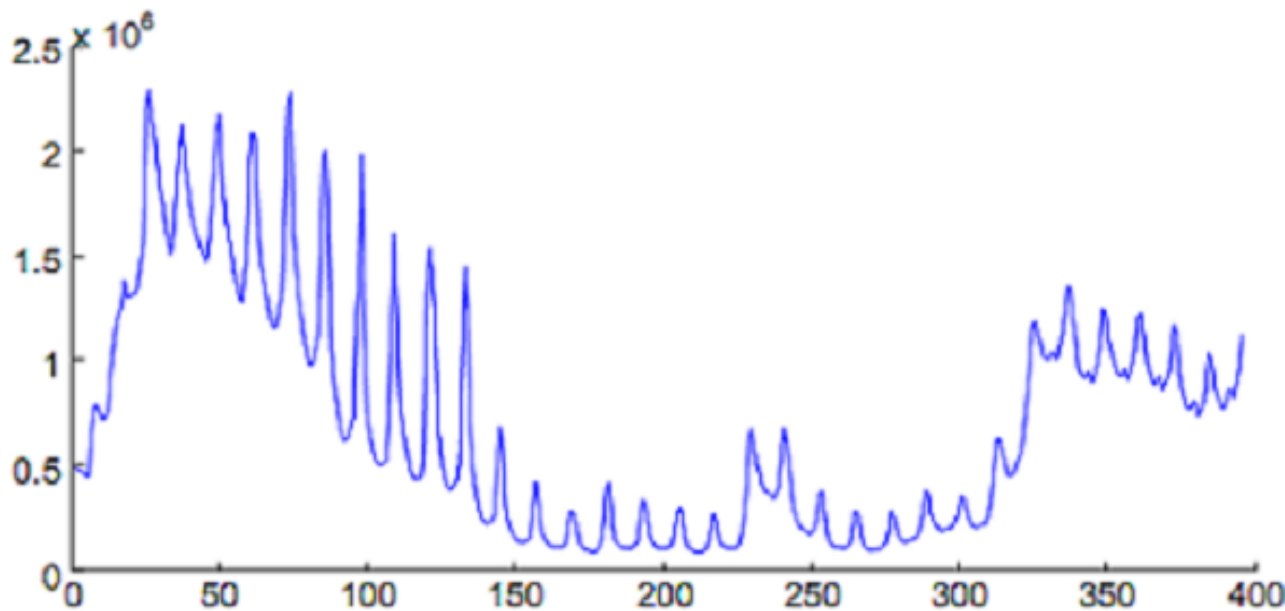
INTRODUCTION GENERALE

Etude et synthèse bibliographique

Les séries chronologiques (ou temporelles) sont présentées un peu partout l'objectif du statisticien est la modélisation. Il s'agit de choisir le modèle qui s'ajuste au mieux (ou adéquatement) à la série que l'on veut modéliser. Elles s'applique à plusieurs domaines caractérisés par la nature des phénomènes considérés et par les objectifs fixés dans les études. Ces différences nécessitent des théories différentes : les séries temporelles univariées et multivariées, linéaires ou non linéaires, ...etc.

Les techniques standards d'analyse de séries chronologiques ont longtemps reposé sur les propriétés fondamentales de linéarité et de stationnarité. En égard à leurs coefficients constants et à leur dynamique linéaire, les modèles ARMA ont ainsi fait l'objet d'un intérêt croissant depuis le début des années 1980. Cependant, de nombreuses recherches ont démontré que les hypothèses de linéarité et de stationnarité n'étaient qu'une hypothèse utopique apportant un confort appréciable dans l'étude probabiliste et statistique du processus (Guégan 1994)([30]). Le recours à des modèles plus souples est alors, vivement, apparu comme une nécessité dans les séries temporelles représentent des caractéristiques que les modèles standards sont incapable de prendre en compte. Par exemple, la structure périodique de nombreuses séries chronologiques et l'insuffisance pragmatique des modèles saisonniers ARMA à coefficients constants ont souligné, dans un premier temps, la nécessité d'introduire des coefficients dépendant du temps dans l'écriture du modèle (Basawa et Lund 2001) ([5]). Par ailleurs, de nombreuses séries chronologiques possèdent des caractéristiques non-

linéaires (Subba Rao et Gabr 1980 ([54]), Gabr et Subba Rao 1981)([55]), ce qui exclut toute éventualité de modélisation *ARMA*. Pour palier à cette absence de linéarité, la classe des modèles bilinéaires a reçu une attention importante dans la littérature probabiliste et statistique depuis les travaux précurseurs de Granger et Andersen (1978) ([4]) ; Liu et Brockwell 1988 ([39]) ; Chan 1989 ([21]) ; Liu 1989 ([36]) et Terdik 1999 ([56]). Comme illustration, considérons la série microéconomique mensuelle étudiée par Subba Rao (1984) ([52]) du nombre de demandeurs d'emploi en Allemagne de l'Ouest depuis janvier 1948 à décembre 1980, ceci correspond à 396 observations (Fig1), cette série exhibe clairement un caractère non linéaire.



(Fig 1)

Fig1. Serie du nombre de demandeurs d'emploi en Allemagne de l'Ouest.

Notons que les séries temporelles caractérisées par une structure périodique occupe une place centrale. Par exemple, considérons le cas simple d'une série chronologique caractérisée par le prélevement du nombre de passagers de la *SNTV* de Constantine par jour de la semaine. Pour une semaine donnée, nous pouvons alors distinguer (2) dynamiques différentes pour la modélisation du processus : une première qui concerne les jours de la semaine (di-

manche, lundi, mardi, mercredi et jeudi) où le nombre de passagers est, relativement, élevé. Par contre les jours de week-end (vendredi et samedi), le nombre chute de façon significative. Nous avons donc mis en évidence (2) régimes distincts dans lesquels le processus se comporte de manière totalement différente : un premier régime pour les jours ouvrables de la semaine et un second pour les jours de week-end. Nous définissons, alors, (2) ensembles d'indices correspondant aux deux régimes; $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, \dots\}$ contient les indices correspondant aux jours du travail : dimanche, lundi, mardi, mercredi et jeudi caractérisant le premier régime, et $E^c = \{6, 7, 13, 14, \dots\}$ contient les indices des jours du week-end (deuxième régime). Sur l'ensemble des instants $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$. Le processus X_t s'écrit sous la forme suivante : $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \dots)$. Alors, le régime correspondant à l'indice t est $s_t = I_E(t) + 2I_{E^c}(t)$ où $I_A(t)$ désigne la fonction indicatrice d'un ensemble A .

Considérons, maintenant, le modèle autorégressif d'ordre 1 à coefficients dépendant du temps suivant :

$$X_t = a_t(\underline{\theta})X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \geq 1,$$

où (ε_t) est une suite de variables aléatoires (i.i.d.). Le vecteur des paramètres d'intérêt s'écrit $\underline{\theta} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Le coefficient $a_t(\underline{\theta})$ varie en fonction du temps et a la forme suivante : $a_t(\underline{\theta}) = a_1 I_E(t) + a_2 I_{E^c}(t)$ ou encore on l'écrit, sous une forme plus explicite :

$$\forall t \geq 1, \quad a_t(\underline{\theta}) = \begin{cases} a_1 & \text{si } t \in E \\ a_2 & \text{si } t \in E^c \end{cases}.$$

Cette écriture autorise une variation de la dynamique du système en fonction des instants considérés. Notre modèle linéaire initial à coefficient $a_t(\underline{\theta})$ dépendant du temps peut alors se décomposer en (2) modèles autorégressifs d'ordre 1 à coefficients constants a_1, a_2 :

$$\forall t \geq 1, \quad X_t = \begin{cases} a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } t \in E \\ a_2 X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } t \in E^c \end{cases}.$$

Ces sous modèles permettent de représenter (caractériser) le processus dans chacun des 2 régimes.

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle classe de modèles non linéaires et non stationnaires qui sont, simplement, adaptés aux séries présentant des caractéristiques périodiques et non gaussiennes. Cette classe est celle des modèles bilinéaires $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définis sur

un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et à coefficients périodiques. Elle est définie par :

$$X_t = \phi_0(t) + \sum_{i=1}^p \phi_i(t)X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j(t)\varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(t)X_{t-i}\varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t .$$

où les termes d'erreur $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent une suite de variables aléatoires, centrées, non-corrélées et définies sur le même espace de probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et où $(\phi_i(n))_{1 \leq i \leq p}$, $(\theta_j(n))_{1 \leq j \leq q}$ et $(b_{ij}(n))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}}$ sont des suites des fonctions périodiques de période $s \in \mathbb{N}^*$ connue.

Formulation du problème

Les méthodes d'estimation pour des modèles temporelles non stationnaire restent, relativement, moins explorées comparées à celles traitant les modèles stationnaires. La raison principale se manifeste par le fait que la théorie asymptotique des processus stationnaires et ergodiques ne cadre pas, convenablement, avec les modèles non stationnaires. Cet handicap en constitue une difficulté majeure. Cependant, parmi les objectifs tracés, nous allons étudier le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés pour une large classe de modèles bilinéaires à coefficients variant, périodiquement, dans le temps. Nous allons, aussi, énoncer la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs des moindres carrés sous des conditions classiques dans le domaine. Vu la difficulté rencontrée dans le modèle général, nous sommes restreints à des modèles plus simples, présentant sont de même un intérêt.

Organisation du mémoire

Ce travail traite des modèles bilinéaires périodiques notés par $PBL(p, q, m, l)$. Nous commençons par une introduction générale qui met en relief la formulation du problème, les objectifs et l'organisation du mémoire et se termine par des annexes contenant certaines définitions et théorèmes utilisés dans ce mémoire. Entre ces 2 bornes, l'étude comporte 5 chapitres principaux :

Le chapitre 2 a pour but d'étudier les propriétés probabilistes des processus générés par des modèles bilinéaires à coefficients constants notés par $BL(p, q, m, l)$ à savoir, la stationnarité stricte et au second ordre en se basant sur la représentation vectorielle. Le 3^{me} chapitre présente les modèles bilinéaires périodiques notées par $PBL(p, q, m, l)$ et

énonce les premières études sur la structure probabiliste de ces modèles. Ensuite, on construit une représentation markovienne des modèles $PBL(p, q, m, l)$. Cette représentation permet, ensuite, de donner des conditions suffisantes d'existence et d'unicité des solutions, causales, périodiquement stationnaires au sens strict et au second ordre, périodiquement ergodiques et inversibles. Le chapitre 4 caractérise la structure de covariances et montre l'existence des moments d'ordre supérieur et contient un TCL et une LIL.

Le 5^{ème} chapitre donne quelques rappels sur la méthode standard des moindres carrés que nous avons choisie pour l'estimation des paramètres des modèles bilinéaires périodiques. Nous allons ainsi étudier, également, le comportement asymptotique de l'estimateur introduit. Dans le 6^{ème} chapitre, nous allons présenter une étude de simulation afin de confronter les résultats obtenus à ceux attendus par la théorie.

Chapitre 2

MODELES BILINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

2.1 Introduction

Afin de mieux situer notre étude sur les modèles bilinéaires périodiques, nous consacrons ce chapitre aux modèles bilinéaires standards. Nous rappelons certains résultats de l'étude probabiliste de ces derniers, ainsi ils feront l'objet d'une plus profonde analyse dans les chapitres 3, 4 en tenant compte de la structure périodique de nombreuses séries chronologiques.

Les modèles bilinéaires notés $BL(p, q, m, l)$ ont été introduits par Granger et Andersen en 1978 ([4]) de façon à généraliser les modèles $ARMA$ et qui sont définis par :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} \quad (2.1)$$

où les entiers p, q, m, l désignent les ordres du modèle. Les termes d'erreur $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ constituent une suite de variables aléatoires, centrées, non-corrélées et définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et les suites $(\phi_i)_{1 \leq i \leq p}$, $(\theta_j)_{1 \leq j \leq q}$ et $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}}$ sont des suites de constantes réelles. On peut distinguer (3) sous classes de modèles bilinéaires :

- Les modèles bilinéaires diagonaux pour lesquels : $b_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.
- Les modèles bilinéaires superdiagonaux pour lesquels : $b_{ij} = 0$ pour tout $i \leq j$.
- Les modèles bilinéaires sousdiagonaux pour lesquels : $b_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.

Les principaux travaux sont ceux de Subba Rao (1981) ([52]), Pham (1981) ([46]), Guégan (1981) ([25]), Subba Rao et Grabr (1984) ([55]), Pham (1985) ([47]), (1986) ([48]), Guégan (1986) ([26]), 1987 ([28]), 1988 ([29]), Liu et Brockwell (1988) ([39]), Liu (1989) ([36]), 1990 ([37]). Ces modèles ont déjà été utilisés dans de nombreuses applications comme la chimie, la météologie, la physique et l'astronomie; Nous citons, par exemple, Lessi (1991) ([35]). Concernant la propriété probabiliste d'existence et de stationnarité strite et au second ordre du modèle bilinéaire (2.1), Bhaskara Rao, Subba Rao et Walker (1983) et de Akamanan, Bhaskara Rao et Subramanyian (1986) ont étudié la classe de modèles superdiagonaux. Une étude plus générale que nous présentons ci-après est due à Liu et Brockwell (1988) ([39]). Elle se base sur une représentation d'état du modèle (2.1).

2.2 Théorème d'existence de la solution strictement stationnaire

À cause de la complexité structurale du modèle, les modèles bilinéaires ont été, amplement, développés en utilisant la représentation d'état. En effet, soient :

$\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-r+1})$, $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})$, $H = (1, 0, \dots, 0)_{r \times 1}$ avec $r = \max(p, P)$, \mathbf{A} est la matrice d'ordre $(r \times r)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_p & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

\mathbf{B}_j sont les matrice d'ordre $(r \times r)$, $j = 1, \dots, l$,

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} b_{ij} & b_{ij} & \dots & b_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

et \mathbf{C} est la matrice d'ordre $(r \times (q+1))$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_q \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Alors, le modèle (2.2) se réécrit :

$$\begin{cases} \underline{X}_t = \mathbf{A}\underline{X}_{t-1} + \mathbf{C}\underline{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^l \mathbf{B}_j \underline{X}_{t-1} \varepsilon_{t-j} \\ X_t = H' \underline{X}_t \end{cases}. \quad (2.5)$$

Ou bien, encore :

$$\begin{cases} \underline{X}_t = \mathbf{C}\underline{\varepsilon}_t + \mathbf{A}_t \underline{X}_{t-1} \\ \mathbf{A}_t = \mathbf{A} + \sum_{j=1}^l \mathbf{B}_j \varepsilon_{t-j} \end{cases}. \quad (2.6)$$

Il est bien clair que le processus $(\mathbf{A}_t, \underline{\varepsilon}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique. De plus, si on a :

$$E \left\{ \ln^+ \left\{ \sum_{i=1}^p \left| \phi_i + \sum_{j=1}^l b_{ij} \varepsilon_{t-j} \right| \right\} \right\} < \infty,$$

alors, l'exposant de Lyapunov (noté par $\gamma(A)$) associé à la suite des matrices aléatoires $A := (A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, défini par :

$$\gamma(A) := \inf_{n \geq 1} E \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \right\| \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \right\| \right\} p.s. \quad \text{existe.} \quad (2.7)$$

D'où le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Supposons que $\gamma(A) < 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série :*

$$\underline{X}_t = \mathbf{C}\underline{\varepsilon}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^k A_{t-i} \right\} \mathbf{C}\underline{\varepsilon}_{t-k} \quad (2.8)$$

converge p.s. et le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini comme la première composante de \underline{X}_t , constitue l'unique solution causale¹, strictement stationnaire² et ergodique de (2.1).

¹ On dit que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est causal, si pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a :

$$X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots),$$

où : $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont des innovations.

² Une série $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dite strictement stationnaire si la distribution conjointe de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ est

2.3 Théorème d'existence de la solution stationnaire au second ordre

2.3.1 Modèles BL(p, q, p, 2)

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que l'équation (2.1) admette une solution stationnaire avec $l = 2$, i.e., quand X_t s'écrit

$$\begin{cases} \underline{X}_t = \mathbf{A}\underline{X}_{t-1} + \mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\underline{X}_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\underline{X}_{t-1}\varepsilon_{t-2} \\ X_t = H'\underline{X}_t \end{cases} \quad (2.9)$$

Théorème 2.2 (Lui et Brockwell, 1988) Soit le processus \underline{X}_t défini par (2.5), où les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B}_j et \mathbf{C} ont été définies précédemment (2.2) – (2.4). On suppose en plus que $k_4 := E(\varepsilon_t^4) < +\infty$ et $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0$. Posons :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A^{\otimes 2} + \sigma^2 B_1^{\otimes 2} & A \otimes B_1 + B_2 \otimes A & B_2^{\otimes 2} \\ \sigma^2[A \otimes B_1 + B_1 \otimes A] & \sigma^2[B_1 \otimes B_2 + B_2 \otimes B_1] & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \sigma^2 A^{\otimes 2} + k_4 B_1^{\otimes 2} & \sigma^2[A \otimes B_2 + B_2 \otimes A] & \sigma^2 B_2^{\otimes 2} \end{pmatrix}$$

Alors si :

$$\lambda = \rho(\Gamma) < 1 \quad (2.10)$$

(i) L'équation (2.9) admet une solution causale, stationnaire au second ordre³ et ergodique.

(ii) La solution est aussi strictement stationnaire et unique, elle est donnée par

$$\underline{X}_t = \mathbf{C}\varepsilon_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^k (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-j} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-j-1}) \right\} \mathbf{C}\varepsilon_{t-k}. \quad (2.11)$$

la première composante X_t de (2.11) constitue l'unique solution stationnaire au second ordre, et ergodique de (2.1).

identique à celle de $(X_{t_1+h}, X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$, quel que soit t , où k est un entier positif arbitraire et (t_1, \dots, t_k) sont k entiers positifs arbitraires, c'est-à-dire :

$$P(X_{t_1+h}, X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h}) = P(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}),$$

où $h \in \mathbb{Z}$.

³La condition de la stationnarité stricte est difficile à vérifier et on utilise en générale, une version plus faible de stationnarité. On dit qu'une série temporelle $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est faiblement stationnaire si ses espérances sont constantes et indépendantes du temps t :

$$E(X_t) := \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

et si les covariances sont stables par translation du temps, c'est-à-dire, pour tout entier h :

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) := \gamma(h) \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

Preuve. Pour établir ce résultat, on introduit les (2) processus vectoriels (de dimension p) suivants :

$$\underline{S}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \mathbf{C}_{\varepsilon_t} & \text{si } n = 0 \\ \mathbf{C}_{\varepsilon_t} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-2}) \underline{S}_{n-1}(t-1) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

et :

$$\underline{\Delta}_n(t) = \underline{S}_n(t) - \underline{S}_{n-1}(t)$$

A partir de (2.12) on obtient :

$$\underline{\Delta}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \mathbf{C}_{\varepsilon_t} & \text{si } n = 0 \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-2}) \underline{\Delta}_{n-1}(t-1) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

On peut alors construire, à partir de (2.12) – (2.13), les fonctions mesurables $g_n : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $G_n : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^p$ telles que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\underline{\Delta}_n(t) = g_n(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

et :

$$\underline{S}_n(t) = G_n(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Alors, pour n fixé et $n > 1$, à partir de (2.14) – (2.15), on en déduit que $\underline{\Delta}_n(t)$ est strictement stationnaire pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\underline{S}_n(t)$ est aussi stationnaire. Calculons maintenant les matrices des moments :

$$\underline{V}_n = E \{ \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}, \underline{D}_n = E \{ \varepsilon_{t-1} \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}, \underline{F}_n = E \{ \varepsilon_{t-1}^2 \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}.$$

Pour $n \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned} \underline{V}_n &= E[(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-2}) \underline{\Delta}_{n-1}(t-1) \underline{\Delta}'_{n-1}(t-1) (\mathbf{A}' + \mathbf{B}'_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}'_2\varepsilon_{t-2})] \\ &= \mathbf{A} \underline{V}_{n-1} \mathbf{A}' + (\mathbf{A} \underline{D}_{n-1} \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}_2 \underline{D}_{n-1} \mathbf{A}' + \sigma^2 \mathbf{B}_1 \underline{D}_{n-1} \mathbf{B}'_1) + \mathbf{B}_2 \underline{F}_{n-1} \mathbf{B}'_2, \\ \underline{D}_n &= E[\varepsilon_{t-1} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-2}) \underline{\Delta}_{n-1}(t-1) \underline{\Delta}'_{n-1}(t-1) (\mathbf{A}' + \mathbf{B}'_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}'_2\varepsilon_{t-2})] \\ &= \sigma^2 [\mathbf{A} \underline{V}_{n-1} \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}_1 \underline{V}_{n-1} \mathbf{A}'] + \sigma^2 [\mathbf{B}_2 \underline{D}_{n-1} \mathbf{B}'_1 + \mathbf{B}_1 \underline{D}_{n-1} \mathbf{B}'_2], \\ \underline{D}_n &= E[\varepsilon_{t-1}^2 (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-2}) \underline{\Delta}_{n-1}(t-1) \underline{\Delta}'_{n-1}(t-1) (\mathbf{A}' + \mathbf{B}'_1\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}'_2\varepsilon_{t-2})] \\ &= \sigma^2 (\mathbf{A} \underline{V}_{n-1} \mathbf{A}' + \mathbf{B}_1 \underline{V}_{n-1} \mathbf{B}'_1) + \sigma^2 [\mathbf{A} \underline{D}_{n-1} \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}_2 \underline{D}_{n-1} \mathbf{A}'] + \sigma^2 \mathbf{B}_2 \underline{F}_{n-1} \mathbf{B}'_2. \end{aligned}$$

Ces expressions auront une forme plus allégée si on utilise la notation, $\tilde{M} = \text{Vec}(M)$ où M est une matrice. D'après les propriétés du produit de Kronecker (tensoriel) et l'espérance, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n &= [A^{\otimes 2} + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v)] \tilde{V}_{n-1} + [A \otimes B_2 + B_2 \otimes A] \tilde{D}_{n-1} + B_2^{\otimes 2} \tilde{F}_{n-1}, \\ \tilde{D}_n &= \sigma^2 [A \otimes B_1 + B_1 \otimes A] \tilde{V}_{n-1} + \sigma^2 [B_1 \otimes B_2 + B_2 \otimes B_1] \tilde{D}_{n-1}, \\ \tilde{F}_n &= [\sigma^2 A^{\otimes 2} + k_4 B_1^{\otimes 2}] \tilde{V}_{n-1} + [A \otimes B_2 + B_2 \otimes A] \tilde{D}_{n-1} + B_2^{\otimes 2} \tilde{F}_{n-1},\end{aligned}$$

où de manière équivalente :

$$u_n = \Gamma u_{n-1} = \Gamma^2 u_{n-2} = \dots = \Gamma^{n-3} u_3,$$

où :

$$u_n = \left[\tilde{V}_n, \tilde{D}_n, \tilde{F}_n \right]', \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

(i) Nous allons montrer que la suite $(\underline{S}_n(t))_n$ définie par le système (2.12) converge en moyenne quadratique pour chaque t et que les limites $\underline{X}_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{S}_n(t)$, constituent une solution strictement stationnaire de (2.5) avec les propriétés requises. A partir de (2.10), on a l'inégalité suivante : $|u_n| \leq k\lambda^{\frac{n}{2}}$, où k est une constante positive. On en déduit :

$$E \left\| \underline{S}_n(t) - \underline{S}_{n-1}(t) \right\|^2 = E \left\| \underline{\Delta}_n(t) \right\|^2 = \text{trace}(\underline{V}_n) \leq |u_n| \leq k\lambda^{\frac{n}{2}}.$$

Cela implique que pour chaque t fixé, $(\underline{S}_n(t))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{L}_2 , alors, elle converge dans \mathbb{L}_2 et (*p.s.*) lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il existe, donc, une fonction mesurable $f_t : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que,

$$\underline{X}_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{S}_n(t) = f_t(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots). \quad (2.16)$$

Pour motrer que X_t est strictement stationnaire, on considère une fonction h bornée continue sur \mathbb{R}^{pr} telle que :

$$\begin{aligned}E \left[h(\underline{X}_{t+1}, \dots, \underline{X}_{t+r}) \right] &= \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[h(\underline{S}_n(t+1), \dots, \underline{S}_n(t+r)) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[h(\underline{S}_n(t+1+p), \dots, \underline{S}_n(t+r+p)) \right] \\ &= E \left[h(\underline{X}_{t+1+p}, \dots, \underline{X}_{t+r+p}) \right],\end{aligned}$$

à partir du moment où $\underline{S}_n(t)$ est strictement stationnaire pour chaque n fixé. Il est alors facile de voir, en prenant les limites dans le système (2.12), que \underline{X}_t satisfait l'équation aux différences (2.9). Par conséquent, la première composante $X_t, t \in \mathbb{Z}$, satisfait (2.1) avec $l = 2$.

(ii) Pour établir l'ergodicité de X_t , nous devons montrer qu'il existe une fonction, $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $X_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$, p.s, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Avec f_t définie comme en (3.15), on observe que :

$$\begin{aligned} E \|\underline{S}_n(t) - f_0(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)\|^2 &= E \|G_n(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) - f_0(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)\|^2 \\ &= E \|G_n(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots) - f_0(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots)\|^2 \\ &= E \|\underline{S}_n(0) - f_0(\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots)\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi : $f_t(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) = f_0(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$, p.s. pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Maintenant, si on définit $f = f_0^{(1)}$ et $f_0 = (f_0^{(1)}, \dots, f_0^{(p)})$, on peut écrire $\underline{X}_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$, p.s, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'ergodicité.

(iii) La stationnarité de second ordre de X_t provient de la stationnarité stricte de \underline{X}_t et du fait que, pour chaque t , \underline{X}_t est la limite dans \mathbb{L}_2 de $\underline{S}_n(t)$.

(iv) Soit \underline{Y}_t une solution quelconque de (2.9) telle que :

$$\underline{Y}_t = g(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) \quad (2.17)$$

où g est une fonction mesurable de \mathbb{R}^∞ dans \mathbb{R}^p et soit :

$$\underline{U}_t = \underline{X}_t - \underline{Y}_t$$

où \underline{X}_t est la solution de (2.9) trouvée dans (i). Alors \underline{U}_t est strictement stationnaire et satisfait les équations suivantes :

$$\underline{U}_t = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2 \varepsilon_{t-2}) \underline{U}_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Posons : $V = E(\underline{U}_t \underline{U}_t')$, $D = E(\varepsilon_{t-1} \underline{U}_t \underline{U}_t')$, $F = E(\varepsilon_{t-1}^2 \underline{U}_t \underline{U}_t')$, et $u = (\tilde{V}, \tilde{D}, \tilde{F})$, on obtient alors, en utilisant les même arguments que précédemment que :

$$u = \Gamma u = \dots = \Gamma^t u, \quad t \geq 0.$$

Comme $\lambda = \rho(\Gamma) < 1$, on en déduit que $u = 0$ (avec probabilité 1). Donc, \underline{X}_t est la solution unique de (2.9) de la forme (2.11).

(v) Pour montrer maintenant que \underline{X}_t est une unique solution stationnaire de (2.9), on définit :

$$\underline{S}_n^*(t) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \underline{\varepsilon}_t^* = (\varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p+1})' & \text{si } n = 0 \\ \mathbf{C} \underline{\varepsilon}_t + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2 \varepsilon_{t-2}) \underline{S}_{n-1}^*(t-1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

On procède de la même façon qu'en (i) pour montrer que pour chaque t , $(\underline{S}_n^*(t))_{n \geq 0}$ converge à la fois p.s et dans \mathbb{L}_2 vers un vecteur \underline{Y}_t aléatoire de la forme (2.14) satisfaisant (2.9). A partir de l'unicité établie pour le processus \underline{X}_t , on en déduit que presque sûrement $\underline{Y}_t = \underline{X}_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Il est ensuite facile de voir, par simple itération à partir de (2.9) que :

$$\underline{S}_n(t) = \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_t} + \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=1}^k (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \varepsilon_{t-j} + \mathbf{B}_2 \varepsilon_{t-j-1}) \right\} \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_{t-k}}.$$

Par conséquent, on a :

$$\underline{X}_t = \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^k (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \varepsilon_{t-j} + \mathbf{B}_2 \varepsilon_{t-j-1}) \right\} \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_{t-k}},$$

où la somme peut être interprétée à la fois comme une limite p.s ou dans \mathbb{L}_2 . ■

2.3.2 Modèles BL(p, q, p, l) avec $l > 2$

Pour montrer le théorème (2.3) dans le cas général, avec l quelconque, on utilise les mêmes arguments que précédemment, en remplaçant les suites $\underline{S}_n(t)$ définies en (2.12) par :

$$\underline{S}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_t} & \text{si } n = 0, \\ \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_t} + \mathbf{A}_t \underline{S}_{n-1}(t-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

et le processus devient :

$$\underline{\Delta}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \mathbf{C}_{\underline{\varepsilon}_t} & \text{si } n = 0. \\ \mathbf{A}_t \underline{\Delta}_{n-1}(t-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, les propriétés de la convergence de $(\underline{S}_n(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ peuvent être étudiées en utilisant les mêmes arguments que dans la sous-section (2.2.1). Donc, on introduit les matrices des moments suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{V}_n &= E \{ \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}, \\ \underline{D}_n^{(j)} &= E \{ \varepsilon_{t-j} \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}, \\ \underline{F}_n^{(jk)} &= E \{ \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-k} \underline{\Delta}_n(t) \underline{\Delta}'_n(t) \}. \end{aligned}$$

et les moments d'ordre supérieurs

2.4 Inversibilité

Ce concept est fondamental, d'une part pour estimer les paramètres d'un modèle et d'autre part pour faire des prévisions. Dans la littérature plusieurs définitions en ont été données. En ce qui concerne les modèles bilinéaires une première approche fût introduite par Granger et Andersen (1978) : Un processus stochastique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit inversible s'il est possible d'estimer la suite ε_t à partir des valeurs passées de X_t avec une exacte connaissance du modèle générateur. Cette approche, d'ordre général, peut être précisée beaucoup plus de la manière suivante. On doit, aussi, noter qu'elle peut s'appliquer, autant, aux modèles linéaires qu'aux modèles non linéaires.

Posons : $X_t = f(X_{t-i}, \varepsilon_{t-j}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l) + \varepsilon_t$ où ε_t est une suite des variables aléatoires.

Définition 2.3 Soit $\hat{\varepsilon}_t$ un estimateur de ε_t généré par :

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - f(X_{t-i}, \hat{\varepsilon}_{t-j}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l)$$

où $\hat{\varepsilon}_{t-j} = 0$ pour $j > t$. Alors, le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit inversible si $\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[(\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t)^2 \right] = 0$ quand le modèle et les paramètres sont complètement connus.

Une définition précise de l'inversibilité est, alors, la suivante :

Définition 2.4 Un processus stochastique est inversible si et seulement si, il existe une suite $\hat{\varepsilon}_t$ fonction de X_1, X_2, \dots, X_t uniquement telle que $\hat{\varepsilon}_t - \varepsilon_t \rightarrow 0$ en probabilité quand $n \rightarrow +\infty$.

cette définition est, en particulier, utilisée par T. Pham Dinh et L. Tat Tran (1981), B. G. Quinn (1982), D. Guegan et T. Pham Dinhh (1987 a,b).

Considérons le modèle $BL(p, q, m, l)$:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (2.18)$$

Prenons : $r = \max(p, q, m, l)$; $\phi_i = 0$ pour $p < i \leq r$; $\theta_i = 0$ pour $q < i \leq r$; $b_{ij} = 0$ pour $m < i \leq r, l < j \leq r$.

Alors, nous avons :

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^r \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^r \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

et donc :

$$\varepsilon_t = X_t - \phi_0 - \sum_{i=1}^r \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^r \theta_j \varepsilon_{t-j} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j}.$$

Posons :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}_t = D_t \underline{\varepsilon}_{t-1} + \underline{\zeta}_t \\ \varepsilon_t = \underline{H}' \underline{\varepsilon}_t \end{cases}, \quad (2.19)$$

où $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-r+1})'_{r \times 1}$, $\underline{H} = (1, 0, \dots, 0)'_{r \times 1}$ et $\underline{\zeta}_t = [X_t - \phi_0 - \sum_{i=1}^r \phi_i X_{t-i}] \underline{H}$, avec D_t est une matrice $r \times r$ aléatoire définie par :

$$D_t = \begin{bmatrix} -\theta_1 - \sum_{i=1}^r b_{i1} X_{t-i} & \dots & -\theta_r - \sum_{i=1}^r b_{ir} X_{t-i} \\ \mathbf{1}_{(r-1) \times (r-1)} & & \mathbf{0}_{(r-1) \times 1} \end{bmatrix}_{r \times r}. \quad (2.20)$$

Par récurrence, nous trouvons :

$$\underline{\varepsilon}_t = \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\} \underline{\varepsilon}_{t-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} D_{t-i} \right\} \underline{\zeta}_{t-k} + \underline{\zeta}_t. \quad (2.21)$$

Il est bien connu (Liu (1990)) que, si $E \{ \ln^+ \|D_t\| \} < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\gamma(D) := \inf_{n \geq 1} E \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\| \right\}$$

existe dans $]-\infty, +\infty[$, et d'après le critère de Cauchy ; si $\gamma(D) < 0$, la solution de l'équation (2.19) est donnée par :

$$\underline{\varepsilon}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\} \underline{\zeta}_{t-n} + \underline{\zeta}_t. \quad (2.22)$$

Maintenant, nous avons le résultat suivant qui donne une condition suffisante pour l'inversibilité du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par (2.18).

Théorème 2.5 *On suppose que le processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire au second d'ordre. Si $\gamma(D) < 0$ alors, l'équation (2.19) admet une solution unique donnée par (2.22), où cette série converge p.s.*

Exemple 2.6 *Pour C. W. J. Granger et A. P. Andersen (1978 a), le modèle bilinéaire diagonal $BL(0, 0, 1, 1)$ défini par $X_t = \varepsilon_t + bX_{t-1}\varepsilon_{t-1}$ est inversible si $bE \{X_t^2\} < 1$.*

Chapitre 3

MODELES BILINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES

3.1 Modèles bilinéaires périodiques

Grâce à un large potentiel d'application couvrant, notamment, l'économie et la finance, les modèles bilinéaires à coefficients dépendant du temps sont, récemment, apparus dans la littérature statistique des séries temporelles. Dans cette section, nous faisons un survol des premières études sur la structure probabiliste des modèles bilinéaires périodiques d'ordre (p, q, m, l) donnés dans les travaux de BIBI et autres 2002-2012 ([6] – ([15])).

Définition 3.1 *On dit qu'un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ du second ordre, défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , est bilinéaire périodique PBL (p, q, m, l) de période $s \in \mathbb{N}^*$, s'il est solution de l'équation :*

$$X_n = \sum_{i=1}^p \phi_i(n) X_{n-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j(n) \varepsilon_{n-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(n) X_{n-i} \varepsilon_{n-j} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

où les entiers p, q, m, l désignent les ordres du modèle. Les termes d'erreur $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent une suite de variables aléatoires, centrées, non-corrélées et définies sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) avec $E \{ \log^+ (\varepsilon_n^2) \} < +\infty$ où $\log^+ (x) = \max \{ \log x, 0 \}$, $x > 0$. Les suites $(\phi_i(n))_{1 \leq i \leq p}$, $(\theta_j(n))_{1 \leq j \leq q}$ et $(b_{ij}(n))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}}$ sont des fonctions périodiques de période $s \in \mathbb{N}^*$.

Notons que pour $n = sk + v$, on a :

$$X_{st+\nu} = \sum_{i=1}^p \phi_i(\nu) X_{st+\nu-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j(\nu) \varepsilon_{st+\nu-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(\nu) X_{st+\nu-i} \varepsilon_{st+\nu-j} + \varepsilon_{st+\nu} . \quad (3.2)$$

Cette notation fait référence à la variable X_t durant la v -ème saison de la t -ème année de période s . D'autre part, si nous notons : $X_{st+\nu} = X_t(\nu)$ et $\varepsilon_{st+\nu} = \varepsilon_t(\nu)$, alors le modèle (3.2) s'écrit sous la forme :

$$X_t(\nu) = \phi_0(\nu) + \sum_{i=1}^p \phi_i(\nu) X_t(\nu-i) + \sum_{j=0}^q \theta_j(\nu) \varepsilon_t(\nu-j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(\nu) X_t(\nu-i) \varepsilon_t(\nu-j) , \quad (3.3)$$

avec :

$$X_t(\nu) = X_{t-1}(s + \nu) \quad \text{et} \quad \varepsilon_t(\nu) = \varepsilon_{t-1}(s + \nu) \quad \text{pour} \quad \nu < 0. \quad (3.4)$$

Le modèle (3.2) représente une extension naturelle des modèles *ARMA* périodiques (*PARMA*) obtenus en fixant $b_{ij}(\nu) = 0$ pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, l\}$ (Basawa et Lund (2001) ([5]), pour une bibliographie récente). Les principaux thèmes, qui ont retenu l'attention de plusieurs chercheurs, sont :

- L'existence et l'unicité d'une solution périodiquement stationnaire au second ordre, au sens strict et l'ergodicité périodique.
- L'inversibilité.
- La structure de covariance et l'existence des moments d'ordre supérieur.
- Théorèmes centraux.

À cause de la complexité structurale du modèle, les modèles bilinéaires périodiques ont été, amplement, développés en utilisant la représentation vectorielle et markovienne. A partir de la représentation markovienne dans la théorie des modèles linéaires, Pham (1985) ([47]) a établi cette représentation pour les modèles bilinéaires superdiagonaux et en augmentant suffisamment l'espace d'état, il l'a aussi établi aussi pour des modèles bilinéaires généraux. Cependant, il est très difficile d'obtenir une telle représentation lorsque les ordres du modèle sont assez grands et par conséquent la forme explicite des matrices dans cette représentation devient une tâche très pénible. Bibi et Lessak (2009) ([12]) ont établi une étude exhaustive

pour les modèles bilinéaires périodiques. en se basant sur une autre représentation markovienne facile à obtenir et son exploration donne des bons résultats. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ par (3.2), alors nous avons :

$$\begin{cases} \underline{Z}_t(\nu) = A_t(\nu)\underline{Z}_t(\nu-1) + \underline{\varepsilon}_t(\nu) \\ X_t(\nu) = \underline{H}'\underline{Z}_t(\nu) \end{cases}, \quad (3.5)$$

où : $\underline{Z}_t(\nu) = (X_t(\nu), X_t(\nu-1), \dots, X_t(\nu-p+1), \varepsilon_t(\nu), \varepsilon_t(\nu-1), \dots, \varepsilon_t(\nu-q+1))'_{(p+q) \times 1}$, $\underline{H} = (1, 0, \dots, 0)'_{(p+q) \times 1}$, $\underline{\varepsilon}_t(\nu) = (\varepsilon_t(\nu), \mathbf{0}_{1 \times (p-1)}, \varepsilon_t(\nu), \mathbf{0}_{1 \times (q-1)})$ et $A_t(\nu)$ est une matrice $(p+q) \times (p+q)$ définie par :

$$A_t(\nu) = \begin{bmatrix} B_t(\nu) & C(\nu) \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{J}_{q \times q} \end{bmatrix}_{(p+q) \times (p+q)},$$

avec $B_t(\nu), C(\nu)$ et \mathbf{J} sont des matrices définies par :

$$B_t(\nu) = \begin{bmatrix} \phi_1(\nu) + \sum_{j=1}^l b_{1j}(\nu)\varepsilon_t(\nu-j) & \dots & \phi_p(\nu) + \sum_{j=1}^l b_{pj}(\nu)\varepsilon_t(\nu-j) \\ \mathbf{1}_{(p-1) \times (p-1)} & & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \end{bmatrix}_{p \times p},$$

$$C(\nu) = \begin{bmatrix} \theta_1(\nu) & \dots & \theta_q(\nu) \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times q} & & \end{bmatrix}_{p \times q}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times q} \\ \mathbf{1}_{(q-1) \times (q-1)} & \mathbf{0}_{(q-1) \times 1} \end{bmatrix}_{q \times q}.$$

Maintenant, Il est bien connu que dans les modèles de série chronologiques à coefficients périodiques, il est possible d'intégrer des saisons dans un processus à plusieurs variables (Tiao and Grupe (1980) ([57])). Plus précisément : $\{\underline{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ où $\underline{Z}_t = (\underline{Z}'_t(1), \underline{Z}'_t(2), \dots, \underline{Z}'_t(s))'$ est un processus *RCA* généralisé ; c'est-à-dire :

$$\underline{Z}_t = A_t \underline{Z}_{t-1} + \underline{\eta}_t, \quad (3.6)$$

où $(A_t, \underline{\eta}_t)$ est un couple de matrices et de vecteurs strictement stationnaires et ergodique, défini par :

$$A_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times p} & \dots & \mathbf{0}_{p \times p} & A_t(1) \\ \mathbf{0}_{p \times p} & \dots & \mathbf{0}_{p \times p} & A_t(2)A_t(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times p} & \dots & \mathbf{0}_{p \times p} & \prod_{\nu=0}^{s-1} A_t(s-\nu) \end{bmatrix}_{sp \times sp}, \quad \underline{\eta}_t = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_t(1) \\ A_t(2)\underline{\varepsilon}_t(1) + \underline{\varepsilon}_t(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-k-1} A_t(s-\nu) \right\} \underline{\varepsilon}_t(k) \end{bmatrix}_{sp \times 1}$$

où le produit vide est égal à $I_{p \times p}$. Cette représentation markovienne nous permet d'étudier certaines structures probabilistes à savoir l'existence et l'unicité de solutions périodiquement, stationnaires au second ordre et au sens strict, l'ergodicité périodique, l'inversibilité, la structure de covariances et l'existence des moments d'ordre supérieurs.

3.2 Théorème d'existence de solutions stationnaires au sens périodique

Dans cette section, on cherche à résoudre le problème suivant : Etant donné une suite de variables aléatoires i.i.d centrées de variance finie $\sigma^2 < \infty$, et les matrices A_t , $t \in \mathbb{Z}$, existe-t-il un processus stationnaire au sens strict et au second ordre unique $(\underline{Z}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant (3.5)? La classe des modèles bilinéaires périodiques ne sont pas des modèles stationnaires. Elle appartient aux processus du second ordre périodiquement corrélés (PC). La source d'inspiration provient de Gladyshev 1961, caractérisée par :

$$E\{X_t\} = E\{X_{t+s}\} \text{ et } Cov(X_t, X_l) = E\{(X_{t+s} - E(X_{t+s}))(X_{l+s} - E(X_{l+s}))\}$$

(sous réserve d'existence des moments), et dont le principal intérêt réside dans la correspondance biunivoque avec la classe des processus stationnaires multivariés. Le modèle (3.2) est, également, un cas particulier de modèles bilinéaires à coefficients dépendant du temps étudiés par Rao (1997) ([53]), Bibi (2003) ([7]) et Bibi et Oyet (2004) ([9]), Bibi et Lessek (2009) ([12]) qui visent, essentiellement, à décrire des propriétés de nature probabiliste ou statistique de certaines sous-classes de modèles. L'absence de documentation exhaustive sur ce sujet est certainement due à l'inadéquation de cette classe de modèles de séries temporelles à la théorie stationnaire ergodique classique des processus stochastiques.

Définition 3.2 *Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini par (3.3) est dit strictement stationnaire (respectivement au second ordre) au sens périodique si et seulement si le processus $\{\underline{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini par (3.6) est strictement stationnaire (respectivement au second ordre). Il est dit ergodique au sens périodique, si et seulement si le processus $\{\underline{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini par (3.6) est ergodique (Boyles et Gardner (1983) ([17])).*

3.2.1 Stationnarité stricte au sens périodique

Lorsque nous considérons le modèle $PBL(p, q, m, l)$ (3.3) comme un processus de génération de données, il est important de donner les conditions assurant la stationnarité et l'ergodicité au sens périodique pour l'analyse statistique supplémentaire. En effet, souvent les séries financières, par exemple, présentent des paramètres qui ne sont pas dans la région de stationnarité du second ordre (Engle et Bollerslev (1986) et les références qui s'y trouvent).

Ces séries peuvent donc être strictement stationnaires, même si elles ne sont pas de carré intégrable.

Toutefois, il existe différents résultats sur les conditions assurant l'existence d'une solution périodique strictement stationnaire et ergodique à l'équation (3.6); ces conditions impliquent la notion de l'exposant de Lyapunov $\gamma(A)$ pour la suite de matrices aléatoires $A := (A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, défini par : $\gamma(A) := \inf_{n \geq 1} E \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \right\| \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \right\| \right\}$ p.s. où $\|\cdot\|$ désigne toute norme d'opérateur sur l'ensemble des matrices $sp \times sp$ et $sp \times 1$. Puisque les 2 nombres $E\{\log^+ \|A_0\|\}$ et $E\{\log^+ \|\underline{\eta}_0\|\}$ sont finis, Bougerol et Picard (1992) ([18]) ont montré que la solution de (3.6) est unique, causale, strictement stationnaire, ergodique et donnée par :

$$\underline{Z}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_{t-i} \right\} \underline{\eta}_{t-k} + \underline{\eta}_t \quad (3.7)$$

dés que $\gamma(A) < 0$. En effet, en itérant l'équation (3.6) nous obtiendrons

$$\underline{Z}_t = \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \underline{Z}_{t-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_{t-i} \right\} \underline{\eta}_{t-k} + \underline{\eta}_t .$$

Et d'après le critère de Cauchy si $\gamma(A) < 0$, la solution de (3.6) est unique et donnée par (3.7), cette série converge absolument presque sûrement. Maintenant par un calcul simple, on montre que

$$\prod_{i=0}^t A_{t-j} = A_t \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (p-1)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times (p-1)} & \prod_{i=1}^{t-1} \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} A_{t-i}(s-\nu) \right\} \end{bmatrix} .$$

En choisissant une norme multiplicative, il est facile d'obtenir $\gamma(A) \leq \gamma^{(s)}(A)$ où $\gamma^{(s)}(A) := \inf_{t > 0} E \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{i=1}^t \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} A_{t-i}(s-\nu) \right\} \right\| \right\}$. Nous pouvons considérer $\gamma^{(s)}(A)$ comme l'exposant de Lyapunov périodique de la matrice $A = (A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Remarque 3.3 On a pour tout $\nu \in \{1, 2, \dots, s\}$:

$$A_t(\nu) = \begin{bmatrix} B_t(\nu) & C(\nu) \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{J}_{q \times q} \end{bmatrix}_{(p+q) \times (p+q)}$$

Alors :

$$\prod_{j=0}^{k-1} A_t(\nu-j) = \begin{bmatrix} \prod_{j=0}^{k-1} B_t(\nu-j) & \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \prod_{l=0}^{k-l-2} B_t(\nu-l) C(\nu-k+l+1) \mathbf{J}^l \right\} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{J}^k \end{bmatrix}_{(p+q) \times (p+q)}$$

avec : $\mathbf{J}^0 = \mathbf{I}_{q \times q}$ et $\mathbf{J}^q = \mathbf{0}_{q \times q}$.

On pose pour tout $\nu \in \{1, 2, \dots, s\}$:

$$\tilde{A}_t(\nu) = \begin{bmatrix} B_t(\nu) & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{0}_{q \times q} \end{bmatrix}_{(p+q) \times (p+q)}$$

Par conséquent :

$$\prod_{j=0}^{k-1} \tilde{A}_t(\nu - j) = \begin{bmatrix} \prod_{j=0}^{k-1} B_t(\nu - j) & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{0}_{q \times q} \end{bmatrix}_{(p+q) \times (p+q)}$$

Alors, on trouve pour tout $k \geq q$:

$$\begin{aligned} & A_t(\nu) A_t(\nu - 1) \dots A_t(\nu - k + 1) \\ = & \tilde{A}_t(\nu) \tilde{A}_t(\nu - 1) \dots \tilde{A}_t(\nu - (k - q) + 1) A_t(\nu - (k - q)) A_t(\nu - (k - q) - 1) \dots A_t(\nu - k + 1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_t(\nu) \tilde{A}_t(\nu - 1) \dots \tilde{A}_t(\nu - k + 1) \\ = & A_t(\nu) A_t(\nu - 1) \dots A_t(\nu - (k - q) + 1) \tilde{A}_t(\nu - (k - q)) \tilde{A}_t(\nu - (k - q) - 1) \dots \tilde{A}_t(\nu - k + 1). \end{aligned}$$

Comme l'exposant de Lyapunov est indépendant de la norme, on trouve :

$$\begin{aligned} \gamma^{(s)}(A) &= \gamma_1^{(s)}(A) := \inf_{t > 0} E \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{i=1}^t \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} \tilde{A}_{t-i}(s - \nu) \right\} \right\| \right\} \\ &= \inf_{t > 0} E \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{i=1}^t \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} B_{t-i}(s - \nu) \right\} \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons montré le premier résultat qui donne une condition suffisante pour la stationnarité stricte au sens périodique du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Maintenant, nous allons exposer le résultat de Bibi et Lessak (2009) ([12]), concernant la propriété probabiliste d'existence et de stationnarité périodique du modèle bilinéaire. Ce résultat se base sur une représentation markovienne du modèle (3.2).

Théorème 3.4 *On suppose que $\gamma^{(s)}(A) < 0$; donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série (3.7) converge p.s et constitue une solution unique causale, strictement stationnaire (SPS) et ergodique au sens périodique de (3.6).*

Corollaire 3.5 Si $\gamma^{(s)}(A) < 0$, alors pour tout $\nu \in \{1, 2, \dots, s\}$ et pour $t \in \mathbb{Z}$ fixé, l'équation (3.5) admet une solution SPS unique définie par :

$$\underline{Z}_t(\nu) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_t(\nu - i) \right\}_{\underline{\varepsilon}_t(\nu - k)} + \underline{\varepsilon}_t(\nu) \quad (3.8)$$

avec la série ci-dessus converge absolument p.s et le processus $(X_t(\nu))_{t \in \mathbb{Z}}$ défini comme la première composante de $(\underline{Z}_t(\nu))_{t \in \mathbb{Z}}$ et la solution de (3.6), c'est unique SPS, causale et ergodique.

Preuve. De (3.5) nous avons par récurrence :

$$\underline{Z}_t(\nu) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_{t-i}(\nu - k) \right\}_{\underline{\varepsilon}_t(\nu - k)} + \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i}(\nu - k) \underline{Z}_t(\nu - n) .$$

Par conséquent, il n'est pas difficile de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_t(\nu - i) \right\| \right\} \leq \gamma^{(s)}(A) < 0 \quad p.s.$$

Et donc : $\left\| \prod_{i=0}^{n-1} A_t(\nu - i) \right\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow \lambda < \lambda'$ où $\lambda' := \exp\{\gamma^{(s)}(A)\} < 1$ (a.s) (car $\gamma^{(s)}(A) < 0$) si $n \rightarrow +\infty$. D'autre part, la loi des grands nombres montre que $\frac{1}{k} \underline{\varepsilon}_t(\nu - k) \rightarrow \underline{0}$ (a.s) si $k \rightarrow +\infty$. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \underline{\varepsilon}_t(\nu - k) &= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{j=1}^k \underline{\varepsilon}_t(\nu - j) - \sum_{j=1}^{k-1} \underline{\varepsilon}_t(\nu - j) \right\} \\ \frac{1}{k} \underline{\varepsilon}_t(\nu - k) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \underline{\varepsilon}_t(\nu - j) - \frac{k-1}{k} \left\{ \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \underline{\varepsilon}_t(\nu - j) \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour k suffisamment grand, nous avons : $\|\underline{\varepsilon}_t(\nu - k)\| \leq k$ (p.s) (nous prenons $0 < \varepsilon \leq 1$)
conséquent :

$$\left\| \prod_{i=0}^{k-1} A_t(\nu - i) \right\|_{\underline{\varepsilon}_t(\nu - k)} \leq k (\lambda')^k \implies \left\| \prod_{i=0}^{k-1} A_t(\nu - i) \right\|_{\underline{\varepsilon}_t(\nu - k)}^{\frac{1}{k}} \leq k^{\frac{1}{k}} \lambda' < 1 .$$

Alors, d'après le critère de Cauchy, la série(3.8) est absolument convergente. D'où le résultat. ■

Proposition 3.6 Soit $l = 1, \delta \in]0, 1]$ et $\Gamma := E \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} |A_t(s - \nu)|^\delta \right\}$, alors $\rho(\Gamma) < 1$ implique que $\gamma^{(s)}(A) < 0$. D'où les résultats du corollaire précédent.

Preuve. Pour $\rho(\Gamma) < 1$, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\|\Gamma^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lambda < 1$ (d'après la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et $\rho(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Gamma^n\|^{\frac{1}{n}}$).

Par l'indépendance de $\varepsilon_t(\nu)$, nous trouvons :

$$\|\Gamma^n\| = \left\| \prod_{i=1}^n E \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} |A_{t-i}(s-\nu)|^\delta \right\} \right\| \geq E \left\{ \left\| \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} A_{t-i}(s-\nu) \right\} \right\|^\delta \right\}$$

D'après l'inégalité de Jensen, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \log \lambda \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log E \left\{ \left\| \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} A_{t-i}(s-\nu) \right\} \right\|^\delta \right\} \\ &\geq \delta \inf \frac{1}{n} E \left\{ \log \left\| \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} A_{t-i}(s-\nu) \right\} \right\| \right\} = \delta \times \gamma^{(s)}(A). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

3.2.2 Stationnarité au second ordre

Dans la section précédente, les conditions garantissant l'existence des solutions *SPS* et $\mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}$ -mesurables, qui ne sont pas nécessairement de carrés intégrables ont été établies. Dans cette section, nous nous intéressons à des solutions stationnaires au second ordre au sens périodique (*PC*) de (3.2) qui sont aussi $\mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}$ -mesurables. Dans le cas particulier où $l = 1$ et $q = 0$, Bibi et Moon-Ho (2006) ([11]) ont montré que si $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$, alors le modèle *PBL*($p, 0, p, 1$) a une solution *PC* si :

$$\lambda_{(1)} := \rho \left(\prod_{v=1}^s (A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v)) \right) < 1 \quad 3.9$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer comment trouver une condition suffisante analogue à (3.9) pour l'existence d'une solution *PC* pour le modèle général décrit par (3.3) ou de façon équivalente à (3.5). Nous ne donnons les résultats sous forme explicite que dans le cas $l = 2$. Mais, les mêmes arguments s'appliquent aussi bien pour l quelconque ($l \geq 2$), comme indiqué dans la sous section suivante.

Modèle BPL ($\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}, 2$)

Le théorème suivant examine les conditions garantissant l'existence de solutions stationnaires au second ordre pour l'équation (3.6) et ses propriétés lorsque $l = 2$.

Théorème 3.7 (*Bibi et Lessak (2009) ([12])*) Prenons l'équation (3.5) avec $l = 2$ et supposons que $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0$ et $E(\varepsilon_t^4) = k_4 < +\infty$. Pour tout $v \in \{1, 2, \dots, s\}$, soient $\Gamma(v)$ les matrices :

$$\Gamma(v) = \begin{pmatrix} A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v) & A(v) \otimes B_1(v) + B_2(v) \otimes A(v) & B_2^{\otimes 2}(v) \\ \sigma^2[A(v) \otimes B_1(v) + B_1(v) \otimes A(v)] & \sigma^2[B_1(v) \otimes B_2(v) + B_2(v) \otimes B_1(v)] & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \sigma^2 A^{\otimes 2}(v) + k_4 B_1^{\otimes 2}(v) & \sigma^2[A(v) \otimes B_2(v) + B_2(v) \otimes A(v)] & \sigma^2 B_2^{\otimes 2}(v) \end{pmatrix}$$

Alors une condition suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire au second ordre de (3.6) est que :

$$\lambda_{(2)} = \rho \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(v) \right) < 1 \quad (3.10)$$

En outre, la solution unique, strictement stationnaire, ergodique, causale est donnée par (3.7).

Pour montrer le théorème, nous prenons la même approche de Liu et Brockwell (1988)([39]). En premier lieu, nous définissons pour $v \in \{1, 2, \dots, s\}$, les processus suivants :

$$\underline{S}_{n,t}(v) = \begin{cases} \mathbf{0}_{p \times 1} & \text{si } n < 0 \\ \varepsilon_t(v) & \text{si } n = 0 \\ A_t(v) \underline{S}_{n-1,t}(v-1) + \varepsilon_t(v) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

et soit : $\underline{\Delta}_{n,t}(v) = \underline{S}_{n,t}(v) - \underline{S}_{n-1,t}(v)$ qui satisfait l'équation :

$$\underline{\Delta}_{n,t}(v) = A_t(v) \underline{\Delta}_{n-1,t}(v) \quad \text{pour tout } n \geq 3.$$

Soient $\underline{\Delta}_{n,t}$ et (resp. $\underline{S}_{n,t}$) les versions multivariées de $\underline{\Delta}_{n,t}(v)$ (resp. de $\underline{S}_{n,t}(v)$) avec $v \in \{1, 2, \dots, s\}$. Il est clair que $\underline{S}_{n,t}$ et $\underline{\Delta}_{n,t}$ sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}$. De la théorie de l'espace \mathbb{L}_p ($p > 1$), le problème d'existence d'une solution stationnaire au second ordre de (3.6) se réduit, à la convergence dans \mathbb{L}_2 de $(\underline{S}_{n,t})_{n \geq 0}$ vers \underline{X}_t . La quantité d'intérêt dans la détermination de la convergence dans \mathbb{L}_2 , est $E \{ \underline{\Delta}_{n,t} \underline{\Delta}'_{n,t} \}$. Pour ce faire, nous aurons besoin d'évaluer les vecteurs des moments :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n,t}(v) &= E \{ \underline{\Delta}_{n,t}^{\otimes 2}(v) \} , \\ \tilde{D}_{n,t}(v) &= E \{ \underline{\Delta}_{n,t}^{\otimes 2}(v) \varepsilon_t(v-1) \} , \\ \tilde{E}_{n,t}(v) &= E \{ \underline{\Delta}_{n,t}^{\otimes 2}(v) \varepsilon_t^2(v-1) \} . \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n,t}(v) &= [A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v)] \tilde{V}_{n-1,t}(v-1) + [A(v) \otimes B_2(v) + B_2(v) \otimes A(v)] \\ &\quad \tilde{D}_{n-1,t}(v-1) + B_2^{\otimes 2}(v) \tilde{F}_{n-1,t}(v-1) \\ \tilde{D}_{n,t}(v) &= \sigma^2 [A(v) \otimes B_1(v) + B_1(v) \otimes A(v)] \tilde{V}_{n-1,t}(v-1) + \sigma^2 [B_1(v) \otimes B_2(v) \\ &\quad + B_2(v) \otimes B_1(v)] \tilde{D}_{n-1,t}(v-1) \\ \tilde{F}_{n,t}(v) &= [\sigma^2 A^{\otimes 2}(v) + k_4 B_1^{\otimes 2}(v)] \tilde{V}_{n-1,t}(v-1) + [A(v) \otimes B_2(v) + B_2(v) \otimes A(v)] \\ &\quad \tilde{D}_{n-1,t}(v-1) + B_2^{\otimes 2}(v) \tilde{F}_{n-1,t}(v-1).\end{aligned}$$

En effet :

$$\tilde{V}_{n,t}(v) = E \{ \underline{\Delta}_{n,t}^{\otimes 2}(v) \} ,$$

or :

$$\underline{\Delta}_{n,t}(v) = A_t(v) \underline{\Delta}_{n-1,t}(v-1) ,$$

avec :

$$A_t(v) = A(v) + B_1(v) \varepsilon_t(v-1) + B_2(v) \varepsilon_t(v-2) ,$$

alors :

$$\tilde{V}_{n,t}(v) = E \left\{ (A_t(v) \underline{\Delta}_{n-1,t}(v-1))^{\otimes 2} \right\} .$$

Donc :

$$\tilde{V}_{n,t}(v) = E \left\{ [(A(v) + B_1(v) \varepsilon_t(v-1) + B_2(v) \varepsilon_t(v-2)) \underline{\Delta}_{n-1,t}(v-1)]^{\otimes 2} \right\} .$$

D'après les propriétés du produit de Kronecker (tensoriel), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n,t}(v) &= A^{\otimes 2}(v) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \right\} + B_1^{\otimes 2}(v) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t^2(v-1) \right\} + \\ &\quad B_2^{\otimes 2}(v) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t^2(v-2) \right\} + (A(v) \otimes B_1(v)) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_t(v-1) \right\} + (A(v) \otimes B_2(v)) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t(v-2) \right\} + (B_1(v) \otimes A(v)) \\ &\quad E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t(v-1) \right\} + (B_1(v) \otimes B_2(v)) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t(v-1) \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_t(v-2) \right\} + (B_2(v) \otimes A(v)) E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t(v-2) \right\} + (B_2(v) \otimes B_1(v)) \\ &\quad E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2}(v-1) \varepsilon_t(v-2) \varepsilon_t(v-1) \right\} ,\end{aligned}$$

or :

$$\underline{\Delta}_{n,t}(v) = A_t^n(v) \varepsilon_t(v-1) ,$$

alors :

$$\begin{aligned}
E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \varepsilon_t^2 (v-1) \right\} &= E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \right\} E \left\{ \varepsilon_t^2 (v-1) \right\} \\
&= \sigma^2 E \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1), \\
E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \varepsilon_t (v-1) \right\} &= E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \right\} E \left\{ \varepsilon_t (v-1) \right\} = 0, \\
E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \varepsilon_t (v-1) \varepsilon_t (v-2) \right\} &= E \left\{ \underline{\Delta}_{n-1,t}^{\otimes 2} (v-1) \varepsilon_t (v-2) \right\} E \left\{ \varepsilon_t (v-1) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Notons que : $\underline{V}_{n,t}(v) = \left(\tilde{V}'_{n,t}(v), \tilde{D}'_{n,t}(v), \tilde{E}'_{n,t}(v) \right)'$, alors nous obtenons :

$$\underline{V}_{n,t}(v) = \Gamma(v) \underline{V}_{n-1,t}(v-1).$$

Nous définissons :

$$\underline{V}_{n,t} = \left(\underline{V}_{n,t}(1), \underline{V}_{n,t}(2), \dots, \underline{V}_{n,t}(s) \right)'.$$

Alors, nous trouvons l'équation homogène suivante :

$$\underline{V}_{n,t} = \Gamma \underline{V}_{n-s,t-1}, \quad (3.11)$$

où Γ est une matrice définie par blocs comme suit :

$$(\Gamma)_{i,j} := \begin{cases} \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu) \prod_{\nu=0}^{s-i-1} \Gamma(s-\nu) & \text{si } i = j \\ \mathbf{0}_{(3p \times 3p)^2} & \text{sin on} \end{cases}.$$

En effet, par récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
\underline{V}_{n,t}(v) &= \Gamma(v)\underline{V}_{n-1,t}(v-1) \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \Gamma(v) [\Gamma(v-1)\underline{V}_{n-2,t}(v-2)] \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \Gamma(v)\Gamma(v-1) [\Gamma(v-2)\underline{V}_{n-3,t}(v-3)] \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \Gamma(v)\Gamma(v-1)\Gamma(v-2) \cdots \Gamma(1)\underline{V}_{n-v,t}(0) \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu)\underline{V}_{n-v,t}(0) \quad (\text{où : } \underline{V}_{n-v,t}(0) = \underline{V}_{n-v,t-1}(s)) \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu)\underline{V}_{n-v,t-1}(s) \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu) [\Gamma(s)\underline{V}_{n-v-1,t-1}(s-1)] \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu) \{ \Gamma(s) [\Gamma(s-1)\underline{V}_{n-v-2,t-1}(s-2)] \} \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu) \{ \Gamma(s)\Gamma(s-1) [\Gamma(s-2)\underline{V}_{n-v-3,t-1}(s-3)] \} \\
\underline{V}_{n,t}(v) &= \prod_{\nu=0}^{i-1} \Gamma(i-\nu) \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-i-1} \Gamma(s-\nu)\underline{V}_{n-s,t-1}(v) \right\}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. La condition nécessaire et suffisante pour l'équation homogène aux différences (3.11) permettant d'avoir une solution stable, qui est indépendante de t , best que $\lambda_{(2)} = \rho(\Gamma) = \rho\left(\prod_{v=1}^s \Gamma(v)\right) < 1$. Par conséquent, nous obtenons : $\underline{V}_n = \Gamma \underline{V}_{n-s}$.

Preuve. La discussion ci-dessus montre que la condition (3.10) est suffisante pour que $(\underline{V}_n)_n$ converge vers zéro. Plus précisément, il existe une constante positive k telle que :

$$E \|\underline{S}_{n,t} - \underline{S}_{n-1,t}\|^2 = E \|\underline{\Delta}_{n,t}\|^2 = E \{ \text{trace}(\underline{\Delta}_{n,t} \underline{\Delta}'_{n,t}) \} \leq \|\underline{V}_n\| \leq k\lambda_{(2)}^{\frac{n}{2}}.$$

Cela implique que pour chaque t fixé, $(\underline{S}_{n,t})_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{L}_2 et donc ses composantes $(\underline{S}_{n,t}(v))_n$ convergent dans \mathbb{L}_2 et (*p.s.*) lorsque $n \rightarrow +\infty$, et donc sa limite en \mathbb{L}_2 , est également $\underline{Z}_t(v)$ qui satisfait (3.5). D'autre part, par simple itération, nous pouvons observer que :

$$\underline{S}_{n,t}(v) = \sum_{k=1}^n \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_t(v-i) \right\} \varepsilon_t(v-k) + \varepsilon_t(v).$$

Donc $:\underline{Z}_t(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_{n,t}(v)$ satisfait (3.8). Par conséquent $:\underline{Z}_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_{n,t}$ satisfait (3.6). D'où le résultat. ■

Les corollaires suivants sont des conséquences du théoreme précédent.

Corollaire 3.8 *Sous la condition (3.10), l'équation (3.5) a une solution unique PC donnée par :*

$$\underline{X}_t(\nu) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_t(\nu - i) \right\} \underline{\varepsilon}_t(\nu - k) + \underline{\varepsilon}_t(\nu)$$

et le processus $(X_t(\nu))_{t \in \mathbb{Z}}$ caractérisant la première composante de $(\underline{X}_t(\nu))_{t \in \mathbb{Z}}$ est la solution unique PC, périodiquement ergodique, causale de l'équation (3.3).

Corollaire 3.9 *Pour le modèle PBL(1,0,1,1) donné par :*

$$X_t(v) = \phi_0(v) + \phi_1(v) X_t(v-1) + \varepsilon_t(v) + b_{11}(v) X_t(v-1) \varepsilon_t(v-1)$$

La condition (3.10) se réduit à $\prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) < 1$.

Preuve. Dans ce cas, on a :

$$A(v) = \phi_1(v), B_1(v) = b_{11}(v), B_2(v) = 0,$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu) &= \begin{pmatrix} \phi_1^2(\nu) + \sigma^2 b_{11}^2(\nu) & 0 & 0 \\ 2\sigma^2 b_{11}(\nu) \phi_1(\nu) & 0 & 0 \\ \sigma^2 \phi_1^2(\nu) + k_4 b_{11}^2(\nu) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) &= \begin{pmatrix} \prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & 0 & 0 \\ 2\sigma^2 b_{11}(1) \phi_1(1) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & 0 & 0 \\ (\sigma^2 \phi_1^2(1) + k_4 b_{11}^2(1)) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) - \lambda I_{3 \times 3} &= \begin{pmatrix} \prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) - \lambda & 0 & 0 \\ 2\sigma^2 b_{11}(1) \phi_1(1) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & -\lambda & 0 \\ (\sigma^2 \phi_1^2(1) + k_4 b_{11}^2(1)) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ \det \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) - \lambda I_{3 \times 3} \right) &= \begin{vmatrix} \prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) - \lambda & 0 & 0 \\ 2\sigma^2 b_{11}(1) \phi_1(1) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & -\lambda & 0 \\ (\sigma^2 \phi_1^2(1) + k_4 b_{11}^2(1)) \prod_{v=2}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) - \lambda I_{3 \times 3} \right) &= \left(\prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) - \lambda \right) \lambda^2 \\
\det \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) - \lambda I_{3 \times 3} \right) &= 0 \iff \left(\prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) - \lambda \right) \lambda^2 = 0 \\
&\iff \lambda = 0 \text{ où } \lambda = \prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v)) .
\end{aligned}$$

Alors, la valeur propre non-nulle de $\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu)$ est $\prod_{v=1}^s (\phi_1^2(v) + \sigma^2 b_{11}^2(v))$. D'où le résultat. ■

Corollaire 3.10 *Lorsque $l = 1$, la condition (3.10) se réduit à (3.9).*

Preuve. Dans ce cas, nous avons :

$$\Gamma(\nu) = \begin{pmatrix} A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v) & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \sigma^2 [A(v) \otimes B_1(v) + B_1(v) \otimes A(v)] & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \sigma^2 A^{\otimes 2}(v) + k_4 B_1^{\otimes 2}(v) & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Par conséquent, les valeurs propres non nulles de $\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu)$ sont les mêmes que celles de $\prod_{v=1}^s (A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v))$. D'où :

$$\rho \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) \right) = \rho \left(\prod_{v=1}^s (A^{\otimes 2}(v) + \sigma^2 B_1^{\otimes 2}(v)) \right).$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 3.11 *(Les modèles PARMA) Dans le cas linéaire, lorsque les coefficients $b_{ij}(v)$ de l'équation (3.3) sont tous des zéros pour tout $v \in \{1, 2, \dots, s\}$ et pour tout $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l$. La condition (3.10) se réduit à $\rho \left(\prod_{v=1}^s A(v) \right) < 1$.*

Preuve. Dans ce cas, la matrice $\Gamma(\nu)$ devient :

$$\Gamma(\nu) = \begin{pmatrix} A^{\otimes 2}(v) & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \\ \sigma^2 A^{\otimes 2}(v) & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} & \mathbf{0}_{(p \times p)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Alors, la valeur propre non-nulle de $\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu)$ est la même que celle de $\prod_{v=1}^s A^{\otimes 2}(v)$. D'où :

$$\rho \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) \right) = \rho \left(\prod_{v=1}^s A^{\otimes 2}(v) \right)$$

D'après les propriétés du produit de Kronecker, on a :

$$\begin{aligned} \rho \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(\nu) \right) &= \rho \left(\left(\prod_{v=1}^s A(v) \right)^{\otimes 2} \right) \\ &= \rho \left(\prod_{v=1}^s A(v) \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 3.12 (*Liu et Brokwell (1988) ([39])*) Soit le processus $\{\underline{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ (3.5) avec $l = 2$ et $s = 1$. Supposons que $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0$ et $E(\varepsilon_t^4) = k_4 < +\infty$. Posons :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A^{\otimes 2} + \sigma^2 B_1^{\otimes 2} & A \otimes B_1 + B_2 \otimes A & B_2^{\otimes 2} \\ \sigma^2 [A \otimes B_1 + B_1 \otimes A] & \sigma^2 [B_1 \otimes B_2 + B_2 \otimes B_1] & \mathbf{0} \\ \sigma^2 A^{\otimes 2} + k_4 B_1^{\otimes 2} & \sigma^2 [A \otimes B_2 + B_2 \otimes A] & \sigma^2 B_2^{\otimes 2} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, une condition suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire au second ordre de (3.6) est que :

$$\lambda_{(2)} = \rho(\Gamma) < 1.$$

En outre, la solution est unique, strictement stationnaire, ergodique, causale. Elle est donnée par :

$$\underline{Z}_t = \underline{\eta}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} (A + B_1 \varepsilon_{t-j} + B_2 \varepsilon_{t-j-1}) \right\} \underline{\eta}_{t-k}. \quad (3.14)$$

Modèle BPL(p, q, p, l) avec $l > 2$

Les mêmes arguments s'appliquent aussi pour l quelconque, comme indiqué ci-dessous. Pour tout $l > 2$, nous supposons que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait les conditions :

$$E(\varepsilon_t^{2l}) < +\infty \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t^r) = 0, \quad (3.15)$$

pour tout nombre positive impair $r < 2l$.

Par conséquent, la relation liant $\underline{S}_{n,t}(\nu)$ et $\underline{\Delta}_{n,t}(\nu)$ et celle liant $\underline{S}_{n,t}$ et $\underline{\Delta}_{n,t}$ est de la forme de celle donnée à l'équation vérifiée dans le cas $l=2$.

Les propriétés de la convergence de $\{\underline{S}_{n,t}\}$ sont étudiées par les mêmes arguments dans le cas $l = 2$

Nous allons besoin d'évaluer les vecteurs des moments :

$$\begin{cases} \tilde{V}_{n,t}(v) = E \{ \Delta_{n,t}^{\otimes 2}(v) \} & j = 0 \\ \tilde{D}_{n,t}^{(j)}(v) = E \{ \Delta_{n,t}^{\otimes 2}(v) \varepsilon_t(v-j) \} & j = 1, \dots, l-1 \\ \tilde{F}_{n,t}^{(j,k)}(v) = E \{ \Delta_{n,t}^{\otimes 2}(v) \varepsilon_t(v-j) \varepsilon_t(v-k) \} & 1 \leq j \leq k \leq l \end{cases}$$

et les moments d'ordre supérieurs. Alors, nous avons :

$$\underline{V}_{n,t}(v) = \Gamma(v) \underline{V}_{n,t}(v-1). \quad (3.16)$$

Théorème 3.13 *Considérons l'équation (3.5) et supposons que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait les conditions (3.15).*

Pour tout $v \in \{1, 2, \dots, s\}$, $\Gamma(v)$ sont les matrices données par l'équation (3.16), alors la condition suffisante de l'existence d'une solution stationnaire au second d'ordre de l'équation (3.6) est :

$$\lambda_{(l)} = \rho \left(\prod_{v=1}^s \Gamma(v) \right) < 1 \quad (3.17)$$

De plus, cette solution est unique, strictement stationnaire, ergodique, causale. et est donnée par (3.7).

3.3 Inversibilité

L'inversibilité est une notion très importante dans l'étude des modèles linéaires et non linéaires. Elle permet :

- D'une part, de faire des prévisions.
- D'autre part, d'estimer dans certains cas les paramètres du modèle.

Basawa et Lund (2001) ([5]) ont étudié l'inversibilité des processus *PARMA*. Par contre, Francq (1999) ([24]) a analysé celle de l'inversibilité du processus $BL(0, 0, P; 1)_1$. Les principales définitions de l'inversibilité ont été données au chapitre 2. Nous allons, maintenant, préciser dans quelles circonstances, elles ont été utilisées dans le cadre des modèles bilinéaires périodiques. Pour ce faire, nous utilisons l'inversibilité au sens de Granger-Andersen.

3.3.1 Inversibilité pour les modèles généraux

Considérons le modèle $PBL(p, q, m, l)$:

$$X_t(\nu) = \phi_0(\nu) + \sum_{i=1}^p \phi_i(\nu) X_t(\nu-i) + \sum_{j=1}^q \theta_j(\nu) \varepsilon_t(\nu-j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(\nu) X_t(\nu-i) \varepsilon_t(\nu-j) + \varepsilon_t(\nu). \quad (3.18)$$

Prenons : $r = \max(p, q, m, l)$; $\phi_i(\nu) = 0$ pour $p < i \leq r$; $\theta_i(\nu) = 0$ pour $q < i \leq r$; $b_{ij}(\nu) = 0$ pour $m < i \leq r, l < j \leq r$.

Alors, nous avons :

$$X_t(\nu) = \phi_0(\nu) + \sum_{i=1}^r \phi_i(\nu) X_t(\nu-i) + \sum_{j=1}^r \theta_j(\nu) \varepsilon_t(\nu-j) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r b_{ij}(\nu) X_t(\nu-i) \varepsilon_t(\nu-j) + \varepsilon_t(\nu),$$

et donc :

$$\varepsilon_t(\nu) = X_t(\nu) - \phi_0(\nu) - \sum_{i=1}^r \phi_i(\nu) X_t(\nu-i) + \sum_{j=1}^r \left[-\theta_j(\nu) - \sum_{i=1}^r b_{ij}(\nu) X_t(\nu-i) \right] \varepsilon_t(\nu-j).$$

Posons :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}_t(\nu) = D_t(\nu) \underline{\varepsilon}_t(\nu-1) + \underline{\xi}_t(\nu) \\ \varepsilon_t(\nu) = \underline{H}' \underline{\varepsilon}_t(\nu) \end{cases}, \quad (3.19)$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_t(\nu) &= (\varepsilon_t(\nu), \varepsilon_t(\nu-1), \dots, \varepsilon_t(\nu-r+1))'_{r \times 1}, \quad \underline{H} = (1, 0, \dots, 0)'_{r \times 1}, \\ \underline{\xi}_t(\nu) &= \left[X_t(\nu) - \phi_0(\nu) - \sum_{i=1}^r \phi_i(\nu) X_t(\nu-i) \right] \underline{H}, \end{aligned}$$

avec $D_t(\nu)$ est une matrice $r \times r$ définie par :

$$D_t(\nu) = \begin{bmatrix} -\theta_1(\nu) - \sum_{i=1}^r b_{i1}(\nu) X_t(\nu-i) & \dots & -\theta_r(\nu) - \sum_{i=1}^r b_{ir}(\nu) X_t(\nu-i) \\ \mathbf{1}_{(r-1) \times (r-1)} & & \mathbf{0}_{(r-1) \times 1} \end{bmatrix}_{r \times r}$$

Maintenant, Il est bien connu que dans les modèles des séries chronologiques à coefficients périodiques, il est possible d'intégrer des saisons dans un processus à plusieurs variables (Tiao and Grupe (1980) ([57])). Plus précisément $\{\underline{\varepsilon}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ où $\underline{\varepsilon}_t = (\underline{\varepsilon}'_t(1), \underline{\varepsilon}'_t(2), \dots, \underline{\varepsilon}'_t(s))'$ est un processus RCA généralisé ; i.e :

$$\underline{\varepsilon}_t = D_t \underline{\varepsilon}_{t-1} + \underline{\zeta}_t, \quad (3.20)$$

où :

$$D_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} & \dots & \mathbf{0}_{r \times r} & D_t(1) \\ \mathbf{0}_{r \times r} & \dots & \mathbf{0}_{r \times r} & D_t(2)D_t(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{r \times r} & \dots & \mathbf{0}_{r \times r} & \prod_{\nu=0}^{s-1} D_t(s-\nu) \end{bmatrix}_{sr \times sr}$$

et :

$$\underline{\zeta}_t = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_t(1) \\ D_t(2)\underline{\zeta}_t(1) + \underline{\zeta}_t(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-k-1} D_t(s-\nu) \right\} \underline{\zeta}_t(k) \end{bmatrix}_{sp \times 1},$$

avec le produit vide est égal à $I_{p \times p}$ comme dans le cas de la causalité. Par récurrence, nous trouvons :

$$\underline{\varepsilon}_t = \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\} \underline{\varepsilon}_{t-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} D_{t-i} \right\} \underline{\zeta}_{t-k} + \underline{\zeta}_t. \quad (3.21)$$

Il est bien connu (Liu 1990) que, si $E \ln^+ \|D_t\|$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\gamma(D) := \inf_{n \geq 1} E \left\{ \frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\| \right\}$$

existe dans $]-\infty, +\infty[$, et d'après le critère de cauchy ; si $\gamma(D) < 0$, la solution de l'équation (3.20) est donnée par :

$$\underline{\varepsilon}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} D_{t-i} \right\} \underline{\zeta}_{t-n} + \underline{\zeta}_t. \quad (3.22)$$

Par un calcul simple, on peut montrer que :

$$\prod_{i=0}^t D_{t-i} = D_t \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (p-1)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times (p-1)} & \prod_{i=1}^{t-1} \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} D_{t-i}(s-\nu) \right\} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons penser que $\gamma^{(s)}(D) := \inf_{t > 0} E \left\{ \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{i=1}^t \left\{ \prod_{\nu=0}^{s-1} D_{t-i}(s-\nu) \right\} \right\| \right\}$ est semblable à l'exposant de Lyapunov de la matrice D .

Maintenant, nous avons le résultat suivant qui donne une condition suffisante pour l'inversibilité du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ donné par (3.18).

Théorème 3.14 *On suppose que le processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est périodiquement stationnaire au second d'ordre. Si $\gamma^{(s)}(D) < 0$ alors, l'équation (3.20) admet une solution unique donnée par (3.22) où cette série converge p.s.*

Preuve. (voir théorème 3.4). ■

Exemple 3.15 Considérons le processus vectoriel $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ associé au processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ généré par un modèle $PBL(0; 0; P; 1)_2$. Dans ce cas, d'après la représentation (3.20), nous avons :

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & A_t(1) \\ 0 & A_t(2)A_t(1) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{et} \quad \eta_t = \begin{bmatrix} X_t(1) \\ A_t(2)X_t(1) + X_t(2) \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=0}^n A_{t-k} \right\| &= \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n}\| \\ &= \max \left\{ \prod_{k=0}^n |A_{t-k}(2)A_{t-k}(1)| \right\} \\ &= \prod_{k=0}^n \left| \sum_{j=2}^p b_j(1)X_{2(t-k)+1-j} \right| \prod_{k=0}^n \left| \sum_{j=2}^p b_j(2)X_{2(t-k)+2-j} \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n E \ln \|A_{t-k}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \ln E \left| \sum_{j=2}^p b_j(1)X_{2(t-k)+1-j} \right|^2 \left| \sum_{j=2}^p b_j(2)X_{2(t-k)+2-j} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\left\{ \sum_{j=2}^p b_j^2(1)\mu_{j-1} \right\} \left\{ \sum_{j=2}^p b_j^2(2)\mu_j \right\} \right], \end{aligned}$$

où $\mu_j = E(X_{2t-j}^2)$. Ainsi, on a $\gamma < 0$ si : $\left\{ \sum_{j=2}^p b_j^2(1)\mu_{j-1} \right\} \left\{ \sum_{j=2}^p b_j^2(2)\mu_j \right\} < 1$. Pour le modèle $PBL(0, 0, p, 1)$ avec $p > 1$ où $s = 1$, la condition d'inversibilité précédente se ramène à celle donnée par Francq (1999) ([24]), Proposition 2.4, c'est-à-dire : $\sum_{j=2}^p b_j^2(1) < \frac{1}{2}$.

3.3.2 Inversibilité au sens fort

Rappelons qu'un processus est inversible au sens faible, s'il existe une suite $\tilde{\varepsilon}_t$ fonction de X_1, X_n , uniquement telle que $\tilde{\varepsilon}_t - \varepsilon_t \rightarrow 0$ en probabilité, quand $n \rightarrow \infty$. Nous allons, dans le cas du modèle étudié par T. Pham Dinh et L. Tat Tran (1981) (modèle $BL(1, 0, 1, 1)$), donner une construction explicite de la suite $\tilde{\varepsilon}_t$ et utiliser alors une définition forte de l'inversibilité pour obtenir une condition suffisante d'inversibilité de modèle $BL(1, 0, 1, 1)$. Considérons le modèle $PBL(0, 0, p, 1)$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^p a_j(t)X_{t-j} + \sum_{j=1}^p b_j(t)X_{t-j}\varepsilon_{t-1} \quad (3.23)$$

où $(a_j(t))_{1 \leq j \leq p}$ et $(b_j(t))_{1 \leq j \leq p}$ sont des fonctions périodiques pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Jusqu'à présent, on supposait connues les valeurs des paramètres, or on fait, si on définit $\underline{\theta}$ comme étant l'ensemble des paramètres $(\theta_i(1), \dots, \theta_i(s))_{1 \leq i \leq p}$ avec $1 \leq i \leq p$; $\theta_i(v) = (a_i(v), b_i(v))$, $v \in \{1, \dots, s\}$, ceux-ci doivent être estimés quand on ajuste le modèle aux données. Considérons une valeur quelconque $\tilde{\theta}$ de $\underline{\theta}$. L'erreur (le bruit) de l'équation réursive (3.23) est alors calculée en fonction de $\tilde{\theta}$, on la note $\varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0)$. On se donne, maintenant, une valeur arbitraire z_0 de ε_0 et on définit récursivement $\varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0)$ à partir de l'équation (3.23), avec $\varepsilon_0(\tilde{\theta}|z_0) = z_0$.

Une forme forte de l'inversibilité est de démontrer qu'il existe un processus stationnaire $\varepsilon_t(\underline{\theta})$ tel que $\varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) - \varepsilon_t(\underline{\theta}) \rightarrow 0$ en probabilité quand $t \rightarrow \infty$, quelque soit z_0 .

Théorème 3.16 *Le modèle (3.23) est fortement inversible en $\tilde{\theta}$ relativement au processus observé $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, périodiquement stationnaire au second d'ordre, si*

$$E \ln \left\{ \left| \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t)X_{t-j} \right| \right\} < 0.$$

Preuve. Par récurrence, on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) &= \sum_{n=0}^{t-1} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t-i)X_{t-j-i} \right) \right\} \left[X_{t-n} - \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j(t)X_{t-j-n} \right] \\ &+ \left\{ \prod_{i=0}^{t-1} \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t-i)X_{t-j-i} \right) \right\} z_0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec $z_0 = \varepsilon_0(\underline{\theta})$. D'après le théorème d'ergodicité, on a :

$$\ln \left\{ \prod_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t)X_{t-j} \right| \right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln \left| \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t)X_{t-j} \right| \rightarrow E \ln \left\{ \left| \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t)X_{t-j} \right| \right\} \quad p.s.$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc, si $E \ln \left\{ \left| \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t)X_{t-j} \right| \right\} < 0$, alors, la série :

$$\varepsilon_t(\underline{\theta}) := \sum_{n \geq 0} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^p \tilde{b}_j(t-i)X_{t-j-i} \right) \right\} \left(X_{t-n} - \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j(t)X_{t-j-n} \right) \quad (3.25)$$

converge *p.s.*, et on a : $\varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) - \varepsilon_t(\underline{\theta}) \rightarrow 0$ *p.s.*, lorsque $n \rightarrow +\infty$. ■

Chapitre 4

MOMENTS D'ORDRE SUPERIEUR, TCL & LIL

De nombreux théorèmes de la limite centrale (TCL), ont été obtenus pour les modèles bilinéaires. Nous avons choisi, dans ce chapitre, de nous inspirer du théorème central limite de Liu Jian (1990) établi pour le modèle bilinéaire général $BL(p,q,P,Q)$, pour établir un TCL et un LIL pour le modèle bilinéaire périodique. Pour ce faire, nous avons eu besoin de l'existence des moments d'ordre 2. Pour cela, nous allons donner, d'abord, les conditions d'existence des moments d'ordre supérieur.

4.1 Expression des moments d'ordre supérieur pour les processus $PBL(0,0,m,1)$

Soit le modèle $PBL(0,0,m,1)$ avec $m \geq 2$:

$$X_t(\nu) = \sum_{i=2}^m b_i(\nu) X_t(\nu - i) \varepsilon_t(\nu - 1) + \varepsilon_t(\nu), \quad (4.1)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc suit $N(0,1)$ alors : $E(\varepsilon_t^{2k}) := \gamma(k) = 1.3.5 \dots (2k - 1)$.

4.2 Modèles périodiques bilinéaires avec $m = 2$

Dans ce cas, le modèle s'écrit sous la forme :

$$X_t(\nu) = b(\nu) X_t(\nu - 2) \varepsilon_t(\nu - 1) + \varepsilon_t(\nu), \quad (4.2)$$

alors :

$$E \left[X_t^k(\nu) \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2r + 1 \\ E(X_t^{2l}(\nu)) & \text{si } k = 2r \end{cases}, \quad (4.3)$$

avec :

$$E \left[X_t^{2r}(\nu) \right] = \gamma(r)b^{2r}(\nu)E \left[X_t^{2r}(\nu - 2) \right] + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(2r)!}{(2j)!(2r-2j)!} b^{2j}(\nu)E \left[X_t^{2j}(\nu - 2) \right] \gamma(r-j)\gamma(j). \quad (4.4)$$

Théorème 4.1 *Considérons le modèle à étudier. Alors, le processus stationnaire au second ordre $\{\underline{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, admet les moments d'ordre supérieur, si et seulement si :*

$$\gamma(r) \max_{1 \leq \nu \leq s} (b^{2r}(\nu)) < 1,$$

pour tout $r = 1, \dots, m$.

4.3 Modèles périodiques bilinéaires avec $m > 2$

Soit le modèle $PBL(0, 0, m, 1)$ avec $m > 2$ donné par (4.1).

Si on utilise l'écriture markovienne (3.5), on trouve :

$$\begin{cases} \underline{Z}_t(\nu) = \underline{A}_t(\nu)\underline{Z}_t(\nu - 1) + \underline{C}\varepsilon_t(\nu) \\ X_t(\nu) = \underline{H}'\underline{Z}_t(\nu) \end{cases},$$

où : $\underline{Z}_t(\nu) = (X_t(\nu), X_t(\nu-1), \dots, X_t(\nu-m+1), \varepsilon_t(\nu))'_{(m+1) \times 1}$, $\underline{H} = (1, 0, \dots, 0)'_{(m+1) \times 1}$, $\underline{C} = (1, \mathbf{0}_{1 \times (m-1)}, 1)'_{(m+1) \times 1}$ et $\underline{A}_t(\nu)$ est une matrice $m \times m$ définie par :

$$\underline{A}_t(\nu) = \begin{bmatrix} B_t(\nu) & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)},$$

avec $B_t(\nu), C(\nu)$ et \mathbf{J} sont des matrices définies par :

$$B_t(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & b_2(\nu)\varepsilon_t(\nu - 1) & \dots & b_m(\nu)\varepsilon_t(\nu - 1) \\ \mathbf{1}_{(m-1) \times (m-1)} & & & \mathbf{0}_{(m-1) \times 1} \end{bmatrix}_{m \times m}.$$

Or, on a :

$$\underline{Z}_t^{\otimes k}(\nu) = \underline{A}_t^{\otimes k}(\nu)\underline{Z}_t^{\otimes k}(\nu - 1) + \sum_{l=1}^{k-1} D_t^{(k,l)}(\nu)\underline{Z}_t^{\otimes(k-l)}(\nu - 1)\varepsilon_t^l(\nu) + \underline{C}^{\otimes k}\varepsilon_t^k(\nu), \quad (4.5)$$

où $D_t^{(k,l)}$ sont des matrices définies par :

$$\forall l \in \{1, 2, \dots, k-1\} : \begin{cases} D_t^{(k,l)}(v) = \underline{C} \otimes D_t^{(k-1,l-1)}(\nu) + A_t(\nu) \otimes D_t^{(k-1,l)}(\nu) \\ D_t^{(k,0)}(v) = A_t^{\otimes k}(\nu) \\ D_t^{(k,k)}(v) = \underline{C}^{\otimes k} \end{cases} . \quad (4.6)$$

On pose pour tout $k \geq 1$:

$$M_t^{(k)}(v) = E \left\{ Z_t^{\otimes k}(\nu) \right\} \quad \text{et} \quad m_t^{(k)}(v) = E \left\{ X_t^k(\nu) \right\}, \quad (4.7)$$

alors :

$$m_t^{(k)}(v) = \underline{H}^{\otimes k} M_t^{(k)}(v), \quad (4.8)$$

avec :

$$M_t^{(k)}(v) = E \left\{ A_t^{\otimes k}(\nu) \right\} M_t^{(k)}(v-1) + \sum_{l=1}^{k-1} E \left\{ D_t^{(k,l)}(\nu) \varepsilon_t^l(\nu) \right\} M_t^{(k-1)}(v-1) + \underline{C}^{\otimes k} E \left\{ \varepsilon_t^k(\nu) \right\}. \quad (4.9)$$

On peut écrire $A_t(\nu)$ comme :

$$A_t(\nu) = F(\nu) \varepsilon_t(\nu-1) + \underline{L},$$

où :

$$F(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & b_2(\nu) & \dots & b_m(\nu) & 0 \\ & & \mathbf{0}_{m \times (m+1)} & & \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)},$$

et :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{1}_{(m-1) \times (m-1)} & \mathbf{0}_{(m-1) \times 1} & \mathbf{0}_{(m-1) \times 1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}.$$

Après un calcul simple, on trouve :

$$A_t^{\otimes k}(\nu) = \sum_{l=0}^k F_t^{(k,l)}(\nu) \varepsilon_t^l(\nu-1), \quad (4.10)$$

où $F_t^{(k,l)}(\nu)$ sont des matrices définies par :

$$F_t^{(k,l)}(v) = \begin{cases} \underline{L}^{\otimes k} & l = 0 \\ F^{(k-1,l-1)}(\nu) \otimes F(v) + D_t^{(k-1,l)}(\nu) \otimes \underline{L} & 1 \leq l \leq k-1 \\ F^{\otimes k}(\nu) & k = l \end{cases} .$$

L'équation (4.9) admet une solution, si et seulement si, $\rho(E \left\{ A_t^{\otimes k}(\nu) \right\}) < 1$, pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Corollaire 4.2 Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus PC donné par (4.1), les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $m_t^{(2k)}(v)$ est uniformément bornés.
2. $\rho(E \{A_t^{\otimes 2k}(\nu)\}) < 1$.

Exemple 4.3 Soit un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ généré par le modèle PBL(0, 0, 2, 1) :

$$X_t(\nu) = b(\nu)X_{t-2}(\nu)\varepsilon_t(\nu-1) + \varepsilon_t(\nu)$$

avec $\nu \in \{1, 2\}$, alors, le processus admet un moment d'ordre $2k$ qui est uniformément borné, si et seulement si :

$$\gamma(l) \max_{\nu=1,2} \{b^{2k}(\nu)\} < 1, \quad k \geq 1$$

4.4 Structures de covariances

Nous allons nous intéresser à l'expression des moments théoriques d'ordre 1, 2 et 3 du modèle (4.1). Guégan (1984) a traité cette question dans le cas particulier où $m = 2$ à coefficients constants. Berline et Francq (1990) ([23]) et Francq (1999) ([24]) ont examiné cette question dans le cas du modèle (4.1) à coefficients constants. Bibi et Gautier (2006) ([10]) dans le théorème suivant ont étendu leurs résultats au cadre périodique en supposant les erreurs gaussiennes. Notons $C_v(i) = E(X_{st+v}X_{st+v-i})$ et $C_v(i, j) = E(X_{st+v}X_{st+v-i}X_{st+v-j})$ pour tous entiers i, j . Remarquons tout d'abord que les fonctions $C_v(i)$ et $C_v(i, j)$ vérifient les relations :

$$\begin{aligned} C_v(i) &= C_v(-i), C_v(i, j) = C_v(j, i), C_v(-i, j) = C_{v+i}(i+j, i), \\ C_v(i, -j) &= C_{v+j}(j, i+j) \text{ et } C_v(-i, -j) = C_{v+i}(i, i-j) = C_{v+j}(j, j-i). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ces relations permettent de calculer les fonctions $C_v(i)$ et $C_v(i, j)$ uniquement pour les $i \geq j \geq 0$.

Proposition 4.4 Supposons que le processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire au second ordre, l'unique processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant (4.1) est tel que, pour tout $v = 1; \dots; s$,

- i. $E(X_{st+v}) = 0$;
- ii. $C_v(0) = \sum_{j=2}^p b_j^2(\nu)C_{v-j}(0) + 1$ et $C_v(i) = 0, \forall i \neq 0$;

- iii. $\forall j > P, C_v(0,0) = C_v(1,1) = C_v(1,j) = 0$;
 $\forall j \geq i > 1, C_v(i,j) = 0$;
 $\forall 2 \leq j \leq P, C_v(1,j) = b_j(\nu)C_v(0)$;
 $\forall j \geq 2P, C_v(0,j) = \sum_{i=2}^P b_i^2(\nu)C_{v-i}(0, j-i)$
 $\forall j \geq 1, C_v(0,j) = \sum_{i=2}^P b_i^2(\nu)C_{v-i}(0, j-i) + 2 \sum_{2 \leq l < k \leq P} b_l(\nu)b_k(\nu)C_{v-k}(l-k, j-k)$.

Preuve. Il s'agit d'une adaptation directe au cas périodique des calculs de Berline et Francq (1990) ([23]), (Théorème 2). ■

4.5 TCL et LIL

Dans cette section, nous nous intéressons aux *TCL* et *LIL*. Liu Jian (1990) a examiné cette question dans le cas du modèle (2.1) à coefficients constants. Nous étendons, ici, leurs résultats au cadre périodique. Soit le modèle *PBL*(p, q, m, l) :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i(t)X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j(t)\varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l b_{ij}(t)X_{t-i}\varepsilon_{t-j}. \quad (4.12)$$

Posons :

$$\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q+1})', \quad \underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t, \mathbf{0}_{1 \times (p-1)}, \varepsilon_t, \mathbf{0}_{1 \times (q-1)})'$$

et :

$$A_t = \begin{bmatrix} \phi_1(t) + \sum_{j=1}^l b_{1j}(t)\varepsilon_{t-j} & \dots & \phi_p(t) + \sum_{j=1}^l b_{pj}(t)\varepsilon_{t-j} & \theta_1(t) & \dots & \theta_q(t) \\ \mathbf{I}_{(p-1) \times (p-1)} & & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} & \\ & & \ddots & & \mathbf{0}_{1 \times q} & \\ & & \mathbf{0}_{q \times p} & & \mathbf{I}_{(q-1) \times (q-1)} & \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{0}_{m \times n}$ est une matrice des zéros et $\mathbf{I}_{m \times n}$ est une matrice d'identité.

Alors, on a :

$$\underline{X}_t = A_t \underline{X}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t. \quad (4.13)$$

Sous les condition de causalité et de la stationnarité périodique :

$$E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0, \quad E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, \quad E(\varepsilon_t^4) = k_4 < \infty, \quad (4.14)$$

et :

$$\lambda_{(l)} < 1. \quad (4.15)$$

On a :

$$\underline{X}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} A_{t-i} \right\} \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (4.16)$$

Posons :

$$\begin{cases} E(X_t(v)) = \mu(v) \\ Y_{st+v} = X_{st+v} - \mu(v) \\ S_n(v) = \sum_{t=0}^{n-1} Y_{st+v} = \sum_{t=0}^{n-1} X_{st+v} - n\mu(v) \end{cases}$$

Théorème 4.5 *Considérons le modèle PBL(p, q, m, l) sous les conditions de causalité et de stationnarité périodique (4.14) et (4.15), on a :*

$$\frac{S_n(v)}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0, \sigma^{*2}(v)) \quad \text{si } n \rightarrow +\infty$$

avec :

$$\sigma^*(v) = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ES_n^2}{n}} < +\infty$$

Ou encore plus, si $\sigma^*(v) > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(v)}{\sqrt{2n \ln \ln n}} &= \sigma^*(v) \quad \text{si } n \rightarrow +\infty \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(v)}{\sqrt{2n \ln \ln n}} &= -\sigma^*(v) \quad \text{si } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Preuve. D'après le corrolaire (5.4) de Hall et Heyde (1980) ([33]), Il suffit de montrer que :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(E[E(Y_0/\mathcal{F}_{-m})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(E[Y_0 - E(Y_0/\mathcal{F}_m)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty$$

où : $\mathcal{F}_m = \sigma(\varepsilon_t, t \leq m)$. D'autre part, on a : $E[Y_0 - E(Y_0/\mathcal{F}_m)] = E(Y_0) - E(Y_0) = 0$ car Y_0 est \mathcal{F}_m -mesurable, $m \geq 1$, d'après (4.16), on a :

$$\underline{X}_0 = \sum_{n=1}^{m-l-1} \underline{\Delta}_n(0) + \sum_{n=m-l}^{\infty} \underline{\Delta}_n(0) + \underline{\Delta}_0(0) \quad , \text{ pour } m > l,$$

où :

$$\underline{\Delta}_n(t) = \begin{cases} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} A_{t-i} \right\} \varepsilon_{t-n} & \text{si } n > 0 \\ \eta_t & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Remarquons que : $\underline{\Delta}_n(0) = f_n(\varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \dots, \varepsilon_{-l-n})$, où f_n est une fonction mesurable.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E[Y_0 - E(Y_0/\mathcal{F}_m)] &= E[(H' \{X_0 - E(X_0)\}) / \mathcal{F}_m] \\ &= E \left[\left(H' \left\{ \sum_{n=1}^{m-l-1} \underline{\Delta}_n(0) - E(\underline{\Delta}_n(0)) \right\} \right) / \mathcal{F}_m \right], \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité :

$$\begin{cases} E(\{E(Y/\mathcal{F}) - E(Y)\}^2) < \text{var}(Y) \\ \text{var}(\sum_{m=1}^{\infty} Y_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \text{var}(Y_m) + \left[\sum_{m=1}^{\infty} (\text{var}(Y_m))^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ \text{var}(Y) \leq E(Y^2) \end{cases}$$

et : $E[\underline{\Delta}'_n(t)\underline{\Delta}_n(t)] \leq \text{const.}\lambda^{\frac{n}{2}}$, alors, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left(E[E(Y_0/\mathcal{F}_{-m})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} &< \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \text{var} \left(H' \sum_{n=m-l}^{\infty} \underline{\Delta}_n(0) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=m-l}^{\infty} \text{var}(H' \underline{\Delta}_n(0)) + \left(\sum_{n=m-l}^{\infty} [\text{var}(H' \underline{\Delta}_n(0))]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=m-l}^{\infty} E(H' \underline{\Delta}_n(0))^2 + \left(\sum_{n=m-l}^{\infty} [E(H' \underline{\Delta}_n(0))^2]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \text{const.} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Chapitre 5

ESTIMATION DES MOINDRES CARRÉS

5.1 Introduction

Les méthodes d'estimation pour des modèles non stationnaires restent, relativement moins explorées, comparées à celles traitant les modèles stationnaires. La raison principale se manifeste par le fait que la théorie asymptotique des processus stationnaires et ergodiques ne cadre pas, convenablement, avec les modèles non stationnaires. Cet handicap en constitue une difficulté majeure. Dans cette section, nous allons étudier le comportement asymptotique des estimateurs des moindres carrés (*LSE*) pour une large classe de modèles bilinéaires à coefficients périodiques. Nous allons utiliser les notions de la consistance forte et la normalité asymptotique, bien connues dans les modèles stationnaires, sous certaines conditions, supposées suffisamment explicites, pour l'estimation des modèles périodiques simples. Considérons la classe des processus définie par le modèle $PBL(p, 0, p, 1)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^p a_j(t)X_{t-j} + \sum_{j=1}^p b_j(t)X_{t-j}\varepsilon_{t-1} \quad (5.1)$$

où $(a_j(t))_{1 \leq j \leq p}$ et $(b_j(t))_{1 \leq j \leq p}$ sont des fonctions périodiques pour tout $t \in \mathbb{Z}$. On peut écrire $a_j(t) := \sum_{v=1}^s a_j(v)\mathbf{I}_{\Delta(v)}(t)$, $b_j(t) := \sum_{v=1}^s b_j(v)\mathbf{I}_{\Delta(v)}(t)$, avec $\Delta(v) = \{sk + v, k \in \mathbb{Z}\}$.

5.2 Rappel sur la méthode standard des moindres carrés

Définissons $\underline{\theta}$ comme étant le vecteur des paramètres $(\theta_i(1), \dots, \theta_i(s))_{1 \leq i \leq p}$ avec $1 \leq i \leq p$; $\theta_i(v) = (a_i(v), b_i(v))$, $v \in \{1, \dots, s\}$. La méthode standard des moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des résidus sur un certain domaine de l'espace des paramètres Θ contenant la vraie valeur de $\underline{\theta}$. On suppose que la condition de stationnarité périodique au second ordre et ainsi que la condition d'inversibilité sont vérifiées. Ceci permet de délimiter le domaine des paramètres admissibles. Ces dernières prennent en compte le paramètre σ^2 qui ne sera pas estimé, pour l'instant. Pour contourner cette difficulté, au lieu de minimiser la somme des carrés sur un ensemble fixe Θ dans l'espace des paramètres, nous allons la réduire au minimum sur des ensembles aléatoires Θ_n , qui sont fonctions des données X_1, X_2, \dots, X_n déterminées à partir du modèle (5.1). Pour ce faire, considérons $\underline{\theta}_0$ comme étant la vraie valeur du paramètre $\underline{\theta}$. L'échantillon contient la période complète des données N , qui sont indexées de 0 à $N - 1$. En effet, lorsque $0 \leq k \leq N - 1$ et $1 \leq v \leq s$, alors $sk + v$ allant de 1 à $n = Ns$. On suppose que $\underline{\theta}_0$ appartient à l'espace des paramètres. Les ensembles aléatoires Θ_n sont choisis de sorte le soit modèle est inversible relativement au processus d'observation X_1, X_2, \dots, X_n et à être compact pour n suffisamment grand.

Soit $\delta > 0$, on pose

$$\Theta_n = \left\{ \underline{\theta} : \ln \prod_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right|^{\frac{1}{n}} + \delta \leq 0 \right\} \quad (5.2)$$

et

$$\tilde{\Theta} = \left\{ \underline{\theta} : E \left\{ \ln \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right| \right\} + \frac{\delta}{2} \leq 0 \right\}. \quad (5.3)$$

Notons que l'introduction de δ permet l'utilisation du signe \leq au lieu de $<$, qui conduit, généralement, à un espace compact. Par conséquent, sous la condition :

$$E \left\{ \ln \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right| \right\} + 2\delta \leq 0, \quad (5.4)$$

on a : $\Theta_n \subset \tilde{\Theta}$ p.s, lorsque n est suffisamment grand. En effet, d'après le théorème d'ergodi-

cité, on a :

$$\ln \prod_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right| \rightarrow E \left\{ \ln \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right| \right\} \quad p.s. \quad (5.5)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour $\underline{\theta} \in \Theta_n$, soit $\varepsilon_t(\underline{\theta})$, la solution périodiquement stationnaire au second ordre de :

$$\varepsilon_t(\underline{\theta}) = X_t - \sum_{j=1}^p a_j(t) X_{t-j} - \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \varepsilon_{t-1}(\underline{\theta})$$

qui est donn e par :

$$\varepsilon_t(\underline{\theta}) = \sum_{n \geq 0} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^p b_j(t-i) X_{t-j-i} \right) \right\} \left(X_{t-n} - \sum_{j=1}^p a_j(t) X_{t-j-n} \right). \quad (5.6)$$

Notons que, presque sûrement, $\varepsilon_t(\underline{\theta}_0) = \varepsilon_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, $\varepsilon_t(\underline{\theta})$ peut être approxim e par $\varepsilon_t(\underline{\theta}|z_0)$, qui est également d termin e de façon récursive en t via une version tronqu e de (5.6) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\underline{\theta}|z_0) &= \sum_{n=0}^{t-1} (-1)^n \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^p b_j(t-i) X_{t-j-i} \right) \right\} \left[X_{t-n} - \sum_{j=1}^p a_j(t) X_{t-j-n} \right] \\ &+ \left\{ \prod_{i=0}^{t-1} \left(- \sum_{j=1}^p b_j(t-i) X_{t-j-i} \right) \right\} z_0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

où, $\varepsilon_0(\underline{\theta}) = z_0$.

Définition 5.1 On appelle estimateur des moindres carrés de $\underline{\theta}_0$, toute solution de l'équation :

$$V_n(\hat{\underline{\theta}}) = \min_{\underline{\theta} \in \Theta} V_n(\underline{\theta}), \quad (5.8)$$

où :

$$V_n(\underline{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\underline{\theta}|z_0). \quad (5.9)$$

Dans ce qui suit, on va étudier la consistance forte et la normalité asymptotique de $\hat{\underline{\theta}}_n$; tout en supposant que :

A1 : $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est périodiquement stationnaire au second ordre et périodiquement ergodique.

A2 : ε_t^2 est un fonction non linéaire de ε_t p.s, c- -d la masse de ε_t n'est pas concentr e sur un ou deux points.

5.3 Consistance forte

La consistance forte de l'estimateur des moindres carrés est basée sur le résultat général suivant :

Théorème 5.2 *Sous A1 , A2 et si la condition (5.4) est satisfaite ; alors l'estimateur $\hat{\theta}_n$, défini par (5.8) converge p.s vers $\underline{\theta}_0$.*

Le preuve du théorème précédent est découpée en une série de lemmes (5.3 à 5.7).

Lemme 5.3 (Pham, (1981) ([46])) *Soit $V_n(\tilde{\theta})$ une suite de fonctions aléatoires continues définies sur un compact $\tilde{\Theta}$ de dimension k (dans R^k), soit $\underline{\theta}$ un point de $\tilde{\Theta}$ et Θ_n un sous compact dans R^k tels que :*

- (i) *Presque sûrement, $\underline{\theta} \in \Theta_n \subset \tilde{\Theta}$ pour un n suffisamment grand .*
- (ii) *Pour $\hat{\theta} \in \tilde{\Theta}, \hat{\theta} \neq \underline{\theta}$, il existe un voisinage $U(\hat{\theta})$ de $\hat{\theta}$ tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\tilde{\theta} \in U(\hat{\theta})} \{ \inf_{\underline{\theta} \in \Theta_n} V_n(\tilde{\theta}) - V_n(\underline{\theta}) \} > 0 \quad p.s..$$

Alors $\hat{\theta}_n$, la solution de la minimisation de $V_n(\underline{\theta})$ sur Θ_n , converge p.s vers $\underline{\theta}$.

Preuve. (Pham.Dinh lemma 1.4 ([46])). ■

Pour la fonction $V_n(\underline{\theta})$ définie par (5.8) et sous la condition (5.8) ; d'après (5.5), la condition (i) du lemme (5.3) est satisfaite en prenant l'ensemble Θ_n qui est donnée par (5.3).

Lemme 5.4 *La série (5.6) converge p.s pour tout $\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}$. Elle définit une fonction aléatoire continue dans $\tilde{\Theta}$. De plus, on a :*

$$\varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) - \varepsilon_t(\tilde{\theta}) \rightarrow 0 \quad p.s. \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

uniformément dans $\tilde{\Theta}$.

Preuve. Le 1^{er} résultat : d'après le théorème d'ergodicité, on a :

$$\ln \prod_{t=0}^{n-1} \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right|^{\frac{1}{n}} \rightarrow E \ln \left\{ \left| \sum_{j=1}^p b_j(t) X_{t-j} \right| \right\} \quad p.s.$$

Lé deuxième résultat : d'après (5.6) et (5.7), on a :

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) - \varepsilon_t(\tilde{\theta}) \right| &\leq \sum_{n \geq t} \left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^p b_j(t-i) X_{t-j-i} \right) \left(X_{t-n} - \sum_{j=1}^p a_j(t) X_{t-j-n} \right) \right| \\ &\quad + \left| \prod_{i=0}^{t-1} \left(- \sum_{j=1}^p b_j(t-i) X_{t-j-i} \right) z_0 \right|. \end{aligned}$$

■

Lemme 5.5 Soit $V_n(\tilde{\theta})$ la somme des carrés définie par (5.9), alors, on a : $V_n(\tilde{\theta}) / \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\} \rightarrow 1$ p.s. uniformément sur tout compact K de $\tilde{\Theta}$; si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\tilde{\theta} \in K} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\} > 0.$$

Preuve. Posons : $\delta_t(\tilde{\theta}) = \varepsilon_t(\tilde{\theta}|z_0) - \varepsilon_t(\tilde{\theta})$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_n(\tilde{\theta})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta})} - 1 \right| &\leq \sup_{\tilde{\theta} \in K} \left| \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \delta_t^2(\tilde{\theta}) - \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t(\tilde{\theta}) \delta_t(\tilde{\theta})}{\frac{1}{N_s} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{v=1}^s \varepsilon_{st+v}^2(\tilde{\theta})} \right| \\ &\leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\tilde{\theta} \in K} |\delta_t(\tilde{\theta})|^2}{\inf_{\tilde{\theta} \in K} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\}} + 2 \left\{ \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\tilde{\theta} \in K} |\delta_t(\tilde{\theta})|^2}{\inf_{\tilde{\theta} \in K} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\}} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après le lemme (5.4), on a $\delta_t(\tilde{\theta}) \rightarrow 0$ p.s uniformément. La preuve est complète. ■

Lemme 5.6 Pour $\hat{\theta} \in \tilde{\Theta}$ et $U_m(\hat{\theta})$ un voisinage de $\hat{\theta}$, on a p.s :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta} \in U_m(\hat{\theta})} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\} = \begin{cases} E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right] & \text{si } E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right] < +\infty \\ +\infty & \text{si } E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right] = +\infty \end{cases}$$

Preuve. Posons : $Y_m(t) = \inf_{\hat{\theta} \in U_m(\hat{\theta})} \varepsilon_t^2(\hat{\theta})$ et pour $c > 0$ $Y_m^c(t) = \min \{Y_m(t), c\}$ d'après le théorème d'ergodicité :

$$\begin{aligned} E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right\} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta} \in U_m(\hat{\theta})} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t,m}^c(v) \right\} \\ &= E \left[\min \left\{ \varepsilon_t^2(\hat{\theta}), c \right\} \right] \end{aligned}$$

D'après le TCM : $E \left[\min \left\{ \varepsilon_t^2(\hat{\theta}), c \right\} \right] \rightarrow E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right]$, lorsque $c \rightarrow +\infty$. Par conséquent, on obtient :

$$E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right] \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta} \in U_m(\hat{\theta})} \left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right\} \geq E \left[\varepsilon_t^2(\hat{\theta}) \right]$$

D'où le résultat. ■

Lemme 5.7 si $\tilde{\theta} \neq \theta$, alors $E \left[\varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right] > \delta^2$.

Preuve. Posons : $\phi_{t-1}(\tilde{\theta}) = \varepsilon_t(\tilde{\theta}) - \varepsilon_t = \sum_{i=1}^p [a_i(t) - \tilde{a}_i(t)] X_{t-i} + \sum_{j=1}^p [b_j(v)\varepsilon_t - \tilde{b}_j(v)\varepsilon_t(\tilde{\theta})] X_{t-j}$. La fonction $\phi_{t-1}(\tilde{\theta})$ est indépendante de ε_t . Alors :

$$E \left[\varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right] = E \left[\phi_{t-1}^2(\tilde{\theta}) \right] + E \left[\varepsilon_t^2 \right] \geq \delta^2.$$

Donc : $E \left[\varepsilon_t^2(\tilde{\theta}) \right] = \delta^2$ ssi $P \left(\phi_{t-1}(\tilde{\theta}) = 0 \right) = 1$. Or : $\phi_{t-1}(\tilde{\theta}) = \left[\tilde{b}_1(t) - b_1(t) \right] \varepsilon_{t-1}^2 + A\varepsilon_{t-1} + B$, où :

$$\begin{aligned} A &= \tilde{a}_1(t) - a_1(t) - \left[\tilde{b}_1(t) - b_1(t) \right] \left(\sum_{i=1}^p [a_i(t) + b_i(t)\varepsilon_{t-2}] X_{t-1-i} \right) \\ &\quad - \tilde{b}_1(t)\phi_{t-2}(\tilde{\theta}) - \sum_{i=2}^p \left[\tilde{b}_i(t) - b_i(t) \right] X_{t-i}, \\ B &= - \left[\tilde{a}_1(t) - a_1(t) + \tilde{b}_1(t)\phi_{t-2}(\tilde{\theta}) \right] \sum_{i=1}^p [a_i(t-1) - b_i(t-1)\varepsilon_{t-2}] X_{t-1-i} \\ &\quad - \sum_{i=2}^p \left[\tilde{a}_i(t) - a_i(t) + \tilde{b}_i(t)\phi_{t-2}(\tilde{\theta}) \right] X_{t-i}. \end{aligned}$$

On remarque que les fonctions A et B sont indépendantes de ε_{t-1} . D'après le théorème de Fubini, on a :

$$P \left(\phi_{t-1}(\tilde{\theta}) = 0 \right) = \int P \left[\left(b_1(t) - \tilde{b}_1(t) \right) \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta = 0 \right] dP_{A,B}(\alpha, \beta)$$

où $P_{A,B}$ est la distribution conjointe des fonctions A et B . En utilisant l'hypothèse **A2**, on a :

$$P \left[\left(b_1(t) - \tilde{b}_1(t) \right) \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta = 0 \right] < 1$$

sauf si $b_1(t) - \tilde{b}_1(t) = \alpha = \beta = 0$. Alors $P \left(\phi_{t-1}(\tilde{\theta}) = 0 \right) < 1$ sauf si $b_1(t) = \tilde{b}_1(t)$ et $A = B = 0$ p.s. Si on répète cet argument, on trouve $\tilde{\theta} = \underline{\theta}$. La preuve du lemme (5.7) est complète. ■

Preuve. (Du théorème) sous (5.4), la condition (i) du lemme (5.3) est satisfaite, alors il suffit de vérifier (ii).

D'après les lemmes (5.5), (5.6) et (5.7), on obtient : pour $\hat{\theta} \in \Theta$ et $\hat{\theta} \neq \underline{\theta}_0$, il existe un voisinage de $\hat{\theta}$ tel que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{\theta} \in U(\hat{\theta})} V_n(\tilde{\theta}) > \sigma^2 \quad p.s.$$

Or d'après le théorème d'ergodicité : $V_n(\underline{\theta}) \rightarrow \sigma^2$ p.s.; d'où le résultat. ■

Exemple 5.8 (Théorème de G. Wittewer (1989) ([62])). Soit le modèle $BL(p, 0, p, 1)$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^p b_j X_{t-j} \varepsilon_{t-1}$$

Sous **A2** et si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au second ordre et ergodique. Alors, si $\underline{\theta} \in E \ln \left\{ \left| \sum_{j=1}^p b_j X_{t-j} \right| \right\} + 2\delta \leq 0$, on a, l'estimateur LSE $\hat{\theta}$ converge presque sûrement.

Remarque 5.9 C'est le même résultat de Pham et Tran (1981) ([46]) dans le cas $BL(1, 0, 1, 1)$ c-à-d que pour $s = 1$; la condition d'invisibilité est $|\tilde{b}| < \exp \{-E \log |X_t|\}$ avec :

$$\Theta_n = \left\{ (a, b) : |\hat{a}| \leq 1, |\tilde{b}| \leq \left| \prod_{t=1}^n X_t \right|^{\frac{-1}{n}} - \delta \right\}, \quad (5.10)$$

et :

$$\tilde{\Theta} = \left\{ (a, b) : |\hat{a}| \leq 1, |\tilde{b}| < \exp \{-E |X_t|\} - \frac{\delta}{2} \right\}. \quad (5.11)$$

La condition est réduite à :

$$|\tilde{b}| < \exp \{-E |X_t|\} - 2\delta. \quad (5.12)$$

D'après le théorème (4.1) de Pham et Tran ([46]) si (5.12) est vérifiée, alors l'estimateur LSE $\hat{\theta}$, qui minimise la somme de carrés $V_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\theta|z_0)$ est fortement consistant.

5.4 Normalité asymptotique

Pour étudier la normalité asymptotique, on s'intéresse à la classe des processus définie par le modèle $PBL(0, 0, 1, 1)$ (5.1). Supposons que la condition d'inversibilité (5.4) est vérifiée.

Posons :

$$S_n(\underline{\theta}) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\underline{\theta}). \quad (5.13)$$

Donc, d'après la section (5.3), $\hat{\underline{\theta}}$ est un estimateur LSE de $\underline{\theta}_0$. Pour obtenir la normalité asymptotique de $\hat{\underline{\theta}}$, nous avons besoin d'ajouter les hypothèses suivantes :

A3 : Le paramètre vrai $\underline{\theta}_0$ satisfait :

$$\begin{aligned} E \left| \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right| &< +\infty, \\ E \left\| \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right\| &< +\infty. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Comme d'habitude, nous avons, pour toute estimateur LSE $\hat{\underline{\theta}}$,

$$0 = \sqrt{n} \left(\frac{\partial V_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \sqrt{n} \left(\frac{\partial V_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_n} + \left(\frac{\partial^2 V_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^*} \sqrt{n} (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0), \quad (5.15)$$

où $\underline{\theta}^* = \underline{\theta}_0 + \lambda (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

Lemme 5.10 on a :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial V_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} - \left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right\| &= o(1) \quad p.s. \\ \left\| \left(\frac{\partial^2 V_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} - \left(\frac{\partial^2 S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right\| &= o(1) \quad p.s. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sous les conditions du théorème (5.2), l'estimateur $\hat{\underline{\theta}}_n$ converge *p.s* vers le paramètre $\underline{\theta}_0$.

Ainsi, pour n grand, (5.15) est asymptotiquement équivalente à :

$$\left(\frac{\partial^2 S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \sqrt{n} (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0) = -\sqrt{n} \left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \quad (5.17)$$

Lemme 5.11 Sous l'hypothèse **A3**, on a :

$$\sqrt{n} \left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 4\sigma^2 \mathbf{I}), \quad (5.18)$$

avec :

$$\mathbf{I} = \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right].$$

Preuve. On a :

$$\left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t.$$

Maintenant, si $\underline{\alpha}$ est un vecteur de dimension $2sp$, alors, on a :

$$E \left[\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0,$$

ceci montre que $\left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t, t \geq 1 \right)$ est une différence de martingale (par rapport à la filtration \mathcal{F}_t) de carré intégrable, et on a :

$$1. \quad E \left[\left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right)^2 \right] = \underline{\alpha}' \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \underline{\alpha}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma^2 \underline{\alpha}' E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \underline{\alpha} \\ &= \underline{\alpha}' \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \underline{\alpha} > 0. \end{aligned}$$

$$2. \quad E \left| \underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right|^r = E \left| \underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right|^r E |\varepsilon_t|^r < +\infty \quad \text{pour } r > 2 \text{ et tout } t,$$

$$3. \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right)^2 \right] \rightarrow E \left[\left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right) \left(\varepsilon_t \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \underline{\alpha} \right) \right] = \underline{\alpha}' \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \underline{\alpha}$$

Donc, d'après le TCL pour les différences des martingales,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right)$$

converge vers une loi normale de moyenne nulle et de variance :

$$E \left[\left(\underline{\alpha}' \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t \right)^2 \right] = \underline{\alpha}' \left\{ \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \right\} \underline{\alpha}$$

pour tout $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{2sp}$, donc $\sqrt{n} \left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t$ converge vers une loi normale multidimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance :

$$4\sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right],$$

d'où le résultat. ■

Lemme 5.12 *Sous l'hypothèse **A3**, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial^2 S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} = 2\mathbf{J} \quad (5.19)$$

avec : $\mathbf{J} = E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right]$.

Preuve. On a :

$$\left(\frac{\partial^2 S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \varepsilon_t + \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right].$$

Puisque ε_t sont i.i.d et ε_t et $\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0}$ sont indépendantes et d'après le théorème d'ergodicité, on en déduit le résultat. ■

Théorème 5.13 *Sous les hypothèses du théorème (5. 2) et **A3**, lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a :*

$$\sqrt{n} \left[\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0 \right] \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{J}^{-1}). \quad (5.20)$$

Preuve. On a d'après (5.17) :

$$\sqrt{n} \left[\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0 \right] = - \left[\left(\frac{\partial^2 S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right]^{-1} \sqrt{n} \left(\frac{\partial S_n(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0}$$

Or, d'après (5.18) et (5.19), et d'après théorème de Slutsky $\sqrt{n} \left[\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}_0 \right]$ converge vers une loi normale multivariable de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{J}^{-1} \\ = & E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right]^{-1} \left\{ \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right] \right\} \\ & E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right]^{-1} \\ = & \sigma^2 E \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \right)'_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la preuve est complète. ■

Exemple 5.14 *C'est le même résultat de Jian Lwi([38]) dans le cas $BL(1, 0, 1, 1)$ c-à-d que pour $s = 1$; la condition d'invisibilité est :*

$$\left| \tilde{b} \right| \leq \exp \{ -E \log |X_t| \} - 2\delta \quad (5.21)$$

avec les ensembles Θ_n et $\tilde{\Theta}$ donnés par :

$$\Theta_n = \left\{ \theta : |\theta| \leq \prod_{t=0}^{n-1} |X_t|^{\frac{-1}{n}} - \delta \right\}, \quad (5.22)$$

et : $\tilde{\Theta} = \left\{ \theta : |\theta| \leq \exp E \left\{ -\ln |X_t| \right\} - \frac{\delta}{2} \right\}$. L'hypothèse **A3** est réduite à : $E |\varepsilon'_t(\theta_0)|^2 < +\infty$ et $E |\varepsilon''_t(\theta_0)| < +\infty$. Où les signes (') et ('') désignent les dérivées première et seconde par rapport à θ_0 . Alors, d'après le théorème 4.2 de Jian Lwi([38]) si (5.21) est vérifiée, alors l'estimateur LSE $\hat{\theta}$, qui minimise la somme des carrés $V_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\theta|z_0)$ satisfait : $\sqrt{n} [\hat{\theta} - \theta_0] \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{E|\varepsilon'_t(\theta_0)|^2})$.

Chapitre 6

SIMULATION

6.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre, la partie pratique de la modélisation à travers des simulations des trajectoires de chacun des (2) modèles considérés. Pour réaliser cet objectif, nous utilisons le logiciel MATLAB 7.9 2009 . A chaque modèle correspond (3) tableaux présentant les résultats de 1000 trajectoires simulées de longueur $N=100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000$, concernant les différentes valeurs données aux paramètres à estimer par la méthode des moindres carrés. Pour un paramètre donné a , la colonne « Mean » indique la moyenne des estimateurs \hat{a}_N , qui doit s'approche de la vraie valeur notée « VV » de a . Ensuite, nous espérons que l'intervalle de confiance de \hat{a}_N , constitué par les colonnes « Min » et « Max », soit petit pour que la précision soit meilleure. De plus, la moyenne des $var(\hat{a}_N)^{\frac{1}{2}}$ sur les 1000 répétitions, notée $RMSE^*$, est comparée avec la racine de la moyenne de $(a - \hat{a}_N)^2$ sur les 1000 répétitions, notée $RMSE$.

6.2 Description des modèles

Nous allons utiliser (2) modèles bilinéaires périodiques de période $s = 2$, générés par les équations suivantes :

$$X_t = a_t(\underline{\theta})X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.1)$$

$$X_t = a_t(\underline{\theta})X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.2)$$

Où $\underline{\theta}$ est le vecteur des paramètres à estimer et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien $N(0,$

1).

6.2.1 Modèle PBL(0, 0, 1, 1)

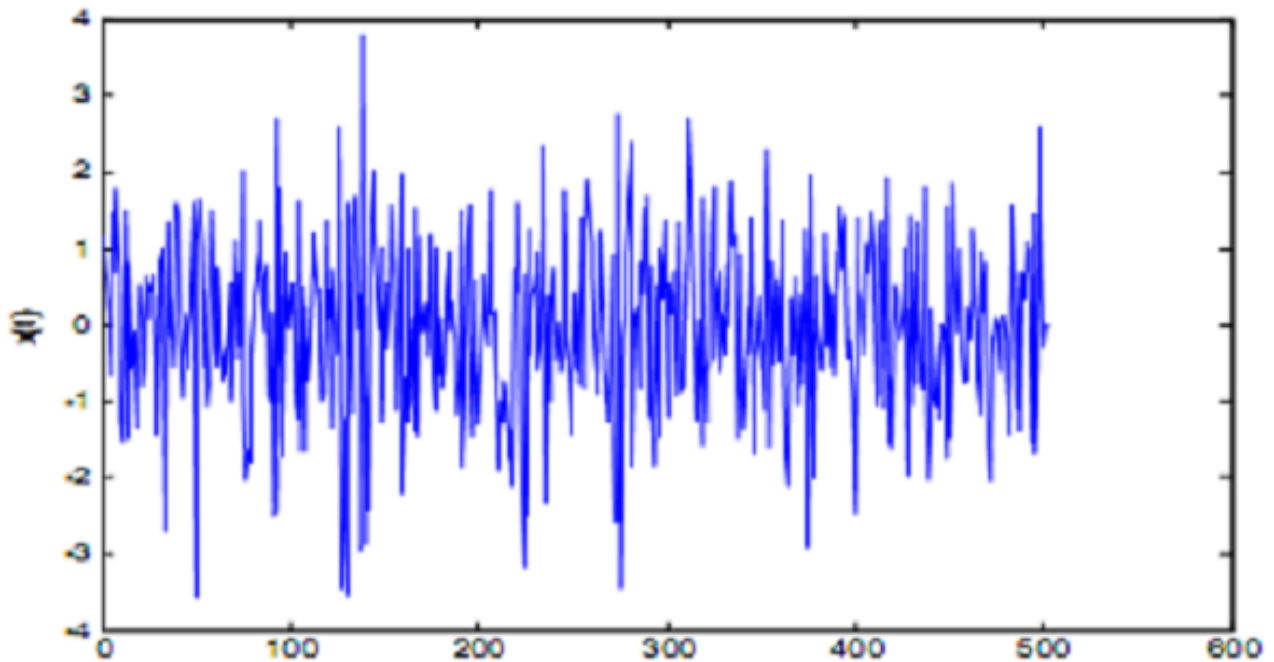
Soit $v = t - 2 \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor$, $t = 1, 2, \dots, N$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). Le coefficient a correspondant au modèle (6.1) varie en fonction du temps sous la forme suivante :

$$a_t(\underline{\theta}) = \begin{cases} a_1 & \text{si } v = 1 \\ a_2 & \text{si } v = 2 \end{cases},$$

où $\underline{\theta} = (a_1, a_2)$. Alors, notre modèle périodique initial peut se décomposer en 2 sous modèles bilinéaires à coefficients constants d'ordre $(0, 0, 1, 1)$ à coefficients respectifs constants a_1, a_2 :

$$X_t = \begin{cases} a_1 X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } v = 1 \\ a_2 X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } v = 2 \end{cases}.$$

Une réalisation de longueur $N = 250$ avec $a_1 = 0.2500$ et $a_2 = -0.4500$ est présente par la figure (F.g6.1)



(F.g 6.1)

F.g6.1 - Trajectoire de longueurs $N = 500$ du modèle $PBL(0, 0, 1, 1)$

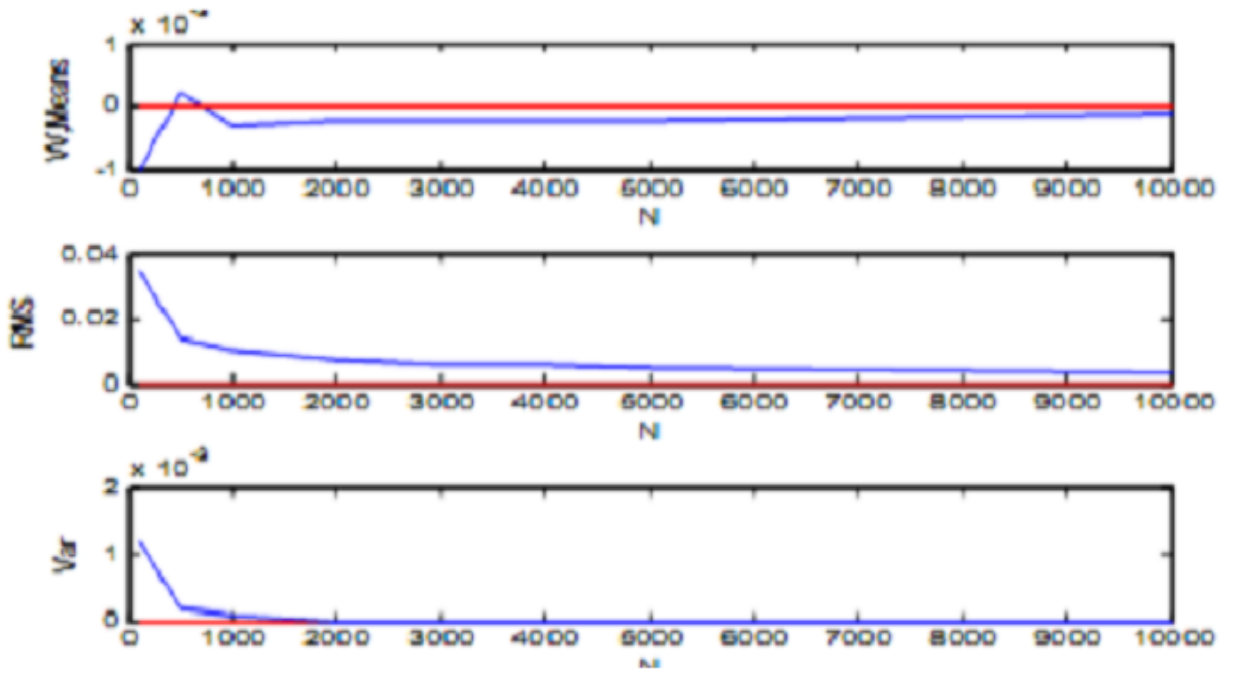
Le résultats de ce modèle sont portés dans les tables (*Table – 6.1–*)-(*Table – 6.3–*).

N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	0.0000	-0.1341	0.1032	-0.0010	0.0012	0.0352	0.0352
	0.9500	0.7080	1.1984	0.9554	0.0042	0.0649	0.0651
500	0.0000	-0.0453	0.0401	0.0002	0.0002	0.0139	0.0139
	0.9500	0.8699	1.0322	0.9510	0.0007	0.0259	0.0259
1000	0.0000	-0.0312	0.0359	-0.0003	0.0001	0.0101	0.0101
	0.9500	0.9000	1.0014	0.9502	0.0002	0.0183	0.0183
2000	0.0000	-0.0247	0.0202	-0.0002	0.0000	0.0069	0.0069
	0.9500	0.9052	0.9970	0.9501	0.0002	0.0129	0.0129
3000	0.0000	-0.0181	0.0188	-0.0002	0.0000	0.0057	0.0057
	0.9500	0.9140	0.9878	0.9502	0.0001	0.0107	0.0106
4000	0.0000	-0.0149	0.0183	-0.0002	0.0000	0.0049	0.0057
	0.9500	0.9208	0.9816	0.9502	0.0001	0.0092	0.0073
5000	0.0000	-0.0135	0.0141	-0.0002	0.0000	0.0043	0.0043
	0.9500	0.9221	0.9770	0.9502	0.0001	0.0082	0.0082
10000	0.0000	-0.0103	0.0092	-0.0002	0.0000	0.0031	0.0031
	0.9500	0.9277	0.9685	0.9501	0.0000	0.0057	0.0057

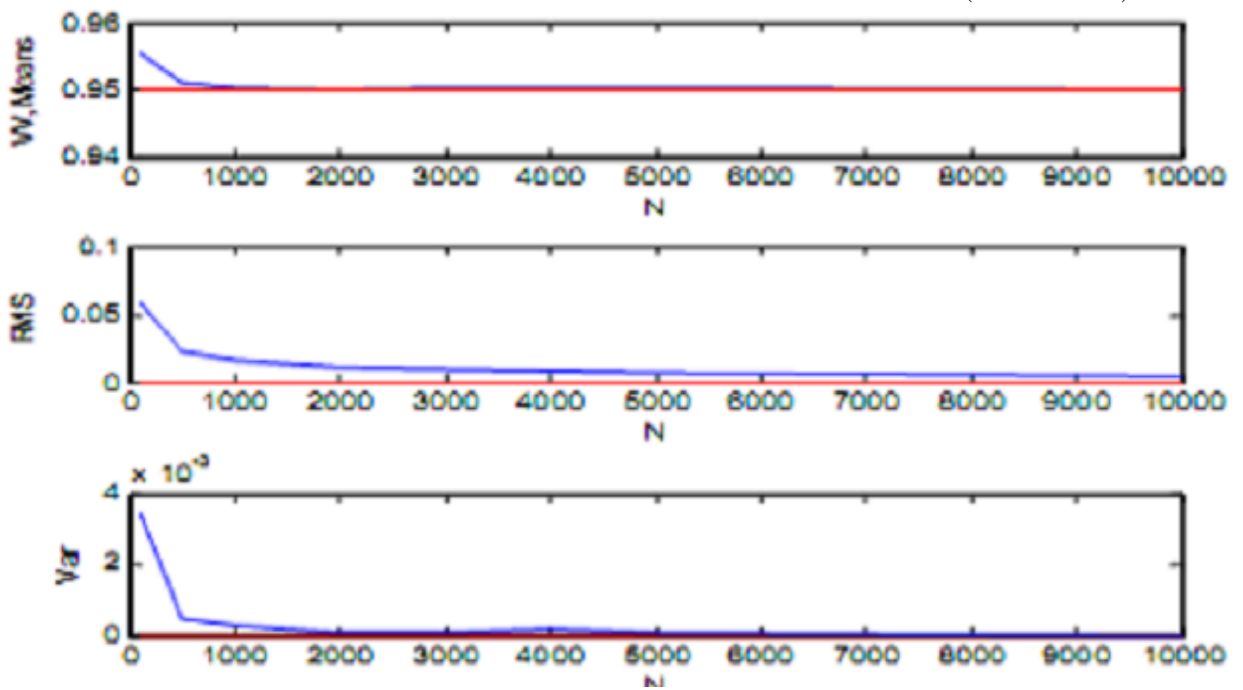
(Table - 6.1 -)

Table - 6.1 - LSE du modèle $PBL(0, 0, 1, 1)$

avec : $a_1 = 0.0000$ et $a_2 = 0.9500$.



($VV=0.0000$)

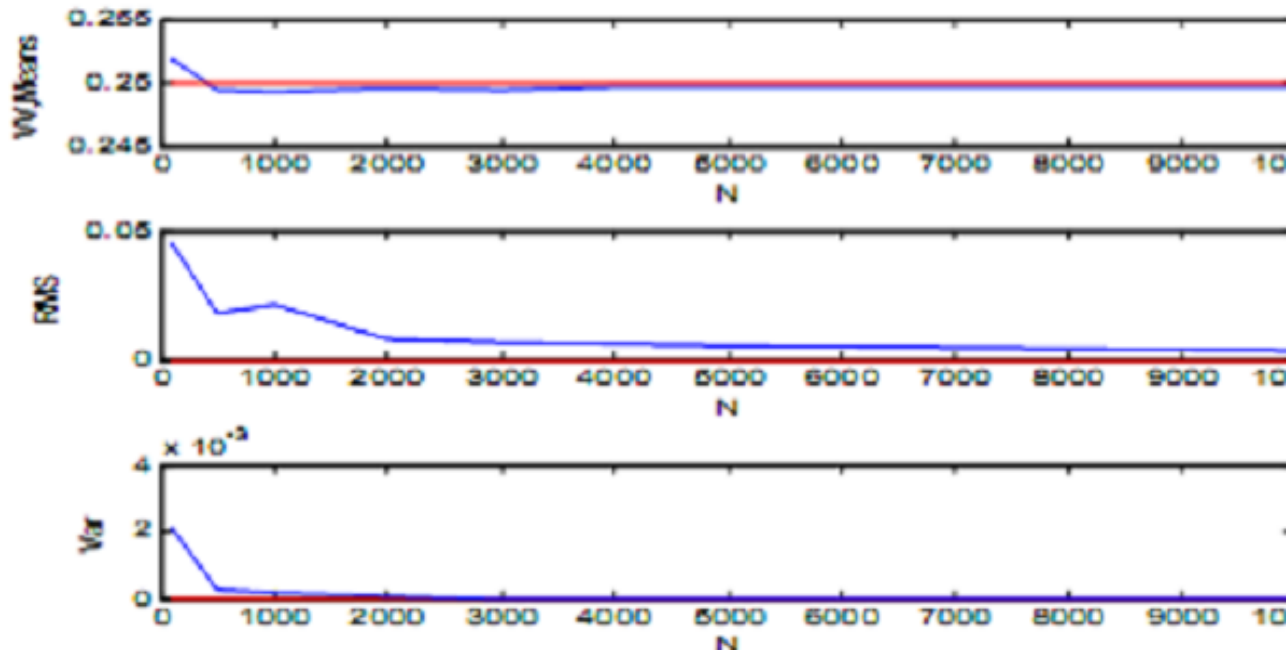


($VV=0.9500$)

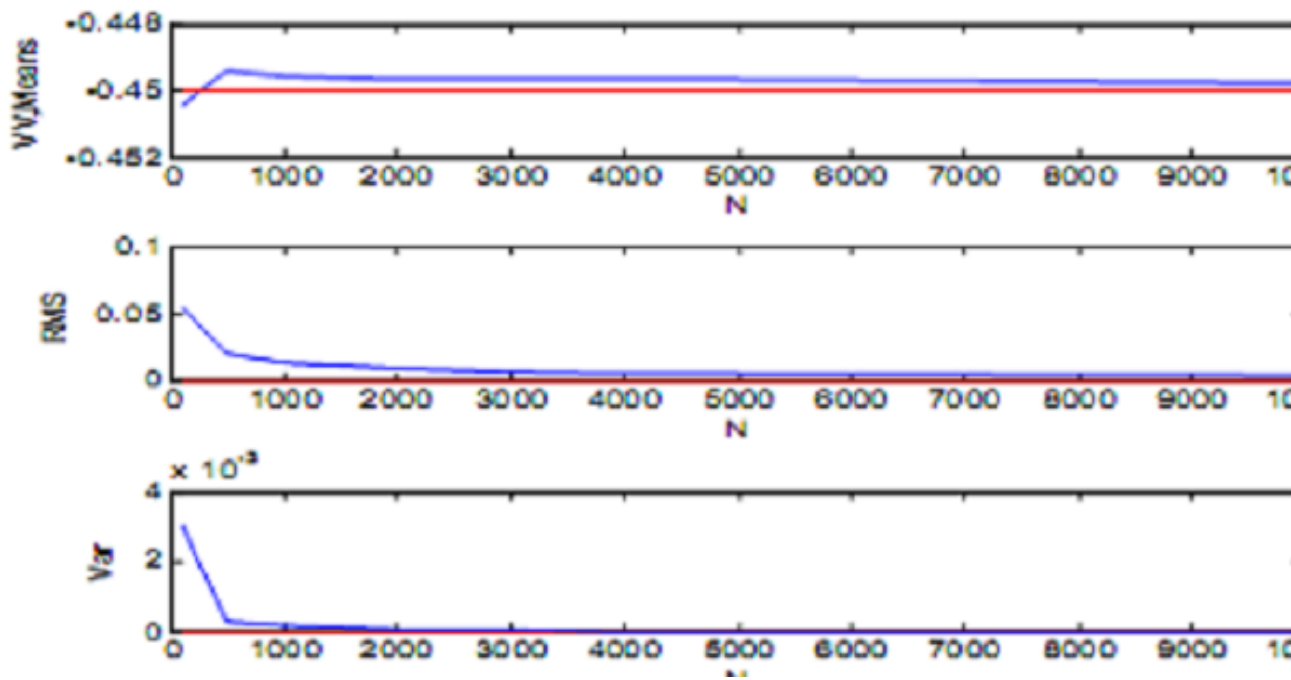
N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	0.2500	-0.0402	0.4470	0.2519	0.0021	0.0453	0.0453
	-0.4500	-0.6488	-0.2301	-0.4504	0.0030	0.0544	0.0544
500	0.2500	0.1634	0.3070	0.2495	0.0003	0.0184	0.0184
	-0.4500	-0.5109	-0.2955	-0.4494	0.0003	0.0207	0.0207
1000	0.2500	0.1810	0.2903	0.2493	0.0002	0.0215	0.0215
	-0.4500	-0.4970	-0.3550	-0.4496	0.0002	0.0143	0.0143
2000	0.2500	0.2011	0.2713	0.2496	0.0001	0.0085	0.0085
	-0.4500	-0.4746	-0.3744	-0.9497	0.0001	0.0096	0.0096
3000	0.2500	0.2148	0.2690	0.2495	0.0000	0.0070	0.0070
	-0.4500	-0.4710	-0.3960	-0.4497	0.0001	0.0077	0.0077
4000	0.2500	0.2232	0.2672	0.2497	0.0000	0.0060	0.0060
	-0.4500	-0.4713	-0.4085	-0.4497	0.0002	0.0065	0.0065
5000	0.2500	0.2245	0.2668	0.2497	0.0000	0.0054	0.0054
	-0.4500	-0.4670	-0.4172	0.4497	0.0000	0.0059	0.0059
10000	0.2500	0.2361	0.2607	0.2498	0.0000	0.0038	0.0038
	-0.4500	-0.4631	-0.4295	-0.4498	0.0000	0.0043	0.0043

(Table - 6.2 -)

Table - 6.2 - LSE de modèle $PBL(0, 0, 1, 1)$ avec : $a_1 = 0.2500$ et $a_2 = -0.4500$.



(VV=0.2500)

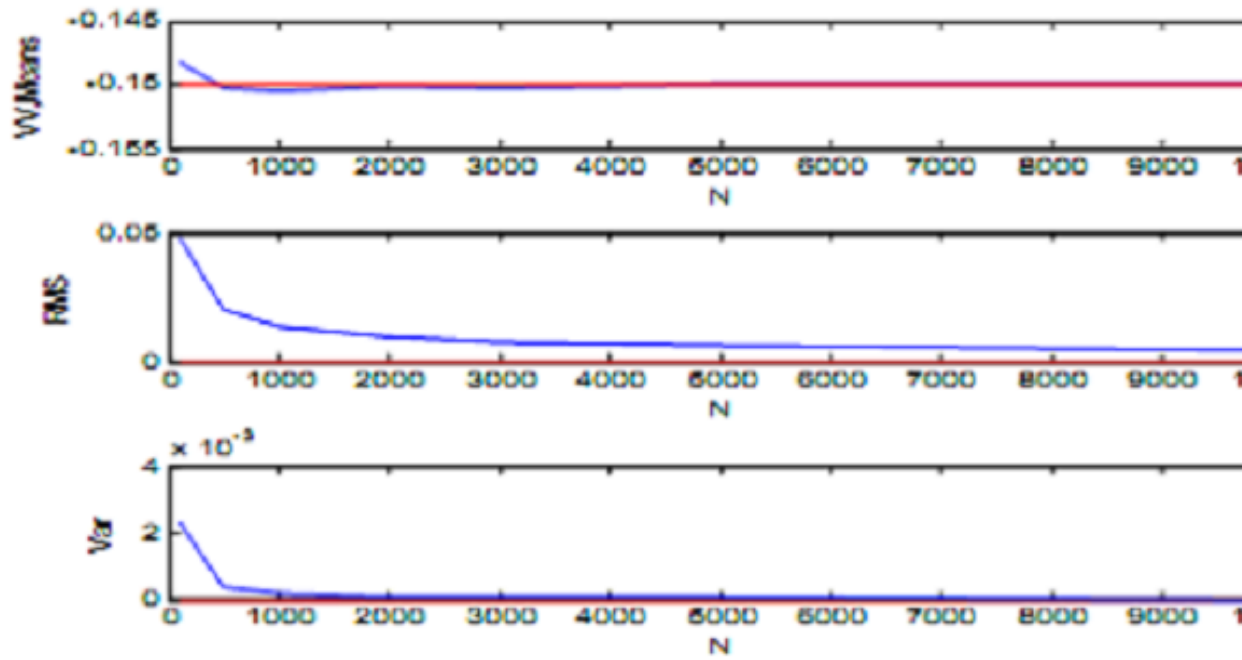


(VV=0.-4500)

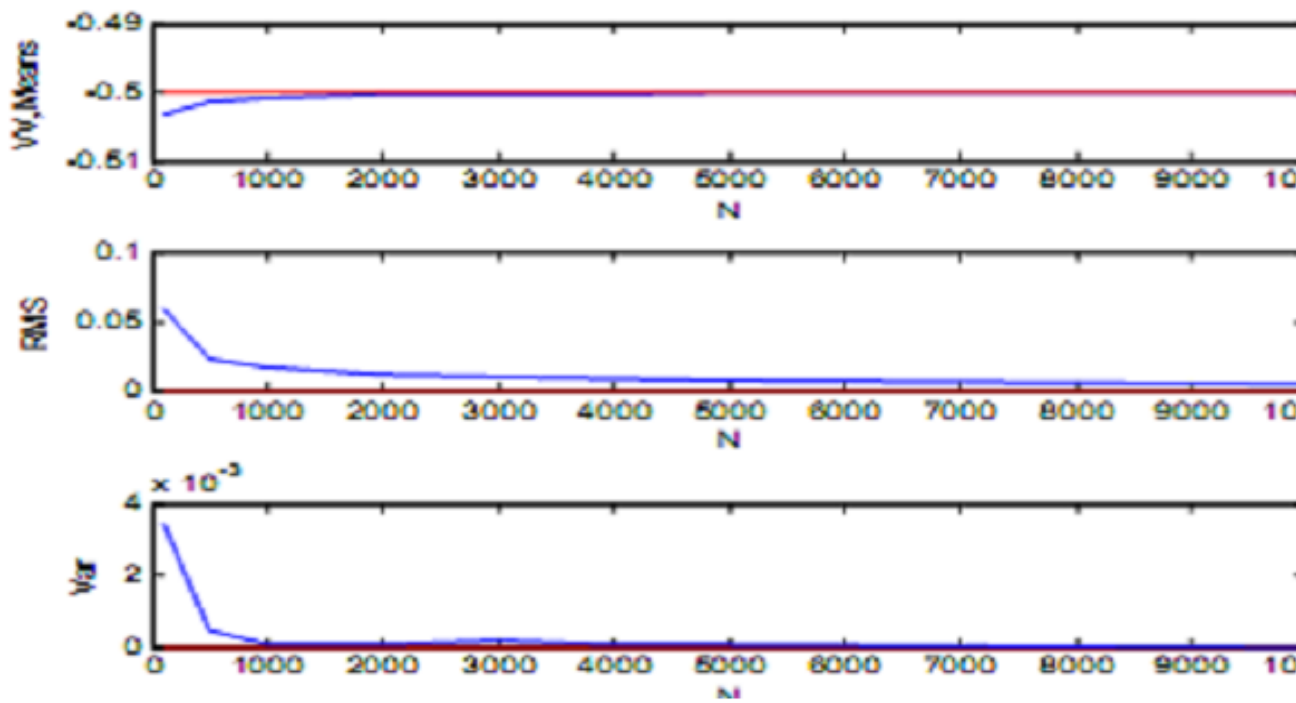
N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	-0.1500	-0.2861	0.0152	-0.1483	0.0023	0.0478	0.0478
	-0.5000	-0.7027	-0.2914	-0.5033	0.0034	0.0586	0.0586
500	-0.1500	-0.2153	-0.0799	-0.1502	0.0004	0.0199	0.0199
	-0.5000	-0.5717	-0.4268	-0.5014	0.0005	0.0234	0.0234
1000	-0.1500	-0.1978	-0.1087	-0.1505	0.0002	0.0133	0.0133
	-0.5000	-0.5652	-0.4515	-0.5009	0.0003	0.0164	0.0164
2000	-0.1500	-0.1809	-0.1172	-0.1501	0.0001	0.0094	0.0094
	-0.5000	-0.5498	-0.4574	-0.5004	0.0001	0.0117	0.0117
3000	-0.1500	-0.1758	-0.1249	-0.1503	0.0001	0.0078	0.0078
	-0.5000	-0.5327	-0.4648	-0.5002	0.0001	0.0095	0.0095
4000	-0.1500	-0.1693	-0.1284	-0.1501	0.0001	0.0067	0.0067
	-0.5000	-0.5260	-0.4720	-0.5002	0.0002	0.0082	0.0082
5000	-0.1500	-0.1671	-0.1329	-0.1500	0.0001	0.0060	0.0060
	-0.5000	-0.5285	-0.4780	-0.5001	0.0001	0.0072	0.0071
10000	-0.1500	-0.1635	-0.1371	-0.1500	0.0000	0.0042	0.0042
	-0.5000	-0.5209	-0.4841	-0.4999	0.0000	0.0049	0.0049

(Table - 6.3 -)

Table - 6.3 - LSE de modèle $PBL(0, 0, 1, 1)$ avec : $a_1 = -0.1500$ et $a_2 = -0.5000$.



($VV = -0.1500$)



($VV = -0.5000$)

6.2.2 Modèle PBL(0, 0, 2, 1)

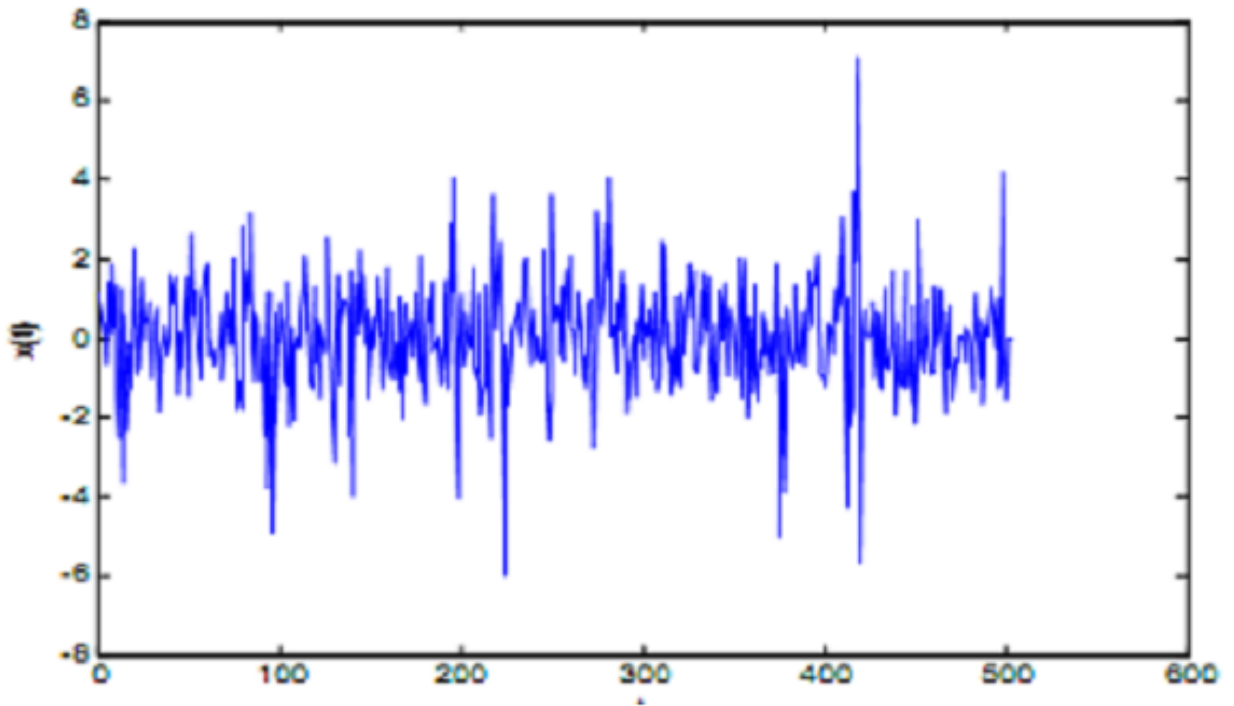
Soit $t = t - 2 \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor$, $t = 1, 2, \dots, N$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). Le coefficient a correspondant au modèle (6.2) varie en fonction du temps sous la forme suivante :

$$a_t(\underline{\theta}) = \begin{cases} a_1 & \text{si } v = 1 \\ a_2 & \text{si } v = 2 \end{cases},$$

où $\underline{\theta} = (a_1, a_2)$. Alors, notre modèle périodique initial peut se décomposer en 2 sous modèles bilinéaires d'ordre $(0, 0, 1, 1)$ à coefficients respectifs constants a_1, a_2 :

$$X_t = \begin{cases} a_1 X_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } v = 1 \\ a_2 X_{t-2} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } v = 2 \end{cases}.$$

La figure (F.g6.2) présente la simulation d'une trajectoire de taille $N = 250$ avec $a_1 = 0.0000$ et $a_2 = 0.9500$ du modèle $PBL(0, 0, 2, 1)$



(F.g 6.2)

F.g.6.1 - Trajectoire de longueur N=250 du modèle $PBL(0, 0, 2, 1)$

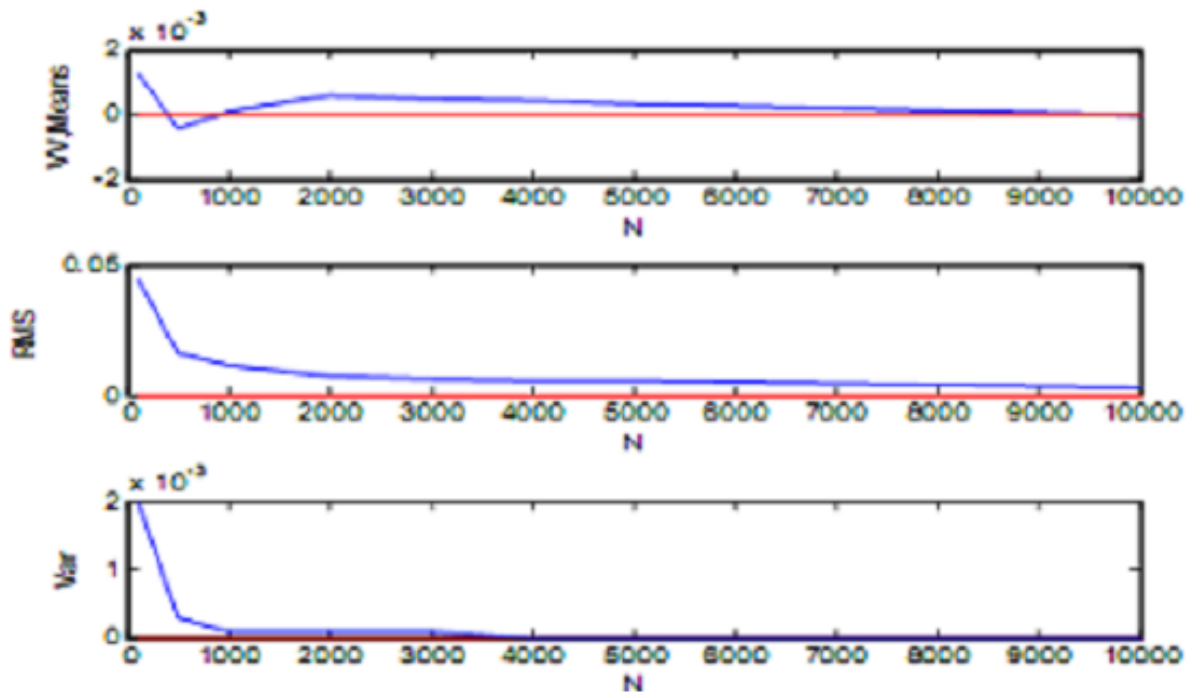
Le résultats de ce modèle sont portés dans les tables (*Table – 6.4–*) – (*Table – 6.6–*)

N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	0.0000	- 0.1677	0.1814	0.0013	0.0020	0.0445	0.0445
	0.9500	0.6444	1.1635	0.9440	0.0044	0.0661	0.0663
500	0.0000	-0.0562	0.1345	-0.0004	0.0003	0.0158	0.0158
	0.9500	0.8796	1.0130	0.9486	0.0005	0.0213	0.0213
1000	0.0000	-0.0609	0.0844	0.0001	0.0001	0.0112	0.0112
	0.9500	0.8207	1.0244	0.9491	0.0002	0.0153	0.0154
2000	0.0000	-0.0215	0.0981	0.0006	0.0001	0.0075	0.0075
	0.9500	0.9081	1.0180	0.9495	0.0002	0.0102	0.0102
3000	0.0000	-0.0308	0.0727	0.0005	0.0001	0.0063	0.0063
	0.9500	0.7834	0.9942	0.9494	0.0000	0.0102	0.0102
4000	0.0000	-0.0131	0.0838	0.0004	0.0000	0.0057	0.0057
	0.9500	0.9094	1.0054	0.9498	0.0001	0.0073	0.0073
5000	0.0000	- 0.0114	0.0838	0.0003	0.0000	0.0056	0.0056
	0.9500	0.8765	1.0020	0.9498	0.0000	0.0066	0.0066
10000	0.0000	-0.0290	0.0342	0.0000	0.0000	0.0028	0.0028
	0.9500	0.8489	0.9604	0.9498	0.0000	0.0051	0.0051

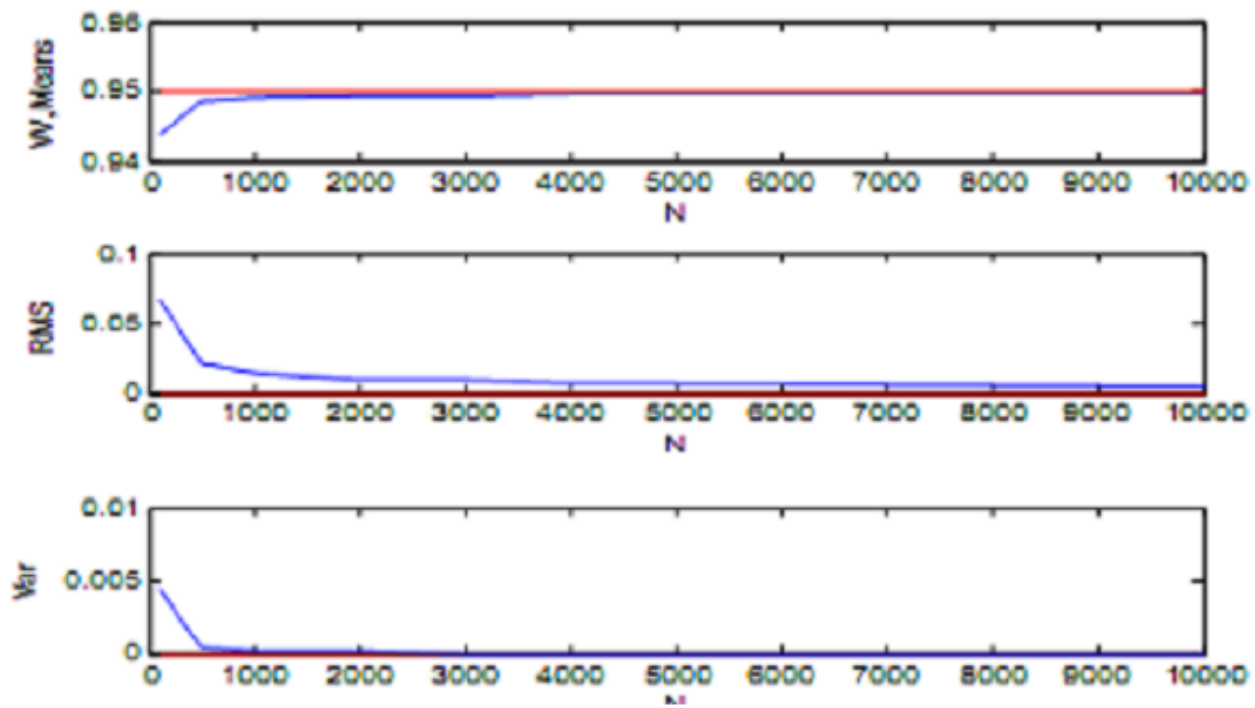
(Table - 6.4 -)

Table - 6.4 - LSE du modèle $PBL(0, 0, 2, 1)$

avec : $a_1 = 0.0000$ et $a_2 = 0.9500$.



(VV=0.0000)

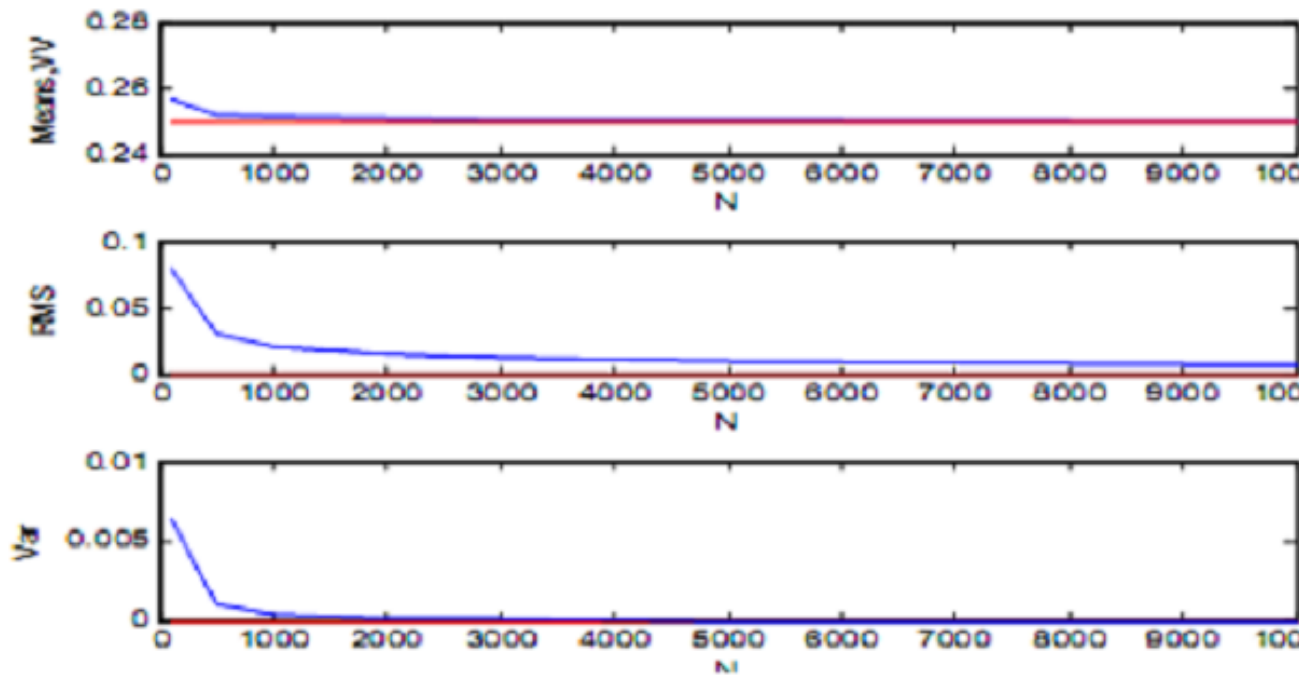


(VV=0.9500)

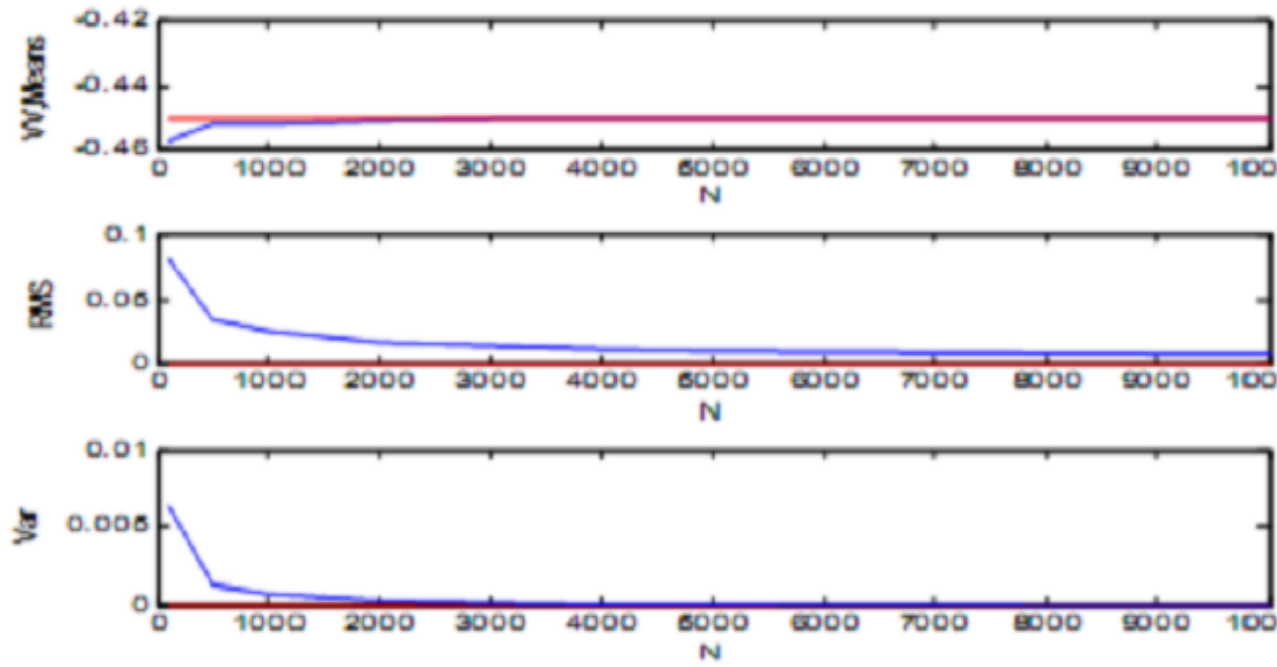
N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	0.2500	-0.1233	0.4431	0.2566	0.0064	0.0800	0.0802
	-0.4500	-0.7538	-0.2113	-0.4570	0.0066	0.0815	0.0817
500	0.2500	0.1437	0.3476	0.2522	0.0010	0.0310	0.0311
	-0.4500	-0.5481	-0.3165	-0.4516	0.0013	0.0354	0.0354
1000	0.2500	0.1901	0.3100	0.2516	0.0004	0.0207	0.0207
	-0.4500	-0.5385	-0.3737	-0.4516	0.0007	0.0256	0.0256
2000	0.2500	0.2043	0.2962	0.2511	0.0002	0.0150	0.0151
	-0.4500	-0.5034	-0.3982	-0.4508	0.0003	0.0171	0.0171
3000	0.2500	0.2082	0.2850	0.2504	0.0002	0.0124	0.0124
	-0.4500	-0.5032	-0.3995	-0.4500	0.0002	0.0141	0.0140
4000	0.2500	0.2174	0.2774	0.2503	0.0001	0.0060	0.0106
	-0.4500	-0.4887	0.4025	-0.4499	0.0001	0.0117	0.0117
5000	0.2500	0.2207	0.2774	0.2502	0.0001	0.0096	0.0096
	-0.4500	-0.4823	-0.4162	-0.4499	0.0001	0.0101	0.0101
10000	0.2500	0.2291	0.2732	0.2499	0.0000	0.0070	0.0070
	-0.4500	-0.4715	-0.4306	-0.4500	0.0000	0.0070	0.0070

(Table - 6.5 -)

Table - 6.5 - LSE de modèle $PBL(0, 0, 2, 1)$ avec : $a_1 = 0.2500$ et $a_2 = -0.4500$.



(VV=0.2500)

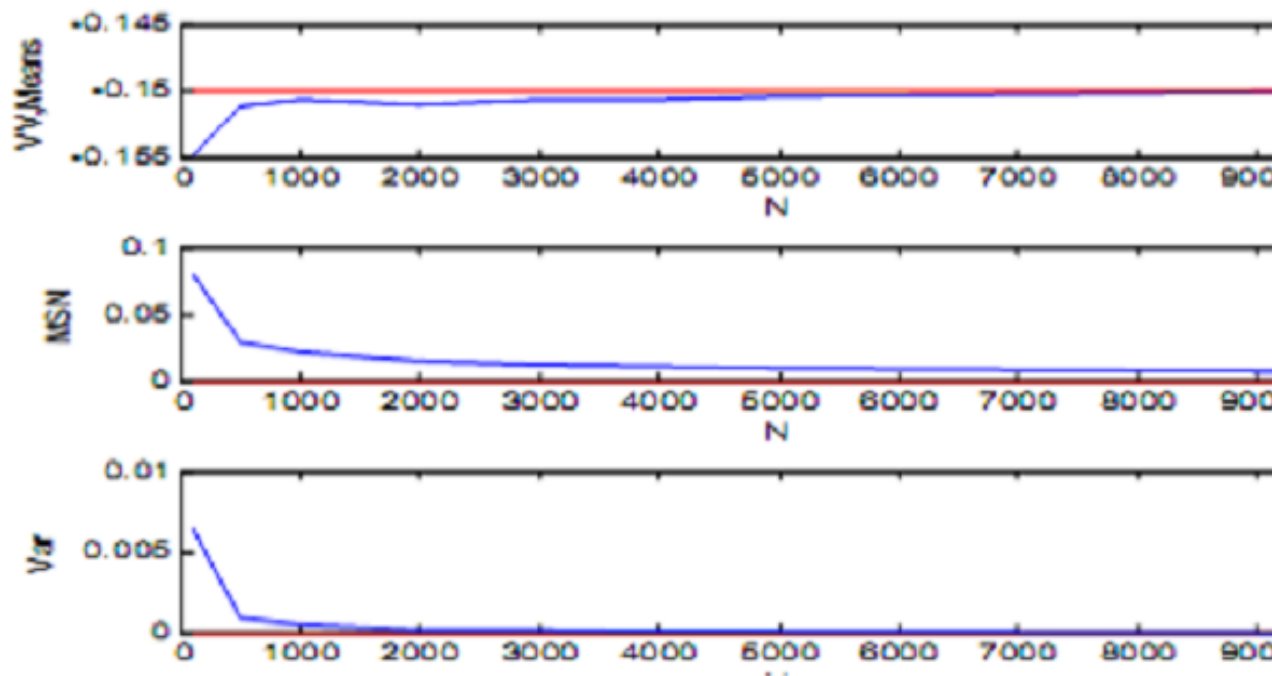


(VV=-0.4500)

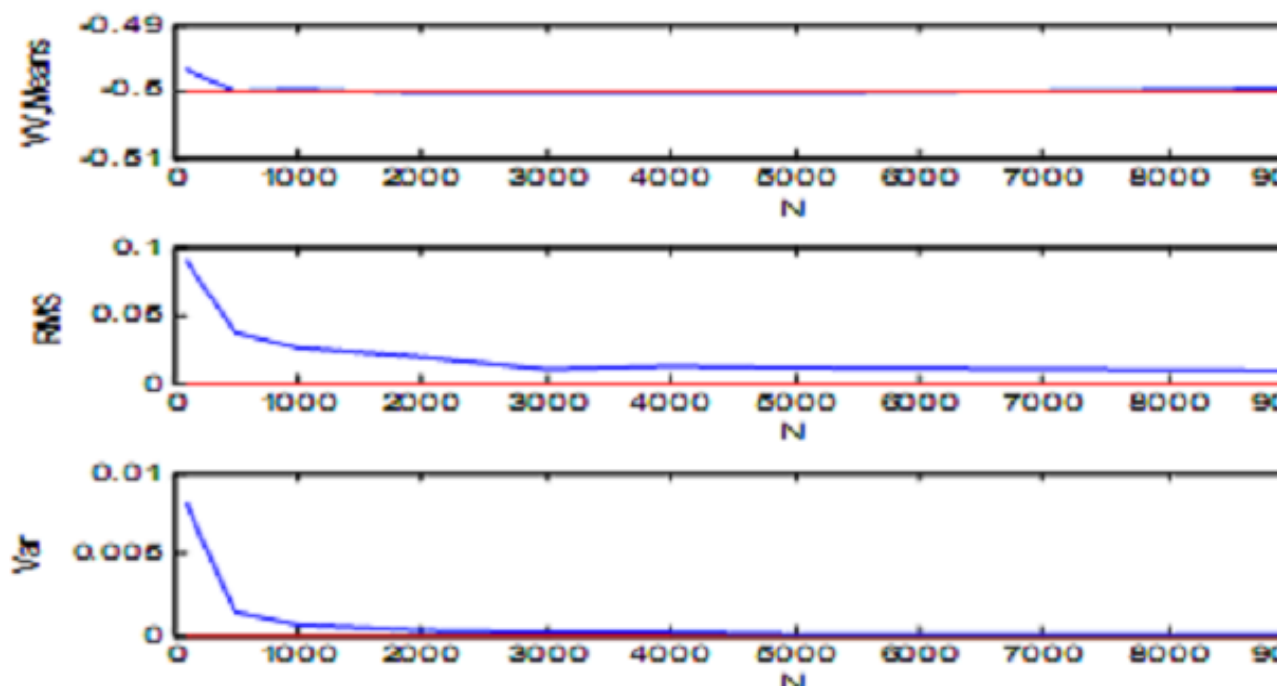
N	V.V	Min	Max	Mean	Var	RMS*	RMS
100	-0.1500	-0.6291	0.2009	-0.1548	0.0064	0.0798	0.0799
	-0.5000	-0.7720	-0.1783	-0.4968	0.0081	0.0899	0.0900
500	-0.1500	-0.2449	-0.0603	-0.1512	0.0009	0.0301	0.0301
	-0.5000	-0.6260	-0.3703	-0.5001	0.0014	0.0368	0.0369
1000	-0.1500	-0.2245	-0.0740	-0.1506	0.0005	0.0216	0.0216
	-0.5000	-0.6033	-0.4304	-0.4998	0.0006	0.0254	0.0254
2000	-0.1500	-0.1920	-0.1054	-0.1511	0.0002	0.0148	0.0148
	-0.5000	-0.5534	-0.4372	-0.5003	0.0003	0.0185	0.0185
3000	-0.1500	-0.1825	-0.1098	-0.1507	0.0002	0.0121	0.0121
	-0.5000	-0.5491	-0.4561	-0.5002	0.0002	0.0150	0.0102
4000	-0.1500	-0.1796	-0.1125	-0.1506	0.0001	0.0108	0.0109
	-0.5000	-0.5408	-0.4557	-0.5004	0.0002	0.0126	0.0126
5000	-0.1500	-0.1784	-0.1142	-0.1504	0.0001	0.0097	0.0097
	-0.5000	-0.5403	-0.4583	-0.5003	0.0001	0.0113	0.0113
10000	-0.1500	-0.1750	-0.1258	-0.1500	0.0000	0.0070	0.0070
	-0.5000	-0.5235	-0.4740	-0.4994	0.0001	0.0081	0.0081

(Table - 6.6 -)

Table - 6.4 - LSE du modèle $PBL(0, 0, 2, 1)$ avec : $a_1 = -0.1500$ et $a_2 = -0.5000$.



($VV = -0.1500$)



($VV = -0.5000$)

6.3 Commentaires

D'après les résultats empiriques qui sont reportés dans les tableaux 6.1 - 6.6, on déduit les principes conclusions suivantes :

- Les différentes valeurs de N nous ont permis de constater que l'augmentation de la taille de l'échantillon a un effet considérable sur la qualité des résultats, c-à-d, quand $N \rightarrow \infty$. Par exemple, pour $N = 10000$.
- La moyenne et la vraie valeur sont presque égales comme le montre les graphes 6.1 - 6.6. La précision est meilleure.
- Les valeurs $RMSE$ et $RMSE^*$ sont, dans la plupart des cas, égales ou très proche de zéro. Ceci signifie que l'étendue de la dispersion est assez petite.

Ces observations faites sur les résultats portés dans les tables et graphes 6.1 - 6.6 confirment la théorie asymptotique de l'estimateur présenté dans le chapitre 6.

6.4 Conclusion

Les modèles bilinéaires périodiques se révèlent très délicats à manipuler. En effet, l'absence de la stationnarité rend la théorie asymptotique des processus ergodiques stationnaire. Notre étude s'est intéressée à l'estimation des paramètres des tels modèles. Sous certaines conditions, qui sont la clé de la méthode de moindre carrée (LS), nous avons pu montrer les propriétés asymptotiques de la consistance forte et de la normalité asymptotique des estimateurs LSE de la classe des modèles bilinéaires périodiques $PBL(p, 0, p, 1)$. Les résultats empiriques confirment cette théorie asymptotique.

Chapitre 7

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

7.1 Conclusions

Ce modeste travail examine quelques problèmes de séries temporelles non linéaires à coefficients dépendant du temps.

La classe particulière des modèles non linéaire qui a été extensivement discutée dans la littérature est la classe des modèles bilinéaires périodiques.

Les conditions suffisantes pour la stationnarité périodique au sens strict et au second ordre et l'inversibilité sont abordées.

L'objectif principal de ce travail est l'estimation dans les MPBL par la méthode de moindre carrés. A partir de certaines conditions, on obtient des estimateurs fortement consistants et asymptotiquement normales.

Cette méthode donne des résultats très satisfaisants qui sont montrés dans la simulation.

7.2 Perspectives

En perspectives, nos futures recherches et études doctorales vont explorer les domaines suivants :

- Les modèles bilinéaires à temps continu, leurs statistiques, structures et leurs identifications.

- L'inférence statistique des modèles bilinéaires à coefficients quasi-périodique.
- La statistique des modèles bilinéaires multi-variables.
- La statistique des modèles bilinéaires à seuil.
- La statistique des modèles bilinéaires à sauts markoviens.

Eventuellement, les techniques dites d'intelligence artificielle « TIA », simples ou hybrides, très importantes pour les processus, surtout non linéaires, a caractère imprécis et incertains, seront, elles-aussi, probablement évoquées. Parmi elles, on cite :

- Les réseaux de neurones « RNA ».
- La logique floue « LF »
- Les algorithmes génétiques « AG ».
- Autres. . . .

Chapitre 8

ANNEXE

Dans cette annexe, nous donnons quelques définitions, théorèmes et outils fondamentaux qui s'avèrent nécessaires dans notre étude.

Définition 8.1 Un processus aléatoire $\{X_t, t \in T\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est dit d'ordre k ($k \geq 1$), si pour tout $t \in \mathbb{Z}$: $E(\|X_t\|^k) < +\infty$.

Définition 8.2 (Bruit blanc) : un processus stationnaire au second ordre est appelé bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 si sa fonction de covariances s'écrit :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 8.3 (σ -Algèbre générée par un processus stochastique) : Notons $\mathcal{F}_t^{(X)} = \sigma(X(s), s \leq t)$, c'est la plus petite σ -algèbre qui contient les ensembles de la forme $\{a \leq X(s) \leq b\}$ pour $s \leq t$ avec $t, a, b \in \mathbb{R}$. Ce sont les informations disponibles pour une observation du processus X à l'instant t .

Définition 8.4 Un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé \mathcal{F}_t -adapté si pour tous t , $X(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 8.5 L'opérateur de retard, noté par B , est défini par : $BX_t = X_{t-1}$ et $B^j X_t = X_{t-j}$.

Théorème 8.6 (Slutsky) Soient $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ 2 suites de variables aléatoires réelles. U une autre variable aléatoire réelle et v un nombre réel. Supposons que $U_n \rightarrow U$ (en loi) et

$V_n \rightarrow v$ (en probabilité). Alors, nous avons quand $n \rightarrow \infty$:

$$(i) U_n \pm V_n \rightarrow U \pm v \text{ (en loi).}$$

$$(ii) U_n V_n \rightarrow vU \text{ (en loi).}$$

$$(iii) U_n V_n^{-1} \rightarrow Uv^{-1} \text{ (en loi) si } V_n \neq 0 \text{ p.s pour tout } n \text{ et } v \neq 0.$$

Théorème 8.7 (TCM) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et croissantes et \mathcal{F} -mesurable, alors,

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ existe,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X).$$

Différence de martingales

Définition 8.8 Un processus $(X_t)_{t \geq 1}$ est dit une suite de différences de martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si :

1. le processus $(X_t)_{t \geq 1}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté,
2. $E(X_t) < \infty$ pour tout $t \geq 1$,
3. $E(X_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ pour tout $t \geq 1$.

Théorème 8.9 (TCL pour une suite de différences de martingales) Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de différences de martingales avec :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t.$$

Supposons que :

- (i) $E(X_t^2) = \sigma_t^2 > 0$ avec $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sigma_t^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$ (en probabilité),
- (ii) $E|X_t^r| < \infty$ pour $r > 2$ et tout t ,
- (iii) $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^2 \rightarrow \sigma^2$ (en probabilité).

Alors :

$$\sqrt{n} \bar{X}_n \rightarrow N(0, \sigma^2) \text{ (en loi).}$$

8.1 Normes matricielles et rayon spectral

- $A = (a_{ij})$ est une matrice d'ordre $p \times p$, on définit la norme de la matrice A comme suit : $\|A\| = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \right\}$.

- Cette norme est une norme multiplicative c-à-d : $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- La rayon spectral : $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ où λ_i sont les valeurs propres de A .
- On a : $\rho(A) \leq \|A\|$ et $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \right)$
- Pour $\delta \in]0, 1]$ on a : $|A|^\delta = \left(|a_{ij}|^\delta \right)_{i,j}$
- Si $A_n = \left(a_{ij}^{(n)} \right)$ sont des matrices d'ordre $p \times p$, alors, on a : $\left| \prod_{n \geq 1} A_n \right|^\delta \leq \prod_{n \geq 1} |A_n|^\delta$ et $\left| \sum_{n \geq 1} A_n \right|^\delta \leq \sum_{n \geq 1} |A_n|^\delta$.
- Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des matrices d'ordre $p \times p$, alors, $A \leq B$ veut dire : $a_{ij} \leq b_{ij}$ pour toute $1 \leq i, j \leq p$.
- Pour $A = (a_{ij})$ est une matrice d'ordre $p \times p$, il existe une constante positive K telle que pour tout nombre entier positif m , nous avons :

$$\left| (A^m)_{ij} \right| < K (\rho(A))^m.$$

Produit de Kronecker (Tensoriel)

Définition 8.10 *Produit de Kronecker (Tensoriel) : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$, alors le produit tensoriel de A et B , noté $A \otimes B$, est la matrice de taille mp par nq , définie par blocs successifs de taille $p \times q$, le bloc d'indice i, j valant $a_{ij}B$. En d'autres termes :*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}_{(mp \times nq)}.$$

Les propriétés remarquables sont :

- Le produit tensoriel est bilinéaire et associatif . Sous réserve de compatibilité des tailles

pour A, B et C , on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= (A \otimes B) + (A \otimes C), \\ (B + C) \otimes A &= (B \otimes A) + (C \otimes A), \\ (kA) \otimes B &= A \otimes (kB) = k(A \otimes B), \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C), \\ (A + B) \otimes (C + D) &= (A \otimes B) + (A \otimes D) + (B \otimes D). \end{aligned}$$

- Le produit tensoriel n'est pas commutatif. Cependant, pour toutes matrices A et B , il existe (2) matrices de permutation P et Q , telles que :

$$A \otimes B = P(B \otimes A)Q.$$

- La propriété suivante lie le produit matriciel usuel au produit de Kronecker :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

8.2 Opérateur Vect

Définition 8.11 Soit $A = (a_1, \dots, a_n)$ une matrice ($m \times n$) avec ($m \times 1$) colonnes a_i , l'opérateur **Vect** transforme A dans un seul vecteur ($mn \times 1$) en empilant les colonnes :

$$\text{Vect}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Remarque 8.12 Soient A, B et C trois matrices avec des dimensions appropriées.

- $\text{Vect}(A + B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.
- $\text{Vect}(ABC) = C' \otimes A \text{Vect}(B)$.
- $\text{Vect}(AB) = (I \otimes AB) \text{Vect}(B) = (B' \otimes I) \text{Vect}(A)$.

8.3 Dérivation matricielle

Définition 8.13 Soit \underline{x} un vecteur de dimension $n \times 1$, et f une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, Posons

$$y = f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Alors, $\frac{\partial y}{\partial \underline{x}}$ est un vecteur de dimension $n \times 1$, défini par :

$$\frac{\partial y}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Définition 8.14 Soit \underline{x} un vecteur de dimension $m \times 1$, et f une application de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ admettant des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, Posons

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ \vdots \\ f(\underline{x}) \end{pmatrix}.$$

Alors, $\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}'}$ est une matrice $n \times m$ telle que :

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x'_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

- [1] Aase k; k. Recursive estimation in non linear time series models of autoregressive type, J.R.S.S.B.45(1983) pp : 228-237.
- [2] Akaike (1969) *A compléter*
- [3] Andel . On the multiple autoregressive series, Ann.Math.Stat.42(1971) pp : 755-759.
- [4] Andersen, Granger. An introduction to bilinear time series analysis, Vandenhoeck and Ruprecht. Gottingen, (1978).
- [5] Basawa V ., Lund R. B. Large sample properties of parameter estimates for periodic ARMA models. Journal of Time Series Analysis (2001), 22, pp : 651-663.
- [6] Bibi. A and Alwel J. Oyet. A note on the properties of some time varying bilinear models . Statistics and Probability Letters 58 (2002) pp : 399-411.
- [7] Bibi, A.,. On the covariance structure of the time-varying bilinear models. Stoch. Anal (2003). Appl. 21, pp : 25-60.
- [8] Bibi, A., Moon-Ho, R . Properties of some bilinear models with periodic regime switching. Statistics and Probability Letters 69 (2004) pp : 221-231.
- [9] Bibi et A. Oyet (2004). Estimation of some bilinear time series models with time varying coefficients. Stochastic Analysis and Applications, 22, pp : 355-376.
- [10] Bibi, A., Gautier, A. Propriétés dans L^2 et estimation des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques. Canad. J. Statist (2006). 34 (1), pp : 131-148.

-
- [11] Bibi, A., Moon-Ho, R.. Estimation of periodic bilinear time series models. Commun. Stat. Theory Methods (2006) 35, pp : 1745-1756.
- [12] Bibi. A , R.Lessak ,On stationarity and mixing of periodic bilinear processes .Statistics and Probability Letters 79(2009) pp : 79-87.
- [13] Bibi. A and Gautier A. Consistent and asymptotically normal estimators for periodic bilinear models. Bull. Korean Math. Soc. 47 (2010), No. 5, pp : 889-905.
- [14] Bibi, A. On general periodic time-varying bilinear processes. Economics letters (2012). To appear.
- [15] Bibi, A. On Markov switching bilinear processes : Stationarity and L_2 structures. Statistics (2012). To appear.
- [16] Berline A.,Francq C., Stationnarité et identifiaion d'un processus bilinéaire stictement superdiagonal, Stochastique et Analyse des donnés 15 (1990) pp : 1-24.
- [17] Boyles, R.A.,Gardner,W.A., Cycloergodic properties of discrete-parameter nonstationary stochastic processes. IEEE Trans. Inform (1983). Theory 29, pp : 105-114.
- [18] Bougerol, P., Picard, N., Strict stationarity of generalized autoregressive processes. An. Probab (1992). 20 (4), pp : 1714-1730.
- [19] Box,G.E.P., G.M , Jenkins Time series analysis . Forecasting and Controle. Holden Day, (1970).
- [20] Brockwell P. J. , R. A. Davis. Time Series : Theory and methods. Springer Verlag, New York (1991).
- [21] Chan N. H. , On the nearly nonstationary seasonal time series. La Revue Canadienne de Statistique (1989), 17, pp : 279-284.
- [22] Chan, H., Tong. On estimating thersholds in autoregressive models,J.T.S.A.7(1986) pp : 179-190
- [23] Francq et Berline (1990)

-
- [24] Francq C., ARMA models with bilinear innovations. *Stochastic Models* (1999)., 15, 29-52.
- [25] Guégan D., Etude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonal d'ordre 1, C. R. A. A. S. Série I 293 (1981) pp : 95-98.
- [26] Guégan D., Représentation l-markovienne et existence d'une représentation affine en l'état des modèles bilinéaires, C. A. S. Série I 302 (1986) pp : 289-292.
- [27] Guégan D., Different representations of bilinear models, J. T. S. A. 8 (1987) pp : 389-408.
- [28] Guégan D., Minimalité et incersibilité des modèles bilinéaires à temps discret, C. R. A. S. Série I 448 (1987) pp : 159-162.
- [29] Guégan D., Modèles bilinéaires et polynomiaux de séries chronologiques :étude probabiliste et statistique, Thèse d'état Université Grenoble I, (1988).
- [30] Guégan D., Séries chronologiques non linéaires à temps discret, *Economica* : Paris, (1994).
- [31] Guégan D. ,T.D, Pham . A note on the estimation of the parameters of the diagonal bilinear models by the least squares method, *Scand.Journ.of Stat.Theory and Appl.* 16 (1989) pp : 129-136.
- [32] Haggan,T.,Ozaki A study of application of modelling non linear random vibrations using an amplitude- dependent autoregressive time series models, *Biometrika* 68 (1981) pp : 189-196.
- [33] Hall, P. and Heyde, C.C . *Martingale limite theory and its application.* Academic Press.
- [34] Joens D.A., Non-linear autoregressive processus, *Roy.Soc.LondonA.*360.(1978) pp : 71-95.
- [35] Lessi (1991) *A compléter*
- [36] Liu J., A simple condition for the existence of some stationary bilinear time series, *J.T.S.A.*10 (1989) pp : 33- 39.

- [37] Liu J., A note on causality and inversibility of a general bilinear time series model, Adv, Appl.prob.22 (1990) pp : 247-250.
- [38] Liu P.J. Estimation for somme bilinear time series, Communications in Statistics. Stochastic Models . J. of time series anal. Canada, V6T, 1W5 pp : 37-41.
- [39] Liu,P.J., Brockwell On the general bilinear time series models, J. Appl. Prob.25 (1988) pp : 553-564.
- [40] Mckenzie Product Autoregression. A time series characterization of the gamma distribution, J. Appl. Prol.19 (1982) pp : 4563-468.
- [41] Molher R. R. Natural bilinear control prace, IEEE Tras, Syst,Sci. Cybern, Vol. SCCCg, (1970), pp :192-197
- [42] Nichohlls D.F., Quinn G.G.,. Random coefficient autoregressive models.An introduction, Lecture Notes in Statistic,Springer Verlag (1982).
- [43] Ozaki T., Non linear threshold autoregressive models for nonlinear random vibrations, J. Appl. Prob. 18 (1981) pp : 443-451.
- [44] Ozaki . T., The statistical analysis of perturbed limit cycle proceses using non linear time series models., J.T.S.A. 3 (1982) pp : 29-41
- [45] Ozaki T., Statistical identification of storag models with application to stochastic hydrology, Water Ressources Bull.21 (1985) pp : 663-675.
- [46] Pham T. , Tran. On the first order bilinear time series models, J. Appl. Prob. (1981) pp : 617-627.
- [47] Pham T., Bilinear markovian represenation and bilnear models, Soch, Processus and their Appl, 20,(1985), pp : 295-306.
- [48] Pham T. 1986 *A compléter*
- [49] Robinson P.M., Non parametic for time series, J.T.S.A. 4 (1983) pp : 185-207.
- [50] Robinson P.M., Comment on a paper by Sing and Ullah, Econometric Theory 2 (1986) pp : 151-152.

-
- [51] Robinson P.M., Semi-parametric econometrics : a survey, J. of Appl. Econometrics 3 (1988) pp : 35-51.
- [52] Subba Rao. On the theory of bilinear time series models. Journal of the Royal Statistical Society, Series (1981). B, 43, pp : 244-255.
- [53] Subba Rao (1997) *A compléter*
- [54] Subba Rao T., Gabr M. M., A test for linearity of stationary time series. Journal of Time Series Analysis (1980), 1, pp : 145-158
- [55] Subba Rao, M.M., Gabr An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models , Lecture Notes in statistics .24, Springer Verlag, (1984).
- [56] Terdik G. Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Nonlinear Time Series : a Frequency Domain Approach. Lecture Notes in Statistics, 124 (1999), Springer, New York.
- [57] Tiao, G.C., Grupe, M.R., Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. Biometrika 67 (1980), 365-373.
- [58] Tong, K. S., Lim. Threshold autoregressive, Limit cycles and cyclical data, J.R.S.S.B.42 (1980) 245-292.
- [59] Tong. Threshold model in non linear time series analysis, Lecture Notes in statistics.21, Springer Verlage, (1983).
- [60] Tong . NonLinear Time series analysis , a dynamical system approach, Clarendon press. Oxford (1990).
- [61] Tongen (1978)
- [62] Wittwer G. Some remarks on bilinear time series models. Statistics 20 (1989) 4, 521-529.
- [63] Win. N., Wiener, Non linear problems in random theory, M.I.T, press (1958).