REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ..... .
N° série : .... . .

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER EN MATHEMATIQUES

Thème

Problème de Transmission non local

Option

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET APPLICATIONS

Par :

SMAKDJI MOHAMED EL-HADI

Devant le jury :

Président :	Ayadi A.	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur :	Denche M.	Prof.	Univ. Constantine
Examinateurs :	Djezzar S.	M.C.	Univ. Constantine
	Hamri N.	MC.	Univ. Constantine

Soutenu le : 03 06 2006

Table des matières

INTRODUCTION

Il est bien connu que les problèmes du type Sturm-Liouville jouent un role important en physique mathématique, des développement important de cette théorie ont été traités dans [16], [18] et les références qui s'y trouvent. Habituellement, le paramètre spectral λ apparaît seulement dans l'équation des problèmes classiques de Sturm-Liouville, cependant en physique mathématique certains problèmes contiennent la dérivée par rapport au temps dans les conditions aux limites, ce qui conduit après la séparation des variables à des problèmes spectraux qui contiennent le paramètre λ non seulement dans l'équation mais aussi dans les conditions aux limites, pour certaines applications physiques voir par exemple [4], [5], [8], [9], [15], [16], [17] et [19]. Certaines classes de problèmes de transmission pour le problème de Sturm Liouville ont été étudiés dans [6], [8], [10], [11], [14] et [20]. Des problèmes similaires pour équations à coefficients continus ont été étudiés dans [1], [2], [7], [12], [21], [22], [23] et [24]. Le présent travail est consacré à l'étude des problèmes aux limites du type Sturm-Liouville à coefficients discontinus contenant le paramètre spectral dans les conditions aux limites. On traite aussi le cas ou le paramètre spectral apparaît dans les conditions aux limites et dans les conditions de transmission. Pour chaque type de problème traité on établit le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres.

Plus exactement ce travail est composé de trois chapitres. Au premier chapitre on aborde l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficient discontinu, contenant le paramètre spectral dans l'une des conditions aux limites et dans les deux conditions de transmission. Au chapitre deux on traite le cas où le paramètre spectral apparaît uniquement dans les conditions aux limites. Enfin au dernier chapitre on traite le cas ou les deux conditions aux limites et les deux conditions de transmission contiennent le paramètre spectral. Dans chaque cas on donne la formulation opératorielle du problème considéré dans un espace de Hilbert adéquat, dans lequel l'opérateur engendré par le problème en question est symétrique. Par la suite on donne le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres, en plus pour le problème traité au second chapitre on donne le comportement asymptotique des fonctions propres normalisées. Des cas particuliers de tels problèmes ont été traités dans [3] et [13].

Chapitre 1

PROBLEME DE STURM-LIOUVILLE A COEFFICIENT DISCONTINU AVEC PARAMETRE SPECTRAL DANS UNE CONDITION AUX LIMITES ET DANS LES CONDITIONS DE TRANSMISSION.

1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on aborde l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficient discontinu, contenant le paramètre spectral dans l'une des conditions aux limites et dans les deux conditions de transmission. Tout d'abord on donne la formulation opératorielle du problème considéré dans un espace de Hilbert adéquat, dans lequel l'opérateur engendré par le problème en question est symétrique. Par la suite on établit le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres. Un cas particulier d'un tel problème à été traité dans [13].

Soit l'équation

$$\tau u = -u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a, c[\cup]c, b], \tag{1-1}$$

et la condition aux limites en $x = a$

$$L_1(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \tag{1-2}$$

et la condition aux limites en $x = b$

$$L_2(u) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right) + \left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = 0, \tag{1-3}$$

avec les conditions de transmission au point de discontinuité $x = c$

$$L_3(u) = u(c-0) - \lambda u(c+0) = 0, \tag{1-4}$$

$$L_4(u) = u'(c-0) - \lambda u'(c+0) = 0, \tag{1-5}$$

où λ est un paramètre complexe, $q(x)$ est une fonction réelle continue dans $[a, c[$ et $]c, b]$ et elle a des limites finies quand $x \to c \pm 0$; α_i, β_i, β_i' $(i = 1, 2)$ sont des nombres réels tells que :

$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,$

$|\beta_1'| + |\beta_2'| \neq 0$, et nous supposons que $\rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0$.

1.2 FORMULATION OPERATORIELLE

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert $H = L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}$ et un opérateur symétrique $A : H \to H$ tel que (1-1)-(1-5) peut être considéré comme problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Dans l'espace de Hilbert $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}$, nous définissons le produit scalaire :

$$\langle F, G \rangle = \int_a^{c-0} f(x)\overline{g(x)}dx + \lambda^2 \int_{c+0}^{b} f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{\lambda^2}{\rho_1} f_1 \overline{g_1},$$

pour $\quad F = (f(x), f_1) \quad , \quad G = (g(x), g_1)$.

Pour des raisons de commodité nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} B_b(u) &= \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b), \\ B_b'(u) &= \beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b). \end{aligned}$$

Dans l'espace de Hilbert H considérons l'opérateur A de domaine de définition :

$$D(A)=\left\{\begin{array}{c} F=(f(x),f_1): \ f(x) \ et \ f'(x) \ sont \ absolument \ continues \\ dans \ [a,c[\cup]c,b] \ et \ ont \ des \ limites \ finies \ quand \ x\longrightarrow c\pm 0, \\ \tau f\in L_2[a,b], \ L_i f=0, \quad i=1,3,4; \ \ f_1=B_b'(f), \end{array}\right\}$$

$$AF=(\tau f,-B_b(f)).$$

D'où le problème considéré (1-1)-(1-5) se ramène au problème suivant :

$$AF=\lambda F.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème (1-1)-(1-5) sont définies comme valeurs propres et les premières composantes des vecteurs propres de l'opérateur A respectivement.

Théorème 1 L'opérateur A est symétrique.

Preuve : soient F, G $\in D(A)$.

Pour montrer que A est symétrique il suffit de montrer que $\langle AF,G\rangle=\langle F,AG\rangle$.

En intégrons deux fois par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle AF,G\rangle &= \langle F,AG\rangle+W(f,\overline{g};c-0)-W(f,\overline{g};a)+\lambda^2 W(f,\overline{g};b) \\ &\quad -\lambda^2 W(f,\overline{g};c+0)+\frac{\lambda^2}{\rho}\left(B_b'(f)B_b(\overline{g})-B_b(f)B_b'(\overline{g})\right),\end{aligned} \tag{1-6}$$

où. $W(f,g;x)$ est le wronskien des fonctions f et g :

$$W(f,g;x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x).$$

Puisque f et g vérifient les conditions aux limites (1-2) et (1-3) et les conditions de transmission (1-4) et (1-5) nous avons :

$$\begin{aligned} W\left(f,\overline{g};a\right) &= 0, & \text{(1-7)} \\ \frac{1}{\rho}\left(B_b'\left(f\right)B_b\left(\overline{g}\right)-B_b\left(f\right)B_b'\left(\overline{g}\right)\right) &= -W\left(f,\overline{g};b\right), \\ W\left(f,\overline{g};c-0\right) &= \lambda^2 W\left(f,\overline{g};c+0\right). \end{aligned}$$

Finalement en substituant (1-7) dans (1-6) nous obtenons :

$$\langle AF,G\rangle = \langle F,AG\rangle \qquad (F,G\in D(A)), \tag{1-8}$$

d'où A est symétrique.

Corollaire 1 les valeurs propres du problème (1-1)-(1-5) sont réelles.

Nous pouvons supposer maintenant que toutes les fonctions propres du problème (1-1)-(1-5) sont réelles.

Corollaire 2 Soit $\lambda_1$et $\lambda_2$deux valeurs propres distinctes du problème (1-1)-(1-5), alors les fonctions propres correspondantes $u_1$et u_2 de ce problème sont orthogonal i.e

$$\langle u_1,u_2\rangle = 0.$$

1.3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU SYSTEME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS

Pour une prochaine considération, nous avons besoin du lemme suivant, qui peut être prouvé par la même technique comme dans la preuve de théorème 1.5 dans [18].

Lemme 1 Soit $q(x)$ une fonction réelle continue dans $[a,b]$ et $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ des fonctions entières donnée. Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation

$$\tau u = -u''(x) + q(x)\, u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a,b],$$

a une solution unique $u = u(x,\lambda)$ qui satisfait aux conditions initiales

$$u(a) = f(\lambda),\; u'(a) = g(\lambda) \quad (\text{où } u(b) = f(\lambda),\; u'(b) = g(\lambda)).$$

Pour chaque x fixé dans $[a,b]$, en plus $u(x,\lambda)$ est une fonction entière en λ.

Soit maintenant $\Phi_{1\lambda}(x) = \Phi_1(x,\lambda)$ la solution de l'équation (1-1) dans $[a,c]$, qui satisfait les conditions initiales

$$u(a) = \alpha_2, \quad u'(a) = -\alpha_1. \tag{1-9}$$

Après avoir défini cette solution nous pouvons définir la solution $\Phi_{2\lambda}(x) = \Phi_2(x,\lambda)$ de l'équation (1-1) dans $[c,b]$, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(c) &= \lambda^{-1}\Phi_1(c,\lambda), \qquad (1\text{-}10)\\ u'(c) &= \lambda^{-1}\Phi_1'(c,\lambda). \end{aligned}$$

Remarque 1 La fonction $\Phi_1(x,\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (1-2). et $\Phi_2(x,\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (1-4) et (1-5).

De la même manière nous devons définir la solution $\Psi_{2\lambda}(x) = \Psi_2(x,\lambda)$ de l'équation (1-1) dans $[c.b]$, avec les conditions initiales

$$u(b) = \beta_2 + \lambda\beta_2', \quad u'(b) = \beta_1 + \lambda\beta_1', \tag{1-11}$$

et la solution $\Psi_{1\lambda}(x) = \Psi_1(x,\lambda)$ de l'équation (1-1) dans $[a,c]$ avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(c) &= \lambda\Psi_2(x,\lambda), \\ u'(c) &= \lambda\Psi_2'(c,\lambda). \end{aligned} \tag{1-12}$$

Remarque 2 La fonction $\Psi_2(x,\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (1-3). et $\Psi_1(x.\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (1-4) et (1-5).

Nous considérons les wronskiens :

$$\begin{aligned} w_i &= W_\lambda(\Phi_i, \Psi_i, x) \\ &= \Phi_i(x,\lambda)\Psi_i'(x,\lambda) - \Phi_i'(x,\lambda)\Psi_i(x,\lambda), \ x \in \Omega_i \,(i=1,2), \end{aligned}$$

ils sont indépendants de $x \in \Omega_i$ et ils sont des fonctions entières, où $\Omega_1 = [a,c]$,

$\Omega_2 =]c, b]$.

Si on prend en considération les équations (1-10), (1-12) avec un calcul court on obtient immédiatement

$$w_1(\lambda) = \lambda^2 w_2(\lambda).$$

On construit deux bases de solutions de l'équation (1-1)

$$\Phi(x,\lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x,\lambda), & x \in [a, c[, \\ \Phi_2(x,\lambda), & x \in]c, b]. \end{cases} \qquad \Psi(x,\lambda) = \begin{cases} \Psi_1(x,\lambda), & x \in [a, c[, \\ \Psi_2(x,\lambda), & x \in]c, b]. \end{cases}$$

En vertu des équations (1-10) et (1-12) ces solutions vérifient les deux conditions de transmission (1-4) et (1-5).

Le wronskien des fonctions $\Phi(x,\lambda)$ et $\Psi(x,\lambda)$ est indépendant de la variable x dans $[a, c[\cup]c, b]$ et il est une fonction entière pour chaque x fixé dans $[a, c[\cup]c, b]$.

Notons par $w(\lambda)$ le Wronskien des fonctions $\Phi(x,\lambda)$ et $\Psi(x,\lambda)$,

$$w(\lambda) = W(\Phi(x,\lambda), \Psi(x,\lambda)).$$

Il est clair que

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) = \lambda^2 w_2(\lambda).$$

Théorème 2 Les valeurs propres du problème (1-1)-(1-5) coincident avec les zéros de la fonction $w(\lambda)$.

Preuve : Soit $w(\lambda_0) = 0$. Nous montrerons que $\Psi(x,\lambda_0)$ est une fonction propre. Par définition de cette solution, $\Psi(x,\lambda_0)$ satisfait aux conditions aux limite (1-3). Puisque $w(\lambda_0) = 0$, les fonctions $\Phi_1(x,\lambda_0)$ et $\Psi_1(x,\lambda_0)$ sont linéairement dépendantes, i e

$$\Phi_1(x,\lambda_0) = k_1\Psi_1(x,\lambda_0) \qquad x \in [a,c],$$

pour $k_1 \neq 0$. Par conséquent, la fonction $\Psi(x,\lambda_0)$ satisfait aussi à la condition (1-2). Comme la solution $\Psi(x,\lambda_0)$ satisfait aux conditions de transmission (1-4) et (1-5), donc $\Psi(x,\lambda_0)$ est une fonction propre du problème (1-1)-(1-5) correspondante à la valeur propre λ_0.

Soit $u_0(x)$ une fonction propre correspondant à la valeur propre λ_0, mais nous supposons que $w(\lambda_0) \neq 0$. Alors $\Phi_1(x,\lambda_0)$ et $\Psi_1(x,\lambda_0)$, $\Phi_2(x,\lambda_0)$ et $\Psi_2(x,\lambda_0)$ seraient linéairement indépendants dans $[a,c]$ et $[c,b]$, respectivement. Alors la fonction $u_0(x)$ peut être représentée sous la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1\Phi_1(x,\lambda_0) + c_2\Psi_1(x,\lambda_0), \; x \in [a,c[, \\ c_3\Phi_2(x,\lambda_0) + c_4\Psi_2(x,\lambda_0), \; x \in]c,b]. \end{cases}$$

Où au moins une des constantes c_1, c_2, c_3, c_4 n'est pas nulle.

On applique les conditions de transmission (1-4) et (1-5) à cette représentation de $u_0(x)$ et on prend en considération les conditions initiales (1-10) et (1-12) pour $\Phi_2(x,\lambda_0)$ et $\Psi_1(x,\lambda_0)$ respectivement, nous obtenons :

$$\begin{cases} (c_1 - c_3)\Phi_1(c,\lambda_0) + (c_2 - c_4)\Psi_1(c,\lambda_0) = 0, \\ (c_1 - c_3)\Phi_1'(c,\lambda_0) + (c_2 - c_4)\Psi_1'(c,\lambda_0) = 0. \end{cases} \tag{1-13}$$

On considère ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $c_1 - c_3$ et $c_2 - c_4$ nous avons :

$$c_1 - c_3 = 0, \qquad c_2 - c_4 = 0.$$

Puisque le déterminant de (1-13) est égal à $w_1(\lambda)$ lequel n'est pas nul. Donc $c_1 = c_3$ et $c_2 = c_4$. Par conséquent la fonction propre $u_0(x)$ est représentée par :

$$u_0(x) = c_1\Phi(x, \lambda_0) + c_2\Psi(x, \lambda_0), \qquad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

On applique maintenant les conditions aux limites (1-2) et (1-3) à cette représentation et on prend en compte les conditions (1-9) et (1-11) pour $\Phi_1(x, \lambda_0)$ et $\Psi_2(x, \lambda_0)$, respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned} L_1(u_0(x)) &= c_1 L_1(\Phi(x, \lambda_0)) + c_2 L_1(\Psi(x, \lambda_0)) \\ &= c_2 L_1(\Psi(x, \lambda_0)) \\ &= c_2((-\alpha_1)\chi(a, \lambda_0) + \alpha_2\chi'(a, \lambda_0)) \\ &= c_2 w_1(\lambda_0) = 0, \end{aligned}$$

de la même façon, on obtient

$$L_2(u_0(x)) = c_1 w_2(\lambda_0) = 0.$$

Par conséquent, $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, puisque $w_1(\lambda_0) \neq 0$ et $w_2(\lambda_0) \neq 0$ par supposition, nous obtenons donc la contradiction avec $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, laquelle complète la démonstration.

Lemme 2 Soit $\lambda = s^2$. On a alors les équations intégrales suivantes pour k=0 et k=1.

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= \alpha_2\frac{d^k}{dx^k}\cos[s(x-a)]+\frac{1}{S}\alpha_1\frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-a)] \\ &+\frac{1}{S}\int_a^x\frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-y)]\,q(y)\,\phi_1(y,\lambda)\,dy,\end{aligned} \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \lambda^{-1}\phi_1(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos[s(x-c)] \\ &+\frac{1}{S}\lambda^{-1}\phi_1'(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-c)] \\ &+\frac{1}{S}\int_c^x\frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-y)]\,q(y)\,\phi_2(y,\lambda)\,dy.\end{aligned} \tag{1-15}$$

Preuve : Pour le prouver il suffit d'écrire $s^2\Phi_1(y,\lambda)+\Phi_1''(y,\lambda)$ au lieu de $q(y)\,\Phi_1(y,\lambda)$ dans le terme intégral de l'équation (1-14), et remplacer $s^2\Phi_2(y,\lambda)+\Phi_2''(y,\lambda)$ au lieu de $q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)$ dans le terme intégral de l'équation (1-15) et on intègre deux fois par parties.

Lemme 3 Soit $\lambda = s^2$. Alors, pour $|\lambda|\to\infty$, on a les égalités asymptotiques suivantes.

1) Pour $\alpha_2 \neq 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda)=\alpha_2\frac{d^k}{dx^k}\cos[s(x-a)]+O\left(|s|^{k-1}e^{|t|(x-a)}\right), \tag{1-16}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda)=s^{-2}\alpha_2\frac{d^k}{dx^k}\cos[s(x-a)]+O\left(|s|^{k-3}e^{|t|(x-a)}\right). \tag{1-17}$$

2) Pour $\alpha_2 = 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda)=\alpha_1 s^{-1}\frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-a)]+O\left(|s|^{k-2}e^{|t|(x-a)}\right), \tag{1-18}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) = s^{-3}\alpha_1 \frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-a)] + O\left(|s|^{k-4} e^{|t|(x-a)}\right). \tag{1-19}$$

Preuve : La formule asymptotique de $\Phi_1(x,\lambda)$ à été obtenue de la même façon que [4, lemme 1] et [18, lemme 1.7] mais elle est semblable à la formule de la solution $\Phi_2(x,\lambda)$ que nous formulerons sans preuve.

Soit $\alpha_2 \neq 0$. On substitue (1-16) dans (1-15) pour k=0, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Phi_2(x,\lambda) &= s^{-2}\alpha_2 \cos[s(c-a)]\cos[s(x-c)] \\ &\quad -\alpha_2 s^{-2}\sin[s(c-a)]\sin[s(x-c)] \\ &\quad +\frac{1}{S}\int_c^x \sin[s(x-y)]\, q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)\,dy \\ &\quad +O\left(|s|^{-3} e^{|t|(x-a)}\right).\end{aligned} \tag{1-20}$$

On multiplie par $|s|^2 e^{-|t|(x-a)}$ et on note

$$F(x,\lambda) = |s|^2 e^{-|t|(x-a)}\Phi_2(x,\lambda),$$

$$\Phi_2(y,\lambda) = F(y,\lambda)\,|s|^{-2} e^{|t|(y-a)}.$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
F(x,\lambda) &= |s|^2 e^{-|t|(x-a)} s^{-2}\alpha_2 \cos[s(c-a)]\cos[s(x-c)] \\
&- |s|^2 e^{-|t|(x-a)}\alpha_2 s^{-2}\sin[s(c-a)]\sin[s(x-c)] \\
&+\frac{1}{S}\int_c^x \sin[s(x-y)]\,q(y)\,F(y,\lambda)\,|s|^{-2}e^{-|t|(x-y)}dy + O\left(\frac{1}{S}\right).
\end{aligned}
$$

On pose $M(\lambda) = \max\limits_{x\in[c,b]} |F(x,\lambda)|$ on obtient

$$
M(\lambda) \leq |\alpha_2| + \frac{M_0}{|s|},
$$

pour $M_0 > 0$. Par conséquent $M(\lambda) = O(1)$ quand $|\lambda| \to \infty$, donc

$$
\Phi_2(x,\lambda) = O\left(|s|^{-2} e^{|t|(x-a)}\right). \tag{1-21}
$$

On substitue (1-21) dans (1-20) cela nous donne (1-17) pour le cas k=0. Pour le cas k=1 on applique le même procédé .

La preuve de la formule (1-19) est semblable à celle de (1-17).

Théorème 3 Soit $\lambda = s^2$, pour la représentation asymptotique des fonctions $w(\lambda)$ on a

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$
w(\lambda) = \beta_2'\alpha_2 s \sin[s(b-a)] + O\left(e^{|t|(b-a)}\right). \tag{1-22}
$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$
w(\lambda) = -\beta_2'\alpha_1 \cos[s(b-a)] + O\left(|s|^{-1} e^{|t|(b-a)}\right). \tag{1-23}
$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$w(\lambda) = \beta_1' \alpha_2 \cos[s(b-a)] + O\left(|s|^{-1} e^{|t|(b-a)}\right). \tag{1-24}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$w(\lambda) = \beta_1' \alpha_1 s^{-1} \sin[s(b-a)] + O\left(|s|^{-2} e^{|t|(b-a)}\right). \tag{1-25}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1, posons $x = b$ dans la fonction $w(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \Phi_2(b,\lambda)\Psi_2'(b,\lambda) - \Phi_2'(b,\lambda)\Psi_2(b,\lambda) \\ &= \Phi_2(b,\lambda)(\beta_1 + \lambda\beta_1') - \Phi_2'(b,\lambda)(\beta_2 + \lambda\beta_2'). \end{aligned}$$

En substituont (1-17) dans $w(\lambda)$ en obtient (1-22). Pour les autres cas on opère de la même façon.

Corollaire 3 Les valeurs propres du problème (1-1)-(1-5) sont bornées inférieurement.

Preuve : posons $s = it$ $(t > 0)$ dans les formules (1-22)-(1-23)-(1-24)-(1-25) il suit que $w(-t^2) \to \infty$ quand $t \to \infty$. Par conséquent $w(\lambda) \neq 0$ pour λ négatif et suffisamment grand en module.

Preuve : Soit $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$. On note par $\omega_1(s)$ et $\omega_2(s)$ le premier et le second terme respectivement de (1-22).

Nous appliquerons le théorème de Rouche dans un contour suffisamment grand, il suit que $\omega_1(s)$ et $\omega_2(s)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du contour. D'où si $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ sont les zéros de $\omega_1(s)$ et $\lambda_n = s_n^2$, nous avons

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right) n + \delta_{n,}$$

pour n suffisamment grand, et $|\delta_n| < \frac{\pi}{2(b-a)}$ pour n suffisamment grand. En remplaçant dans (1-22) nous obtenons

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui complète la preuve du cas 1. Les preuves des autres cas sont semblables.

1.5 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES

Théorème 5 Les fonctions propres du problème (1-1)-(1-5) admettent les représentations asymptotiques suivantes :

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\pi n \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, c[, \\ \left[\left(\frac{\pi}{(b-a)}\right) n\right]^{-2} \alpha_2 \cos\left[\pi n \frac{x-a}{b-a}\right] + O\left(n^{-3}\right), & x \in]c, b]. \end{cases}$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda_n) = \begin{cases} \alpha_1 \left[\left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \sin\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & x \in [a,c[, \\ \left[\frac{\pi}{(b-a)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-3} \alpha_1 \sin\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(n^{-4}\right), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda_n) = \begin{cases} \alpha_2 \cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a,c[, \\ \left[\left(\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(b-a)}\right)\right]^{-2} \alpha_2 \cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x-a}{b-a}\right] + O\left(n^{-3}\right), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2 = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda_n) = \begin{cases} \alpha_1 \left[\left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)(n+1)\right]^{-1} \sin\left[\pi(n+1)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & x \in [a,c[, \\ \left[\left(\frac{\pi}{(b-a)}(n+1)\right)\right]^{-3} \alpha_1 \sin\left[\pi(n+1)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(n^{-4}\right), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1.

On trouve avec un simple calcul et en utiliseront (1-26)-(1-17) que :

$\cos[s_n(x-a)] = \cos\left[\frac{\pi}{(b-a)}n(x-a)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right),$

$(s_n)^{-2} = \left[\frac{\pi}{(b-a)}n\right]^{-2} + O\left(n^{-4}\right),$

donc

$$(s_n)^{-2}\cos[s_n(x-a)] = \left[\frac{\pi}{(b-a)}n\right]^{-2}\cos\left[\frac{\pi}{(b-a)}n(x-a)\right] + O\left(n^{-3}\right).$$

Finalement on a

$$\Phi_2(x,\lambda_n) = \alpha_2\left[\frac{\pi}{(b-a)}n\right]^{-2}\cos\left[\pi n\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(n^{-3}\right).$$

De la même facons on trouve

$$\Phi_1(x,\lambda_n) = \alpha_2 \cos\left[\pi n \tfrac{(x-a)}{(b-c)}\right] + O\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

Les preuves des autres se font de manière identique.

Chapitre 2

PROBLEME DE STURM-LIOUVILLE A COEFFICIENT DISCONTINU AVEC PARAMETRE SPECTRAL DANS LES CONDITIONS AUX LIMITES.

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on aborde l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficient discontinu, contenant le paramètre spectral uniquement dans les conditions aux limites. Tout d'abord on donne la formulation opératorielle du problème considéré dans un espace de Hilbert adéquat, dans lequel l'opérateur engendré par le problème en question est symétrique. Par la suite on établit le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres. En plus on donne les formules asymptotiques des fonctions propres normalisées. Un cas particulier d'un tel problème à été traité dans [3] et [13].

Soit l'équation suivante

$$\tau u = -u''(x) + q(x)\, u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a, c[\, \cup\,]c, b] \ , \tag{2-1}$$

la condition aux limites en $x = a$

$$L_1(u) = \lambda\left(\alpha_1' u(a) - \alpha_2' u'(a)\right) - \left(\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a)\right) = 0, \tag{2-2}$$

la condition aux limites en $x = b$

$$L_2(u) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right) + \left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = 0, \tag{2-3}$$

et les conditions de transmission au point de discontinuité $x = c$

$$L_3(u) = u(c-0) - \delta u(c+0) = 0, \tag{2-4}$$

$$L_4(u) = u'(c-0) - \delta u'(c+0) = 0, \tag{2-5}$$

λ est un paramètre complexe, $q(x)$ est une fonction réelle continue dans $[a, c[$ et $]c, b]$ et elle a des limites finies quand $x \to c \pm 0$; p_i, α_i, α_i', β_i, β_i' $(i = 1, 2)$ sont des nombres réels tels que :

$|\alpha_1'| + |\alpha_2'| \neq 0$,

$|\beta_1'| + |\beta_2'| \neq 0$, et nous supposons que $\delta > 0$ et

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \rho_2 = \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_1 \\ \beta_2' & \beta_2 \end{vmatrix} > 0.$$

2.2 FORMULATION OPERATORIELLE

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert $H = L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^2$ et un opérateur symétrique $A : H \to H$ tel que (2-1)-(2-5) peut être considéré comme problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Donc, dans l'espace de Hilbert $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^2$ nous définissons le produit scalaire :

$$\langle F, G \rangle = \int_a^{c-0} f(x)\overline{g(x)}dx + \delta^2 \int_{c+0}^{b} f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{1}{\rho_1} f_1\overline{g_1} + \frac{\delta^2}{\rho_2} f_2\overline{g_2},$$

pour $\quad F = (f(x), f_1, f_2) \quad , \qquad G = (g(x), g_1, g_2)$.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} B_a(u) &= \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a), \\ B_a'(u) &= \alpha_1' u(a) - \alpha_2' u'(a), \\ B_b(u) &= \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b), \\ B_b'(u) &= \beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b). \end{aligned}$$

Dans l'espace de Hilbert H considérons l'opérateur A de domaine de définition :

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} F = (f(x), f_1, f_2) : \; f(x) \;\; et \;\; f'(x) \;\; sont\ absolument\ continues \\ dans \;\; [a, c[\cup]c, b] \;\; et\ ont\ des\ limites\ finies\ quand\ x \to c \pm 0, \\ \tau f \in L_2[a, b], \;\; L_i f = 0, \;\; i = 3, 4; \quad f_1 = B'_a(f), \;\; f_2 = B'_b(f). \end{array} \right\}$$

$$AF = (\tau f, B_a(f), -B_b(f)).$$

D'où le problème considéré (2-1)-(2-5) se ramène au problème suivant :

$$AF = \lambda F.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème (2-1)-(2-5) sont définies comme valeurs propres et les premières composantes des vecteurs propres de l'opérateur A respectivement.

Théorème 1 L'opérateur A est symétrique.

Preuve : Soient F, G $\in D(A)$.

Pour montrer que A est symétrique il suffit de montrer que $\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle$.

En intégrons deux fois par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle AF, G\rangle &= \langle F, AG\rangle + W(f, \overline{g}; c-0) - W(f, \overline{g}; a) + \delta^2 W(f, \overline{g}; b) \\ &\quad -\delta^2 W(f, \overline{g}; c+0) + \frac{1}{\rho_1}\left(B_a(f) B'_a(\overline{g}) - B'_a(f) B_a(\overline{g})\right) \\ &\quad +\frac{\delta^2}{\rho_2}\left(B'_b(f) B_b(\overline{g}) - B_b(f) B'_b(\overline{g})\right), \end{aligned} \tag{2-6}$$

où, $W(f, g; x)$ le wronskien des fonctions f et g :

$$W(f,g;x) = f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x).$$

Puisque f et g vérifient les conditions aux limites (2-2) et (2-3) nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1}\left(B_a(f)\,B'_a(\overline{g}) - B'_a(f)\,B_a(\overline{g})\right) &= W(f,\overline{g};a), \\ \frac{1}{\rho_2}\left(B'_b(f)\,B_b(\overline{g}) - B_b(f)\,B'_b(\overline{g})\right) &= -W(f,\overline{g};b). \end{aligned} \tag{2-7}$$

Les conditions de transmission (2-4) et (2-5) donnent

$$W(f,\overline{g};c-0) = \delta^2 W(f,\overline{g};c+0). \tag{2-8}$$

Finalement en substituant (2-7) et (2-8) dans (2-6) nous obtenons

$$\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle \qquad (F, G \in D(A)),$$

donc A est symétrique.

Corollaire 1 Les valeurs propres du problème (2-1)-(2-5) sont réelles.

Nous pouvons supposer maintenant que toutes les fonctions propres du problème (2-1)-(2-5) sont réelles.

Corollaire 2 Soit $\lambda_1$et $\lambda_2$deux valeurs propres distinctes du problème (2-1)-(2-5). Alors les fonctions propres correspondantes $u_1$et u_2 sont orthogonal i.e

$$\int_a^{c-0} u_1(x)\,u_2(x)\,dx + \delta^2 \int_{c+0}^{b} u_1(x)\,u_2(x)\,dx + \frac{1}{\rho_1} B'_a(u_1)\,B'_a(u_2) + \frac{\delta^2}{\rho_2} B'_b(u_1)\,B'_b(u_2) = 0.$$

2.3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU SYSTEME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS

Pour la suit, nous avons besoin du lemme suivant, qui peut être prouvé par la même technique comme dans la preuve de théorème 1.5 dans [18].

Lemme 1 Soit $q(x)$ une fonction réelle continue dans $[a,b]$ et $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ des fonctions entières données. Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation

$$\tau u = -u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a,b],$$

a une solution unique $u = u(x,\lambda)$ qui satisfait aux conditions initiales

$$u(a) = f(\lambda),\ u'(a) = g(\lambda) \quad (\text{où } u(b) = f(\lambda),\ u'(b) = g(\lambda)).$$

Pour chaque x fixé dans $[a,b]$, $u(x,\lambda)$ est une fonction entière en λ.

Soit $\phi_{1\lambda}(x) = \phi_1(x,\lambda)$ la solution de l'équation (2-1) dans $[a,c]$, satisfait aux conditions initiales

$$u(a) = -\alpha_2 + \lambda\alpha_2',\quad u'(a) = -\alpha_1 + \lambda\alpha_1'. \tag{2-9}$$

Après avoir défini cette solution nous pouvons définir la solution $\phi_{2\lambda}(x) = \phi_2(x,\lambda)$ de l'équation (2-1) dans $[c,b]$, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(c) &= \delta^{-1}\phi_1(c,\lambda), \\ u'(c) &= \delta^{-1}\phi_1'(c,\lambda). \end{aligned} \tag{2-10}$$

Remarque 1 La fonction $\phi_1(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (2-2), et $\varphi_2(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (2-4) et (2-5).

De la même manière nous devons définir la solution, $\chi_{2\lambda} = \chi_2(x, \lambda)$ de l'équation (2-1) dans $[c, b]$, avec les conditions initiales

$$u(b) = \beta_2 + \lambda\beta_2', \quad u'(b) = \beta_1 + \lambda\beta_1', \tag{2-11}$$

et la solution $\chi_{1\lambda} = \chi_1(x, \lambda)$ de l'équation (2-1) dans $[a, c]$ avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(c) &= \delta\chi_2(x, \lambda), \\ u'(c) &= \delta\chi_2'(c, \lambda). \end{aligned} \tag{2-12}$$

Remarque 2 La fonction $\chi_2(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (2-3), et $\chi_1(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (2-4) et (2-5).

Nous considérons les wronskiens

$$\begin{aligned} w_i &= W_\lambda(\varphi_i, \chi_i, x) \\ &= \phi_i(x, \lambda)\chi_i'(x, \lambda) - \phi_i'(x, \lambda)\chi_i(x, \lambda), \ x \in \Omega_i \, (i = 1, 2), \end{aligned}$$

ils sont indépendants de $x \in \Omega_i$ et ils sont des fonctions entières, où $\Omega_1 = [a, c]$, $\Omega_2 = [c, b]$.

On prend en considération les équations (2-10), (2-12) avec un calcul court on obtient :

$$w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda).$$

On construit deux bases de solutions de l'équation (2-1)

$$\phi(x,\lambda) = \begin{cases} \phi_1(x,\lambda), & x \in [a,c[, \\ \phi_2(x,\lambda), & x \in]c,b]. \end{cases} \qquad \chi(x,\lambda) = \begin{cases} \chi_1(x,\lambda), & x \in [a,c[, \\ \chi_2(x,\lambda), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

En vertu des équations (2-10) et (2-12) ces solutions vérifient les deux conditions de transmission (2-4) et (2-5).

Le wronskien des fonctions $\phi(x,\lambda)$ et $\chi(x,\lambda)$ est indépendant de la variable x dans $[a,c[\cup]c,b]$ et il est une fonction entière pour chaque x fixé dans $[a,c[\cup]c,b]$.

Notons par $w(\lambda)$ le Wronskien des fonctions $\phi(x,\lambda)$ et $\chi(x,\lambda)$,

$$w(\lambda) = W(\phi(x,\lambda), \chi(x,\lambda)).$$

Il est clair que

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda).$$

Théorème 2 Les valeurs propres du problème (2-1)-(2-5) coincident avec les zéros de la fonction $w(\lambda)$.

Preuve : Soit $w(\lambda_0) = 0$. Nous montrerons que $\chi(x,\lambda_0)$ est une fonction propre. Par définition de cette solution, $\chi(x,\lambda_0)$ satisfait aux conditions aux limite (2-3). Puisque $w(\lambda_0) = 0$, les fonctions $\phi_1(x,\lambda_0)$ et $\chi_1(x,\lambda_0)$ sont linéairement dépandantes, i e

$$\phi_1(x,\lambda_0) = k_1 \chi_1(x,\lambda_0) \qquad x \in [a,c],$$

pour $k_1 \neq 0$. Par conséquent, la fonction $\chi(x, \lambda_0)$ satisfait aussi à la condition (2-2). Comme la solution $\chi(x, \lambda_0)$ satisfait aux conditions de transmission (2-4) et (2-5), nous avons donc $\chi(x, \lambda_0)$ est une fonction propre du problème (2-1)-(2-5) correspondante à la valeur propre λ_0.

Soit $u_0(x)$ une fonction propre correspondant à la valeur propre λ_0, mais nous supposons que $w(\lambda_0) \neq 0$. Alors $\phi_1(x, \lambda_0)$ et $\chi_1(x, \lambda_0)$, $\phi_2(x, \lambda_0)$ et $\chi_2(x, \lambda_0)$ seraient linéairement indépendants dans $[a, c]$ et $[c, b]$, respectivement. Alors la fonction $u_0(x)$ peut être représentée sous la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1\phi_1(x, \lambda_0) + c_2\chi_1(x, \lambda_0), \; x \in [a, c[, \\ c_3\phi_2(x, \lambda_0) + c_4\chi_2(x, \lambda_0), \; x \in]c, b], \end{cases}$$

où au moins une des constantes c_1, c_2, c_3, c_4 n'est pas nulle.

On applique les conditions de transmission (2-4) et (2-5) à cette représentation de $u_0(x)$ et on prend en considération les conditions initiales (2-10) et (2-12) pour $\phi_2(x, \lambda_0)$ et $\chi_1(x, \lambda_0)$ respectivement, nous obtenons

$$\begin{cases} (c_1 - c_3)\phi_1(c, \lambda_0) + (c_2 - c_4)\chi_1(c, \lambda_0) = 0, \\ (c_1 - c_3)\phi_1'(c, \lambda_0) + (c_2 - c_4)\chi_1'(c, \lambda_0) = 0. \end{cases} \tag{2-13}$$

On considér ces égalités comme un système homogène d'équations linéaires des variables $c_1 - c_3$ et $c_2 - c_4$ nous avons

$$c_1 - c_3 = 0, \qquad c_2 - c_4 = 0.$$

Puisque le déterminant de (2-13) égal à $w_1(\lambda) \neq 0$. Donc $c_1 = c_3$ et $c_2 = c_4$. Par conséquent la fonction propre $u_0(x)$ est représentée par :

$$u_0(x) = c_1\phi(x, \lambda_0) + c_2\chi(x, \lambda_0), \qquad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

On applique maintenant les conditions aux limites (2-2) et (2-3) à cette représentation et on prend en compte les conditions (2-9) et (2-11) pour $\phi_1(x, \lambda_0)$ et $\chi_2(x, \lambda_0)$, respectivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} L_1(u_0(x)) &= c_1 L_1(\phi(x, \lambda_0)) + c_2 L_1(\chi(x, \lambda_0)) \\ &= c_2 L_1(\chi(x, \lambda_0)) \\ &= c_2((-\alpha_1 + \lambda\alpha_1')\chi(a, \lambda_0) - (-\alpha_2 + \lambda\alpha_2')\chi'(a, \lambda_0)) \\ &= c_2 w_1(\lambda_0) = 0, \end{aligned}$$

de la même façon, on obtient

$$L_2(u_0(x)) = c_1 w_2(\lambda_0) = 0.$$

Par conséquent, $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, puisque $w_1(\lambda_0) \neq 0$ et $w_2(\lambda_0) \neq 0$. Nous obtenons donc la contradiction avec $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, laquelle complète la preuve.

Lemme 2 Soit $\lambda = s^2$. Alors on a les équations intégrales suivantes pour k=0 et k=1 :

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_1(x,\lambda) = \left(-\alpha_2+s^2\alpha_2'\right)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[s(x-a)\right] \tag{2-14}$$
$$-\frac{1}{S}\left(-\alpha_1+s^2\alpha_1'\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[s(x-a)\right]$$
$$+\frac{1}{S}\int_a^x\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[s(x-y)\right]q(y)\,\phi_1(y,\lambda)\,dy,$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_2(x,\lambda) = \delta^{-1}\phi_1(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[s(x-c)\right] \tag{2-15}$$
$$+\frac{1}{S}\delta^{-1}\phi_1'(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[s(x-c)\right]$$
$$+\frac{1}{S}\int_c^x\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[s(x-y)\right]q(y)\,\phi_2(y,\lambda)\,dy.$$

Preuve : Pour le prouver il suffit de remplacer $s^2\phi_1(y,\lambda)+\phi_1''(y,\lambda)$ au lieu de $q(y)\phi_1(y,\lambda)$ dans le terme intégrale de l'équation (2-14), et remplacer $s^2\phi_2(y,\lambda)+\phi_2''(y,\lambda)$ au lieu de $q(y)\phi_2(y,\lambda)$ dans le terme intégrale de l'équation (2-15) et on intègre deux fois par parties.

Lemme 3 Soit $\lambda=s^2$. Alors, pour $|\lambda|\to\infty$, on a les égalités asymptotiques suivantes.

1) Pour $\alpha_2'\neq 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_1(x,\lambda)=s^2\alpha_2'\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[s(x-a)\right]+O\left(|s|^{k+1}e^{|t|(x-a)}\right), \tag{2-16}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_2(x,\lambda) = \delta^{-1}s^2\alpha_2'\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[s(x-a)\right] \tag{2-17}$$
$$+O\left(|s|^{k+1}e^{|t|(x-a)}\right).$$

2) Pour $\alpha_2' = 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_1(x,\lambda) = -\alpha_1' s \frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-a)] + O\left(|s|^k e^{|t|(x-a)}\right), \tag{2-18}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\phi_2(x,\lambda) &= -\delta^{-1}\alpha_1' s \frac{d^k}{dx^k}\sin[s(x-a)] \\ &\quad + O\left(|s|^k e^{|t|(x-a)}\right). \end{aligned} \tag{2-19}$$

Preuve : La formule asymptotique de $\phi_1(x,\lambda)$ a été obtenue de la même façon que [4, lemme 1] et [18, lemme 1.7] mais elle est semblable à la formule de la solution $\phi_2(x,\lambda)$ que nous formulerons sans preuve.

Soit $\alpha_2' \neq 0$. On substitue (2-16) dans (2-15) pour k=0, nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi_2(x,\lambda) &= \delta^{-1}s^2\alpha_2' \cos[s(c-a)]\cos[s(x-c)] \\ &\quad -\delta^{-1}s^2\alpha_2' \sin[s(c-a)]\sin[s(x-c)] \\ &\quad +\frac{1}{S}\int_c^x \sin[s(x-y)]\,q(y)\,\phi_2(y,\lambda)\,dy \\ &\quad +O\left(|s|\,e^{|t|(x-a)}\right). \end{aligned} \tag{2-20}$$

On multiplie par $|s|^{-2}e^{-|t|(x-a)}$ et on note

$$F(x,\lambda) = |s|^{-2}e^{-|t|(x-a)}\phi_2(x,\lambda),$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
F(x,\lambda) &= |s|^{-2} e^{-|t|(x-a)} (\delta^{-1} s^2 \alpha_2' \cos[s(c-a)] \cos[s(x-c)] \\
&\quad -\delta^{-1} s^2 \alpha_2' \sin[s(c-a)] \sin[s(x-c)] \\
&\quad + \frac{1}{S} \int_c^x \sin[s(x-y)]\, q(y)\, \phi_2(y,\lambda)\, dy) + O\left(\frac{1}{S}\right).
\end{aligned}
$$

On pose $M(\lambda) = \max_{x\in[c,b]} |F(x,\lambda)|$ en obtient

$$
M(\lambda) \leq \left|\delta^{-1}\alpha_2'\right| + \frac{M_0}{|s|},
$$

pour $M_0 > 0$. Par conséquent $M(\lambda) = O(1)$ quand $|\lambda| \to \infty$,donc

$$
\varphi_2(x,\lambda) = O\left(|s|^2 e^{|t|(x-a)}\right). \tag{2-21}
$$

On substitue (2-21) dans (2-20) cela nous donne (2-17) pour le cas k=0. le cas k=1 en appliquant la même procédure.

La preuve de la formule (2-19) est semblable à celle de (2-17).

Théorème 3 Soit $\lambda = s^2$, pour la représentation asymptotique des fonctions $w(\lambda)$ on a :

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$
w(\lambda) = \beta_2' \alpha_2' s^5 \delta \sin[s(b-a)] + O\left(|s|^4 e^{|t|(b-a)}\right). \tag{2-22}
$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$
w(\lambda) = \beta_2' \alpha_1' s^4 \delta \cos[s(b-a)] + O\left(|s|^3 e^{|t|(b-a)}\right). \tag{2-23}
$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$w(\lambda) = \beta_1'\alpha_2's^4\delta\cos\left[s(b-a)\right] + O\left(|s|^3 e^{|t|(b-a)}\right). \tag{2-24}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$w(\lambda) = -\beta_1'\alpha_1's^3\delta\sin\left[s(b-a)\right] + O\left(|s|^2 e^{|t|(b-a)}\right). \tag{2-25}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1, posons $x = b$ dans la fonction $w(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \delta^2\left(\phi_2(b,\lambda)\chi_2'(b,\lambda) - \phi_2'(b,\lambda)\chi_2(b,\lambda)\right) \\ &= \delta^2\left(\phi_2(b,\lambda)(\beta_1 + \lambda\beta_1') - \phi_2'(b,\lambda)(\beta_2 + \lambda\beta_2')\right). \end{aligned}$$

En substituons (2-17) dans $w(\lambda)$ on obtient (2-22). Pour les autres cas on procède de la même façon.

Corollaire 3 Les valeurs propres du problème (2-1)-(2-5) sont bornées inférieurement.

preuve : posons $s = it$ $(t > 0)$ dans les formules (2-22)-(2-23)-(2-24)-(2-25), on obtient $w(-t^2) \to \infty$ quand $t \to \infty$. Par conséquent $w(\lambda) \neq 0$ pour λ négatif et suffisamment grand en module.

2.4 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES

Nous sommes maintenant prêts à trouver les valeurs propres du problème considéré (2-1)-(2-5).

Puisque les valeurs propres coincident avec les zéros des fonctions entières $w(\lambda)$, il s'ensuit qu'elles n'ont aucune limite finie. De plus, toutes les valeurs propres sont réelles et bornées inférieurement d'après les corollaires 1 et 3. Par conséquent nous pouvons les renuméroter comme $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$

Théorème 4 $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$. Alors, les formules asymptotiques des valeurs propres du problème (2-1)-(2-5) ont la représentation suivantes :

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)(n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2-26}$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2-27}$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2-28}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)(n-1) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2-29}$$

Preuve : Soit $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$. On note par $\omega_1(s)$ et $\omega_2(s)$ le premier et le second terme respectivement de (2-22).

Nous appliquerons le théorème de Rouche dans un contour suffisamment grand, il suit que $\omega_1(s)$ et $\omega_2(s)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du contour. D'où si $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ sont les zéros de $\omega_1(s)$ et $\lambda_n = s_n^2$, nous avons

$$s_n = \left(\frac{\pi}{(b-a)}\right)(n-2) + \delta_n,$$

pour n suffisamment grand, et $|\delta_n| < \frac{\pi}{2(b-a)}$ pour n suffisamment grand. En remplaçant dans (2-22) nous obtenons

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui complète la preuve du cas 1. Les preuves des autres cas sont semblables.

2.5 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES

Théorème 5. Les fonctions propres du problème (2-1)-(2-5) admettent les représentations asymptotiques suivantes :

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$\phi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \alpha_2' \left[\pi\left(\frac{1}{b-a}\right)(n-2)\right]^2 \cos\left[\pi(n-2)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n), & x \in [a, c[, \\ \delta^{-1}\left[\pi\frac{1}{(b-a)}(n-2)\right]^2 \acute{\alpha}_2 \cos\left[\pi(n-2)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n), & x \in]c, b]. \end{cases} \tag{2-30}$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} -\alpha_1' \left(\pi \frac{1}{(b-a)}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \sin\left[\pi \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(1), & x \in [a, c[, \\ -\left(\pi \frac{1}{(b-a)} \left(n - \frac{3}{2}\right)\right) \delta^{-1} \alpha_1' \sin\left[\pi \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right)\right] + O(1), & x \in]c, b]. \end{cases} \tag{2-31}$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \alpha_2' \left[\pi \frac{1}{(b-a)} \left(n - \frac{3}{2}\right)\right]^2 \cos\left[\pi \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n), & x \in [a, c[, \\ \left[\pi \frac{1}{(b-a)} \left(n - \frac{3}{2}\right)\right]^2 \delta^{-1} \alpha_2' \cos\left[\pi \left(n - \frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n), & x \in]c, b]. \end{cases} \tag{2-32}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} -\alpha_1' \left(\pi \frac{1}{(b-a)}\right) (n-1) \sin\left[\pi (n-1) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(1), & x \in [a, c[, \\ -\left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-1)\right] \delta^{-1} \alpha_1' \sin\left[\pi (n-1) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(1), & x \in]c, b]. \end{cases} \tag{2-33}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1.

On trouve avec un simple calcul et on utilisant (2-26)-(2-16) que :

$$\cos\left[s_n (x-a)\right] = \cos\left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-2)(x-a)\right] + O\left(\tfrac{1}{n}\right),$$

$$(s_n)^2 = \left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-2)\right]^2 + O(1),$$

donc

$$(s_n)^2 \cos\left[s_n (x-a)\right] = \left[\left(\pi \frac{1}{(b-a)}\right)(n-2)\right]^2 \cos\left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-2)(x-a)\right] + O(n).$$

Finalement on a

$$\varphi_1(x, \lambda_n) = \alpha_2' \left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-2)\right]^2 \cos\left[\pi (n-2) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n).$$

De lamême façons on trouve

$$\varphi_2(x, \lambda_n) = \delta^{-1} \left[\pi \frac{1}{(b-a)} (n-2)\right]^2 \acute{\alpha}_2 \cos\left[\pi (n-2) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n).$$

Les preuves des autres cas se font de la même façon.

2.6 LES FORMULES ASYMPTOTIQUES POUR LES NORMES DES VECTEURS PROPRES

Dans cette section nous obtenons des normes des vecteurs propres

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi(x, \lambda_n) \\ B'_a(\varphi(x, \lambda_n)) \\ B'_b(\varphi(x, \lambda_n)) \end{pmatrix}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \dots . \tag{2-34}$$

Il est clair que les trois composantes de Φ_n sont les vecteurs propres de l'opérateur A correspondant aux valeurs propres λ_n. Pour $n \neq m$,

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = 0, \qquad n, m = 0, 1, 2, \dots ;$$

puisque A est symétrique. On note

$$\psi_n(x) = \frac{\phi(x, \lambda_n)}{\|\Phi_n\|},$$

il est clair que

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \psi(x, \lambda_n) \\ B'_a(\psi(x, \lambda_n)) \\ B'_b(\psi(x, \lambda_n)) \end{pmatrix}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \dots , \tag{2-35}$$

sont orthonormés.

$$A\Psi_n = \lambda_n \Psi_n \text{ et } \langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \delta_{nm},$$

Lemme 4 On à les égalités asymptotiques suivantes :

1) Pour $\alpha_2' \neq 0$

$$B_a' \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(n\right), \qquad B_b' \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(n\right). \tag{2-36}$$

2) Pour $\alpha_2' = 0$

$$B_a' \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(1\right), \qquad B_b' \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(1\right). \tag{2-37}$$

Preuve : De l'égalité $w\left(\lambda_n\right) = 0$ on a

$$\lambda_n B_a' \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) - B_a \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = 0. \tag{2-38}$$

Soit $\alpha_2' \neq 0$. Alors de (2-16) nous obtenons

$$B_a \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = \alpha_1 \phi_1 \left(a, \lambda_n\right) - \alpha_2 \phi_1' \left(a, \lambda_n\right) = \alpha_1 O\left(\left|s_n\right|^2\right) - \alpha_2 O\left(\left|s_n\right|^3\right).$$

D'aprés le théorème 4 nous avons

$$B_a \left(\phi \left(x, \lambda_n\right)\right) = O\left(n^3\right). \tag{2-39}$$

On substitue (2-39) dans (2-38) nous avons

$$B'_a(\phi(x,\lambda_n)) = O(n).$$

Les preuves des autres cas se font de la même façon.

Théorème 6 Les formules asymptotiques des normes des vecteurs propres Φ_n sont données par :

Cas 1 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$

$$\|\Phi_n\| = \frac{|\alpha'_2|}{|\delta|}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^2 \sqrt{\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}} + O(n). \tag{2-40}$$

Cas 2 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 = 0$

$$\|\Phi_n\| = \frac{|\alpha'_1|}{|\delta|}\left[\pi\left(\frac{n-\frac{3}{2}}{b-a}\right)\right] \sqrt{\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}} + O(1). \tag{2-41}$$

Cas 3 : si $\beta'_2 = 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$

$$\|\Phi_n\| = \frac{|\alpha'_2|}{|\delta|}\left[\pi\left(\frac{n-\frac{3}{2}}{b-a}\right)\right]^2 \sqrt{\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}} + O(n). \tag{2-42}$$

Cas 4 : si $\beta'_2 = 0$ et $\alpha'_2 = 0$

$$\|\Phi_n\| = \frac{|\alpha'_1|}{|\delta|}\left[\pi\left(\frac{n-1}{b-a}\right)\right] \sqrt{\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}} + O(1). \tag{2-43}$$

Preuve : Soit $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$. Dans ce cas, en utilisant (2-30) nous avons

$$\int_a^c (\phi(x,\lambda_n))^2 dx = \alpha_2'^2 \int_a^c \left[\left[\pi\frac{n-2}{b-a}\right]^2 \cos\left[\pi(n-2)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O(n)\right]^2 dx$$

$$= \frac{\alpha_2'^2}{2}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4 \int_a^c (1+\cos(2\pi(n-2)\frac{(x-a)}{(b-a)}))dx + O(n^3)$$

$$= \frac{\alpha_2'^2}{2}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4 (c-a) + O(n^3).$$

De le même façon nous avons :

$$\int_c^b (\phi(x.\lambda_n))^2 dx = \frac{\alpha_2'^2}{2\delta^2}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4 (b-c) + O(n^3).$$

Il suit que :

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_a^b (\phi(x,\lambda_n))^2 dx + \frac{1}{\rho_1}(B_a'(\phi(x,\lambda_n)))^2 + \frac{1}{\rho_2}(B_b'(\phi(x,\lambda_n)))^2,$$

et en utilisont (2-36) on obtient

$$\|\Phi_n\|^2 = \frac{\alpha_2'^2}{2}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4 (c-a) + \frac{\alpha_2'^2}{2\delta^2}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4 (b-c) + O(n^3),$$

d'où

$$\|\Phi_n\| = \sqrt{\frac{\alpha_2'^2}{\delta}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^4\left[\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}\right] + O(n^3)}$$

$$= \frac{|\alpha_2'|}{|\delta|}\left[\pi\left(\frac{n-2}{b-a}\right)\right]^2\sqrt{\frac{\delta^2(c-a)+b-c}{2}} + O(n).$$

Les preuves des autres cas se font de la même manière.

2.7 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES NORMALISEES

Théorème 7 Les premières composantes des vecteurs propres normalisées, pour $\lambda \to \infty$, ont les représentations asymptotiques suivantes.

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$

$$v_n(x) = \begin{cases} \delta \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \cos\left[\pi (n-2) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in [a, c[, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \cos\left[\pi (n-2) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in]c, b]. \end{cases}$$

Cas 2 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' = 0$

$$v_n(x) = \begin{cases} \delta \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \sin\left[\pi \left(n-\frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in [a, c[, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \sin\left[\pi \left(n-\frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in]c, b]. \end{cases}$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' \neq 0$

$$v_n(x) = \begin{cases} \delta \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \cos\left[\pi \left(n-\frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in [a, c[, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \cos\left[\pi \left(n-\frac{3}{2}\right) \frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in]c, b]. \end{cases}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \delta \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \sin\left[\pi(n-1)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in [a, c[, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_2'}{\delta}\right) \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} \sin\left[\pi(n-1)\frac{(x-a)}{(b-a)}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right), \ x \in]c, b]. \end{cases}$$

Preuve : Soit $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$. dans ce cas, en utilisant (2-40) nous avons

$$\frac{1}{\|\Phi_n\|} = \frac{|\delta|}{|\alpha_2'|}\left(\frac{1}{\pi}\frac{b-a}{n-2}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\delta^2(c-a)+b-c}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

de cette équation et de (2-30) pour les fonctions propres normalisées on a

$$\psi_n(x) = \frac{\phi(x, \lambda_n)}{\|\Phi_n\|},$$

ainsi on obtient l'expression asymptotique exigée.

Les preuves des autres cas se font d'une manière similaire.

Chapitre 3

PROBLEME DE STURM-LIOUVILLE A COEFFICIENT DISCONTINU AVEC PARAMETRE SPECTRAL DANS LES CONDITIONS AUX LIMITES ET DANS LES CONDITIONS DE TRANSMISSION.

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on aborde l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficient discontinu, contenant le paramètre spectral dans les deux conditions aux limites et dans les deux conditions de transmission. Tout d'abord on donne la formulation opératorielle du problème considéré dans un espace de Hilbert adéquat, dans lequel l'opérateur engendré par le problème en question est symétrique. Par la suite on établit le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres. Un cas particulier d'un tel problème à été traité dans [3].

Soit l'équation suivante

$$\tau u = -p(x)\,u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a, c[\cup]c, b], \tag{3-1}$$

la condition aux limites en $x = a$

$$L_1(u) = \lambda\left(\alpha_1' u(a) - \alpha_2' u'(a)\right) - \left(\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a)\right) = 0, \tag{3-2}$$

la condition aux limites en $x = b$

$$L_2(u) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right) + \left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = 0, \tag{3-3}$$

et les conditions de transmission au point de discontinuité $x = c$

$$L_3(u) = u(c+0) - u(c-0) - \lambda\delta_2 u'(c+0) = 0, \tag{3-4}$$

$$L_4(u) = u'(c+0) - u'(c-0) + \lambda\delta_1 u(c-0) = 0. \tag{3-5}$$

Où

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_1^2} & \text{pour } x \in [a, c[\,, \\ \frac{1}{p_2^2} & \text{pour } x \in]c, b]\,. \end{cases}$$

λ est un paramètre complexe, $q(x)$ est une fonction réelle continue dans $[a, c[$ et $]c, b]$ et elle a des limites finies quand $x \to c \pm 0$; p_i, α_i, α_i', β_i, β_i' $(i = 1, 2)$ sont des nombres réels telles que :

$|\alpha_1'| + |\alpha_2'| \neq 0$.

$|\beta_1'| + |\beta_2'| \neq 0$. et nous supposons que $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, et

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0. \qquad \rho_2 = \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_1 \\ \beta_2' & \beta_2 \end{vmatrix} > 0.$$

3.2 FORMULATION OPERATORIELLE

Nous introduisons un produit scalaire dans l'espace de Hilbert $H = L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^4$ et un opérateur symétrique $A : H \to H$ tel que (3-1)-(3-5) peut être considéré comme problème aux valeurs propres de cet opérateur.

Donc, dans l'espace de Hilbert $L_2[a, b] \oplus \mathbb{C}^4$ nous définissons le produit scalaire

$$\langle F, G \rangle = p_1^2 \int_a^{c-0} f(x)\overline{g(x)}dx + p_2^2 \int_{c+0}^{b} f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{1}{\rho_1} f_1\overline{g_1} + \frac{1}{\rho_2} f_2\overline{g_2} + \frac{1}{\delta_1} f_3\overline{g_3} + \frac{1}{\delta_2} f_4\overline{g_4},$$

$$\text{pour} \quad F = (f(x), f_1, f_2, f_3, f_4) \quad , \quad G = (g(x), g_1, g_2, g_3, g_4)\,.$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$
\begin{aligned}
B_a(u) &= \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a), \\
B'_a(u) &= \alpha'_1 u(a) - \alpha'_2 u'(a), \\
B_b(u) &= \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b), \\
B'_b(u) &= \beta'_1 u(b) - \beta'_2 u'(b), \\
F_c(u) &= u(c+0) - u(c-0), \\
F'_c(u) &= \delta_2 u'(c+0), \\
T_c(u) &= u'(c+0) - u'(c-0), \\
T'_c(u) &= -\delta_1 u(c-0).
\end{aligned}
$$

Dans l'espace de Hilbert H considérons l'opérateur A de domaine de définition est :

$$
D(A) = \left\{ \begin{array}{c} F = (f(x), f_1, f_2, f_3, f_4) : \ f(x) \ \ et \ \acute{f}(x) \ \ sont \ absolument \ continues \\ dans \ \ [a, c[\cup]c, b] \ \ et \ ont \ des \ limites \ finies \ quand \ x \to c \pm 0, \\ \tau f \in L_2[a.b], \ f_1 = B'_a(f), \ f_2 = B'_b(f), \ f_3 = T'_c(f), \ f_4 = F'_c(f). \end{array} \right\}
$$

$$
AF = (\tau f, B_a(f), -B_b(f), T_c(f), F_c(f)).
$$

D'où le problème considéré (3-1)-(3-5) se ramène au problème suivant :

$$
AF = \lambda F.
$$

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème (3-1)-(3-5) sont définies comme valeurs propres et les premières composantes des vecteurs propres de l'opérateur A respectivement.

Théorème 1 l'opérateur A est symétrique.

Preuve : Soient F, G $\in D(A)$.

Pour montrer que A est symétrique il suffit de montrer que $\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle$.

En intégrons deux fois par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle AF, G\rangle &= \langle F, AG\rangle + W(f,\overline{g};c-0) - W(f,\overline{g};a) + W(f,\overline{g};b) \qquad (3\text{-}6)\\
&\quad - W(f,\overline{g};c+0) + \frac{1}{\rho_1}\left(B_a(f)B'_a(\overline{g}) - B'_a(f)B_a(\overline{g})\right)\\
&\quad + \frac{1}{\rho_2}\left(B'_b(f)B_b(\overline{g}) - B_b(f)B'_b(\overline{g})\right) +\\
&\quad \frac{1}{\delta_1}\left(T_c(f)T'_c(\overline{g}) - T'_c(f)T_c(\overline{g})\right) + \frac{1}{\delta_2}\left(F_c(f)F'_c(\overline{g}) - F'_c(f)F_c(\overline{g})\right),
\end{aligned}$$

où, $W(f,g;x)$ le wronskien des fonctions f et g :

$$W(f,g;x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Puisque f et g vérifient les conditions aux limites (3-2) et (3-3) et les conditions de transmission (3-4) et (3-5) nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_1}\left(B_a(f)B'_a(\overline{g}) - B'_a(f)B_a(\overline{g})\right) &= W(f,\overline{g};a), \qquad (3\text{-}7)\\
\frac{1}{\rho_2}\left(B'_b(f)B_b(\overline{g}) - B_b(f)B'_b(\overline{g})\right) &= -W(f,\overline{g};b),
\end{aligned}$$

$\frac{1}{\delta_1}\left(T_c(f)T'_c(\overline{g}) - T'_c(f)T_c(\overline{g})\right) + \frac{1}{\delta_2}\left(F_c(f)F'_c(\overline{g}) - F'_c(f)F_c(\overline{g})\right) = -W(f,\overline{g};c-0) + W(f,\overline{g};c+0)$.

Finalement substituant (3-7) dans (3-6) nous obtenons :

$$\langle AF, G\rangle = \langle F, AG\rangle \qquad (F, G \in D(A)), \tag{3-8}$$

donc A est symétrique.

Corollaire 1 Les valeurs propres du problème (3-1)-(3-5) sont réelles.

Nous pouvons supposer maintenant que toutes les fonctions propres du problème (3-1)-(3-5) sont réelles.

Corollaire 2 Soit $\lambda_1$et $\lambda_2$deux valeurs propres distinctes du problème (3-1)-(3-5). Alors les fonctions propres correspondantes $u_1$et u_2 de ce problème sont orthogonal i.e $p_1^2 \int\limits_a^{c-0} u_1(x)\, u_2(x)\, dx + p_2^2 \int\limits_{c+0}^{b} u_1(x)\, u_2(x)\, dx + \frac{1}{\rho_1} B_a'(u_1)\, B_a'(u_2) + \frac{1}{\rho_2} B_b'(u_1)\, B_b'(u_2) + \frac{1}{\delta_1} T_c'(u_1)\, T_c'(u_2) + \frac{1}{\delta_2} F_c'(u_1)\, F_c'(u_2) = 0.$

3.3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU SYSTEME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS

Pour la suite, nous avons besoin du lemme suivant, qui peut être prouvé par la même technique utilisée dans le théorème 1.5 dans [18].

Lemme 1 Soit $q(x)$ une fonction réelle continue dans $[a, b]$ et $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ des fonctions entières données. Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$ l'équation

$$\tau u = -P(x)\, u''(x) + q(x)\, u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [a, b],$$

a une solution unique $u = u(x, \lambda)$ qui satisfait aux conditions initiales

$$u(a) = f(\lambda), \; u'(a) = g(\lambda) \quad (\text{où } u(b) = f(\lambda), \; u'(b) = g(\lambda)).$$

Pour chaque x fixé dans $[a, b]$, $u(x, \lambda)$ est une fonction entière en λ.

Soit maintenet $\Phi_{1\lambda}(x) = \Phi_1(x, \lambda)$ la solution de l'équation (3-1) dans $[a, c]$, satisfait aux conditions initiales

$$u(a) = -\alpha_2 + \lambda\alpha_2', \quad u'(a) = -\alpha_1 + \lambda\alpha_1'. \tag{3-9}$$

On utilisons la solution $\Phi_1(x, \lambda)$ pour définir la solution $\Phi_{2\lambda}(x) = \Phi_2(x, \lambda)$ de l'équation (3-1) dans $[c, b]$, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(c) &= \Phi_1(c, \lambda) + \delta_2\lambda u'(c), \\ u'(c) &= \Phi_1'(c, \lambda) - \delta_1\lambda\Phi_1(c, \lambda). \end{aligned} \tag{3-10}$$

Remarque 1 La fonction $\Phi_1(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (3-2), et $\Phi_2(x, \lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (3-4) et (3-5).

De la même manière nous devons définir la solution, $\Psi_{2\lambda} = \Psi_2(x, \lambda)$ de l'équation (1-1) dans $[c, b]$, avec les conditions initiales

$$u(b) = \beta_2 + \lambda\beta_2', \quad u'(b) = \beta_1 + \lambda\beta_1', \tag{3-11}$$

et la solution $\Psi_{1\lambda} = \Psi_1(x, \lambda)$ de l'équation (3-1) dans $[a, c]$ avec les conditions initiales

$$
\begin{aligned}
u(c) &= \Psi_2(x,\lambda) - \delta_2\lambda\Psi_2'(x,\lambda), && \text{(3-12)} \\
u'(c) &= \Psi_2'(c,\lambda) + \delta_1\lambda u(c).
\end{aligned}
$$

Remarque 2 La fonction $\Psi_2(x,\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie la condition (3-3). et $\Psi_1(x.\lambda)$ a été choisie de sorte qu'elle vérifie les conditions de transmission (3-4) et (3-5).

Nous considérons les wronskiens :

$$
\begin{aligned}
w_i &= W_\lambda(\Phi_i, \Psi_i, x) \\
&= \Phi_i(x.\lambda)\Psi_i'(x,\lambda) - \Phi_i'(x,\lambda)\Psi_i(x,\lambda), \ x \in \Omega_i \ (i = 1,2),
\end{aligned}
$$

ils sont indépendants de $x \in \Omega_i$ et ils sont des fonctions entières, où $\Omega_1 = [a,c]$, $\Omega_2 = [c.b]$.

On prend en considération les équations (3-10), (3-12) avec un calcul court on obtient

$$
w_1(\lambda) = w_2(\lambda).
$$

en construit deux bases de solutions de l'équation (3-1)

$$
\Phi(x.\lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x.\lambda), & x \in [a,c[, \\ \Phi_2(x.\lambda), & x \in]c,b]. \end{cases} \qquad \Psi(x,\lambda) = \begin{cases} \Psi_1(x,\lambda), & x \in [a,c[, \\ \Psi_2(x,\lambda), & x \in]c,b]. \end{cases}
$$

En vertu des équations (3-10) et (3-12) ces solutions vérifient les deux conditions de transmission (3-4) et (3-5).

Le wronskien des fonctions $\Phi(x.\lambda)$ et $\Psi(x,\lambda)$ est indépendant de la variable x dans

$[a, c[\cup]c, b]$ et il est une fonction entière pour chaque x fixé dans $[a, c[\cup]c, b]$.

Notons par $w(\lambda)$ le Wronskien des fonctions $\Phi(x, \lambda)$ et $\Psi(x, \lambda)$,

$$w(\lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \Psi(x, \lambda)).$$

Il est clair que

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) = w_2(\lambda).$$

Théorème 2 Les valeurs propres du problème (3-1)-(3-5) et les zéros de la fonction $w(\lambda)$ coincident.

Preuve : Soit $u_0(x)$ une fonction propre correspond à la valeur propre λ_0. Alors la fonction $u_0(x)$ peut être représenté sous la forme

$$u_0 = \begin{cases} c_1\Phi_1(x, \lambda_0) + c_2\Psi_1(x, \lambda_0), \; x \in [a, c[, \\ c_3\Phi_2(x, \lambda_0) + c_4\Psi_2(x, \lambda_0), \; x \in]c, b], \end{cases}$$

où au moins une des constantes c_1, c_2, c_3, c_4 n'est pas nulle.

Considérons les équations

$$L_i(u_0(x)) = 0, \; i = 1, 2, 3, 4,$$

comme c'est un système d'équations linéaires homogènes des variables c_1, c_2, c_3, c_4 on prend en compte (3-10)-(3-12), il suit que le déterminant de ce système est égal à

$$w^3(\lambda).$$

Lemme 2 Soit $\lambda = s^2$. Alors on à les équations intégrales suivantes pour k=0 et k=1.

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) &= \left(-\alpha_2 + s^2\alpha_2'\right)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[p_1 s(x-a)\right] \\ &\quad -\frac{1}{P_1 S}\left(-\alpha_1 + s^2\alpha_1'\right)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[p_1 s(x-a)\right] \\ &\quad +\frac{p_1}{S}\int_a^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left[p_1 s(x-y)\right] q(y)\,\Phi_1(y,\lambda)\,dy,\end{aligned} \tag{3-13}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) &= \Phi_2(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[p_2 s(x-c)\right] \\ &\quad +\frac{1}{P_2 S}\Phi_2'(c,\lambda)\frac{d^k}{dx^k}\sin\left[p_2 s(x-c)\right] \\ &\quad +\frac{p_2}{S}\int_c^x \frac{d^k}{dx^k}\sin\left[p_2 s(x-y)\right] q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)\,dy.\end{aligned} \tag{3-14}$$

Preuve : Pour le prouver il suffit de remplacer $q(y)\Phi_1(y,\lambda)$ par $s^2\Phi_1(y,\lambda) + p(y)\Phi_1''(y,\lambda)$ dans le terme intégral de l'équation (3-13), et remplacer $q(y)\Phi_2(y,\lambda)$ par $s^2\Phi_2(y,\lambda) - p(y)\Phi_2''(y,\lambda)$ dans le terme intégral de l'équation (3-14) et on intègre deux fois par parties.

Lemme 3 Soit $\lambda = s^2$. Alors, pour $|\lambda| \to \infty$, on a les égalités asymptotiques suivantes.

1) Pour $\alpha_2' \neq 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = s^2\alpha_2'\frac{d^k}{dx^k}\cos\left[p_1 s(x-a)\right] + O\left(|s|^{k+1}e^{|t|P_1(x-a)}\right), \tag{3-15}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) = -\delta_1\delta_2 s^6\alpha_2' \cos[p_1 s(c-a)]\frac{d^k}{dx^k}\cos[p_2 s(x-c)] \quad (3\text{-}16)$$
$$+O\left(|s|^{k+5} e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}\right).$$

2) Pour $\alpha_2' = 0$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_1(x,\lambda) = -\frac{s\alpha_1'}{p_1}\frac{d^k}{dx^k}\sin[p_1 s(x-a)] + O\left(|s|^k e^{|t|(x-a)}\right), \quad (3\text{-}17)$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Phi_2(x,\lambda) = s^5\delta_1\delta_2\alpha_1'\frac{1}{p_1}\sin[p_1 s(c-a)]\frac{d^k}{dx^k}\cos[p_2 s(x-c)] \quad (3\text{-}18)$$
$$+O\left(|s|^{k+4} e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}\right).$$

Preuve : La formule asymptotique de $\Phi_1(x,\lambda)$ a été obtenue avec la même façon que [4, lemme 1] et [18, lemme 1.7] mais semblable à la formule de la solution $\Phi_2(x,\lambda)$ que nous formulerons sans preuve.

Soit $\alpha_2' \neq 0$. On substitue (3-15) dans (3-14) pour k=0, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Phi_2(x,\lambda) &= s^2\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\delta_2p_1s^5\alpha_2'\sin[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\delta_2\delta_1s^6\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\frac{p_1}{P_2}\alpha_2's^2\sin[p_1s(c-a)]\sin[p_2s(x-c)] \\ &-\frac{1}{P_2}\delta_1s^3\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\sin[p_2s(x-c)] \\ &+\frac{p_2}{S}\int_c^x\sin[p_2s(x-y)]\,q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)\,dy \\ &+O\left(|s|^5e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}\right).\end{aligned} \tag{3-19}$$

On multiplie par $|s|^{-6}e^{-|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}$ est on note

$$F(x,\lambda)=|s|^{-6}e^{-|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}\Phi_2(x,\lambda),$$

on obtient

$$\begin{aligned}F(x,\lambda) &= |s|^{-6}e^{-|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}(s^2\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\delta_2p_1s^5\alpha_2'\sin[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\delta_2\delta_1s^6\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\cos[p_2s(x-c)] \\ &-\frac{p_1}{P_2}\alpha_2's^2\sin[p_1s(c-a)]\sin[p_2s(x-c)] \\ &-\frac{1}{P_2}\delta_1s^3\alpha_2'\cos[p_1s(c-a)]\sin[p_2s(x-c)] \\ &+\frac{p_2}{S}\int_c^x\sin[p_2s(x-y)]\,q(y)\,\Phi_2(y,\lambda)\,dy)+O\left(\frac{1}{S}\right).\end{aligned}$$

On pose $M(\lambda) = \max\limits_{x \in [c,b]} |F(x,\lambda)|$ on obtient

$$M(\lambda) \leq |\delta_2 \delta_1 \alpha'_2| + \frac{M_0}{|s|},$$

pour $M_0 > 0$. Par conséquent $M(\lambda) = O(1)$ quand $|\lambda| \to \infty$, donc

$$\Phi_2(x,\lambda) = O\left(|s|^6 e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(x-c))}\right). \tag{1-20}$$

On substitue (3-20) dans (3-19) cela nous donne (3-16) pour le cas k=0. Pour le cas k=1 on applique le même procédé.

La preuve de la formule (3-18) est semblable à celle de (3-16).

Théorème 3 Soit $\lambda = s^2$, pour la représentation asymptotique des fonctions $w(\lambda)$ on a

Cas 1 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= -\beta'_2 \alpha'_2 \delta_1 \delta_2 s^9 p_2 \cos[p_1 s(c-a)] \sin[p_2 s(b-c)] \\ &\quad + O\left(|s|^8 e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(b-c))}\right). \end{aligned} \tag{3-21}$$

Cas 2 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 = 0$, alors

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{p_2}{p_1} \beta'_2 \alpha'_1 \delta_1 \delta_2 s^8 \sin[p_1 s(c-a)] \sin[p_2 s(b-c)] \\ &\quad + O\left(|s|^7 e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(b-c))}\right). \end{aligned} \tag{3-22}$$

Cas 3 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= -\beta_1'\alpha_2'\delta_1\delta_2 s^8 \cos[p_1 s(c-a)]\cos[p_2 s(b-c)] \\ &+O\left(|s|^7 e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(b-c))}\right). \end{aligned} \tag{3-23}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{p_1}\beta_1'\alpha_1'\delta_1\delta_2 s^7 \sin[p_1 s(c-a)]\cos[p_2 s(b-c)] \\ &+O\left(|s|^6 e^{|t|(P_1(c-a)+P_2(b-c))}\right). \end{aligned} \tag{3-24}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1, posons $x = b$ dans la fonction $w(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \Phi_2(b,\lambda)\Psi_2'(b,\lambda) - \Phi_2'(b,\lambda)\Psi_2(b,\lambda) \\ &= \Phi_2(b,\lambda)(\beta_1 + \lambda\beta_1') - \Phi_2'(b,\lambda)(\beta_2 + \lambda\beta_2'). \end{aligned}$$

En substituons (3-16) dans $w(\lambda)$ en obtient (3-21). Les autres cas se font de la même façon.

Corollaire 3 Les valeurs propres du problème (3-1)-(3-5) sont bornées inférieurement.

Preuve : Posons $s = it$ $(t > 0)$ dans les formules (3-21)-(3-22)-(3-23)-(3-24) il suit que $w(-t^2) \to \infty$ quand $t \to \infty$. par conséquent $w(\lambda) \neq 0$ pour λ négatif et suffisamment grand en module.

3.4 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES

Maintenant on peut donner le comportement asymptotique des valeurs propres du problème considéré (3-1)-(3-5).

Puisque les valeurs propres coincident avec les zéros des fonctions entières $w(\lambda)$, il suit qu'elles n'ont aucune limite finie. De plus, toutes les valeurs propres sont réelles et bornés inférieurement d'après les corollaires 1 et 3. Par conséquent nous pouvons les renuméroter comme $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Théorème 4 $\lambda = s^2$. $s = \sigma + it$. Alors, le comportement asymptotique des valeurs propres du problème (3-1)-(3-5) est donné par les formules suivantes :

Cas 1 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} s'_n &= \left(\frac{\pi}{p_2 (b-c)}\right)(n-4) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s''_n &= \left(\frac{\pi}{p_1 (c-a)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3-25}$$

Cas 2 : si $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 = 0$, alors

$$\begin{aligned} s'_n &= \left(\frac{\pi}{p_2 (b-c)}\right)(n-4) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ s''_n &= \left(\frac{\pi}{p_1 (c-a)}\right) n + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3-26}$$

Cas 3 : si $\beta'_2 = 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$, alors

$$
\begin{aligned}
s'_n &= \left(\frac{\pi}{p_2\,(b-c)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (3\text{-}27)\\
s''_n &= \left(\frac{\pi}{p_1\,(c-a)}\right)\left(n-\frac{7}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Cas 4 : si $\beta'_2 = 0$ et $\alpha'_2 = 0$, alors

$$
\begin{aligned}
s'_n &= \left(\frac{\pi}{p_2\,(b-c)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (3\text{-}28)\\
s''_n &= \left(\frac{\pi}{p_1\,(c-a)}\right)(n-3)+O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Preuve : Soit $\beta'_2 \neq 0$ et $\alpha'_2 \neq 0$. On note par $\omega_1(s)$et $\omega_2(s)$ le premier et le second terme respectivement de (3-21).

Nous appliquerons le théorème de Rouche qui dit que si $f(s)$ et $g(s)$ sont deux fonctions analytiques à l'intérieur d'un contour fermé Γ, et $|g(s)| < |f(s)|$ sur Γ, alors $f(s)$ et $g(s) + f(s)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de Γ, pourvu que chaque zéro soit compté d'après sa multiplicité.

On montre facilement que $|\omega_1(s)| > |\omega_2(s)|$ dans les contours :

$$
\begin{aligned}
\Gamma'_n &= \left\{s' = \sigma' + it'/\ |\sigma'| \leq \left(\frac{\pi\,(n+1)}{p_2\,(b-c)}\right),\ |t'| \leq \left(\frac{\pi\,(n+1)}{p_2\,(b-c)}\right)\right\},\\
\Gamma''_n &= \left\{s'' = \sigma'' + it''/\ |\sigma''| \leq \left(\frac{\pi\,(n+1)}{p_1\,(c-a)}\right),\ |t''| \leq \left(\frac{\pi\,(n+1)}{p_1\,(c-a)}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

pour n suffisamment grand.

Soient $\lambda'_0 \leq \lambda'_1 \leq \lambda'_2 \ldots$ et $\leq \lambda''_0 \leq \lambda''_1 \leq \lambda''_2 \leq \ldots$ les zéros de $w(\lambda)$, et $\lambda'_n = s'^2_n$,

$\lambda_n'' = s_n''^2$.

Alors on applique le théorème de Rouche nous obtenons :

$$\begin{aligned} s_n' &= \left(\frac{\pi}{p_2\,(b-c)}\right)(n-4)+\eta_n'', \\ s_n'' &= \left(\frac{\pi}{p_1\,(c-a)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\eta_n'', \end{aligned}$$

où $\eta_n' = O\,(1)$ et $\eta_n'' = O\,(1)$, plus précisément $|\eta_n'| \leq \left(\frac{\pi}{2p_2(b-c)}\right)$ et $|\eta_n''| \leq \left(\frac{\pi}{2p_1(c-a)}\right)$ pour n suffisamment grand.

En mettant ceci dans (3-21) nous obtenons :

$$\eta_n' = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \eta_n'' = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui complète la preuve de cas 1. Les preuves des autres cas sont semblables.

3.5 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES

Théorème 5 Le comportement asymptotique des fonctions propres du problème (3-1)-(3-5) est donné par les formules suivantes :

Cas 1 : si $\beta_2' \neq 0$ et $\alpha_2' \neq 0$, alors

$$\Phi\left(x,\lambda_n'\right)=\begin{cases}\alpha_2'\left[\left(\frac{\pi}{p_2(b-c)}\right)(n-4)\right]^2\cos\left[\pi\left(n-4\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(b-c)}\right]+O\left(n\right),\ x\in[a,c[,\\ -\delta_1\delta_2\left[\left(\frac{\pi(n-4)}{p_2(b-c)}\right)\right]^6\alpha_2'\cos\left[\pi\left(n-4\right)\frac{p_1(c-a)}{p_2(b-c)}\right]\cos\left[\pi\left(n-4\right)\frac{x-c}{b-c}\right]\\ +O\left(n^5\right),\quad x\in]c,b].\end{cases}$$

$$\Phi\left(x,\lambda_n''\right)=\begin{cases}\alpha_2'\left[\left(\frac{\pi}{p_1(c-a)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-a)}{(c-a)}\right]+O\left(n\right),\ x\in[a,c[,\\ O\left(n^5\right),\quad x\in]c,b].\end{cases}$$

Cas 2 : si $\beta_2'\neq 0$ et $\alpha_2'=0$, alors

$$\Phi\left(x,\lambda_n'\right)=\begin{cases}-\frac{1}{p_1}\alpha_1'\left(\frac{\pi}{p_2(b-c)}\right)(n-4)\sin\left[\pi\left(n-4\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(b-c)}\right]+O\left(1\right),\ x\in[a,c[,\\ \left[\left(\frac{\pi(n-4)}{p_2(b-c)}\right)\right]^5\delta_1\delta_2\alpha_1'\frac{1}{p_1}\sin\left[\pi\left(n-4\right)\left(\frac{p_1(c-a)}{p_2(b-c)}\right)\right]\cos\left[\pi\left(n-4\right)\frac{x-c}{b-c}\right]\\ +O\left(n^4\right),\quad x\in]c,b].\end{cases}$$

$$\Phi\left(x,\lambda_n''\right)=\begin{cases}-\frac{1}{p_1}\alpha_1'\left(\frac{\pi}{p_1(c-a)}\right)n\sin\left[\pi n\frac{(x-a)}{(c-a)}\right]+O\left(1\right),\ x\in[a,c[,\\ O\left(n^4\right),\quad x\in]c,b].\end{cases}$$

Cas 3 : si $\beta_2'=0$ et $\alpha_2'\neq 0$, alors

$$\Phi\left(x,\lambda_n'\right)=\begin{cases}\alpha_2'\left[\left(\frac{\pi}{p_2(b-c)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(b-c)}\right]+O\left(n\right),\ x\in[a,c[,\\ -\delta_1\delta_2\left[\left(\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{p_2(b-c)}\right)\right]^6\alpha_2'\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(c-a)}{p_2(b-c)}\right]\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x-c}{b-c}\right]\\ +O\left(n^5\right),\quad x\in]c,b].\end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda_n'') = \begin{cases} \alpha_2' \left[\left(\frac{\pi}{p_1(c-a)}\right)\left(n-\frac{7}{2}\right)\right]^2 \cos\left[\pi\left(n-\frac{7}{2}\right)\frac{(x-a)}{(c-a)}\right] + O(n), & x \in [a,c[, \\ O(n^5), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

Cas 4 : si $\beta_2' = 0$ et $\alpha_2' = 0$, alors

$$\Phi(x,\lambda_n') = \begin{cases} -\frac{1}{p_1}\alpha_1' \left(\frac{\pi}{p_2(b-c)}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{p_1(x-a)}{p_2(b-c)}\right] + O(1), & x \in [a,c[, \\ \left[\left(\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{p_2(b-c)}\right)\right]^5 \delta_1\delta_2\alpha_1' \frac{1}{p_1}\sin\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{p_1(c-a)}{p_2(b-c)}\right)\right]\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{x-c}{b-c}\right] & \\ \qquad +O(n^4), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

$$\Phi(x,\lambda_n'') = \begin{cases} -\frac{1}{p_1}\alpha_1' \left(\frac{\pi}{p_1(c-a)}\right)(n-3)\sin\left[\pi(n-3)\frac{(x-a)}{(c-a)}\right] + O(1), & x \in [a,c[, \\ O(n^4), & x \in]c,b]. \end{cases}$$

Preuve : Nous considérons le cas 1.

On trouve avec un simple calcul et en utilisant (3-25)-(3-15) :

$\cos[p_1 s_n'(x-a)] = \cos\left[p_1\left(\frac{\pi}{P_2(b-c)}\right)(n-4)(x-a)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$,

$(s_n')^2 = \left[\left(\frac{\pi}{P_2(b-c)}\right)(n-4)\right]^2 + O(n)$,

donc

$(s_n')^2\cos[p_1 s_n'(x-a)] = \left[\left(\frac{\pi}{P_2(b-c)}\right)(n-4)\right]^2\cos\left[p_1\left(\frac{\pi}{P_2(b-c)}\right)(n-4)(x-a)\right] + O(n)$,

d'où

$\Phi_1(x,\lambda_n') = \alpha_2'\left[\left(\frac{\pi}{p_2(b-c)}\right)(n-4)\right]^2\cos\left[\pi(n-4)\frac{p_1(x-a)}{p_2(b-c)}\right] + O(n)$.

De la même façon en trouve

$\Phi_2(x,\lambda_n') = -\delta_1\delta_2\left[\left(\frac{\pi(n-4)}{p_2(b-c)}\right)\right]^6 \acute{\alpha}_2\cos\left[\pi(n-4)\frac{p_1(c-a)}{p_2(b-c)}\right]\cos\left[\pi(n-4)\frac{x-c}{b-c}\right] + O(n^5)$.

Les preuves des autres cas se font de la même façon.

Bibliographie

[1] Binding P.A and Browne, Patrick J. Oscillation theory for indefinite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A.127, no 6, pp 1123-1136, 1997.

[2] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter. Trans. Amer. Soc. Vol 9, pp 219-231, 1908.

[3] Demicirci. M. Akadogan. Z and Mukhtarov. O. SH. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunction of one discontinuous boundary-value problem. International jorunal of computational cognition. Vol 2, n 3, pp 101-113.

[4] Fulton C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. Vol 77, pp.293-308, 1977.

[5] Hinton D. B. An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition. Quart. J. Math. Oxford. Vol 30, pp 33-42, 1979.

[6] Kadakal M. Muhtarov F. S. Mukhtarov O. Sh. Green function of one discontinuous boundary value problem with transmission conditions. Bull. Pure Appl. Ser. E. Vol 21, no 2, pp 357-369, 2002.

[7] Kerimov N. B. and Memedov Kh. K. On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions. Sibirsk. Math. Zh. 40, no2, pp 325-335, 1999. English translation : Siberian Math. J. 40, no2, pp 281-290, 1999.

[8] Kobayashi M. Eigenvalues of discontinuous Sturm-Liouville problems with symmetric potentials. Computers. Math. Applic. Vol 18, no 4, pp 357-364, 1989.

[9] Likov A. V and Mikhal-ilov Yu. A. The Theory of Heat and Mass Transfer Qosenergaizdat. 1963 (Russian).

[10] Mukhtarov O. Sh. Demir H. Coerciveness of the discontinuous initial-boundary value problem for parabolic equations. Israel J. Math. Vol 114, pp 239-252, 1999.

[11] Mukhtarov O. Sh, Kandemir M and Kuruoglu N. Distribution of Eigenvalues for the discontinuous boundary value problem with functional manypoint conditions. Israel Journal of Mathematics. Vol 129, pp 143-156, 2002.

[12] Mukhtarov O. Sh. Kandemir M. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with functional-transmission conditions. Acta Mathematica Scientia. Vol 22 Bd 3, pp 335-345, 2002.

[13] Mukhtarov O. SH. Kadakal M and Mukhtarov F. S. Eigenvalues and normalized eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problem with transmission conditions. Reports on mathematical physics. Vol 54, pp 41-56, 2003.

[14] Mukhtarov O. Sh. and Yakubov S. Problems for Ordinary Differential Equations with transmission conditions. Applicable Analysis. Vol 81, pp 1033-1064, 2002.

[15] Schneider A. A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. Math. Z. Bd 136. S, pp 163-167, 1974.

[16] Shkalikov A. A. Boundary Value Problems For Ordibary Differential Equations with a Parameter in boundary conditions Trydy sem. Imeny I. G. Petrowskovo, 9, pp 190-129, 1983.

[17] Tikhonov A. N. Samarskii A. A. Equations of mathematical physics. Oxford. New York : Pergamon, 1963.

[18] Titchmarsh E. C. Eigenfunctions expansion associated with second order differential equations. I. London. Oxford Univ. Press, 1962.

[19] Titeux I. Yakubov Ya. S. Application of abstract differential equations to some mechanical problems. Dordrecht. Boston, London : Kluwer Acad. Publ, 2003.

[20] Tunc E. Mukhtarov O. Sh. Fundamental solutions and eigenvalues of one boundary-value problem with transmission conditions. Appl. Math. Comput. . Vol 157, pp 347-355, 2004.

[21] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. Math. Z. Bd 133. S, pp 301-312, 1973.

[22] Yakubov S. Completeness of root functions of regular differential operators. New York. Longman. Scientific Technical, 1994.

[23] Yakubov S and Yakubov Y. Abel basis of root functions of regular boundary value problems. Math. Nachr. Vol 197, pp 157-187, 1999.

[24] Yakubov S. Yakubov Y. Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. Boca Raton. Chapman and Hall. CRC, 2000.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficients discontinus avec paramètre spectral dans les conditions aux limites et dans les conditions de transmission.

On établit le comportement asymptotique des solutions fondamentales.

On obtient les formules asymptotiques des valeurs propres et des fonctions propres.

Abstract

This present work is devoted to the study of a problem of Sturm-Liouville with discontinuous coefficients containing a spectral parameter in the boundary-value conditions and in the transmission conditions.

We establish the asymptotic behavior of the fundamental solutions.

We obtain the asymptotic formulas of the eigenvalues and eigenfunctions.

مــلـــخـــص

في هدا العمل نقوم بدراسة مسألة ستورم-ليوفيل ذات المعاملات الغير مستمرة و الوسيط الطيفي الذي يظهر في المعادلة التفاضلية وكذلك في الشروط الحدية والشروط التوصيلية .

نوجد التصرفات التقاربية للحلول الأساسية .

ونحصل على العلا قات التقاربية للقيم الذاتية والتوابع الذاتية.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème de Sturm-Liouville à coefficients discontinus avec paramètre spectral dans les conditions aux limites et dans les conditions de transmission.

On établit le comportement asymptotique des solutions fondamentales.

On obtient les formules asymptotiques des valeurs propres et des fonctions propres.