REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

Magister

Thème

Etude d'un Problème spectral non local

Option

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Par :

BOUROUAIAH MESSAOUD

Devant le jury :

Président :	**M. DENCHE**	**Prof**	**Univ .Constantine**
Rapporteur :	**M. ABDELLI**	**M.C**	**Univ .Constantine**
Examinateurs :	**A. L. MARHOUNE**	**Prof**	**Univ .Constantine**
	C. SAIDOUNI	**M.C**	**Univ .Constantine**

Soutenue le : 25/05/2011

Table des matières

0.1-INTRODUCTION GENERALE

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique[5],[24],[28]. en thermo élasticité [48], et en physique des plasmas [53], peuvent être ramenés à des problèmes aux limites généralisées qui contient une condition intégrale plus un autre liant la fonction inconnue et ses dérivées aux extrémités de l'intervalle. De tels problèmes ont été étudiés par différentes méthodes dans[1],[5],[26],[27],[28],[29]. Le but de ce travail est l'étude d'une certaine classe de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles avec conditions généralisées. L'étude est faite par la réduction du problème posé à une équation différentielle opérationnelle à coefficient opératoriel non borné et en général à domaine non dense. D'où l'étude du comportement de la résolvante joue un rôle primordial. On commence par les notions préliminaires qui rassemblent des connaissances utiles pour la suite de notre travail.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire avec conditions aux limites non locales généralisées. Différents problèmes aux limites avec conditions non locales ont été étudiés dans les travaux[2],[3],[4],[9],[10],[11],[12],[13],[15],[16],[17],[18],[19],[21],[22],[24],[25],[27],[28],[31],[38],[41],[42],[43],[46],[50],[53],[55],[56],[57],[58],[59],[60],[62]. Maintenant dans $L^P(0,1)$, le but de notre étude est d'établir des conditions facilement vérifiables en termes de coefficients des conditions aux limites dites régulières on montre la décroissance maximale de la résolvante, pour $\alpha_{11}\beta_{21}\alpha_{21}\beta_{11}\neq 0$ d'où le semi groupe engendré est analytique et dans le cas où le domaine est dense il est fortement continu, par contre dans le cas $\alpha_{11}\beta_{21}\alpha_{21}\beta_{11}=0$, on montre que la résolvante a une décroissance non maximale, et aussi on montre que cette estimation est optimale. Dans ce cas le semi groupe engendré par l'opérateur en question est générateur d'un semi groupe à singularités [9],[12],[13],[51],[52]. La théorie des semi groupes à singularités a été étudiée également dans [34],[61],[63]. Le second chapitre est consacré à l'étude L^P (0,1) où $1\leq P < +\infty$ avec des conditions aux limites non locales comme celui du chapitre 1. Dans le cas des conditions aux limites dites régulières on montre la décroissance maximale de la résolvante, pour $\alpha_{11}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{11}\neq 0$ et aussi pour P=1 le semi groupe engendré est analytique et dans le cas où le domaine est dense il est fortement continu, mais pour le cas $\alpha_{11}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{11}$ =0, on montre que la résolvante a une décroissance non maximale, et aussi on montre que cette estimation est optimal. Dans ce cas le semi groupe engendré par l'opérateur en question est générateur d'un semi groupe à singularités. La deuxième parti de ce chapitre est consacré à l'étude L^P (0,1) où $1\leq P< +\infty$ Avec des conditions aux limites non locales comme celui du chapitre 1. On extrait ici une classe de conditions aux limites dites non régulières qui garantissent une décroissance non maximale de la résolvante. Par exemple pour P=1 , on a une perte égale ½ et la perte et la même pour $1 <P <+ \infty$ dans l'estimation. Dans ce cas aussi le semi groupe engendré par l'opérateur en question est générateur d'un semi groupe à singularités.

Dans ces deux chapitres on a repris l'étude faite dans [41].

Le troisième chapitre est consacré â l'étude d'un problème spectral d'une équation d'ordre deux avec condition aux limites non locales. On a obtenu une condition nécessaire et suffisante de la presque régularité d'ordre arbitraire un qui nous permet de répondre immédiatement et élémentairement à la question de la presque régularité d'un problème spectrale et permet de déterminer l'ordre de la presque régularité. Il est montré que pour les équations à coefficients variables le problème de la presque régularité pour tout ordre existe, on rappelle que ce problème a été traité dans [39].

0.1-Introduction :

0.2 - Notions Préliminaires :

0.2.1-Fonction de Green d'opérateur différentiel dans le cas général :

on considère le problème aux limites suivant dans l'intervalle [0,1]

$$\begin{cases} y^{(n)} + \mathrm{P}_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{P}_n(x,\lambda)y = f(x) & 0 < x < 1 \quad (1) \\ u_i(y,\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_{ij}\, y^{(j)}(0) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(1)\right) = 0 & i = 1 \dots n \quad (2) \end{cases}$$

Où $\mathrm{P}_i(x,\lambda)$. $i = \overline{1,\mathrm{n}}$ des fonctions des valeurs complexes

et $\alpha_{ij}\ \beta_{ij}$ des nombres complexes, et λ est un paramètre spectral

et la fonction $f \in \mathrm{C}[0,1]$

On' a l'équation caractéristique de (1)

$$\mathrm{W}^{\mathrm{n}} + \mathrm{P}_{1,1}\mathrm{W}^{\mathrm{n}-1} + \cdots + \mathrm{P}_{\mathrm{n}-1,\mathrm{n}-1}\mathrm{W} + \mathrm{P}_{\mathrm{n},\mathrm{n}} = 0 \qquad (3)$$

On note par $\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_n$ ses racines.

Par le théorème de Poincaré l'équation homogène correspondante à l'équation (1) admet un système fondamental des solutions particulières $y_i(x,\lambda)$; $i = \overline{1,\mathrm{n}}$ qui sont des fonctions entières du paramètre λ.

Par la méthode de variation des constantes on cherche la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x,\lambda)y_i(x,\lambda)$$

On obtient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C'_i(x,\lambda)y_i(x,\lambda) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C'_i(x,\lambda)y'_i(x,\lambda) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C'_i(x,\lambda)y_i^{(n)}(x,\lambda) = f(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien du système fondamental des solutions particulières de l'équation homogène correspondante à (1) donc

$$W(x,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \ \dots & y_n(x,\lambda) \\ y'_1(x,\lambda) & y'_2(x,\lambda) \ \cdots & y'_n(x,\lambda) \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ y_1^{(n)}(x,\lambda) & y_2^{(n)}(x,\lambda) \ \dots & y_n^{(n)}(x,\lambda) \end{vmatrix}$$

On suppose que $W(x,\lambda) \neq 0$

Remarque :

Les valeurs caractéristique (v, c) du problème (1) sont déterminées par les zéros du déterminant $\Delta(\lambda)$ qui est de la forme suivante :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & \cdots & u_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(y_1) & \cdots & u_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Ainsi le système (4) admet une solution unique

$$c'_i(x,\lambda) = \frac{W_{2i}(x,\lambda) f(x)}{W(x,\lambda)} \qquad i = \overline{1,n} \tag{5}$$

t.q les fonctions $W_i(x,\lambda)$ $i = \overline{1,n}$ Sont les cofacteurs des éléments $y_i^{(n-1)}(x,\lambda)$ du déterminant $W(x,\lambda)$.

En intégrant (5) de 0 à x, on obtient

$$C_i(x,\lambda) = C_i(0,\lambda) + \int_0^x \frac{W_{2i}(t,\lambda)}{W(t,\lambda)} f(t)dt \qquad i = \overline{1,n}$$

En intégrant (5) de 1 à x, on obtient

$$C_i(x,\lambda) = C_i(1,\lambda) + \int_1^x \frac{W_{2i}(t,\lambda)}{W(t,\lambda)} f(t)dt \qquad i = \overline{1,n}$$

Donc

$$C_i(x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(C_i(0,\lambda) + C_i(1,\lambda)\big) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)} f(t)dt - \frac{1}{2}\int_x^1 \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)} f(t)dt$$

D'où la solution générale y(x,λ) de l'équation (1) admet la représentation suivante :

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\big(C_i(0,\lambda) + C_i(1,\lambda)\big) y_i(x,\lambda) + \int_0^x \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda) y_i(x,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)} f(t)dt$$
$$- \int_x^1 \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda) y_i(x,\lambda)}{W(t,\lambda)} f(t)dt$$

en posant

$$C_i = \frac{1}{2}\big(C_i(0,\lambda) + C_i(1,\lambda)\big)$$

et

$$g(x,t,\lambda) = \pm\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i(x,\lambda)\frac{\mathrm{W}_{2i}(\mathrm{t},\lambda)}{\mathrm{W}(\mathrm{t},\lambda)}$$

Si $0 < t < x < 1$ le signe de $g(x,t,\lambda)$ est négatif

Il est positif si $0 < x < t < 1$

Donc on' a

$$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(x,\lambda)\frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)} & si\ \ x < t \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i(x,\lambda)\frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)} & si\ \ x > t \end{cases}$$

On pose

$$Z_i(t,\lambda) = \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)}{\mathrm{W}(t,\lambda)}$$

On obtient

$$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x,\lambda)Z_i(t,\lambda) & \text{si } x < t \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x,\lambda)Z_i(t,\lambda) & \text{si } x > t \end{cases}$$

Donc la solution générale de l'équation (1) est la représentation suivante

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x,\lambda) + \int_0^1 g(x,t,\lambda) f(t)\,dt \qquad i = \overline{1,n} \qquad (6)$$

Finalement pour obtenir la solution du problème (1) on détermine les conditions $C_i \quad i = \overline{1.n}$ dans la relation (6) de telle manière qu'elle vérifie les conditions aux limites dans (1) ainsi on obtient

$$u_i\big(y(x,\lambda)\big) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_j\big(y_i(x,\lambda)\big) + \int_0^1 u_j\big(g(x,t,\lambda)\big) f(t)\,dt$$

On a $\qquad u_j\big(y(x,\lambda)\big) = 0$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} C_i u_i\big(y_i(x,\lambda)\big) = -\int_0^1 u_i\big(g(x,t,\lambda)\big) f(t)\,dt \qquad i = \overline{1,n} \qquad (7)$$

On a le déterminant de ce système

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & \dots & u_1(y_n) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & \dots & u_2(y_n) \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ alors le système (7) admet des solutions $C_1, C_2,,, C_n$ données par

$$C_1=\int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_2) & u_1(y_3) \ \dots \ u_1(y_n) & u_1(\mathrm{g}) & \int_0^1 u_1\big(\mathrm{g}(x,\mathrm{t},\lambda)\big)f(t)dt \\ u_2(y_2) & u_2(y_3) \ \dots \ u_2(y_n) & u_2(\mathrm{g}) & \int_0^1 u_2\big(\mathrm{g}(x,\mathrm{t},\lambda)\big)f(t)dt \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ u_n(y_2) & u_n(y_3) \ \dots \ u_n(y_n) & u_n(\mathrm{g}) & \int_0^1 u_n\big(\mathrm{g}(x,\mathrm{t},\lambda)\big)f(t)dt \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)dt$$

Et

$$c_2=\int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_2) & u_1(y_3) \ \dots \ u_1(y_n) & u_1(g) \\ u_2(y_2) & u_2(y_3) \quad u_2(y_n) & u_2(g) \\ & \vdots & \\ u_n(y_2) & u_n(y_3) \ \dots \ u_n(y_n) & u_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)dt$$

.

.

.

.

.

.

$$c_n=\int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_{n-1}) & u_1(g) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & \cdots & u_2(y_{n-1}) & u_2(g) \\ & & \vdots & & \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_{n-1}(y_{n-1}) & u_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)dt$$

En remplaçant $C_1, C_2,,, C_n$ dans (6), on obtient la représentation de la solution du problème (1).

Ce qui donne :

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} u_1(y_2) & u_1(y_3) \ \dots \ u_1(y_n) & u_1(g) & \int_0^1 u_1\big(g(x,t,\lambda)\big)f(t)dt \\ u_2(y_2) & u_2(y_3) \ \dots \ u_2(y_n) & u_2(g) & \int_0^1 u_2\big(g(x,t,\lambda)\big)f(t)dt \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ u_n(y_2) & u_n(y_3) \ \dots \ u_n(y_n) & u_n(g) & \int_0^1 u_n\big(g(x,t,\lambda)\big)f(t)dt \end{vmatrix} y_1(x,\lambda)+ \right.$$

$$\dots + \left. \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_{n-1}) & u_1(g) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) & \cdots & u_2(y_{n-1}) & u_2(g) \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_{n-1}(y_{n-1}) & u_n(g) \end{vmatrix} y_n(x,\lambda) + \Delta(\lambda) g(x,t,\lambda) \right\} f(t)dt$$

Ce qui donne :

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) & g(x,t,\lambda) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_n) & u_1(g) \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & . & & \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_n(y_n) & u_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)dt$$

Ainsi en posant

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & g(x,t,\lambda) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_n) & u_1(g) \\ & & \vdots & & \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_n(y_n) & u_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} \tag{8}$$

et

$$H(x,t,\lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) & g(x,t,\lambda) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & \cdots & u_1(y_n) & u_1(g) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n(y_1) & u_n(y_2) & \dots & u_n(y_n) & u_n(g) \end{vmatrix}$$

Donc

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\mathrm{H}(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

Finalement on obtient : $y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)dt$

Définition :

$G(x,t,\lambda)$ est dite la fonction de Green du problème (1).

0.3 Position du problème :

D'après l'équation (1) on considère le problème spectral suivant

Si n=2 et on note $p_1(x,\lambda)=0$ et $p_2(x,\lambda)=q(x)-\lambda^2$

On obtient un problème spectral du second ordre

$$\begin{cases} y'' + q(x)y - \lambda^2 y = f(x) & 0<x<1 \qquad (9) \\ u_i(y) = \sum_{j=0}^{1}\left(\alpha_{ij}y^{(j)}(0)+\beta_{ij}y^{(j)}(0)\right)=0 & i=\overline{1,2} \qquad (10) \end{cases}$$

0.3.1-Problème spectrale du second ordre dans le cas q(x)=0 $\forall x \in [0,1]$

Où q(x) est une fonction á valeurs complexes

■ Si q(x) = 0 $\forall\, x \in [0,1]$

Alors on a le problème suivant

$$\begin{cases} y'' - \lambda^2 y = f(x) & 0<x<1 \qquad (11) \\ u_i(y) = \sum_{j=0}^{1}\left(\alpha_{ij}y^{(j)}(0)+\beta_{ij}y^{(j)}(0)\right)=0 & i=\overline{1,2} \qquad (10) \end{cases}$$

0.3.2- Fonction de Green d'opérateur différentiel du Second ordre :

Par le théorème de Poincaré l'équation homogène correspondante à l'équation dans (11) admet un système fondamental des solutions particulières $y_i(x,y)$ i=$\overline{1,2}$ qui sont des fonctions entières du paramètre λ.

On cherche la solution générale de l'équation (11) par la méthode de variation des constantes sous la forme :

$$y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2}C_i(x,\lambda)y_i(x,\lambda)$$

On obtient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2}C_i'(x,\lambda)y_i(x,\lambda) = C'_1(x,\lambda)y_1(x,\lambda)+C'_2(x,\lambda)y_2(x,\lambda)=0 \\ \sum_{i=1}^{2}C_i'(x,\lambda)y_i'(x,\lambda) = C'_1(x,\lambda)y_1'(x,\lambda)+C'_2(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)=f(x) \end{cases} \qquad (12)$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien du système fondamental des solutions particulières de l'équation homogène correspondant à (11).

Donc :

$$\mathrm{W}\,(x,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) \\ y'_1(\lambda) & y'_2(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

D'où le système (12) admet une solution unique

$$C'_i\,(x,\lambda) = \frac{\mathrm{W}_{2i}(x,\lambda)\mathrm{f}(x)}{\mathrm{W}\,(x,\lambda)} \qquad i = \overline{1,2} \tag{13}$$

$$C'_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_2(x,\lambda) & 0 \\ y'_2(x,\lambda) & -f(x) \end{vmatrix}}{\mathrm{W}(x,\lambda)} = \frac{-y_2(x,\lambda)f(x)}{\mathrm{W}(x,\lambda)} \Rightarrow \mathrm{W}_2(x,\lambda) = -y_2(x,\lambda)$$

$$C'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) \\ -f(x) & y'_1(x,\lambda) \end{vmatrix}}{\mathrm{W}(x,\lambda)} = \frac{y_1(x,\lambda)f(x)}{\mathrm{W}(x,\lambda)} \Rightarrow \mathrm{W}_4(x,\lambda) = y_1(x,\lambda)$$

Où $\mathrm{W}_{2i}(x,\lambda)$ est le complément algébrique de l'élément se trouvant à la 2éme ligne et à la iéme colonne .

En intégrant (13) de 0 à x, on obtient

$$C_i(x,\lambda) = C_i(0,\lambda) + \int_0^x \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)\mathrm{f(t)}}{\mathrm{W}(t,\lambda)}\,dt \qquad i = \overline{1,2}$$

En intégrant (13) de 1 à x,on obtient

$$C_i(x,\lambda) = C_i(1,\lambda) + \int_1^x \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)f(t)}{\mathrm{W}(t,\lambda)}\,dt \qquad i = \overline{1,2}$$

D'où la solution $y(x,\lambda)$ de l'équation (11) admet la représentation

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{2} C_i(x,\lambda)y_i(x,\lambda) = C_1(x,\lambda)y_1(x,\lambda) + C_2(x,\lambda)y_2(x,\lambda)$$

On a

$$C_i(x,\lambda) = \frac{1}{2}\big(C_i(0,\lambda) + C_i(1,\lambda)\big) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)f(t)}{\mathrm{W}(t,\lambda)}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{W}_{2i}(t,\lambda)f(t)}{\mathrm{W}(t,\lambda)}\,dt$$

Donc

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(C_1(0,\lambda)+C_1(1,\lambda)\right)y_1(x,\lambda)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{W_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)f(t)}{W(t,\lambda)}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_x^1\frac{W_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)f(t)}{W(t,\lambda)}dt+\frac{1}{2}\left(C_2(0,\lambda)+C_2(1,\lambda)\right)y_2(x,\lambda)$$

$$+\ \frac{1}{2}\int_0^x\frac{W_4(t,\lambda)y_2(x,\lambda)f(t)}{W(t,\lambda)}dt-\frac{1}{2}\int_x^1\frac{W_4(t,\lambda)y_2(x,\lambda)f(t)}{W(t,\lambda)}dt$$

$$y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2}C_iy_i(x,\lambda)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)-y_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)}{W(t,\lambda)}f(t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^0\frac{y_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)-y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)}{W(t,\lambda)}f(t)dt$$

Où $\quad C_i=\frac{1}{2}(C_i(0,\lambda)+C_i(1,\lambda))$

En posant $\quad g(x,t,\lambda)=\pm\frac{1}{2}\,\frac{y_2(t,\lambda)y_1(x,\lambda)-y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda)}{W(t,\lambda)}$

où le signe de $g(x,t,\lambda)$ est positif, si $0<x<t<1$ et le signe de $g(x,t,\lambda)$ est négatif, si $0<t<x<1$.

D'où on obtient pour la solution générale de l'équation (11) la représentation suivante :

$$y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2}C_iy_i(x,\lambda)+\int_0^1 g(x,t,\lambda)f(t)dt \tag{14}$$

Finalement pour obtenir la solution du problème (11) on détermine les constantes C_i $,i=\overline{1,2}$ dans la relation (14) de telle manière qu'elle vérifie les conditions aux limites dans (11), ainsi on obtient :

$$u_i\big(y(x,\lambda)\big)=\sum_{i=1}^{2}C_iu_i(y_i(x,\lambda))+\int_0^1 u_i(g(x,t,\lambda)f(t)dt$$

Et on a $\quad u_i\big(y(x,\lambda)\big)=0$

Donc

$$\sum_{i=1}^{2} C_i u_i\big(y_i(x,\lambda)\big) = -\int_0^1 u_i\big(g(x,t,\lambda)\big) f(t)\,dt \qquad i=\overline{1,2} \qquad (15)$$

On obtient :

$$\begin{cases} C_1 u_1\left(y_1(x,\lambda)\right) + C_2 u_1\left(y_2(x,\lambda)\right) = -\int_0^1 u_1(g(x,t,\lambda)) f(t)\,dt & si \;\; i=1 \\ C_1 u_2\left(y_1(x.\lambda)\right) + \; C_2 u_2\left(y_2(x.\lambda)\right) = -\int_0^1 u_2\big(g(x,t,\lambda)\big) f(t)\,dt & si \;\; i=2 \end{cases}$$

Donc si le déterminant

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (16)$$

Alors le système (15) admet des solutions uniques C_1, C_2 données par

$$C_1 = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} -u_1(g) & u_1(y_2) \\ -u_2(g) & u_2(y_2) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)\,dt$$

$$C_2 = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_1) & -u_1(g) \\ u_2(y_1) & -u_2(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)\,dt$$

En remplaçant C_1 et C_2 dans (14). On obtient la représentation de la solution du problème (11)

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} -u_1(g) & u_1(y_2) \\ -u_2(g) & u_2(y_2) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)\,dt \; y_1(x,\lambda)$$
$$+ \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_1) & -u_1(g) \\ u_2(y_1) & -u_2(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)\,dt \;\; y_2(x,\lambda) + \int_0^1 g(x,t,\lambda) f(t)\,dt$$

Alors

$$y(x,\lambda) \ = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1 \left\{-\begin{vmatrix} u_1(g) & u_1(y_2) \\ u_2(g) & u_2(y_2)\end{vmatrix} y_1(x,\lambda) - \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(g) \\ u_2(y_1) & u_2(g)\end{vmatrix} y_2(x,\lambda)\right.$$

$$\left. + \Delta(\lambda) g(x,t,\lambda)\right\} f(t)dt$$

Ce qui donne

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & g(x,t,\lambda) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & u_1(g) \\ u_2(y_2) & u_2(y_2) & u_2(g)\end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t)dt$$

Ainsi on pose

$$G(x,t,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & g(x,t,\lambda) \\ u_1(y_1) & u_1(y_2) & u_1(g) \\ u_2(y_2) & u_2(y_2) & u_2(g)\end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} \qquad (17)$$

Donc on obtient la représentation suivante :

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)dt \qquad (18)$$

Définition 1 :

la fonction $G(x,t,\lambda)$ est dite fonction de Green du problème (11).

Théorème 1 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta(\lambda) \neq 0$ et $f \in c^2[0,1]$ alors le problème (11) admet une solution u∊ C^2 [0,1] mésomorphe en λ admettant la représentation (18). les pôles de la fonction de Green sont les zéros du déterminant caractéristique $\Delta(\lambda)$.

De la représentation de $G(x,t,\lambda)$ on obtient facilement le théorème suivant :

Théorème2:

1- $G(x,t,\lambda)$est une fonction continue $\forall\, x,t \in [0,1]$

2- pour tout t fixé dans] 0,1 [, la fonction $G(x,t,\lambda)$ admet les dérivées premières et secondes en x dans chacun des intervalles [0, t [et] t, 1] en plus.

$$\lim_{x \overset{\geq}{\to} t} \frac{\partial G(x,t,\lambda)}{\partial x} - \lim_{x \overset{\leq}{\to} t} \frac{\partial G(x,t,\lambda)}{\partial x} = 1$$

3- Dans chacun des intervalles [0, t [et] t, 1] la fonction $G(x,t,\lambda)$ Envisagée comme fonction de x vérifie l'équation $\mathrm{L(G)} = 0$ et les conditions aux limites $u_i(G) = 0$. $i=\overline{1,2}$

On peut facilement montrer le théorème suivant :

<u>Théoreme3 :</u>

Si le problème aux limites correspondant au problème homogène (11) admet uniquement la solution triviale. Alors le problème aux limites(11) admet une et une seule fonction de Green.

<u>0.3.3 - équations différentielles opérationnelles :</u>

Soient E, E_1 et E_2 trois espaces de Banach. Introduisons les espaces de Banach suivant :

$$C_\mu\big((0,T),E\big) = \left\{f/f\epsilon C((0,T),E); \qquad \|f\| = \sup_{t\epsilon[0,T]} \|t^\mu f\| < \infty\right\}, \mu \geq 0$$

et

$$C_\mu^\gamma((0,T),E) = \Big\{f/f\epsilon C((0,T),E); \quad \|f\| = \sup_{t\epsilon[0,T]} \|t^\mu f\| + \sup_{0<t<t+h\leq T} \|f \ (t+$$

$h-f(t)h-\gamma t\mu<\infty, \ \mu\geq 0, \gamma\in 0,T$

et l'espace vectoriel.

$$C^1\big((0,T),E_1,E_2\big) = \{f/f\epsilon C((0,T],E_1) \cap C^1((0,T],E_2)\} \text{ Ou } \ E_1 \subset E_2$$

On note par

$$E(A) = \Big\{u/u \in D(A)\ ,\ \|u\|_{E(A)} = (\|Au\|^2 + \|u\|^{\frac{1}{2}})\Big\}$$

et

$$C^1\big((0,T),E(A),E\big) = \{f/f\epsilon\big((0,T),E(A)\big), f'\epsilon C((0,T),E)\ \}$$

Enonçons un théorème qui sera utilisé. Il a été démontré par des différentes méthodes dans les travaux. On considère dans l'espace de Banach E, Le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t)\ , & t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (19)$$

où A est un opérateur linéaire en général non borné dans E , u_0 , et $f(t) \in E$.

Théorème 4 :

Supposons que les conditions suivantes soit vérifiées.

1)- il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in [0,1]$ tel que

$\|R(\lambda, A)\| \leq C\,|\lambda|^{-\beta}$, $|arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$; $|\lambda| \longrightarrow \infty$

2) $f \in C_\mu^\gamma((0,T], E)$ Pour $\gamma \in (1-\beta, 1], \mu \in [0, \beta)$.

3)$u_0 \in D(A)$

Alors le problème de Cauchy (19) a une solution unique.

$u \in C\,((0,T], E) \cap C^1((0,T], E(A), E)$ Et pour cette solution on a les estimations suivantes.

$$\|u(t)\| \leq C\Big(\|Au_0\| + \|u_0\| + \|f\|_{C_\mu((0,1],E)}\Big)\ ,\ t \in (0,T]$$

$$\|u'(t)\| + \|A\,u(t)\| \ \leq\ C\Big(t^{\beta-1}\|Au_0\| + \|u_0\| + \ t^{\beta-\mu-1}\|f\|_{C_\mu((0,1],E)}\Big),\ \ t \in (0,T]$$

CHAPITRE 1

Problème aux limites pour équation différentielle du second ordre avec condition aux limites non locales dans $L^{\infty}[0,1]$.

1.1-introduction :

le but de ce chapitre est l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire du seconde ordre combinant des conditions aux limites non locales liant les valeurs de la fonction inconnue aux extrémités de l'intervalle ainsi que ses dérivées .

On extrait deux classes de conditions aux limites, l'une dite régulière pour laquelle on montre la décroissance maximale de la résolvante et l'autre dite non régulière pour la quelle la décroissance de la résolvante est non maximale. L'étude est faite par une étude détaillée de la fonction de Green du problème considéré

Plus exactement considérons le problème.

$$\begin{cases} \mathrm{L(u)} = \mathrm{u}'' \\ u_1(y) = \alpha_{11}y'(0) + \beta_{11}y'(1) + \alpha_{10}y(0) + \beta_{10}y(1) = 0 \\ u_2(y) = \alpha_{21}y'(0) + \beta_{21}y'(1) + \alpha_{20}y(0) + \beta_{20}y'(1) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Où les nombres α_{ij} , β_{ij},... i , j = $\overline{1,2}$ sont des nombres complexes tel que

Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_\infty : \mathrm{L}^\infty(0,1) &\to \mathrm{L}^\infty(0.1) \\ \mathrm{u} &\to \mathrm{L}_\infty(\mathrm{u}) = \mathrm{u}'' \end{aligned}$$

De domaine

$$D(\mathrm{L}_\infty) = \{u \in w^{2.\infty}(0,1), u_i(y) = 0 , \qquad i = \overline{1,2}\}$$

1 -2 : Construction de la fonction de Green :

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} y'' - \lambda^2 y = f(x) & 0 < x < 1 \\ u_1(y) = \alpha_{11}y'(0) + \beta_{11}y'(1) + \alpha_{10}y(0) + \beta_{10}y(1) = 0 \\ u_2(y) = \alpha_{21}y'(0) + \beta_{21}y'(1) + \alpha_{20}y(0) + \beta_{20}y(1) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

On considère dans toute la suite $\lambda \epsilon \sum_\delta$

ou $\sum_{\delta}=\left\{\lambda\epsilon\mathbb{C}, \quad |arg(\lambda)|\leq\delta, \quad \frac{\pi}{2}<\delta<\pi\right\}$

en supposant que le problème homogène correspondant à (21) , n'admet que la solution triviale , alors d'après le théorème (3) le problème (20) admet une fonction de Green unique $G(x, t, \lambda)$.

Pour la construire nous allons utiliser le théorème 2.

D'après la condition (3) du théorème 2, $G(x, t, \lambda)$ est solution du problème homogène , D'où $G(x, t, \lambda)$ se met sous la forme .

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\alpha_1(t)e^{-\rho x}+\alpha_2(t)e^{\rho x} & si\ x\in]0,t[\\ \gamma_1(t)e^{-\rho x}+\gamma_2(t)e^{-\rho x} & si\ x\in]t,1[\end{cases} \tag{22}$$

Où $\rho=\lambda, \quad Re(\rho)>0$

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\alpha_1(t)e^{-\rho x}+\alpha_2(t)e^{\rho x} & si\ x\in]0,t[\\ \gamma_1(t)e^{-\rho x}+\gamma_2(t)e^{\rho x} & si\ x\in]t,1[\end{cases} \tag{23}$$

Où $\rho^2=\lambda^2$, $Re(\rho)>0$

D'après la condition (1) du théorème 2 on a

$$-(\alpha_1(t)-\gamma_1(t))e^{-\rho t}-\big(\alpha_2(t)-\gamma_2(t)\big)e^{\rho t}=0 \tag{24}$$

D'après la condition (2) du théorème 2 on a

$$(\alpha_1(t)-\gamma_1(t))\rho e^{-\rho t}-\big(\alpha_2(t)-\gamma_2(t)\big)\rho e^{\rho t}=1 \tag{25}$$

Et d'après la condition (3) du théorème 2 on a

$$u_i(G)=0 \qquad i=\overline{1.2} \tag{26}$$

Donc on obtient le système suivant

$$\begin{cases}(\alpha_1(t)-\gamma_1(t))\rho e^{-\rho t}-\big(\alpha_2(t)-\gamma_2(t)\big)\rho e^{\rho t}=1\\ -(\alpha_1(t)-\gamma_1(t))e^{-\rho t}-\big(\alpha_2(t)-\gamma_2(t)\big)e^{\rho t}=0\\ u_1(G)=0\\ u_2(G)=0\end{cases} \tag{27}$$

de (24) et (25) on a :

$$W = \begin{vmatrix} \rho e^{-\rho t} & -\rho e^{\rho t} \\ -e^{-\rho t} & -e^{\rho t} \end{vmatrix} = -2\rho$$

Donc $\alpha_1(t) - \gamma_1(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -\rho e^{\rho t} \\ 0 & -e^{\rho t} \end{vmatrix}}{-2\rho} = \dfrac{e^{\rho t}}{2\rho}$

D'où $\alpha_1(t) = \gamma_1(t) + \dfrac{e^{\rho t}}{2\rho}$ (28)

Et $\alpha_2(t) - \gamma_2(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} \rho e^{-\rho t} & 1 \\ -e^{-\rho t} & 0 \end{vmatrix}}{-2\rho} = -\dfrac{e^{-\rho t}}{2\rho}$

D'où $\alpha_1(t) = \gamma_2(t) - \dfrac{e^{-\rho t}}{2\rho}$ (29)

De (26) on a :

$$\begin{cases} u_1(G) = \alpha_{11} \dfrac{\partial G(0,t,\lambda)}{\partial x} + \beta_{11} \dfrac{\partial G(1,t,\lambda)}{\partial x} + \alpha_{10} G(0,t,\lambda) + \beta_{10} G(1,t,\lambda) = 0 \\ u_2(G) = \alpha_{21} \dfrac{\partial G(0,t,\lambda)}{\partial x} + \beta_{21} \dfrac{\partial G(1,t,\lambda)}{\partial x} + \alpha_{20} G(0,t,\lambda) + \beta_{20} G(1,t,\lambda) = 0 \end{cases}$$

D'après (23) on a

$$\begin{cases} u_1(G) = (\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})\alpha_1(t) + (\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})\alpha_2(t) + (\beta_{10} - \rho\beta_{11})e^{-\rho}\gamma_1(t) + \\ \qquad (\beta_{10} + \rho\beta_{11})e^{\rho}\gamma_2(t) = 0 \\ u_2(G) = (\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})\alpha_1(t) + (\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})\alpha_2(t) + (\beta_{20} - \rho\beta_{21})e^{-\rho}\gamma_1(t) + \\ \qquad (\beta_{20} + \rho\beta_{21})e^{\rho}\gamma_2(t) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

en remplaçant (28) et (29) dans (30) on trouve :

$$\begin{cases} u_1(G) = (\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})(\gamma_1(t) + \frac{e^{\rho t}}{2\rho}) + (\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})(\gamma_2(t) - \frac{e^{-\rho t}}{2\rho}) + (\beta_{10} - \rho\beta_{11})e^{-\rho}\gamma_1(t) + \\ \qquad (\beta_{10} + \rho\beta_{11})e^{\rho}\gamma_2(t) = 0 \\ u_2(G) = (\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})(\gamma_1(t) + \frac{e^{\rho t}}{2\rho}) + (\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})(\gamma_2(t) - \frac{e^{-\rho t}}{2\rho}) + (\beta_{20} - \rho\beta_{21})e^{-\rho}\gamma_1(t) + \\ \qquad (\beta_{20} + \rho\beta_{21})e^{\rho}\gamma_2(t) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} u_1(G) = (\alpha_{10} - \rho\alpha_{11} + \beta_{10}e^{-\rho} - \rho\beta_{11}e^{-\rho})\gamma_1(t) + \dfrac{(\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})}{2\rho} e^{\rho t} + \\ \qquad (\alpha_{10} + \rho\alpha_{11} + \beta_{10}e^{\rho} + \rho\beta_{11}e^{\rho})\gamma_2(t) - \dfrac{(\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})}{2\rho} e^{-\rho t} = 0 \\ u_2(G) = (\alpha_{20} - \rho\alpha_{21} + \beta_{20}e^{-\rho} - \rho\beta_{21}e^{-\rho})\gamma_1(t) + \dfrac{(\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})}{2\rho} e^{\rho t} \\ \qquad (\alpha_{20} + \rho\alpha_{21} + \beta_{20}e^{\rho} + \rho\beta_{21}e^{\rho})\gamma_2(t) - \dfrac{(\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})}{2\rho} e^{-\rho t} = 0 \end{cases}$$

C'est - à - dire

$$\begin{cases} u_1(G) = u_1(y_1)\gamma_1(t) + u_1(y_2)\,\gamma_2(t) + \dfrac{(\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})}{2\rho} e^{\rho t} - \dfrac{(\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})}{2\rho} e^{-\rho t} = 0 \\ u_2(G) = u_2(y_1)\gamma_1(t) + u_2(y_2)\,\gamma_2(t) + \dfrac{(\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})}{2\rho} e^{\rho t} - \dfrac{(\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})}{2\rho} e^{-\rho t} = 0 \end{cases}$$

On a le déterminant de ce système :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) \end{vmatrix} \tag{31}$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$

Donc on obtient :

$$\gamma_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(y_2) & \dfrac{1}{2\rho}((\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})e^{\rho t} - (\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})e^{-\rho t}) \\ u_2(y_2) & \dfrac{1}{2\rho}((\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})e^{\rho t} - (\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})e^{-\rho t} \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}$$

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{\Delta(\lambda)2\rho}\{-u_1(y_2)[-(\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})e^{\rho t} + (\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})e^{-\rho t}\,] +$$

$$+\ u2y2-(\alpha10-\rho\alpha11)e\rho t+(\alpha10+\rho\alpha11)e-\rho t$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\Delta(\lambda)2\rho}\{u_2(y_1)[(\alpha_{10} + \rho\alpha_{11})e^{-\rho t} - (\alpha_{10} - \rho\alpha_{11})e^{\rho t}]$$

$$-(y_1)[(\alpha_{20} + \rho\alpha_{21})e^{-\rho t} - (\alpha_{20} - \rho\alpha_{21})e^{\rho t}]\}$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\Delta(\lambda)2\rho}\{u_2(y_1)[(\alpha_{10}+\rho\alpha_{11})e^{-\rho t}-(\alpha_{10}-\rho\alpha_{11})e^{\rho t}]-$$

$$- \ u1y1(\alpha 20+\rho\alpha 21)e-\rho t-(\alpha 20-\rho\alpha 21)e\rho t$$

D'après la formule (22) si $x > t$ on a :

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}\Big[e^{\rho(x+t)}\Big\{\Big((\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})-\rho\Big((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})+$$

$$\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10+\rho 2\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11e-\rho$$

$$+e^{-\rho(x+t)}\{(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho\big((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})+$$

$$\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10+\rho 2\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11)e\rho$$

$$+e^{\rho(x-t)}\{(-(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho\big((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})-$$

$$\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10+\rho 2\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11)e-\rho+2\rho\alpha 10\alpha 21-$$

$$\alpha 20\alpha 11+e\rho(t-x)(-\alpha 10\beta 20-\alpha 20\beta 10+\rho\alpha 10\beta 20-\alpha 21\beta 10-$$

$$\alpha 10\beta 21-\alpha 20\beta 11+\rho 2\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11)e\rho-2\rho\alpha 10\alpha 21- \qquad \alpha 20\alpha 11$$

Et d'après la formule (22)

Si $x < t$ on a :

$$G(x,t,\lambda) = \gamma_1(t)e^{-\rho x}+\gamma_2(t)e^{\rho x}+\frac{1}{2\rho}\left(e^{\rho(t-x)}-e^{\rho(x-t)}\right)$$

Ce qui donne :

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho\Delta(\lambda)}[e^{\rho(x+t)}\{((\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})-\rho((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})+$$

$$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e-\rho+$$

$$+ \qquad e-\rho x+t((\alpha 10\beta 20-\alpha 20\beta 10)+\rho((\alpha 10\beta 21-\alpha 20\beta 11)+$$

$$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e\rho+$$

$$+e\rho x-t(-(\alpha 10\beta 20-\alpha 20\beta 10)+\rho \qquad ((\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10)-$$

$$(\alpha 10\beta 21- \qquad \alpha 20\beta 11)) \qquad +\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e\rho-$$

$$2\rho(\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11)+ \qquad (-(\alpha 10\beta 20-\alpha 20\beta 10)+\rho((\alpha 10\beta 21-$$

$$\alpha 20\beta 11)-(\alpha 11\beta 20- \qquad \alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e-\rho+$$

$$2\rho(\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11)$$

Ainsi on a le théorème suivant :

Théorème 5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta(\lambda) \neq 0$.

alors le problème (20) admet une fonction de Green unique donnée par

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}(\varphi(x) + \varphi_i(x))$$

Où

$$\begin{cases} i = 1 & si\ x > t \\ i = 2 & si\ x < t \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \varphi_i(x,t,\lambda) = \begin{cases} \varphi_1(x,t,\lambda) & si\ \ x > t \\ \varphi_2(x,t,\lambda) & si\ \ x < t \end{cases} \tag{32}$$

Avec $\varphi(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho}\big[e^{\rho(x+t)}\{((\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) - \rho((\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) +$

$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21- \alpha 21\beta 11))e-\rho$

$+e^{-\rho(x+t)}\{((\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) +$

$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+ \rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e\rho$

(33)

Ainsi que :

$\varphi_1(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho}\big[e^{\rho(x-t)}\big\{(-(\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}\ ) -$

$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e-\rho+$

$2\rho(\propto 10\propto 21-\propto 20\propto 11)+ e\rho(t-x)(-(\alpha 10\beta 20- \alpha 20\beta 10)+$ ρ

$((\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10\ )-(\alpha 10\beta 21- \alpha 20\beta 11))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-$

$\alpha 21\beta 11))e\rho-2\rho(\propto 10\propto 21- \propto 20\propto 11$ (34)

et

$\varphi_2(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho}\big[e^{\rho(x-t)}\big\{(-(\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{10}\beta_{21} -$

$\alpha 20\beta 11))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e\rho-2\rho(\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11)$

$+e^{\rho(t-x)}\big\{(-(\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) + \rho\ ((\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) - (\alpha_{11}\beta_{20} -$

$\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e-\rho+2\rho(\beta 10\beta 21- \beta 20\beta 11)$

(35)

1.3-Estimation de la fonction de Green dans les cas des conditions aux limites régulières dans L^{∞} :

On a la fonction de Green $G(x,t,\lambda)=\frac{H(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ t.q $H(x,t,\lambda)$ est le numérateur de la fonction de Green et $\Delta(\lambda)$ le déterminant caractéristique du problème Donc pour estimer la fonction, il suffit de l'estimation du numérateur de la fonction de Green H et le déterminant caractéristique $\Delta(\lambda)$

Donc on a la résolvante de (11) donnée par

$$R(\lambda,L_{\infty})f=-\int_0^1 G(.,t,\lambda)dt$$

D'où

$$\|R(\lambda,L_{\infty})f\|_{L^{\infty}[0,1]}=\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1 |G(x,t,\lambda)||f(t)|dt$$

$$\le\left(\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1 |G(x,t,\lambda)|dt\right)\|f(t)\|_{L^{\infty}[0,1]}$$

$$\le\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1 |N(x,t,\lambda)||f(t)|dt$$

1.3.1-Estimation du numérateur de la fonction de Green dans $L^{\infty}[0,1]$

d'après (33) on obtient :

$$|\varphi(x,t,\lambda)|\le\frac{1}{2|\rho|}e^{xRe\rho}\left[(|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\right.$$

$$\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10+\alpha 10\beta 20-\alpha 20\beta 10et-1R\ e\rho$$

$$+\frac{1}{2|\rho|}e^{-xRe\rho}\left[(|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|\right.$$

$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$

$$\left.+|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|)e^{(1-t)R\,e\rho}\right]$$

En intégrant cette formule on obtient :

$$\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{1}{2|\rho|} e^{xRe\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|)$$

$$+ |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|) \int_0^1 e^{(t-1)Re\rho}\, dt \Big]$$

$$+ \frac{1}{2|\rho|} e^{-xRe\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| + |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| +$$

α11β20−α21β10+α10β20−α20β10)01e(1−t)Reρdt

$$\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{1}{2|\rho|} e^{xRe\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|)(\frac{1 - e^{-Re\rho}}{Re\rho}) \Big]$$

$$+ \frac{1}{2|\rho|} e^{(1-x)Re\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|)(\frac{1 - e^{-Re\rho}}{Re\rho}) \Big]$$

$$\sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{1}{2|\rho|} \sup_{0\leq x\leq 1} e^{xRe\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|)$$

$$+ + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|)(\frac{1 - e^{-Re\rho}}{Re\rho}) \Big]$$

$$+ \frac{1}{2|\rho|} \sup_{0\leq x\leq 1} e^{(1-x)Re\rho} \Big[(|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|)(\frac{1 - e^{-Re\rho}}{Re\rho}) \Big]$$

On a la fonction $e^{xRe\rho}$ est croissante sur l'intervalle [0.1]

Donc $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{xRe\rho} = e^{Re\rho}$

Et la fonction $e^{(1-x)Re\rho}$ est décroissante sur le même intervalle

Donc $\sup_{0\leq x\leq 1} e^{(1-x)Re\rho} = e^{Re\rho}$

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{e^{Re\rho}}{2|\rho|}(|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|$$

$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)+|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|)\left(\frac{1-e^{-Re\rho}}{Re\rho}\right) \quad (36)$$

Et d'après (32) on a :

$$|\varphi_1(x,t,\lambda)| \leq \frac{1}{2|\rho|}e^{xRe\rho}\,[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+|\rho|^2\,|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-(1+t)Re\rho}+\;+2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|e^{-tRe\rho}]$$
$$+\frac{1}{2|\rho|}e^{-xRe\rho}\;[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+\;|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{(1+t)Re\rho}+\;2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|e^{tRe\rho}]$$

En intégrant sur l'intervalle $[0.x]$ on a :

$$\int_0^x|\varphi_1(x,t,\lambda)|dt\;\leq\frac{1}{2|\rho|}e^{xRe\rho}\left[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\;|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)\right.$$
$$\left.+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\;\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-Re\rho}\int_0^x e^{-tRe\rho}\,dt+\;2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|\int_0^x e^{-tRe\rho}\,dt\right]$$
$$+\frac{1}{2|\rho|}e^{-xRe\rho}\left[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+\;|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)\right.$$
$$\left.+\;|\rho|^2\,|\alpha_{11}\beta_{21}-\;\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{Re\rho}\int_0^x e^{tRe\rho}\,dt+2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|\int_0^x e^{tRe\rho}\,dt\right]$$

$$\int_0^x|\varphi_1(x,t,\lambda)|\;\leq\;\frac{1}{2|\rho|}e^{Re\rho}\left[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\;|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)\right.$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)\left(\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-2Re\rho}}{Re\rho}\right)$$
$$\left.+\;2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\;\alpha_{20}\alpha_{11}|\left(\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-Re\rho}}{Re\rho}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2|\rho|}e^{Re\rho}\Big[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$

$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)\left(\frac{1-e^{-xRe\rho}}{Re\rho}\right)$$

$$+\ 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|(\frac{e^{-Re\rho}-e^{-(1+x)Re\rho}}{Re\rho})\Big]$$

On a les fonctions suivantes : $x\longmapsto\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-2Re\rho}}{Re\rho}$,

$x\longmapsto\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-Re\rho}}{Re\rho}$, $x\longmapsto\frac{1-e^{-xRe\rho}}{Re\rho}$ et $x\longmapsto\frac{e^{-Re\rho}-e^{-(1+x)Re\rho}}{Re\rho}$

Elles sont croissantes sur l'intervalle $[0.1]$

$$\sup_{0\le x\le 1}\int_0^x|\varphi_1(x,t,\lambda)|dt\le\frac{1}{2|\rho|}e^{Re\rho}[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$

$$+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$

$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)]\sup_{0\le x\le 1}\left(\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-2Re\rho}+1-e^{-xRe\rho}}{Re\rho}\right)$$

$$+\ 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|\sup_{0\le x\le 1}\left(\frac{e^{(x-1)Re\rho}-e^{-Re\rho}+e^{-Re\rho}-e^{-(1+x)Re\rho}}{Re\rho}\right)$$

$$\sup_{0\le x\le 1}\int_0^x|\varphi_1(x,t,\lambda)|dt\le\frac{1}{2|\rho|}e^{Re\rho}\Big[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$

$$+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$

$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)\left(\frac{2-e^{-Re\rho}-e^{-2Re\rho}}{Re\rho}\right)$$

$$+\ 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|(\frac{1-e^{-2Re\rho}}{Re\rho})\Big] \tag{37}$$

Et d'après (35) on a aussi :

$$|\varphi_2(x,t,\lambda)| \leq \frac{1}{2|\rho|} e^{-xRe\rho} \left[(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| \right.$$
$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$\left. + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|)e^{(t-1)Re\rho} + \ + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|e^{tRe\rho} \right]$$
$$+ \frac{1}{2|\rho|} e^{xRe\rho} \left[(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| \right.$$
$$+ |\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}|)$$
$$\left. + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|)e^{(1-t)Re\rho} + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|e^{-tRe\rho} \right]$$

D'après l'intégrale sur l'intervalle $[x, 1]$ on obtient

$$\int_x^1 |\varphi_2(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{1}{2|\rho|} e^{Re\rho} \left[(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) \right.$$
$$+ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|) \frac{1}{\mathrm{Re}\rho} \left(1 - e^{(x-1)Re\rho} + e^{-(x+1)Re\rho} - e^{-2Re\rho}\right)$$
$$\left. + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}| \frac{1}{Re\rho} \left(e^{-Re\rho} - e^{(x-2)Re\rho}\right) \right]$$

$$\sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |\varphi_2(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{1}{2|\rho|} e^{Re\rho} \left[(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| \right.$$
$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$\left. + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|) \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}\,\rho}}{\mathrm{Re}\rho} \right) + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}| \left(\frac{1 - e^{-2Re\rho}}{Re\rho} \right) \right] \tag{38}$$

Parce que les fonctions

$$x \longmapsto \frac{1 - e^{(x-1)Re\rho} + e^{-(x+1)} - e^{-2Re\rho}}{Re\rho} \quad , x \longmapsto \frac{e^{-Re\rho} - e^{(x-2)Re\rho}}{Re\rho}$$

Sont des fonctions décroissantes sur l'intervalle [0.1]

Donc d'après (36), (37), (38) nous trouvons :

$$\sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |N(x,t,\lambda)|dt \leq \frac{4}{|\rho|Re\rho}e^{Re\rho}\,[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\ |\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|$$
$$+\ \ |\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)(1-\ e^{-\mathrm{Re}\,\rho})]$$

$$\|R\ (\lambda, \mathrm{L}_\infty)\| \leq \frac{4}{|\Delta(\lambda)||\rho|cos(\frac{\delta}{2})}e^{Re\rho}\,[|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+$$
$$\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10+\alpha 10\alpha 21-\alpha 20\alpha 11+\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11+$$
$$\rho 2\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11 \qquad (39)$$

Puisque $\lambda\in\sum_\delta$ et $\rho\in\sum_{\frac{\delta}{2}}$ qui donne $|\arg(\rho)|<\frac{\delta}{2}\Longrightarrow \cos(\arg(\rho))>\ \cos(\frac{\delta}{2})$

C'est-à-dire $|\rho|\,cos(\arg(\rho))>cos(\frac{\delta}{2})$.

Donc $\qquad Re(\rho)>cos(\frac{\delta}{2})$

1.3.2- Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

De (16) On a $\qquad \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}u_1(y_1) & u_1(y_2)\\ u_2(y_1) & u_2(y_2)\end{vmatrix}$

$$\Delta(\lambda)=e^{\rho}\{-\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})+(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})$$
$$-\ (\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}))$$
$$+2\rho\ e^{-\rho}[(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20})+(\beta_{10}\beta_{21}-\ \beta_{20}\beta_{11})]$$
$$+\ e^{-2\rho}[\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})+\rho((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})-\ (\alpha_{11}\beta_{20}$$
$$-\alpha_{21}\beta_{10}))-(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})]\}$$

D'où

$$\Delta(\lambda)=\ e^{\rho}[-\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})+(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho((\alpha_{10}\beta_{21}-$$
$$\alpha_{20}\beta_{11})-(\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10})+\phi(\rho)] \qquad (40)$$

t. q

$$\phi(\rho)=2\rho e^{-\rho}[(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20})+(\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11})]$$
$$+e^{-2\rho}[\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\ \alpha_{21}\beta_{11})+\rho((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})-(\alpha_{11}\beta_{20}$$
$$-\alpha_{21}\beta_{10}))-\ (\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})]$$

Pour l'estimation du déterminant caractéristique en commence par l'estimation de $\phi(\rho)$:

$$|\phi(\rho)| \leq 2|\rho|e^{-Re\rho}[|\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|]$$
$$+ e^{-2Re\rho}[|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$
$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|]$$

On a $Re\rho > 0$ donc $(1 - e^{-Re\rho}) < 1$

$$e^{-Re\rho} < \frac{1}{|\rho|^2 \, cos(\frac{\delta}{2})} \Rightarrow e^{-2Re\rho} < \frac{1}{|\rho|^2 \, cos(\frac{\delta}{2})}$$

Donc $|\phi(\rho)| \leq \frac{2}{|\rho|^2 cos\,(\frac{\delta}{2})}[|\rho|(|\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|)] +$

$\frac{1}{|\rho|^2 \, cos\,(\frac{\delta}{2})}[|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| + |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| +$

$\alpha11\beta20 - \alpha21\beta10) + \alpha10\beta20 - \alpha20\beta10$

Cas 01 :

Supposons $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$

De (40) on a

$$|\phi(\rho)| \leq \frac{2}{cos(\frac{\delta}{2})}\left[\frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|)\right]$$
$$+ \frac{1}{cos(\frac{\delta}{2})}\Big[|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$
$$+ \frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|\Big]$$

Pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}} . |\rho| \geq r_0 > 0$ alors $|\phi(\rho)| \leq \frac{C_1(r_0)}{|\rho|}$

Et on a aussi :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^2 e^{Re\rho} \Big[|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| - \frac{1}{|\rho|} |(\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) - (\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10})| - \frac{1}{|\rho|^2} |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| - \frac{C_1(r_0)}{|\rho|^3} \Big]$$

Nous pouvons choisir $r_0 > 0$ tel que :

$$\frac{1}{r_0} |(\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) - (\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10})| + \frac{1}{r_0^2} |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + \frac{c_1(r_0)}{r_0^3} \leq \frac{|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|}{2}$$

Donc pour $\rho \in \sum_{\frac{\delta}{2}}$. $|\rho| \geq r_0 > 0$ on obtient :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2} |\rho|^2 e^{Re\rho} |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| \tag{41}$$

En remplaçant dans (39) on obtient :

$$\|R\ (\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{8e^{Re\rho}}{|\rho| e^{Re\rho}\ cos\left(\frac{\delta}{2}\right)} \Big[\frac{1}{|\rho|^2} |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + \frac{1}{|\rho|} (|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{20}\alpha_{11}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|) + |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| \Big] \left(\frac{1}{|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|}\right)$$

Si $|\rho| \longrightarrow +\infty$ on a

$$\|R\ (\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

t.q

$$c = \frac{8}{cos(\frac{\delta}{2})}$$

Cas 02 :

Si $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$

D'après la formule (40) on a :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|e^{Re\rho}\left[|\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}| - \frac{1}{|\rho|}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| - \frac{|\phi(\rho)|}{|\rho|}\right]$$

t.q $\phi(\rho) = 2\rho e^{-\rho}[-(\alpha_{11}\alpha_{20} - \beta_{11}\beta_{20})]$

$$+e^{-2\rho}[-\rho(\alpha_{20}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{20}) - (\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10})]$$

$$|\phi(\rho)| \leq \frac{2}{cos(\frac{\delta}{2})}|\alpha_{11}\alpha_{20} + \beta_{11}\beta_{20}|$$

$$+\frac{1}{2cos(\frac{\sigma}{2})}\left(|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}| + \frac{1}{|\rho|}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|\right)$$

Parce que $e^{-Re\rho} \leq \frac{1}{|\rho|\, cos(\frac{\delta}{2})}$ et $e^{-2Re\rho} \leq \frac{1}{2|\rho|\, cos(\frac{\delta}{2})}$

Donc si $|\rho| > r_0$ alors $|\phi(\rho)| \leq C_2(r_0)$

$$\Rightarrow |\Delta(\lambda)| \geq |\rho|e^{Re\rho}\left[|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}| - \frac{1}{|\rho|}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| - \frac{C_2(r_0)}{|\rho|}\right]$$

Soit $r_0 > 0$ tel que $\frac{1}{r_0}\left|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}\right| + \frac{C_2(r_0)}{r_0} \leq \frac{1}{2}\left|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}\right|$

Pour ρ tel que $|\rho| > r_0$

On a $$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{|\rho|e^{Re\rho}}{2}\left|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}\right| \quad (42)$$

En remplaçant (42) dans (39) on obtient

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{8}{|\rho|cos(\frac{\delta}{2})|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|}\left[\frac{1}{|\rho|}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|\right.$$

$$\left.+ |\alpha_{20}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{20}| + |\alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{11}\beta_{20}|\right]$$

Si $\rho \to +\infty$

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

tel que

$$c = \frac{8(|\alpha_{20}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{20}| + |\alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{11}\beta_{20}|)}{cos(\frac{\delta}{2})|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|}$$

Cas 03 :

Si $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$

$$\alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$$

De (40) on a $|\Delta(\lambda)| \geq e^{Re\rho}\,[|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| - \phi(\rho)]$

Tel que

$$\phi(\rho) = e^{-2\rho}(\alpha_{20}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{20})$$

$$\Longrightarrow |\phi(\rho)| \leq e^{-2Re\rho}|\alpha_{20}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{20}| \leq \frac{1}{2|\rho|cos(\frac{\delta}{2})}|\alpha_{20}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{20}|$$

Donc si $|\rho| > r_0$ on a $|\phi(\rho)| \leq c_3(r_0)$

Et $|\Delta(\lambda)| \geq e^{Re\rho}\,[|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| - c_3(r_0)]$

Tel que $c(r_0) \leq \frac{1}{2}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|$

Finalement $|\Delta(\lambda)| \geq \frac{e^{Re\,\rho}}{2}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|$ (43)

En remplaçant dans (39) on obtient :

$$\|R\,(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

tel que

$$c = \frac{8}{cos(\frac{\delta}{2})}$$

Définition 2 :

Les conditions aux limites dans (11) sont dites régulières si l'une des conditions suivantes est vérifiée

1- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$
2- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$
3- $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$

$$\alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$$

Théorème 06 :

On suppose que $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$

Alors on a $\Sigma_\delta \subset \rho(L_\infty)$ et existe $c > 0$ tel que :

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

Maintenant on se propose d'étudier le cas des conditions aux limites non régulières.

1.4 Estimation de la fonction de Green dans les cas des conditions aux limites non régulières dans $L^\infty[0,1]$:

1.4.1 Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

On a le déterminant :

$$\Delta(\lambda) = e^\rho [-\rho^2 (\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}) + (\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20})) + \emptyset(\rho)]$$

et

$$\emptyset(\rho) = 2\rho e^{-\rho} [(\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}) + (\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11})] + e^{-2\rho} [\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}) + \rho((\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20})) - (\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10})]$$

Donc

$$|\emptyset(\rho)| \leq 2|\rho| e^{-Re\rho} [|\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|] + e^{-2Re\,\rho} [|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| + |\rho| (|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|]$$

Alors

$$|\emptyset(\rho)| \leq \frac{4}{|\rho|\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} [|\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|] + \frac{1}{2|\rho|^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} [|\rho|^2 |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| + |\rho| (|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|) + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|] \quad (44)$$

Cas 01 : Si $\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}=0$ et $\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}=0$

$$(\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10})-(\alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11})=0 \text{ et}$$
$$(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20})+(\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11})=0$$

$$\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}\neq 0 \quad et \quad \alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}\neq 0$$

En remplaçant dans l'estimation de $\emptyset(\rho)$ on obtient :

$$|\emptyset(\rho)|\leq \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\left[\frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\ \alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11}|)\right]+\frac{4}{\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\ \left[\frac{1}{|\rho|}\right.$$
$$\left.(|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}|+|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\left[\left(\frac{|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}{|\rho|}\right)+\frac{8}{|\rho|}|\ \alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}|\leq \frac{C_1(ro)}{|\rho|}\right.$$

Et $\quad |\Delta(\lambda)|\geq|\rho|e^{Re\rho}\left(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{11}\beta_{20}+\beta_{11}\alpha_{20}|-\frac{|\emptyset(\rho)|}{|\rho|}\right)$

$$\geq|\rho|e^{Re\rho}\left(2|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|-\frac{C_1(r_0)}{|\rho|^2}\right)$$

Soit $r_0>0$ tel que $|\rho|>r_0$ on a

$$\frac{c_1(r_0)}{r_0^2}\leq\ |\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|$$

Donc : $\quad |\Delta(\lambda)|\geq|\rho|e^{Re\rho}\,|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|$

$$|\Delta(\lambda)|\geq|\rho|^{\frac{1}{2}}e^{Re\rho}\,|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}| \tag{45}$$

En remplaçant dans (39)

$$\|R(\lambda,\mathrm{L}_\infty)\|\leq\frac{4}{|\rho|^{\frac{1}{2}}cos\left(\frac{\delta}{2}\right)|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}\ (2|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|)$$

Alors

$$\|R(\lambda,L_\infty)\|\leq\frac{c_1}{|\rho|^{\frac{1}{2}}}$$

Tel que :

$$c_1=\frac{4\big(2(\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10})+(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11})\big)}{cos\left(\frac{\delta}{2}\right)|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}$$

Cas 02 :

$$\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = \alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20} = \beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11} = 0$$

$$(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$$

$$\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$$

En remplaçant dans l'estimation de $\emptyset(\rho)$ on obtient :

$$|\emptyset(\rho)| \leq \frac{1}{cos^2(\frac{\delta}{2})} \frac{|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}{|\rho|}$$

$$\leq \frac{C_2(r_0)}{|\rho|}$$

De la formule (40) on a :

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^{\frac{1}{2}} e^{Re\rho} |\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{11}| \tag{46}$$

D'après la formule de la résolvante on a :

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{8}{|\rho|^{\frac{1}{2}} cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Alors :

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c_2}{|\rho|^{\frac{1}{2}}}$$

Où

$$c_2 = \frac{8}{cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Définition 03 :

les conditions aux limites dans (11) sont dites non régulières si :

1- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0$ et $\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = 0$

$(\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$

et $(\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}) + (\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}) = 0$

$\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$ Et $\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$

2- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = \alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20} = \beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11} = 0$

$(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$

$\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$

Théorème 07 :

on suppose que $\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}=0$ et les conditions aux limites non régulières alors on a :

$\Sigma_\delta \subset \rho(L_\infty)$ Et il existe c>0 tel que

$$\|R(\lambda, L_\infty)\| \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}$$

CHAPITRE 2

Problème aux limites pour équation différentielle du second ordre avec condition aux limites non locales dans $L^p[0,1]$. $1 \leq P < +\infty$

2.1 Introduction :

on reprend dans ce chapitre l'étude faite dans le chapitre précédent des problèmes aux limites réguliers au cas des espaces $L^P[0,1]$ tel que $1\leq P<+\infty$

2.2 –Estimation de la fonction de Green dans le cas des conditions aux limites régulières dans $L^P[0,1]$; $1\leq P<+\infty$

L'opérateur qui réalise le problème (11) dans $L^P[0,1]$ est défini par :

$$L_p : L^P[0,1] \to L^P[0,1]$$

$$u \mapsto L(u) = u''$$

De domaine : $D(L_P) = \{u \in w^{2,P}[0,1],\ u_j(u)=0,\ j=\overline{1,2}\}$

On a : $R(\lambda, L_p)f = -\int_0^1 G(.,t,\lambda) f(t)\,dt, \qquad f \in L^P[0,1]$

D'où :

$$\|R(\lambda, L_p)f\|_{L^P[0,1]} = \left(\int_0^1 |R(\lambda, L_p)f(x)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$= \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 G(x,t,\lambda)f(t)dt\right|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \leq \left(\int_0^1\int_0^1 |G(x,t,\lambda)|^P\ |f(t)|^P dtdx\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 |G(x,t,\lambda)|^P \int_0^1 |f(t)|^P dtdx\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 |G(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_0^1 |f(t)|^P dt\right)^{\frac{1}{P}}$$

Donc

$$\|R(\lambda, L_p)f\|_{L^P[0,1]} \leq \left(\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 |G(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}$$

Mais :

$$G(x,t,\lambda) = \frac{N(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

Et $N(x,t,\lambda) = \varphi(x,t,\lambda) + \varphi_i(x,t,\lambda) \quad i=1, si\ x>t \quad et\ \ i=2, si\ x>t$

Ou $\varphi(x,t,\lambda)$ et $\varphi_i(x,t,\lambda)$ sont données par les formules (33), (34) , (35)

donc $\|N(x,t,\lambda)\|_{L^P} \leq 2^{1-\frac{1}{P}} \|\varphi(x,t,\lambda)\|_{L^P}+\|\varphi_i(x,t,\lambda)\|_{L^P}$ $i=\overline{1.2}$
(47)

De (31) on a $\|\varphi_i(x,t,\lambda)\|_{L^P} = \left(\int_0^1 |\varphi_i(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}$

$$= \left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^P dx + \int_t^1 |\varphi_1(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\leq \left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} + \left(\int_t^1 |\varphi_1(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \quad (48)$$

$$\leq \|\varphi_2(x,t,\lambda)\|_{L^P[0,t]} + \|\varphi_1(x,t,\lambda)\|_{L^P[t,1]}$$

D'où $\|R(\lambda, L_p)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{1}{|\Delta(\lambda)|} \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\int_0^1 |N(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}$

par conséqient

$$\|R(\lambda, L_p)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{P}}}{|\Delta(\lambda)|} \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\|\varphi(x,t,\lambda)\|_{L^P[0,1]} + \|\varphi_i(x,t,\lambda)\|_{L^P[0,1]}\right) \quad (49)$$

2.3- Estimation du numérateur de la fonction de Green dans $L^P[0,1]$

D'après la forme de φ on a :

$$|\varphi(x,t,\lambda)| \leq \frac{1}{2|\rho|}\Big[\left(e^{Re\rho x} e^{Re\rho\,(t-1)} + e^{-Re\rho x} e^{-Re\rho\,(t-1)}\right)(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|)$$
$$+ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|\Big]$$

Donc on a :

$$\|\varphi(x,t,\lambda)\|_{L^P[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{P}}}{2|\rho|}\left[\left\{\left(\int_0^1 |e^{\rho x}|^p dx\right)^{\frac{1}{P}} e^{Re\rho\,(t-1)} + \right.\right.$$

*01e−ρx*P *dx*1p*e−Reρt−1α10β20−α20β10+*

ρα10β21−α20β11+α10β20−α21β10+ *ρ2α11β21−α21β11*

$$\leq \frac{2^{1-\frac{1}{P}}}{2|\rho|}\left[\left\{\left(\int_0^1 e^{P\,Re\rho x} dx\right)^{\frac{1}{P}} e^{Re\rho\,(t-1)} + \left(\int_0^1 e^{-P\,Re\rho x} dx\right)^{\frac{1}{P}} e^{-Re\,\rho(t-1)}\right\}\right.$$

$\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{10}\beta_{20}-$
α21β10+ ρ2α11β21−α21β11

Après les calculs, on obtient :

$$\left(\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \le \frac{2^{-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho|(\mathrm{PRe\rho})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\ \alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|\}\left\{(e^{Re\rho}-1)^{\frac{1}{P}}e^{Re\rho(t-1)}+(1-e^{\mathrm{P}Re\rho})^{\frac{1}{P}}\,e^{-Re\rho(t-1)}\right\}$$

Puisque $Re\rho > 0$ alors :

$$\sup_{0\le \mathrm{t}\le 1}\left(\int_0^1 |\varphi(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \le \frac{2^{1-\frac{1}{\mathrm{P}}}\ e^{Re\rho}}{|\rho|(\mathrm{PRe}\rho)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\ \alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\ \alpha_{21}\beta_{11}|\}$$

(50)

De (34) on a :

$$\varphi_1(x,t,\lambda)=\frac{1}{2\rho}\Big[e^{\rho x}\ \Big\{\Big(-(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho\big((\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11})-$$
α11β20−α21β10+ρ2α11β21−α21β11e−ρt+1+
2ρα10α21−α20α11e−ρt

$$+e^{-\rho x}\ \Big\{\Big(-(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\rho\big((\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10})-$$
α10β21−α20β11+ρ2α11β21−α21β11eρt+1−
2ρα10α21−α20α11eρt

Ainsi :

$$\|\varphi_1(x,t,\lambda)\|_{\mathrm{L^P}[\mathrm{t},1]}=\left(\int_t^1 \left|\varphi_1(x,t,\lambda)\right|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}$$

Donc :

$$\left(\int_t^1 |\varphi_1(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \le \frac{2^{1-\frac{1}{P}}}{2|\rho|}\left[\left(\int_t^1 |e^{\rho x}|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|\right.$$
$$+\ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-Re\rho(t+1)}+\quad 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|e^{-Re\rho t}\}$$
$$+\left(\int_t^1 |e^{-\rho x}|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$
$$\left.+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{Re\rho(t+1)}+\quad 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|e^{Re\rho t}\}\right]$$

$$\le \frac{2^{-\frac{1}{P}}}{|\rho|(PRe\rho)^{\frac{1}{P}}}\left[(e^{PRe\rho}-e^{PRe\rho t})^{\frac{1}{P}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|\right.$$
$$+\ |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\ \alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-Re\rho(t+1)}+\ 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\ \alpha_{20}\alpha_{11}|e^{-Re\rho t}\}$$
$$+(e^{-PRe\,\rho t}-e^{-PRe\,\rho})^{\frac{1}{P}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$
$$\left.+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{Re\,\rho(t+1)}+2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|e^{Re\,\rho t}\}\right]$$

Ce qui donne :

$$\left(\int_t^1 |\varphi_1(x,t,\lambda)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} \le \frac{2^{-\frac{1}{P}}}{|\rho|(PRe\rho)^{\frac{1}{P}}}(1-e^{PRe\rho(t-1)})^{\frac{1}{P}}\left[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|\right.$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)(e^{-Re\rho t}+e^{Re\rho})$$
$$\left.+\ 2|\rho||\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|(e^{-Re\rho(t-1)}+1)\right]$$

Comme $Re\rho > 0$ on obtient :

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\int_t^1 |\varphi_1(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{\mathrm{P}}}\ e^{Re\rho}}{|\rho|(\mathrm{P}\mathrm{Re}\rho)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\{|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{20}\alpha_{11}|) + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|\}$$

(51)

Et de (35) on a

$$\varphi_2(x,t,\lambda) = \frac{1}{2\rho}\left[e^{\rho x}\{(-(\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{10}\beta_{21} - \right.$$
$\alpha 20\beta 11))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e-\rho(t-1)-$
$2\rho(\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11e-\rho t$
$$+e^{-\rho x}\{(-(\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}) + \rho((\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}) -$$
$(\alpha 11\beta 20-\alpha 21\beta 10))+\rho 2(\alpha 11\beta 21-\alpha 21\beta 11))e\rho(t-1)+$
$2\rho(\beta 10\beta 21-\beta 20\beta 11e\rho t$

D'où

$$\left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{2|\rho|}\left[\left(\int_0^t |e^{\rho x}|^P dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + |\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}|) + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-Re\rho\,(t-1)} + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|e^{-Re\rho t}\}\right.$$
$$\left. + \left(\int_0^t |e^{-\rho x}|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + |\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|) + |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|)e^{Re\rho\,(t-1)} + 2|\rho||\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|e^{Re\rho t}\}\right]$$

Après les calculs on obtient :

$$\left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \leq \frac{2^{-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho|(\mathrm{PRe\rho})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\Big[(e^{PRe\rho}-1)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+\ |\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{-Re\rho(t-1)}+2|\rho||\beta_{10}\beta_{21}-\ \beta_{20}\beta_{11}|e^{-Re\rho t}\}$$

$$+(1-e^{-\mathrm{PRe}\,\rho t})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\{(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\ \alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)e^{Re\rho\,(t-1)}$$
$$+2|\rho||\beta_{10}\beta_{21}-\ \ \beta_{20}\beta_{11}|e^{Re\rho t}\}\Big]$$

$$\leq \frac{2^{-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho|\,(PRe\rho\,)^{\frac{1}{P}}}(1-e^{-\mathrm{PRe}\,\rho t})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\big[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\,\beta_{10}|+$$

ρα10β21−α20β11+ α11β20−α21β10+

ρ2α11β21−α21β11eReρ+eReρt−1+

2ρβ10β21−β20β11(1+eReρt)

Puisque $Re\rho > 0$ alors:

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \leq \frac{2^{-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho|(\mathrm{pRe\rho})^{\frac{1}{P}}}[(|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\ \ \alpha_{20}\beta_{11}|+\ \ \ |\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|)(1+e^{Re\rho})+2|\rho||\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|(1+e^{Re\rho})]$$

Donc on a :

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\left(\int_0^t |\varphi_2(x,t,\lambda)|^{\mathrm{P}} dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho|(\mathrm{PRe\rho})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}[|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{11}\beta_{20}-\ \ \alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|)+2|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)$$
$$+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|] \tag{52}$$

De(49), (50) et (51) et (52) on obtient :

$$\|R\ (\lambda,\mathrm{L_p})\|_{\mathrm{L^P}\,[0,1]} \ \le\ \frac{2^{2-\frac{2}{\mathrm{P}}}}{|\rho||\Delta(\lambda)|(\mathrm{PRe\rho})^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\rho}\Big[|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|$$
$$+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\ |\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|)$$
$$+\ 2^{2-\frac{1}{\mathrm{P}}}\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+\ |\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|$$
$$+|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)\}\Big]$$

Donc on a :

$$\|R\ (\lambda,\mathrm{L_p})\|_{\mathrm{L^P}\,[0,1]} \ \le \frac{2^{2-\frac{2}{\mathrm{P}}}}{|\rho||\Delta(\lambda)|(\mathrm{PRe}\,\rho)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\rho}\Big[\Big(1+2^{2-\frac{1}{\mathrm{P}}}\Big)\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+$$

*ρ2α11β21− α21β11+ρα10β21−α20β11+ α11β20−
α21β10*+ 22−1P*ρ(α10α21−α20α11+β10β21−β20β11)*

Finalement il résulte que :

$$\|R\ (\lambda,\mathrm{L_p})\|_{\mathrm{L^P}\,[0,1]} \ \le \frac{2^{2-\frac{2}{\mathrm{P}}}\ 3^{2-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{|\rho||\Delta(\lambda)|\Big(P|\rho|COS(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{4})\Big)^{\frac{1}{P}}}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,\rho}\,[|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+$$

*ρ2α11β21−α21β11+ρα10β21−α20β11+ α11β20−
α21β10+α10α21−α20α11+β10β21− β20β11*

Parce que en tenant compte du fait que $\lambda\in\sum_{\delta}$ et $\rho\in\sum_{\frac{\delta}{2}}$ qui donne

$$|\arg(\rho)|<\frac{\delta}{2}\Rightarrow|\rho|(\cos\arg(\rho))>|\rho|cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

C'est-à –dire : $Re\rho>|\rho|cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$

Donc :

$$\|R\ (\lambda,\mathrm{L_p})\|_{\mathrm{L^P}\,[0,1]} \ \le\ \frac{C\ e^{Re\rho}}{|\Delta(\lambda)||\rho|^{1+\frac{1}{P}}}\{|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|+\ |\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|$$
$$+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}|+|\alpha_{11}\beta_{20}-\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\alpha_{21}-\ \alpha_{20}\alpha_{11}|$$
$$+|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)\}\quad.\qquad(53)$$

Où :

$$C = \frac{2^{2-\frac{2}{p}}\ 3^{2-\frac{1}{p}}}{P^{\frac{1}{p}}\,(\cos(\frac{\sigma}{2}+\frac{\pi}{4}))^{\frac{1}{p}}}$$

Cas 01:

Si $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$

D'après (40) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand on peut montrer facilement que :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|\rho|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2P}+2}\, e^{Re\rho}\,|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|$$

D'après (53) nous obtenons :

$$\|R\,(\lambda, L_p)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{2C}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|}\left\{\frac{1}{|\rho|^2}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|\right.$$

$$+ |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}| + \frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}|$$

$$\left.+ |\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{20}\alpha_{11}| + |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|\right\}$$

Pour $|\rho| \to +\infty$ on a la relation

$$\frac{2}{|\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|}\left\{\frac{1}{|\rho|^2}|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}| + |\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}|\right.$$

$$+ \frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11}| + |\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{20}\alpha_{11}|$$

$$\left.+ |\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}|)\right\}$$

reste bornée dans le secteur $\sum_{\frac{\delta}{2}}$ pour $|\rho|$ suffisamment grand.

Alors :

$$\|R\,(\lambda, L_P)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{2c}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}}$$

D'où :

$$\|R\,(\lambda, L_P)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{c_1}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}}$$

tel que : $c_1 = 2c$

<u>Cas 02</u> :

Si $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0$ et $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$ et $\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20} \neq 0$

D'après (40) nous avons pour $|\rho|$ Suffisamment grand, on peut montrer facilement que :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|\rho|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2P}} e^{Re\rho} |\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|$$

Donc d'après (53) nous obtenons

$$\|R\ (\lambda, \mathrm{L_P})\|_{\mathrm{L^P}[0,1]} \leq \frac{2c}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}|}\{|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}| + |\alpha_{20}\alpha_{11}| + |\beta_{20}\beta_{11}|\}$$

$$\|R\ (\lambda, \mathrm{L_P})\|_{\mathrm{L^P}[0,1]} \leq \frac{c_2}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}}$$

tel que

$$c_2 = \frac{2C}{|\alpha_{11}\beta_{20}+\beta_{11}\alpha_{20}|}\{|\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20}| + |\alpha_{20}\alpha_{11}| + |\beta_{20}\beta_{11}|\}$$

<u>Cas 03</u> :

Si $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$ $\alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$

D'après la relation (40) nous avons pour $|\rho|$ suffisamment grand on peut montrer facilement que :

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2}|\rho|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2P}} e^{Re\rho} |\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|$$

En substituant dans (53) on obtient :

$$\|R\ (\lambda, \mathrm{L_P})\|_{\mathrm{L^P}[0,1]} \leq \frac{2c}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}|\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}|}}\{|\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10}|\}$$

$$\|R\ (\lambda, \mathrm{L_P})\|_{\mathrm{L^P}[0,1]} \leq \frac{C_3}{|\rho|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}}$$

tel que

$$c_3 = 2c = \frac{2^{3-\frac{2}{P}}\ 3^{2-\frac{1}{P}}}{P^{\frac{1}{P}}(cos(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{4}))^{\frac{1}{P}}}$$

Définition 04 :

Les conditions aux limites dans (11) sont dites régulières si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0.$

2- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0\ ,\alpha_{21=}\beta_{21} = 0\ ,\alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20} \neq 0.$

3- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0\ ,\alpha_{21} = \beta_{21} = 0\ ,$

$\alpha_{11} = \beta_{11} = 0, \alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$

Théorème 08 :

1- on suppose que $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0$ et $\alpha_{ij}\ ,\beta_{ij}$ i=1,2 des nombres Complexes et que les conditions aux limites sont régulières

Alors $\Sigma_\delta \subset \rho(L_P)$ et il existe c> 0 tel que

$$\|R\ (\lambda, L_P)\|_{L^P[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2P}}}$$

2.4- Estimation de la fonction de Green dans les cas des condition aux limites non régulières dans $L^P[0,1]$; $1 \leq P < \infty$:

2.4.1- Introduction :

Dans cette partie on reprend l'étude faite dans le chapitre précédent des problèmes aux limites dans les espaces $L^P[0,1]$, $1\leq P < +\infty$ pour le cas non régulier .

2 .4.2-Estimation du déterminant caractéristique de la fonction de Green :

On a $\alpha_{ij}.\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ i = $\overline{1.2}$

D' après (40) on a:

$$\Delta(\lambda) \leq e^{\rho}\left[-\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})+(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})+\right.$$

$$\rho\alpha10\beta21+\alpha21\beta10-\alpha11\beta20+\alpha20\beta11+\emptyset\rho$$

Et $\quad \emptyset(\rho) = 2\rho e^{-\rho}\left[(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20})+(\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11})\right]$

$$+e^{-2\rho}\left[\rho^2(\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11})+\rho\big((\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10})-\right.$$

$$\alpha11\beta20+\alpha20\beta11-\alpha10\beta20-\alpha20\beta10$$

D'où $\quad |\emptyset(\rho)| \leq 2e^{-Re\rho}\left[|\rho|(|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}|+|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)\right]$

$$+e^{-2Re\rho}\left[|\rho|^2|\alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}|+|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+\right.$$

$$\alpha11\beta20+\alpha20\beta11+\alpha10\beta20-\alpha20\beta10$$

cas 1 :

si :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{11}=0 \qquad \alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}=0 \\ (\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10})-(\alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11})=0 \\ (\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20})+(\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11})=0 \\ \alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}\neq 0 \qquad \alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}\neq 0 \end{cases}$$

Alors:

$$|\emptyset(\rho)| \leq \frac{4}{\cos^2(\frac{\delta}{2})}\left[\frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{20}|+|\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}|)\right]$$

$$+\frac{1}{2\cos^2(\frac{\delta}{2})}\left[\frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11}|)\right]$$

Par ce que nous avons toujours :

$$\mathrm{Re}\rho > |\rho|\cos(\tfrac{\delta}{2}) \quad , \quad 1-e^{-\mathrm{Re}\,\rho}<1 \quad , \; 1-e^{-2\mathrm{Re}\,\rho}<1$$

$$e^{-\mathrm{Re}\,\rho} \leq \frac{2}{|\rho^2|\cos^2(\frac{\delta}{2})} \quad \text{Et} \quad e^{-2\mathrm{Re}\,\rho} \leq \frac{1}{2|\rho^2|\cos^2(\frac{\delta}{2})}$$

Pour $|\rho| > r_0 > 0$ et d'après la formule de Δ on obtient:

$$|\emptyset(\rho)| \leq \frac{C(r_0)}{|\rho|}$$

Et $\quad |\Delta(\lambda)| \geq |\rho|e^{\mathrm{Re}\,\rho}\left(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11}|-\frac{|\emptyset(\rho)|}{|\rho|}\right)$

$$\geq 2|\rho|e^{Re\rho}\left(|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|-\frac{\emptyset(\rho)}{|\rho|}\right)$$

Parce que $\quad \alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}=\alpha_{11}\beta_{20}+\alpha_{20}\beta_{11}$

Et comme :

$$\frac{c(r_0)}{r_0^2} \leq \frac{|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}|}{2}$$

Donc $\quad |\Delta(\lambda)| \geq |\rho| e^{\mathrm{Re}\,\rho} |\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}|$

$$\geq |\rho|^{-\frac{1}{2P}} e^{\mathrm{Re}\,\rho} |\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}|$$

De (53) on a :

$\|R(\lambda, L_P)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{C}{|\rho|^{\frac{1}{2P}+1} \; |\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|} \{2|\rho|(|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{10}\alpha_{21} -$
$\alpha 11 \alpha 20$

Alors : $\quad \|R(\lambda, L_P)\|_{L^P[0,1]} \leq \frac{c_1}{|\rho|^{\frac{1}{2P}}}$

tel que : $\quad c_1 = \frac{2^{3+\frac{2}{p}} 3^{2-\frac{1}{p}}}{P^{\frac{1}{P}} \left(\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{\frac{1}{P}}} - \frac{|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|+|\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}|}{|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}$

<u>Cas 02 :</u> si :

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{11}\beta_{20} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11} = 0 \\ (\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0 \\ \alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0 \end{cases}$$

Alors: $\quad |\emptyset(\rho)| \leq \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \left[\frac{1}{|\rho|}(|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}|)\right]$

Pour $\quad |\rho| > r_0 > 0$

Alors : $\quad |\emptyset(\rho)| \leq \frac{C(r_0)}{|\rho|}$

D'après la formule de Δ on obtient

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\rho| e^{Re\rho} \left(|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| + |\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}| - \frac{|\emptyset(\rho)|}{|\rho|}\right)$$

$$\geq 2|\rho| e^{Re\rho} \left(|\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}| - \frac{\emptyset(\rho)}{|\rho|}\right)$$

Et comme : $\quad \frac{C(r_0)}{{r_0}^2} \leq \frac{|\alpha_{10}\beta_{21}+\alpha_{21}\beta_{10}|}{2}$

Donc on obtient : $\quad |\Delta(\lambda)| \geq |\rho|^{-\frac{1}{2p}} e^{Re\rho} |\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}|$

De (53) on a :

$$\left\|R\left(\lambda, \mathrm{L_p}\right)\right\|\mathrm{L}^{\rho}(0,1) \leq \frac{c_2}{|\rho|^{\frac{1}{2\mathrm{p}}}}$$

tel que : $$c_2 = \frac{2^{3+\frac{2}{\mathrm{p}}}\, 3^{2-\frac{1}{\mathrm{P}}}}{\mathrm{P}^{\frac{1}{\mathrm{P}}}\left(cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}}$$

<u>Définition 05</u> :

Les conditions aux limites dans (11) sont dites non régulières si l'une des conditions suivantes est vérifiée

$1 - \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0 \qquad \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = 0$

$(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$

$(\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}) + (\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}) = 0$

$\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0 \qquad \alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20} \neq 0$

$2 - \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{11}\beta_{20} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11} = 0$

$(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$

$\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$

<u>Théorème 09 :</u> On suppose que les conditions aux limites sont non régulières alors $\sum \rho \subset \rho\,(\mathrm{L_P})$ et existe $c > 0$

tel que : $\left\|R\left(\lambda, \mathrm{L_p}\right)\right\|_{\mathrm{L^P}[0,1]} \leq \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2\mathrm{p}}}}$

CHAPITRE 3

Problème aux limites presque réguliers pour équation différentielle du second

Ordre avec condition aux limites non locales

3.1-Introduction

ce chapitre est consacré à l'étude de la presque régularité et l'ordre de cette presque régularité d'un problème spectral non local du second ordre et l'étude de l'existence de cette presque régularité pour les équations à coefficients variables de tout ordre , ce problème a été traité dans [39].

3.2-Problème spectral du second ordre dans le cas q(x)≠ 0, ∀x[0, 1].

Si q(x)≠0, parmi les différentes conditions aux limites de la formule (10) qui ne sont pas régulières par Birkhoff, qui peuvent nous amener à la formule :

$$\begin{cases} u_1(y) = \alpha_{11}y'(0) + \alpha_{10}y(0) + \beta_{11}y'(1) + \beta_{10}y(1) = 0 \\ u_2(y) = \alpha_{20}y(0) + \beta_{20}y(1) = 0 \end{cases} \qquad (54)$$

leurs coefficients $\alpha_{11}\,\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20} = 0$; $|\alpha_{11}|+|\beta_{11}| > 0$; $|\alpha_{20}|+|\beta_{20}| > 0$ (55) sont satisfaits.

Ainsi on considèrera le problème (9), (54) sur réalisation de la condition (55)

$$\begin{cases} y'' + q(x)y - \lambda^2 y = f(x) \qquad 0 < x < 1 & (9) \\ u_i(y) = \sum_{j=0}^{1}\left(\alpha_{ij}\,y^{(j)}(0) + \beta_{ij}\,y^{(j)}(1)\right) = 0 \;\; ; \;\; \alpha_{21} = \beta_{21} = 0 \qquad i = \overline{1,2} & (54) \\ \alpha_{11}\,\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20} = 0 \;\; ; \;\; |\alpha_{11}| + |\beta_{11}| > 0 \;\; ; \;\; |\alpha_{20}| + |\beta_{20}| > 0 & (55) \end{cases}$$

3.3- relation entre propriété périodique du potentiel q(x) de l'équation et presque régularité de chaque ordre d'un problème spectral

ici sous les conditions de la régularité de la fonction q(x) on obtient une formule qui nous permet de calculer les coefficients de chaque membre de développement asymptotique selon la puissance λ (quand $|\lambda|$ tand ver ∞) des solutions particulières d'un système fondamental de l'équation (9) .

soit q(x)ϵ c^m [0,1]

Par la méthode de réduction des systèmes des équations intégrales [41], il est montré que pour R>0 suffisamment grand, dans chaque domaine c_R^+={ λ , $Re\lambda > 0$,$|\lambda| > R$} ; c_R^-={ λ , $Re\lambda < 0$,$|\lambda| > R$}

l'équation possède un système fondamental des solutions particulières (S.f.S.P) et permet les développements asymptotiques.

$$\frac{d^j y_i(x,\lambda)}{dx^j} = \lambda^j e^{[(-1)^i \lambda x]} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s} g_{ij}^{(s)}(x) + \eta_{iv}(x,\lambda) \right] \qquad \begin{cases} i = \overline{1,2} \\ j = \overline{0,1} \\ s = \overline{0,m} \end{cases} \tag{56}$$

Où les fonctions $\eta_{ij}(x,\boldsymbol{\lambda})$ sont continues $\forall x \epsilon [0,1]$ analytiques pour $\lambda \epsilon\ c_R^{\pm}$ et satisfait l'inégalité :

$$\left|\eta_{ij}(x,\lambda)\right| \leq M|\lambda|^{-m-1} \tag{57}$$

Et $g_{ij}^{(s)}(x)$ sont déterminés par les relations de récurrence

$$g_{ij}^{(0)}(x) = (-1)^{ij} \qquad s = 0 \quad ; \quad g_{ij}^{(1)}(x) = \frac{(-1)^{i(j+1)-1}}{2} \int_0^x q(\varepsilon) d\varepsilon \qquad \begin{cases} i = \overline{1,2} \\ s = 1 \\ j = \overline{0,1} \end{cases}$$

$$g_{ij}^{(s)}(x) = \frac{(-1)^{i(j+1)-1}}{2} \int_0^x q(\varepsilon) g_{i0}^{(s-1)}(\varepsilon) d\varepsilon +$$

$$+ \sum_{v=0}^{s-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{j(i-v-j)} (-1)^{ij} \frac{d^{s-v-2}}{dx^{s-v-2}} \left[q(x) g_{i0}^{(v)}(\mathrm{x}) \right] \qquad \begin{cases} i = \overline{1,2} \\ j = \overline{0,1} \\ v = \overline{0,m-2} \\ s = \overline{2,m} \end{cases} \tag{58}$$

De plus en utilisant la formule (56) et l'estimation (57) pour le déterminant caractéristique du problème de Green (9) (54) On obtient l'expression:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & u_1(y_2) \\ u_2(y_1) & u_2(y_2) \end{vmatrix}$$

Où y_1 *et* y_2 sont les solutions particulières d'un système fondamental de l'équation (9)

De (56) on a :

$$y_1(x,\lambda) = e^{-\lambda x} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s} g_{10}^{(s)}(x) + \eta_{10}(x,\lambda) \right] \tag{59}$$

$$y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s} g_{20}^{(s)}(x) + \eta_{20}(x,\lambda) \right] \tag{60}$$

$$y_1^{(1)}(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s} g_{11}^{(s)}(x) + \eta_{11}(x,\lambda) \right] \tag{61}$$

$$y_2^{(1)}(x,\lambda) = \lambda e^{\lambda x} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s} g_{21}^{(s)}(x) + \eta_{21}(x,\lambda) \right] \tag{62}$$

Et on a aussi de (54) :

$$u_1(y_1) = \alpha_{10}\, y_1^{(0)}\,(0) + \alpha_{11}\, y_1^{(1)}\,(0) + \beta_{10}\, y_1^{(0)}\,(1) + \beta_{11}\, y_1^{(1)}\,(1) \qquad (63)$$

$$u_1(y_2) = \alpha_{10}\, y_2^{(0)}\,(0) + \alpha_{11}\, y_2^{(1)}\,(0) + \beta_{10}\, y_2^{(0)}\,(1) + \beta_{11}\, y_2^{(1)}\,(1) \qquad (64)$$

$$u_2(y_1) = \alpha_{20}\, y_1^{(0)}\,(0) + \beta_{20}\, y_1^{(0)}\,(1) \qquad (65)$$

$$u_2(y_2) = \alpha_{20}\, y_2^{(0)}\,(0) + \beta_{20}\, y_2^{(0)}\,(1) \qquad (66)$$

De (59) et (63) on a :

$$\begin{aligned} u_1(y_1) = \alpha_{10} & \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda)\right] \\ & + \lambda\alpha_{11} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(0) + \eta_{11}(0,\lambda)\right] + \beta_{10}\, e^{-\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1) + \eta_{10}(1,\lambda)\right] \\ & + \beta_{11}\, \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(1) + \eta_{11}(1,\lambda)\right] \qquad (67) \end{aligned}$$

Et de (60) et (64) on a :

$$\begin{aligned} u_1(y_2) = \alpha_{10} & \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0) + \eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ & + \lambda\alpha_{11} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(0) + \eta_{21}(0,\lambda)\right] + \beta_{10}\, e^{\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda)\right] \\ & + \beta_{11}\, \lambda e^{\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(1) + \eta_{21}(1,\lambda)\right] \qquad (68) \end{aligned}$$

Et aussi (61) et (65) on a :

$$u_2(y_1) = \alpha_{20} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda)\right] + \beta_{20} e^{-\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1) + \eta_{10}(1,\lambda)\right] \qquad (69)$$

Et de (61) et (66) on a :

$$u_2(y_2) = \alpha_{20} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0) + \eta_{20}(0,\lambda)\right] + \beta_{20}\, e^{\lambda} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda)\right] \qquad (70)$$

On substitu (67) et (68) et (69) et (70) dans le déterminant de Green on a :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \begin{array}{r} \alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{11}^{(s)}(0)+\eta_{11}(0,\lambda)\right] \\ +\beta_{10}\,e^{-\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] \\ +\beta_{11}\,\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{11}^{(s)}(1)+\eta_{11}(1,\lambda)\right] \end{array} & \begin{array}{r} \alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{21}^{(s)}(0)+\eta_{21}(0,\lambda)\right] \\ +\beta_{10}\,e^{\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \\ +\beta_{11}\,\lambda e^{\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{21}^{(s)}(1)+\eta_{21}(1,\lambda)\right] \end{array} \\ \\ \begin{array}{r} \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] \\ +\beta_{20}\,e^{-\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] \end{array} & \begin{array}{r} \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ +\beta_{20}\,e^{\lambda}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \end{array} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \begin{array}{r} \alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{11}^{(s)}(0)+\eta_{11}(0,\lambda)\right] \end{array} & \begin{array}{r} \alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{21}^{(s)}(0)+\eta_{21}(0,\lambda)\right] \end{array} \\ \\ \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] & \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \end{vmatrix}$$

$$+\;e^{\lambda}\begin{vmatrix} \begin{array}{r} \alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{11}^{(s)}(0)+\eta_{11}(0,\lambda)\right] \end{array} & \begin{array}{r} \beta_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \\ +\lambda\beta_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{21}^{(s)}(1)+\eta_{21}(1,\lambda)\right] \end{array} \\ \\ \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right] & \beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \end{vmatrix}$$

$$+\ e^{-\lambda}\begin{vmatrix} \begin{matrix}\beta_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] \\ +\beta_{11}\,\lambda\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(1)+\eta_{11}(1,\lambda)\right]\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ +\lambda\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(0)+\eta_{21}(0,\lambda)\right]\end{matrix} \\ \beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] & \alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \begin{matrix}\beta_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] \\ +\beta_{11}\,\lambda\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(1)+\eta_{11}(1,\lambda)\right]\end{matrix} & \begin{matrix}\beta_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \\ +\beta_{11}\,\lambda\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(1)+\eta_{21}(1,\lambda)\right]\end{matrix} \\ \beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right] & \beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right] \end{vmatrix}$$

Donc on trouve : $\Delta(\lambda) = \delta_{-1}(\lambda)e^{-\lambda} + \delta_0(\lambda) + \delta_1(\lambda)e^{\lambda}$ (71)

T.q

$$\begin{aligned}\delta_{-1}(\lambda) = {} & \beta_{10}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ & +\lambda\,\beta_{11}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(1)+\eta_{11}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ & -\beta_{20}\,\alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0)+\eta_{20}(0,\lambda)\right] \\ & -\lambda\,\beta_{20}\,\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1)+\eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(0)+\eta_{21}(0,\lambda)\right]\end{aligned}$$

$$et: \quad \delta_{-1}(\lambda) = \lambda\,\beta_{11}\,\alpha_{20} \sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s} \lambda^{-v}\, g_{20}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\, g_{11}^{(s-v)}(1) + 0\left(\frac{1}{\lambda^m}\right)$$

$$-\lambda\beta_{20}\,\alpha_{11} \sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s} \lambda^{-v}\, g_{21}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\, g_{10}^{(s-v)}(1) + 0\left(\frac{1}{\lambda^m}\right)$$

$$+\beta_{10}\,\alpha_{20} \sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s-1} \lambda^{-v}\, g_{20}^{(v)}(0)\lambda^{v-s+1}\, g_{10}^{(s-1-v)}(1) + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$-\beta_{20}\,\alpha_{10} \sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s-1} \lambda^{-v}\, g_{20}^{(v)}(0)\lambda^{v-s+1}\, g_{10}^{(s-1-v)}(1) + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$\delta_{-1}(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} \lambda^{1-s} \sum_{v=0}^{s} \beta_{11}\,\alpha_{20}\, g_{20}^{(v)}(0)\, g_{11}^{(s-v)}(1) + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$-\sum_{s=0}^{m} \lambda^{1-s} \sum_{v=0}^{s} \beta_{20}\,\alpha_{11}\, g_{21}^{(v)}(0) g_{10}^{(s-v)}(1) + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$+(\beta_{10}\,\alpha_{20} - \beta_{20}\,\alpha_{10})\sum_{s=0}^{m} \lambda^{1-s} \sum_{v=0}^{s-1} g_{20}^{(v)}(0) g_{10}^{(s-1-v)}(1) + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \lambda^{1-s} \left\{ \sum_{v=0}^{s} \left[\beta_{11}\,\alpha_{20}\, g_{20}^{(v)}(0)\, g_{11}^{(s-v)}(1) - \beta_{20}\,\alpha_{11}\, g_{21}^{(v)}(0)\, g_{10}^{(s-v)}(1) \right] \right.$$
$$\left. + (\beta_{10}\,\alpha_{20} - \beta_{20}\,\alpha_{10}) \sum_{v=0}^{s-1} g_{20}^{(v)}(0) g_{10}^{(s-1-v)}(1) \right\} + 0(\frac{1}{\lambda^m})$$

On pose :

$$\delta_{-1}^{(1-s)} = \sum_{v=0}^{s} \left[\beta_{11}\,\alpha_{20}\, g_{20}^{(v)}(0)\, g_{11}^{(s-v)}(1) - \beta_{20}\,\alpha_{11}\, g_{21}^{(v)}(0)\, g_{10}^{(s-v)}(1) \right]$$
$$+ (\beta_{10}\,\alpha_{20} - \beta_{20}\,\alpha_{10}) \sum_{v=0}^{s-1} g_{20}^{(v)}(0) g_{10}^{(s-1-v)}(1) \qquad (72)$$

Donc $\delta_{-1}(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} \lambda^{1-s}\, \delta_{-1}^{(1-s)} + 0(\frac{1}{\lambda^m})$ (73)

$$\delta_{1}(\lambda) = \beta_{20}\,\alpha_{10} \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda) \right] \left[\sum_{s=0}^{m} \lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda) \right]$$

$$+\lambda\,\beta_{20}\,\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{11}^{(s)}(0)+\eta_{11}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right]$$

$$-\,\beta_{10}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{20}^{(s)}(1)+\eta_{20}(1,\lambda)\right]$$

$$-\lambda\,\beta_{11}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{10}^{(s)}(0)+\eta_{10}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\,g_{21}^{(s)}(1)+\eta_{21}(1,\lambda)\right]$$

et $$\delta_1(\lambda)=\ \lambda\,\beta_{20}\,\alpha_{11}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\,g_{11}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\,g_{20}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$-\lambda\,\beta_{11}\,\alpha_{20}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\,g_{10}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\,g_{21}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$+\beta_{20}\alpha_{10}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s-1}\lambda^{-v}\,g_{10}^{(v)}(0)\lambda^{v-s+1}\,g_{20}^{(s-1-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$-\beta_{10}\,\alpha_{20}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s-1}\lambda^{-v}\,g_{10}^{(v)}(0)\lambda^{v-s+1}\,g_{20}^{(s-1-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \beta_{20}\,\alpha_{11}\ \ g_{11}^{(v)}(0)\,g_{20}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$-\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \beta_{11}\,\alpha_{20}\ \ g_{10}^{(v)}(0)\,g_{21}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$+(\,\beta_{20}\,\alpha_{10}\ -\ \beta_{10}\,\alpha_{20}\,)\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s-1}g_{10}^{(v)}(0)g_{20}^{(s-1-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\left\{\sum_{v=0}^{s}\left[\ \beta_{20}\,\alpha_{10}\ \ g_{11}^{(v)}(0)\,g_{20}^{(s-v)}(1)-\beta_{11}\,\alpha_{20}\ \ g_{10}^{(v)}(0)\,g_{21}^{(s-v)}(1)\right]+\ (\,\beta_{20}\,\alpha_{10}\right.$$
$$\left.-\ \beta_{10}\,\alpha_{20}\,)\sum_{v=0}^{s-1}g_{10}^{(v)}(0)g_{20}^{(s-1-v)}(1)\right\}+0(\frac{1}{\lambda^m})$$

On pose :

$$\delta_1^{(1-s)} = \sum_{v=0}^{S}\left[\beta_{20}\alpha_{11}g_{11}^{(v)}(0)g_{20}^{(s-v)}(1) - \beta_{11}\alpha_{20}g_{10}^{(v)}g_{21}^{(S-v)}(1)\right]$$
$$+ (\beta_{20}\alpha_{10} - \alpha_{20}\beta_{10})\sum_{v=0}^{s-1} g_{10}^{(v)}(0)\, g_{20}^{(s-1-v)}(1) \qquad (74)$$

Donc $$\delta_1(\lambda) = \sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\,\delta_1^{(1-s)} + 0(\frac{1}{\lambda^m}) \qquad (75)$$

$$\delta_0(\lambda) = \alpha_{20}\,\alpha_{10}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0) + \eta_{20}(0,\lambda)\right]$$
$$+ \lambda\,\alpha_{20}\,\alpha_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(0) + \eta_{11}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0) + \eta_{20}(0,\lambda)\right]$$
$$- \alpha_{10}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(0) + \eta_{20}(1,\lambda)\right]$$
$$-\lambda\alpha_{11}\,\alpha_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(0) + \eta_{10}(0,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(0) + \eta_{21}(0,\lambda)\right]$$
$$+ \beta_{10}\,\beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1) + \eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda)\right]$$
$$+ \lambda\,\beta_{20}\,\beta_{11}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{11}^{(s)}(1) + \eta_{11}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda)\right]$$
$$- \beta_{10}\,\beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1) + \eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{20}^{(s)}(1) + \eta_{20}(1,\lambda)\right]$$
$$- \lambda\,\beta_{11}\,\beta_{20}\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{10}^{(s)}(1) + \eta_{10}(1,\lambda)\right]\left[\sum_{s=0}^{m}\lambda^{-s}\, g_{21}^{(s)}(1) + \eta_{21}(1,\lambda)\right]$$

et : $$\delta_0(\lambda) = \lambda\alpha_{20}\,\alpha_{11}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\, g_{20}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\, g_{11}^{(s-v)}(0) + 0\left(\frac{1}{\lambda^m}\right)$$
$$- \lambda\alpha_{11}\,\alpha_{20}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\, g_{10}^{(v)}(0)\lambda^{v-s}\, g_{21}^{(s-v)}(0) + 0\left(\frac{1}{\lambda^m}\right)$$

$$+\lambda\beta_{20}\beta_{11}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\ g_{20}^{(v)}(1)\lambda^{v-s}\ g_{11}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$-\lambda\beta_{11}\,\beta_{20}\sum_{s=0}^{m}\sum_{v=0}^{s}\lambda^{-v}\ g_{10}^{(v)}(1)\lambda^{v-s}\ g_{21}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \alpha_{20}\,\alpha_{11}\ \ g_{20}^{(v)}(0)\,g_{11}^{(s-v)}(0)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$-\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \alpha_{11}\,\alpha_{20}\ \ g_{10}^{(v)}(0)\,g_{21}^{(s-v)}(0)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$+\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \beta_{20}\,\beta_{11}\ \ g_{20}^{(v)}(1)\,g_{11}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$-\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\sum_{v=0}^{s}\ \beta_{11}\,\beta_{20}\ \ g_{10}^{(v)}(1)\,g_{21}^{(s-v)}(1)+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\left\{\sum_{v=0}^{s}\Big[\ \alpha_{20}\,\alpha_{11}\ \left(g_{20}^{(v)}(0)\,g_{11}^{(s-v)}(0)-\ g_{10}^{(v)}(0)\,g_{21}^{(s-v)}(0)\right)\right.$$
$$\left.+\beta_{11}\beta_{20}\left(g_{20}^{(v)}(1)g_{11}^{(s-v)}(1)-g_{10}^{(v)}(1)g_{21}^{(s-v)}(1)\right)\Big]\right\}+0(\frac{1}{\lambda^{m}})$$

On pose :

$$\delta_{0}^{(1-s)}=\sum_{v=0}^{s}\Big[\ \alpha_{20}\,\alpha_{11}\ \left(g_{20}^{(v)}(0)\,g_{11}^{(s-v)}(0)-\ g_{10}^{(v)}(0)\,g_{21}^{(s-v)}(0)\right)$$
$$+\beta_{11}\beta_{20}\left(g_{20}^{(v)}(1)g_{11}^{(s-v)}(1)-g_{10}^{(v)}(1)g_{21}^{(s-v)}(1)\right)\Big] \qquad (76)$$

Donc $$\delta_{0}(\lambda)=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\,\delta_{0}^{(1-s)}+0(\frac{1}{\lambda^{m}}) \qquad (77)$$

Finalement on obtient l'expression suivante :

$$\Delta(\lambda)=\delta_{-1}(\lambda)e^{-\lambda}+\delta_{0}(\lambda)+\delta_{1}(\lambda)e^{\lambda} \qquad (78)$$

$$\delta_{k}(\lambda)=\sum_{s=0}^{m}\lambda^{1-s}\,\delta_{k}^{(1-s)}+0\left(\frac{1}{\lambda^{m}}\right) \qquad (\ k=-1,0,1\ ) \qquad (79)$$

Où $\delta_k^{(1-s)}$ ($k = -1,0,1$ et $s = 0,1,\dots,m$) des constantes données par les formules (72), (74), (76).

Des les formules (78) et (79) selon la définition de A.A. shkalikove [49].
On a la définition 1.

Définition 1 :
soit $q(x) \in c^m$ [0,1] sous les conditions aux limites u_i ($i = \overline{1,2}$) de la formule (54) et $|\alpha_{11}|+|\beta_{11}| > 0$; $|\alpha_{20}|+|\beta_{20}| > 0$, les problèmes spectraux (9) et (10) sont appelés presque réguliers de l'ordre m≥0,

$$\delta_{-1}^{(1)} = \delta_{-1}^{(0)} = \dots = \delta_{-1}^{(2-m)} = 0\,, \qquad \delta_{-1}^{(1-m)} \neq 0 \tag{80}$$

Remarque :
1- le problème (9) (10) est presque régulier d'ordre zéro m=0 si :

$$\delta_{-1}^{(1)} \neq 0$$

En substituant (58) dans (72) quand s=0 en obtient le développement :

$$\delta_{-1}^{(1)} = -(\ \beta_{11}\,\alpha_{20} + \ \beta_{20}\,\alpha_{11}\ ) \tag{81}$$

2- en substituant (58) dans (72) quand s=1 on obtient :

$$\delta_{-1}^{(0)} = -\frac{1}{2}(\ \beta_{11}\,\alpha_{20} + \ \beta_{20}\,\alpha_{11}\ )\int_0^1 q(\varepsilon)d\varepsilon - (\ \beta_{20}\alpha_{10} - \ \beta_{10}\,\alpha_{20}\ ) \tag{82}$$

Il est évident que le problème (9) (10) sera presque régulier du premier ordre ssi :

$$\beta_{11}\alpha_{20} + \beta_{20}\alpha_{11} = 0 \qquad et \qquad \beta_{20}\alpha_{10} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0 \tag{83}$$

en même temps pour la presque régularité de ce problème de l'ordre $m \geq 2$ il est nécessaire que :

$$\beta_{11}\alpha_{20} + \beta_{20}\alpha_{11} = 0 \qquad et \qquad \beta_{20}\alpha_{10} - \beta_{10}\alpha_{20} = 0 \tag{84}$$

mais avec la réalisation de (84) l'expression des nombres $\delta_{-1}^{(1-s)}$, $s \geq 2$ est simple de prend la forme :

$$\delta_{-1}^{(1-s)} = \beta_{11}\,\alpha_{20}\ \sum_{v=0}^{s}(-1)^v\left[g_{10}^{(v)}(0)g_{11}^{(s-v)}(1) + g_{11}^{(v)}(0)g_{10}^{(s-v)}(1)\right] \tag{85}$$

(s=2,3…)

où il $\alpha_{20}\ \beta_{11} \neq 0$ puisque il est facile de voir que sur la non réalisation de cette inégalité, le problème (9) (10) devient un problème de Cauchy et n'est pas normal dans le sens de [49] , comme il est claire d'après (85) l'ordre de la presque régularité qui est supérieur premier , ne dépend pas des coefficients q(x) et des conditions aux limites (54).

À partir de (85) et après des transformations simples on obtient

si s=2 $\delta_{-1}^{(-1)} = \frac{1}{2}\beta_{11}\,\alpha_{20}\ [q(1) - q(0)]$ (86)

s=3 $\delta_{-1}^{(-2)} = \frac{1}{4}\beta_{11}\,\alpha_{20}\ (q^{'}(1) + q^{'}(0) + [q(1) - q(0)]\int_0^1 q(\varepsilon)d\varepsilon)$

La régularité qu'on peut noter sur ces formules, est généralisée dans la proposition suivante.

Lemme 1.

Soit (84) satisfait, $\alpha_{20}\beta_{11} \neq 0$ et $\delta_{-1}^{(-1)} = \delta_{-1}^{(-2)} = \cdots = \delta_{-1}^{(-k)} = 0$

Alors pour que $\delta_{-1}^{(-k-1)} = 0$, il est nécessaire et suffisant que

$$q^{(k)}(0) = (-1)^k q^{(k)}(1)\ , \qquad (\,k \geq 0) \tag{87}$$

Pour la preuve de ce lemme on doit établir Le lemme suivant , qui a une valeur indépendante dans le sens de la simplification des relations de récurrence (58)

Lemme 2 :

pour chaque naturel $s \in \mathbb{N}$ de la fonction $g_{10}^{(s)}(x)$ la représentation suivante est valable.

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\sum_{n=1}^{s_0}\left[\sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n}\alpha_{s,k_1,\dots,k_n}^{(n)}\, q^{(k_1)}(x)\dots q^{(k_{n-1})}(x)q_{k_n}(x)\right.$$
$$\left. + \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq s-2v}\alpha_{s,k_1,\dots,k_{n-1},0}^{(n)}\, q^{(k_1)}(x)\dots q^{(k_{n-1})}(x)q^{(s-2n-k_1-\cdots-k_{n-1})}(x)\right] \tag{88}$$

Ou $s_0 = \left[\frac{s+1}{2}\right]$ est la partie réelle de $\frac{s+1}{2}$

$$q_v(x) = 2^s\int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(v)}(\varepsilon)d\varepsilon \quad , \quad (v = 0,1,\dots) \tag{89}$$

Et les nombres naturels $\alpha_s^{(n)}\dots$, sont déterminés par les formules

$$\alpha_{s,k_1\ldots,k_n}^{(n)} = \sum_{v=k_n+1}^{s-2(n-1)-k_1-\,.\,.\,.\,.-k_{n-1}} C_{s-2(n-1)-k_1-\;\ldots\;-k_{n-1}-j}^{k_{n-1}}\,\alpha_{s,k_1,\ldots k_{n-2},j}^{(n-1)} \qquad (90)$$

$$\alpha_{s,k_1}^{(1)} = 1$$

Preuve de lemme 2:
d'après la représentation de (89) on peut représenter (58) quand $j = 0$ et i=1 sous la forme :

$$g_{10}^{(s)}(x) = \int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(s-1)}(\varepsilon)d\varepsilon + \sum_{v=0}^{s-2}\frac{d^{s-v-2}}{dx^{s-v-2}}\left[q(x)g_{10}^{(v)}(x)\right]$$

$$= \int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(s-1)}(\varepsilon)d\varepsilon + \sum_{v=0}^{s-2}\frac{d^{s-v-1}}{dx^{s-v-1}}\left[\int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(v)}(\varepsilon)d\varepsilon\right]$$

On a si v =s -1

$$\frac{d^{s-v-1}}{dx^{s-v-1}}\left[\int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(v)}(\varepsilon)d\varepsilon\right] = \int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(s-1)}(\varepsilon)d\varepsilon$$

Donc

$$g_{10}^{(s)}(x) = \sum_{v=0}^{s-1}\frac{d^{s-v-1}}{dx^{s-v-1}}\left[\int_0^x q(\varepsilon)g_{10}^{(v)}(\varepsilon)d\varepsilon\right]$$

$$= \sum_{v=0}^{s-1}\frac{d^{s-v-1}}{dx^{s-v-1}}2^{-j}\,q_j(x)$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\sum_{v=0}^{s-1} q_v^{(s-v-1)}(x) \qquad (91)$$

Donc on a

$$q_s^{'}(x) = 2^s q(x)g_{10}^{(s)}(x) = q(x)\sum_{v=0}^{s-1} q_v^{(s-1-v)}(x) \qquad (92)$$

De la forme (91) et (92) on obtient :

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v=1}^{s-2} q_v^{(s-1-v)}(x)\right]$$

$$= 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\left(q'_{v_1}(x)\right)^{(s-2-v_1)}\right]$$

De (92) :

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\left[q(x)\sum_{v_2=0}^{v_1-1}\left(q_{v_2}^{v_1-1-v_2}(x)\right)\right]^{(s-2-v_1)}\right]$$

$$= 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\sum_{v_2=0}^{v_1-1}\left(q(x)q_{v_2}^{(v_1-1-v_2)}(x)\right)^{(s-2-v_1)}\right]$$

$$= 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\sum_{v_2=0}^{v_1-1}\left(q^{(1)}(x)q_{v_2}^{(v_1-1-v_2)}(x) + q(x)q_{v_2}^{(v_1-v_2)}(x)\right)^{(s-2-v_1-1)}\right]$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\sum_{v_2=0}^{v_1-1}\left(q^{(2)}(x)q_{v_2}^{(v_1-1-v_2)}(x) + q^{(1)}(x)q_{v_2}^{(v_1-v_2)}(x) + q^{(1)}(x)q_{v_2}^{(v_1-v_2)}(x) + q(x)q_{v_2}^{(v_1-v_2+1)}(x)\right)^{(s-2-v_1-2)}\right]$$

Par répétition de la méthode précédente (k_1+1) fois , On obtient les : formules

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{v_1=0}^{s-1}\sum_{v_2=0}^{v_1-1}\sum_{k_1=0}^{s-2-v_1} C_{s-v_1-2}^{k_1} q^{(k_1)}(x)q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)\right]$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[q_{s-1}(x) + q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{k_1=0}^{s-3}\sum_{v_2=0}^{s-3-k_1}\sum_{v_1=v_2+1}^{s-2-k_1} C_{s-v_1-2}^{k_1} q^{(k_1)}(x)q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)\right]$$

Notons : $\alpha_{s,s-1}^{(1)} = \alpha_{s,0}^{(1)} = 1$

$$\alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} = \sum_{v_1=v_2+1}^{s-2-k_1} C_{s-v_1-2}^{k_1} \alpha_{s,v_1}^{(1)} = \sum_{v_1=v_2+1}^{s-2-k_1} C_{s-v_1-2}^{k_1} = C_{s-v_1-2}^{k_1+1}$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[\alpha_{s,s-1}^{(1)} q_{s-1}(x) + \alpha_{s,0}^{(1)} q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{k_1=0}^{s-3}\sum_{v_2=0}^{s-3-k_1} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)\right]$$

$$= 2^{-s}\left[\left[\alpha_{s,s-1}^{(1)} q_{s-1}(x) + \alpha_{s,0}^{(1)} q_0^{(s-1)}(x)\right] + \sum_{k_1+v_2\leq s-3} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)\right]$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\left[\left[\alpha_{s,s-1}^{(1)} q_{s-1}(x) + \alpha_{s,0}^{(1)} q_0^{(s-1)}(x)\right]\right.$$
$$+ \sum_{k_1+v_2=s-3} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}(x) + \sum_{k_1=0}^{s-3} \alpha_{s,k_1,0}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_0^{(s-3-k_1)}(x)$$
$$\left. + \sum_{k_1+v_2\leq s-4} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)\right] \qquad (93)$$

En utilisant les formules (91) et (92) dans (93) on obtient :

De (92) on a :

$$q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x) = \left(q_{v_2}^{'}(x)\right)^{(s-4-v_2-k_1)} \sum_{k_1+v_2\leq s-4} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)}(x)$$

$$= \sum_{k_1+v_2\leq s-4} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) \left[q(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2-1-v_3)}(x)\right]^{(s-4-k_1-v_2)}$$

Alors on a

$$= \sum_{k_1+v_2\leq s-4} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) \left[q(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2-v_3)}(x) + q^{(1)}(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2-1-v_3)}(x)\right]^{(s-5-k_1-v_2)}$$

$$q_{v_2}^{(s-3-v_2-k_1)} = \sum_{k_1+v_2\leq s-4} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x)\left[q(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2+1-v_3)}(x\ +)\right.$$

$$+\,q^{(1)}(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{i_3}^{(v_2-v_3)}(x)\ +q^{(1)}(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2-v_3)}(x)$$

$$\left.+\,q^{(2)}(x)\sum_{v_3=0}^{v_2-1} q_{v_3}^{(v_2-1-v_3)}(x)\right]^{(s-6-k_1-v_2)}$$

.

.

.

$$g_{10}^{(s)}(x) = \sum_{k_1+v_2\leq s-4}\ \sum_{v_{3=0}}^{v_2-1}\ \sum_{k_{2=0}}^{s-4-k_1-v_2} C_{s-4-k_1-v_2}^{k_2}\alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)}\ \ q^{(k_1)}(x)\ \ q^{(k_2)}(x)q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)} =$$

$$= \sum_{k_{1=0}}^{s-5}\ \sum_{v_2=0}^{s-4-k_1}\ \sum_{v_2=0}^{v_2-1}\ \sum_{k_{2=0}}^{s-4-k_1-v_2} C_{s-4-k_1-v_2}^{k_2} \propto_{s,k_1,v_2}^{(2)}\ \ q^{(k_1)}(x)\ \ q^{(k_2)}(x)q_{v_3}^{s(-5-k_1-k_2-v_3)} =$$

On a donc :

$$g_{10}^{(s)}(x) = \sum_{k_{1=0}}^{s-5}\ \sum_{k_2=0}^{s-5-k_1}\ \sum_{v_3=0}^{s-5-k_1-k_2}\ \sum_{v_2=v_3+1}^{s-4-k_1-k_2} C_{s-4-k_1-v_2}^{k_2}\alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)}\ q^{(k_1)}(x)\ \ q^{(k_2)}(x)q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)}(x)$$

$$g_{10}^{(s)}(x) = \sum_{k_1+k_2+v_3\leq s-5} \alpha_{s,k_1,k_2,v_3}^{(3)} q^{(k_1)}(x)\ \ q^{(k_2)}(x)q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)}(\mathrm{x}) \qquad (94)$$

$$\alpha_{s,k_1,k_2,v_3}^{(3)} = \sum_{v_2=v_3+1}^{s-4-k_1-k_2} C_{s-4-k_1-v_2}^{k_2}\alpha_{s-k_1-v_2}^{(2)}$$

On substitue (94) dons (93) on obtient :

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s}\Bigg[\left[\alpha_{s,s-1}^{(1)} q_{s-1}(x) + \alpha_{s,0}^{(1)} q_0^{(s-1)}(x)\right]$$

$$+\left[\sum_{k_1+v_2\leq s-3} \alpha_{s,k_1,v_2}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_{v_2}(x) + \sum_{k_1\leq s-4} \alpha_{s,k_1,0}^{(2)} q^{(k_1)}(x) q_0^{(s-3-k_1)}(x)\right]$$

$$+\left[\sum_{k_1+k_2+v_3=s-5} \alpha_{s,k_1,k_2,v_3}^{(3)} q^{(k_1)}(x) q^{(k_2)}(x) q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)}(x)\right.$$

$$+\sum_{k_1+k_2\leq s-6} \alpha_{s,k_1,k_2,v_3}^{(3)} q^{(k_1)}(x) q^{(k_2)}(x) q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)}(x)$$

$$\left.+\sum_{k_1+k_2+v_3\leq s-6} \alpha_{s,k_1,k_2,v_3}^{(3)} q^{(k_1)}(x) q^{(k_2)}(x) q_{v_3}^{(s-5-k_1-k_2-v_3)}(x)\right]\Bigg]$$

Par répétition de la transformation précédente ($s_0 - 3$) fois On obtient les formules :

$$g_{10}^{(s)}(x) = 2^{-s} \sum_{n=1}^{s_0} \Bigg[\sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_n}^{(n)} q^{(k_1)}(x) \ldots q^{(k_{n-1})}(x) q_{k_n}(x) +$$

$$+ \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq s-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(x) \ldots q^{(k_{n-1})}(x)\; q^{(s-2v-k_1-\cdots-k_{n-1})}(x) \Bigg]$$

$$\alpha_{s,k_1,,k_n}^{(n)} = \sum_{v=k_n+1}^{s-2(n-1)-k_1-\cdots k_{n-1}} C_{s-2(n-1)-k_1-\cdots-k_{n-1}-v}^{k_{n-1}} \alpha_{s,k_1,\ldots,k_{n-2},v}^{(n-1)}$$

$$\alpha_{s,k_1}^{(1)} = 1$$

Qui sont facilement confirmées par récurrence

Remarque :

les nombres naturels $\alpha_{s,k_1,,k_v}^{(v)}$ qui apparaissent dans la formule (88) out la propriété :

$$\alpha_{s,k_1,,k_n}^{(n)} = \alpha_{s-k_n,k_1,,,,k_{n-1},0}^{(n)} \tag{95}$$

Qui sera utilisé pour prouver le lemme (1).

Preuve de lemme 1 :

On utilise la méthode mathématique de récurrence quand k=0 et k=1 la validité du lemme s'ensuit. En effet des les deux premiers égalités de la formule (86) on a :

■ si k = 0

alors $\delta_{-1}^{(-1)} = 0$

De (85) on obtient :

$$\delta_{-1}^{(-1)} = \tfrac{1}{2}\alpha_{20}\beta_{11}[q(1) - q(0)] = 0 \quad \text{mais} \quad \alpha_{20}\beta_{11} \neq 0$$

Donc

$$q(1) - q(0) = 0 \quad \Rightarrow q(1) = q(0) \Rightarrow q^{(0)}(0) = (-1)^0 q^{(0)}(1)$$

Alors le lemme (1) est vrai pour k=0

■ Si k=1

alors $\delta_{-1}^{(-1)} = 0 \quad et \quad \delta_{-1}^{(-2)} = 0$

Et d'après (85) :

$$\delta_{-1}^{(-1)} = \frac{1}{2}\alpha_{20}\beta_{11}[q(1) - q(0)] = 0$$

$$\delta_{-1}^{(-2)} = \frac{1}{4}\alpha_{20}\beta_{11}\left\{[q'(1) + q'(0)] + [q(1) - q(0)]\int_0^1 q(\varepsilon)d\varepsilon\right\} = 0$$

Mais $\alpha_{20}\beta_{11} \neq 0$

D'après $\delta_{-1}^{(-1)}$ en s'ensuit que q(1) – q (0)=0

Et on a aussi $\delta_{-1}^{(-2)}$=0 donc q'(1) +q (0)=0

Alors $q^{(1)}(0) = -q^{(1)}(1) \Rightarrow q^{(1)}(0) = (-1)^1 q^{(1)}(1)$

Donc le lemme (1) est vrai pour k=1

• Pour $s \geq 4$ c 'est valable pour tout $k \leq s - 3$

On prouve la validité du lemme quand $k = s - 2 = s - 3 + 1$ i.e. La condition (84) satisfait

$$\alpha_{20}\beta_{11} \neq 0 \quad , \quad \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$$

$$\text{Et} \qquad \delta_{-1}^{(-1)} = \cdots\cdots\cdots = \delta_{-1}^{(2-s)} \qquad (96)$$

Et on établit que $\delta_{-1}^{(1-i)} = 0$ si l'égalité suivante est vraie

$$q^{(s-2)}(1) = (-1)^{(s-2)} q^{(s-2)}(0) \qquad (97)$$

De la réalisation de (96) en vertu de notre supposition, il s'ensuit que

$$q^{(k)}(1) = (-1)^{(k)} q^{(k)}(0) \ ; \qquad (k = 0,1 \ldots, s-3) \qquad (98)$$

Il est simple de voir qu'en utilisant la condition (85) on peut représenter sous la forme:

$$\delta_{-1}^{(1-s)} = \beta_{11}\, \alpha_{20} \left\{ (-1)^s \left[g_{10}^{(s)}(0)\, g_{11}^{(0)}(1) - g_{11}^{(s)}(0)\, g_{10}^{(0)}(1) \right] \right.$$
$$\left. + \sum_{v=0}^{s-1} (-1)^s \left[g_{10}^{(v)}(0)\, g_{11}^{(s-v)}(1) - g_{11}^{(v)}(0)\, g_{10}^{(s-v)}(1) \right] \right\}$$

Donc

$$(\beta_{11}\, \alpha_{20})^{-1} \delta_{-1}^{(1-s)} = 2\left[g_{10}^{(s)}(1) + (-1)^{s+1} g_{10}^{(s)}(0) \right] + \sum_{v=0}^{s-1} (-1)^{v+1} 2^{1+v-1}\, g_{10}^{(v)}(0) q_{s-v-1}(1) \qquad (99)$$

En substituant (88) dans (99) on trouve :

$$2^{s-1} (\beta_{11}\, \alpha_{20})^{-1} \delta_{-1}^{(1-s)} = \sum_{n=1}^{s_0} \left[\sum_{k_1+\cdots+n=s+1-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_{n-1}}^{(n)} \left[q^{(k_1)}(1) \ldots q^{(k_{n-1})}(1)\, q_{k_n}(1) + \right. \right.$$
$$\left. + (-1)^{s+1} q^{(k_1)}(0) \ldots q^{(k_{n-1})}(0) q_{k_n}(0) \right]$$
$$+ \sum_{k_1+\cdots+k_n \leq s-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} \left[q^{(k_1)}(1) \ldots q^{(k_{n-1})}(1) q^{(s-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(1) + \right.$$
$$\left. \left. + (-1)^{s+1} q^{(k_1)}(0) \ldots q^{(k_{n-1})}(0) q^{(s-2v-k_1-\cdots k_{v-1})}(0) \right] \right\}$$
$$-q_{s-1}(1) + \sum_{v=2}^{s-1} (-1)^{v+1} 2^v q_{s-v-1}(1) \sum_{n=1}^{v_0} \left[\sum_{k_1+\cdots+k_n=v+1-2n} \alpha_{j,k_1\ldots,k_n}^{(n)} q^{(k_1)}(0) \ldots q^{(k_{n-1})}(0) q_{k_n}(0) \right.$$
$$\left. + \sum_{k_1+\cdots+k_n \leq v-2n} \alpha_{i,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(0) \ldots q^{(k_{n-1})}(0) q^{(v-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(0) \right] \qquad (100)$$

t.q s_0 et v_0 les parties entières des nombres $\frac{s+1}{2}$ *et* $\frac{v+1}{2}$ respectivement

On combine (98) et (89) $q_{k_n}(0) = 0$ (voir (89)) d'après (100) on a

$$2^{s-1}\,(\beta_{11}\ \propto_{20})^{-1}\delta_{-1}^{(1-s)} = \sum_{n=1}^{s_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_n}^{(n)} q^{(k_1)}(1)\cdots\cdots\ q^{(k_{n-1})}(1) q_{k_n}(1) +$$

$$+\sum_{n=2}^{s_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq s+1-2n} \alpha_{s,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1) q^{(i-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(1)$$

$$+\left[1+(-1)^{(s+1)}(-1)^{s-2n}\right]+\alpha_{s,0}^{(1)}\left[\ q^{(s-2)}(1)+(-1)^{s+1}q^{(s-2)}(0)\right]-q_{s-1}(1)+$$

$$+\sum_{v=2}^{s-1}(-1)^{v+1}q_{s-v-1}(1)\sum_{n=1}^{v_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq v-2n} \alpha_{v,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(0)\ldots q^{(k_{n-1})}(0)\, q^{(s-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(0)$$

$$= \alpha_{s,0}^{(1)}\left[\,q^{(s-2)}(1)+(-1)^{(s+1)}q^{(s-2)}(0)\right]+\sum_{n=2}^{s_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n} \alpha_{s,k_1\ldots,k_n}^{(n)}\left[q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1)\right.$$

$$q_{k_n}(1)+\sum_{v=2}^{s-1}(-1)^{v+1}q_{s-v-1}(1)\sum_{n=1}^{v_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_v\leq v-2n}(-1)^{v-2n}\alpha_{v,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1)$$

$$q^{(v-2v-k_1-\cdots-k_{n-1})}(1) \qquad (101)$$

En vertu de la formule (90) $\alpha_{s,0}^{(1)}=0$ et quand $k_1+\cdots+k_n=s+1-2n$

On a

$$\alpha_{s,k_1\ldots k_n}^{(n)} = \sum_{v=s+2-2n-k_1-\cdots-k_{n-1}}^{s-2(n-1)-k_1-\cdots-k_{n-1}} C_{s-2(n-1)-k_1-\cdots-k_{n-v}-v}^{k_{n-1}}\alpha_{s,k_1,\ldots k_{n-2},v}^{(n-1)}$$

$$= C_0^{k_{n-1}}\alpha_{s,k_1,\ldots k_{n-2},s-2(n-1)-k_1-\cdots\cdots-k_{n-1}}^{(n-1)}$$

$$= \alpha_{s,k_1,\ldots k_{n-2},s-2(n-1)-k_1-\cdots\cdots-k_{n-1}}^{(n-1)}$$

Substituons ces valeurs dans le membre de droite de (101) on obtient :

$$2^{s-1}\,(\beta_{11}\ \propto_{20})^{-1}\delta_{-1}^{(1-s)} = \alpha_{s,0}^{(1)}\left[\ q^{(s-2)}(1)+(-1)^{s+1}q^{(s-2)}(0)\right]$$

$$+\sum_{n=2}^{s_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n} \alpha_{s,k_1,\ldots k_{n-2},s-2(n-1)-k_1-\cdots\cdots-k_{n-1}}^{(n-1)} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1) q_{k_n}(1) -$$

$$\sum_{v=2}^{s-1} q_{s-v-1}(1)\sum_{n=1}^{v_0}\ \sum_{k_1+\cdots+k_n\leq v-2n} \alpha_{v,k_1\ldots k_{n-1},0}^{(n)} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1)\, q^{(v-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(1)$$

(102)

On montre que

$$\sum_{n=2}^{s_0} \sum_{k_1+\cdots+k_n=s+1-2n} \alpha^{(s-1)}_{s-k_1,\ldots k_{n-2},s-2(n-1)-k_1-\cdots\cdots-k_{n-1}} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1) q_{k_n}(1) =$$

$$\sum_{v=2}^{s-1} q_{s-v-1}(1) \sum_{n=1}^{v_0} \sum_{k_{1+\cdots+}k_n}^{v-2n} \alpha_{v,k_1\ldots k_{n-1},0} q^{(k_1)}(1)\ldots q^{(k_{n-1})}(1)\ q^{(v-2n-k_1-\cdots k_{n-1})}(1)$$

(103)

il est facile de voir que les ordres des dérivées et les indices q(1) dans les membres de gauche et de droite de l'égalité (103) prennent les mêmes valeurs. Par conséquent, il suffit de voir légalité des coefficients correspondants.

soient $n = \mu$ et $k_1 = p_1, \ldots.. \ k_\mu = p_\mu$ des nombre fixés tels que $2 \le \mu \le s_0$ $p_1 + \cdots + p_\mu = s + 1 - 2\boldsymbol{\mu}$

Dans le membre de gauche de (103) le coefficient du produit

$$q^{(p_1)}(1)\ \ldots\ldots\ q^{(p_{\mu-1})}(1) q_{p_\mu}(1)$$

Sera le nombre $\alpha^{(\mu-1)}_{s,p_1,\ldots,p_{\mu-2},s-2(\mu-11)-p_1-\cdots-p_{\mu-1}}$ (104)

Et dans le membre de droite pour :

. $v = s - p_\mu - 1$, $n = \mu - 1$, $k_1 = p_1, \ldots, k_{\mu-2} = p_{\mu-2}$

. $v - 2(\mu - 1) - k_1 - \cdots - k_{\mu-2} = p_{\mu-1}$

$$\Rightarrow p_{\mu-1} = i - p_\mu - 1 - 2(\mu - 1) - p_1 - \cdots - p_{\mu-2}$$

En additionant, le coefficient de ce produit sera le nombre

$$\alpha^{(\mu-1)}_{s-p_\mu-1,p_1,\ldots,p_{\mu-2},0} = \alpha^{(\mu-1)}_{2(\mu-1)+p_1+\cdots+p_{\mu-1},p_1,\ldots p_{\mu-2},0}$$

La dernière égalité est valable avec la condition $p_1 + \cdots\cdots + P_{\mu-1} = s + 1 - 2\boldsymbol{\mu}$

et le membre de droite de (103) est égale au nombre (104)

En vertu de la remarque 1.

Alors par (102) on a :

$$2^{s-1}\ (\beta_{11}\,\alpha_{20})^{-1}\delta^{(1-s)}_{-1} = q^{(s-2)}(1) + (-1)^{s+1} q^{(s-2)}(0) \qquad (105)$$

D'après (105) il vient la validité du lemme

Pour $\delta_{-1}^{(1-s)}=0$

si (97) est satisfaite le lemme (1) est montré. A partir du lemme (1), la définition et les formules (81) (82) la validité du Théorème suivant s'ensuit :

Théorème 10:
soit $q(x) \epsilon\, c^m\,[0,1]$ les formes aux limites u_i (i=1.2) ont la forme (54) et $|\alpha_{11}|+|\beta_{11}| > 0$, $|\alpha_{20}|+|\beta_{20}| > 0$ alors pour la presque régularité d'ordre m≥ 0 du problème spectrale (9). (10) il est nécessaire et suffisant que

$\alpha_{11}\beta_{20}+\beta_{11}\alpha_{20} \neq 0$ quand m=0

$\alpha_{11}\beta_{20}+\beta_{11}\alpha_{20} = 0$, $\alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$ quand m=1

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\alpha_{20} = 0 \\ \alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} = 0 \\ q^{(m-2)}(0) = (-1)^{m-2} q^{(m-2)}(1) \end{cases} \quad \text{quand} \quad m \geq 2$$

Application :

Dans la suite, nous appliquons le résultat obtenu pour étudier des problèmes de la forme suivante dans $[0,\mathrm{T}]\times[0,1]$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x) \\ \mathrm{L}_1(u) = \alpha_{11}u(0,t)+\beta_{11}u'(0,t)+\alpha_{10}u(1,t)+\beta_{10}u'(1,t) \\ \mathrm{L}_2(u) = \alpha_{21}u(0,t)+\beta_{21}u'(0,t)+\alpha_{20}u(1,t)+\beta_{20}u'(1,t) \\ u(0,t) = u_0(x) \end{cases} \qquad (104)$$

Théorème 11 : supposons que les conditions suivantes soient vérifiées

1- $a \neq 0 \quad |arg a| < \frac{\pi}{2}$

2- $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = 0 \quad \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = 0$

Et $(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$ et $(\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20}) +$ $(\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{20}\beta_{11}) = 0$ et $\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$ *et* $\alpha_{10}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{20} \neq 0$

Où $\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} = \alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{11}\beta_{20} = \alpha_{10}\beta_{21} - \alpha_{20}\beta_{11} = 0$

Et $(\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10}) - (\alpha_{11}\beta_{20} + \alpha_{20}\beta_{11}) = 0$ et $\alpha_{10}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{10} \neq 0$

3- $f \epsilon C_\mu^\gamma\big((0,\mathrm{T}],\mathrm{L}^q[0,1]\big)$ pour un certain $\gamma \epsilon (1-\frac{1}{2q},1]$ et un certain $\mu \epsilon [0,\frac{1}{2q})$

4- $u_0 \epsilon \mathrm{w}^{2,q}[0,1], \mathrm{L}_i(u) = 0\ , i = 1,2$

Alors (104) a une solution unique

$$u \epsilon C\big((0,\mathrm{T}],\mathrm{L}^P[0,1]\big) \cap C^1\big((0,\mathrm{T}],\mathrm{w}^{2,p}[0,1],\mathrm{L}^P[0,1]\big)$$

Et pour cette solution, on a les estimations suivantes

$$\|u(t,.)\|_{\mathrm{L}^P[0,1]} \leq C(\|u_0\|_{\mathrm{w}^{2,p}[0,1]} + \|f\|_{C_\mu^\gamma((0,\mathrm{T}],\mathrm{L}^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,\mathrm{T}] \qquad (105)$$

$$\|u''(t,.)\|_{\mathrm{L}^P[0,1]} + \|u'(t,.)\|_{\mathrm{L}^P[0,1]} \leq C(t^{\frac{1}{2p}-1}\|u_0\|_{\mathrm{w}^{2,p}[0,1]} + t^{\frac{1}{2p}-\mu-1}\|f\|_{C_\mu^\gamma((0,\mathrm{T}],\mathrm{L}^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,\mathrm{T}] \qquad (106)$$

Démonstration :

Considérons dans $\mathrm{L}^P[0,1]$, $1 \leq P < +\infty$ l'opérateur A défini par

$$D(A)=\{u\epsilon \mathrm{w}^{2,p}[0,1], u_i(u) = 0\ , i = 1,2\}$$

$$A(u)=au''(x)$$

Alors le problème (104)

$$\begin{cases} u'(t) = Au'(t) - f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Où $u(t) = u(t,.)$, $f(t) = f(t,.)$ et $u_0 = u_0(\cdot)$ sont des fonctions à valeurs dans l'espace de Banach $L^P(0,1)$. Du théorème (4)il résulte que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq c|\lambda|^{-\frac{1}{2p}} \quad , \quad \text{pour} \quad |arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} \quad , \qquad |\lambda| \longrightarrow +\infty$$

C'est-à -dire que la condition 1 du théorème (11) est vérifiée pour $\beta = \frac{1}{2p}$ ainsi que les conditions 3 et 4 du théorème (11) sont vérifiées, alors d'après le théorème (4) le problème (104) admet une solution unique

$$u\epsilon C\big((0,T], L^P[0,1]\big) \cap C^1\big((0,T], w^{2,p}[0,1], L^P[0,1]\big)$$

Et on a les estimations

$$\|u(t,.)\|_{L^P[0,1]} \leq C(\|Au_0\|_{L^p[0,1]} + \|u_0\|_{L^p[0,1]} + \|f\|_{C_\mu^\gamma\left((0,T],L^P[0,1]\right)}) \qquad t\epsilon(0,T]$$

$$\|Au(t,.)\|_{L^P[0,1]} + \|u(t,.)\|_{L^P[0,1]} \leq C(t^{\frac{1}{2p}-1}\|Au_0\|_{L^p[0,1]} + \|u_0\|_{L^p[0,1]} + t^{\frac{1}{2p}-\mu-1}\|f\|_{C_\mu^\gamma((0,T],L^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,T]$$

Où d'après (105) on a

$$\begin{aligned} \|u(t,.)\|_{L^P[0,1]} &\leq C(\|u_0''\|_{L^p[0,1]} + \|u_0\|_{L^p[0,1]} + \|f\|_{C_\mu^\gamma\left((0,T],L^P[0,1]\right)}) \\ &\leq C(\|u_0\|_{w^{2,p}[0,1]} + \|f\|_{C_\mu^\gamma((0,T],L^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,T] \end{aligned}$$

Et d'après (106) on a

$$\begin{aligned} \|Au(t,.)\|_{L^P[0,1]} + \|u'(t,.)\|_{L^P[0,1]} &\leq C(t^{\frac{1}{2p}-1}\|Au_0\|_{L^p[0,1]} + \|u_0\|_{L^p[0,1]} + t^{\frac{1}{2p}-\mu-1}\|f\|_{C_\mu^\gamma((0,T],L^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,T] \\ &\leq C(t^{\frac{1}{2p}-1}\|Au_0\|_{L^p[0,1]} + \|u_0\|_{L^p[0,1]} + t^{\frac{1}{2p}-\mu-1}\|f\|_{C_\mu^\gamma((0,T],L^P[0,1])}) \qquad t\epsilon(0,T] \end{aligned}$$

Ainsi le théorème (11) est démontré.

Bibliographie

Bibliographie :

[1] Benzinger H.E. : Green's function for ordinary differential operators, J.Differen. Equations, 7 (1970), 478-496.

[2] Birkhoff G.D, :Boundary vlue problems and expension problems of ordinary differetiale quations. Trans. Amer. Math. Soc.9 (1908), 373-395.

[3] Birkhoff G.D, : Note on the expansion problems of ordinary linear differential equation Rend. Circ, Mat, Palermo XXXVI, (1913).

[4] Birkhoff G.D, : On the assymptotic chracier of the solutions of certain linear differential equations, containning a parameter. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), 219-231

[5] Cahlon B, Kulkrani D.M., Shi P., Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint , Siam J.Numer. Anal., 32 (1995), pp.571-593.

[6] Cannon J.R., Lin Y. and Van Der Hook J. : A quasi linear parabolic equation with nonlocal boundary conditions, Rend.Mat. Appl. (7) 9 (1989), 239-264.

[7] Coddington E.A. and levinson , theory of ordinary differential equation Mcgrawhill, (1955).

[8] DaPrato G.,Sinestari E., Differential Operators with non dense domain, Annalidella Scula Normale Superiore di Pisa, 14 (1987), pp. 285-384.

[9] Denche, M., Kourta A : Boundary value problem for second-order differential oprators with non regular boundary, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36,3 (2006) 893-913

[10] Denche, M., Marhoune A.L. :Mixed problem with boundary conditions for higtorder mixed type partial differential equation, Journal of Applied Mathematics and stochastic Analysis, 16, 1 (2003), 69-79

[11] Denche, M., Marhoune A.L. :Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type.IJMMS, 26,7(2001), 417-426.

[12] Denche, M., Kourka A. : Boundary value problem for second order differential operators with mixed nonlocal boundary conditions, journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5,2 (2004), article 38,16pp.

[13] Denche M. : Defect-Coerciveness for non regular transmission problem. Advances in Mathematical Sciences and Applications, 9 (1999), 1, 229-241.

[14] Denche M., Defect-Coerciveness for non regular transmission problem, Advances in Mathematical Sciences and Applications, V.9, N°1 (1999),229-241.

[15] Dunford N., Schwartz J.T. : Linear Operators, Part III. Spectral operators, Interscience, New York, 1971.

[16] Eberhard W., Freiling G. : Ston regulare Eigenwert problem.Math.Zeit., 160,2 (1978), 139-161.

[17] Farjas J., Rosell J.I., Herreror.,pons R., Pi F, and Orriols G. : Equivalent low-order model for a nonlinear diffusion equation, phys.D., 95 (1996), 107-127.

[18.23] Galakhov E.I, SkubachevskiiA.L , : A nonlocal spectral problem, differential Equations, 33 (1997), 24-31.

[19] Gallardo J.M. :differential operators with mixed boundary conditions : Generation of analitic semi-groups, non linear analsis, 47 (2001), 1333-1334.

[20] Gallardo Molina J.M, Ecuaciones differentiales con condicions de contorno nosparadas. Generacian de semi grupos analiticos. Tesis Doctoral. Universidad Autonoma de Barcelona 1999.

[21] Gallardo J.M. :second-order differential operators with integral boundary conditions and Generation of analitic semi-groups Rocky Mountain journal of mathematics, 30 (2000),4, 1265-1291.

[22] Gallardo J.M. : Generation of analitic semi-groupe by second order differential operators with nonseparated boundary conditions. Rocky Mountain journal of mathematics, 30 (2000), 2, 869-899.

[23] Gallardo Molina J,M, Ecuaciones diferncial Ordinarias con condicions de con-torno no-separadas y generacion de semi-grupos. Tesis de Licenciatura, Universidad Autonoma de Barcelona. Barcelona,1995.

[24] Gasumov M.G., Magerramov A.M. : On fold-completeness of a system of eingenfunctions and associated functions of a class of differential operators, DAN Azerb.SSR.30 (1974),3, 9-12.

[25] Gasumov M.G., Magerramov A.M. : Investigation of class of differential operator pencils of even order, DAN SSR, 265 (1982), 2, 277-280.

[26] Ionkin N.I. Moiseev E.I.: A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition, Differ. Uravn, 15 (1979), 7, 1284-1295.

[27] Ionkin N.I. : stability of a problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Uravn, 15 (1979), 7, 1279-1283.

[28] Ionkin N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Uravn, 13 (1977), 294-304.

[29] Kamynin N.I.: A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition, theoret. Vychisl.Mat.Fiz., 4 (1964), 6, 1006-1024.

[30] Keldysh M.V. On cigen values and ligen functions of some classes of non-seef-adjoint equations.// DAN. SSSR, 1951, v. 77, N.1, p. 11-14.

[31] Khromov A.P.: Eigen function expansions of ordinary linear differential operators in a finite interval, Soviet Math. Dokl., 3 (1962), 1510-1514.

[32] Lang.P .Locker,J Spectral theory of two-point differential operators geterminells D^2.1. Spectral properties ,J.of the Math Anal and appl.., 141(1989), no2,538-558.

[33] Locker,J Spectral theory of second ordertwo-point differential operators 1 A. priori estimates for the eigenvalues and completeness, procced of the Royal soc. Of Edinbergh, 121A (1992), 279-301.

[34] Lunardi A,: Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Progress in non Linear Differential Equations and Applications, 16.BirkhauserVerlag, Basel (1995).

[35] Lunardi, Alessandra .Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. porogess in monlinear differential equations and their applications, 16.Birkhauser Varlag ; Basel, 1995.xviii-1-424 pp.

[36] Mamedov Yu A. On spectral problems for a system of ordinary differential equation not being normal.// DAN. SSSR, 1989, v.306, N.4, p.540-544.

[37] Mamedov Yu A. Ahmedov Kh.I. On regularity conditions and asymptotic of eejen values of a spectral problem.// Collection of papers of the first Republican conference on mechanics an mathematics declucated to the 50-th anniversary of academy Science of Azerbaijan (Baku, 5-15 june, 1995) Part 1, Mechanics, p 106-109.

[38] MamedovYu.A.: On function expansion to the series of solutions residue of irregular boundary value problems, in “ Investigations on differential equations”, AGU named after S.M. Kirov (1984), 94-98.

[39] Mamedov Yu. A, Ahmedov H.I.: Almost regularity conditions of spectral problems for a second order equation. (27 Dec 2002).

[40] Menniken,R , Moller.M. :Boundary eigenvalue problems. In « OperatorTeory and Systems. Proceedings Worcshop Amsterdam ». ed .: H. Bart .I .Gohberg .M.A.Kaashoek ; Birkhauser ;Stuttgard , 1986,279-331.

[41] Naimark M.A.: Linear differential operators, vols.1-2, Ungar Publishing, (1967).

[42] Rasulov M.L.: Application of the contour integral, method, Nauka, Moscow, 1975.

[43] Rasulov M.L.: methods of contour integration, North-Holland, Amsterdam, 1967.

[44] Rasulov M.L. MamedovYu.A. On the residue method of solutions of mixed problem for a class of hyperbolic systems.// DAN. SSSR, 1998, v.300, N.6, p. 1321-1324.

[45] Rasulov M.L. Application of residue method. Baku? “Elm”, 1989, 328p.

[46] Rosell J.I., Farjas J., Herrero R., Pi F and Orriols G.: Homoclinic phenomena in opto-thermal bistability with localized absorption, Phys. D,85 (1995), 509-547.

[47] Samarskii A.A.: some problems in differential equations theory, Differ. Uravn. 16, (1980), 11, 1925-1935.

[48] Shi P,Shillor M, : Design of contact patterns in one Dimentional Therme olasticity, in Theortical Aspect Of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematicas, Philadelphia, PA, (1992).

[49] Shkalikov A.A. : Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions.// Proceedigs of I.G.Petroysky’s seminar,M., 1983, issue 9, p.190-229.

[50] Shkalikov A.A. : On completenes of eigen functions and associated function of an ordinary differential operator with separated irregular boundary conditions, Func.Anal.ievoPrilozh, 10(1976), 4, 69-80.

[51] Silchenko J.T. : Differential eqaution with non-densely defined operator coefficients, generating semigroups with singularities. Nonlinear Anal., 36 (1999), 3 Ser.A: Theory Methods, 345-352.

[52] Silchenko Yu T.: An ordinary differential operator with irregular boundary conditions. (Russian) Sibirsk. Mat.Zh. 40 (1999), 1, 183-190, iv; translation in Siberian Math. J. 40 (1999), 1, 158-164.

[53] Skubachevskii A.L. Steblov G.M, : on spectrum of differential operator with domain non-dense in L_2 (0,1), DAN SSSR 321 (1999), 158-164.

[54] Stone,M.H. : Irregular differential system of ordertwo and related expansion problems, Trans.Amer.Math.Soc,29 (1927), 23-53.

[55] Tamarkin J.D. : About Certain General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and about Expansions of Derivative Functions into series, Petrograd, 1917.

[56] Tretter C. : on λ- Nonlinear Boundary Eigenvalue Problems, Akademic Verlag, Berlin, 1993.

[57] Vagabov A.I. : on eigenvectors of irregular differential pencils with non-separated boundary conditions, DANSSSR, 261(1981), 2, 268-271.

[58] Yakubov S. : Completeness of Root Functions of regular differential Operators. Longman Scientific Technical, New York, (1994).

[59] Yakubov Y.: irregular Boundary value problems for ordinary differential equations Analysis (Munich) 18 (1998),4, 359-402

[60] Yakubov,Sasun,Yakubov, Yakov, Abel basis of root functions of regular boundary value problems. Math.Nachr. 197 (1999), 157-187.

[61] Yakubov S. Yakubov Y.: Differential-Operator Equations. Ordinary and partial differential equations. Chapman &Hll/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 103, Chapman &Hll/CRC, Boca Raton, FL, (2000).

[62] Yakubov S. On a new method for solving irregular problems, J.Math, Anal.Appl. 220 (1998), 1, 224-249.

[63] Yakubov S. :Linnear Differential-Operator Equations and Their applications Elm, Baku, (1985).

Résumé

Dans ce travail on a étudié le problème spectral non local du second ordre suivant

$$\begin{cases} \mathrm{L}\left(\frac{d}{dx},\lambda\right) y \equiv y'' + q(x)y = \lambda^2 y & 0 < x < 1 \\ u_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{1} \alpha_{ij}\, y^{(j)}(0) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(1) = 0 & 1 < i < 2 \end{cases}$$

On s'est intéressé en premier lieu à l'étude de la régularité et la presque régularité des conditions aux limites, et on a déterminé dans le cas $q(x) = 0$ les conditions pour lesquelles ces conditions aux limites soient régulières dans les espaces $L^\infty[0,1]$ *et* $L^p[0,1]$, $1 \leq P < \infty$.

En outre, on a étudié la presque régularité de ce problème dans le cas $q(x) \neq 0$.

Abstract

In this work we studied the nonlocal spectral problem of second order following :

$$\begin{cases} \mathrm{L}\left(\frac{d}{dx},\lambda\right) y \equiv y'' + q(x)y = \lambda^2 y & 0 < x < 1 \\ u_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{1} \alpha_{ij}\, y^{(j)}(0) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(1) = 0 & 1 < i < 2 \end{cases}$$

First we are interested in studying the regularity and almost regularity of boundary conditions, and we determined in the case q (x) = 0, the conditions for which these boundary conditions are regular in the spaces $L^\infty[0,1]$ and $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

In addition, we studied the almost regularity of this problem in the case q (x) ≠ 0.

الملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة المشكلة الطيفية الغير محلية من الدرجة الثانية التالية

$$\begin{cases} \mathrm{L}\left(\frac{d}{dx},\lambda\right) y \equiv y'' + q(x)y = \lambda^2 y & 0 < x < 1 \\ u_i(y) \equiv \sum_{j=0}^{1} \alpha_{ij}\, y^{(j)}(0) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(1) = 0 & 1 < i < 2 \end{cases}$$

أولا اهتممنا بدراسة الانتظام والانتظام التقريبي من الشروط الحدية، وحددنا في حالة $q(x) = 0$ الشروط التي من أجلها الشروط الحدية تكون منتظمة في الفضاءات $L^\infty[0,1]$ و $L^p[0,1]$, $1 \leq P < \infty$

وبالإضافة إلى ذلك ، درسنا انتظام تقريبا من هذه المشكلة في حالة $q(x) \neq 0$.