REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :...............................
Série :.......................................

MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Magistère
En Mathématiques

THEME

Propriétés Spectrales De Certaines Classes D'Opérateurs du Type de Convolution

Option :
Analyse

PAR :

Mr MEGROUS Amar

Devant le jury :

Président :	C. Saidouni	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	A. Hebbeche	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	M. Bouzit	M.C.	Univ. Oum El- Bouaghi
	A. Hameida	M.C.	Univ. Mentouri Constantine

Remerciements

Je tiens à remercier mon professeur, Monsieur A. Hebbeche pour m’avoir dirigé et orienté dans mes travaux.

J’exprime ma gratitude à Monsieur C. Saidouni maître de conférence à l’université Mentouri de Constantine pour avoir accepté de présider ce jury.

Mes sincères remerciements s’adressent à :

Monsieur A. Hameida maître de conférence à l’université Mentouri de Constantine.

Monsieur M. Bouzit maître de conférence à l’université Larbi Ben Mhidi de Oum El Bouaghi, qui ont examiné mon mémoire.

Enfin, je remercie toute personne ayant contribue à l’élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A La mémoire de mon cher père Tayeb.

A ma chère mère.

A mon grand-père.

A La mémoire de ma grand-mère Messouda.

A mes chers frères et sœurs.

A mes proches.

A mes enseignants.

A mes clubs de Karaté Do (Club de l’université, RAA , NRBG).

A mes amis.

Table des matières

Introduction

Bien que la théorie abstraite des opérateurs auto-adjoints et symétriques semble achevée, le probleme de la décomposition spectrale explicite des opérateurs concrets (différentiels, integraux, integro-differentiels, etc.) est un domaine de recherche important. Il y'a un grand nombre de travaux consacrés à la décomposition spectrale des opérateurs differentiels ordinaires et aux dérivées partielles, voir par exemple les monographies de Yu. M. Berezanskii [4], A. G. Kostyuchenko, I. S. Sargsyan [13], B. M. Levitan [18], M. A. Naimark [21], E. C. Titchmarch [28].

Depuis ces derniers temps, certains auteurs ont commencé l'étude des opérateurs intégraux [12], et integro-differentiels [5], [6], [9], [16], [17], [25]. Le mémoire présenté est consacré à l'étude des résolvantes et fonctions spectrales d'une part des opérateurs de multiplication et de convolution et d'autre part des opérateurs du type de convolution.

Le premier chapitre est consacré à un bref rappel des principales notions utiles tout le long de ce travail, pour le plus de détails voir par exemple [1, 8, 11, 29].

Le deuxième chapitre traite des résolvantes et fonctions spectrales de certaines classes d'opérateurs de multiplication et de convolution. Une bonne partie est consacrée aux constructions explicites des fonctions spectrales. De telles questions pour differentes classes d'opérateurs ont été traités dans [2, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27]

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des résolvantes et des fonctions spectrales d'une classe d'opérateurs du type de convolution. Des formules explicites de ces résolvantes et fonctions spectrales ont été obtenues.

Enfin, on illustre les résultats obtenus par l'étude d'un exemple concrêt.

Chapitre 1

Notions et Résultats Préliminaires

Soit H un espace de Hilbert , un opérateur linéaire T dans H est une application linéaire dont le domaine $D(T)$ est un sous-espace de H et dont l'image $R(T)$ est contenue dans H . Le graphe $G(T)$ d'un opérateur T dans H est un sous-espace de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{(x, Tx) \text{ tel que : } x \in D(T)\}$$

L'espace nul $N(T)$ d'un opérateur T dans H est défini par :

$$N(T) = \{x \in D(T) \text{ tel que : } T(x) = 0\}$$

L'opérateur S est une extention de l'opérateur T (ie) $D(T) \subset D(S)$ et $S(x) = T(x)$ pour toute $x \in D(T)$ si et seulement si , $G(T) \subset G(S)$ et on écrit : $T \subset S$.

Définition 1 *Un opérateur fermé dans H est un opérateur dont le graphe est un sous-espace fermé de $H \times H$.*

Lemme 1 *Un opérateur T est fermé si et seulement si , pour chaque suite $(x_n) \subset D(T)$ telle que :$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ Alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$.*

Proposition 1 *-Si l'opérateur T est fermé. Alors $(T - \lambda I)$ est fermé .*

-Si l'opérateur T est fermé et T^{-1} existe . Alors T^{-1} est fermé .

Définition 2 *On suppose que $\overline{D(T)} = H$, on appelle adjoint de T , l'opérateur T^* défini par :*

$$D(T^*) = \{y \in H \ : \exists c > 0 \ , \ |\langle Tx, y\rangle| \leqslant c \|x\| \ \ \forall x \in D(T)\}$$

et T^* est une application linéaire de $D(T^*)$ dans H telle que :

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in D(T)$$

- **Remarque 1** *Si $D(T)$ n'est pas dense , T possède en général plusieurs adjoints. L'ensemble $D(T^*)$ peut être réduit à $\{0\}$.*

Si T est un opérateur à domaine dense dans H , alors T^* est un opérateur fermé .

Définition 3 *Un opérateur T est dit auto-adjoint si $T = T^*$.*

Corollaire 1 *Si T est un opérateur linéaire tel que $\overline{D(T)} = H$ et T^{-1} éxist tel que $\overline{D(T^{-1})} = H$. Alors $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Proposition 2 *Pour chaque opérateur T à domaine $D(T)$ dense dans H , on a $R(T)^{\perp} = N(T^*)$ et de plus : Si $R(T)$ est fermé alors $R(T) = N(T^*)^{\perp}$ (ie) :L'équation $Tx = f$ admet une solution x si et seulement si $f \in N(T^*)^{\perp}$.*

1.1 Spectre et Résolvante

Définition 4 *(résolvante) Soit T un opérateur à domaine dense dans H. L'opérateur $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ qui dépend du paramètre λ est appelé la résolvante de l'opérateur T, elle est définie pour tout λ pour laquel $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et son domaine $R(T - \lambda I)$ est dense dans H. Ici I désigne l'identité .*

Définition 5 *(point régulier) Soit T un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans H Le point λ du plan complexe $\mathbb{C}$ est appelé point régulier de T si la résolvante $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ existe,définie sur tout H et bornée .L'ensemble des points réguliers de T est appelé ensemble résolvant et on le note $\rho(T)$. On appelle spectre de T le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$ et on le note $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.*

Remarque 2 *-L'application : $(T - \lambda I) : D(T) \rightarrow R(T - \lambda I)$ détermine un opérateur bijectif si et seulement si ; λ n'est pas une valeur propre de l'opérateur T .*

-Les points non réels λ du plan compexe sont des points réguliers de l'opérateur auto-adjoint T .

-Pour un opérateur auto-adjoint T le spectre $\sigma(T)$ est inclus dans l'ensemble des points réels .

Définition 6 *Soit M un sous-espace vectoriel fermé de H. Un opérateur de H dans M est dit orthoprojecteur si et seulement si il est auto-adjoint (ie) $P = P^*$ et il verifie $P^2 = P$.*

1.2 Fonction Spectrale d'un Opérateur Auto-Adjoint

.

Définition 7 *Une famille d'orthoprojecteurs E_t , $-\infty < t < +\infty$ est appelée fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint T si elle vérifie les conditions suivantes :*

1.$E_t E_\mu = E_{\min\{t,\mu\}}$, t , $\mu \in \mathbb{R}$

2.$E_{t-0} = E_t$

3.$E_{-\infty} = 0$, $E_\infty = I$ *où* 0 *est l'opérateur nul :* $0f = 0$, $f \in H$

4.$D(T) = \left\{ f \in H : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 d(E_t f, f) < +\infty \right\}$ *, et pour* $f \in D(T)$ *on a :*

$$Tf = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t dE_t f$$

Proposition 3 *La résolvante $R_\lambda(T)$ et la fonction spectrale E_t sont liées par la relation :*

$$R_\lambda(T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t - \lambda}$$

et pour f,$g \in H$ et tous nombres réels α , β

$$(E_{\alpha,\beta} f, g) = \left(\left[\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2} \right] f, g \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to +0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left([R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}] f, g \right) d\sigma$$

(C'est la formule de Stieltjes)

En outre , pour $f \in D(A)$:

$$Tf = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t f$$

La fonction spectrale E_t vérifie les proprietés suivantes :

1. Pour $t_2 > t_1$, $E_{t_2} - E_{t_1}$ est un opérateur borné,positif c-à-d : quelque soit $f \in H$ $([E_{t_2} - E_{t_1}] f, f) \geqslant 0$
2. $E_{t-0} = E_t$
3. $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = I$

Définition 8 *Soit M un sous-espace fermé de H.M est dit réduisant par un opérateur T s'il est invariant par T et par son adjoint T^* c-à-d* $T(M) \subset M$ *et* $T^*(M) \subset M$.

Pour donner explicitement la fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint, le théorème suivant sera souvent utilisé :

Théorème 3 *Soit* $E_t \quad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty$ *une famille d'orthoprojecteur dans un espace de Hilbert vérifiant les proprietés 1),2)et 3) de la définition 7.Cette famille est la fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint* T *si et seulement si :*
a-Quelque soit $\Delta = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *,* $E(\Delta)H$ *est réduisant par* T *où :*

$$E(\Delta) = E_{\beta+0} - E_{\alpha}$$

b-Si $f \in (E_{\beta+0} - E_{\alpha})\, H \ , \quad -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty,$ *alors :*

$$\alpha \left\| f \right\|^2 \leqslant (Tf, f) \leqslant \beta \left\| f \right\|^2$$

1.2.1 Opérateur Unitaire

Définition 9 *Un opérateur* U *défini sur* H *et qui applique* H *sur lui même est appelé opérateur unitaire si* $\forall x, y \in H \quad (Ux, Uy) = (x, y)$.

Proprietés :

1. Il existe un opérateur inverse U^{-1} qui est aussi unitaire.
2. $U^*U = I$ et $UU^* = I \Rightarrow U^* = U^{-1}$.
3. U est linéaire.
4. Si T est linéaire et si $\forall x \in H \quad (Tx, Tx) = (x, x)$ et $D(T) = R(T) = H$, alors T est unitaire.
5. $\|U\| = 1$

1.2.2 Opérateur Isométrique

Soient H_1 , H_2 deux espaces de Hilbert avec les produits scalaires $(.,.)_1$, $(.,.)_2$

Définition 10 *Un opérateur V qui applique H_1 sur H_2 et vérifiant la proprieté :*

$$(Vx, Vy)_2 = (x, y)_1 \ \forall x, y \in H_1$$

est appelé opérateur isométrique.

Remarque 4 *Un opérateur unitaire U est un cas particulier d'un opérateur isométrique quand $H_1 = H_2 = H$.*

Proprietés

1. Tout opérateur isométrique V admet un inverse V^{-1} qui est aussi isométrique.
2. Si V est isométrique il est linéaire.
3. Si λ est une valeur propre d'un opérateur isométrique, alors $|\lambda| = 1$.
4. Deux vecteurs propres x_1 , x_2 d'un opérateur isométrique associes à deux valeurs propres λ_1 , λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ sont orthogonaux.
5. $\|V\| = 1$

1.2.3 Opérateurs Unitairement Equivalents

Définition 11 *Soient T_1 et T_2 deux opérateurs linéaires définis respectivement sur H_1 et H_2*

$T_1 : D(T_1) \subset H_1 \to H_1$, $T_2 : D(T_2) \subset H_2 \to H_2$

les opérateurs T_1 et T_2 sont appelés unitairement équivalents s'il existe un opérateur isométrique V qui envoie H_1 sur H_2 tq $T_1 = V^{-1}T_2V$.

1.3 Espace $L^2(X, \mu)$

Soient X Un ensemble mesurable, μ une mesure σ-finie sur X.On appelera espace mesuré le couple (X, μ). Dans la suite,on dira "mesurable" ,"presque partout","dx" respectivement au lieu de dire "μ-mesurable","μ-presque partout" et "$\mu(dx)$" respectivement.

Théorème 5 *Soit (X,μ) un espace mesuré σ-fini tel que $L^2(X,\mu)$ soit de dimension infinie.Il existe une suite $\{Y_n\}$ de sous-ensembles mesurables de X possédant les propriétés suivantes :*

$$X_n \subset X_{n+1} \quad , X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad , \quad 0 < \mu(X_n) < \mu(X_{n+1}) < \infty \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

De plus, il existe une suite de sous-ensembles mesurables $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que :

$$Y_n \cap Y_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \ , \ X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \ , \ \mu(Y_n) > 0$$

et pour tout $n \in N^*$, $L^2(Y_n,\mu)$ soit de dimension infinie.

Remarque 6 *Soit $L^2_{loc}(X,\mu)$ l'ensemble des fonctions f définies sur X telle que pour toute partie mesurable e avec $\mu(e) < \infty$, $I_e \cdot f \in L^2(X,\mu)$ alors :*

$$L^2_{loc}(X,\mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^2(X_n,\mu) \text{ où } L^2(X_n,\mu) = \left\{ f \in L^2(X,\mu) : suppf \subset X_n \right\}$$

On aura besoin d'introduire l'espace $L^\infty(X,\mu)$ qui est défini comme suit : $L^\infty(X,\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables bornées presque partout sur X muni de la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup_{x\in X} ess\,|f(x)| \\ &= \inf \sup \{|f(x)|\,, x \notin E, \mu(E) = 0\} \ . \end{aligned}$$

Définition 12 *Une fonction f est dite essentiellement bornée si $f \in L^\infty(X,\mu)$.*

Remarque 7 *Si $f \in L^\infty(X,\mu)$ alors, $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ presque partout .*

1.4 Distributions Tempérées, Convolution

Soit $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz de toutes les fonctions $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ à décroissance rapide, indefiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes telles que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta (D^\alpha \varphi)(x) \right| < \infty \tag{1.1}$$

pour tout α , $\beta \in \mathbb{N}^n$, où $\mathbb{N}^n$ est l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$ sont des entiers et

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ x^\beta &= x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\ D^\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

La topologie dans l'espace complet et localement convexe $S(\mathbb{R}^n)$ est définie par les semi-normes1.1.Remarquons que la même topologie dans $S(\mathbb{R}^n)$ est générée par les normes :

$$P_N(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^N\right) \sum_{|\alpha|<N} |D^\alpha \varphi(x)| \ , \quad N = 1, 2, \ldots$$

où

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \ , \ |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$S'(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, (ie) le dual topologique de $S(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie forte.

Soit F la transformée de Fourier définie sur $S(\mathbb{R}^n)$ comme suite :

$$(F\varphi)(x) = \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x t} \varphi(t) dt \ , \ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

où $xt = x_1 t_1 + \cdots + x_n t_n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ de

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } t = (t_1, \ldots, t_n)$$

La transformée deFourier inverse $F^{-1}\varphi = \overline{F}\varphi$ de φ est donnée par :

$$\left(\overline{F}\varphi\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x t}\varphi(t)dt \ , \ x \in \mathbb{R}^n$$

On étend F et $\overline{F}$ de manière naturelle de $S(\mathbb{R}^n)$ à $S'(\mathbb{R}^n)$ comme suite :

pour tout $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\left\langle \hat{f}, \varphi \right\rangle = \langle f, F\varphi \rangle$$

Remarque 8 *F et $\overline{F}$ sont des isomorphismes de $S(\mathbb{R}^n)$ sur lui même,et de $S'(\mathbb{R}^n)$sur lui même,de plus et plus précisement : la restriction de F à $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui même.*

Définition 13 *Pour φ, $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, la convolution $\varphi * \psi$ est définie par :*

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy$$

On note que dans l'intégrale x et y sont liés par $(x-y)+y = x$.En faisant le changement de variable $u = x - y$ on a grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation :

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\psi(x-u)du$$

donc $(\varphi * \psi)(x)$ existe si et seulement si $(\psi * \varphi)(x)$ existe, et on a l'égalité :

$$(\varphi * \psi)(x) = (\psi * \varphi)(x)$$

Pour $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, la convolution est définie par :

$$(f * \varphi)(x) = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy$$

où $\langle f, \varphi \rangle$ est le produit de dualité.

On sait que $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, plus particulièrement

$$f * \varphi \in S'(\mathbb{R}^n) \text{ si } f \in S'(\mathbb{R}^n) \text{ et } \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

De plus :

$$F(f * \varphi) = \widehat{f * \varphi} = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}$$

et

$$\overline{F}(f * \varphi) = \overline{F}(f)\overline{F}(\varphi)$$

On désigne par $S_1'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\hat{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et par $\varepsilon'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions à support compact

On a : $\varepsilon'(\mathbb{R}^n) \subset S_1'(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 2

Résolvantes et Fonctions Spectrales des Opérateurs de Multiplication et de Convolution

2.1 Opérateurs de Multiplication

Soit φ une fonction mesurable définie sur un ensemble quelconque X.

Définition 14 *L'opérateur défini sur $L^2(X,\mu)$ par :*

$$\begin{cases} D(T_\varphi) = \{g \in L^2(X,\mu) : \varphi g \in L^2(X,\mu)\} \\ T_\varphi f = \varphi \cdot f \quad , \quad \forall f \in D(T_\varphi) \end{cases}$$

avec μ une mesure σ-finie sur X est appelé opérateur de multiplication.

Théorème 9 *L'opérateur de multiplication T_φ est borné si et seulement si φ est essentiellement bornée. De plus :*

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in X} ess\, |\varphi(x)|$$

Démonstration. On pose :

$$M = \sup_{x\in X} ess\, |\varphi(x)|$$

soit $f \in D(T_\varphi)$, alors :

$$\|T_\varphi f\|^2 = \int_X |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leqslant M^2 \int_X |f(x)|^2 dx \leqslant M^2 \|f\|^2_{L^2(X,\mu)}$$

D'où :

$$\|T_\varphi\| \leqslant M$$

Soit maintenant un $\varepsilon > 0$, arbitraire et

$$e = \{x \in X : M - \varepsilon < \varphi(x) < M\}$$

Etant donné que :

$$M = \sup_{x \in X} ess\, |\varphi(x)|$$

alors : $\mu(e) = a > 0$

pour $f_\circ(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} 1_e(x)$ on a :

$$\|T_\varphi f_\circ\| = \frac{1}{a} \int_e |\varphi(x)|^2 \, dx \geqslant \frac{1}{a}(M - \varepsilon)^2 a = (M - \varepsilon)^2$$

D'où : $M - \varepsilon < \|T_\varphi\| \leqslant M$ ■

2.1.1 Résolvante et Spectre des Opérateurs de Multiplication

Soit T_φ l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable φ.

Théorème 10 *La résolvante de l'opérateur T_φ est définie par :*

$$R_\lambda(T_\varphi) f(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \lambda} f(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T_\varphi), \ f \in L^2(X, \mu)$$

Où :

$$\sigma(T_\varphi) = \overline{\{\varphi(x), x \in X\}}$$

Démonstration. On considère l'équation suivante :

$$(T_\varphi - \lambda I)\, g(x) = f(x), \ f \in L^2(X, \mu)$$

cette derniere équation a comme solution :

$$g(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \lambda} f(x) \ \text{ avec } \lambda \neq \varphi(x) \ \ \forall x \in X$$

on pose :

$$g = R_\lambda(T_\varphi) f$$

On remarque que $R_\lambda(T_\varphi)$ est un opérateur de multiplication,on conclut d'aprés le théoreme 9 ce qui suit : $R_\lambda(T_\varphi)$ est bornée si et seulement si $\frac{1}{\varphi(x)-\lambda} \in L^\infty(X,\mu)$ ce qui revient à dire que $\varphi(x)-\lambda$ ne converge pas vers 0, d'où $\sigma(T_\varphi) = \overline{\{\varphi(x), x \in X\}}$ ■

2.1.2 Fonction Spectrale des Opérateurs de Multiplication

Si φ est une fonction réelle, alors on a le théorème suivant :

Théorème 11 *La famille d'orthoprojecteurs* $\{E_t\}$ $\quad -\infty < t < +\infty$ *définie par :*

$$\begin{cases} E_t f = 1_{e_t} \cdot f, \quad f \in L^2(X,\mu) \\ e_t = \{x \in X : \varphi(x) < t\} \end{cases}$$

est la fonction spectrale de l'opérateur de multiplication T_φ.

Démonstration. D'aprés le théorème 3 il sufit de vérifier que
1.$E(\Delta)L^2(X,\mu)$ est réduisant par T_φ.
2.$\forall f \in E(\Delta)L^2(X,\mu)$ avec $\Delta = [\alpha,\beta]$ on a :

$$\alpha \|f\|^2 \leqslant (T_\varphi f, f) \leqslant \beta \|f\|^2$$

Soit $\Delta = [\alpha,\beta]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $E(\Delta) = E_{\beta+0} - E_\alpha$
Il est clair que :

$$T_\varphi E(\Delta) f = E(\Delta) T_\varphi f = 1_{e_\Delta}\varphi \cdot f$$

où

$$e_\Delta = \{x \in X : \alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta\}$$

Comme :

$$(T_\varphi E(\Delta) f, E(\Delta) f) = (\varphi 1_{e_\Delta} f, 1_{e_\Delta} f) = \int_{e_\Delta} |\varphi(x)| \, |f(x)|^2 \, dx$$

on a :

$$\alpha \|E(\Delta)f\|^2 \leqslant (T_\varphi E(\Delta)f, f) \leqslant \beta \|E(\Delta)f\|^2$$

D'où $\{E_t\} \quad -\infty < t < +\infty$ est la fonction spectrale de T_φ. ■

2.2 Opérateurs de Convolution

Définition 15 *L'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\begin{cases} D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \xi * f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ Tf = \xi * f \qquad \forall f \in D(A) \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\xi \in M$ où $M = \left\{\xi \in S'(\mathbb{R}^n) : \hat{\xi} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)\right\}$

est appelé opérateur de convolution.

2.2.1 Résolvante et Spectre de l'Opérateur T.

Théorème 12 *Soit T l'opérateur défini par(2.1)*

Sa résolvante $R_\lambda(T)$ est donnée par :

$$R_\lambda(T)f = \overline{F}\left[\left(\hat{\xi} - \lambda I\right)^{-1}\right] * f \quad \forall \lambda \in \rho(T) \ , \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Son spectre est défini par :

$$\sigma(T) = \overline{\left\{\lambda = \hat{\xi}(x), x \in \mathbb{R}^n\right\}}$$

Lemme 2 *Soit $\hat{T}$l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$\begin{cases} D(\hat{T}) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \hat{\xi} \cdot f \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\} \\ \hat{T}f = \hat{\xi} \cdot f \quad \forall f \in D(\hat{T}) \text{ et } \forall \xi \in M \end{cases}$$

Alors T et $\hat{T}$ sont unitairement équivalents.

Démonstration. Pour démontrer que $T = \overline{F}\hat{T}F$, il suffit de démontrer l'égalité :

$$\widehat{\xi * f} = \hat{\xi} \cdot \hat{f} \quad \text{pour tout } f \in D(T)$$

Pour cela,on considère la fonction indicatrice I_j de l'ensemble :

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant j\right\}$$

D'aprés un resultat dans [29], on a pour tout $f,\ g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f * g$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$ et de plus

$$f * g = \overline{F}\left(\hat{f} \cdot \hat{g}\right) \text{ d'où : } \widehat{I_j f} = \hat{I}_j * \hat{f}$$

D'autre part on a :$\widehat{I_j f} \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand $j \to +\infty$ (pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^n)$) d'où :

$$\hat{I}_j * \hat{f} \to \hat{f}$$

On suppose maintenant que $f \in D(T)$ et $\varphi \in S'(\mathbb{R}^n)$ avec un support compact.On a alors pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\xi * f * \hat{I}_j}, \varphi\right) &= \left(\xi * f * \hat{I}_j, \overline{F}\varphi\right) = \left(\xi * \hat{I}_j * f, \overline{F}\varphi\right) = \left(\xi * \hat{I}_j, f * \overline{F}\varphi\right) \\
&= \left(F(\xi * \hat{I}_j), \check{f} * \overline{F}\varphi\right)
\end{aligned}$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$ est la symétrie de f .

Etant donné que $\hat{\xi} I_j$ et $\check{f} * \overline{F}\varphi$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$\left(\overline{F}(I_j\hat{\xi}), \check{f} * \overline{F}\varphi\right) = \left(I_j\hat{\xi}, \hat{f}\varphi\right) = \left(I_j\hat{f}\hat{\xi}, \varphi\right)$$

D'où :

$$\widehat{\xi * f * \hat{I}_j} = I_j\hat{f}\hat{\xi}$$

En faisant tendre j vers $+\infty$ on aura :

$$\widehat{\xi * f * \hat{I}_j} = I_j\hat{f}\hat{\xi} \to \hat{\xi} * \hat{f} \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

D'autre part :

$$\widehat{\xi * f * \hat{I}_j} = I_j \hat{f} \hat{\xi} \to \hat{\xi} \cdot \hat{f} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

Finalement en tenant compte du fait que T^* est fermé pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^n)$,on a :

$$\widehat{\xi * f} = \hat{\xi} \cdot \hat{f}$$

■

Démonstration du théorème12.D'aprés le lemme2, T est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $\hat{\xi}$ c'est à dire : $T = FT_{\hat{\xi}}\overline{F}$ où F désigne la transformée de fourier.

D'où

$$R_\lambda(T) = FR_\lambda(T_{\hat{\xi}})\overline{F}$$

Or :

$$R_\lambda(T_{\hat{\xi}})f(x) = \frac{f(x)}{\hat{\xi}(x) - \lambda} \quad \forall \lambda \notin \sigma(T_{\hat{\xi}})$$

avec :

$$\sigma(T_{\hat{\xi}}) = \overline{\left\{\hat{\xi}(x), x \in \mathbb{R}^n\right\}}$$

d'où le théorème.

2.2.2 Fonction Spectrale de L'Opérateur T

Pour déterminer la fonction spectrale de l'opérateur T, il faut distinguer deux cas ; le cas où $\hat{\xi}$ est une fonction réelle, puis le cas où $\hat{\xi}$ n'est pas réelle.

1er cas

On suppose que $\hat{\xi}$ est une fonction réelle.On a le théorème suivant :

Théorème 13 *La fonction spectrale de T, notée E_t est donnée par la formule suivante :*

$$E_t f = FE_t^{\hat{\xi}}\overline{F} = \hat{1}_{e_t} * f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

où $e_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \hat{\xi}(x) < t \right\}$ *et* $E_t^{\hat{\xi}}$ *est la fonction spectrale de* $T_{\hat{\xi}}$.

Démonstration

Comme $T_{\hat{\xi}} = \overline{F}TF$ est un opérateur de multiplication par la fonction $\hat{\xi}$, on déduit du théorème 11 que

$$E_t^{\hat{\xi}} f = 1_{e_t} f \quad \text{où} \quad e_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \hat{\xi}(x) < t \right\}$$

De là, on obtient :

$$E_t f = \hat{1}_{e_t} * f$$

2ème cas

On suppose que $\hat{\xi}$ n'est pas une fonction réelle,on a alors le théorème suivant :

Théorème 14 *La fonction spectrale de* T *est donnée par :*

$$E\left(\Delta_1 \times \Delta_2\right) = \hat{1}_e * f$$

où

$$e = e_{\Delta_1 \times \Delta_2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Big(\operatorname{Re} \hat{\xi}(x), \operatorname{Im} \hat{\xi}(x) \Big) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \right\}$$

Démonstration. Comme l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable T est un opérateur normal, alors il admet une fonction spectrale définie par :

$$E_{ts} = E_t \cdot E_s$$

où E_t et E_s désignent les fonctions spectrales d'opérateurs de multiplication par la partie réelle de $\hat{\xi}$ et par la partie imaginaire de $\hat{\xi}$ respectivement.

or :

$$E_t^{\hat{\xi}} f = 1_{e_t} \cdot f \quad \text{avec} \quad e_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \operatorname{Re} \hat{\xi}(x) \leqslant t \right\}$$

et

$$E_s^{\hat{\xi}} f = 1_{e_s} \cdot f \quad \text{avec} \quad e_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \operatorname{Im} \hat{\xi}(x) \leqslant s \right\}$$

En tenant compte de la relation $E_{ts} = E_t \cdot E_s$, on a :

$$E\left(\Delta_1 \times \Delta_2\right) f = 1_{e_{\Delta_1 \times \Delta_2}} f \quad \text{avec} \quad e_{\Delta_1 \times \Delta_2} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \operatorname{Re} \hat{\xi}(x) \in \Delta_1, \operatorname{Im} \hat{\xi}(x) \in \Delta_2 \right\}$$

En suite en utilisant le lemme on obtient :

$$E\left(\Delta_1 \times \Delta_2\right) = \hat{1}_{e_{\Delta_1 \times \Delta_2}} * f$$

■

Chapitre 3

Résolvantes et Fonctions Spectrales d'une Classe d'Opérateurs du Type de Convolution

Dans cette partie nous étudions dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ les propriétes spectrales des opérateurs du type :

$$Af = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha * \check{f}^\alpha$$

On établit les formules de résolvantes et de fonctions spectrales de tels opérateurs.

3.1 Désignations Nécessaires

Nous rappelons que $\mathbb{N}_0^n$ désigne l'ensemble des multi-indices

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

tel que ε_i ne prend que deux valeurs 0 ou 1 ;ie

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\in \{0,1\} \\ i &= 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ définit un opérateur unitaire et multiplicatif U_α :

$$U_\alpha f = \check{f}^\alpha(x) = f(xI_\alpha)$$

est la symétrie de la fonction f par rapport au multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, ici I_α est la matrice diagonale avec la diagonale principale

$$(-1)^{\varepsilon_1}, (-1)^{\varepsilon_2}, \ldots, (-1)^{\varepsilon_n}$$

ie

$$I_\alpha = \begin{bmatrix} (-1)^{\varepsilon_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (-1)^{\varepsilon_n} \end{bmatrix}$$

Etablissons une numération des éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_0^n$ en posant :

$$\alpha_i = (0, 0, \ldots, 0)$$

et

$$\alpha_{2^n} = (1, 1, \ldots, 1)$$

et la numération des autres multi-indices arbitraires.

Introduisons dans $\mathbb{N}_0^n$ l'opération de sommation suivante :

si :

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

et

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

on pose :

$$\alpha + \beta = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n') \in \mathbb{N}_0^n \quad \text{ou} \quad \varepsilon_i' = (\varepsilon_i + \beta_i)(\operatorname{mod} 2)\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(\ \text{ie} \quad 0 + 0 = 0\ ,\ \ 0 + 1 = 1 + 0 = 1\ ,\ 1 + 1 = 0\ \ )$$

Pour un couple des multi-indices α_1 et $\alpha_j \in \mathbb{N}_0^n$ on pose :

$$\alpha_i + \alpha_j = \alpha_{i(j)} = \alpha_{j(i)}$$

Il est clair que quelque soit i

$$\alpha_{i(1)} = \alpha_i \ \text{ et } \ \alpha_{i(i)} = \alpha_1$$

Chaque multi-indice $\alpha_i \in \mathbb{N}_0^n$ définit une application biunivoque

$$\pi_i : \{1, 2, \ldots, 2^n\} \to \{1, 2, \ldots, 2^n\}$$

ie qui envoie $\{1,2,\ldots,2^n\}$ sur lui même :

$$\pi_i j(i) = \pi_i i(j) = j$$

Remarquons que pour tout i

$$\pi_i(1) = i,\ \pi_i i = 1$$

On pose :

$$\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_{\alpha_1}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathbb{R}_\alpha^n = \left\{xI_\alpha, x \in \mathbb{R}_+^n\right\}$$

$\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$ est l'espace de Hilbert de vecteurs :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= (f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}) \\ f_i &\in L^2(\mathbb{R}_+^n), i = 1, 2, \ldots 2^n \end{aligned}$$

avec le produit scalaire :

$$\left(\tilde{f}, \tilde{g}\right)_n = \sum_{i=1}^{2^n} (f_i, g_i)_+ = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} f_i(x)\overline{g_i(x)}dx$$

soient

$$a_1, a_{2,\ldots,} a_{2^n} \text{ des distributions tempérés de } S^{'}(\mathbb{R}^n)$$

ie

$$\hat{a}_j = b_j \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, 2, \ldots, 2^n$$

Dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ on considère deux opérateurs A et T

$$Af = \sum_{i=1}^{2^n} a_i * \check{f}^{(\alpha_i)}$$

et

$$Tf = \sum_{i=1}^{2^n} b_i \check{f}^{(\alpha_i)}$$

définis réspectivement sur

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \sum_{i=1}^{2^n} a_i * \check{f}^{(\alpha_i)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

et

$$D(T) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \sum_{i=1}^{2^n} b_i \check{f}^{(\alpha_i)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

En utilisant le lemme 2 et en tenant compte que les opérateurs U_{α_i} et $F(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ permutent, on peut aisément démontrer que les opérateurs A et T sont unitairement équivalents :$A = \overline{F}TF$.

3.2 Résolvantes d'Opérateurs A et T

Introduisons un opérateur isométrique V qui applique isométriquement $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_n^+)$ en posant pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$Vf = \tilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$$f_j(x) = f(xI_{\alpha_j}),\ x \in \mathbb{R}_+^n,\ \ j = 1, 2, \ldots, 2^n$$

et encore l'opérateur $\tilde{A} = VTV^{-1}$ défini sur$D(\tilde{A}) = VD(T)$.

Pour tout $\tilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}) \in D(\tilde{A})$ on a :

$$\tilde{A}\tilde{f} = VTV^{-1}\tilde{f} = \left(\sum_{i=1}^{2^n} \check{b}_{\pi_1 i}^{(\alpha_1)} f_i, \sum_{i=1}^{2^n} \check{b}_{\pi_2 i}^{(\alpha_2)} f_i, \ldots, \sum_{i=1}^{2^n} \check{b}_{\pi_{2^n} i}^{(\alpha_{2^n})} f_i \right)$$

Ainsi , l'opérateur $\tilde{A}$ est défini dans $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_n^+)$ par la matrice :

$$\begin{aligned} M &= M(x), x \in \mathbb{R}_+^n : \tilde{A}\tilde{f} = \tilde{f}M \\ M &= \left[\tilde{b}_{\pi_i j}^{(\alpha_i)}\right]_{i,j=1}^{2^n} \end{aligned}$$

On en déduit que les opérateurs $\tilde{A}$, T , A sont auto-adjoints si et seulement si , pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^n$ la matrice $M(x)$ est symétrique ça a lieu, en particulier,si toute fonction $b_j(x)$ est réelle et paire par rapport à chaque argument x_i

On cherche tout d'abord , la résolvante

$$R_\lambda(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{-1} \text{ de l'opérateur } \tilde{A}$$

ici $\tilde{I}$ est l'identité dans $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_n^+)$.

Il est clair que pour tout $\tilde{f} \in \tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_n^+)$

$$R_\lambda(\tilde{A})\tilde{f} = \tilde{f}\,(M - \lambda I_{\alpha_1})^{-1}$$

Donc l'opérateur $R_\lambda(\tilde{A})$ exist si et seulement si ,la matrice inverse $(M - \lambda I_{\alpha_1})^{-1}$ existe et chaque élément de cette matrice est essentiellement borné .

On étudie avec plus de detail le cas ou la matrice M est symétrique.

On désigne par $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_{2^n}(x)$ ses valeurs propres (elles sont réelles et parmi elle il y a,peut être les mêmes) et par $\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x), \ldots, \tilde{\varphi}_{2^n}(x)$ ses fonctions propres telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j M &= \lambda_j \tilde{\varphi}_j, j = 1, 2, \ldots, 2^n \\ \tilde{\varphi}_j \overline{\tilde{\varphi}}_k^t &= 0, j \neq k \\ \tilde{\varphi}_j \overline{\tilde{\varphi}}_j^t &= 1, j, k = 1, 2, \ldots, 2^n \end{aligned}$$

Soit U^* un opérateur unitaire dans $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_n^+)$ défini par la matrice :

$$G^* : U^*\tilde{f} = \tilde{f}G^* \text{ , ou } \quad G^{*t} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1^t & \tilde{\varphi}_2^t & \dots & \tilde{\varphi}_{2^n}^t \end{bmatrix}$$

On pose :

$$\Lambda = G^*MG$$

qui est une matrice diagonale avec la diagonale principale $(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{2^n}(x))$ (tous les autres éléments sont égaux à 0).

On désigne par B l'opérateur défini dans $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$ par la matrice $\Lambda = \Lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$:

$$B\tilde{f} = \tilde{f}\Lambda \text{ , } \quad \tilde{f} \in \tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$$

On a $\tilde{A} = U^*BU$, donc pour tout $\tilde{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{2^n}) \in \tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$ on a :

$$R_\lambda(B) = \tilde{f}(\Lambda - \lambda I_{\alpha_1})^{-1} = \sum_{i=1}^{2^n} (\lambda_i - \lambda)^{-1} \tilde{f}_i$$

la résolvante de B ou $\tilde{f}_i = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$

Si :

$$R(\lambda_j) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \lambda_j(x), x \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

est le domaine d'arrivée essentiel de la fonction $\lambda_j(x)$ alors l'ensemble résolvante des opérateurs B , $\tilde{A}$, T , A est

$$\rho(B) = \rho(\tilde{A}) = \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{2^n} R(\lambda_j)$$

Pour écrire les formules des résolvantes des opérateurs $\tilde{A}$ et T introduisons les désignations suivantes : $\tilde{L}_{n,i}^2(\mathbb{R}_+^n)$ est le sous-éspace de $\tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$ engendré par $\tilde{f}_i = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$

,P_i est l'orthoprojecteur de $\tilde{L}^2_n(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_i &= U^* P_i U \\ Q_i &= V^{-1}\tilde{Q}_i V \\ i &= 1, 2, \dots, 2^n\end{aligned}$$

sont les orthoprojecteurs dans les espaces réspectivement $\tilde{L}^2_n(\mathbb{R}^n_+)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$

($\tilde{Q}_i$ est l'orthoprojecteur sur le sous-espace propre de la matrice M)

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_i\tilde{f} &= \tilde{f}_i^\circ \\ Q_i f &= f_i^\circ\end{aligned}$$

Avec ces notations on a :

$$\begin{aligned}R_\lambda(\tilde{A})\tilde{f} = U^* R_\lambda(B) U\tilde{f} &= \sum_{i=1}^{2^n}(\lambda_i - \lambda)^{-1} U^* P_i U\tilde{f} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n}(\lambda_i - \lambda)^{-1}\tilde{Q}_i\tilde{f} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n}(\lambda_i - \lambda)^{-1}\tilde{f}_i^\circ.\end{aligned}$$

La résolvante de T s 'écrit :

$$\begin{aligned}R_\lambda(T)f &= V^{-1}R_\lambda(\tilde{A})\tilde{f} = V^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2^n}(\lambda_i - \lambda)^{-1}\tilde{Q}_i\tilde{f}\right] \\ R_\lambda(T)f &= V^{-1}R_\lambda(\tilde{A})\tilde{f} = V^{-1}\left[\sum_{i=1}^{2^n}(\lambda_i - \lambda)^{-1}\sum_{j=1}^{2^n}\left(\tilde{Q}_i\tilde{f}\right)_j\right] \\ R_\lambda(T)f &= V^{-1}R_\lambda(\tilde{A})\tilde{f} = \sum_{i=1}^{2^n}\left[\sum_{j=1}^{2^n} V^{-1}(\lambda_i - \lambda)^{-1}(\tilde{f}_i^\circ)_j\right]\end{aligned}$$

On désigne par 1_e la fonction indicatrice de l'ensemble e

Comme :

$$V 1_{\mathbb{R}^n_{\alpha_i}} f = \tilde{f}_i = (0, \ldots, f_i, \ldots, 0)$$

Alors :

$$V^{-1} \tilde{f}_i = 1_{\mathbb{R}^n_{\alpha_i}} f \tag{3.1}$$

les fonctions $\lambda_i^*(x), i = 1, 2, \ldots, 2^n$ sont définies sur $\mathbb{R}^n_+$, on les prolonge sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$f_i^*(x) = f_{ij}^\circ(xI_{\alpha_j}) \text{ si } x \in \mathbb{R}^n_{\alpha_j}$$

et introduisons les fonctions suivantes :

$$f_i^*(x) = f_{ij}^\circ(xI_{\alpha_j}) \text{ si } x \in \mathbb{R}^n_{\alpha_j} \ j = 1, 2, \ldots, 2^n$$

ou :

$$\tilde{f}_i^\circ = (f_{i1}^\circ, f_{i2}^\circ, \ldots, f_{i2^n}^\circ)$$

En tenant compte de (3.1) et de l'égalité

$$(\lambda_i - \lambda)^{-1} (\tilde{f}_i^\circ)_j = \big(0, \ldots, 0, (\lambda_i - \lambda)^{-1} f_{ij}^\circ, 0, \ldots, 0\big)$$

On aura :

$$\begin{aligned}
(R_\lambda(T) f)(x) &= \sum_{i=1}^{2^n} [\lambda_i^*(x) - \lambda]^{-1} \sum_{j=1}^{2^n} 1_{\mathbb{R}^n_{\alpha_j}}(x) f_i^*(x) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} (\lambda_i^*(x) - \lambda)^{-1} f_i^*(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

or on a pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(R_\lambda(T) f)(x) = \sum_{i=1}^{2^n} [\lambda_i^*(x) - \lambda]^{-1} (Q_i f)(x).$$

Finalement, comme :

$$A = \overline{F}TF,$$

On a :

$$R_\lambda(A)f = \sum_{i=1}^{2^n} \left[\overline{F}(\lambda_i^*(x) - \lambda)^{-1} * \overline{F}(Q_i \hat{f}) \right].$$

3.3 Fonction Spectrale de l'Opérateur A

Soient $E_t^B, \tilde{E}_t, E_t^\circ, E_t$ les fonctions spectrales respectivement des opérateurs B, $\tilde{A}, T$, A cherchons tout d'abord ,la fonction spectrale E_t^B de B ,et ensuite,comme chaque couple d'opérateurs écrits est un couple d'opérateurs unitairement équivalents nous trouvons pas à pas la fonction spectrale de A.

Soit

$$B_i = B|_{\tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)}$$

la restriction de B sur $\tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)$.

Il est évident que les espaces $\tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)$ sont réduisants par B et l'opérateur B_i est un opérateur de multiplication par $\lambda_i(x)$ dans $\tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)$ ie

$$\text{si } \tilde{f}_i \in \tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+) \text{ , alors } \quad B_i\tilde{f}_i = \lambda_i \tilde{f}_i$$

Par consequent ,on a pour tout intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $\tilde{f}_i \in \tilde{L}^2_{n,i}(\mathbb{R}^n_+)$

$$E^{B_i}(\Delta)\tilde{f}_i = 1_{e_i^+(\Delta)}\tilde{f}_i$$

où

$$e_i^+(\Delta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \lambda_i(x) \in \Delta \right\}$$

Comme :

$$B = \sum_{i=1}^{2^n} \oplus B_i$$

On aura pour tout $\tilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}) \in \tilde{L}_n^2(\mathbb{R}_+^n)$:

$$E^B(\Delta)\tilde{f} = \sum_{i=1}^{2^n} 1_{e_i^+(\Delta)}\tilde{f}_i \text{ , ou } \quad \tilde{f}_i = (0, \ldots, 0, f_i, 0, \ldots, 0)$$

Pour la fonction spectrale $\tilde{E}_t$ de $\tilde{A}$, nous trouverons de l'égalité : $\tilde{E}_t = U^* E_t^B U$

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\Delta)\tilde{f} &= U^* E^B(\Delta) U \tilde{f} = \sum_{i=1}^{2^n} U^* 1_{e_i^+(\Delta)} P_i(U\tilde{f}) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} 1_{e_i^+(\Delta)} \tilde{Q}_i \tilde{f}\end{aligned}$$

De même pour la fonction spectrale E_t° de T nous trouverons de l'égalité ; $E_t^\circ = V^{-1}\tilde{E}_t V$

$$\begin{aligned}E^0(\Delta)f = V^{-1}\tilde{E}(\Delta)\tilde{f} &= \sum_{i=1}^{2^n} 1_{e_i^+(\Delta)} V^{-1}\tilde{Q}_i\tilde{f} \\ &= \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} V^{-1} 1_{e_i^+(\Delta)} (\tilde{f}_i^\circ)_j, (\tilde{f}_i^\circ)_j = P_j \tilde{f}_i^\circ\end{aligned}$$

Désigne par $1^*_{e_i^+(\Delta)}$ le prolongement pair de la fonction $1_{e_i^+(\Delta)}$ de $\mathbb{R}_+^n$:$1^*_{e_i^+(\Delta)}(x) = 1_{e_i^+(\Delta)}(xI_{\alpha_j})$ si $x \in \mathbb{R}^n_{\alpha_j}$

On a :

$$1^*_{e_i^+(\Delta)} = 1_{e_i(\Delta)}. \text{ ou } e_i(\Delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_i^*(x) \in \Delta\}$$

en tenant compte de $V^{-1}\tilde{f}_i = 1_{\mathbb{R}^n_{\alpha_i}} f$ on a :

$$\left(E^0(\Delta)f\right)(x) = \sum_{i=1}^{2^n} 1_{e_i(\Delta)}(x)\tilde{f}_i(x) \text{ , } x \in \mathbb{R}^n$$

ou

$$E^0(\Delta)f = \sum_{i=1}^{2^n} 1_{e_i(\Delta)} Q_i f$$

Enfin, nous pouvons écrire la fonction spectrale de l'opérateur A. On a quelque soit

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et quelque soit l'intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$E(\Delta)f = \overline{F}E^0(\Delta)\hat{f} = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{1}_{e_i(\Delta)} * \overline{F}(Q_i\hat{f})$$

Exemple 1 *On considère le cas particulier :*

$$Af = \sum_{i=1}^{2^n} a * \check{f}^{(\alpha_i)}$$

où $a \in S_1'(\mathbb{R}^n)$ et vérifie la condition :$\hat{a} = k$ est une fonction réelle paire par rapport à chaque coordonnée x_i. Dans ce cas A est auto-adjoint et

$$\det\left[M - \lambda I_\alpha\right] = \lambda^{2^n-1}\left[\lambda - 2^n k(x)\right]$$

D'ou il résulte que la matrice $M(x)$ a deux valeurs propres : 0 et $2^n k(x)$. De plus la valeur propre 0 est de multiplicité $2^n - 1$, et la valeur propre $2^n k(x)$ est simple.Par conséquent,le spectre de A est l'adhérence de l'ensemble $0 \cup \{y = 2^n k(x), x \in \mathbb{R}^n\}$.
Les fonctions propres correspondantes à ces valeurs propres ne dépendent pas de x. Considérons par plus de detail le cas quand $n = 2$ .Dans ce cas la matrice M est une matrice de type $(4,4)$,pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nous écrivons $f(x,y)$.
Les vecteurs orthonormés $\tilde{\varphi}_i$, $i = 1,2,3,4$ de la matrice $M(x)$ correspondants respectivement aux valeurs propres 0 et $4k(x,y)$ sont :

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$$

$$\tilde{\varphi}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

$$\tilde{\varphi}_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

or

$$G=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\alpha_1=(0,0)$$

$$\alpha_2=(1,0)$$

$$\alpha_3=(0,1)$$

$$\alpha_4=(1,1)$$

Pour toute fonction $f=f(x,y)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ *on a :*

$$\begin{aligned} Vf &= \tilde{f}(x,y) \\ &= (f_1,f_2,f_3,f_4) \\ &= \left(f(x,y),f(-x,y),f(x,-y),f(-x,-y)\right),(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U\tilde{f} &= (f_1,f_2,f_3,f_4)G \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}}\left[f(x,y)-f(-x,y)\right],\frac{1}{\sqrt{2}}\left[f(x,-y)-f(-x,-y)\right], \\ &\quad \frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(-x,y)-f(x,-y)-f(-x,-y)\right], \\ &\quad \frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(-x,y)+f(x,-y)+f(-x,-y)\right]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^{\circ}(x,y) &= U^*P_1U\tilde{f} \\ &= \left(\frac{1}{2}\left[f(x,y)-f(-x,y)\right],-\frac{1}{2}\left[f(x,y)-f(-x,y)\right],0,0\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_2^{\circ}(x,y) &= U^* P_2 U \tilde{f} \\
&= \left(0, 0, \frac{1}{2}\left[f(x,-y) - f(-x,-y)\right], -\frac{1}{2}\left[f(x,-y) - f(-x,-y)\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_3^{\circ}(x,y) &= U^* P_3 U \tilde{f} \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(-x,y) - f(x,-y) - f(-x,-y)\right]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[f(x,y) + f(-x,y) - f(x,-y) - f(-x,-y)\right](1, 1, -1, -1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_4^{\circ}(x,y) &= U^* P_4 U \tilde{f} \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(-x,y) + f(x,-y) + f(-x,-y)\right]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[f(x,y) + f(-x,y) + f(x,-y) + f(-x,-y)\right](1, 1, -1, -1)
\end{aligned}
$$

$$
Q_1 f = f_1^{\circ}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[f(x,y) - f(-x,y)\right] & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_{\alpha 2} \\ \\ 0 & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_{\alpha_3} \cup \mathbb{R}^2_{\alpha_4} \end{cases}
$$

$$
Q_2 f = f_2^{\circ}(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_{\alpha_2} \\ \\ \frac{1}{2}\left[f(x,y) - f(-x,y)\right] & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_{\alpha_3} \cup \mathbb{R}^2_{\alpha_4} \end{cases}
$$

$$
Q_3 f = f_3^{\circ} = \begin{cases} \frac{1}{4}\left[f(x,y) + f(-x,y) - f(x,-y) - f(-x,-y)\right] & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_{\alpha_2} \\ \\ -\frac{1}{4}\left[f(x,y) + f(-x,y) - f(x,-y) - f(-x,-y)\right] & si\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_{\alpha_3} \cup \mathbb{R}^2_{\alpha_4} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_4 f &= f_4^{\circ}(x,y) \\
&= \frac{1}{4}\left[f(x,y) + f(-x,y) + f(x,-y) + f(-x,-y)\right] \\
&= f_p(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Écrivons les résolvantes de Tet de A

$$(R_\lambda(T))\,(x,y) = -\frac{1}{\lambda}\left[(Q_1f)(x,y)+(Q_2f)(x,y)+(Q_3f)(x,y)\right]+\left[4k(x,y)-\lambda\right]^{-1}(Q_4f)(x,y)$$

$$(R_\lambda(T))\,(x,y) = \frac{1}{4\lambda}\left[f(-x,y)+f(x,-y)+f(-x,-y)-3f(x,y)\right]+\left[4k(x,y)-\lambda\right]^{-1}f_p(x,y)$$

Comme

$$\widehat{(4\lambda)^{-1}} = (4\lambda)^{-1}\delta$$

ou δ est la fonction de Dirac. Alors on a pour la résolvante de A

$$(R_\lambda(A))\,(x,y) = \frac{1}{4\lambda}\left[f(-x,y)+f(x,-y)+f(-x,-y)-3f(x,y)\right]+\left(\left[4k\widehat{(x,y)-\lambda}\right]^{-1} * f_p\right)(x,y)$$

On écrit les fonctions spectrales de T et de A

Si $0 \notin \Delta$ on a :

$$E^\circ(\Delta)f = 1_{e(\Delta)}\cdot f_p$$

où

$$e(\Delta) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4k(x,y)\in\Delta\right\}$$

$$f_p(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(-x,y)+f(x,-y)+f(-x,-y)\right]$$

$$E(\Delta)f = \hat{1}_{e(\Delta)} * f_p$$

Si $0 \in \Delta$ alors :

$$E^\circ(\Delta)f(x,y) = \frac{1}{4}\left[3f(x,y)-f(-x,y)-f(x,-y)-f(-x,-y)\right]+1_{e(\Delta)}(x,y)f_p(x,y)$$

$$E(\Delta)f(x,y) = \frac{1}{4}\left[3f(x,y)-f(-x,y)-f(x,-y)-f(-x,-y)\right]+\left(\hat{1}_{e(\Delta)} * f_p\right)(x,y)$$

Bibliographie

[1] Akhiezer N. I. and Glazman I. M. : **Theory of linear operators in Hilbert space,** Pitman,Boston 1981.

[2] Alexandrov E., Hebbeche A. : *Fonctions spectrales d'une certaine classe d'opérateurs symetriques,* Sciences& Technologie, 17 (2002), 7-10.

[3] Aleksandrov E.L. : *The resolvents of a symmetric nondensely defined operator,* (Russian), *Izv.* Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika. **98** (1970), 7, 3-12.

[4] Berezanskii Yu M. : **Décomposition selon les fonctions propres des opérateurs auto-adjoints**, Naoukova Dumka, Kiev, 1965.

[5] Carleson R. : *Eigenfunction expansions for self-adjoint integro-differential operators,* Pacific J. Math., **81** (1979), 2, 327-347.

[6] Catchpole E.A. : *An integro-differential operator,* J. London Math. Soc. **6** (1973), 2, 513-523.

[7] Chaudhuri J. C. and Everitt W. N. : *On the spectrum of ordinary second order differential operators,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A **68** (1969), 95-119.

[8] Coddington E.A. and Levinson N. : **Theory of ordinary differential equations**, Mc Graw-Hill, New york, 1955.

[9] Hebbeche A. : *Generalized resolvents and spectrum for a certain class of perturbed symmetric operators,* Journal of Applied Mathematics, 1 (2005), 81-92.

[10] Hebbeche A., Alexandrov E. L. : *Sur la completude du systeme des puissances d'une fonction dans les espaces* $L^2(X, \mu)$. Sciences& Technologie, A, 20 (2003), 7-11.

[11] Kato T. : **Perturbation theory for linear operators**, Springer-Verlag Berlin, 1966.

[12] Korotkov V.B. : **Operateurs integraux**, Université de Novosibirsk, 1977.

[13] Kostyuchenko A.G., Sargsyan I.S. : **Distribution of eigenvalues. Selfadjoint ordinary differential operators.** Nauka, (1970), Moscou (Russian).

[14] Krein M. G. : *The fundamental propositions of the theory of representations of Hermitian operators with deficiency index (m,m)*, (Russian), Ukrain. Mat. J., **1** (1949), 2, 3–66.

[15] Krein M. G. : *Sur les opérateurs Hermitiens avec les indices de défaut egaux à un*, Doklady Akad. Nauk SSSR, **43** (1944), 8, 339.

[16] Kruglikova O.P. : *Generalized resolvents and spectral functions of an integro-differential operator*, J. Funkts Anal., **33** (1992), 46-49.

[17] Kruglikova O.P. : *Generalized resolvents and spectral functions of a first order integro-differential operator in the space of the vector-valued functions*, (Russian), Funkts. Anal. **36** (1997), 24-30 .

[18] Levitan B.M., Sargsian I.S. : **Introduction to spectral theory, Selfadjoint ordinary differential operators**. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 39, Providence, R.I. : American Mathematical Society. XI, (1975).

[19] Malamud M.M. : *On formula of the generalized resolvents of a nondensely defined hermitian operators*, (Russian), Ukr. Mat. Journal, **44** (1992), 1658-1688. (English translation : Sov. Math., Plenum Publ. Corp., 0041-5995/92/4412-1523, 1993, 1522-1546).

[20] Mckelvey R. : *The spectra of minimal self-adjoint extensions of a symmetric operators*, Pacific J. Math, **12** (1962), 3, 1008-1022.

[21] Naimark M.A. : **Linear Differential Operators**, New York, Ungar, 1968.

[22] Naimark M.A. *On self-adjoint extensions of the second kind of a symmetric operator*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **4** (1940), 1, 53-104.

[23] Naimark M.A. *Spectral function of a symmetric operators*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **4** (1940), 277-318.

[24] Naimark M.A. On *spectral function of a symmetric operators*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **7** (1940), 6, 285-296.

[25] Sinko G. I. : *On the spectral theory of a second order integro-differential operator*, (Russian), Funkts. Anal. **27** (1987), 172-181.

[26] Straus A. V. : *Extensions, characteristic functions and generalized resolvents of symmetric operators*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **178** (1968), 790–792.

[27] Straus A. V. : *The spectral expansions of a regular symmetric operator,* Doklady Akad. Nauk. SSSR, **204** (1972), 52-55.

[28] Titchmarsh E. C., **Eigenfunction expansions associated with second order differential equations**, Part I., O.U.P., 1962.

[29] Vo-Khac-Khoan : **Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles,** V. 1, 2. Vuibert, Paris 1972.

Résumé

Le présent mémoire est consacré à l'étude des propriétés spectrales de certaines classes d'opérateurs. Des formules explicites des résolvantes et des fonctions spectrales des opérateurs de multiplication, de convolution et du type de convolution ont été obtenues. On donne le spectre de l'opérateur de multiplication. Enfin les résultats obtenus ont été illustrés par un exemple concret.

Mots-clés : Distributions tempérées, Fonctions Spectrales, Opérateurs Auto-Adjoints, Opérateurs de Convolution, Opérateurs de Multiplication, Résolvante, Spectre.

Abstract

The present work is devoted to the study of spectral properties of a certain class of operators. Explicit formulaes of the resolvents and spectral functions of operators of multiplication, convolution and convolution type are obtained. We give the spectre of multiplication operator. Obtained results are then applied to the study of a concrete example.

Key-words : Convolution operators, Convolution type operators, Multiplication operators, Resolvent, Self-adjoint operators, Spectre, Spectral functions.

ملخص

خصصت هذه المذكرة لدراسة الخواص الطيفية لبعض أصناف المؤثرات. توصلنا إلى إيجاد الصيغ الصريحة للحالات و الدوال الطيفية لمؤثرات الضرب، مؤثرات التزويج ومؤثرات من نمط التزويج. نعطي طيف مؤثر الضرب. نوضح النتائج المحصل عليها في مثال.

الكلمات المفتاحية: توزيعات معتدلة، دوال طيفية، مؤثرات قرينة لذاتها، مؤثرات التزويج، مؤثرات الضرب، حالة، طيف.