République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE

№ d'ordre : ...

Série : …

MÉMOIRE

PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU

DIPLÔME DE MAGISTER

OPTION : **Mathématiques Appliquées :**
Statistique des Processus aléatoires

Par
MERAH FATEH

THÈME

ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE D'UN PROCESSUS EN TEMPS CONTINU PAR ECHANTILLONNAGE ALEATOIRE

Soutenu le 09 / 06 / 2007

Devant le Jury :

Président :	Z. MOHDEB	Prof. U. Mentouri Constantine
Rapporteur :	F. MESSACI	M. C. U. Mentouri Constantine
Examinateur :	M. BOUSSEBOUA	M. C. U. Mentouri Constantine
Examinateur :	Z. GHRIBI	M. C. U. Mentouri Constantine

Remerciements

Je remercie très sincèrement Madame F. MESSACI de m'avoir fait l'honneur d'accepter de diriger ce travail et de m'avoir guidée tout au long de sa réalisation.

Je remercie vivement Monsieur Z. MOHDEB de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

J'adresse mes remerciements à Madame Z.GHRIBI et à Monsieur M. BOUSSEBOUA pour avoir accepté de s'intéresser à ce travail et de participer à ce jury.

Je dédie ce travail à mes parents

Table des matières

0.1 INTRODUCTION

La densité spectrale étant la transformée de Fourier de la fonction de covariance, il a été tout naturel de vouloir l'estimer par la transformée de Fourier de la fonction de covariance empirique.

L'estimateur ainsi obtenu, appelé périodogramme, s'avère non satisfaisant puisqu'il n'est pas consistant en moyenne quadratique (cf Anderson 1971). Il est possible d'obtenir la consistance en le lissant par un noyau aussi bien dans le cas d'un processus à temps discret (cf Anderson 1971) que dans le cas d'un processus à temps continu (cf Parzen 1961).

L'inconvénient dans ce dernier cas est que l'estimateur s'obtient sous la forme d'une intégrale et qu'il faut la calculer par des méthodes numériques. De plus, dans la pratique, il n'est pas toujours possible d'observer un processus continûment mais qu'on peut n'avoir à sa disposition qu'un nombre fini d'observations. D'où l'idée d'échantillonner à un temps discret un processus à temps continu. Mais ceci fait apparaître une autre difficulté qui est « l'aliasing » (une certaine ambiguïté) qui est introduite par l'échantillonnage périodique.

En 1960 Shapiro et Silverman ont exhibé une classe d'échantillonnages, comprenant l'échantillonnage poissonnien, supprimant « l'aliasing ». Partant de cette idée Jones (1970) propose un estimateur de la densité spectrale, basé sur l'échantillonnage poissonnien, mais il n'a pas donné ses propriétés. Utilisant toujours l'échantillonnage poissonnien Brillinger (1972) introduit un estimateur consistant et asymptotiquement normal, pour une taille aléatoire de l'échantillon. Tandis que Masry et lui (1976) et Masry (1978) proposent des estimateurs consistants de la densité spectrale, pour une taille fixe de l'échantillon. Ces derniers nécessitent la connaissance des instants d'échantillonnage, ce qui les rend inutilisables quand ils sont inconnus. Cette difficulté est levée par Masry (1980) en introduisant une estimation par séries orthogonales utilisant toujours l'échantillonnage poissonnien. Ce dernier estimateur a été tronqué par Messaci (1986, 1988 et 1989), ce qui a permis de l'améliorer aussi bien du point de vue de l'étude théorique que du temps de calcul.

En 1994 Keh Shin et Masry proposent un estimateur basé sur un échantillonnage aléatoire généralisant l'échantillonnage poissonnien. Ils montrent que l'estimation peut être améliorée (dans le sens où on obtient une plus petite variance) par le choix d'un échantillonnage non poissonnien.

Ce mémoire se propose de détailler ce travail. Le chapitre 1 rassemble les outils utilisés dans la suite du mémoire (la stationnarité, la transformée de Fourier, le phénomène d'aliasing, les cumulants etc.). Au chapitre 2 sont détaillés aussi bien le principe sur lequel se base l'estimation que les propriétés de l'estimateur, qui est asymptotiquement sans biais, consistant en moyenne quadratique et asymptotiquement normal. Au chapitre 3, nous nous intéressons, au cas non traité par Keh Shin et Masry, où la moyenne du processus est inconnue. Le fait qu'il faille d'abord estimer la moyenne conduit à des calculs inextricables. C'est pourquoi nous nous sommes contentés de montrer que l'estimateur ainsi obtenu est asymptotiquement sans biais tout en ayant acquis la certitude que toutes les autres propriétés restent valables. Enfin au chapitre 4, nous avons complété l'étude théorique par un travail de simulation montrant la pertinence de l'introduction de l'estimateur de Keh Shin et Masry et les bonnes propriétés d'estimateurs plus anciennement introduits.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Le processus stationnaire au second ordre (ou faiblement stationnaire)

I désigne $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou une de leurs parties.

Un processus $X = \left(X\left(t\right)_{t\in I}\right)$ est stationnaire au second ordre si

$i)$ pour tout t, $E\left[X_t^2\right]$ est finie.

$ii)$ pour tout t, $E\left[X_t\right] = m$.

$iii)$ pour tout t et pour tout h

$$C\left(h\right) = cov\left(X_t, X_{t+h}\right) = E\left[\left(X_t - m\right)\left(X_{t+h} - m\right)\right]$$

est indépendante de t.

La fonction C est appelée la fonction de covariance du processus X.

On peut noter que C est une fonction paire, et que la variance de X_t vaut $C\left(0\right)$.

De plus C est une fonction semi-définie positive.

Si C est continue $I = \mathbb{R}$, le théorème de Bochner assure l'existence d'une mesure bornée μ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\, C\left(t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d\mu\left(\lambda\right)$$

μ est la mesure spectrale du processus X.

si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sa densité Φ est la densité spectrale du processus, on a dans ce cas

$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \Phi(u) \, du.$$

La fonction de covariance n'est alors que la transformée de Fourier de la densité spectrale.

1.2 Le processus stationnaire

Un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ est stationnaire si pour tout $s \geq 0$ et pour tout $t_1, t_2, ..., t_n$ les vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})' \text{ et } (X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, ..., X_{t_n+s})'$$

ont même loi de probabilité.

1.3 Rappels sur la transformée de Fourier

1.3.1 définition

La transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est la fonction définie par

$$F[f](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} f(t) \, dt$$

Si f est intégrable et si sa transformée de Fourier $F[f]$ est intégrable alors on a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} F[f](t) \, d\lambda$$

c'est à dire que f s'obtient comme la transformée de Fourier inverse de sa transformée de Fourier.

1.3.2 Exemple

Soit $f(t) = e^{-a|t|}, a > 0$ alors sa transformée de Fourier est

$$F[f](\lambda) = \frac{a}{\pi\left(\lambda^2 + a^2\right)}$$

1.3.3 Propriétés de la transformée de Fourier

$F[f]$ est uniformément continue, bornée et $\lim\limits_{|t|\to\infty} F[f](t) = 0$.

Linéarité

$$F[\alpha f + \beta g](\lambda) = \alpha F[f](\lambda) + \beta F[g](\lambda).$$

Dérivation

$$F\left[\frac{df(t)}{dt}\right](\lambda) = -i\lambda F[f](\lambda).$$

Décalage temporel

$$\begin{aligned} F[f(t+T)](\lambda) &= e^{i\lambda T} F[f](\lambda) \\ F[f(t-T)](\lambda) &= e^{-i\lambda T} F[f](\lambda) \end{aligned}$$

Convolution

Si

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \text{ (le produit de convolution de } f \text{ et } g\text{)}$$

alors

$$F[h] = F[f]\, F[g]$$

i.e. la transformée de Fourier du produit de convolution est le produit des transformées de Fourier.

1.4 Transformation de Laplace

Si f est une fonction définie pour tout $t > 0$, la transformation de Laplace de f est notée $L[f]$ est définie par

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

On a

$$L[f * g] = L[f]\, L[g]$$

1.5 La fonction caractéristique

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité.

1) Si X est une variable aléatoire définie sur (Ω, A, P), de loi de probabilité P_X, on appelle fonction caracéristique de X, et on note φ_X l'application

$$\begin{aligned} \varphi_X \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \quad &\mapsto \quad \varphi_X(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} dP_X(x) \end{aligned}$$

ce n'est autre que la transformée de Fourier, à un facteur près, de la mesure P_X.

2) Si X est un vecteur aléatoire sur (Ω, A, P) et valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi P_X, on appelle fonction caractéristique de X et on note φ_X l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \quad &\to \quad \mathbb{C} \\ t \quad &\longmapsto \quad \varphi_X(t) = E\left(e^{iXt'}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iXt'} dP_X(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

La fonction caractéristique est uniformément continue en tout point et vaut 1 à l'origine, elle est donc non nulle dans un voisinage de l'origine, sur le quel on pourra définir son logarithme népérien

$$\Psi_X(v) = \log[\varphi_X(v)]$$

cette fonction est appelée la seconde fonction caractéristique.

1.6 Moments et cumulants

Notons $\mu_{X(r)}$ les moments d'ordre r de X, lorsqu'il existent $\mu_{X(r)} = E\left[X^r\right]$, les fonctions caractéristiques décrivent complètement la variable aléatoire à laquelle elles sont associées, en développant e^{ivx} dans l'expression

$\varphi_X(v) = E\left[e^{ivx}\right]$ au voisinage de l'origine et identifiant avec le développement de Taylor de la première fonction caractéristique, on obtient les moments

$$\mu_{X(r)} = E\left[X^r\right] = (-i)^r \frac{d^r \varphi_X(v)}{dv^r} |_{v=0}$$

Les dérivées de la seconde fonction caractéristique, prise à l'origine définissent les cumulants

$$K_{X(r)} = cum\,(X, X, ..., X) = (-i)^r \frac{d^r \Psi_X(v)}{dv^r} |_{v=0}$$

qui sont les coefficients du développement en série de Taylor de la seconde fonction caractéristique.

Les cumulants d'ordre r peuvent être calculés à partir des moments d'ordre inférieur ou égales à r.

Lorsque la variable aléatoire X est Gaussienne sa seconde fonction caractéristique est

$$\Psi_X(v) = i\mu_{X(1)}v - \frac{1}{2}\left[\mu_{X(2)} - \mu_{X(1)}^2\right]v^2$$

donc la seconde fonction carctéristique d'une variable Gaussienne est un polynôme d'ordre 2, ce qui implique la nullité de ses cumulants d'ordre supérieur à 3.

si X a n composants on définit

$$cum\,(X_1, ..., X_r) = (-i)^r \frac{\partial^r \Psi_X(v)}{\partial v_1 ... \partial v_r} |_{v_1 = ... = v_r} = (-i)^r \frac{\partial^r}{\partial v_1 ... \partial v_r} \log E\left[e^{iv^T X}\right]$$

où $1 \leq r \leq n$.

1.6.1 Propriétés

1) Soient les réels $a_1, ..., a_n$ et les complexes $b_1, ..., b_n$, pour tout entier $n \geq 2$ et tout vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$ on a

$$cum\left(a_1 X_1 + b_1, ..., a_n X_n + b_n\right) = a_1 ... a_n cum\left(X_1, ..., X_n\right).$$

2) On peut vérifier que

$$\begin{aligned} cum\left(X\right) &= E\left(X\right) \\ cum\left(X, X\right) &= Var\left(X\right) \\ cum\left(X, Y\right) &= cov\left(X, Y\right). \end{aligned}$$

3) La formule de Leonov et Shiryayev :

A partir de la définition de la seconde fonction caractéristique, il est possible d'écrire les relations générales liant moments et cumulants de manière compacte par la formule de Leonov et shiryayev

$$cum\left(X_1, ..., X_r\right) = \sum \left(-1\right)^{k-1} \left(k-1\right)! E\left[\prod_{i \in v_1} X_i\right] ... E\left[\prod_{k \in v_p} X_k\right]$$

où la sommation s'étend sur tous les ensembles $\{v_1, ..., v_p : 1 \leq p \leq r\}$ formant une partition de $\{1, ..., r\}$, dans cette formule, k est le nombre d'éléments composant la partition.

Cette formule peut être inversée pour donner les moments en fonction des cumulants

$$E\left[X_1, ..., X_r\right] = \sum cum\left[X_i, i \in v_1\right] ... cum[X_k, k \in v_p]$$

où $cum\left[X_k, k \in v_p\right]$ représente le cumulant des variables X_k, k variant dans l'ensemble v_p d'une partition.

1.7 Estimation

1.7.1 Estimation de la fonction de covariance

Considérons un ensemble d'observations $X_1, ..., X_T$, la moyenne empirique est donnée par

$$\overline{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} X_t.$$

La fonction d'autocovariance empirique est donnée par

$$\overset{\Lambda}{C}_T (h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} \left(X_t - \overline{X}_T \right) \left(X_{t-h} - \overline{X}_T \right),$$

si cet estimateur est biaisé (à distance finie) il est malgré tout asymptotiquement sans biais.

1.7.2 Estimation de la densité spectrale

Le périodogramme

Il est défini comme le module au carré de la transformée de Fourier discrète des observations

$$I_T (x) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^{T} e^{itx} x_t \right|^2$$

c'est la transformée de Fourier de l'estimateur de C, c'est donc un estimateur naturel de la densité spectrale.

le plus souvent on estime le périodogramme aux fréquences de Fourier $x_k = \frac{2\pi k}{T}$ pour $k = 1, .., T$.

Sous des hypothèses de régularité de la densité spectrale le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale mais il n'est pas consistant. On ne peut estimer que les T premiers $C(h)$ intervenant dans la définition du périodogramme à partir de T observations.

1.7.3 Phénomène d'aliasing

Pour estimer la densité spectrale d'un processus X stationnaire, continu, du second ordre, de fonction de covariance C et de densité spectrale Φ de carré intégrable, on a d'abord pensé à effectuer un échantillonnage périodique donné par

$$t_n = nh \ / \ n \in \mathbb{Z}, h > 0,$$

le processus stationnaire discret $X(t_n)$ qui en résulte a pour fonction de covariance ρ_h et pour densité spectrale f_h.

Nous déduisons simultanément

$$\begin{aligned}
\rho_h(n) &= C(nh) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda nh}\Phi(\lambda)\,d\lambda \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi r}^{(2k+1)\pi r} e^{i\lambda nh}\Phi(\lambda)\,d\lambda \\
&= \int_{-\pi r}^{\pi r} e^{i\lambda nh} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda + 2\pi kr)\,d\lambda \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} re^{i\lambda n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda r + 2\pi kr)\,d\lambda \text{ où } r = \frac{1}{h}
\end{aligned}$$

et

$$f_h(\lambda) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda r + 2\pi kr)$$

Shapiro et Silverman ont montré que l'application $\Phi \to f_h$ n'est pas injective, plusieurs fonctions Φ peuvent conduire à la même densité spectrale observée f_h, ce qui constitue le phénomène d'aliasing.

Par contre l'échantillonnage poissonnien supprime ce phénomène (cf. Messaci 1986).

1.8 Processus ponctuel

(τ_n) est un processus ponctuel si c'est une suite croissante de variables positives, pouvant correspondre aux instants d'occurence d'un phénomène.

(τ_n) est un processus ponctuel ordonné si

$$P\left(\omega;\ \tau_n \neq \tau_m \text{ pour tout } \tau_n, (n \neq m)\right) = 1$$

1.9 Processus de comptage

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'évènements intervenus aléatoirement dans $[0, t]$.

L'intensité moyenne β est le nombre moyen d'évènements par unité de temps, i.e :

$$\beta = EN(0,1).$$

1.9.1 Propriétés

1) $N(t) \geq 0$ et $N(0) = 0$.

2) $N(t) \in \mathbb{N}$.

3) $N(s) \leq N(t)$ si $s < t$.

4) $N(t) - N(s) \equiv N(s,t)$ est égale un nombre d'évènements intervenants dans $]s, t]$.

1.9.2 Processus de comptage associé au processus ponctuel

Soit (T_n) une suite croissante de variables aléatoires à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+^*$telle que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$ presque sûrement,

pour tout $n < m$, $T_n < T_m$ (sur $T_n \neq +\infty$), on pose

$$N(t) = \sum_{k\geq 1} 1_{\{T_k \leq t\}} = \{^{n \text{ si } t\in[T_n, T_{n+1}[}_{+\infty \text{ sinon}}$$

$N(t)$ est le processus de comptage associé à la suite (T_n).

1.10 Les symboles o et O

Soient f, g deux fonctions numériques définies sur un même intervalle de $\mathbb{R}$.

S'il existe un nombre $k > 0$ et un intervalle I tels que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq k |g(x)|$$

on note

$$f = O(g)$$

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists I$ intervalle tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

on note

$$f = o(g)$$

$f = o(1)$ veut dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ où $x_0 \in \overset{o}{I}$.

1.10.1 Propriétés

1)

$$\begin{aligned} o(f)\,o(g) &= o(fg) \\ |o(f)|^s &= o(f^s), s > 0 \\ o(f) + o(g) &= o(\max(f, g)) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} O(f)\,O(g) &= O(fg) \\ |O(f)|^s &= O(f^s), s > 0 \\ O(f) + O(g) &= O(\max(f, g)) \end{aligned}$$

3)

$$o(f)O(g) = o(fg)$$

Chapitre 2

Estimation de la densité spectrale d'un processus de moyenne connue

Dans ce chapitre nous étudions l'estimateur de la densité spectrale d'un processus en temps continu, échantillonné à des instants aléatoires. Il a été introduit par KEH-SHIN LII et ELIAS MASRY en 1994.

2.1 Préliminaires

Soit $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ un processus réel, stationnaire de moyenne nulle, de moments du second ordre finis, de fonction de covariance R_X continue et intégrable et de densité spectrale Φ_X .

Le processus ponctuel $\{\tau_k\}_{-\infty<k<+\infty}$ est stationnaire, ordonné, indépendant de X de moments du second ordre finis.

Soit $N\,(.)$ le processus de comptage associé au processus $\{\tau_k\}$ et $\beta = E\left[N((0,1])\right]$ l'intensité moyenne du processus $\{\tau_k\}$, alors (voir Daley et Vere Jones)

$$E[N((t, t+dt])] = \beta dt \tag{2.1}$$

et

$$cov\left\{N((t,t+dt]),N((t+u,t+u+du])\right\}=C_N\left(du\right)dt \tag{2.2}$$

où C_N est la mesure de covariance réduite qui est σ-finie sur l'ensemble des boréliens $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ avec un atome à l'origine $C_N\left(\{0\}\right)=\beta$. Nous supposons que C_N est absolument continue, en dehors de l'origine, de fonction de densité c_N, c'est à dire

$$C_N\left(B\right)=\beta\delta_0\left(B\right)+\int_B c_N\left(u\right)du, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{2.3}$$

avec $\delta_0\left(B\right)=\left\{\begin{smallmatrix}1 & si & 0\in B\\ 0 & si & 0\notin B\end{smallmatrix}\right.$ est la mesure de Dirac en 0.

Avec la notation différentielle $dN(t)=N((0,t+dt])-N((0,t])$, nous pouvons écrire $cov\left\{dN(t_1),dN(t_2)\right\}=c_N\left(t_2-t_1\right)dt_1dt_2$ pour des t_j distincts.

Signalons, au passage, que $EN\left(A\right)$ est une mesure sur $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$, inverviante par translation (puisque (τ_k) est stationnaire). Sachant que la mesure de lebesgue (notée dt) est la seule mesure, inveriante par translation, qui vaut 1 sur $]0,1]$, la formule (2.1) s'en déduit.

Remarquons que le processus $\{\tau_k\}$ est alias-free si $\beta^2+c_N\left(u\right)>0$.

2.2 Méthode d'estimation

Nous définissons le processus échantillonné par

$$Z(B)=\sum_{\tau_i\in B}X(\tau_i),\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{2.4}$$

ou en forme différentielle $dZ(t)=X(t)dN(t)$.

Z a les moments de second ordre finis et en particulier $E\left[dZ(t)\right]=0$.

En effet

$E\left[dZ(t)\right]=E\left[X(t)dN(t)\right]=E\left[X(t)\right]E\left[dN(t)\right]=0$ car X est de moyenne nulle et il est indépendant de N.

De plus

$\mu_Z\left(du\right)dt\equiv E\left[dZ(t)dZ(t+u)\right]=E\left[X(t)dN(t)X(t+u)dN(t+u)\right]$

$=E\left[X(t)X(t+u)\right]E\left[dN(t)dN(t+u)\right]$

$=\left\{cov\left(X(t),X(t+u)\right)+E\left[X(t)\right]E\left[X(t+u)\right]\right\}$

$\times \{cov\,(dN(t), dN(t+u)) + E\,[dN(t)]\,E\,[dN(t+u)]\}$
$= R_X(u)\left[C_N(du)dt + \beta^2 dtdu\right]$
$= R_X(u)\left[C_N(du) + \beta^2 du\right] dt.$
Donc

$$\mu_Z\,(du)\,dt \equiv R_X\,(u)\left[C_N\,(du) + \beta^2 du\right] dt \equiv dC_Z^{(2)}\,(u)\,dt. \tag{2.5}$$

Si nous définissons la mesure μ_N, qui est σ-finie, par

$$\mu_N\,(B) = \int_B \left[\beta^2 du + C_N(du)\right], B \in \mathcal{B}\,(\mathbb{R})$$

alors

$$\mu_Z\,(B) = \int_B R_X\,(u)\,\mu_N\,(du) = \beta R_X(0)\delta_0(B) + \int_B R_X(u)\left[\beta^2 + c_N\,(u)\right] du$$

est une mesure σ-finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nous définisssons la densité spectrale Φ_Z du processus d'accroissement Z par

$$\begin{aligned}\Phi_Z\,(\lambda) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}\mu_Z\,(du) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} dC_Z^{(2)}\,(u) \\ &= \frac{\beta}{2\pi}R_X(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X\,(u)\left[\beta^2 + c_N(u)\right] du.\end{aligned}$$

Nous allons mettre en évidence une relation entre Φ_Z et Φ_X, qui va servir de principe de base à l'estimation de Φ_X.

$$\Phi_Z\,(\lambda) = \frac{\beta^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X\,(u)\,du + \frac{\beta}{2\pi}R_X(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X\,(u)\,c_N\,(u)\,du.$$

Mais nous savons que

$$\Phi_X\,(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X\,(u)\,du.$$

D'où

$$\Phi_Z\,(\lambda) = \beta^2\Phi_X\,(\lambda) + \frac{\beta}{2\pi}R_X\,(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X\,(u)\,c_N\,(u)\,du. \tag{2.6}$$

$$= \beta^2\Phi_X\,(\lambda) + \tfrac{\beta}{2\pi}R_X\,(0) + \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(\lambda - u)\Psi\,(u)\,du.$$

où
$$\Psi\left(\lambda\right)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}c_{N}\left(u\right)du,\;\; c_{N}\in IL_{1}. \tag{2.7}$$

Notons que Φ_Z est bornée, uniformément continue, mais elle n'est pas intégrable en général. Définissons

$$\gamma\left(u\right)=\frac{c_{N}\left(u\right)}{\beta^{2}+c_{N}\left(u\right)}. \tag{2.8}$$

Sous la supposition que

$$\gamma\in IL_{1}\text{ et }\Gamma\left(\lambda\right)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}\gamma\left(u\right)du\in IL_{1} \tag{2.9}$$

et grâce à la relation (2.6) nous obtenons

$$\Phi_{X}\left(\lambda\right)=\frac{1}{\beta^{2}}\left\{\Phi_{Z}\left(\lambda\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)-\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma\left(\lambda-u\right)\left[\Phi_{Z}\left(u\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)\right]du\right\}. \tag{2.10}$$

En effet nous avons

$$\Phi_{Z}\left(\lambda\right)=\beta^{2}\Phi_{X}\left(\lambda\right)+\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_{X}\left(u\right)c_{N}\left(u\right)du$$

d'où
$$\beta^{2}\Phi_{X}\left(\lambda\right)=\Phi_{Z}\left(\lambda\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_{X}(u)c_{N}\left(u\right)du.$$

$$\Phi_{X}\left(\lambda\right)=\frac{1}{\beta^{2}}\left\{\Phi_{Z}\left(\lambda\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_{X}\left(u\right)c_{N}(u)du\right\}$$

par utilisation de (2.8), nous obtenons

$$\Phi_{X}\left(\lambda\right)=\frac{1}{\beta^{2}}\left\{\Phi_{Z}\left(\lambda\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}\left(0\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_{X}(u)\gamma(u)\left[\beta^{2}+c_{N}(u)\right]du\right\}.$$

Mais
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_{X}(u)\left[\beta^{2}+c_{N}(u)\right]du=\Phi_{Z}\left(\lambda\right)-\frac{\beta}{2\pi}R_{X}(0).$$

ce qui donne par la formule (2.9)

$$\Phi_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\Phi_Z(\lambda) - \frac{\beta}{2\pi}R_X(0) - \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\lambda-u)\left[\Phi_Z(u) - \frac{\beta}{2\pi}R_X(0)\right]du\right\}.$$

2.3 Estimation

Etant donné les observations $\{X(\tau_k), \tau_k\}_{1\leq k\leq N(T)}$ où $T > 0$ et $N(T)$ est le nombre de points dans $[0,T]$, nous estimons Φ_X comme suit.

Premièrement soit I_T le périodogramme donné par

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-iu\lambda}dZ(t)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi T}\left|d_{Z,T}(\lambda)\right|^2 = \frac{1}{2\pi T}d_{Z,T}(\lambda)d_{Z,T}(-\lambda) \tag{2.11}$$

où

$$d_{Z,T}(\lambda) = \int_0^T e^{-it\lambda}X(t)dN(t).$$

Le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale du processus Z, mais il n'est pas consistant ; en le lissant par la fenêtre spectrale W_T nous obtenons l'estimateur

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u)I_T(u)du \tag{2.12}$$

avec

$$W_T(\lambda) = \frac{1}{b_T}W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{T\to+\infty} b_T = 0$$

b_T est le paramètre de lissage.

W est une fonction réelle, paire, c'est une fonction de poids, qui satisfait

$$W \in IL_1 \cap IL_\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\,d\lambda = 1. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.10) nous estimons Φ_X par

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\overset{\Lambda}{\Phi}_Z(\lambda) - \frac{\beta}{2\pi}\overset{\Lambda}{R}_X(0) - \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\lambda-u)\,\overset{\Lambda}{\Phi}_Z(u)\,du + \frac{\beta}{2\pi}\gamma(0)\,\overset{\Lambda}{R}_X(0)\right\} \tag{2.14}$$

où

$$\overset{\Lambda}{R}_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T X^2(t)\,dN(t) \tag{2.15}$$

et d'aprés (2.9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(u)\,du = \gamma(0).$$

Nous allons réécrire $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$d'une manière qui fait apparaître explicitement sa dépendance des observations et le rend clairement utilisable pour des calculs pratiques.

Soit la fonction

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}W(\lambda)\,d\lambda \tag{2.16}$$

D'aprés (2.11) on a

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda}X(\tau_j)\,X(\tau_k)$$

On a aussi

$$\overset{\Lambda}{R}_X(0) = \frac{1}{\beta T}\sum_{j=1}^{N(T)} X^2(\tau_j).$$

Montrons que

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda}w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right]X(\tau_j)\,X(\tau_k) \tag{2.17}$$

En effet

Par la substitution de (2.11), (2.12), (2.15), (2.16) dans (2.14), le fait que

$W_T(\lambda) = \frac{1}{b_T} W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right)$ en effectuant des changements de variables, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) &= \frac{1}{\beta^2}\{\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T w\left[b_T(t-s)\right] e^{-i\lambda(t-s)} X(t)\, X(s)\, dN(t)\, dN(s) \\
&\quad -\frac{\beta}{2\pi} \overset{\Lambda}{R}_X(0) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, e^{iu(s-t)} du\right] w\left[b_T(t-s)\right] X(t)\, X(s)\, dN(t)\, dN(s) \\
&\quad +\frac{\beta}{2\pi}\gamma(0)\, \overset{\Lambda}{R}_X(0)\}.
\end{aligned}$$

Par un changement de variable $v = \lambda - u$ et par l'utilisation de (2.9) nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, e^{iu(s-t)} du = e^{-i\lambda(t-s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(v) e^{iv(t-s)} dv = e^{-i\lambda(t-s)} \gamma(t-s)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) &= \frac{1}{\beta^2}\{\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T w\left[b_T(t-s)\right] e^{-i\lambda(t-s)} X(t)X(s)dN(t)dN(s) - \frac{\beta}{2\pi}\overset{\Lambda}{R}_X(0) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T \gamma(t-s)\, w\left[b_T(t-s)\right] e^{-i\lambda(t-s)} X(t)\, X(s)\, dN(t)\, dN(s) \\
&\quad +\frac{\beta}{2\pi}\gamma(0)\, \overset{\Lambda}{R}_X(0)\}
\end{aligned}$$

Mais

$$\overset{\Lambda}{R}_X(0) = \frac{1}{\beta T}\int_0^T X^2(t)\, dN(t),$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) &= \frac{1}{\beta^2}\{[\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T w\left[b_T(t-s)\right] e^{-i\lambda(t-s)} X(t)\, X(s)\, dN(t)\, dN(s) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\int_0^T X^2(t)\, dN(t)] \\
&\quad -[\frac{1}{2\pi T}\int_0^T \int_0^T \gamma(t-s)\, w\left[b_T(t-s)\right] e^{-i\lambda(t-s)} X(t)\, X(s)\, dN(t)dN(s) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi T}\gamma(0)\int_0^T X^2(t)\, dN(t)]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{2\pi T\beta^2}\{[\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} w\left[b_T\left(\tau_j-\tau_k\right)\right] e^{-i\lambda(\tau_j-\tau_k)} X\left(\tau_j\right) X\left(\tau_k\right) \\
& -\sum_{j=1}^{N(T)} X^2\left(\tau_j\right)] \\
& -[\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} \gamma\left(\tau_j-\tau_k\right) w\left[b_T\left(\tau_j-\tau_k\right)\right] e^{-i\lambda(\tau_j-\tau_k)} X\left(\tau_j\right) X\left(\tau_k\right)-\gamma(0) \sum_{j=1}^{N(T)} X^2\left(\tau_j\right)]\}
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{2\pi T\beta^2}\left\{\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N(T)} e^{-i\lambda(\tau_j-\tau_k)} w\left[b_T\left(\tau_j-\tau_k\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_j-\tau_k\right)\right] X\left(\tau_j\right) X\left(\tau_k\right)\right\}
$$

2.4 Propriétés de l’estimateur

2.4.1 La consistance en moyenne quadratique

Posons

$$
K_T(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u) W_T(u)\, du \tag{2.18}
$$

Notons que par le théorème de Fubini nous avons

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\left|K_T(\lambda)\right| d\lambda \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(u)|\, du \int_{-\infty}^{+\infty}|W(u)|\, du<\infty \tag{2.19}
$$

et

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\lambda)\, d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(u)\, du=\gamma(0) \tag{2.20}
$$

En utilisant (2.12) et (2.14) l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ s'écrit sous la forme plus compacte suivante

$$\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) &= \frac{1}{\beta^2}\{\int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u)\, I_T(u)\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, [\int_{-\infty}^{+\infty} W_T(u-v)\, I_T(v)\, dv] du \\
& -\frac{1-\gamma(0)}{2\pi\beta}\overset{\Lambda}{R}_X(0)\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} I_T(u) W_T(\lambda-u)\, du - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, W_T(u-v)\, I_T(v)\, dvdu\right\} \\
& -\frac{1-\gamma(0)}{2\pi\beta}\overset{\Lambda}{R}_X(0).
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, W_T(u-v)\, I_T(v)\, dvdu &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u)\, W_T(u-v)\, du\right] I_T(v)\, dv. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\lambda-v)\, I_T(v)\, dv
\end{aligned}$$

D'où

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} I_T(u)\left[W_T(\lambda-u) - K_T(\lambda-u)\right] du - \frac{1-\gamma(0)}{2\pi\beta}\overset{\Lambda}{R}_X(0). \tag{2.21}$$

Etude du biais

Premièrement, nous démontrons que $E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right]$ ne dépend pas asymptotiquement du processus $\{\tau_k\}$.

Pour cela utilisons le résultat suivant (cf [2], théorème 4.1).

Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|u|)\, d\left|C_Z^{(2)}(u)\right| < \infty \tag{2.22}$$

Alors

$$cum\{d_{Z,T}(\lambda), d_{Z,T}(u)\} = 2\pi D_T(\lambda+u)\, \Phi_Z(\lambda) + O(1)$$

où

$$D_T(\lambda) = \int_0^T e^{-i\lambda t} dt = \frac{1 - e^{-i\lambda T}}{i\lambda} \quad \text{si} \quad \lambda \neq 0. \tag{2.23}$$

Et le terme $O(1)$ est uniforme en λ.

Nous déduisons que

$$E\left[I_T(\lambda)\right] = \frac{1}{2\pi T} cum \left\{d_{Z,T}(\lambda), d_{Z,T}(-\lambda)\right\} = \Phi_Z(\lambda) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Par ailleurs

$$E\left[\overset{\Lambda}{R}_X(0)\right] = \frac{1}{\beta T}\int_0^T R_X(0)\,\beta dt = R_X(0).$$

Rappelons que $K_T \in IL_1$ où $K_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda - u)\, W_T(u)\, du$.

Mais

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} I_T(u)\left[W_T(\lambda - u) - K_T(\lambda - u)\right] du - \frac{1 - \gamma(0)}{2\pi\beta}\overset{\Lambda}{R}_X(0).$$

Alors par l'application de théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] &= \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\Phi_Z(u) + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\}\left[W_T(\lambda - u) - K_T(\lambda - u)\right] du \\
&\quad - \frac{1 - \gamma(0)}{2\pi\beta} R_X(0) \\
&= \frac{1}{\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_Z(u)\left[W_T(\lambda - u) - K_T(\lambda - u)\right] du \qquad (2.24) \\
&\quad - \frac{1 - \gamma(0)}{2\pi\beta} R_X(0) + O\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}$$

Posons

$$J \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_Z(u)\left[W_T(\lambda - u) - K_T(\lambda - u)\right] du.$$

Nous rappelons que

$$\Phi_Z(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuv} dC_Z^{(2)}(v).$$

Par le théorème de Fubini il vient

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivu}\left[W_T(\lambda-u)-K_T(\lambda-u)\right]dC_Z^{(2)}(v)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuv}W_T(\lambda-u)\,du-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuv}K_T(\lambda-u)\,du\right]dC_Z^{(2)}. \end{aligned}$$

Par des calculs élémentaires, nous montrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuv}W_T(\lambda-u)\,du = e^{-iv\lambda}w(vb_T).$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuv}K_T(\lambda-u)\,du = e^{-iv\lambda}\gamma(v)\,w(b_Tv).$$

En rappelant que (voir(2.5))

$$dC_Z^{(2)}(v) = R_X(v)\left\{\beta^2dv + C_N(dv)\right\}.$$

Et d'aprés (2.8)

$$1-\gamma(u) = \frac{\beta^2}{c_N(u)+\beta^2}.$$

Nous arrivons en sachant que $w(0)=1$ à

$$\begin{aligned} E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}R_X(u)\,w(b_Tu)du + O\left(\frac{1}{T}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u)\,\Phi_X(u)\,du + O\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre par le théorème de la convergence dominée que

$$E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] \to \Phi_X(\lambda) \quad \text{quand} \quad T\to\infty. \tag{2.25}$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.1 (Lii et Masry 1994)

Soit X un processus à temps continu, stationnaire, de moyenne nulle, de fonction de covariance $R_X \in IL_1$, et de densité spectrale Φ_X. Soit $\{\tau_k\}$ un processus ponctuel stationnaire, *indépendant de X, d'intensité moyenne β de densité de covariance $c_N \in IL_1$ et tel que (2.9) soit vérifiée. Si W satisfait (2.13) alors l'estimateur de la densité spectrale $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ est asymptotiquement sans biais.*

Nous avons besoin du corollaire suivant qui donne le biais, dont la preuve est donnée dans l'appendice.

Corollaire 2.1

Si en plus on a, pour un entier n, $n > 0$

(i) $u^n R_X(u) \in IL_1$.

(ii) w est différentiable jusqu'à l'ordre n avec $w^{(n)}$ bornée et continue.

Alors

$$E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = \Phi_X(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib_T)^j w^{(j)}(0)}{j!} \Phi_X^{(j)}(\lambda) + o(b_T^n) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

En particulier si $n = 2$ en notant que $w^{(1)}(0) = 0$ et que w est paire, nous trouvons

$$biais\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = -\frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) + o\left(b_T^2\right) + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{2.26}$$

qui est indépendant du processus d'échantillonnage.

Etude de la covariance

Avant d'établir la covariance de $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ nous supposons :

Hypothèse 2.1

pour l'entier $K \geq 2$

a)

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} (1 + |u_j|) \left| c_X^{(k)}(u_1, ...u_{k-1}) \right| du_1...du_{k-1} < \infty, \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1 \text{ et } 2 \leq k \leq K, \tag{2.27}$$

où $c_X^{(k)}$ est le cumulant d'ordre k du processus X, $\left(c_X^{(2)}(u) = R_X(u)\right)$.

b) $c_X^{(4)}(0, u, u) \in IL_1 \cap IL_\infty$.

c)

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} (1+|u_j|) \left| c_N^{(k)} (u_1, ..., u_{k-1}) \right| du_1 ... du_{k-1} < \infty, \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1 \text{ et } 2 \leq k \leq K, \quad (2.28)$$

où $c_N^{(k)}$ *est défini par*

$$cum \{dN(t_1), ..., dN(t_k)\} = c_N^{(k)} (t_2 - t_1, .., t_k - t_1) \, dt_1 ... dt_k, \text{ pour des } t_j \text{ différents.}$$

Notons que $c_N^{(2)}(u) = c_N(u)$ et que l'hypothèse (2.1) exige que $E|X(t)|^k < \infty$, et que $E|dN(t)|^k < \infty$, pour l'existence des cumulants $c_X^{(k)}, c_N^{(k)}$ pour $2 \leq k \leq K$.

Nous définissons les cumulants $C_Z^{(k)}(u_1, ..., u_{k-1})$ du processus d'accroissement Z par

$$cum \{dZ(t_1), ..., dZ(t_k)\} = dC_Z^{(k)} (t_2 - t_1, ..., t_k - t_1) \, dt_1 ... dt_k, \quad (2.29)$$

et $C_Z^{(k)}$ est à variation bornée sur les cubes finis.

Alors sous *a)* et *c)* de l'hypothèse (2.1), (cf [2]) on a

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} (1+|u_j|) \, d \left| C_Z^{(k)} (u_1, ..., u_{k-1}) \right| < \infty, \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1 \text{ et } 2 \leq k \leq K \quad (2.30)$$

Le $k^{ième}$ cumulant du spectre $\Phi_Z^{(k)}(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1})$ est défini par

$$\Phi_Z^{(k)} (\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_j \right\} dC_Z^{(k)} (u_1, ..., u_{k-1}) \quad (2.31)$$

Notons que $\Phi_Z^{(k)}$ est bornée, uniformément continue mais elle n'est pas intégrable en général et que

$$\Phi_Z^{(2)}(\lambda) = \Phi_Z(\lambda).$$

Sous (2.30) on a (cf[2], théorème 4.1)

$$\begin{aligned} cum \{d_{Z,T}(\lambda_1), ..., d_{Z,T}(\lambda_k)\} &= (2\pi)^{k-1} D_T \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) \Phi_Z^{(k)} (\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) + O(1), \quad (2.32) \\ 2 &\leq k \leq K. \end{aligned}$$

où $d_{Z,T} = \int_0^T e^{-it\lambda} X(t)\, dN(t)$ et D_T est donnée par (2.23) et le terme $O(1)$ est uniforme en λ.

Nous avons besoin d'hypothèses sur W.

Hypothèse 2.2

W est une fonction réelle, paire, uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$W \in IL_1 \cap IL_\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\, d\lambda = 1.$$

Maintenant évaluons la covariance de $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$.

Théorème 2.2 (Lii et Masry 1994)

Si les hypothèses (2.1) avec $K = 4$ et (2.2) sont satisfaites et si $b_T \to 0$ avec $Tb_T \to \infty$,alors pour chaque λ et μ

$$\begin{aligned} cov\left(\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda), \overset{\Lambda}{\Phi}_X(\mu)\right) &= \frac{2\pi}{Tb_T\beta^4} \Phi_Z^2(\lambda)\left[\delta_{\lambda,\mu} + \delta_{\lambda,-\mu}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(x)\, dx \\ &+ o\left(\frac{1}{Tb_T}\right) + O\left(\frac{1}{T\sqrt{b_T}}\right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

où $\delta_{\lambda,\mu} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 & si\ \lambda=\mu \\ 0 & sinon \end{smallmatrix}\right.$ est le symbole delta de Kronecker.

Preuve. Posons

$$Q_T(\lambda) = W_T(\lambda) - K_T(\lambda), \tag{2.34}$$

d'aprés (2.21) on a

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} I_T(u)\, Q_T(\lambda - u)\, du - \frac{\beta\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi} \overset{\Lambda}{R}_X(0)\right\}. \tag{2.35}$$

Notons que par (2.13), (2.18), (2.19), (2.20) on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Q_T(\lambda)|\, d\lambda \leq const < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(\lambda)\, d\lambda = 1 - \gamma(0). \tag{2.36}$$

D'où

$$cov\left(\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda), \overset{\Lambda}{\Phi}_X(\mu)\right) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{2.37}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\beta^4}\int_{\mathbb{R}^2} cov\left(I_T\left(u_1\right), I_T\left(u_2\right)\right) Q_T\left(\lambda-u_1\right) Q_T\left(\mu-u_2\right) du_1 du_2, \\
I_2 &= \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]^2}{\left(2\pi\beta\right)^2} VAR\left[\overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right)\right], \\
I_3 &= \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{2\pi\beta^3}\int_{-\infty}^{+\infty} cov\left(I_T\left(u_1\right), \overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right)\right) Q_T\left(\lambda-u_1\right) du_1, \\
I_4 &= \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{2\pi\beta^3}\int_{-\infty}^{+\infty} cov\left(I_T\left(u_2\right), \overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right)\right) Q_T\left(\mu-u_2\right) du_2.
\end{aligned}$$

Montrons que

i)

$$I_2 = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

ii)

$$I_1 = \frac{2\pi}{Tb_T\beta^4}\Phi_Z^2\left(\lambda\right)\left[\delta_{\lambda,\mu}+\delta_{\lambda,-\mu}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2\left(u\right) du + o\left(\frac{1}{Tb_T}\right) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

iii) Par l'inégalité de Cauchy-Shwartz et le fait que $Q_T \in IL_1$ on a

$$I_3 + I_4 = O\left(\frac{1}{T\sqrt{b_T}}\right).$$

en effet,

i)

$$\begin{aligned}
VAR\left[\overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right)\right] &= cov\left(\overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right), \overset{\Lambda}{R}_X\left(0\right)\right) = \frac{1}{\left(\beta T\right)^2}\int_0^T\int_0^T cum\left(X^2\left(t\right) dN\left(t\right), X^2\left(s\right) dN\left(s\right)\right) \\
&= \frac{1}{\left(\beta T\right)^2}\int_0^T\int_0^T [\left\{c_X^{(4)}\left(0, t-s, t-s\right) + R_X^2\left(0\right) + 2R_X^2\left(t-s\right)\right\} \\
&\quad \times\left\{cum\left(dN(t), dN(s)\right) + \beta^2 dtds\right\} - R_X^2\left(0\right)\beta^2 dtds] \\
&\leq \frac{1}{T\beta^2}\int_{-T}^{T}\left|\left\{c_X^{(4)}\left(0,\tau,\tau\right) + 2R_X^2\left(\tau\right)\right\}\left\{\beta^2 + c_N\left(\tau\right)\right\} + R_X^2\left(0\right) c_N\left(\tau\right)\right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\beta T}\left\{c_X^{(4)}\left(0,0,0\right) + 3R_X^2\left(0\right)\right\}.
\end{aligned}$$

D'aprés les hypothèses précédentes

$$R_X \in IL_1 \cap IL_\infty \text{ et } \ c_N \in IL_1 \text{ donc } R_X^2 \in IL_1 \text{ et } \ R_X^2 c_N \in IL_1.$$

Par $b)$ de l'hypothèse (2.1) $c_X^{(4)}(0,u,u) \in IL_1 \cap IL_\infty$, donc $c_X^{(4)}(0,u,u)\, c_N(u) \in IL_1$.
Nous arrivons à

$$VAR\left[\overset{\Lambda}{R}_X(0)\right] = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ c'est-à-dire } I_2 = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{2.38}$$

$ii)$ Afin d'évaluer I_1, rappelons que

$$I_T(u) = \frac{1}{2\pi T}\left|d_{Z,T}(u)\right|^2 = \frac{1}{2\pi T} d_{Z,T}(u)\,\overline{d_{Z,T}}(u) = \frac{1}{2\pi T} d_{Z,T}(u)\, d_{Z,T}(-u)\,, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}
cov\left(I_T(u_1), I_T(u_2)\right) &= \frac{1}{(2\pi T)^2} cum\left\{d_{Z,T}(u_1)\, d_{Z,T}(-u_1), d_{Z,T}(u_2)\, d_{Z,T}(-u_2)\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi T)^2} [cum\left\{d_{Z,T}(u_1), d_{Z,T}(-u_1), d_{Z,T}(u_2), d_{Z,T}(-u_2)\right\} \\
&\quad + cum\left\{d_{Z,T}(u_1), d_{Z,T}(u_2)\right\} cum\left\{d_{Z,T}(-u_1), d_{Z,T}(-u_2)\right\} \\
&\quad + cum\left\{d_{Z,T}(u_1), d_{Z,T}(-u_2)\right\} cum\left\{d_{Z,T}(-u_1), d_{Z,T}(u_2)\right\}].
\end{aligned}$$

En utilisant (2.32), nous avons

$$\begin{aligned}
cov\left(I_T(u_1), I_T(u_2)\right) &= \frac{1}{(2\pi T)^2} \{(2\pi)^3\, T \Phi_Z^{(4)}(u_1, -u_2, u_2) + O(1) \\
&\quad + \left[2\pi D_T(u_1+u_2)\, \Phi_Z(u_1) + O(1)\right] \\
&\quad \times \left[2\pi D_T(-u_1-u_2)\, \Phi_Z(-u_1) + O(1)\right] \\
&\quad + \left[2\pi D_T(u_1-u_2)\, \Phi_Z(u_1) + O(1)\right] \\
&\quad \times \left[2\pi D_T(-u_1+u_2)\, \Phi_Z(-u_1) + O(1)\right]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{T}\Phi_Z^{(4)}(u_1,-u_1,u_2) \\
&+\frac{1}{T}\Phi_Z^2(u_1)\left[\Delta_T(u_1+u_2)+\Delta_T(u_1-u_2)\right] \\
&+O\left(\frac{1}{T^2}\right)\{\Phi_Z(u_1)\left[D_T(u_1+u_2)+D_T(u_1-u_2)\right] \\
&+\Phi_Z(-u_1)\left[D_T(-u_1-u_2)+D_T(-u_1+u_2)\right]\} \\
&+O\left(\frac{1}{T^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

où

$$\Delta_T(\lambda)=\frac{1}{T}\left|D_T(\lambda)\right|^2 \tag{2.40}$$

est le noyau de Fejer.

Par la substitution dans I_1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2\pi}{T\beta^4}\int_{\mathbb{R}^2}\Phi_Z^{(4)}(u_1,-u_1,u_2)\,Q_T(\lambda-u_1)\,Q_T(\mu-u_2)\,du_1du_2 \\
&+\frac{1}{T\beta^4}\int_{\mathbb{R}^2}\Phi_Z^2(u_1)\left[\Delta_T(u_1+u_2)+\Delta_T(u_1-u_2)\right]Q_T(\lambda-u_1)\,Q_T(\mu-u_2)\,du_1du_2 \\
&+\frac{1}{\beta^4}O\left(\frac{1}{T^2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}\{\Phi_Z(u_1)\left[D_T(u_1+u_2)+D_T(u_1-u_2)\right] \\
&+\Phi_Z(-u_1)\left[D_T(-u_1-u_2)+D_T(-u_1+u_2)\right]\}Q_T(\lambda-u_1)\,Q_T(\mu-u_2)\,du_1du_2 \\
&+\frac{1}{\beta^4}O\left(\frac{1}{T^2}\right)\int_{\mathbb{R}^2}Q_T(\lambda-u_1)\,Q_T(\mu-u_2)\,du_1du_2.
\end{aligned}$$

Posons

$$I_1 \equiv J_1+J_2+J_3+J_4 \tag{2.41}$$

$\Phi_Z^{(4)}$ est bornée et $Q_T \in IL_1$ impliquent

$$J_1 = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.42}$$

Φ_Z est bornée, $\left|D_T(\lambda)\right| \leq T$ et $Q_T \in IL_1$ d'où

$$J_3 = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.43}$$

$Q_T \in IL_1$ donc

$$J_4 = O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{2.44}$$

Pour évaluer J_2 nous avons besoin du lemme suivant dont la preuve est donnée dans l'appendice ■

Lemme2.1 (Lii et Masry 1994).

Sous l'hypothèse (2.2), $\Gamma \in IL_1$ *et* $b_T \to 0$ *avec* $Tb_T \to \infty$ *quand* $T \to \infty$ *on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(\lambda - u)\, \Delta_T(u)\, du = 2\pi Q_T(\lambda) + o\left(\frac{1}{b_T}\right),$$

où le terme $o\left(\frac{1}{b_T}\right)$ *est uniforme en* λ.

Par utilisation du lemme précédent,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2\pi}{T\beta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Z^2(u_1)\, Q_T(\lambda - u_1)\left[Q_T(\mu + u_1) + Q_T(\mu - u_1)\right] du_1 \\ &\quad + o\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Z^2(u_1)\, Q_T(\lambda - u_1)\, du_1. \end{aligned}$$

Posons

$$J_2 = J_{21} + J_{22} \tag{2.45}$$

Φ_Z est bornée, $Q_T \in IL_1$, d'où

$$J_{22} = o\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.46}$$

Il reste à évaluer J_{21}.

$$\begin{aligned} J_{21} &= \frac{2\pi}{T\beta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Z^2(u_1)\, Q_T(\lambda - u_1)\, Q_T(\mu + u_1)\, du_1 \\ &\quad + \frac{2\pi}{T\beta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Z^2(u_1)\, Q_T(\lambda - u_1)\, Q_T(\mu - u_1)\, du_1. \end{aligned}$$

D'aprés (2.18) et (2.34) on a

$$\begin{aligned} Q_T(\lambda - u_1) Q_T(\mu \pm u_1) &= W_T(\lambda - u_1) W_T(\mu \pm u_1) \\ &\quad - W_T(\lambda - u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mu \pm u_1 - v_2) W_T(v_2) dv_2 \\ &\quad - W_T(\mu \pm u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda - u_1 - v_1) W_T(v_1) dv_1 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda - u_1 - v_1) \Gamma(\mu \pm u_1 - v_2) \\ &\quad \times W_T(v_1) W_T(v_2) dv_1 dv_2, \end{aligned}$$

$$\equiv F_1 + F_2 + F_3 + F_4. \tag{2.47}$$

Ainsi, J_{21} a quatre termes

$$J_{21} \equiv J_{21}^{'} + J_{21}^{''} + J_{21}^{'''} + J_{21}^{''''}, \tag{2.48}$$

$$J_{21}^{'} = \frac{2\pi}{T\beta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_Z^2(\lambda - b_T v) W(v) \left[W\left(\frac{\mu + \lambda}{b_T} - v \right) + W\left(\frac{\mu - \lambda}{b_T} + v \right) \right] dv.$$

Notons que par (2.13) $W \in IL_1 \cap IL_\infty$ et par l'hypothèse (2.2) W est uniformément continue et paire d'où

$$W(u) \to 0, \text{ quand } \ |u| \to \infty.$$

Ainsi le terme sous le signe intégrale tend vers

$$\Phi_Z^2(\lambda) W^2(v) [\delta_{\lambda,-\mu} + \delta_{\lambda,\mu}], \text{ quand } T \to \infty$$

et borné par une constante.Par le théorème de la convergence dominée, il vient

$$T b_T J_{21}^{'} \to \frac{2\pi}{\beta^4} \Phi_Z^2(\lambda) [\delta_{\lambda,\mu} + \delta_{\lambda,-\mu}] \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(v) dv. \tag{2.49}$$

Φ_Z est bornée, alors

$$\left| J_{21}^{''} \right| \le \frac{const}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_T(u)| du \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(v)| dv,$$

donc

$$J_{21}^{''} = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.50}$$

De la même manière nous montrons

$$J_{21}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.51}$$

Finalement

$$\left|J_{21}^{''''}\right| \leq \frac{const}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|W_T\left(v_1\right)\right| dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|W_T\left(v_2\right)\right| dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Gamma\left(u\right)\right| du,$$

d'où

$$J_{21}^{''''} = O\left(\frac{1}{T}\right) \text{ uniformément en } \lambda \text{ et } \mu. \tag{2.52}$$

Alors d'aprés (2.48), (2.49), (2.50), (2.51), (2.52)

$$J_{21} = \frac{2\pi}{Tb_T\beta^4}\Phi_Z^2\left(\lambda\right)\left[\delta_{\lambda,\mu} + \delta_{\lambda,-\mu}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2\left(v\right) dv + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{2.53}$$

Et d'aprés (2.45), (2.46) on a

$$J_2 = \frac{2\pi}{Tb_T\beta^4}\Phi_Z^2\left(\lambda\right)\left[\delta_{\lambda,\mu} + \delta_{\lambda,-\mu}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2\left(v\right) dv + O\left(\frac{1}{T}\right) + o\left(\frac{1}{Tb_T}\right). \tag{2.54}$$

Enfin, d'aprés (2.41), (2.42), (2.43), (2.54) on a

$$I_1 = \frac{2\pi}{Tb_T\beta^4}\Phi_Z^2\left(\lambda\right)\left[\delta_{\lambda,\mu} + \delta_{\lambda,-\mu}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2\left(v\right) dv + O\left(\frac{1}{T}\right) + o\left(\frac{1}{Tb_T}\right). \tag{2.55}$$

Nous avons prouvé $ii)$ et la preuve du théorème est achevée.

2.4.2 La normalité asymptotique

Théorème 2.3 (Lii et Masry 1994)

Si l'hypothèse (2.1) pour $K \geq 2$, et l'hypothèse (2.2) sont vérifiées et si $b_T = O\left(T^{-\alpha}\right)$ pour $0 < \alpha < 1$, alors *le vecteur aléatoire standardisé*

$$\left\{ (Tb_T)^{1/2} \left\{ \overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda_i) - E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda_i) \right] \right\}_{i=1}^{n} \right\}$$

suit asymptotiquement la loi normale de moyenne 0 et de matrice de covariance donnée par (2.33).

Pour la preuve se reporter à Lii et Masry 1994.

2.5 Cas particulier : échantillonnage poissonnien

Définition 2.1 *Posons par convention,* $T_0 = 0$*, Soit* β *un réel strictement positif.*

Le processus $(T_n)_{n\geq 1}$*est un processus de poisson de paramètre* β *si les variables aléatoires* $(T_n - T_{n-1})_{n\geq 1}$ *sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre* β*.*

Proposition 2.1(cf C. COCOZZA-THIVENT) *Considérons un processus ponctuel sur* $\mathbb{R}_+$*, de fonction de comptage* N*, c'est un processus de poisson de paramètre* β *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

1) $N(0) = 0$ *presque-sûrement.*

2) *Le processus* N *est à accroissements indépendants, c'est-à-dire pour tout* n *et* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *les variables aléatoires* $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$ *sont indépendantes .*

3) *pour* $0 \leq s \leq t$*, la variable aléatoire* $N(t) - N(s)$ *est de loi de Poisson de paramètre* $\beta(t-s)$*.*

Soit $N(.)$ le processus de comptage associé au processus ponctuel poissonnien $\{\tau_k\}$, alors d'aprés la proposition précédente on a

$$\begin{aligned} E[N(0,1)] &= \beta \\ cov(dN(t_1), dN(t_2)) &= c_N(t_2 - t_1) = 0 \end{aligned}$$

donc $c_N(u) = 0$ et d'aprés (2.8) et (2.9) on a $\gamma(u) = 0$ et $\Gamma(u) = 0$.

Vu les simplifications obtenues dans ce cas, nous avons

$$\Phi_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\Phi_Z(\lambda) - \frac{\beta}{2\pi}R_X(0)\right\}$$

d'où

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\overset{\Lambda}{\Phi}_Z(\lambda) - \frac{\beta}{2\pi}\overset{\Lambda}{R}_X(0)\right\}$$

où $\overset{\Lambda}{\Phi}_Z$ et $\overset{\Lambda}{R}_X$ sont définis dans (2.12) et (2.15).

Ainsi

$$\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi T\beta^2}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N(T)} \exp\left[-i\left(\tau_j - \tau_k\right)\right] w\left[b_T\left(\tau_j - \tau_k\right)\right] X\left(\tau_j\right) X\left(\tau_k\right),$$

Chapitre 3

Estimation de la densité spectrale d'un processus de moyenne inconnue

Dans la pratique la moyenne d'un processus est généralement inconnue, c'est pourquoi nous allons nous intéresser à ce cas dont les calculs n'ont pas été menés par Lii et Masry.

Soit $X = \{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ un processus stationnaire de moyenne inconnue m estimée par

$$\overset{\Lambda}{m}_T = \frac{1}{\beta T} \int_0^T X(t)\, dN(t) = \frac{1}{\beta T} \sum_{j=0}^{N(T)} X(\tau_j) \tag{3.1}$$

donc $E\overset{\Lambda}{m}_T = m$

les mêmes conditions imposées sur le processus X dans le chapitre 2 restent valables pour le processus X de moyenne m dans ce chapitre .

Posons

$$Y(t) = X(t) - m \tag{3.2}$$

alors

$$E[Y(t)] = 0 \tag{3.3}$$

nous utilisons (2.17) pour obtenir l'estimateur de la densité spectrale du procesus X par

$$\overset{\smile}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda} w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right] \times \left(X(\tau_j)-\overset{\Lambda}{m}_T\right)\left(X(\tau_k)-\overset{\Lambda}{m}_T\right). \tag{3.4}$$

écrivons $\overset{\smile}{\Phi}_X$ en fonction de l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Phi}_Y$ de Φ_Y et un autre terme, en effet

$$\overset{\smile}{\Phi}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda} w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right] \left(X(\tau_j)-m+m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)\left(X(\tau_k)-m+m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)$$

mais on a $Y(t)=X(t)-m$, donc

$$\begin{aligned}
\overset{\smile}{\Phi}_X(\lambda) = {} & \overset{\Lambda}{\Phi}_Y(\lambda) \\
& +\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda} w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right] \\
& \times\left(X(\tau_j)-m\right)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right) \\
& -\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\left[1-\gamma(0)\right]\left(X(\tau_j)-m\right)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right) \\
& +\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda} w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right] \\
& \times\left(X(\tau_k)-m\right)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right) \\
& -\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\left[1-\gamma(0)\right]\left(X(\tau_j)-m\right)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right) \\
& +\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\sum_{k=1}^{N(T)} e^{-i(\tau_j-\tau_k)\lambda} w\left[b_T(\tau_j-\tau_k)\right]\left[1-\gamma(\tau_j-\tau_k)\right]\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)^2 \\
& -\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\sum_{j=1}^{N(T)}\left[1-\gamma(0)\right]\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
\breve{\Phi}_X(\lambda) &= \overset{\Lambda}{\Phi}_Y(\lambda) \qquad (3.6)\\
&+\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right]\\
&(X(s)-m)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)dN(t)\,dN(s)\\
&-\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma(0)\right]\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)(X(s)-m)\,dN(s)\\
&+\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right]\\
&(X(t)-m)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)dN(t)\,dN(s)\\
&-\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma(0)\right]\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)(X(t)-m)\,dN(s)\\
&+\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right]\\
&\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)^2 dN(t)\,dN(s)\\
&-\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma(0)\right]\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)^2 dN(s)
\end{aligned}
$$

posons

$$
\breve{\Phi}_X(\lambda) \equiv \overset{\Lambda}{\Phi}_Y(\lambda) + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 \qquad (3.7)
$$

3.1 Propriétés de l'estimateur

3.1.1 Etude du biais

D'aprés (3.7), nous avons

$$
E\left[\breve{\Phi}_X(\lambda)\right] = E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_Y(\lambda)\right] + \sum_{i=1}^{6} E\left[C_i\right] \qquad (3.8)
$$

1) d'aprés le théorème (2.1) on a

$$
E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_Y(\lambda)\right] \to \Phi_Y(\lambda) = \Phi_X(\lambda) \quad \text{quand } T \to \infty \qquad (3.9)
$$

2) On a

$$
\begin{aligned}
E[C_1] &= \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad E[(X(s)-m)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)dN(t)\,dN(s)]
\end{aligned}
$$

mais on a

$$
\begin{aligned}
& E\left[(X(s)-m)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)dN(t)\,dN(s)\right] \\
=\; & mE\left[(X(s)-m)\,dN(t)\,dN(s)\right] \\
& -E\left[(X(s)-m)\,\overset{\Lambda}{m}_T dN(t)\,dN(s)\right] \\
=\; & mE\left[(X(s)-m)\right]E\left[dN(t)\,dN(s)\right] \\
& -E\left[(X(s)-m)\frac{1}{\beta T}\int_0^T X(v)\,dN(v)\,dN(t)\,dN(s)\right] \\
=\; & -\frac{1}{\beta T}\int_0^T E\left[(X(s)-m)\,X(v)\,dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\right] \\
=\; & -\frac{1}{\beta T}\int_0^T E\left[(X(s)-m)\,X(v)\right]E\left[dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\right]
\end{aligned}
$$

avec

$$
E\left[(X(s)-m)\,X(v)\right] = R_X(v-s)
$$

alors

$$
\begin{aligned}
E\left[C_1\right] &= -\frac{1}{2\pi\beta^3 T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad R_X(v-s)\,E\left[dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\right]
\end{aligned}
$$

on a

$$
\begin{aligned}
E\left[dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\right] &= [c_N^{(3)}(s-t,v-t) + \{\beta c_N^{(2)}(v-s) + \beta^2\delta_0(v-s)\} \\
&\quad +\{\beta c_N^{(2)}(v-t) + \beta^2\delta_0(v-t)\} \\
&\quad +\{\beta c_N^{(2)}(s-t) + \beta^2\delta_0(s-t)\} + \beta^3]dtdsdv
\end{aligned}
$$

où $c_N^{(k)}$ est le cumulant d'ordre k de N (voir l'hypothèse 2.1),

alors

$$E\left[C_1\right] = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5. \tag{3.10}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{2\pi\beta^3 T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2-\tau_1\right) \\ & c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

$$|K_1| \leq \frac{1}{\pi\beta^3 T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2-\tau_1\right)c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right|d\tau_1 d\tau_2$$

$$|K_1| \leq \frac{1}{\pi\beta^3 T}\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2-\tau_1\right)c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right|d\tau_1 d\tau_2$$

on a R_X, w, γ bornées et d'aprés l'hypothèse 2.1.c, on trouve

$$K_1 = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.11}$$

De la même manière on a

$$|K_2| \leq \frac{1}{\pi\beta^2 T}\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2\right)\left[c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta_0\left(\tau_2\right)\right]\right|d\tau_1 d\tau_2$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\pi\beta^2 T}\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2\right)c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)\right|d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad +\frac{1}{2\pi\beta T}\left|R_X\left(0\right)\right|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]\right|d\tau_1 \end{aligned}$$

D'une part R_X et γ sont bornées et d'autre part w et $c_N^{(2)}$ sont intégrables

D'où

$$K_2 = O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \tag{3.12}$$

de la même façon on trouve que

$$\begin{aligned} K_3 &= O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) && (3.13) \\ K_4 + K_5 &= O\left(\frac{1}{T}\right) && (3.14) \end{aligned}$$

alors

$$E\left\{C_1\right\} = O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \tag{3.15}$$

3) Maintenant nous évaluons $E\left[C_2\right]$, nous avons

$$\begin{aligned} E\left[C_2\right] &= -\frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T E[(X\left(s\right)-m)\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)dN\left(s\right)] \\ &= \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{2\pi\beta^3 T^2}\int_0^T\int_0^T R_X\left(s-t\right)[c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(s-t\right)]dtds \end{aligned}$$

donc

$$E\left[C_2\right] = \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{2\pi\beta^3 T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_X\left(\tau\right)\left[c_N^{(2)}\left(\tau\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(\tau\right)\right]d\tau$$

et

$$\left|E\left[C_2\right]\right| \leq \frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{\pi\beta^3 T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|R_X\left(\tau\right)\left[c_N^{(2)}\left(\tau\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(\tau\right)\right]\right|d\tau$$

$R_X \in IL_1 \cap IL_\infty$ et $c_N^{(2)} \in IL_1$ d'où

$$E\left[C_2\right] = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.16}$$

4) commme dans 2) et 3) on a

$$E\left[C_3\right] = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.17}$$

et

$$E\left[C_4\right] = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.18}$$

5) On a

$$C_5 = \frac{1}{2\pi\beta^2 T} \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \left(m - \overset{\Lambda}{m}_T\right)^2 dN(t)\, dN(s)$$

Par le développement de $\left(m - \overset{\Lambda}{m}_T\right)^2$ on trouve que

$$E\left[C_5\right] \equiv C_5' + C_5'' + C_5'''$$

où

$$C_5' = \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T} \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] E\left\{dN(t)\, dN(s)\right\},$$

$$C_5'' = -\frac{m^2}{\pi\beta^3 T^2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] E\left\{dN(t)\, dN(s)\, dN(v)\right\}$$

et

$$\begin{aligned} C_5''' &= \frac{1}{2\pi\beta^4 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \left[R_X(u-v) + m^2\right] E\left\{dN(t)\, dN(s)\, dN(v)\, dN(u)\right\} \end{aligned}$$

Evaluons C_5'

$$\begin{aligned} C_5' &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T} \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \left[c_N^{(2)}(s-t) + \beta^2 + \beta\delta_0(t-s)\right] dtds \\ &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau\lambda} w\left[b_T\tau\right]\left[1-\gamma(\tau)\right]\left[c_N^{(2)}(\tau) + \beta^2\right] d\tau + \frac{m^2}{2\pi\beta}\left[1-\gamma(0)\right] \end{aligned}$$

on utilise (2.8) pour trouver que

$$\left[1-\gamma(\tau)\right] = \frac{\beta^2}{\beta^2 + c_N^{(2)}(\tau)}$$

donc par la substitution dans l'expression de $C_5^{'}$ on a

$$\begin{aligned} C_5^{'} &= \frac{m^2}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i\tau\lambda}w\left[b_T\tau\right]d\tau+\frac{m^2}{2\pi\beta}\left[1-\gamma\left(0\right)\right] \\ &= K_1^{'}+K_2^{'} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Evaluons $C_5^{''}$

$$\begin{aligned} C_5^{''} &= \frac{-2m^2}{2\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ &\quad [c_N^{(3)}(s-t,v-t)+\{\beta c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta^2\delta\left(v-s\right)\} \\ &\quad +\{\beta c_N^{(2)}\left(v-t\right)+\beta^2\delta\left(v-t\right)\}+\{\beta c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^3+\beta\delta\left(s-t\right)\}]dtdsdv \end{aligned}$$

D'où

$$C_5^{''}=K_1^{''}+K_2^{''}+K_3^{''}+K_4^{''}$$

pour $K_1^{''}$ on a

$$\begin{aligned} K_1^{''} &= -\frac{2m^2}{2\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ &\quad \left[c_N^{(3)}\left(s-t,v-t\right)\right]dtdsdv \end{aligned}$$

alors

$$K_1^{''}=-\frac{2m^2}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2$$

donc

$$\begin{aligned} \left|K_1^{''}\right| &\leq \frac{2m^2}{\pi\beta^3T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right|d\tau_1d\tau_2 \\ &\leq \frac{2m^2}{\pi\beta^3T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\tau_1\right]\right|\left[1+\left|\gamma\left(\tau_1\right)\right|\right]\left|c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right|d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

w et γ sont bornées et d'aprés l'hypothèse (2.1.c), alors

$$K_1^{''}=O\left(\frac{1}{T}\right)$$

pour $K_2^{''}$ on a

$$\begin{aligned}
K_2^{''} &= -\frac{m^2}{\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad \beta\left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta\left(v-s\right)\right]dtdsdv \\
&= -\frac{m^2}{\pi\beta^2T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad \left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta\left(v-s\right)\right]dtds
\end{aligned}$$

posons $\tau_1 = s-t$

$\tau_2 \ = v-s,$ alors

$$K_2^{''} = -\frac{m^2}{\pi\beta^2T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right][c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta\left(\tau_2\right)]d\tau_1d\tau_2$$

$c_N\in IL_1, w\in IL_1$ et γ bornée, alors

$$K_2^{''} = O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)$$

maintenant pour $K_3^{''}$ on a

$$\begin{aligned}
K_3^{''} &= -\frac{m^2}{\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad \beta\left[c_N^{(2)}\left(v-t\right)+\beta\delta\left(v-t\right)\right]dtdsdv
\end{aligned}$$

alors

$$K_3^{''} = -\frac{m^2}{\pi\beta^2T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right][c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta\left(\tau_2\right)]d\tau_1d\tau_2$$

$c_N\in IL_1, \gamma$ est bornée, $w\in IL_1$, donc

$$K_3^{''} = O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)$$

pour $K_4^{''}$ on a

$$\begin{aligned} K_4^{''} &= -\frac{m^2}{\pi\beta^3 T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \times\beta\left[c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta(s-t)\right] dtdsdv \end{aligned}$$

posons $\tau = s-t$,

$$\begin{aligned} K_4^{''} &= -\frac{m^2}{\pi\beta^2}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i\tau\lambda}w\left[b_T\tau\right]\left[1-\gamma(\tau)\right]\left[c_N^{(2)}(\tau)+\beta^2+\beta\delta(\tau)\right]d\tau \\ &= -\frac{m^2}{\pi\beta^2}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i\tau\lambda}w\left[b_T\tau\right]\left[1-\gamma(\tau)\right]\left[c_N^{(2)}(\tau)+\beta^2\right]d\tau \\ &\quad -\frac{m^2}{\pi\beta^2}\left[1-\gamma(0)\right]\beta \end{aligned}$$

mais

$$1-\gamma(\tau) = \frac{\beta^2}{c_N^{(2)}(\tau)+\beta^2}$$

donc

$$K_4^{''} = -\frac{m^2}{\pi}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i\tau\lambda}w\left[b_T\tau\right]d\tau - \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{\pi\beta}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_5^{''} &= K_1^{''}+K_2^{''}+K_3^{''}+K_4^{''} \\ C_5^{''} &= -\frac{m^2}{\pi}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i\tau\lambda}w\left[b_T\tau\right]d\tau - \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{\pi\beta}+O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Il reste à évaluer $C_5^{'''}$

$$\begin{aligned} C_5^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \left[R_X(u-v)+m^2\right]E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(u)\right\} \end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(u)\right\} &= \{c_N^{(4)}(s-t,v-t,u-t) \\
&+\beta c_N^{(3)}(v-s,u-s)+\beta c_N^{(3)}(v-t,u-t) \\
&+\beta c_N^{(3)}(s-t,u-t)+\beta c_N^{(3)}(s-t,v-t) \\
&+\left[c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta(s-t)\right]\left[c_N^{(2)}(u-v)+\beta\delta(u-v)\right] \\
&+\beta^2\left[c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta(s-t)\right] \\
&+\left[c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta(v-t)\right]\left[c_N^{(2)}(u-s)+\beta\delta(u-s)\right] \\
&+\beta^2\left[c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta(v-t)\right]+\beta^2\left[c_N^{(2)}(u-s)+\beta\delta(u-s)\right] \\
&+\left[c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta(v-s)\right]\left[c_N^{(2)}(u-t)+\beta\delta(u-t)\right] \\
&+\beta^2\left[c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta(v-s)\right] \\
&+\beta^2\left[c_N^{(2)}(u-t)+\beta\delta(u-t)\right]\}dtdsdvdu.
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
C_5^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad R_X(u-v)\,E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(u)\right\} \\
&\quad +\frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(v)\right\} \\
&= K_1^{'''}+K_2^{'''},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
K_1^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad R_X(u-v)\,E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(u)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{13}K_{1(i)}^{'''}
\end{aligned}
$$

Pour $K^{'''}_{1(1)}$on a

$$\begin{aligned} K^{'''}_{1(1)} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad R_X\left(u-v\right)c_N^{(4)}\left(s-t,v-t,u-t\right)dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K^{'''}_{1(1)} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\ & \quad R_X\left(\tau_3-\tau_2\right)c_N^{(4)}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \end{aligned}$$

w est continue, γ et R_X sont bornées, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$K^{'''}_{1(1)} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

pour $K^{'''}_{1(2)}$ on a

$$\begin{aligned} K^{'''}_{1(2)} &= \frac{1}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad R_X\left(u-v\right)c_N^{(3)}(v-s,u-s)dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K^{'''}_{1(2)} &= \frac{1}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_3\lambda}w\left[b_T\tau_3\right]\left[1-\gamma\left(\tau_3\right)\right] \\ & \quad R_X\left(\tau_2-\tau_1\right)c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left|K^{'''}_{1(2)}\right| &\leq \frac{1}{\pi\beta^3T^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|w\left[b_T\tau_3\right]\left[1-\gamma\left(\tau_3\right)\right]\right| \\ & \quad \times\left|R_X\left(\tau_2-\tau_1\right)c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right|d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \end{aligned}$$

$w \in IL_1$, γ et R_X sont bornées, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) alors on trouve que

$$K_{1(2)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

de même pour $K_{1(3)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(3)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad R_X\left(u-v\right) c_N^{(3)}\left(v-t, u-t\right) dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$K_{1(3)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

pour $K_{1(4)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(4)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad R_X\left(u-v\right) c_N^{(3)}\left(s-t, u-t\right) dtdsdvdu \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} K_{1(4)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^3 T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i(\tau_1)\lambda} w\left[b_T(\tau_1)\right] \\ & \quad \left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] R_X\left(\tau_3\right) c_N^{(3)}\left(\tau_1, \tau_2\right) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

w est continue, γ est bornée, $R_X \in IL_1$et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$K_{1(4)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

pour $K_{1(5)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(5)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & R_X\left(u-v\right)c_N^{(3)}\left(s-t,v-t\right)dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{1(5)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i(\tau_1)\lambda}w\left[b_T\left(\tau_1\right)\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\ & R_X\left(\tau_3\right)c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \end{aligned}$$

comme dans $K_{1(4)}^{'''}$ on a

$$K_{1(5)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

pour $K_{1(6)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(6)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\ & \times\left[c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta\left(s-t\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(u-v\right)+\beta\delta\left(u-v\right)\right]dtdsdv \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{1(6)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2\right) \\ & \times\left[c_N^{(2)}\left(\tau_1\right)+\beta^2+\beta\delta\left(\tau_1\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta\left(\tau_2\right)\right]d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

on a $[1-\gamma(\tau_1)]\left[c^{(2)}(\tau_1)+\beta^2\right]=\beta^2$, d'où

$$\begin{aligned}
K_{1(6)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]R_X(\tau_2) \\
&\quad\times c_N^{(2)}(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad+\frac{R_X(0)}{2\pi\beta T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]d\tau_1 \\
&\quad+\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3 T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)R_X(\tau_2)\,c_N^{(2)}(\tau_2)\,d\tau_2 \\
&\quad+\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^2 T}R_X(0)
\end{aligned}$$

$w\in IL_1, R_X\in IL_\infty, c_N^{(2)}\in IL_1$, donc

$$K_{1(6)}^{'''}=O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)$$

pour $K_{1(7)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned}
K_{1(7)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2 T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right]R_X(u-v) \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta(s-t)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}$$

et par un changement de variable on trouve

$$\begin{aligned}
K_{1(7)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right]R_X(\tau_2) \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}(\tau_1)+\beta^2+\beta\delta(\tau_1)\right]d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]R_X(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad+\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)R_X(\tau_2)\,d\tau_2
\end{aligned}$$

$w\in IL_1, R_X\in IL_1$, alors

$$K_{1(7)}^{'''}=O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)$$

pour $K_{1(8)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(8)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4 T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\ & \left[c_N^{(2)}\left(v-t\right)+\beta\delta\left(v-t\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(u-s\right)+\beta\delta\left(u-s\right)\right]dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{1(8)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4 T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3+\tau_1-\tau_2\right) \\ & \left[c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta\left(\tau_2\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)+\beta\delta\left(\tau_3\right)\right]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= \frac{1}{2\pi\beta^4 T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3+\tau_1-\tau_2\right) \\ & c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & +\frac{1}{2\pi\beta^3 T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_1-\tau_2\right) \\ & c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2 \\ & +\frac{1}{2\pi\beta^3 T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3+\tau_1\right) \\ & c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1 d\tau d\tau_3 \\ & +\frac{1}{2\pi\beta^2 T^2}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_1\right)d\tau_1 \end{aligned}$$

$w \in IL_1, \gamma$ est bornée $R_X \in IL_1 \cap IL_\infty, c_N^{(2)} \in IL_1$, donc

$$K_{1(8)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

pour $K_{1(9)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(9)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2 T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\ & \left[c_N^{(2)}\left(v-t\right)+\beta\delta\left(v-t\right)\right]dtdsdvdu. \end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{1(9)} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right) \\
&\quad c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
&\quad +\frac{1}{2\pi\beta T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right)d\tau_1 d\tau_3
\end{aligned}
$$

$w\in IL_1, \gamma$ est bornée $R_X\in IL_1\cap IL_\infty, c_N^{(2)}\in IL_1$, d'où

$$
K^{'''}_{1(9)} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)
$$

pour $K^{'''}_{1(10)}$ on a

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{1(10)} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\
&\quad \left[c_N^{(2)}\left(u-s\right)+\beta\delta\left(u-s\right)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{1(10)} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right) \\
&\quad c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
&\quad +\frac{1}{2\pi\beta T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right)d\tau_1 d\tau_3
\end{aligned}
$$

et comme dans $K^{'''}_{1(9)}$ on a

$$
K^{'''}_{1(10)} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)
$$

pour $K^{'''}_{1(11)}$ on a

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{1(11)} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\
&\quad \times\left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta\left(v-s\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(u-t\right)+\beta\delta\left(u-t\right)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}
$$

alors on trouve que

$$\begin{aligned}
K_{1(11)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3-\tau_1-\tau_2\right) \\
&\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \\
&+\frac{1}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_2-\tau_1\right) \\
&\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2 \\
&+\frac{1}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3-\tau_1\right) \\
&\times c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1d\tau_3 \\
&+\frac{1}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(-\tau_1\right)d\tau_1
\end{aligned}$$

$w\in IL_1,\gamma$ est bornée $R_X\in IL_1\cap IL_\infty, c_N^{(2)}\in IL_1$, alors

$$K_{1(11)}^{'''}=O\left(\frac{1}{T^2b_T}\right)$$

pour $K_{1(12)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned}
K_{1(12)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^3}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right]R_X\left(u-v\right) \\
&\times\left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta\left(v-s\right)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
K_{1(12)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right) \\
&\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \\
&+\frac{1}{2\pi\beta T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]R_X\left(\tau_3\right)d\tau_1d\tau_3
\end{aligned}$$

$w\in IL_1, R_X\in IL_1,\gamma$ est bornée, alors

$$K_{1(12)}^{'''}=O\left(\frac{1}{T^2b_T}\right)$$

enfin pour $K_{1(13)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{1(13)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right]R_X(u-v) \\ &\quad \times\left[c_N^{(2)}(u-t)+\beta\delta(u-t)\right]dtdsdvdu \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} K_{1(13)}^{'''} &= \frac{1}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right]R_X(\tau_3) \\ &\quad \times c_N^{(2)}(\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \\ &\quad +\frac{1}{2\pi\beta T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right]R_X(\tau_3)\,d\tau_1d\tau_3 \end{aligned}$$

$w\in IL_1, R_X\in IL_1, \gamma$ est bornée, d'où

$$K_{1(13)}^{'''}=O\left(\frac{1}{T^2b_T}\right)$$

mais

$$K_1^{'''}=\sum_{i=1}^{13}K_{1(i)}^{'''}$$

d'où

$$K_1^{'''}=O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \tag{3.21}$$

Evaluons maintenant $K_2^{'''}$

$$\begin{aligned} K_2^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \times E\left\{dN(t)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(v)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{13}K_{2(i)}^{'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2(1)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad c_N^{(4)}(s-t,v-t,u-t)\,dtdsdvdu \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} K_{2(1)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4 T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\ & \quad c_N^{(4)}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3\right) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

w est continue, γ est bornée, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$K_{2(1)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

$$\begin{aligned} K_{2(2)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad c_N^{(3)}(v-s,u-s) dt ds dv du \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|K_{2(2)}^{'''}\right| &\leq \frac{m^2}{\pi\beta^3 T^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|w\left[b_T\tau_3\right]\left[1-\gamma\left(\tau_3\right)\right]\right| \\ & \quad \times \left|c_N^{(3)}\left(\tau_1,\tau_2\right)\right| d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

$w \in IL_1$, γ es bornée, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on trouve que

$$K_{2(2)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

$$\begin{aligned} K_{2(3)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\ & \quad c_N^{(3)}\left(v-t,u-t\right) dt ds dv du \end{aligned}$$

d'où

$$K_{2(3)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

pour $K_{2(4)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{2(4)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w \left[b_T (s-t)\right] \left[1-\gamma (s-t)\right] \\ & c_N^{(3)} (s-t, u-t) \, dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{2(4)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i(\tau_1)\lambda} w \left[b_T(\tau_1)\right] \\ & \left[1-\gamma(\tau_1)\right] c_N^{(3)} (\tau_1, \tau_2) \, d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

w est continue, γ est bornée, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$K_{2(4)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} K_{2(5)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w \left[b_T (s-t)\right] \left[1-\gamma (s-t)\right] \\ & c_N^{(3)} (s-t, v-t) \, dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{2(5)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^3 T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i(\tau_1)\lambda} w \left[b_T (\tau_1)\right] \left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\ & c_N^{(3)} (\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

comme pour $K_{2(4)}^{'''}$ on a

$$K_{2(5)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$
\begin{aligned}
K'''_{2(6)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta\left(s-t\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(u-v\right)+\beta\delta\left(u-v\right)\right]dtdsdv
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
K'''_{2(6)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(\tau_1\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(\tau_1\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)+\beta\delta_0\left(\tau_2\right)\right]d\tau_1d\tau_2
\end{aligned}
$$

on a $\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]\left[c^{(2)}\left(\tau_1\right)+\beta^2\right]=\beta^2$, alors

$$
\begin{aligned}
K'''_{2(6)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right] \\
&\quad\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2 \\
&\quad+\frac{m^2}{2\pi\beta T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]d\tau_1 \\
&\quad+\frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]m^2}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_2|}{T}\right)c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_2 \\
&\quad+\frac{\left[1-\gamma\left(0\right)\right]m^2}{2\pi\beta^2T}
\end{aligned}
$$

$w\in IL_1, c_N^{(2)}\in IL_1$, d'où

$$
K'''_{2(6)}=O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
K'''_{2(7)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(s-t\right)\right]dtdsdvdu \\
&= \frac{m^2}{2\pi\beta^2T}\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(s-t\right)\right]dtds
\end{aligned}
$$

et par le changement de variable $\tau = s - t$ on trouve

$$\begin{aligned} K'''_{2(7)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau\right]\left[1-\gamma(\tau)\right] \\ &\quad \times \left[c_N^{(2)}(\tau) + \beta^2 + \beta\delta(\tau)\right] d\tau \\ &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\beta^2 d\tau + \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta} \end{aligned}$$

car $\left[1-\gamma(\tau)\right]\left[c_N^{(2)}(\tau) + \beta^2\right] = \beta^2$, d'où

$$K'''_{2(7)} = \frac{m^2}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right] d\tau + \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta}.$$

$$\begin{aligned} K'''_{2(8)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \left[c_N^{(2)}(v-t) + \beta\delta_0(v-t)\right]\left[c_N^{(2)}(u-s) + \beta\delta_0(u-s)\right] dtdsdvdu \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K'''_{2(8)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\ &\quad \left[c_N^{(2)}(\tau_2) + \beta\delta_0(\tau_2)\right]\left[c_N^{(2)}(\tau_3) + \beta\delta_0(\tau_3)\right] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\ &\quad c_N^{(2)}(\tau_2)\, c_N^{(2)}(\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta^3T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\ &\quad c_N^{(2)}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta^3T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\ &\quad c_N^{(2)}(\tau_3)\, d\tau_1 d\tau d\tau_3 \\ &\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta^2T^2} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] d\tau_1 \end{aligned}$$

$w \in IL_1, \gamma$ est bornée , $c_N^{(2)} \in IL_1$, donc

$$K_{2(8)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

$$\begin{aligned}
K_{2(9)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad \left[c_N^{(2)}(v-t) + \beta\delta_0(v-t)\right] dtdsdvdu \\
&= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] c_N^{(2)}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] d\tau_1
\end{aligned}$$

$w \in IL_1, \gamma$ est bornée , $c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$K_{2(9)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T b_T}\right)$$

$$\begin{aligned}
K_{2(10)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T(s-t)\right]\left[1-\gamma(s-t)\right] \\
&\quad \left[c_N^{(2)}(u-s) + \beta\delta_0(u-s)\right] dtdsdvdu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] \\
&\quad c_N^{(2)}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] d\tau_1
\end{aligned}$$

et comme pour $K_{2(9)}^{'''}$ on a

$$K_{2(10)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T b_T}\right)$$

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{2(11)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta_0\left(v-s\right)\right]\left[c_N^{(2)}\left(u-t\right)+\beta\delta_0\left(u-t\right)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m^2}{2\pi\beta^4T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\
&\quad\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \\
&\quad+\frac{m^2}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\
&\quad\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2 \\
&\quad+\frac{m^2}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\
&\quad\times c_N^{(2)}\left(\tau_3\right)d\tau_1d\tau_3 \\
&\quad+\frac{m^2}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]d\tau_1
\end{aligned}
$$

$w\in IL_1, \gamma$ est bornée, $c_N^{(2)}\in IL_1$, d'où

$$K^{'''}_{2(11)}=O\left(\frac{1}{T^2b_T}\right)$$

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{2(12)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T e^{-i(s-t)\lambda}w\left[b_T\left(s-t\right)\right]\left[1-\gamma\left(s-t\right)\right] \\
&\quad\times\left[c_N^{(2)}\left(v-s\right)+\beta\delta_0\left(v-s\right)\right]dtdsdvdu
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
K^{'''}_{2(12)} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2T}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right] \\
&\quad\times c_N^{(2)}\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2 \\
&\quad+\frac{m^2}{2\pi\beta T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)e^{-i\tau_1\lambda}w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma\left(\tau_1\right)\right]d\tau_1
\end{aligned}
$$

$w \in IL_1,, \gamma$ est bornée, donc

$$K_{2(12)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2 b_T}\right)$$

enfin pour $K_{2(13)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned} K_{2(13)}^{'''} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T e^{-i(s-t)\lambda} w\left[b_T (s-t)\right] \left[1-\gamma(s-t)\right] \\ &\quad \times \left[c_N^{(2)}(u-t) + \beta\delta_0(u-t)\right] dtdsdvdu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m^2}{2\pi\beta^2 T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] c_N^{(2)}(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + \frac{m^2}{2\pi\beta T} \int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right]\left[1-\gamma(\tau_1)\right] d\tau_1 \end{aligned}$$

$w \in IL_1,, \gamma$ est bornée, d'où

$$K_{2(13)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T b_T}\right) \tag{3.22}$$

mais

$$K_2^{'''} = \sum_{i=1}^{13} K_{2(i)}^{'''}$$

donc

$$K_2^{'''} = \frac{m^2}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right] d\tau + \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta} + O\left(\frac{1}{T b_T}\right) \tag{3.23}$$

or

$$C_5^{'''} = K_1^{'''} + K_2^{'''}$$

$$= \frac{m^2}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right) e^{-i\tau_1\lambda} w\left[b_T\tau_1\right] d\tau + \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta} + O\left(\frac{1}{T b_T}\right) \tag{3.24}$$

et

$$E\left[C_5\right] = C_5^{'} + C_5^{''} + C_5^{'''} = O\left(\frac{1}{T b_T}\right)$$

d'où

$$E\left[C_5\right] = O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \tag{3.25}$$

6)

$$\begin{aligned} E\left[C_6\right] &= -\frac{1}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma\left(0\right)\right] E\left[\left(m-\overset{\Lambda}{m}_T\right)^2 dN(t)\right] \\ &= C_6^{'} + C_6^{''} + C_6^{'''} \end{aligned} \tag{3.26}$$

on a

$$\begin{aligned} C_6^{'} &= -\frac{m^2}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma\left(0\right)\right] E\left[dN\left(t\right)\right] \\ &= -\frac{m^2}{2\pi\beta^2 T}\int_0^T \left[1-\gamma\left(0\right)\right] \beta dt \\ &= -\frac{m^2}{2\pi\beta}\left[1-\gamma\left(0\right)\right] \end{aligned}$$

d'où

$$C_6^{'} = -\frac{m^2}{2\pi\beta}\left[1-\gamma\left(0\right)\right] \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} C_6^{''} &= \frac{2m}{2\pi\beta^3 T^2}\int_0^T\int_0^T \left[1-\gamma\left(0\right)\right] E\left[X\left(s\right)dN\left(s\right)dN\left(t\right)\right] \\ &= \frac{m^2}{\pi\beta^3 T^2}\left[1-\gamma\left(0\right)\right]\int_0^T\int_0^T \left[c_N\left(s-t\right)+\beta^2+\beta\delta_0\left(s-t\right)\right] dtds \\ &= \frac{m^2}{\pi\beta^3 T^2}\left[1-\gamma\left(0\right)\right]\int_0^T\int_0^T \left[c_N\left(s-t\right)+\beta\delta_0\left(s-t\right)\right] dtds + \frac{m^2\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{\pi\beta} \end{aligned}$$

posons $\tau = t - s$

$$C_6^{''} = \frac{m^2}{\pi\beta^3 T}\left[1-\gamma\left(0\right)\right]\int_{-T}^T \left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\left[c_N\left(\tau\right)+\beta\delta_0\left(\tau\right)\right] d\tau + \frac{m^2\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{\pi\beta}$$

$c_N \in IL_1$ d'où

$$C_6^{''} = \frac{m^2\left[1-\gamma\left(0\right)\right]}{\pi\beta} + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.28}$$

maintenant évaluons $C_6^{'''}$

$$\begin{aligned}
C_6^{'''} &= -\frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T [1-\gamma(0)]\,E\{X(s)\,X(v)\,dN(s)\,dN(v)\,dN(t)\} \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T [1-\gamma(0)]\,[R_X(v-s)+m^2]E[dN(s)\,dN(v)\,dN(t)] \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T [1-\gamma(0)]\,[R_X(v-s)+m^2] \\
&\quad \times[c_N^{(3)}(s-t,v-t) \\
&\quad +\beta\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}+\beta\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\} \\
&\quad +\beta\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv \\
&= A_1^{'''}+A_2^{'''}
\end{aligned}$$

où

$$A_1^{'''}=\sum_{i=1}^{5}A_{1(i)}^{'''},\ \ A_2^{'''}=\sum_{i=1}^{5}A_{2(i)}^{'''}.$$

$$\begin{aligned}
A_1^{'''} &= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\,[c_N^{(3)}(s-t,v-t) \\
&\quad +\beta\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}+\beta\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\} \\
&\quad +\beta\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv
\end{aligned}$$

$$A_{1(1)}^{'''}=-\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\,c_N^{(3)}(s-t,v-t)\,dtdsdv$$

$$=-\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^4T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)R_X(\tau_2-\tau_1)\,c_N^{(3)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2$$

d'où

$$\left|A_{1(1)}^{'''}\right|\leq\frac{[1-\gamma(0)]}{\pi\beta^4T^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|R_X(\tau_2-\tau_1)\,c_N^{(3)}(\tau_1,\tau_3)\right|d\tau_1d\tau_2$$

$R_X\in IL_\infty$, et d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$A_{1(1)}^{'''}=O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

$$A_{1(2)}^{'''} = -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}dtdsdv$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_X(\tau)\{c_N^{(2)}(\tau)+\beta\delta_0(\tau)\}d\tau \\
&= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_X(\tau)\,c_N^{(2)}(\tau)\,d\tau-\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^2T}R_X(0)
\end{aligned}$$

$R_X \in IL_\infty, c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{1(2)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$A_{1(3)}^{'''} = -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\}dtdsdv$$

d'où

$$\begin{aligned}
A_{1(3)}^{'''} &= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)R_X(\tau_2)\{c_N^{(2)}(\tau_1)+\beta\delta_0(\tau_1)\}d\tau_1d\tau_2 \\
&= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)R_X(\tau_2)\,c_N^{(2)}(\tau_1)\,d\tau_1d\tau_2 \\
&\quad -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^2T^2}\int_{-T}^T R_X(\tau_2)\,d\tau_2
\end{aligned}$$

$R_X \in IL_1, c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{1(3)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
A_{1(4)}^{'''} &= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv \\
&= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv \\
&\quad -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta T^2}\int_0^T\int_0^T R_X(v-s)\,dvds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta^3T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)R_X(\tau_2)\{c_N^{(2)}(\tau_1)+\beta\delta_0(\tau_1)\}d\tau_1d\tau_2 \\
&\quad -\frac{[1-\gamma(0)]}{2\pi\beta T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_X(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

$R_X \in IL_1 \cap IL_\infty, c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{1(4)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

donc

$$A_1^{'''} = \sum_{i=1}^{5} A_{1(i)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Evaluons maintenant $A_2^{'''}$

$$\begin{aligned} A_2^{'''} &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T [c_N^{(3)}(s-t,v-t) \\ &\quad +\beta\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}+\beta\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\} \\ &\quad +\beta\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv \end{aligned}$$

pour $A_{2(1)}^{'''}$ on a

$$A_{2(1)}^{'''} = -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^4T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T c_N^{(3)}(s-t,v-t)\,dtdsdv$$

$$= -\frac{\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^4T^2}\int_{-T}^T\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau_1|}{T}\right)R_X(\tau_2-\tau_1)\,c_N^{(3)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2$$

d'où

$$\left|A_{2(1)}^{'''}\right| \leq \frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{\pi\beta^4T^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|c_N^{(3)}(\tau_1,\tau_3)\right|d\tau_1d\tau_2$$

d'aprés l'hypothèse (2.1.c) on a

$$A_{2(1)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

$$\begin{aligned} A_{2(2)}^{'''} &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}dtdsdv \\ &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(v-s)+\beta\delta_0(v-s)\}dsdv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\{c_N^{(2)}(\tau)+\beta\delta_0(\tau)\}d\tau \\ &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)c_N^{(2)}(\tau)\,d\tau-\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^2T}R_X(0) \end{aligned}$$

$c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{2(2)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

pour $A_{2(3)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned}
A_{2(3)}^{'''} &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\}dtdsdv \\
&= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(v-t)+\beta\delta_0(v-t)\}dtdv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\{c_N^{(2)}(\tau)+\beta\delta_0(\tau)\}d\tau \\
&= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)c_N^{(2)}(\tau)\,d\tau \\
&\quad -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^2T}
\end{aligned}$$

$c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{2(3)}^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right)$$

pour $A_{2(4)}^{'''}$ on a

$$\begin{aligned}
A_{2(4)}^{'''} &= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^3}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta^2+\beta\delta_0(s-t)\}]dtdsdv \\
&= -\frac{\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T^2}\int_0^T\int_0^T\{c_N^{(2)}(s-t)+\beta\delta_0(s-t)\}]dtds \\
&\quad -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta^3T}\int_{-T}^T\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)\{c_N^{(2)}(\tau)+\beta\delta(\tau)\}d\tau \\
&\quad -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta}
\end{aligned}$$

$c_N^{(2)} \in IL_1$, d'où

$$A_{2(4)}^{'''} = -\frac{m^2\left[1-\gamma(0)\right]}{2\pi\beta}+O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Donc

$$A_2^{'''} = \sum_{i=1}^{5} A_{1(i)}^{'''} = -\frac{m^2 [1 - \gamma(0)]}{2\pi\beta} + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

Il vient

$$C_6^{'''} = A_1^{'''} + A_2^{'''} = -\frac{m^2 [1 - \gamma(0)]}{2\pi\beta} + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.29}$$

et

$$E[C_6] = C_6^{'} + C_6^{''} + C_6^{'''} = O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{3.30}$$

Finalement, nous concluons que

$$E\left[\breve{\Phi}_X(\lambda)\right] = \Phi_X(\lambda) + \sum_{i=1}^{6} E(C_i) = \Phi_X(\lambda) + O\left(\frac{1}{Tb_T}\right) \tag{3.31}$$

Théorème 3.1

Soit X un processus à temps continu, stationnaire, de moyenne inconnue m, de fonction de covariance $R_X \in IL_1$, et de densité spectrale Φ_X et soit $\{\tau_k\}$ un processus ponctuel stationnaire, indépendant de X, d'intensité moyenne β de densité de covariance $c_N \in IL_1$ et tel que (2.9) soit vérifiée. Si W satisfait (2.13) alors l'estimateur de la densité spectrale $\breve{\Phi}_X$ est asymptotiquement sans biais.

Sous les conditions du corollaire 2.1 on a

$$biais\left[\breve{\Phi}_X(\lambda)\right] = -\frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) + o\left(b_T^2\right) + O\left(\frac{1}{Tb_T}\right)$$

Chapitre 4

Simulation

4.1 Discussion et exemples

Notons premièrement que les théorèmes (2.1) et (2.2) impliquent que l'estimateur de la densité spectrale $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ converge en moyenne quadratique vers Φ_X quand $T \to \infty$.

Pour obtenir le taux de convergence, nous supposons que le corollaire (2.1) est vérifié pour $n = 2$, dans ce cas le terme dominant du biais est

$$-\frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) \tag{4.1}$$

et par (2.33) le terme dominant de la variance est

$$\frac{2\pi}{(Tb_T)\,\beta^4} \Phi_Z^2(\lambda)\left[1 + \delta_{0,\lambda}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} W^2(u)\,du \tag{4.2}$$

où, rappelons le

$$\Phi_Z(\lambda) = \beta^2 \Phi_X(\lambda) + \frac{\beta}{2\pi} R_X(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X(u)\, c_N(u)\, du \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)-\Phi_X(\lambda)\right]^2 &= Var\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)-\Phi_X(\lambda)\right]+\left\{E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)-\Phi_X(\lambda)\right]\right\}^2 \\ &= Var\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right]+\left\{biais\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right]\right\}^2 \end{aligned}$$

est minimum si chacun des termes est minimum, en posant $b_T = T^{-\alpha}$ on doit minimiser

$$b_T^4 + \frac{1}{Tb_T} = T^{-4\alpha} + T^{\alpha-1},$$

en dérivant, en obtient $\alpha = \frac{1}{5} + \frac{\log 4}{\log T} \backsim \frac{1}{5}$

le taux asymptotique optimal de la convergence en moyenne quadratique est $T^{-4/5}$ obtenue par $b_T \backsim T^{-1/5}$

alors

$$T^{4/5}E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)-\Phi_X(\lambda)\right]^2 \to \frac{\left[w^{(2)}(0)\,\Phi_X^{(2)}(\lambda)\right]^2}{4} + \frac{2\pi}{\beta^4}\Phi_Z^2(\lambda)\left[1+\delta_{0,\lambda}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2(u)\,du. \quad (4.4)$$

Nous comparons en premier la performance de la moyenne quadratique de l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ à temps discret avec l'estimateur classique de Parzen $\overset{\Lambda}{\Phi}_{X,C}$ à temps continu, basé sur les observations $\{X(t), 0 \le t \le T\}$, ce dernier a le même biais que $\overset{\Lambda}{\Phi}_X$ et sa variance est

$$Var\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_{X,C}(\lambda)\right] = \frac{2\pi}{Tb_T}\Phi_X^2(\lambda)\left[1+\delta_{0,\lambda}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} W^2(u)\,du, \quad (4.5)$$

(cf Parzen 1967)

Vu que les deux variances comportent des termes communs, il suffit de comparer

$$V(\lambda) = \Phi_Z^2(\lambda) = \left[\Phi_X(\lambda) + \frac{R_X(0)}{2\pi\beta} + \frac{1}{2\pi\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} R_X(u)\,c_N(u)\,du\right]^2 \quad (4.6)$$

et

$$V_C(\lambda) = \left[\Phi_X(\lambda)\right]^2 \quad (4.7)$$

Notons que

$$\frac{R_X(0)}{2\pi\beta}+\frac{1}{2\pi\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_X(u)\,c_N(u)\,du=\frac{1}{2\pi\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\lambda}R_X(u)\,dC_N(u)\geq 0$$

car dC_N est la mesure de covariance et nous concluons que $V(\lambda)\geq V_C(\lambda),\forall\lambda$ donc il n'y a aucun processus ponctuel alias-free qui fournit une variance de $\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)$ plus petite que celle de $\overset{\Lambda}{\Phi}_{X,C}(\lambda)$.

Parmi les processus ponctuels alias-free, le processus ponctuel de poisson est le plus simple et fournit l'estimateur le plus simple pour Φ_X. Dans ce cas $c_N(u)=0$ d'où $\gamma(u)=0$ et $\Gamma(u)=0$ donc l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Phi}_X(u)$ de (2.14) devient plus simple et nous avons par (4.6)

$$V_p(\lambda)=\left[\Phi_X(\lambda)+\frac{R_X(0)}{2\pi\beta}\right]^2 \tag{4.8}$$

Soit g_k la densité de la loi Gamma, on a

$$g_k(u)=\frac{(\beta k)^k}{(k-1)!}u^{k-1}e^{-k\beta u}1_{[0,\infty[}.\quad (k\geq 1)$$

Considérons le processus de renouvellement, (T_n) généré par la densité

$$\breve{g}(u)=(1-\alpha)\,g_1(u)+\alpha g_2(u)\ \text{ où } 0<\alpha<1.$$

Ceci veut dire que

$$T_n=T_{n-1}+\xi_n\qquad\qquad (T_0=0)$$

où ξ_n sont des variables identiquement indépendantes et distribués de densité $\tilde{g}$.

Notons que le processus de Poisson de paramètre β est un processus de renouvellement généré par la densité

$$\beta e^{-\beta u}1_{[0,+\infty[}(u).$$

En calculant $V(\lambda)$, donnée par la formule (4.6), dans le cas où le processus d'échantillonnage est (T_n), Masry et Lii ont montré que

$$V(\lambda) < V_p(\lambda), \forall \lambda.$$

Ensuite ils ont évalué le facteur d'amélioration pour la variance asymptotique de $\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)$ en utilisant le processus d'échantillonnage (T_n), généré par $\widetilde{g}$, relativement au processus d'échantillonnage Poissonnien.

Ce facteur est donné par

$$f(\lambda, \beta) = \frac{V_p(\lambda) - V(\lambda)}{V_p(\lambda)} > 0.$$

les calculs ont été mènes pour $R_X(t) = \sigma^2 e^{-\rho|t|}, \rho > 0$ et pour $\alpha = 0.9$ et ont donné

$$V(\lambda) = \left[\sigma^2 \left\{ \frac{(\rho/\pi)}{(\rho^2 + \lambda^2)} + \frac{1}{2\pi\beta} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{B_1(\rho + a_1)}{(\rho + a_1)^2 + \lambda^2} + \frac{B_2(\rho + a_2)}{(\rho + a_2)^2 + \lambda^2}\right]\right\}\right]^2$$

$$V_P(\lambda) = \left[\sigma^2 \left\{ \frac{(\rho/\pi)}{(\rho^2 + \lambda^2)} + \frac{1}{2\pi\beta}\right\}\right]^2$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\beta}{2}\left[4 + \alpha + \sqrt[2]{\alpha(8 + \alpha)}\right] \\ a_2 &= \frac{\beta}{2}\left[4 + \alpha - \sqrt[2]{\alpha(8 + \alpha)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= -\alpha\left[\frac{1}{2} + \frac{1 + \alpha/2}{\sqrt[2]{\alpha(8 + \alpha)}}\right] \\ B_2 &= \alpha\left[-\frac{1}{2} + \frac{1 + \alpha/2}{\sqrt[2]{\alpha(8 + \alpha)}}\right] \end{aligned}$$

La figure 4.1 a été tracée pour $\rho = \pi$, $|\lambda| \leq 20$ et $0 < \beta < 10$ et donne le facteur d'amélioration en fonction de λ et β. Il est clair que $f(\lambda, \beta) > 0$ et que pour les grandes valeurs de β, le facteur d'amélioration atteint 50% pour les grandes fréquences λ.

Pour avoir plus de détails la figure 4.2 donne $f(\lambda, \beta)$, en tant que fonction de λ, pour les valeurs $\beta = 0.4, 1, 2$ et 3.

Nous pouvons y voir que pour λ dans l'intervalle $[-\pi\beta, \pi\beta]$ le facteur d'amélioration est substantiel.

Ainsi dans cet intervalle :

pour $\beta = 0.4$, $f(\lambda, \beta)$ atteint 23%

pour $\beta = 1$, $f(\lambda, \beta)$ atteint 28%

pour $\beta = 3$, $f(\lambda, \beta)$ atteint 40% pour $3 \leq |\lambda| \leq 16$ et pour les grandes valeurs de β, $f(\lambda, \beta)$ approche 50% quand on s'éloigne de l'origine (voir la figure 4.1).

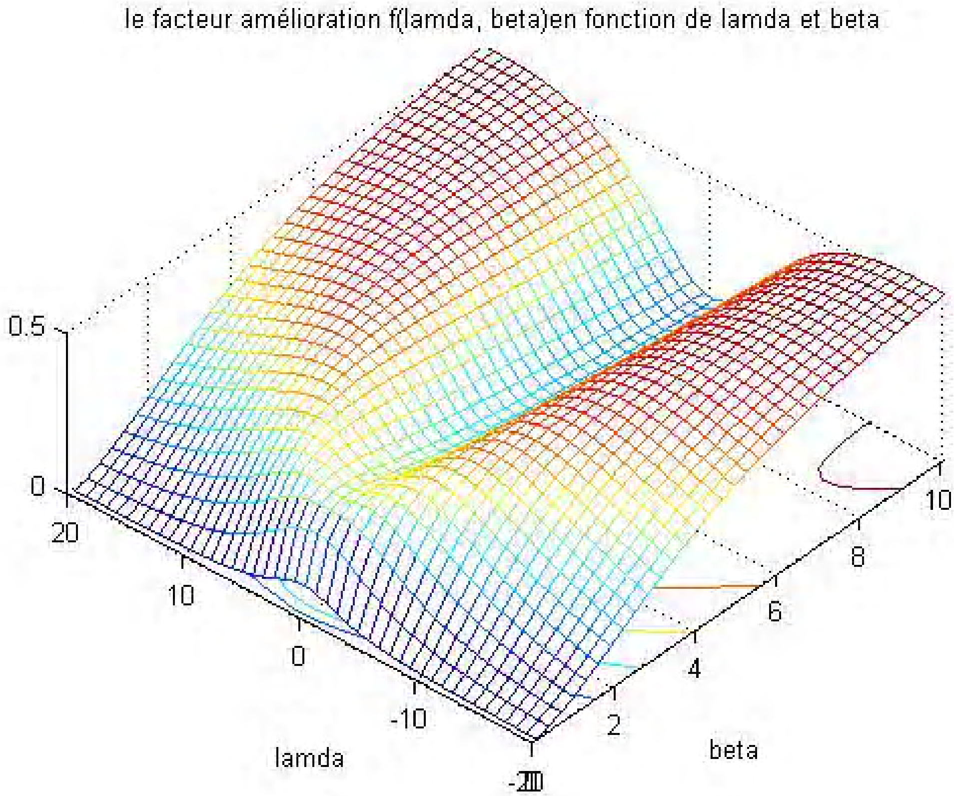

le facteur amélioration f(lamda, beta)en fonction de lamda et beta
0.5
0
20
10
0
-10
-20
lamda
2
4
6
8
10
beta

FIG. 4-1 –

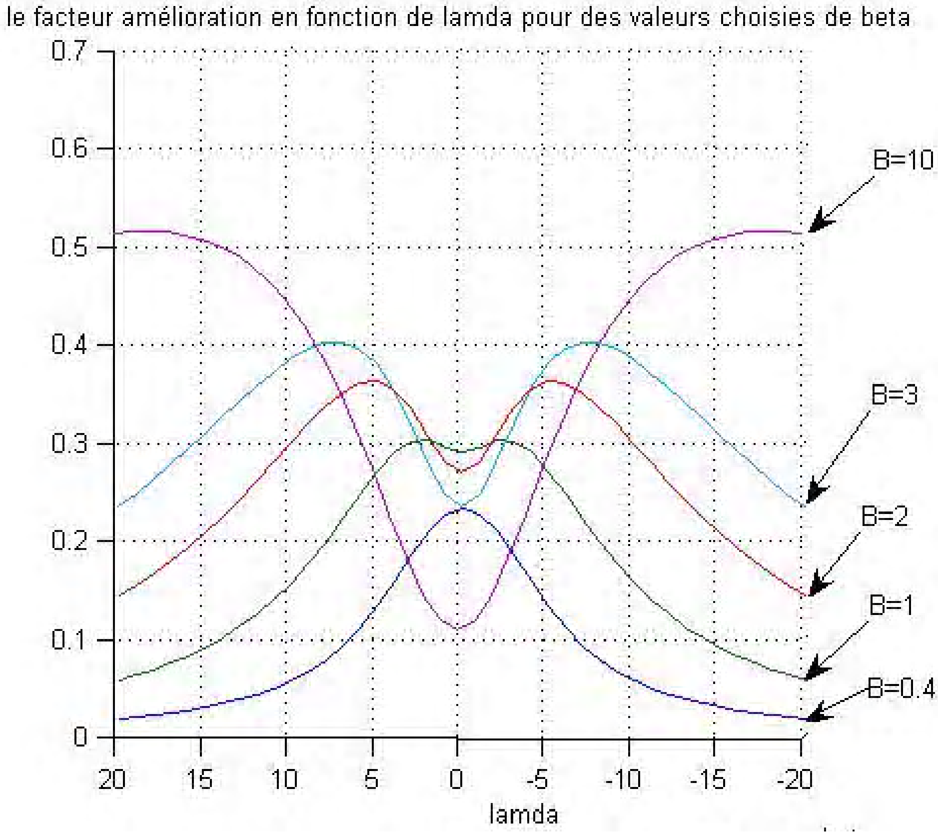

le facteur amélioration en fonction de lamda pour des valeurs choisies de beta
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
lamda
B=10
B=3
B=2
B=1
B=0.4

FIG. 4-2 –

4.2 Calcul d'estimateurs

4.2.1 Processus de Gauss Markov

Soit $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus réel, Gaussien, stationnaire et centré de fonction de covariance C et de densité spectrale φ données par

$$\begin{aligned} C(t) &= \exp(-|t|) \\ \varphi(t) &= \frac{1}{\pi\left(1+\lambda^2\right)} \end{aligned}$$

la méthode de simulation de ce processus est comme suit

pour tout couple (t,t') $(t > t' > 0)$, on a

$$X(t) = X(t)\exp\left(-\left(t-t'\right)\right) + Z_{t,t'}\left(1+\exp\left(-2\left(t-t'\right)\right)\right)^{1/2}$$

(cf Messaci (1986)).

où $Z_{t,t'}$ est une variable gaussienne standard et où pour toute suite croissante $t_1, t_2, ..., t_n$ les variables alétoires

$$Z_{t_2,t_1}, Z_{t_3,t_2}, ..., Z_{t_n,t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

4.2.2 Estimateur par séries orthogonales tronqué

Cet estimateur a été introduit par F.Messaci (1986).

Pour estimer la densité spectrale d'un processus à temps continu échantillonné par un processus poissonnien.

Son calcul ne nécessite pas la connaissance des instants d'échantillonnage $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

$$\overset{\Lambda}{\Psi}_N(\lambda) = \sum_{n=1}^{M_N} Y_n(N)\,\overset{\Lambda}{a}_n(N)\,G_n(\lambda)$$

où

$$\overset{\Lambda}{a}_n(N) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{n,k}\overset{\Lambda}{\rho}_k(N)$$

et

$$
\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{\rho}_n(N) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-n}\left(X\left(t_{k+n}\right)-m\right)\left(X\left(t_k\right)-m\right), \text{ si } 1\leq n\leq N \\
\overset{\Lambda}{\rho}_n(N) &= 0, \text{ sinon}
\end{aligned}
$$

$$\theta_{n,k}=\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}(-2)^{k-1}\,C_{n-1}^{k-1}$$

$$G_n(\lambda)=(-1)^{n-1}\frac{(2\beta)^{1/2}}{\pi\left(\lambda^2+\beta^2\right)^{1/2}}\cos\left[(2n-1)\,tg^{-1}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)\right]$$

$$Y_n(N)=h\left(\exp(n\alpha)/N^b\right),\quad \text{avec } \alpha>\ln 3 \text{ et } 0<b<\frac{\alpha}{2\ln 3}$$

h étant une fonction réelle, numérique, satisfaisant

$$
\begin{aligned}
i)\ |h(u)| &\leq h(0)=1;\ \forall u \\
ii)\ 1-h(u) &\leq k_2|u|;\ \forall u\in\mathbb{R};\ \left(k_2\in\mathbb{R}^+\right)
\end{aligned}
$$

$$M_n=\left[\frac{b}{2\alpha}\ln N+1\right] \text{ la partie entière de } \frac{b}{2\alpha}\ln N+1$$

Cet estimateur est uniformément consistant en moyenne quadratique et consistant en moyenne quadratique intégrée. Des vitesses de convergence de l'ordre de puissances de $\frac{1}{\log}$ ont été données. Remarquons que ces vitesses peuvent être améliorées pour devenir de l'ordre d'une puissance de $\frac{1}{N}$ (sous des conditions supplémentaires, cf Messaci 1986).

Choix des paramètres

La fonction h utilisée pour le calcul de $\overset{\Lambda}{\Psi}_N$ est

$$h(t)=\left\{\begin{array}{c} 1-6t^2+6\left|t^3\right|,\ \text{si } |t|<\frac{1}{2} \\ 2(1-|t|)^3,\ \text{si } \frac{1}{2}\leq|t|\leq 1 \\ 0, \text{ si } 1<|t| \end{array}\right\}$$

β a été pris successivement égal à $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{\pi}$ et 1

$\alpha = 0,5$ et $b = 0.3$

Les instants d'échantillonnage

Les instants d'échantillonnage $\left\{(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ sont obtenus grâce à un processus ponctuel de Poisson sur $[0,+\infty[$ et sont indépendants du processus X.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_n &= t_{n-1} + \alpha_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

où $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même distribution F_0 donnée par

$$F_0(\lambda) = 1 - e^{-\beta\lambda}\,;(\beta > 0)$$

4.2.3 Estimateur de Masry et Lui

En 1976 Masry et Lui ont proposé un estimateur tronqué de la densité spectrale d'un processus en temps discrétisé par un processus de poisson de paramètre β, dont le calcul nécessite la connaissance des instants d'échantillonnage. Cet estimateur s'écrit

$$\overset{\Lambda}{\varphi}_N(\lambda) = \frac{1}{\pi\beta}\sum_{n=1}^{M_N}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{n,N}(\lambda)$$

avec

$$\overset{\Lambda}{\Gamma}_{n,N}(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-n}\left(X(t_k) - m\right)\left(X(t_{k+n}) - m\right)\cos\lambda\left(t_{k+n} - t_k\right)$$

où

$$M_N \to \infty \text{ et } \frac{M_N}{N} \to 0 \text{ quand } N \to \infty$$

Cet estimateur est uniformément consistant en moyenne quadratique, avec une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{M_N}{N}$.

4.2.4 Estimateur de Masry et Lii 1994

Dans cette section nous avons calculé l'estimateur de Masry et Lii 1994 avec un échantillonnage poissonnien et le calcul de cet estimateur nécessite la connaissance des instants d'échantillonnage.

Nous choisissons la densité de la loi normale comme la fonction de poids

$$W(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda^2/2}$$

et choisissons aussi le paramètre de lissage

$$b_T = \frac{1}{T^{1/5}}$$

L'estimateur est donné par (2.17).

4.2.5 Programmes

Calcul de l'estimateur par séries orthogonales tronqué

```
sprintf('estimateur par series orthogonales de la densité spectrale ')
sprintf('le processus de gauss-markov de moyenne connue 0')
%%%%%%% générer les instants %%%%%%%%%%%%%%%%
B=input('B=');
N=input('N=');
M=input('M=');
%%%%%%%%%%%% générer la loi exponensielle %%%%%%%%%%
alfa=exprnd(1/B,1,N);
t(1)=0;
for k=2 :N;
t(k)=t(k-1)+alfa(k);
end
%%%%%%% générer la loi normale %%%%%%%%%%%%%%%
z=randn(1,N);
```

```
%%%%%%%% calculer le processus x %%%%%%%%%%%%%%%%
x(1)=0 ;
for k=1 :N-1 ;
x(k+1)=(exp(-(t(k+1)-t(k))))*x(k)+sqrt(1+exp(-2*(t(k+1)-t(k))))*z(k+1) ;
end
%%%%%%%% calculer rho %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for n=1 :M ;
rho(n)=x(n+1)*x(1) ;
for k=2 :(N-n) ;
rho(n)=x(k+n)*x(k)+rho(n) ;
end
rho(n)=rho(n)/N ;
end
%%%%%% calculer a %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1 :M ;
o(k)=(sqrt(2/B))*((-2)^(k-1))*factorial(M-1)*(factorial(k-1)*factorial(M-k))^-1 ;
end
a(1)=o(1)*rho(1) ;
for k=2 :M ;
a(k)=a(k-1)+o(k)*rho(k) ;
end
%%%%%%%%% calculer G %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=1 :10 ;
for n=1 :M ;
G(n,m)=((-1).^(n-1)).*(1/pi).*sqrt(2*B./(m.^2+B^2)).*cos((2.*n-1)*atan(m./B)) ;
end
%%%%%%%%%%%%%calculer la fonction h %%%%%%%%%%%%%%%%
for n=1 :M ;
t=exp(n*0.5)/(N^0.3) ;
if abs(t)<0.5
```

```
y(n)=1-6*(t^2)+6*(abs(t)^3);
else
if 1/2<abs(t)<1
y(n)=2*((1-abs(t)))^3;
else
y(n)=0;
end
end
end
%%%%%%%% calculer l'estimateur par séries orthogonales tronqué %%%%%%
phi=y(1)*a(1)*G(1,m);
for n=2 :M;
phi=phi+y(n)*a(n)*G(n,m);
end
phi;
%%%%%% comparaison %%%%%%%%
k=1 :10;
u=1./(pi.*(1.+k.^2));
plot(phi)
hold on
plot(k,u,'r')
xlabel('estimateur par series orthogonales')
```

Calcul de l'estimateur de Masry et Lui

```
clc
sprintf('estimateur de Masry et Lui 1976')
sprintf('le processus de gauss-markov de moyenne connue 0')
%%%%%%%% générer les instants %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B=input('B=');
N=input('N=');
```

```
M=input('M=');
%%%%%%%%%%% générer la loi exponensielle %%%%%%%%%%%%%%
alfa=exprnd(1/B,1,N);
t(1)=0;
for k=2 :N;
t(k)=t(k-1)+alfa(k);
end
%%%%%%%% générer la loi normale %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z=randn(1,N);
%%%%%%%% calculer le processus x %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x(1)=0;
for k=1 :N-1;
x(k+1)=(exp(-(t(k+1)-t(k))))*x(k)+sqrt(1+exp(-2*(t(k+1)-t(k))))*z(k+1);
end
%%%%%%%%calculer l'estimateur de Masry et lui 1976%%%%%%%%%%%%
m=1 :10;
phi=0;
for n=1 :M;
for k=1 :N-n;
phi=x(k)*x(k+n)*cos(m*(t(k+n)-t(k)))+phi;
end
end
phi=phi/N*pi*B;
%%%%%%%%%%%% la fonction spectrale phi %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% comparaison %%%%%%%
k=1 :10;
u=1./(pi.*(1.+k.^2));
plot(phi( :, :))
hold on
plot(k,u,'r')
```

xlabel('estimateur de Masry et Lui 1976')

Calcul de l'estimateur de Masry et Lii 1994 (échantillonnage poissonnien)

sprintf('spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling KEH-MASRY')

sprintf(' pour un echantillonnage poissonnien')

sprintf('le processus de gauss-markov de moyenne connue 0')

%%%%%%% générer les instants %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=input('B=') ;

T=input('T=') ;

N=input('N=') ;

beta=B ;

b=1/T^0.2 ;

%%%%%%%%%%%% générer la loi exponensielle %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

u=exprnd(1/B,1,N) ;

t(1)=0 ;

for k=2 :N ;

t(k)=t(k-1)+u(k) ;

end

%%%%%%%%%%%%%%%% processus de comptage %%%%%%%%%%%%%%

R=0 ;

for i=1 :N ;

if t(i)<T

R=R+1 ;

end

end

R ;

%%%%%%%% générer la loi normale %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

z=randn(1,N) ;

%%%%%%%% calculer le processus x %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
x(1)=0;
for k=1 :N-1;
x(k+1)=(exp(-(t(k+1)-t(k))))*x(k)+sqrt(1+exp(-2*(t(k+1)-t(k))))*z(k+1);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% l'estimateur de la densité spectrale %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%% la fonction de poids %%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% W(x)=1/2*pi*exp(-x^2/2) :la densité de la loi normal %%%%%%%%%%
for j=1 :R;
for k=1 :R;
c(j,k)=t(j)-t(k);
w(j,k)=feval(@FAT,b*c(j,k));
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%% la densité spectrale estimée %%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1 :R;
for k=1 :R;
y(j,k)=x(j)*x(k);
end
end
for m=1 :10;
for j=1 :R;
for k=1 :R;
e(j,k,m)=feval(@FAN,m*c(j,k));
end
end
end
for m=1 :10;
for j=1 :R;
for k=1 :R;
```

```
Q(j,k,m)=w(j,k)*e(j,k,m)*y(j,k) ;
end
end
end
phi=sum(sum(Q))-x*x' ;
phi=phi/(2*pi*T*B^2) ;
phi=real(phi) ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% tracer phi estimée %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for m=1 :1 :10 ;
L(m)=phi( :, :,m) ;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%% comparaison des graphes %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k=1 :10 ;
S=1./(pi.*(1.+k.^2)) ;
subplot(1,1,1) ;plot(L)
hold on
subplot(1,1,1) ;plot(k,S,'r')
hold on
xlabel('lamda')
title('estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage poissonnien')
```

Calcul de l'estimateur de Masry et Lii 1994 (échantillonnage alias free non poissonnien)

```
sprintf('spectral estimation of continuous-time stationary processes from random sampling
KEH-MASRY')
sprintf(' pour un echantillonnage alias free')
sprintf('le processus de gauss-markov de moyenne connue 0')
%%%%%%%%% générer les instants %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format long
B=input('B=') ;
```

```
T=input('T=');
N=input('N=');
alfa=input('alfa=');
b=1/T^0.2;
%%%%%%%%%%% échantillonnage alias free %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u=(1-alfa)*gamrnd(1,B,1,N)+2*alfa*gamrnd(2,B,1,N);
t(1)=0;
for k=2 :N;
t(k)=t(k-1)+u(k);
end
%%%%%%%%%%% PROCESSUS DE COMPTAGE %%%%%%%%%%%%
R=0;
for i=1 :N;
if t(i)<T
R=R+1;
end
end
R;
%%%%%%%% générer la loi normale %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z=randn(1,N);
%%%%%%%% calculer le processus x %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x(1)=0;
for k=1 :N-1;
x(k+1)=exp(-u(k+1))*x(k)+sqrt(1+exp(-2*u(k+1)))*z(k+1);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% l'estimateur de la densité spectrale %%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% calculer le noyau %%%%
for j=1 :R;
```

```
for k=1 :R;
c(j,k)=t(j)-t(k);
w(j,k)=feval(@FAT,b*c(j,k));
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1 :R;
for k=1 :R;
y(j,k)=x(j)*x(k);
end
end
for m=1 :10;
for j=1 :R;
for k=1 :R;
e(j,k,m)=feval(@FAN,m*c(j,k));
end
end
end
%%% calculer [1- gamma] %%%
%%%% la fonction petit gamma g(u)= c(u)/(B^2+c(u)) %%%%
%%%% c(u) la densité de covariance %%%%%%%%%%
A1=(B/2)*(4+alfa+sqrt(alfa*(8+alfa)));
A2=(B/2)*(4+alfa-sqrt(alfa*(8+alfa)));
B1=-alfa*(0.5+(1+0.5*alfa)/sqrt(alfa*8+alfa^2));
B2=alfa*(0.5+(1+0.5*alfa)/sqrt(alfa*8+alfa^2));
for j=1 :R;
for k=1 :R;
h(j,k)=B*(1+B1*exp(-A1*abs(c(j,k)))+B2*exp(-A2*abs(c(j,k))));
end
end
```

```
for j=1 :R ;
for k=1 :R ;
g(j,k)=B/h(j,k) ;
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for m=1 :10 ;
for j=1 :R ;
for k=1 :R ;
Q(j,k,m)=w(j,k)*e(j,k,m)*y(j,k)*g(j,k) ;
end
end
end
phi=sum(sum(Q))-x*x' ;
phi=phi/(2*pi*T*B^2) ;
phi=real(phi) ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% tracer phi estimée %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for m=1 :1 :10 ;
L(m)=phi( :, :,m) ;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%% comparaison des graphes %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k=1 :10 ;
S=1./(pi.*(1.+k.^2)) ;
subplot(1,1,1) ;plot(L)
hold on
subplot(1,1,1) ;plot(k,S,'r')
hold on
xlabel('lamda')
title('estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage alias free non poissonnien')
```

Le facteur d'amélioration en fonction de λ et β

```
clc
RO=pi;
alfa=0.9;
segma=1;
beta=0.1 :0.3 :10;
lamda=-20 :0.9 :20;
[beta,lamda]=meshgrid(beta,lamda);
A1=(beta/2)*(4+alfa+sqrt(alfa*(8+alfa)));
A2=(beta/2)*(4+alfa-sqrt(alfa*(8+alfa)));
B1=-alfa*(0.5+(1+alfa/2)/sqrt(alfa*(8+alfa)));
B2=alfa*(-0.5+(1+alfa/2)/sqrt(alfa*(8+alfa)));
V=(segma.^4)*((RO/pi)./(RO.^2+lamda.^2)+1./(2*pi*beta)+(1./pi)*(B1*(RO+A1)
./((RO+A1).^2+lamda.^2)+B2*(RO+A2)./((RO+A2).^2+lamda.^2))).^2;
P=(segma.^4)*((RO./pi)./(RO.^2+lamda.^2)+1./(2*pi*beta)).^2;
Z=(P-V)./P;
peaks(beta,lamda);
meshc(beta,lamda,Z);
axis([0 10 -20 20 0 0.5]);
xlabel('beta');
ylabel('lamda');
xlabel('le facteur amélioration f(lamda,beta) en fonction de lamda et beta')
```

Le facteur d'amélioration en fonction de λ pour des valeurs choisies de β

```
clc
RO=pi;
alfa=0.9
segma=1;
beta=[0.4,1,2,3];
```

```
lamda=-20 :1 :20 ;
[beta,lamda]=meshgrid(beta,lamda) ;
A1=(beta/2)*(4+alfa+sqrt(alfa*(8+alfa))) ;
A2=(beta/2)*(4+alfa-sqrt(alfa*(8+alfa))) ;
B1=-alfa*(0.5+(1+alfa/2)/sqrt(alfa*(8+alfa))) ;
B2=alfa*(-0.5+(1+alfa/2)/sqrt(alfa*(8+alfa))) ;
V=(segma.^4)*((RO/pi)./(RO.^2+lamda.^2)+1./(2*pi*beta)+(1./pi)*(B1*(RO+A1)
./((RO+A1).^2+lamda.^2)+B2*(RO+A2)./((RO+A2).^2+lamda.^2))).^2 ;
P=(segma.^4)*((RO./pi)./(RO.^2+lamda.^2)+1./(2*pi*beta)).^2 ;
Z=(P-V)./P ;
plot3(beta,lamda,Z)
axis square ; grid on
xlabel('beta') ;
ylabel('lamda') ;
xlabel('le facteur amélioration en fonction de lamda et beta pour des valeurs choisies de beta')
```

4.2.6 Discussion

Les résultats de simulation de l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Psi}_N(\lambda)$ données à les pages 95, 96 et 97 semblent être plus performants que ne le laissent prévoir les théorèmes de convergence. Il nous semble que la raison est à chercher dans le fait que ce cas, la condition est remplie pour avoir des vitesses de convergence de l'ordre $\frac{1}{N}$.

Les résultats de simulation de l'estimateur $\overset{\Lambda}{\varphi}_N(\lambda)$ sont aussi trés satisfaisants pour des vitesses de convergence théoriques de l'ordre d'une puissance de $\frac{M_N}{N}$.

Quand à l'estimateur $\overset{\Lambda}{\Phi}_N(\lambda)$ les résultats de simulation sont comparables aux précédents. De plus ils confortent le résultat théorique selon le quel l'estimation est meilleure pour l'échantillonnage généré par le processus de renouvellement non poissonnien que pour l'échantillonnage poissonnien.

Signalons aussi que les temps de calcul sont bien plus courts pour les estimateurs $\overset{\Lambda}{\Psi}_N(\lambda)$ et $\overset{\Lambda}{\varphi}_N(\lambda)$.

Enfin la normalité asymptotique n'a été obtenue pour aucun autre estimateurs que celui de Masry 1994 ($\overset{\Lambda}{\Phi}_N(\lambda)$), ce qui présente un avantage de cet estimateur.

Tout ceci est résumé dans le tableau suivant :

L'estimateur	$\overset{\Lambda}{\Psi}_N(\lambda)$	$\overset{\Lambda}{\varphi}_N(\lambda)$	$\overset{\Lambda}{\Phi}_N(\lambda)$
La vitesse de convergence	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{T\sqrt{b_T}}$
Le temps de calcul	trés petit	trés petit	trés long
La normalité asymptotique	n'a pas été obtenue	n'a pas été obtenue	a été obtenue
Les instants d'échantillonnage	sont inconnus	sont connus	sont connus

Dans la pratique le choix de l'estimateur à utiliser doit tenir compte de cette discussion et du problème posé.

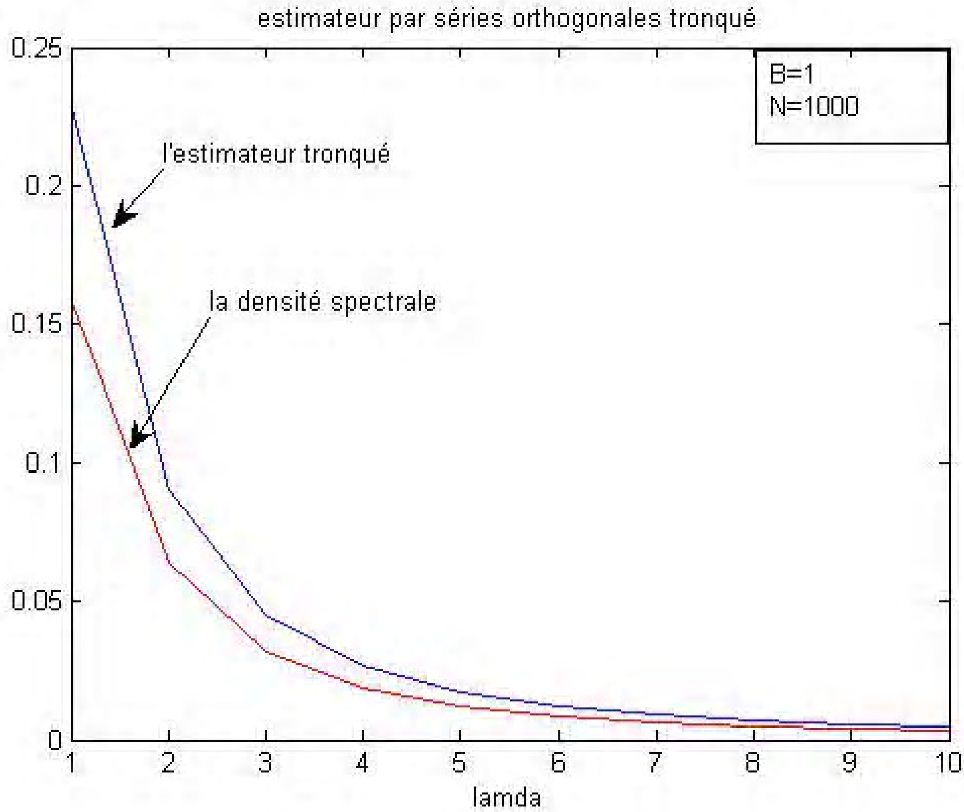
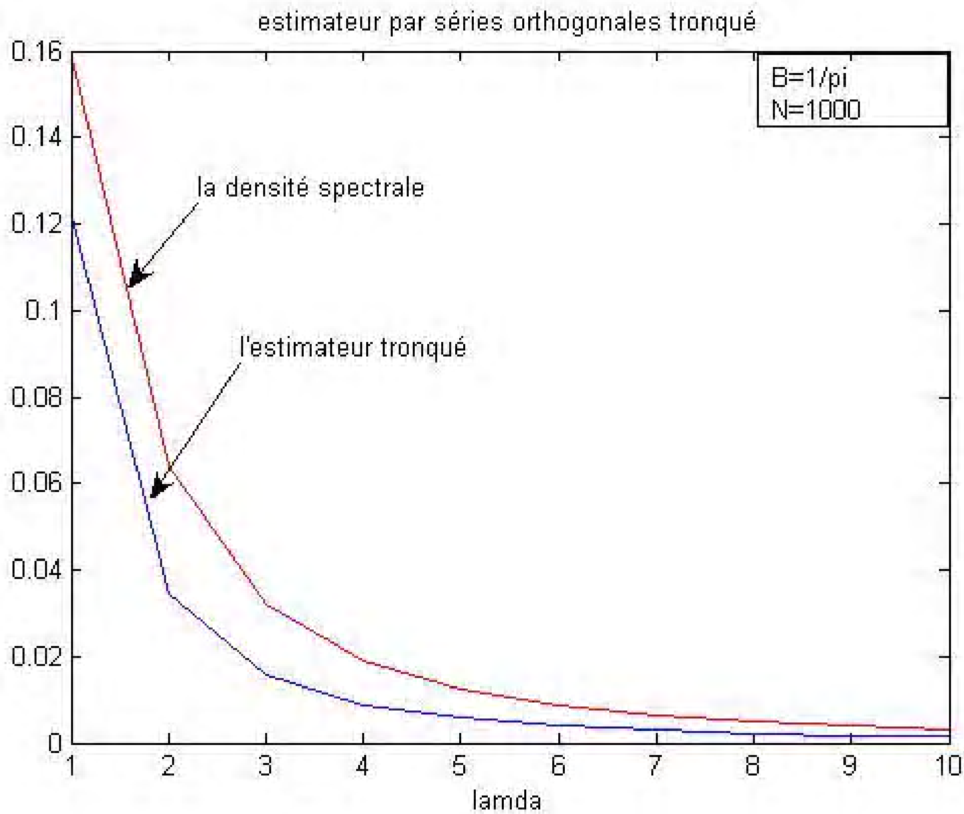

estimateur par séries orthogonales tronqué
B=1
N=1000
l'estimateur tronqué
la densité spectrale
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

Fig. 4-3 –



estimateur par séries orthogonales tronqué
B=1/pi
N=1000
la densité spectrale
l'estimateur tronqué
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

FIG. 4-4 –

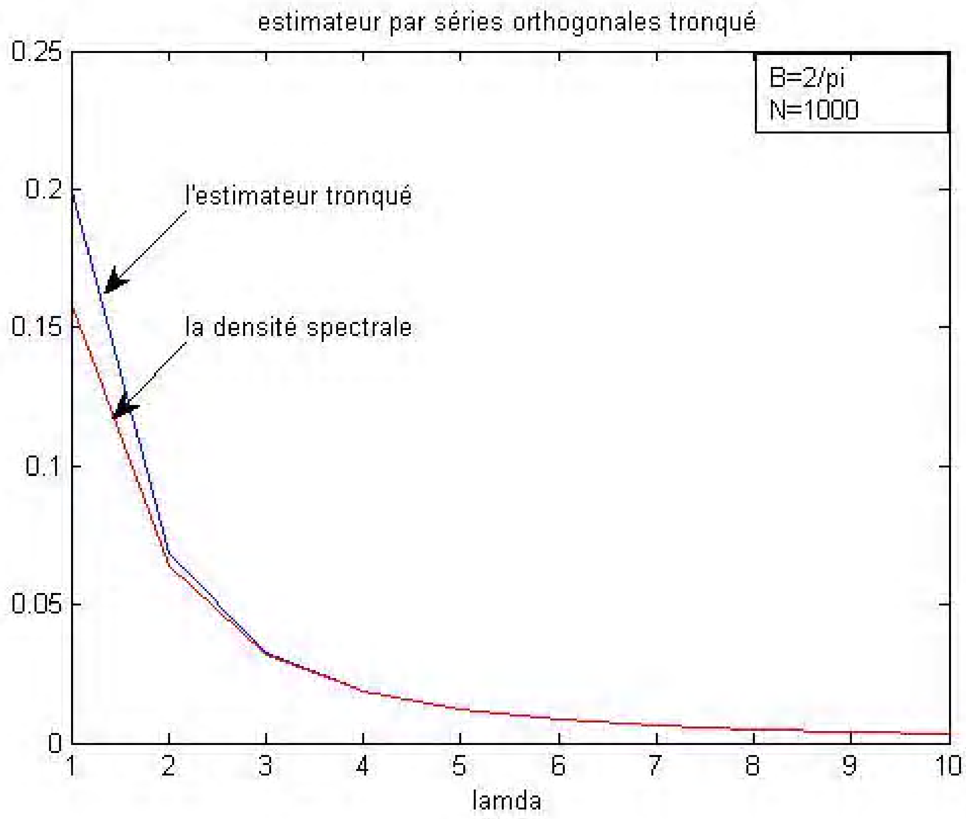

estimateur par séries orthogonales tronqué
B=2/pi
N=1000
l'estimateur tronqué
la densité spectrale
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

FIG. 4-5 –

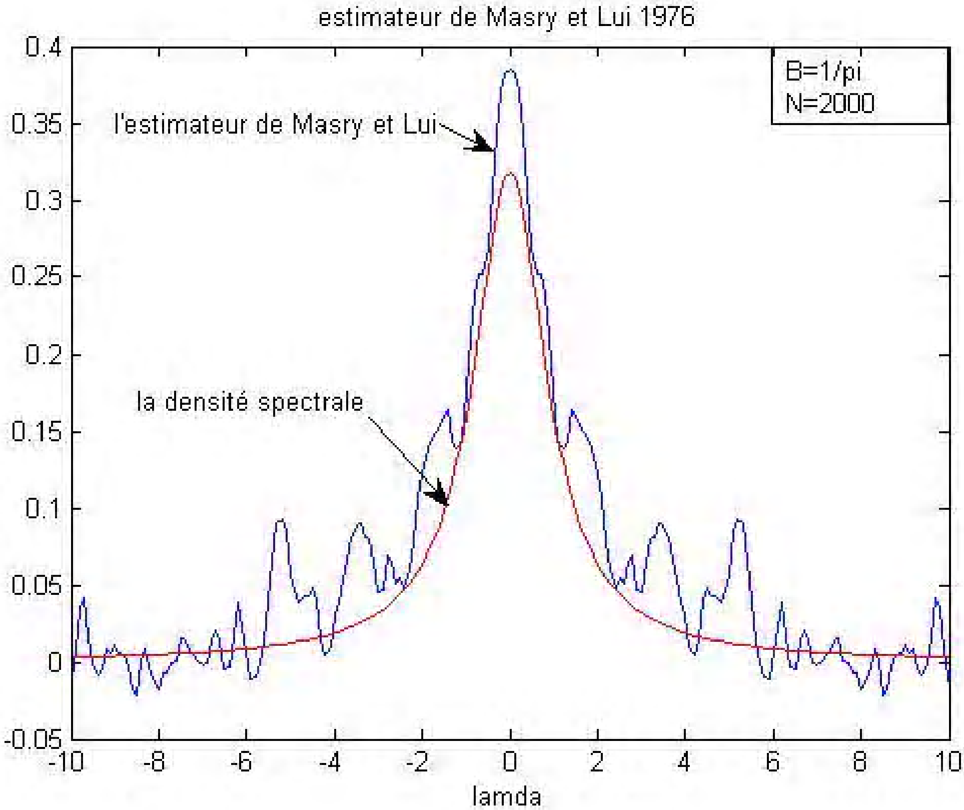

estimateur de Masry et Lui 1976
B=1/pi
N=2000
l'estimateur de Masry et Lui
la densité spectrale
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
lamda

FIG. 4-6 –

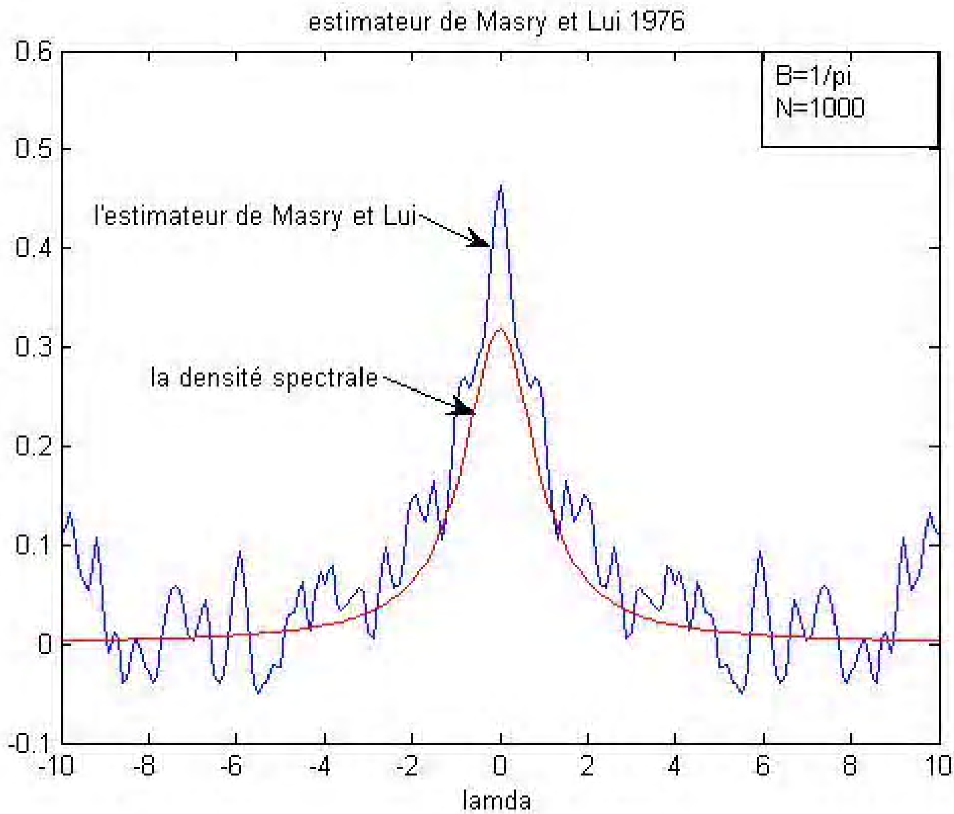

estimateur de Masry et Lui 1976
B=1/pi
N=1000
l'estimateur de Masry et Lui
la densité spectrale
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
lamda

FIG. 4-7 –

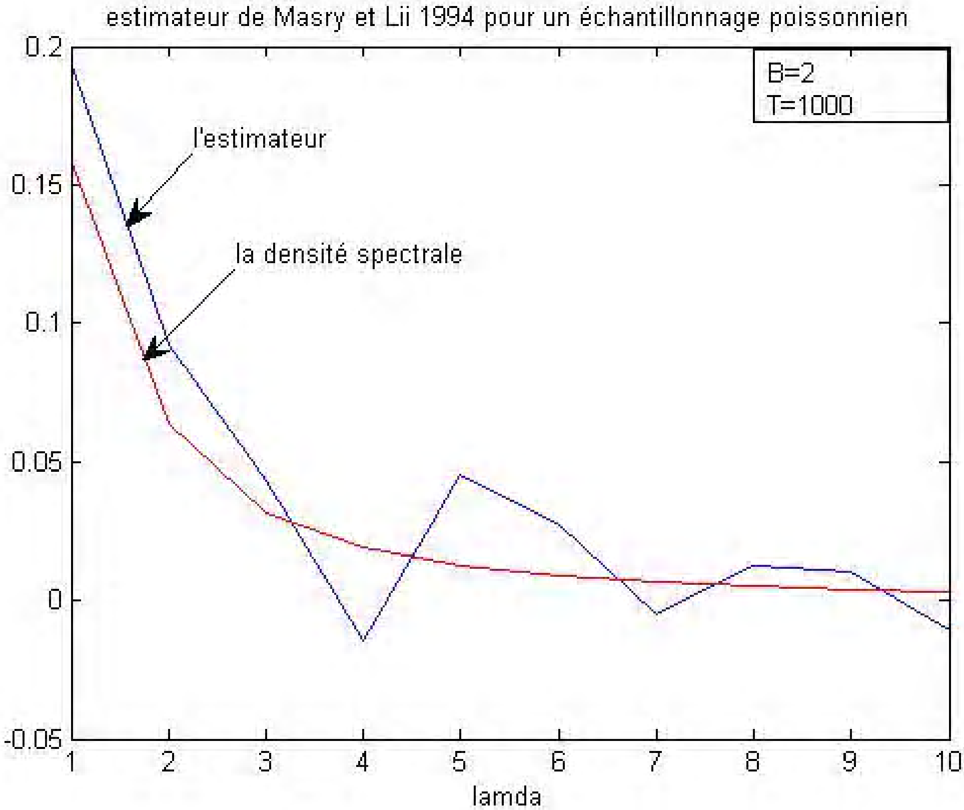

estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage poissonnien
B=2
T=1000
l'estimateur
la densité spectrale
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

FIG. 4-8 –

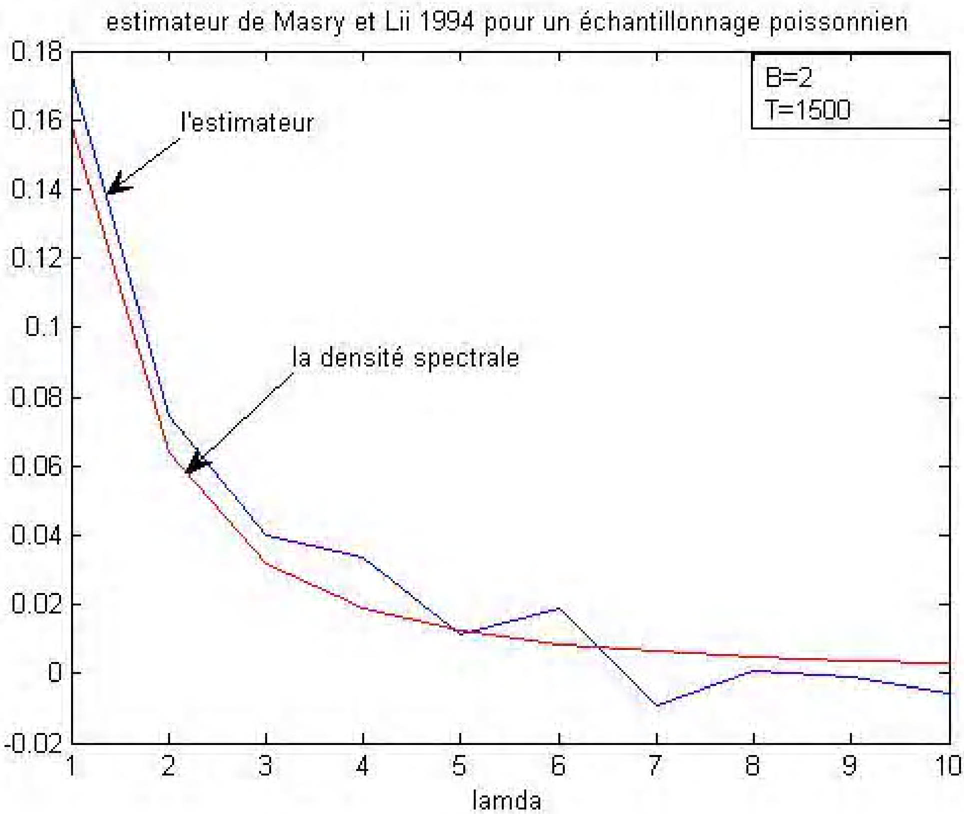

estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage poissonnien
B=2
T=1500
l'estimateur
la densité spectrale
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

FIG. 4-9 –

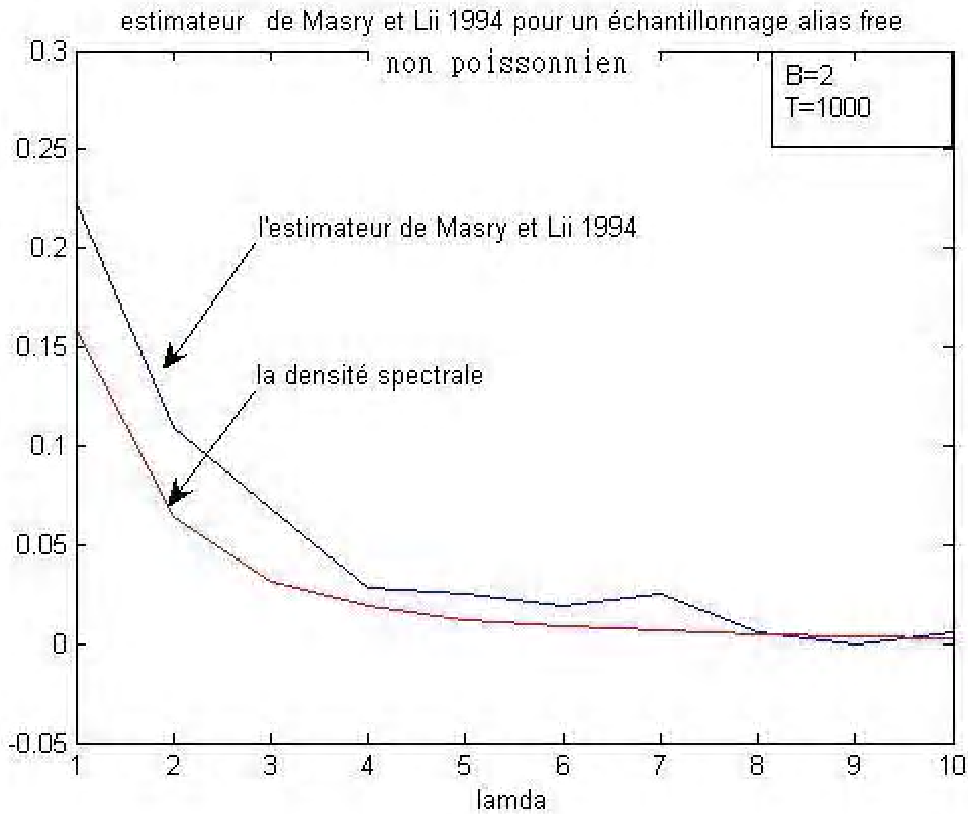

estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage alias free
non poissonnien
B=2
T=1000
l'estimateur de Masry et Lii 1994
la densité spectrale
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
lamda

FIG. 4-10 –

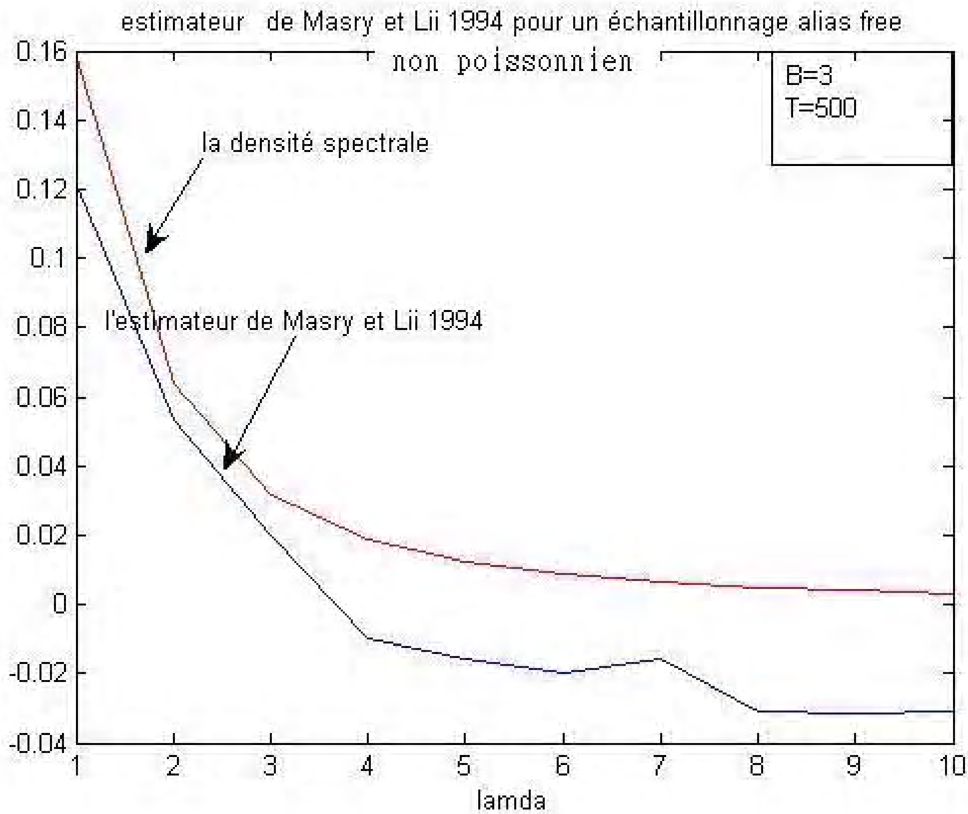

estimateur de Masry et Lii 1994 pour un échantillonnage alias free
non poissonnien
B=3
T=500
la densité spectrale
l'estimateur de Masry et Lii 1994
lamda
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

FIG. 4-11 –

Appendice
Preuve du corollaire (2.1)

le développement en série de taylor de w nous donne

$$w(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{w^{(j)}(0)\, t^j}{j!} + \frac{t^n}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} w^{(n)}[(1-x)\, t]\, dx$$

On utilise (2.26) pour trouver que

$$\begin{aligned}
& E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] \\
= \; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda} \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{w^{(j)} b_T^j u^j}{j!} + \frac{b_T^n u^n}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} w^{(n)}[(1-x)\, b_T u]\, dx\right] R_X(u)\, du \\
& + O\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n} \frac{w^{(j)}(0)\, b_T^j}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\lambda} u^j R_X(u)\, du + \\
& \frac{1}{2\pi} \frac{b_T^n}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-iu\lambda} u^n R_X(u)\, x^{n-1} w^{(n)}[(1-x)\, b_T u]\, dx du + O\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}$$

posons

$$e_T = \frac{b_T}{2\pi\,(n-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-iu\lambda} u^n R_X(u)\, x^{n-1} w^{(n)}[(1-x)\, b_T u]\, dx du$$

alors

$$E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n}\frac{b_T^j w^{(j)}(0)}{j!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}u^j R_X(u)\,du + e_T + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{A.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}R_X(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_T^j w^{(j)}(0)}{j!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}u^j R_X(u)\,du$$

$$+e_T + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$= \Phi_X(\lambda) + \sum_{j=1}^{n}\frac{(ib_T)^j w^{(j)}(0)}{b_T}\Phi_X^{(j)}(\lambda) + e_T + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

car

$$\Phi_X^{(j)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(iu)^j e^{-iu\lambda}R_X(u)\,du = \frac{1}{2\pi}(-i)^j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}u^j R_X(u)\,du$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}u^j R_X(u)\,du = \left(\frac{1}{-i}\right)^j \Phi_X^{(j)}(\lambda) = (i)^j\,\Phi_X^{(j)}(\lambda)$$

Maintenant pour e_T on a $\lim\limits_{T\to\infty} b_T = 0$ alors

$$e^{-iu\lambda}u^n R_X(u)\,x^{n-1}w^{(n)}[(1-x)\,b_T u] \to e^{-iu\lambda}u^n R_X(u)\,x^{n-1}w^{(n)}(0) \qquad \text{quand} \quad T\to\infty$$

cette limite est bornée par : $\text{const}|u|^n |R_X(u)|\, x^{n-1}$ est intégrable par les hypothèses (i), (ii) du corollaire (2.1) et par le théorème de la convergence dominée on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_T^n}e_T &= \frac{w^{(n)}(0)}{(n-1)!}\left[\int_0^1 x^{n-1}dx\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}u^n R_X(u)\,du\right] + o(1)\\ &= \frac{w^{(n)}(0)}{n!}(i)^n\,\Phi_X^{(n)}(\lambda) + o(1)\end{aligned}$$

d'où

$$e_T = b_T^n\frac{w^{(n)}(0)}{n!}(i)^n\,\Phi_X^{(n)}(\lambda) + o(b_T^n)$$

donc

$$e_T = o(b_T^n)$$

alors

$$\begin{aligned} E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] &= \Phi_X(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib_T)^j w^{(j)}(0)}{j!} \Phi_X^{(j)}(\lambda) + e_T + O\left(\frac{1}{T}\right) \\ &= \Phi_X(\lambda) + \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib_T)^j w^{(j)}(0)}{j!} \Phi_X^{(j)}(\lambda) + o(b_T^n) + O\left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned}$$

en particulier si $n = 2$

$$E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = \Phi_X(\lambda) + \frac{ib_T w^{(1)}(0)}{1!} \Phi_X^{(1)}(\lambda) - \frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) + o(b_T^2) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

mais on a

$$w^{(1)}(0) = 0 \quad \text{car} \quad w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} W(u)\, du$$

donc

$$w^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} iue^{iut} W(u)\, du \quad \text{et} \quad w^{(1)}(0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} uW(u)\, du$$

la fonction W est paire donc $uW(u)$ est impaire, alors

$$w^{(1)} = 0.$$

d'où

$$E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = \Phi_X(\lambda) - \frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) + o\left(b_T^2\right) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$biais\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = E\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] - \Phi_X(\lambda)$$

$$biais\left[\overset{\Lambda}{\Phi}_X(\lambda)\right] = -\frac{b_T^2 w^{(2)}(0)}{2} \Phi_X^{(2)}(\lambda) + o\left(b_T^2\right) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

Lemme A.1

Si $W \in IL_1 \cap IL_\infty$ et $\Gamma \in IL_1$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| D_T(u)\, Q_T(\lambda - u) \right| du = O\left(\frac{\log T}{b_T}\right) \text{ uniformément en } \lambda$$

Preuve

Rappelons que

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\lambda}\gamma(u)\,du \\
W &\in IL_1 \cap IL_\infty,\ \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\,d\lambda = 1 \ \text{ et } W_T\ (\lambda) = \frac{1}{b_T} W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right) \\
K_T(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda - u)\,W_T(u)\,du \\
Q_T(\lambda) &= W_T(\lambda) - K_T(\lambda) \\
D_T(u) &= \int_0^T e^{-i\lambda t}dt = \frac{1 - e^{-i\lambda T}}{i\lambda} \\
\Delta_T(u) &= \frac{1}{T}\left|D_T(u)\right|^2
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(u)\,D_T(\lambda-u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_T(u) - K_T(u)\right] D_T(\lambda-u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_T(u) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(u-v)\,W_T(v)\,dv\right] D_T(\lambda-u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(u)\,D_T(\lambda-u)\,du \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(u-v)\,W_T(v)\,D_T(\lambda-u)\,dvdu \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

pour $A > 0$, A est fixé on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\,D_T(\lambda-u)\,du + \int_{\frac{A}{T}\leq|\lambda-u|\leq A} W_T(u)\,D_T(\lambda-u)\,du \\
&\quad + \int_{|\lambda-u|>A} W_T(u)\,D_T(\lambda-u)\,du \\
&= J_1 + J_2 + J_3
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\left[\int_0^T e^{-i(\lambda-u)t}dt\right]du \\
&= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\left[\frac{1-e^{-i(\lambda-u)T}}{i(\lambda-u)}\right]du \\
&= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\left[\frac{1-\cos(\lambda-u)T+i\sin(\lambda-u)T}{i(\lambda-u)}\right]du \\
& -i\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\frac{[1-\cos(\lambda-u)T]}{(\lambda-u)}
\end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned}
\sin(\lambda-u)T &= 2\sin(\lambda-u)\frac{T}{2}\cos(\lambda-u)\frac{T}{2} \\
1-\cos(\lambda-u)T &= 2\sin^2(\lambda-u)\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

par la substitution dans J_1 on trouve

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\,2\frac{\sin(\lambda-u)T/2}{(\lambda-u)}\left[\cos(\lambda-u)T/2-i\sin(\lambda-u)T/2\right]du \\
&= \int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\,2\frac{\sin(\lambda-u)T/2}{(\lambda-u)}e^{-i(\lambda-u)T/2}du \\
&= \frac{T}{2}\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\frac{2\sin(\lambda-u)T/2}{(\lambda-u)T/2}e^{-i(\lambda-u)T/2}du
\end{aligned}$$

alors

$$J_1 = T\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} W_T(u)\frac{\sin(\lambda-u)T/2}{(\lambda-u)}du$$

donc

$$|J_1| \leq T\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} |W_T(u)|\left|\frac{\sin(\lambda-u)T/2}{T(\lambda-u)/2}\right|du$$

$$|\lambda-u| \leq \frac{A}{T} \quad \text{implique} \quad T|\lambda-u| \leq A$$

nous choisissons A tel que

$$|\sin(\lambda-u)T/2| \leq |T(\lambda-u)/2|$$

donc

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq T\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} |W_T(u)|\,du \\
&\leq \frac{T}{b_T}\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} \left|W\left(\frac{u}{b_T}\right)\right| du \leq O\left(\frac{T}{b_T}\right)\int_{|\lambda-u|\leq\frac{A}{T}} du \quad \text{car } W \text{ est bornée} \\
&\leq O\left(\frac{T}{b_T}\right)\int_{\lambda-\frac{A}{T}}^{\lambda+\frac{A}{T}} du = O\left(\frac{T}{b_T}\right)2\frac{A}{T} = O\left(\frac{1}{b_T}\right)
\end{aligned}$$

alors $$J_1 = O\left(\frac{1}{b_T}\right)$$

évaluons J_2

$$J_2 = \int_{\frac{A}{T}<|\lambda-u|\leq A} W_T(u)\frac{2\sin T(\lambda-u)/2}{(\lambda-u)}e^{-iu(\lambda-u)T/2}du$$

alors

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \int_{\frac{A}{T}<|\lambda-u|\leq A} |W_T(u)|\frac{du}{|\lambda-u|} = O\left(\frac{1}{b_T}\right)\int_{\frac{A}{T}<|\lambda-u|\leq A}\frac{du}{|\lambda-u|} \\
&= O\left(\frac{1}{b_T}\right)[\log|x|]_{\frac{A}{T}}^{A} = O\left(\frac{1}{b_T}\right)\log T
\end{aligned}$$

donc

$$J_2 = O\left(\frac{\log T}{b_T}\right)$$

pour J_3 on a

$$J_3 = \int_{|\lambda-u|>A} W_T(u)\frac{2\sin T(\lambda-u)/2}{(\lambda-u)}e^{-i(\lambda-u)T/2}du$$

on a

$$|\lambda-u| < A \quad \text{implique} \quad \frac{1}{|\lambda-u|} < \frac{1}{A}$$

donc

$$|J_3| \leq \frac{2}{A}\int_{|\lambda-u|>A} |W_T(u)|\,du \leq \frac{2}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} |W_T(u)|\,du = O(1) \qquad \text{car} \quad W \in IL_1$$

alors

$$J_3 = O(1)$$

d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 + J_2 + J_3 \\ &= O\left(\frac{1}{b_T}\right) + O\left(\frac{\log T}{b_T}\right) + O(1) \\ &= O\left(\max\left(\frac{1}{b_T}, \frac{\log T}{b_T}, 1\right)\right) \end{aligned}$$

donc

$$I_1 = O\left(\frac{\log T}{b_T}\right)$$

Maintenant pour I_2 on a

$$I_2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(u-\lambda)\, W_T(v)\, D_T(\lambda-u)\, dvdu$$

posons $x = u - v$ on obtient

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(v)\, D_T(\lambda - x - v)\, dv$$

$\Gamma \in IL_1$, donc et de la même façon comme dans I_1 on trouve que

$$I_2 = O\left(\frac{\log T}{b_T}\right)$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(u)\, D_T(\lambda-u)\, du = I_1 + I_2 = O\left(\frac{\log T}{b_T}\right)$$

lemme (2.1)

Sous l'hypothèse (2.2), $\Gamma \in IL_1$ et $b_T \to 0$ avec $Tb_T \to \infty$ quand $T \to \infty$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du = 2\pi Q_T(\lambda) + o\left(\frac{1}{b_T}\right)$$

où le terme $o\left(\frac{1}{b_T}\right)$ est uniforme en λ

preuve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_T(\lambda-u) - K_T(\lambda-u)\right]\Delta_T(u)\,du \tag{A.2}$$

maintenant on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\lambda-u-x)\,W_T(x)\,\Delta_T(u)\,dudx$$

posons $v = \lambda - u - x$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(v)\,W_T(\lambda-u-v)\,\Delta_T(u)\,dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(v)\,dv \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u-v)\,\Delta_T(u)\,du \qquad \text{(A.3)}\end{aligned}$$

montrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du = 2\pi W_T(\lambda) + o\left(\frac{1}{b_T}\right) \tag{A.4}$$

posons

$$J_T = \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda-u)\,\Delta_T(u)\,du - 2\pi W_T(\lambda)$$

on a

$$\Delta_T(u) = \frac{|D_T(u)|^2}{T}$$

et nous avons déja vu dans la preuve précédente que

$$D_T(u) = \frac{2\sin(uT/2)}{u} e^{-iuT/2}$$

$$|D_T(u)|^2 = D_T(u)\, D_T(-u) = \left[\frac{2\sin(Tu/2)}{u}\right]^2$$

alors

$$\frac{|D_T(u)|^2}{T} = T\left[\frac{\sin(Tu/2)}{Tu/2}\right]^2$$

donc

$$\Delta_T(u) = T\left[\frac{\sin(Tu/2)}{Tu/2}\right]^2$$

on a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_T(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} T\left[\frac{\sin(Tu/2)}{Tu/2}\right]^2 du$$

par le changement de variable $v = Tu/2$ on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_T(u)\, du = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin v}{v}\right]^2 dv$$

et d'aprés le théorème des résidues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin v}{v}\right]^2 dv = \pi \qquad \text{(voir P. TAUVEL, exercices d'analyse complexes)}$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_T(u)\, du = 2\pi$$

donc

$$\begin{aligned}
J_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(\lambda - u)\, \Delta_T(u)\, du - W_T(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_T(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_T(\lambda - u) - W_T(\lambda)\right] \Delta_T(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{b_T} W\left(\frac{\lambda - u}{b_T}\right) - \frac{1}{b_T} W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right)\right] \Delta_T(u)\, du \\
&= \frac{1}{b_T}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[W\left(\frac{\lambda}{b_T} - \frac{u}{b_T}\right) - W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right)\right] \Delta_T(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W\left(\frac{\lambda}{b_T} - \frac{u}{b_T}\right) - W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right)\right] \Delta_T(u)\, d\left(\frac{u}{b_T}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W\left(\frac{\lambda}{b_T} - u\right) - W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right)\right] \Delta_T(b_T u)\, du
\end{aligned}$$

posons $u' = b_T T u$, alors on obtient

$$J_T = \frac{1}{b_T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W\left(\frac{\lambda}{b_T} - \frac{u'}{Tb_t}\right) - W\left(\frac{\lambda}{b_T}\right) \right] \Delta\left(u'\right) du'$$

où

$$\Delta\left(u'\right) = \left[\frac{\sin\left(u'/2\right)}{u'/2}\right]^2, \ \Delta \in IL_1$$

alors

$$b_T J_T \leq \int_{-\infty}^{+\infty} W_w\left(\frac{|u|}{Tb_T}\right) \Delta\left(u\right) du \tag{A.5}$$

W_w est le module de continuité de W, W est uniformément continue donc

$$\lim_{T\to\infty} W_w\left(\frac{|u|}{Tb_T}\right) = 0$$

et par le théorème de la convergence dominée on a

$$b_T J_T \leq \int_{-\infty}^{+\infty} W_w\left(\frac{|u|}{Tb_T}\right) \Delta\left(u\right) du \to 0 \text{ quand } T \to \infty$$

d'où

$$J_T = o\left(\frac{1}{b_T}\right) \quad \text{et la preunve de (A.4)}$$

retournons maintenant à (A.3)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T\left(\lambda - u\right) \Delta_T\left(u\right) du &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T\left(\lambda - u\right) \Delta_T\left(u\right) du \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(v\right) dv \int_{-\infty}^{+\infty} W_T\left(\lambda - v - u\right) \Delta_T\left(u\right) du \\
&= 2\pi W_T\left(\lambda\right) - 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(v\right) W_T\left(\lambda - v\right) dv \\
&\quad - o\left(\frac{1}{b_T}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(v\right) dv + o\left(\frac{1}{b_T}\right)
\end{aligned}$$

par un changement de variable $u = \lambda - v$ et le fait que $\Gamma \in IL_1$ et d'aprés (2.18) on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T\left(\lambda - u\right) \Delta_T\left(u\right) du = 2\pi\left[W_T\left(\lambda\right) - K_T\left(\lambda\right)\right] + o\left(\frac{1}{b_T}\right)$$

et d'aprés (2.34) nous en déduison le résultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_T\left(\lambda - u\right) \Delta_T\left(u\right) du = 2\pi Q_T\left(\lambda\right) + o\left(\frac{1}{b_T}\right)$$

Bibliographie

[1] ANDERSON, *The statistical analysis of time series.* John Wiley and Sons, 1971.

[2] D. R. BRILLINGER. *The spectral analysis of stationary interval functions*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Probability and Statistics (1972) pp. 483-513.

[3] B. CALVO, A. CALVO, J. DOYEN et F. BOSCHET. *Fonctions de variables complexes*, cours d'analyse 6. Armand collin-collection U, Paris 1973.

[4] C. COCOZZA-THIVENT. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes.* Springer-Verlag, 1997.

[5] D. J. DALEY and D. VERE-JONES. *A summary of the theory of point processess*, in : P. A. W. Lewis, ed. Stochastic point processes, (Wiley, New York, 1972), pp. 299-383.

[6] R. H. JONES. Spectrum estimation with unequally spaced observations. In Proc. Kyoto Int. Conf. Circuit and system theory. pp 253-252, 1970.

[7] S. KACHEROUD. *Application des propriétés des cumulants à la convergence presque complète d'estimateurs de densité spectrale d'un processus à temps discret.* Université de Rouen, (Thèse de doctorat 3ème cycle), 1985.

[8] K. KHALED. *Méthodes statistiques.* O. P. U-Alger, 2002.

[9] J-L. LACOUME, P-O. AMBLAND, P. COMON. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal.* Masson, Paris, 1997.

[10] KEH-SHIN LII et ELIAS MASRY. Spectral estimation of continiuous-time stationary processus from random sapmling. *Stochastic processes and their applications,* **52** :39-64, 1994.

[11] E. MASRY and M. C. LUI. Discrete time spectral estimation of continuous parameter processes. A new consistent estimate. *IEEE. Trans. inform thery,* ***vol IT-22****, pp 289-312, May 1976.*

[12] E. MASRY. Poisson sampling and spectral estimation of continuous-time processes, *IEEE Trans. Inform. Theory, 24, pp 173, pp 173-183, 1978.*

[13] E. MASRY, DALE KLAMER and CHARLES MIRABILE. Spectral estimation of continuous-time processes : Performance comparaison between periodic and poisson sampling *schemes. IEEE pp 679-685, 1978.*

[14] F. MESSACI. *Notions fondamentales de la théorie des probabilités.* Les éditions de l'université Mentouri. Constantine, septembre 2001.

[15] F. MESSACI. *Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continu par échantillonnage poissonnien.* Université de Rouen, (Thèse de doctorat 3ème cycle), 1986.

[16] F. MESSACI. Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continu par échantillonnage poissonnien (I). *pub de L'I.S.U. Paris, XXXIII, fascicule 3, 33-48, 1988.*

[17] F. MESSACI. Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continu par échantillonnage poissonnien (II). *pub de L'I.S.U. Paris, XXXIV, fascicule 1, 47-68, 1989.*

[18] E. PARZEN. *Time Series Analysis papers* (Holden-Day, San Francisco, 1967).

[19] E. PARZEN. *Mathematical considerations in the estimation of spectra.* Technometrics. Vol **3**, n°2, pp 167-189, May 1961.

[20] M. RACHDI. *Choix de la largeur de fenêtre spectrale par validation croisée.* Analyse spectrale p-adique. Université de Rouen, (Thèse de doctorat), 1998.

[21] ALAN RUEGG. *Processus stochastiques avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité.* Presses polytechniques romandes, 1988.

[22] H. S. SHAPIRO and R. A. SILVERMAN. Alias free sampling of random noise, *J. Soc. Indus. Appl. Math. 8(1960), 225-248.*

[23] MURRAY R. SPIEGEL. *Transformée de Laplace.* Série shaum. Dépôt légal : 1995.

Résumé

Dans ce mémoire nous reprenons l'étude de l'estimateur de la densité spectrale d'un processus à temps continu, échantillonné à des instants aléatoires. Il a été introduit par Lii et Masry en 1994.

Ensuite nous étudions le cas où la moyenne du processus est inconnue et nous montrons que l'estimateur ainsi obtenu reste asymptotiquement sans biais.

Finalement un travail de simulation permet de compléter l'étude théorique.

Mots clés :

Estimation spectrale d'un processus à temps continu, processus ponctuel, biais asymptotique, convergence en moyenne quadratique, simulation, normalité.

Abstract

In this thesis we study the estimator of the spectral density of a continuous-time processes, with random sampling, wich be proposed by Lii and Masry in 1994.

Next we consider the case of an unknown mean process, we show that the bias of the estimator is asymptotically null.

Finally a simulation work permits us to complete the theoretical study.

Key words

Spectral estimation of continuous-time processes ; point processes ; asymptotic bias ; mean-squares consistency ; simulation ; normality.