

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



N° d'ordre : . . . .

N° série : . . . . .

# ***MEMOIRE***

Présenté pour l'obtention du diplôme de  
Magister en Mathématiques

***Thème***

***Quelques méthodes de régularisation de  
problèmes mal-posés***

**Option**

**Analyse Mathématique Appliquée**

**Par :**

**Zaioua Redha**

**Devant le jury :**

**Président: Marhoune A. L.**

**Rapporteur: Denche M.**

**Examineurs: Abdelli M  
Saidouni C.**

**Prof. Univ. Mentouri Constantine**

**Prof. Univ. Mentouri Constantine**

**M. C. Univ. Mentouri Constantine**

**M. C. Univ. Mentouri Constantine**

*Soutenu le 04/07/2011*

## REMERCIEMENTS

*En* préambule à ce mémoire, je souhaite adresser ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

*Tout* d'abord Monsieur **Denche M** Professeur à l'Université de Constantine, Encadreur de ce mémoire, pour l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans il ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

*Mes* remerciements s'adressent vivement à Monsieur le Président **Marhoune A. L** et Monsieur **Abdelli M et Saidouni C** qui ont accepté de juger mon travail.

*Merci* à toute ma famille, qui m'a soutenu en toutes circonstances. J'espère qu'ils trouvent ici l'expression de mon éternelle reconnaissance.

*Un* remerciement très spécial à Mr **kriket salah** que je n'oublierai jamais, ce que vous avez fait pour moi, et j'espère de tout mon cœur que dieu vous le rendrez. Aussi j'aimerais bien qu'un jour je ferai la même chose pour d'autre. En effet je vous dis un grand merci.

*Enfin*, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma mère, mon père et tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Problèmes bien et mal posés . . . . .	3
1.2 Les semi groupes fortement continus . . . . .	13
1.3 Les semi-groupes fortement continus différentiables . . . . .	15
1.4 Les semi-groupes fortement continus analytiques . . . . .	16
<b>2 Régularisation d'un problème de Cauchy mal-posé dans un espace de Banach</b>	<b>18</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Génération de semi groupe . . . . .	23
2.3 Régularisation pour le problème de Cauchy 2.1 . . . . .	33
<b>3 Solution du problème de Cauchy inverse par la méthode de quasi-réversibilité</b>	<b>38</b>
3.1 Position du problème . . . . .	38
3.2 La construction de la solution approximante . . . . .	39
3.3 Convergence de la solution approximante vers la solution exacte . . . . .	41
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

Introduction :

Le présent mémoire est consacré à l'étude d'une certaine classe de problèmes de Cauchy mal posés dans un espace de Banach. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par rappeler les principales notions utiles tout le long de ce travail à savoir sur les différentes classes de semigroupes et sur les problèmes mal posés en présentant des exemples concrets de tels problèmes.

Le second chapitre est consacré à l'étude d'un problème de Cauchy abstrait mal posé dans un espace de Banach. Sous certaines conditions sur le coefficient operatoriel on approxime le problème par une famille de problèmes bien posés. On montre que les solutions approximantes convergent vers la solution de notre problème. La méthode utilisée est celle de quasireversibilité. On note que ce problème a été traité dans [42].

Enfin au dernier chapitre on traite un problème inverse pour une équation différentielle opérationnelle du premier ordre dans un espace de Banach. En se basant sur la méthode de quasireversibilité on approxime le problème en question par une famille de problèmes bien posés. On établit de meme des rsultats de convergence de la méthode proposée. On note aussi que ce problème a été traité dans [29].

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Problèmes bien et mal posés

La formulation mathématique des problèmes qui se posent dans plusieurs domaines des sciences appliquées se ramène à une équation de la forme :

$$Ax = y \dots (I)$$

ou  $A$  est un opérateur défini sur un espace métrique  $E$  à valeurs dans un autre espace métrique  $F$ .

En 1902 le mathématicien français Jacques Hadamard a défini les conditions à vérifier par le problème  $(I)$  pour qu'il soit bien posé.

**Définition 1** *Un problème de type  $(I)$  est dit bien posé s'il vérifie les conditions suivantes :*

1) *Pour tout élément  $v \in F$  il existe une solution  $u \in E$  tel que :*

$$Au = v.$$

2) La solution est définie d'une façon unique.

$$\forall u_1, u_2 \in E : Au_1 = Au_2 \implies u_1 = u_2$$

3) Le problème est stable sur les espace  $E$  et  $F$  ; c'est dire qu'une petite perturbation du second membre  $y$  donne une petite perturbation de la solution  $x$ . ie( La solution dépend continûment des données ), C'est à dire :

$$\|u_1 - u_2\|_E \longrightarrow 0 \text{ quand } \|v_1 - v_2\|_F \longrightarrow 0$$

Alors si l'une de conditions 1), 2) n'est pas vérifiée, le problème de type (I) est dit mal posé.

**Exemple 1** Nous cherchons une fonction  $U(x, t)$  qui vérifie l'équation de la chaleur, les conditions aux limites homogènes et la condition finale. Plus exactement considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 & \dots \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ U = 0 \text{ sur } \partial \Omega \times [0, T] \text{ et } U(x, T) = U_T(x) \end{cases} \dots (P)$$

Où  $\Omega$  est l'intervalle  $[0, 1]$ .

En utilisant la méthode de séparation des variables on peut facilement vérifier que les fonctions :

$$U_K(x, t) = \exp(-\pi^2 K^2 t) \sin(\pi K x)$$

Sont solutions du problème (P), en effet :

$$U(x, t) = X(x) T(t).$$

$$\iff U_t(x, t) = X(x) T'(t) \text{ et } U_x(x, t) = X'(x) T(t).$$

$$\iff U_t(x, t) = X(x) T'(t) \text{ et } U_{x^2}(x, t) = X''(x) T(t).$$

Donc :

$$(P) \iff \begin{cases} X(x)T'(t) = X'(x)T(t). \\ X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0 \end{cases}$$

En utilisant les conditions aux frontières on a :

Si  $T(t) = 0$  alors  $U(x, t) = 0 \forall t \in [0, T]$ , contradiction car :

$$U(x, T) = U_T(x) \neq 0 \implies X(0) = 0$$

De la même manière on trouve que :

$$X(1) = 0$$

C'est à dire :

$$(P) \iff \begin{cases} X(x)T'(t) = X'(x)T(t) \dots \text{ dans } \Omega \times [0, T] \\ X(0) = X(1) = 0 \dots \text{ sur } \partial \Omega \times [0, T] \end{cases}$$

Donc :

$$X(x)T'(t) = X'(x)T(t) \iff \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda (\lambda \text{ constante})$$

I) Pour :

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \iff \begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Si :  $\lambda = 0$

$$\implies X'(x) = 0 \implies X(x) = ax + b$$

Et comme  $X(0) = X(1) = 0$

$$\implies b = 0 \text{ et } a = 0 \implies X(x) = 0$$

Rejetté, car

$$U(x, T) = U_T(x) \neq 0$$

Si :  $\lambda \neq 0$

Pour :  $\lambda > 0$  on suppose que  $\lambda = \gamma^2$ , donc :

$$X''(x) - \gamma^2 X(x) = 0 \implies r^2 = -\gamma^2 = i^2 \gamma^2 = (i\gamma)^2$$

D'où :

$$r = \mp i\gamma \text{ et } X(x) = A \exp(i\gamma x) + B \exp(-i\gamma x).$$

En posant :  $\gamma = \alpha + i\beta$  on trouve que :

$$X(x) = A \exp\{i(\alpha + i\beta)x\} + B \exp\{-i(\alpha + i\beta)x\}$$

$$\iff X(x) = A \exp\{i\alpha x\} \exp\{-\beta x\} + B \exp\{\beta x\} \exp\{-i\alpha x\}$$

Par les conditions aux limites on a :

$$X(0) = 0 \implies A + B = 0 \implies A = -B \dots (1)$$

$$\begin{aligned} X(1) = 0 &\implies A \exp\{i\alpha\} \exp\{-\beta\} - A \exp\{\beta\} \exp\{-i\alpha\} = 0 \\ &\implies A (\exp\{i\gamma\} - \exp\{-i\gamma\}) = 0 \end{aligned}$$

$A = -B$  donc :

$$A (\exp\{i\gamma\} - \exp\{-i\gamma\}) = A \exp\{i\gamma\} + B \exp\{-i\gamma\} = 0 \dots (2)$$

(2)  $\iff A = 0$  ou  $\exp\{i\gamma\} - \exp\{-i\gamma\} = 0$ . Donc  $A = 0$  rejeté.

$\exp\{i\gamma\} - \exp\{-i\gamma\} = 0 \iff \gamma = -\gamma$  contradiction.



Pour chercher les solutions non triviales on pose que :

$$\det(1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp\{i\gamma\} & \exp\{-i\gamma\} \end{vmatrix} = 0.$$

Et on pose que :  $\gamma = \alpha + i\beta$  donc :

$$\exp\{i\alpha\} \exp\{-\beta\} + \exp\{\beta\} \exp\{-i\alpha\} = 0$$

$$\iff (\exp\{-\beta\} - \exp\{\beta\}) \cos \alpha = 0 \text{ et } (\exp\{-\beta\} + \exp\{\beta\}) \sin \alpha = 0$$

Pour :

$$(\exp\{-\beta\} + \exp\{\beta\}) \sin \alpha = 0 \implies \alpha = K\pi, K \in \mathbb{Z}^*$$

D'où :

$$(\exp\{-\beta\} - \exp\{\beta\}) \cos K\pi \implies \beta = 0$$

$$\iff \gamma = \alpha$$

Comme :

$$(\alpha = K\pi \text{ et } \lambda = -\gamma^2) \implies \lambda = -K^2\pi^2$$

$$\iff X(x) = B \sin(K\pi x)$$

2) Pour :  $\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$ , On a :

$$\lambda = -K^2\pi^2 \implies T(t) = C \exp\{-K^2\pi^2 t\}$$

Finalement :

$$U_K(x, t) = X(x) T(t) = CK\pi x \exp\{-K^2\pi^2 t\}$$

Les fonctions  $U_K(x, t)$  vérifient l'équation, les conditions aux limites et les donnés

initiales :  $U_K(x, 0) = \sin(K\pi x)$ , et on a :

$$\|U_K(x, t)\|_{C^0} = \sup_{\Omega \times [0, T]} [\sin(K\pi x) \exp\{-K^2\pi^2 t\}] = 1.$$

Et :

$$\|U_K(x, t)\|_{L^2} = \left( \int_0^1 |\sin(K\pi x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \text{ et } \int_0^\pi \sin^2 \alpha dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\alpha dx = \frac{\pi}{2} \\ &\implies \|U_K(x, t)\|_{L^2} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Par les données finales on a :

$$\begin{aligned} \|U_K(x, t)\|_{C^0} &= \sup_{\Omega \times [0, T]} [\sin(K\pi x) \exp\{-K^2\pi^2 t\}] = 1 \exp\{-K^2\pi^2 T\} \\ \|U_K(x, t)\|_{H^{(m)}} &= \left( \sum_{K=0}^m \|\partial U^K(x, T)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \exp\{-K^2\pi^2 T\} \left( \left( \int_0^1 |\sin(K\pi x)^{(0)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \dots + \left( \int_0^1 |(\sin(K\pi x))^{(m)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \exp\{-K^2\pi^2 T\} \left[ \frac{1 + (K\pi)^2 + \dots + (K\pi)^{2m}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si on définit  $AU_0 = U_T$ , alors l'estimation :  $\|U_0\| \leq C \|U_T\|$  est impossible quand  $X, Y$  sont des espaces fonctionnelles classiques. Les norme de  $U_{TK}$  tant vers à zéro quand les normes de  $U_{0K}$  sont plus grand que  $\frac{1}{2}$ , alors le problème (P) est instable, d'ou ce problème est mal posé.

**Exemple 2** La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de

*l'autre, il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct. Et la différentiation est un problème mal posé, comme nous allons le voir. Considérons l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , et l'opérateur intégral  $A$  défini par :*

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

*Il est facile de voir directement que  $A \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ .*

*Cet opérateur est injectif par contre son image est le sous espace vectoriel :*

$$\text{Im}A = \{f \in H^1([0, 1]), u(0) = 0\}$$

*Où  $H^1([0, 1])$  est l'espace de Sobolev.*

*En effet :*

*Où l'équation*

$$Af = g$$

$$\iff f(x) = g(x) \text{ et } g(0) = 0$$

*L'image de  $A$  n'est pas continue sur  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ , (elle l'est dans  $H^1([0, 1])$ ).*

*En conséquence l'inverse de  $A$  n'est pas continu sur  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  comme le montre l'exemple suivant :*

*Considérons une fonction  $f \in C^1([0, 1])$ , et  $n \in \mathbb{N}$  soit*

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x).$$

*Alors :*

$$f_n'(x) = f'(x) + n \cos(n^2 x)$$

Un simple calcul montre que :

$$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

$$\|f' - f_n'\|_2 = n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O(n).$$

Ainsi la différence entre  $f$  et  $f_n$  peut être arbitrairement grande.

Alors même la différence entre  $f$  et  $f'$  arbitrairement petite, l'opérateur de dérivation (l'inverse de  $A$ ) n'est pas continu.

D'où la différentiation est un problème mal posé.

**Exemple 3** Notons par  $D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ,  $\Omega = D \times [0, T]$  et  $\Gamma_d = \Gamma_F + \Gamma_B$ , ou  $\Gamma_B = \partial D \times [0, T]$ ,  $\Gamma_F = D \times \{T\}$ .

Aussi on note par  $x' = (x_1, x_2)$  et  $x = (x_1, x_2, t)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, & x \in \Omega \\ U(x) = 0, & x \in \Gamma_B \\ U(x) = \exp(-2n^2 T) \sin(nx_1) \sin(nx_2), & x \in \Gamma_F \end{cases}$$

Est donnée par :

$$U^{(n)}(x) = \exp(-2n^2 T) \sin(nx_1) \sin(nx_2).$$

On choisit dans  $L_2$  les deux normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|U\|_{L_2(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} U^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|U\|_{L_2(\Gamma_F)} = 0 \\ &= \left( \int_D U^2(x', T) dx' \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\|U^{(n)}(x)\| &= \int_{\Omega} (\exp(-2n^2T) \sin(nx_1) \sin(nx_2))^2 dx \\
&= \int_0^T \exp 4n^2(T-t) dx \int_D (\exp(-2n^2T) \sin(nx_1) \sin(nx_2))^2 dx' \\
&= \frac{1}{4n^2} (\exp 4n^2T - 1) \left\| U_F^{(n)}(x) \right\|_{L_2(\Gamma_F)}^2
\end{aligned}$$

Puisque pour tout  $C > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\frac{1}{2n} \sqrt{(\exp 4n^2T - 1)} > C$$

Alors, on trouve que l'inégalité :

$$\|U^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 > \left\| U_F^{(n)} \right\|_{L_2(\Gamma_F)}^2$$

Est vérifiée pour chaque  $C > 0$ . Cela veut dire que la solution ne dépend pas continûment de la donnée finale.

D'où le problème est mal posé.

**Remarque 1** Dans le cas de dimension finie par exemple si  $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  est une matrice  $(n \times n)$  alors :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} Ax = y \\ \text{bien posé} \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \text{ existe} \\ \det A \neq 0 \end{array} \right. \\
Ax = 0 &\iff x = 0
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous noterons par  $X$  un espace de Banach sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est par  $B(X)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans  $X$ .

Nous désignerons par  $I$  l'unité de  $B(X)$ . Pour un opérateur  $A$  linéaire tel que :

$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  nous noterons par :

$$\ker A = \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}$$

Le noyau de  $A$ , où  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

$$\operatorname{Im} A = \{Ax \mid x \in D(A)\}$$

L'image de  $A$ . Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous définissons :

$$A^n : D(A^n) \longrightarrow X$$

Où :

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) \mid A^{n-1}x \in D(A)\}$$

Et :

$$A^0 = I, A^1 = A, \dots, A^n = A(A^{n-1})$$

**Définition 2** *L'ensemble :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe}\}$$

*S'appelle l'ensemble résolvant de  $A \in B(X)$ .*

*L'ensemble :*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

*S'appelle le spectre de  $A \in B(X)$ .*

**Définition 3** *L'application :*

$$R(\cdot; A) : \rho(A) \longrightarrow B(X).$$

$$R(\lambda.; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

S'appelle la résolvante de  $A$ .

**Proposition 1** La résolvante d'un opérateur linéaire  $A \in B(X)$ , a les propriétés suivantes :

i) si  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ , alors :

$$R(\lambda.; A) - R(\mu.; A) = (\lambda - \mu) R(\lambda.; A) R(\mu.; A)$$

ii)  $R(.; A)$  est une application analytique sur  $\rho(A)$ .

## 1.2 Les semi groupes fortement continus

**Définition 4** Dans un espace de Banach  $X$ , une famille d'opérateurs linéaires bornés  $T(t)$  tel que :  $T(t) : X \longrightarrow X$  et dépend du paramètre  $t \geq 0$ , forme un semi-groupe fortement continu a l'origine si :

- 1)  $T(0) = I_X$ , où  $I_X$  est l'opérateur identique de  $X$  dans  $X$ .
- 2)  $T(t_1 + t_2) = T(t_1) T(t_2) \forall t_1, t_2 \in [0, +\infty[$ .
- 3)  $\|T(t)x - x\|_X \longrightarrow 0$  quand :  $t \longrightarrow 0^+, \forall x \in X$ .

**Définition 5** Soit  $T(t)$  un semi-groupe, on dit que  $T(t)$  est un semi-groupe fortement continu si :

$$\|T(t+s)x - T(s)x\|_X \longrightarrow 0 \text{ quand } : t \longrightarrow 0, \forall x \in X \text{ et } s \in [0, +\infty[.$$

**Lemme 1** Soit  $T(t)$  un semi-groupe fortement continu alors il existe un constante  $M \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\|T(t)\| \leq M \exp \{\omega t\}, \forall t \in [0, +\infty[.$$

**Lemme 2** Si  $T(t)$  un semi-groupe fortement continu a l'origine et admet un majoration :  $\|T(t)\| \leq M \exp\{\omega t\}$ ,  $\forall t \in [0, +\infty[$ , alors  $T(t)$  est fortement continu.

**Définition 6** Le nombre

$$\omega_0 = \{\omega \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } : \|T(t)\| \leq M \exp\{\omega t\}, \forall t \in [0, +\infty[.\}$$

Est appelé type de semi-groupe.

Le cas de  $\omega = 0$  ( $\|T(t)\| \leq M$ ).  $T(t)$  est un semi-groupe borné.

Le cas de  $\omega = 0$  et  $M = 1$  ( $\|T(t)\| \leq 1$ )  $T(t)$  est un semi-groupe de contraction.

**Définition 7** On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , l'opérateur linéaire :

$$A : X \longrightarrow X, \text{ où } D(A) = \left\{ x \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

**Théorème 1** (Hille-Yosida). Un opérateur linéaire :  $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , si et seulement si :

- 1)  $A$  est un opérateur linéaire fermé et  $\overline{D(A)} = X$ .
- 2)  $\{\operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$  Il existe deux constante  $M \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$



### 1.3 Les semi-groupes fortement continus différentiables

**Définition 8** On dit que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu différentiable si l'application :

$$[0, +\infty[ \ni t \longrightarrow T(t)x.$$

Tel que :  $T(t)x \in X$  où  $B(X)$ , est différentiable quelque soit  $x \in X$ .

**Définition 9** On dit que l'application :  $t \longrightarrow T(t)x$  est différentiable si :

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{T(t)x - T(s)x}{t - s} \text{ existe où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(s)x}{h} \text{ existe.}$$

**Théorème 2** Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu et  $A$  son générateur infinitésimal, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- i)  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu différentiable.
- ii)  $\text{Im}\{T(t)\} \subset D(A), \forall t \in [0, +\infty[.$

**Proposition 2** Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu différentiable, alors l'application :  $[0, +\infty[ \ni t \longrightarrow T(t)x$  tel que :  $T(t)x \in (X \text{ où } B(X))$ , est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

**Théorème 3** Soient  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu différentiable, et  $A$  son générateur infinitésimal alors :

- i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in X$ , on a  $T(t)x \in D(A^n)$  et :

$$A^n T(t)x = \left[ AT \left( \frac{t}{n} \right) \right]^n x, \forall t \in [0, +\infty[.$$

ii) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'application :  $[0, +\infty[ \ni t \longrightarrow T(t)^{(n)} \in B(X)$  est  $n$  fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme.

En plus :

$$T(t)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} T(t) = A^n T(t) \in B(X)$$

Et cette application est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

## 1.4 Les semi-groupes fortement continus analytiques

Par la suite nous remplaçons l'intervalle  $[0, +\infty[$  par une région du plan complexe, sans abandonné les propriétés de semi-groupe fortement continus.

Nous désignerons par  $\Delta$  l'ensemble :  $\{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Re } z > 0 \text{ et } \Phi_1 < \arg z < \Phi_2, \Phi_1 < 0 < \Phi_2\}$ .

**Définition 10** On appelle *semi-groupe fortement continu analytique* une famille  $\{T(z)\}_{z \in \Delta}$  tel que  $\{T(z)\}_{z \in \Delta} \subset B(X)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $T(0) = I$ .
- 2)  $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2) \forall z_1, z_2 \in \Delta$ .
- 3)  $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x - x = 0, \forall x \in X, z \in \Delta$ .
- 4) L'application :  $\Delta \ni z \rightarrow T(z) \in B(X)$ , est analytique dans le secteur  $\Delta$ .

**Définition 11** On dit que l'application :  $\Delta \ni z \rightarrow T(z) \in B(X)$ , est analytique dans le secteur  $\Delta$ , si : l'application :  $\Delta \ni z \rightarrow T(z) \in B(X)$ , est continûment différentiable au voisinage de  $z$ , quelque soit  $z \in \Delta$ .

C'est à dire :  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{T(z_1) - T(z_2)}{z - z_0}$  existe.

**Théorème 4** Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu, et  $A$  son générateur infinitésimal tel que  $0 \in \rho(A)$ , les propositions suivantes sont équivalentes.

1)  $\exists \delta > 0$ , tel que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  peut être étendu en un semi-groupe fortement continu analytique dans le secteur :  $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus (\text{Re } z > 0), |\arg z| < \delta\}$ .

Et  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  est uniformément borné dans  $\overline{\Delta}_{\delta'} \subset \Delta_\delta, (\delta' < \delta)$ .

2) il existe un constante  $M$ , tel que : pour  $\forall \sigma > 0$  et  $\mu \neq 0, \lambda = \sigma + i\mu$ .

On a :  $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\mu|}$ .

3)  $\exists \delta, (0 < \delta < \frac{\pi}{2})$  et  $M > 0$  tel que :

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\arg z| < \delta + \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{0\}$$

et :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma_\delta, \lambda \neq 0.$$

4)  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu différentiable  $\forall t > 0$  et  $\exists c > 0$  tel que :

$$\|AT(t)\| \leq \frac{c}{t}.$$

**Définition 12** Soit  $\alpha$ ,  $(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  et un semi-groupe fortement continu  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  qui admet un prolongement analytique dans  $\sum_\alpha$  et satisfait :

$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x - x = 0$ ,  $\forall x \in X$  et  $t \in \sum_\beta$  tel que :  $\beta \in (0, \alpha)$ , alors  $\{T(t)\}_{t \in \sum_\beta}$  est dit semi-groupe fortement continu analytique d'angle  $\alpha$ . Son générateur infinitésimal est le générateur de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . De plus le semi-groupe analytique d'angle  $\alpha$  est dit borné si :

Pour chaque  $\beta \in (0, \alpha)$ , il existe  $M_\beta > 0$  tel que :  $\|T(t)\| \leq M_\beta \forall t \in \sum_\beta$ .

**Définition 13** Si  $A$  le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle  $\alpha$ , alors pour chaque  $\beta \in (0, \alpha)$  il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que :  $(A - \omega)$  est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle  $\beta$ .

**Lemme 3** Soit  $(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

a)  $B$  le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle  $\alpha$ .

b)  $\sum_{\alpha + \frac{\pi}{2}} \subset \rho(B)$ , et pour chaque  $\beta \in (0, \alpha)$ , il existe  $M_\beta > 0$ , tel que :

$$\|R(\lambda, B)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|} \text{ pour } \lambda \in \sum_{\beta + \frac{\pi}{2}}.$$

c) Pour tout  $\beta \in (0, \alpha)$ , il existe  $M_\beta > 0$  tel que :  $\exp\{i\theta\}B$  est le générateur d'un semi-groupe fortement continu  $\{S_\theta(t)\}_{t \geq 0}$  satisfaisant :  $\|S_\theta(t)\| \leq M_\beta$ , pour  $t \geq 0$ , et  $\theta \in (0, \beta)$ .

**Théorème 5** Soit  $-A$  le générateur d'un semi-groupe analytique  $\{S(t)\}$  borné d'angle  $\alpha$ ,  $(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  et soit  $0 \in \rho(S(t))$ , alors :  $-A^b$  est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle  $\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha)b$  ou  $b \in (1, \frac{\pi}{\pi - 2\alpha})$ , et on a aussi  $(A - \varepsilon A^b)$  est le générateur d'un semi-groupe analytique  $\{V_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$  d'angle  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha)b)$  tel que :

$$\|V_\varepsilon(t)\| \leq M \exp\left\{C_\varepsilon^{\frac{1}{1-b}} t\right\} \forall t \geq 0.$$

# Chapitre 2

## Régularisation d'un problème de Cauchy mal-posé dans un espace de Banach

### 2.1 Introduction

Soit  $A$  un opérateur non borné dans un espace de Banach  $X$ , et soit  $-A$  le générateur d'un semi groupe analytique d'angle  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  dans ce chapitre nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t), 0 < t \leq T \\ U(0) = x \end{cases} \quad (2.1)$$

On note que ce problème a été traité dans [42].

**Définition 14** Une fonction continue  $U(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) est dite solution du problème 2.1 si pour  $0 \leq t \leq T$ ,  $U(t)$  est continûment différentiable et ses valeurs appartiennent au domaine de  $A$  et 2.1 est satisfaite.

**Lemme 4** Soit un semi-groupe fortement continue, si quelque soit  $t > 0$ ,  $T(t)^{-1}$  existe et il est borné, alors  $S(t) = T(t)^{-1}$  est un semi-groupe fortement continue où son générateur

infinitésimal est  $-A$ .

En plus si :

$$U(t) = \begin{cases} T(t) , & \text{pour } t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} , & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

Alors :  $U(t)$  est un groupe fortement continue.

**Preuve.** Nous montrons que  $S(t)$  est un semi-groupe fortement continue.

$$S(t+s) = [T(t+s)]^{-1} = [T(t)T(s)]^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1}$$

D'ou :

$$S(t+s) = S(s)S(t).$$

Maintenant, nous montrons la continuité forte de  $S(t)$ , pour  $s > 0$  alors  $\text{Im}T(s) \subset X$ . Soit  $x \in X$  et soit  $s > 1$ .

Alors :  $\exists y \in X$  tel que :  $T(s)y = x$ . Pour  $t < 1$  nous avons alors :

$$\begin{aligned} \|T(t)^{-1}x - x\| &= \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\| \\ &= \|T(s-t)y - T(s)y\| \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc  $S(t)$  est fortement continue.

Finalement, pour  $x \in D(A)$  nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} T(t) \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = -Ax.$$

Donc  $-A$  est le générateur infinitésimal de  $T(t)^{-1}$ . ■

**Théorème 6** Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continue. Si  $0 \in \rho(T(t_0))$  pour un certain  $t_0 > 0$ , alors  $0 \in \rho(T(t))$  pour tout  $t > 0$  et  $T(t)$  peut être étendu en un  $C_0$ groupe ( groupe fortement continue ).

**Preuve.** D'après le lemme (4) il suffit de montrer que  $0 \in \rho(T(t))$ ,  $\forall t > 0$ .

Comme  $0 \in \rho(T(t_0))$  alors :  $[T(t_0)]^n = T(nt_0)$  est bijective , quelque soit  $n \geq 1$ .

Soit :  $T(t)x = 0$  ; choisissons  $n$  tel que :  $nt_0 > t$  . Nous avons :

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc  $T(t)$  est bijective pour tout  $t > 0$ .

Maintenant nous montrons que :

$$ImT(t) = X, \forall t > 0.$$

Ceci est vraie pour  $t \leq t_0$  puisque d'après les propriétés de semi-groupe :

$$ImT(t) \supset ImT(t_0), \text{ pour } t \leq t_0.$$

Pour  $t > t_0$ , soit  $t = kt_0 + t_1$  ; avec  $0 \leq t_1 < t_0$ . Alors :

$$T(t) = [T(t_0)]^k T(t_1)$$

Donc :

$$ImT(t) = X.$$

D'où  $T(t)$  est bijective et  $ImT(t) = X$  pour tout  $t > 0$ , d'après le théorème du graphe fermé  $0 \in \rho(T(t))$  pour tout  $t > 0$ . ■

**Proposition 3** Soit  $-A$  le générateur d'un semi-groupe analytique  $(S(t))$  et soit  $0 \in \rho(S(t_0))$  Pour certains  $t_0 > 0$ . Alors  $A \in B(X)$ .

**Preuve.** On peut supposer sans perte de généralité que  $-A$  est le générateur d'un semi-groupe analytique borné d'angle  $\alpha$  pour un certain  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , autrement nous considérons le semi-groupe analytique  $\{e^{\omega t}S(t)\}$  de générateur  $(\omega - A)$  pour un certain  $\omega \in \mathbb{R}$ .

D'après le théorème (6) on a :

$$0 \in \rho(S(t_0)) \implies 0 \in \rho(S(t)), \forall t \geq 0$$

Donc :

$$0 \in \rho\{e^{\omega t}S(t)\}$$

On a d'après le théorème (1.6.5) dans [35], si  $(\omega - A)$  est le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle  $\beta \in (0, \alpha)$ , alors  $A$  est un générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe, et d'après le théorème de Hille-Yosida on a :

$$\begin{aligned} \exists M, \omega' \geq 0 : \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega' \} &\subset \rho(A) \\ \text{et } \|R(\lambda, A)\| &\leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega'} \text{ si } \operatorname{Re} \lambda > \omega'. \end{aligned}$$

Comme  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe  $S(t)^{-1}$ , et d'après le lemme (4),  $S(t)^{-1}$  borné, alors on peut l'étendre a un semi-groupe analytique.

Et comme  $-A$  est le générateur d'un semi-groupe analytique ( $S(t)$ ) d'angle  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  alors  $A$  est le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle  $\beta \in (\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ . Alors il existe une constante  $M_\beta > 0$  tel que :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, \operatorname{Re} \lambda > 2\omega', |\arg \lambda| \leq \beta.$$

Et d'après le lemme (3) on a :

$$\begin{cases} 1) \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \geq \frac{\pi}{2} - \alpha \} \subset \rho(A) \\ 2) \exists M_\beta > 0; \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, |\arg \lambda| \geq \beta \end{cases}$$

Où la constante  $M_\beta$  peut être remplacée par une autre plus grande si nécessaire, donc :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\beta}{|\lambda|}, |\lambda| > 2\omega'$$

Et d'après la proposition (3) ([36] page 63) on obtient  $A \in B(X)$ . ■

Il n'est pas difficile de montrer que :  $S(t)U(t) = x$ , Si  $-A$  le générateur d'un semi groupe analytique d'angle  $\alpha$  ( $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ), le problème de Cauchy 2.2 est bien posé.

$$\begin{cases} V'(t) = -AV(t), 0 \leq t < T \\ V(0) = y \end{cases} \quad (2.2)$$

En note par  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  le semi groupe engendré par  $-A$ , donc il est une solution  $V(t)$  pour le problème 2.2,  $\forall y \in X$  tel que :

$$V(t) = S(t)y, 0 \leq t < T.$$

Et d'après le problème 2.1 et par un changement de variable  $t = (T - t)$  on trouve :

$$\begin{cases} U'(T-t) = -AU(T-t), 0 < t \leq T \\ U(T) = y \end{cases} \quad (2.3)$$

D'ou : si  $U(t)$  est une solution de problème 2.1, alors  $U(T-t)$  est une solution de problème 2.2, donc :

$$U(T-t) = S(t)y = S(t)U(T)$$

Pour  $t = T$  on a :

$$U(0) = U(T-T) = S(T)y = S(T)U(T) = x,$$

Ainsi :

$$S(T)U(T) = x$$

Donc par le changement de variable  $t = (T - t)$ , et d'après 2.3 et 2.2 l'opérateur  $A$  génère le semi groupe  $S(T-t)$  où  $U(T) = y$ .

D'ou :

$$U(t) = S(T-t)U(T)$$



$$S(t)U(t) = S(t)S(T-t)U(T) = S(t)S(-t)S(T)U(T)$$

$$S(t)U(t) = S(T)U(T) = x$$

$$U(t) = S(t)^{-1}x, (t \geq 0)$$

D'après (lemme (4) et proposition(3))  $S(t)^{-1}$  n'est pas une famille d'opérateurs linéaires bornés, donc 2.1 n'est pas stable. Le problème 2.1 peut alors conduire au problème général mal posé qui a été présenté par Tikhonov, où  $-A$  est le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique  $\{S(t)\}$  d'angle  $\alpha$ ,  $(\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  et  $0 \in \rho(A)$ .

**Théorème 7** *Soit  $-A$  le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique d'angle  $\alpha$ ;  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  alors il existe une famille d'opérateurs régularisent pour le problème 2.1.*

Pour cela on introduit le problème de Cauchy bien posé suivant :

$$\begin{cases} U'_\varepsilon(t) = (A(I + \varepsilon A)^{-1} - A)U_\varepsilon(t), 0 < t \leq T \\ U_\varepsilon(0) = x \end{cases} \quad (2.4)$$

On montre par la suite qu'on peut construire une famille d'opérateurs régularisants a l'aide de la solution du problème de Cauchy bien posé 2.4. Dans ce but nous montrons tout d'abord que l'opérateur  $A(I + \varepsilon A)^{-1} - A$  génère un semi groupe analytique borné  $\{E_\varepsilon(t)\}$  si  $S(t)$  est borné et  $0 \in \rho(A)$ , en outre on montre qu'il existe un constante positive  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  tel que :

$$\|E_\varepsilon(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$$

## 2.2 Génération de semi groupe

**Proposition 4** *Soit  $-A$  le générateur d'un semi groupe analytique borné  $S(t)$  d'angle  $\alpha$ ,  $(\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$  et  $0 \in \rho(A)$ .*

Alors : l'opérateur  $(A(I + \varepsilon A)^{-1} - A)$  est le générateur d'un semi groupe analytique borné  $\{E_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$  et il existe une constante positive  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$\|E_\varepsilon(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$$

**Preuve.** On pose que  $J_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1}$  et  $A_\varepsilon = A J_\varepsilon$ . De l'identité :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \varepsilon \varepsilon^{-1} A J_\varepsilon \\ &= \varepsilon^{-1} (I - \varepsilon A - I) J_\varepsilon \\ &= \varepsilon^{-1} ((I + \varepsilon A) J_\varepsilon - J_\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{-1} (J_\varepsilon^{-1} J_\varepsilon - J_\varepsilon) \\ &= \varepsilon^{-1} (I - J_\varepsilon) \end{aligned}$$

Comme  $J_\varepsilon$  est borné, il s'ensuit que  $A_\varepsilon$  est borné.

Nous pouvons définir un  $C_0$  semi groupe d'opérateurs linéaires par :

$$S_\varepsilon(t) = \exp\{-tA_\varepsilon\}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Ou nous utilisons la série pour pouvoir définir la fonction exponentielle. D'après le théorème (7.9.5) dans Dunford-Schwartz [[7].P.602] on a :

$$\sigma(A_\varepsilon) = \{\mu(1 + \varepsilon\mu)^{-1}, \mu \in \sigma(A)\} \cup \left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

D'après ce théorème si on pose

$$f(A) = A_\varepsilon = A J_\varepsilon = A(I + \varepsilon A)^{-1}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sigma(f(A)) &= f(\sigma(A)) = \{f(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \{\lambda(1 + \varepsilon\lambda)^{-1}, \lambda \in \sigma(A)\}\end{aligned}$$

Et on remarque que si  $\lambda \rightarrow +\infty$  on trouve que :

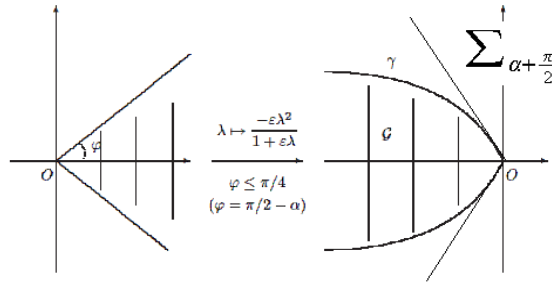
$$\lambda(1 + \varepsilon\lambda) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$$

D'où :

$$\sigma(A_\varepsilon) = \{\mu(1 + \varepsilon\mu)^{-1}, \mu \in \sigma(A)\} \cup \left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

Et alors :

$$\sum_{2\alpha} \subset \rho(-A_\varepsilon)$$



Pour  $\lambda \in \sum_{2\alpha}$  nous avons

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, -A_\varepsilon)\| &= \|(\lambda I + A_\varepsilon)^{-1}\| \\ &= \left\| (\lambda I + A(I + \varepsilon A)^{-1})^{-1} \right\| \\ &= \left\| (I + \varepsilon A)(\lambda(I + \varepsilon A) + A)^{-1} \right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|(I + \varepsilon A)(\lambda I + \varepsilon \lambda A + A)^{-1}\| \\
&= \|(I + \varepsilon A)(\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1}\| \\
&= \left\| \frac{1}{1 + \varepsilon \lambda} ((1 + \varepsilon \lambda) + \varepsilon(1 + \varepsilon \lambda)A)(\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{1 + \varepsilon \lambda} ((\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} + \varepsilon) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{1 + \varepsilon \lambda} (\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \lambda} \right\| \\
&= \left\| (\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} - \frac{\varepsilon \lambda + 1 - 1}{1 + \varepsilon \lambda} (\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \lambda} \right\| \\
&= \left\| (\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \lambda} (I + \lambda(\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1}) \right\| \\
&= \|\varepsilon(1 + \varepsilon \lambda)^{-1}I + (1 + \varepsilon \lambda)^{-1}(\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1}\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|1 + \varepsilon \lambda|} + \frac{M}{|\lambda||1 + \varepsilon \lambda|} \\
&\leq \frac{M}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

Car  $J_\varepsilon$  est borné, et  $(\lambda I + A_\varepsilon)^{-1}$  est borné, d'où :  $(\lambda I + (1 + \varepsilon \lambda)A)^{-1}$  est borné.

Par conséquent, il existe une constante  $M_1$  positive indépendant de  $\varepsilon$  tel que :

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq M_1, \forall t \geq 0$$

Où  $\{S_\varepsilon(t)\}$  est le semi groupe engendré par  $A_\varepsilon$ .

Donc  $A_\varepsilon$  est un générateur d'un  $C_0$  semi groupe  $\{S_\varepsilon(t)\}$  borné ; Il n'est pas difficile de montrer que :  $(I + A)D(A^2)$  est dense dans  $X$ , et on remarque que  $A_\varepsilon$  se rapproche de  $A$  sur  $D(A^2)$ .

Et pour  $\varepsilon$  assez petit nous avons par le théorème d'approximation de semi groupe

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_\varepsilon(t)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

■

**Théorème 8** *Pour chaque  $\varepsilon > 0$ , soit  $E_\varepsilon(t) = S(t)S_\varepsilon(-t) \forall t \geq 0$ ; alors  $E_\varepsilon(t)$  est un semi groupe analytique dans  $X$ , et  $(A_\varepsilon - A)$  est son générateur, en plus il existe une constante positive  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\|E_\varepsilon(t)\| \leq M, \forall t \geq 0.$$

**Preuve.** Comme dans la preuve de lemme (1) dans Showalter [36],  $E_\varepsilon(t)$  est un semi groupe dans  $X$  et  $(A_\varepsilon - A)$  est son générateur. Puisque  $A_\varepsilon$  est borné et  $-A$  génère un semi groupe analytique alors  $E_\varepsilon(t)$  est un semi groupe analytique par Le théorème de perturbation et de l'unicité du semi groupe.

Nous considérons d'abord le spectre de  $(A_\varepsilon - A)$ , pour  $\lambda \in C$  nous avons :

$$\begin{aligned} (\lambda I - (A_\varepsilon - A))x &= (\lambda I - A_\varepsilon + A)x \\ &= (\lambda I - \varepsilon^{-1}(I - J_\varepsilon) + A)x \\ &= (\lambda I - \varepsilon^{-1}I + \varepsilon^{-1}J_\varepsilon + A)x \\ &= (\lambda I - \varepsilon^{-1}I + \varepsilon^{-1}(I + \varepsilon A)^{-1} + A)x \\ &= [(\lambda I - \varepsilon^{-1}I + A)(I + \varepsilon A) + \varepsilon^{-1}](I + \varepsilon A)^{-1}x \\ &= (\lambda I + \lambda \varepsilon A - \varepsilon^{-1}I - A + A + \varepsilon A^2 + \varepsilon^{-1})(I + \varepsilon A)^{-1}x \\ &= (\lambda I + \lambda \varepsilon A + \varepsilon A^2)(I + \varepsilon A)^{-1}x, \forall x \in D(A) \end{aligned}$$

Donc pour  $\lambda \in \rho(A_\varepsilon - A)$  il faut que  $(\lambda I - A_\varepsilon + A)^{-1}$  existe, qui implique que

$(\lambda I + \lambda \varepsilon A + \varepsilon A^2)^{-1}$  existe, d'où  $(\lambda I + \lambda \varepsilon A + \varepsilon A^2) \neq 0$ .

Pour  $(\lambda I + \lambda \varepsilon A + \varepsilon A^2) = 0$  en calcule  $\Delta = (\lambda \varepsilon)^2 - 4\lambda \varepsilon$ .

Donc  $\Delta > 0$  implique que  $(\lambda \varepsilon)^2 - 4\lambda \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lambda \varepsilon > 4$ .

On note par  $\Lambda = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\varepsilon^2 \lambda^2 - 4\lambda \varepsilon}$ .

Dans le cas  $\Delta > 0$ , il existe deux racines  $K_1, K_2$  tel que :

$$K_1 = \frac{-\lambda \varepsilon - \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon} = \frac{-\lambda \varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} \text{ . et } K_2 = \frac{-\lambda \varepsilon + \sqrt{\Delta}}{2\varepsilon} = \frac{-\lambda \varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \text{ .}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A_\varepsilon + A)^{-1} &= (I + \varepsilon A) (\lambda I + \lambda \varepsilon A + \varepsilon A^2)^{-1} \\ &= (I + \varepsilon A) [\varepsilon (A - K_1) (A - K_2)]^{-1} \\ &= (I + \varepsilon A) \left( \varepsilon^{-1} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \right) \\ &= \left( i + \varepsilon A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} - \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} \right) \left( \varepsilon A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} \right)^{-1} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \\ &= \left( I + \left( I - \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} \right) \left( \varepsilon A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} \right)^{-1} \right) \left( A + \frac{\lambda \varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \\ &= \begin{cases} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} \right) \left( \varepsilon A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} I \right)^{-1} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1}, \text{Im } \lambda \geq 0 \\ \left( A - \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda \varepsilon + \Lambda}{2} \right) \left( \varepsilon A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2} I \right)^{-1} \left( A + \frac{\lambda \varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1}, \text{Im } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où  $(\lambda I - A_\varepsilon + A)^{-1}$  existe comme un opérateur borné si et seulement si

$\frac{\lambda \varepsilon \pm \Lambda}{2\varepsilon} \in \rho(A)$  ce qui implique :

$\sigma(A_\varepsilon - A) \subset \{-\varepsilon \lambda^2 (1 + \varepsilon \lambda)^{-1}, \lambda \in \sigma(A)\} = G$  -voir figure 1-

On pose  $\lambda = \exp \left\{ \pm i \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$  , on voit que les équations paramétriques de la courbe  $\Gamma$  se présentent comme suit :

Soit  $f(\lambda) = -\varepsilon \lambda^2 (1 + \varepsilon \lambda)^{-1}$  ou  $\lambda = r \exp \left\{ i \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$  tel que  $r = |\lambda|$ , alors :

$$f(\lambda) = \frac{-\varepsilon r^2 \left( \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{\left( 1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) + i \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$$

Nous cherchons la forme algébrique de  $f(\lambda)$  , c t a d : nous cherchons  $u, v$

tel que :

$$\begin{aligned}
& f(\lambda) = u + iv \\
& = \frac{-\varepsilon r^2 \left( \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \left( 1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) - i \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\left( 1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)^2 + \varepsilon^2 r^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \\
& = \frac{-\varepsilon r^2 \left[ \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left( 1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) + \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \varepsilon r \right]}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \\
& \quad - i \frac{\varepsilon r^2 \left[ \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left( 1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) + \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \\
& = \frac{-\varepsilon r^2 \left( \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \\
& \quad + i \frac{-\varepsilon r^2 \left( \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \dots (1)
\end{aligned}$$

De la même façon pour  $\lambda = r \exp \left\{ -i \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$  on trouve :

$$\begin{aligned}
f(\lambda) & = \frac{-\varepsilon r^2 \left( \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \\
& \quad + i \frac{\varepsilon r^2 \left( \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \dots (2)
\end{aligned}$$

De (1) et (2) en peut écrire :

$$\Gamma : \begin{cases} u = \frac{-\varepsilon r^2 \left( \cos 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \\ v = \pm \frac{\varepsilon r^2 \left( \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon r \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)}{1 + \varepsilon r \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \varepsilon^2 r^2} \end{cases} \quad \forall r \geq 0.$$

Où  $G$  est la région du coté gauche en cercle par le courbe  $\Gamma$ , et pour chaque  $\beta \in \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \frac{\pi}{2} \right)$  ou  $\beta \in \left( \frac{\pi}{2}, 2\alpha \right)$ .

La ligne :  $v = u \tan \beta$  coupe la courbe  $\Gamma$  seulement

Maintenant nous estimons la résolvante pour  $\lambda \in \rho(A_\varepsilon - A)$ , nous avons :

$$R(\lambda, A_\varepsilon - A) = (\lambda I - A_\varepsilon + A)^{-1}$$

$$= \begin{cases} \left( A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} \right) (\varepsilon A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} I)^{-1} \left( A + \frac{\lambda\varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1}, & \text{Im } \lambda \geq 0 \\ \left( A - \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda\varepsilon + \Lambda}{2} \right) (\varepsilon A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} I) \left( A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1}, & \text{Im } \lambda < 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon - A)\| = \|(\lambda I - A_\varepsilon + A)^{-1}\|$$

$$= \begin{cases} \left\| \left( A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} \right) (\varepsilon A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} I)^{-1} \left( A + \frac{\lambda\varepsilon + \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \right\|, & \text{Im } \lambda \geq 0 \\ \left\| \left( A - \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} I \right)^{-1} + \left( I - \frac{\lambda\varepsilon + \Lambda}{2} \right) (\varepsilon A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} I) \left( A + \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2\varepsilon} \right)^{-1} \right\|, & \text{Im } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \left| \frac{2\varepsilon}{\lambda\varepsilon + \Lambda} \right| + \left| 1 - \frac{\lambda\varepsilon - \Lambda}{2} \right| \left| \frac{2}{\lambda\varepsilon - \Lambda} \right| \left| \frac{2\varepsilon}{\lambda\varepsilon + \Lambda} \right|, & \text{pour } \text{Im } \lambda \geq 0 \\ \left| \frac{2\varepsilon}{\lambda\varepsilon - \Lambda} \right| + \left| 1 - \frac{\lambda\varepsilon + \Lambda}{2} \right| \left| \frac{2}{\lambda\varepsilon + \Lambda} \right| \left| \frac{2\varepsilon}{\lambda\varepsilon - \Lambda} \right|, & \text{pour } \text{Im } \lambda < 0 \end{cases}$$

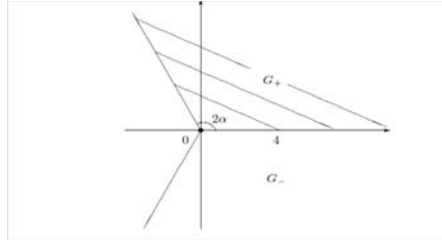


FIG. 2-1 -

Si on note  $\varepsilon\lambda$  par  $z$  et on définit :

$$f(z) = \frac{z}{z + \sqrt{z^2 - 4z}} \text{ pour } z \in G_+ = \left\{ z \in \sum_{2\alpha} ; \text{Im } z > 0 \right\}$$

$f(z)$  est continue dans  $G_+$ , De plus  $f(z)$  peut être continu pour le segment supérieur de l'intervalle  $[0, 4]$  cela signifie  $f(z)$  est continu dans  $\overline{G_+}$  si nous définissons

$f(z) = 0$  puisque :  $f(z) \rightarrow 0$  quand  $|z| \rightarrow 0$ ,  $\text{Im } z > 0$  où le segment supérieur



de  $[0, 4]$  est une partie de la frontière de  $G_+$ .

Nous avons aussi par la règle de l'hôpital :

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{2}{z - \sqrt{z^2 - 4z}} \left( 1 - \frac{z - \sqrt{z^2 - 4z}}{2} \right) &= \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{2 - z + \sqrt{z^2 - 4z}}{z - \sqrt{z^2 - 4z}} \\ &= \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{2z-4}{2\sqrt{z^2-4z}}}{1 - \frac{2z-4}{2\sqrt{z^2-4z}}} = -1 \forall z \in G_+ \end{aligned}$$

De plus :

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{2}{z - \sqrt{z^2 - 4z}} \frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4z}} \left( 1 - \frac{z - \sqrt{z^2 - 4z}}{2} \right) = 1, \forall z \in G_+$$

Aussi on définit :

$$g(z) = \left( 1 - \frac{z - \sqrt{z^2 - 4z}}{2} \right) \left( \frac{2z}{z - \sqrt{z^2 - 4z}} \right) \left( \frac{2}{z - \sqrt{z^2 - 4z}} \right)$$

La fonction  $g(z)$  est bornée sur  $\overline{G_+}$  par conséquent il existe une constante  $M$  telle que :

$$|f(z)| + |g(z)| \leq M. \text{ tel que : } \text{Im } z \geq 0$$

En remplaçant  $z$  par  $\varepsilon\lambda$  on trouve :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon\lambda) &= \frac{\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda + \sqrt{\varepsilon^2\lambda^2 - 4\varepsilon\lambda}} = \frac{\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \\ g(\varepsilon\lambda) &= \left( 1 - \frac{\varepsilon\lambda - \Lambda}{2} \right) \left( \frac{2\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda - \Lambda} \right) \left( \frac{2}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$|f(\varepsilon\lambda)| + |g(\varepsilon\lambda)| = \left| \frac{\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \right| \left| 1 - \frac{\varepsilon\lambda - \Lambda}{2} \right| \left| \frac{2\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda - \Lambda} \right| \left| \frac{2}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq |\lambda| \left( \left| \frac{2\varepsilon}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \right| \left| 1 - \frac{\varepsilon\lambda - \Lambda}{2} \right| \left| \frac{2\varepsilon}{\varepsilon\lambda - \Lambda} \right| \left| \frac{2}{\varepsilon\lambda + \Lambda} \right| \right) \\ &\leq M, (\text{Im } z \geq 0). \end{aligned}$$

Donc :

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon - A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ tel que } \text{Im } \lambda \geq 0. \quad (2.1)$$

De la même façon, nous avons la même estimation finale pour :  $(\text{Im } \lambda < 0)$  ou  $G_-$ .

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\varepsilon^2\lambda^2 - 4\varepsilon\lambda}}{\varepsilon\lambda} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2r^2 \exp\{i \ 2 \ \theta\} - 4\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}}}{\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}} \\ &= \frac{|\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}| \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}}}}{\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon r \exp\{i \ \theta\}}} \longrightarrow -1, \text{ quand } : r \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = r \exp\{i \ \theta\}$  tel que  $-2\alpha < \theta < 0$  cela implique :

$$\sqrt{\exp\{i \ 2 \ \theta\}} = \sqrt{\exp\{i \ (2\theta + 2\pi)\}} = -\exp\{i \ (\theta + \pi)\}$$

Donc pour  $\lambda \in \Sigma_{2\alpha}$  on a :

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon - A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

D'où il existe une constante positive  $M_2$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que :

$$\|E_\varepsilon(t)\| \leq M_2, \forall t \geq 0$$

Nous avons montre donc que  $(A_\varepsilon - A) = (A(I + \varepsilon A)^{-1} - A)$  est le générateur d'un Semi groupe analytique borné  $\{E_\varepsilon(t)\}$ , et il existe une constante positive  $M$  indépendante

de  $\varepsilon$  tel que :

$$\|E_\varepsilon(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$$

■

## 2.3 Régularisation pour le problème de Cauchy 2.1

Nous commençons par la définition de la famille régularisant

**Définition 15** Une famille  $\{R_{\varepsilon,t}, \varepsilon > 0 \text{ et } t \in [0, T]\} \subset B(X)$  est appelée famille régularisant pour le problème 2.1, si pour chaque solution  $U(t), t \in [0, T]$  du problème 2.1 avec l'élément initial  $x$  et pour  $\delta > 0$ , il existe  $\varepsilon(\delta) > 0$  tel que :

$$a) \varepsilon(\delta) \longrightarrow 0 \text{ si } \delta \longrightarrow 0.$$

$$b) \|R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - U(t)x\| \longrightarrow 0 \text{ si } \delta \longrightarrow 0, \forall t \in [0, T].$$

Aux conditions  $\|x_\delta - x\| \leq \delta$  on définit :  $R_{\varepsilon,t} = S_\varepsilon(-t)$  pour  $\varepsilon > 0$  et  $t \in [0, T]$ , ou  $S_\varepsilon(t)$  est un semi groupe engendré par  $-\varepsilon A$ . Alors :  $\{R_{\varepsilon,t}, \varepsilon > 0 \text{ et } t \in [0, T]\} \subset B(X)$ .

**Théorème 9** On suppose que  $-A$  le générateur d'un semi groupe analytique d'angle  $\alpha$ ,  $(\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$  alors la famille d'opérateurs  $\{R_{\varepsilon,t}\}$  définie ci-dessus est une famille d'opérateurs régularisants pour le problème 2.1, tel que  $R_{\varepsilon,t} = S_\varepsilon(-t)$ .

**Preuve.** Nous considérons d'abord le cas où  $-A$  le générateur d'un semi-groupe analytique d'angle  $\alpha$ ,  $(\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$  borné et  $0 \in \rho(A)$ . Soit  $U(t), t \in [0, T]$  la solution du problème de Cauchy 2.1 avec l'élément initiale  $x$ , et soit :

$$\|x_\delta - x\| \leq \delta, \|A_\varepsilon\| \leq M\varepsilon^{-1}$$

Et :

$$\|R_{\varepsilon,t}x_\delta - R_{\varepsilon,t}x\| \leq \|R_{\varepsilon,t}\| \|x_\delta - x\| \leq \delta \exp \left\{ M \frac{T}{\varepsilon} \right\}$$

Comme :

$$\|R_{\varepsilon,t}\| = \|S_{\varepsilon}(-t)\| \leq M \exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}\right\} \leq M \exp\left\{\frac{T}{\varepsilon}\right\} \forall t \in [0, T]$$

Pour :  $\varepsilon = 2MT (\ln \delta)^{-1}$  , si  $\delta \rightarrow 0$  :  $(\ln \delta)^{-1} \rightarrow 0$  donc  $\varepsilon \rightarrow 0$  et on a :

$$\begin{aligned} \exp\left\{M\frac{T}{\varepsilon}\right\} &= \exp\left\{M\frac{T}{2MT(\ln \delta)^{-1}}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln \delta\right\} = \exp\left\{\ln \delta^{\frac{-1}{2}}\right\} \\ &= \exp\left\{\ln \sqrt{\delta}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon,t}x_{\delta} - R_{\varepsilon,t}x\| &\leq \|R_{\varepsilon,t}\| \|x_{\delta} - x\| \\ &\leq \delta \exp\left\{M\frac{T}{\varepsilon}\right\} \leq \delta \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} \rightarrow 0 \text{ quand : } \delta \rightarrow 0. \dots (31) \end{aligned}$$

En combinant le théorème d'approximation des semi groupes, le théorème (8) et l'estimation (21) :

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(t)x = x, \forall x \in X$  et  $t \in [0, T]$ , il est facile de montrer que  $x = S(t)U(t)$ .

D'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon(\delta),t}x - U(t)\| &= \|S_{\varepsilon}(-t)S(t)U(t) - U(t)\| \\ &= \|E_{\varepsilon}(t)U(t) - U(t)\| \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\varepsilon}(t)x = x \forall x \in X$  et  $t \in [0, T]$  donc :

$$\|E_{\varepsilon}(t)U(t)x - U(t)x\| = \|(E_{\varepsilon}(t) - I)x\| \rightarrow 0 \text{ quand : } \varepsilon \rightarrow 0$$

Ce qui implique :  $E_{\varepsilon}(t) \rightarrow I$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

D'où :

$$\|R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - U(t)x\| = \|E_\varepsilon(t)U(t)x - U(t)x\| \longrightarrow 0 \text{ quand } : \varepsilon \longrightarrow 0 \dots (32)$$

De (31) et (32) on obtient que  $\{R_{\varepsilon,t}\}$  est une famille d'opérateurs régularisant pour le problème 2.1 d'après la (Définition (15)). ■

Nous utilisons maintenant le cas général où l'opérateur  $-A$  est le générateur d'un semi groupe analytique non borné.

On a vu que si  $A$  est le générateur d'un semi-groupe analytique non borné alors il existe un constante  $\omega$  réel tel que  $(\omega - A)$  est le générateur d'un semi groupe analytique borné d'angle  $\alpha$  , et  $0 \in \rho(\omega - A)$  .

Donc pour l'opérateur  $-A$  il existe un constante  $\omega$  réelle telle que  $(\omega - A)$  est le générateur d'un semi groupe analytique borné d'angle  $\beta$  ,

et  $0 \in \rho(\omega - A)$  où  $(\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2})$ . (Définition 21, cf [34]). D'ou il existe une famille d'opérateurs régularisants pour le problème 2.5

$$\begin{cases} U'(t) = (A - \omega) U(t), t \in [0, T] \\ U(0) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit  $U(t)$ ,  $t \in [0, T]$  une solution du problème de Cauchy 2.1 avec l'élément initiale  $x$ . D'après la proposition (3) ,  $(A - \omega)$  est le générateur d'un semi groupe analytique borné :  $\{\exp\{\omega t\}S(t)\}$  d'angle  $\beta$ , et  $0 \in \rho(\exp\{\omega t\}S(t))$ . Et la solution du problème 2.5 par conséquent est donnée par :

$$U(t) = \exp\{-\omega t\}U(t), t \in [0, T]$$

Et on a :

$$\|\exp\{\omega t\}R_{\varepsilon,t}x_\delta - U(t)x\| = \exp\{\omega t\}\|R_{\varepsilon(\delta),t}x_\delta - U(t)x\| \longrightarrow 0 \text{ quand } : \delta \longrightarrow 0$$

De la même façon nous montrons que  $\{\exp \{\omega t\} R_{\varepsilon, t}\}$ , est une famille d'opérateurs régularisants du problème 2.1.

**Remarque 2** La méthode ci dessus est fausse pour l'angle  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$  dans un espace de Banach, on a si :  $\alpha < \frac{\pi}{4}$  et pour  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$  donc :  $\varphi > \frac{\pi}{4}$ , et on considérant l'image dedeux rayons  $r \exp \{\pm i (\varphi)\}$ , ( $r \geq 0$ ) selon l'application :  $\lambda \longrightarrow -\varepsilon \lambda^2 (1 + \varepsilon \lambda)$

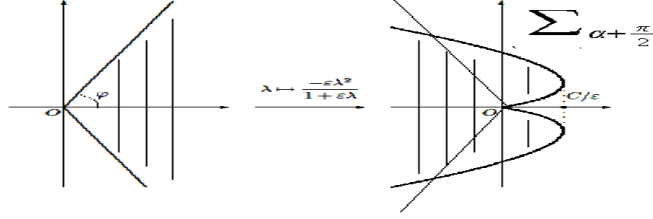


FIG. 2-2 -

qui donne le spectre de l'opérateur  $(A_\varepsilon - A)$ . Pour  $\lambda = r \exp \{\pm i (\varphi)\}$ , ( $r \geq 0$ ) par la symétrie il est facile d'obtenir :

$$\begin{aligned} (-\varepsilon \lambda^2 (1 + \varepsilon \lambda)^{-1}) &= \frac{-\varepsilon (r \exp \{i (\varphi)\})^2}{1 + r \exp \{i (\varphi)\}} \\ &= \frac{-\varepsilon r^2 (\cos 2\varphi + \varepsilon r \cos \varphi)}{1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2} - i \frac{-\varepsilon r^2 (\sin 2\varphi + \varepsilon r \sin \varphi)}{1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2} \end{aligned}$$

On noté par  $f (r)$  la partie réelle, donc :

$$f (r) = \frac{-\varepsilon r^2 (\cos 2\varphi + \varepsilon r \cos \varphi)}{1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2} (r \geq 0)$$

On a :  $f (r) \leq 0$  pour  $(0 < \varphi < \frac{\pi}{4})$ , et pour  $(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$  on calcule  $f ' (r)$

$$\begin{aligned} f ' (r) &= \frac{(-2\varepsilon r \cos 2\varphi - 3\varepsilon^2 r^2 \cos \varphi) (1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2)}{(1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2)^2} \\ &+ \frac{(2\varepsilon \cos \varphi + 2\varepsilon^2 r) (\varepsilon r^2 \cos 2\varphi + \varepsilon^2 r^3 \cos \varphi)}{(1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(r) = \frac{-\varepsilon r (\varepsilon^3 r^2 \cos \varphi + 4\varepsilon^2 r^2 \cos \varphi + 2\varepsilon r \cos 2\varphi \cos \varphi + 3\varepsilon r \cos \varphi + \cos 2\varphi)}{(1 + 2\varepsilon r \cos \varphi + \varepsilon^2 r^2)^2}$$

$$f'(r) = (\varepsilon^3 r^2 \cos \varphi + 4\varepsilon^2 r^2 \cos \varphi + 2\varepsilon r \cos 2\varphi \cos \varphi + 3\varepsilon r \cos \varphi + \cos 2\varphi) = 0$$

La solution réelle de cette équation est unique et donnée par la méthode de Kardan par :

$$r_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{G^{\frac{1}{3}}}{3} - \frac{1 - \frac{2}{3} \cos^2 \varphi}{G^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{3} \cos \varphi \right)$$

ou

$$G = \left( \frac{8 \cos 4\varphi - 36 \cos^2 \varphi + 27 + 3H}{\cos \varphi} \right)$$

et

$$H = \sqrt{-48 \cos^6 \varphi + 180 \cos 4\varphi - 213 \cos^2 \varphi + 81}$$

Donc

$$f(r_0) = \frac{C}{\varepsilon} \max_{r \geq 0} \{f(r)\}$$

Où  $f(r_0)_{\varepsilon=1}$  est supérieur à zéro tel que :  $(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}[$ .

On trouve que le spectre de  $(A_\varepsilon - A)$  traverse le côté droit du plan, d'après (lemme 3) on a :  $(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2})$  et  $\sum_{\varphi + \frac{\pi}{2}} \not\subseteq \rho(A_\varepsilon - A)$  cela implique que  $(A_\varepsilon - A)$  n'est pas le générateur d'un semi groupe analytique d'angle  $\varphi$ . D'ou pour  $\varphi > \frac{\pi}{4}$  ou  $\alpha < \frac{\pi}{4}$  la méthode est fausse pour  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}[$  dans un espace de Banach.

# Chapitre 3

## Solution du problème de Cauchy inverse par la méthode de quasi-réversibilité

### 3.1 Position du problème

On considère l'équation :

$$\frac{dU}{dt} = AU(x, t) \dots (I)$$

Où  $A$  est un opérateur linéaire fermé défini dans un espace de Banach  $X$  tel que  $D(A) = X$ , nous reformulerons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -AU(x, t) \dots (II) \\ U(x, T) = U_0 \end{cases}$$

On note que ce problème a été traité dans [29].

Il est connu que la fonction  $U_0 \in X$  est une solution du problème de Cauchy (II) pour  $t = T$ .

Soumise à une certaine condition initiale  $z_0 = U_{t=0}$ , la fonction  $U_0$  est donnée par l'erreur  $\delta : \|z_\delta - z_0\| \leq \delta$ .



Cela demande de trouver une solution qui approche à  $z_0$ , c'est à dire par rapport à  $z_\delta$  pour trouver une  $x_\delta$  comme  $\|z_\delta - z_0\| \longrightarrow 0$  quand :  $\delta \longrightarrow 0$ .

Nous montrerons que ce problème peut être résoudre par la méthode de quasi-réversibilité. (voir [22] [27] [25] [28] [29])

## 3.2 La construction de la solution approximante

Par laméthode de quasi-réversibilité nous trouvons  $z_\varepsilon^\delta$  comme solution  $U_\varepsilon^\delta(x, t)$  du problème inverse de le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU_\varepsilon^\delta}{dt} = (A + \varepsilon A^2) U_\varepsilon^\delta \\ U_\varepsilon^\delta(x, T) = U_\delta \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour  $t = 0$  dans l'espace du Banach la fonction  $z_\varepsilon^\delta$  est trouvée dans [29], pour trouvée cela, dans le problème 3.1 nous faisons le changement de variable suivant :  $\tau = T - t$ , on aboutit au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{U}_\varepsilon^\delta}{d\tau} = -(A + \varepsilon A^2) \widehat{U}_\varepsilon^\delta \\ \widehat{U}_\varepsilon^\delta(x, \tau)_{\tau=0} = \widehat{U}_\delta \end{cases}$$

On a :

$$U_\varepsilon^\delta = U(x, T - t) \Rightarrow \frac{dU_\varepsilon^\delta}{dt} = \frac{d}{dt} U(x, T - t).$$

$$\Rightarrow \frac{dU_\varepsilon^\delta}{dt} = -\frac{d}{d\tau} U(x, \tau).$$

Donc :

$$\begin{aligned} 3.1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dU_\varepsilon^\delta}{dt} = -\frac{d}{d\tau} U_\varepsilon^\delta = (A + \varepsilon A^2) U_\varepsilon^\delta \\ U_\varepsilon^\delta(x, T - t)_{t=T} = U_\delta \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{d\tau} \widehat{U}_\varepsilon^\delta = -(A + \varepsilon A^2) \widehat{U}_\varepsilon^\delta \\ \widehat{U}_\varepsilon^\delta(x, \tau)_{\tau=0} = \widehat{U}_\varepsilon^\delta(x, 0) = U_\delta \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Il est montré que si  $A$  génère un problème de Cauchy bien posé ou il satisfait certaines conditions faibles du théorème (1.5) de [34] et la partie imaginaire de spectre est limitée.

Alors le problème de Cauchy obtenu 3.2 est aussi stable sous la condition :

$$U_\delta \in D(A^4).$$

La solution du problème 3.2 peut être écrite sous forme intégrale :

$$\widehat{U}_\varepsilon^\delta(x, T) = z_\varepsilon^\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\lambda T\} R(\lambda, A_\varepsilon) U_\delta d\lambda \dots (4)$$

Tel que :  $\sigma > \varepsilon K + \frac{1}{4\varepsilon}$ . et  $ImSp(A) < K \Rightarrow \forall \lambda \in \{\lambda \in C : |\lambda| \geq K\} \subset \rho(A)$ .

Donc pour que le chemin  $\Gamma$  soit dans  $\rho(A)$  la solution du problème inverse 3.2 est donnée par (4), et  $\Gamma : \sigma - i\infty \longrightarrow \sigma + i\infty$ , car comme  $Sp(A)$  est borné alors  $\rho(A)$  est non borné.

Comme cela résulte du théorème (5) que  $-A^b$  et  $(A - \varepsilon A^b)$  sont deux opérateurs qui approximent  $A$ , et de plus génèrent des semi-groupes analytiques. Donc sous cette condition la solution du problème inverse 3.2 du problème 3.1 est donné par :

$$\widehat{U}_\varepsilon^\delta(x, T) = z_\varepsilon^\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\lambda T\} R(\lambda, -(A + \varepsilon A^2)) U_\delta d\lambda.$$

Et on a

$$R(\lambda, -(A + \varepsilon A^2)) = \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda T\} S_\varepsilon(T) d\lambda.$$

Où  $S_\varepsilon(T)$  est le semi-groupe engendré par  $A_\varepsilon = -(A + \varepsilon A^2)$ , et donc  $\forall \lambda \in \sigma(A_\varepsilon) : \lambda = \lambda + \varepsilon \lambda^2$  tel que :  $\lambda \in \sigma(A)$ , on a donc :

$$\begin{aligned} R(\lambda, A_\varepsilon) &= R(\lambda, -(A + \varepsilon A^2)) = \int_0^{+\infty} \exp\{-\lambda T\} S_\varepsilon(T) d\lambda. \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\{-(\lambda + \varepsilon \lambda^2) T\} S(T) d\lambda. \end{aligned}$$

Où  $S(T)$  est le semi-groupe engendré par  $A$ , d'où :

$$z_\varepsilon^\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{-(\lambda + \varepsilon \lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_\delta d\lambda \dots (5)$$

$$\iff z_\varepsilon^\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp\{- (\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_\delta d\lambda$$

Et  $\Gamma : \sigma - i\infty \longrightarrow \sigma + i\infty$ , tel que  $\Gamma$  est dans  $\rho(A)$ , et  $\Gamma$  c'est un chemin fermé contient le spectre de  $A$ .

### 3.3 Convergence de la solution approximante vers la solution exacte

Le but de cette partie est de montrer que pour une fonction choisie  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  qui tend vers a zéro quand :  $\delta \longrightarrow 0$ .

$$\|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - z_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta \longrightarrow 0$$

On a l'estimation suivante :

$$\|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - z_0\| \leq \|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T)\| + \|\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) - z_0\|$$

Où  $\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T)$  est une solution du problème 3.2 pour  $U_\delta = U_0$  et  $t = T$ . Quand  $\delta \longrightarrow 0$  :  $z_\varepsilon^\delta(x) \longrightarrow z_\varepsilon^0(x)$ , où :

$$\begin{aligned} z_\varepsilon^0(x) &= U_\varepsilon^0(x, T) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp\{- (\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_0 d\lambda \dots (6) \end{aligned}$$

On pose

$$\int_\Gamma \exp\{- (\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) d\lambda = B_\varepsilon$$

D'après (5) et (6) nous obtenons l'estimation :

$$\begin{aligned}
\|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - z_\varepsilon^0(x)\| &= \left\| z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \|U_\delta - U_0\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \delta
\end{aligned}$$

Ici  $\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T)$  est une solution du problème 3.2 pour  $U_\delta = U_0$  et  $\tau = 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp\{- (\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_0 d\lambda. \\
\iff \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) &= -\frac{1}{2\pi i} B_\varepsilon U_0.
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
z_{\varepsilon(\delta)}^\delta(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \exp\{- (\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_\delta d\lambda. \\
\iff z_{\varepsilon(\delta)}^\delta(x) &= -\frac{1}{2\pi i} B_\varepsilon U_\delta.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left\| z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) \right\| = \left\| -\frac{1}{2\pi i} B_\varepsilon (U_\delta - U_0) \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \|U_\delta - U_0\|.$$

Et comme :  $\|U_\delta - U_0\| < \delta$  donc :

$$\left\| z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \|U_\delta - U_0\| \leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \delta$$

Quand  $\delta \rightarrow 0$  :  $\|B_\varepsilon\| \delta \rightarrow 0$ , d'où :

$$\left\| z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) \right\| \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0 \dots (7)$$

Il est suffisant de choisir la fonction  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ , alors on aura  $\|B_\varepsilon\| \delta \longrightarrow 0$  quand  $\delta \longrightarrow 0$ .

Maintenant nous estimons :  $\left\| \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) - z_0 \right\|$ .

La fonction  $U_0$  est une solution pour :  $t = T$  du problème de Cauchy (II) pour l'équation (I) avec une condition initiale :  $U_{t=0} = z_0$ .

Alors pour  $z_0 \in D(A^2)$  on peut l'écrire sous la forme d'intégrale ou dessus d'une ligne a droite du spectre de l'opérateur  $A$  tel que :

$$U_0 = U(x, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} R(\mu, A) z_0 d\mu.$$

Et choisissons  $\sigma$  alors que cette ligne est a droite et lisse du contour  $\Gamma$ , et mettons l'expression obtenue pour  $U_0$  dans la formule (6) on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp\{-(\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) U_0 d\lambda. \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp\{-(\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} R(\lambda, A) \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} R(\mu, A) z_0 d\mu \right) d\lambda. \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \exp\{-(\lambda + \varepsilon\lambda^2) T\} \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu \right) d\lambda \right] \end{aligned}$$

On not par  $I$  à l'intégrale :  $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu$ , on a donc :

$$I = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} \frac{R(\mu, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu.$$

On choisit  $\lambda$  appartenant à l'intérieur de chemin fermé  $\gamma$  et on choisit  $\gamma : (\sigma - i\infty, \sigma + i\infty)$  une chemin fermé tel que :  $\gamma \subset \Gamma$ , par le théorème de Cauchy sur le chemin fermé  $\gamma$ .

on a :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\{\mu T\} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu = -2\pi i \operatorname{Res}(\exp\{\mu T\}, \lambda) R(\lambda, A) z_0$$

$$= -2\pi i \exp \{ \lambda T \} R(\lambda, A) z_0.$$

Pour l'intégrale :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp \{ \mu T \} \frac{R(\mu, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu$$

Et pour  $\mu$  appartenant à  $\Gamma$ , donc  $\mu$  est extérieur au chemin fermé  $\gamma$ , Par la théorème de Cauchy sur le chemin fermé  $\gamma$  on a :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp \{ \mu T \} \frac{R(\mu, A)}{\lambda - \mu} z_0 d\mu = 0.$$

D'ou :

$$\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \{ -(\lambda + \varepsilon \lambda^2) T \} \exp \{ \lambda T \} R(\lambda, A) z_0 d\lambda.$$

$$\iff \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \{ (-\lambda - \varepsilon \lambda^2 + \lambda) T \} R(\lambda, A) z_0 d\lambda.$$

$$\iff \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \{ (-\varepsilon \lambda^2) T \} R(\lambda, A) z_0 d\lambda.$$

Il est montré que l'opérateur  $-A^2$  génère un semi-groupe continu noté :  $P_t$ , pour  $z_0 \in D(A)$  qu'on peut écrire sous forme intégrale :

$$P_t z_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \{ -\lambda^2 t \} R(\lambda, A) z_0 d\lambda.$$

C'est à dire :

$$\widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) = P_t z_0 \text{ quand } : t = \varepsilon T.$$

D'après la continuité du semi-groupe  $P_t$  en zéro il s'ensuit que quand  $\varepsilon \longrightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) - z_0 \right\| &= \| P_t z_0 - z_0 \| \\ &= \| P_{\varepsilon T} z_0 - z_0 \| \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0. (P_0 = I) \dots (8) \end{aligned}$$

D'après (7) et (8) il est prouvé que l'on peut choisir la fonction :  $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon(\delta)$ , ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} \|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - z_0\| &\leq \left\| z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) \right\| + \left\| \widehat{U}_\varepsilon^0(x, T) - z_0 \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|B_\varepsilon\| \delta + \|P_{\varepsilon T} z_0 - z_0\| \text{ quand } \delta \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

D'ou :

$$\|z_{\varepsilon(\delta)}^\delta - z_0\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta \longrightarrow 0.$$

D'ou : la solution approximante  $z_{\varepsilon(\delta)}^\delta$  converge vers la solution exacte  $z_0$ .

# Bibliographie

- [1] S. Agmon, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, *Comm. Pure Appl. Math.* 15 (1962), 119–147.A. N.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boudary for solutions of elliptic partial diffrential equations, *comm. Pur Appl. Math.* 12(1959)623-727.
- [3] K.A. Ames,J.F. Epperson, A kernel-based method for the approximate solution of backward parabolic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 34 (1997) 1357-1390.
- [4] L. Sh. Abdulkerimov, "Regularization of the ill-posed Cauchy problem by a perturbationof initial conditions," submitted to Azerbaijan NIINTI, No. 82 Az-D83, Baku (1983).
- [5] A.V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroupsgenerated by them, *Pacific J. Math.* 10 (1960) 419-437.
- [6] M. Denche and K. Bessila, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *J. Math. Anal. Appl.* 301(2005), No. 2, 419–426.
- [7] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York, 1985.
- [8] R. deLaubenfels, *Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations*, Springer- Verlag, Berlin, 1994.
- [9] H.O. Fatorini, *the Cauchy Problem*, Adison-Wesley, London, 1983.



- [10] A. Yu. Freiberg, "Regularization of an ill-posed Cauchy problem for a differential operator equation of the first order," submitted to VINITI, No. 586-V88, Moscow (1987).
- [11] Gajewski and K. Zacharias, Zur Regularisierung einer Klasse nichtkorrekter Probleme bei Evolutionsgleichungen, *J. Math. Anal. Appl.* 38(1972), 784-789.
- [12] V.B. Glasko, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, New York, 1988.
- [13] J.A. Goldstein, Some remarks on infinitesimal generators of analytic semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 22 (1969) 91-93.
- [14] V. K. Ivanov, I. V. Mel'nikova and A.I. Filinkov, *Differential Operator Equations and Illposed Problems*, Nauka, Moscow, 1995. (In Russian).
- [15] V. K. Ivanov, "The quasi-inverse problem for the heat equation in the uniform metric," *Differents. Uravn.*, 8, No. 4, 652-658 (1972).
- [16] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Number 127 in *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New-York, 1998.
- [17] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd Corrected Printing of the 2nd Edition, Springer, Berlin, 1984.
- [18] M.A. Krasnosel'skii, P.E. Sobolevskii, Fractional powers of operators acting in Banach spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 129 (1959) 299-502.
- [19] B. G. Karasik, *A Conditionally-Correct Cauchy Problem for Differential-Operator Equations and Their Applications*, PhD. Dissertation, 01.01.02, Baku (1978).
- [20] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1971.
- [21] S.G.Krein, O.I. Prozorovskaja, Analytic semi-groups and incorrect problems for evolutionary equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 133 (1960) 277-280.
- [22] R. Lattes and J.-L. Lions, *The Method of Quasi-reversibility Applications to Partial Differential Equations*, Amer. Elsevier Publ. Co., New York, 1969.

- [23] M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatski , Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. (Translated from the Russian) Translations of Mathematical Monographs, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [24] O. A. Liskovets, "Numerical solution of some ill-posed problems by a method of pseudosolutions," *Differents. Uravn.*, 735-742 (1968).
- [25] I. V. Mel'nikova, General theory of the ill-posed Cauchy problem, *J. Inverse and Ill-posed Problems* 3(1995), 149-171.
- [26] I. V. Mel'nikova and A.I. Filinkov, *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*, Chapman and Hall, London, 2001.
- [27] I. V. Mel'nikova, General theory of the ill-posed Cauchy problem, *J. Inverse and Ill-posed Problems* 3(1995), 149-171.
- [28] I. V. Mel'nikova and A.I. Filinkov, *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*, Chapman and Hall, London, 2001.
- [29] I. V. Mel'nikova, "Solution of the inverse Cauchy problem by the method of quasi-reversibility," *Izv. Vuzov. Matem.*, 6, 36-38 (1981).
- [30] I. V. Mel'nikova and A. Yu. Freiberg, "Regularization of ill-posed Cauchy problem for the second order equation in a Banach space," *Differents. Uravn.*, 22, Noo 8, 1332-1338(1986).
- [31] I. V. Mel'nikova, *Correct and Ill-Posed Problems for Differential-Operator Equations in Banach Spaces*, PhD. Dissertation, 01.01.02, Novosibirsk (1988).
- [32] I. V. Mel'nikova and A. G. Kudryavtsev, "Regularization of the ill-posed Cauchy problem for the first order equation in a Banach space with the help of boundary problems," in : *Theory and Methods of Solving Ill-Posed Problems [in Russian]*, *Trudy Vsesoyuz..Shk.* (Proceedings of All-Union School), Novosibirsk, NGU, 260-261 (1983).

- [33] N. V. Muzylev, "Regularization properties of the method of quasi-reversibility," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 223, No. 2, 298-299 (1975).
- [34] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [35] G. Papi Frosali, "On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation," Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Sci. Mat., 6, No. 4, 719-728 (1979).
- [36] R. E. Showalter, The final problem for evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 47(1974), 563-572.
- [37] B. Stewart, Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators, Trans. Amer. Math. Soc. 199 (1974) 141-161.
- [38] B. Stewart, Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions, Trans. Amer. Soc. 259 (1980) 299-310.
- [39] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solution of Ill-posed Problems, Winston and Sons, Washington D.C., 1977.
- [40] H. Tanabe, Equations of Evolution, Pitman, London, 1979.
- [41] P. N. Vabishchevich, "Nonlocal parabolic equations and the inverse problem for the heat equation," Differents. Uravn., 17, No. 7, 1193-1199 (1981).
- [42] H. Yongzhong, Q. Zheng, Regularization for Ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups, J. Differential Equations 203 (2004) 38-54.
- [43] Q. Zheng, Y. Li, Abstract parabolic systems and regularized semigroups, Pacific J. Math. 182 (1998).

# **Titre: Quelques méthodes de régularisation de problèmes mal-posés**

## **Résumé**

---

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème de Cauchy mal posé dans un espace de Banach. On construit une famille régularisante d'opérateurs pour notre problème. On montre la convergence de cette méthode.

Enfin, on illustre les résultats obtenus par l'étude d'un problème inverse par la méthode de quasi-réversibilité, et on donne la Convergence de la solution approximante vers la solution exacte.

---

---

**Title: Certain regularization methods of ill-posed problems**

**Abstract**

The present work is devoted to the study of an ill-posed Cauchy problem in Banach space. We construct a family of regularizing operators.

We prove the convergence of this method.

Finally we illustrate the obtained results to the study of an inverse problem using the quasi-reversibility method and we give the convergence of the approximate solution to the exact solution.

العنوان / بعض طرق تعديل مسائل كوشي الموضوعه خطأ

## ملخص

هذا العمل يتضمن دراسة لقسم من مسائل كوشي الموضوعه خطأ.  
في فضاء بناخ  $X$   
نقوم بإنشاء عائلة من المؤثرات المعدلة .  
نقوم بعد ذلك بإثبات تقارب الطريقة المتبعة.  
في النهاية نستعمل النتائج التي تم الوصول إليها من اجل دراسة  
المسالة العكسية باستعمال نفس الطريقة الشبه عكسية و نقوم  
بإثبات تقارب الحل المقرب إلى الحل الحقيقي.