REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mentouri-Constantine
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

N° d'Ordre:
Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

magister en Mathématiques

Option

Equations différentielles

Par

Menigher Hammoud

THEME

PROBLEME D'EVOLUTION GOUVERNE PAR UN OPERATEUR MAXIMAL MONOTONE

Soutenue le:

Devant le jury:

Président :	Mr M. Denche	Prof. Univ. Constantine
Rapporteur :	Mr A. Aibeche	M.C. Univ. Sétif
Examinateur:	Mr M.F. Yarou	M.C. Univ. Jijel
Examinateur:	Mr A.L. Merhoune	M.C. Univ. Constantine

سُبْحَانَكَ

لاَ عِلْمَ لَنَا

إِلاَّ مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ

أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ

Dédicace

A

Mon père Salah . . .

Ma mère Oumessad . . .

Mon frère H2 . . .

Ma sœur H1 . . .

A mes grande familles Menigher et Mouadji . . .

A mes collégues de la poste graduation . . .

A mon ami le plus distingué . . Sahib-el-kharaite . . .

A tous mes amis . . .

Je dédie ce modeste travail . .

Remerciement

Avant tout, je remercie le bon Dieu pour tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres de jury:

Monsieur le professeur M. Denche de l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Monsieur A. Aibeche maître de conférence à l'université de Sétif, qui n'a pas hésité à accepter d'être rapporteur de ce mémoire.

Messieurs M.F. Yarou maître de conférence à l'université de Jijel, et A.L. Marhoune maître de conférence à l'université de Constantine d'avoir accepté de faire partie du jury et de juger ce travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à monsieur M.F. Yarou qui par ses conseils, ses encouragements m'a permis de mener ce travail à terme.

Je tiens à remercier tous mes enseignants durant toute ma vie scolaire.

Enfin je n'oublierai pas tous ceux qui m'ont encouragé pour terminer ce travail du loin ou du près, à tous ceux-ci,

MERCI . . MERCI . . MERCI . . MERCI . .

L'étudiant Menigher Hammoud.

Table des Matières

Chapitre 0: Introduction générale **01**

Chapitre 1: Notations et Résultats Préliminaires **04**

Chapitre 2: Existence de solutions à Variation bornée

2.1 Le cas d'un opérateur maximal monotone **51**

2.2 Le cas du sous différentiel **57**

Chapitre 3: Existence de solutions périodiques

3.1 Le problème homogène **62**

3.2 Le problème perturbé **64**

Bibliographie **68**

CHAPITRE-0-

INTRODUCTION GENERALE

Parmi les problèmes d'évolution non linéaires pour les équations différentielles (univoques et multivoques), ceux qui sont régis par la classe des opérateurs maximaux monotones ont été largement étudiés. Il est bien connu de la théorie de Hille-Yosida, que pour une condition initiale $x_0 \in D(A)$, il existe une unique solution $x \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ de

$$x\prime(t) + Ax(t) = f(t), \quad t > 0$$

où $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur maximal monotone sur un espace de Hilbert et $f \in C^1(R; H)$.

Dans le cas multivoque, c'est-à-dire pour des inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leurs motivations dans différentes applications, en mécanique, élasto-plasticité, contrôle optimal, économétrie, etc... et englobent différentes classe de problèmes, notamment les opérateurs sous différentiels et le processus de rafle. Ce type de problème a été d'abord étudié lorsque A ne dépend pas du temps (directement), H. Brezis[10] utilise la méthode de la régularisation Yosida pour démontrer l'existence d'une unique solution Lipschitzienne de

$$-((du)/(dt)) \in Au(t) + f(t) \quad p.p.\ t \in [0,T]$$

$f \in L^1([0,T];H)$ est appelée perturbation du problème. E. Mitidieri et I.I. Vrabie[18] ont montré l'existence de solution "intégrale" dans un espace de Banach. Ces travaux ont été généralisés dans [4], [28], [2] en prenant une perturbation multivoque $F(t,u(t))$, les propriétés de l'ensemble de solution sont étudiés.

Dans le cas où A dépend du temps, différentes contributions ont été données, citons entre autre, [1], [14], [12], [15], [20], [3], [23]. Dans [22], les auteurs ont montré l'existence de solution à variation bornée (et absolument continue) pour le problème sans perturbation avec une condition utilisant une pseudo-distance introduite par Vladimirov [31].

Lorsque l'opérateur A est le sous différentiel d'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, les hypothèses sont en général prises sur la fonction φ au lieu de l'opérateur $\partial\varphi$. Ce type de problèmes a été étudié par [8], [16], [29], [27], [30], [19] ...

Dans le cas où φ est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé $C(t)$, ce problème est connu sous le nom de Processus de rafle et a été largement étudié par Moreau et ses étudiants, voir par exemple [11], [24], [25], [26].

Un autre sujet qui a suscité beaucoup de chercheurs, est la recherche de solutions périodiques pour ce genre de problèmes (avec ou sans pertubation), on peut citer [6], [12], [2], [3], [29].

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'existence de solution pour les problèmes d'évolutions gouvernés par les opérateurs maximaux monotones. Dans le premier chapitre, on rappelle les notions essentielles et les résultats de base concernant les multifonctions, les opérateurs maximaux monotones et sous différentiel. Le deuxième chapitre est consacré à l'existence de solutions à variation bornée (ou absolument continues) pour le problème avec perturbation multivoque et régis par opérateur maximal monotone puis dans le cas particulier de l'opérateur sous différentiel d'une fonction convexe propre semi continue inférieurement. Dans le troisième chapitre, on s'est intéressé aux solutions périodiques de ce type de problèmes.

CHAPITRE 1

Notations et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multifonctions, des théorèmes principaux concernant la convergence et la compacité.

1.1 Notations

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par:

- H un espace de Hilbert de dimension arbitraire muni de la norme $\|.\|$ et du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
- $ck(H)$ (respectivement $cwk(H), wk(H)$) l'ensemble des parties convexes compactes (resp. l'ensemble des parties convexes faiblement compactes, l'ensemble des parties faiblement compactes) non vides de H.
- dr la mesure de stieltjes d'une fonction r continue à droite (CD) et non décroissante.
- Si X est un espace topologique, $\mathcal{B}(X)$ désigne la tribu borélienne de X (ie: la tribu engendrée par les ouverts (ou les fermés) de X).

– I l'intervalle $[0,T]$ de $\mathbb{R}$ où $T \geq 0$.

– $L^1(H,I,dr)$ l'espace de banach des fonctions $dr-$intégrables sur I muni du produit scalaire $(.,.)$:

$$(f,g)_{L^1} = \int_0^T \langle f(x), g(x) \rangle \, dx,$$

et de la norme $\|.\|_{L^1}$.

– $L^2_H(I)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré Lebesgue-intégrable muni de sa norme habituelle.

– λ la mesure de Lebesgue définie sur $I = [0,T]$ et $\mathcal{L}(I)$ la tribu des parties Lebesgue-mesurables de I.

– $\mathcal{C}_H(I)$ l'espace des fonctions continues de I dans H muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par:

$$\|u\|_\infty = \sup\{\|u(t)\|, t \in I\}, \forall u \in \mathcal{C}_H(I).$$

1.2 Limites d'ensembles

Les limites d'ensembles ont été introduites par Painlevé en 1902. Elles ont été popularisés par Kuratowski dans son célèbre livre "*Topologie*" et donc, souvent appelées *limites supérieures et inférieure de Kuratowski de suites d'ensembles.*

Définition 1 [*6*]

Soit (K_n) une suite de sous-ensembles d'un espace métrique E. Nous disons que le sous-ensemble:

$$\limsup_{n\to\infty} K_n = \{x \in E / \liminf_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\},$$

est la limite supérieure de la suite (K_n) *et que le sous-ensemble:*

$$\liminf_{n\to\infty} K_n = \{x \in E / \lim_{n\to\infty} d(x, K_n) = 0\},$$

est sa limite inférieure.

Un sous ensemble K *est appelé limite ou limite ensembliste de la suite* (K_n) *si:*

$$K = \liminf_{n\to\infty} K_n = \limsup_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_n.$$

Les limites inférieures et supérieures sont évidement fermées. Nous voyons aussi que:

$$\liminf_{n\to\infty} K_n \subset \limsup_{n\to\infty} K_n,$$

et que les limites inférieures des sous-ensembles K_n et de leurs adhérences $\overline{K_n}$ coïncident, puisque $d(x, K_n) = d(x, \overline{K_n})$.

Toute suite décroissante de sous ensembles (K_n) a une limite, qui est l'intersection de leur adhérences:
si $K_n \subset K_m$ quand $n \geq m$, alors $\lim_{n\to\infty} K_n = \cap_{n\geq 0} \overline{K_n}$.

Une limite supérieure peut être vide (aucune sous-suite d'éléments $X_n \in K_n$ possède une valeur d'adhérence).

En ce qui concerne les suites de singletons $\{x_n\}$, la limite d'ensemble, quand elle existe, est ou bien vide (la suite d'éléments x_n n'est pas convergente), ou est un singleton constitué de la limite de la suite.

Proposition 2 [*6*]

Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de sous-ensembles d'un espace métrique, alors* $\liminf_{n\to\infty} K_n$ *est l'ensemble des limites des suites* $x_n \in K_n$ *et* $\limsup_{n\to\infty} K_n$ *est l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites* $x_n \in K_n$*, c'est-à-dire des limites de sous-suites* $x_{n'} \in K_{n'}$.

La limite supérieure est aussi égale au sous-ensemble des valeurs d'adhé-rences de suites "approchées" satisfaisant:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N(\varepsilon), x_n \in B(K_n, \varepsilon).$$

1.3 Multifonctions

Les suites de sous-ensembles peuvent être considérées comme des multifonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers.

Naturellement, nous pouvons remplacer $\mathbb{N}$ par un espace métrique E, et les suites de sous-ensembles $n \mapsto K_n$ par les multifonctions $x \mapsto C(x)$ (qui associent à un point x un sous-ensemble $C(x)$) et adapter la définition des limites inférieures et supérieures à ce cas, appelé le cas continu.

Avant de poursuivre, nous donnons un certain nombre de définitions concernant les multifonctions, aussi appelées *correspondances, applications multivoques.*

Définition 3 [*6*]

Soient E et F des espaces métriques. Une multifonction C de E dans F est caractérisée par son graphe $Graph(C)$, sous-ensemble de l'espace produit $E \times F$ défini par:

$$Graph(C) = \{(x, y) \in E \times F / y \in C(x)\}.$$

- *Nous dirons que $C(x)$ est l'image ou valeur de x par C.*

- *Une multifonction est dit non triviale si son graphe est non vide, c'est-à-dire, s'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $C(x)$ est non vide.*

- *On dit que C est stricte si toute les images $C(x)$ sont non vides. Le domaine (d'une multifonction) de C est le sous-ensemble des éléments $x \in E$ tels que $C(x)$ est non vide:*

$$Dom(C) = \{x \in E / C(x) \neq \Phi\}.$$

- *L'image de C est l'union des images $C(x)$ quand x parcourt E :*

$$\operatorname{Im}(C) = \cup_{x \in E} C(x).$$

- *L'inverse C^{-1} de C est la multifonction de F dans E définie par:*

$$x \in C^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in C(x) \Longleftrightarrow (x, y) \in Graph(C).$$

Le domaine de C est donc l'image de C^{-1} et coïncide avec la projection du graphe sur l'espace E et, de façon symétrique, l'image de C est égale au domaine de C^{-1} et à la projection du graphe de C sur F.

Si K est un sous-ensemble de E, nous désignons par $C_{|K}$ la restriction de C à K définie par

$$C_{|K}(x) = \begin{cases} C(x), & si\ x \in K. \\ \Phi, & si\ x \notin K. \end{cases}$$

En particulier, la restriction d'une application univoque devient aïnsi une multifonction.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété d'un sous-ensemble (par exemple, fermé, convexe, compact,...etc). Puisque nous allons souligner l'aspect symétrique d'une multifonction en la considérant comme un graphe (au lieu d'une application d'un ensemble dans autre), nous dirons en règle générale qu'une multifonction vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si, et seulement si, son graphe la satisfait. Par exemple, une multifonction est dite fermé (resp. convexe, convexe fermée, mesurable) si, et seulement si, son graphe est fermé (resp. convexe, convexe fermé, mesurable).

Si les images d'une multifonction C sont fermées, convexes, bornées, compactes,...etc, nous dirons que C est à valeurs fermées, à valeurs convexes, à valeurs bornées, à valeurs compactes,...etc.

Quand $*$ désigne une opération sur les sous-ensembles, nous utiliserons la même notation pour l'opération sur les multifonctions, qui est définie par:

$$C_1 * C_2 : x \mapsto C_1(x) * C_2(x).$$

On défini de cette façon $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cup C_2$, $C_1 + C_2$ (dans les espaces vectoriels),...etc. De même, si α est une application des sous-ensembles de F dans F, nous définissons:

$$\alpha(C) : x \mapsto \alpha(C(x)).$$

Par exemple, nous utiliserons $\overline{C}$, $co(C), ...etc$, pour désigner les multifonctions $x \mapsto \overline{C(x)}$, $x \mapsto co(C(x)), ...etc$

On écrit:

$$C \subset D \Longleftrightarrow Graph(C) \subset Graph(D).$$

et on dit que D est prolongement de C.

Mentionnons les propriétés élémentaires suivantes:

(i) $C(K_1 \cup K_2) = C(K_1) \cup C(K_2)$,

(ii) $C(K_1 \cap K_2) \subset C(K_1) \cap C(K_2)$,

(iii) $C(E \backslash K) \supset \mathrm{Im}(C) \backslash C(K)$,

(iv) $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow C(K_1) \subset C(K_2)$.

Il y a deux façons de définir l'image inverse par une multifonction C d'un sous-ensemble M :

(i) $C^{-1}(M) = \{x / C(x) \cap M \neq \Phi\}$,

(ii) $C^{+1}(M) = \{x / C(x) \subset M\}$.

Le sous-ensemble $C^{-1}(M)$ est appelé *l'image inverse* de M par C et $C^{+1}(M)$ est appelé le *coeur* de M par C. Ils coïncident naturellement quand C est univoque.

On observe immédiatement que:

$$C^{+1}(F\backslash M) = E\backslash C^{-1}(M) \quad \text{et} \quad C^{-1}(F\backslash M) = E\backslash C^{+1}(M).$$

On peut concevoir également deux façons duales de définir des produits de composition de multifonctions (qui coïncident quand les multifonctions sont univoques),

Définition 4 [*6*]

soient E, F, G des espaces métriques et $D : E \to F$ & $C : F \to G$ deux multifonctions.

(1) le produit de composition usuel (appelé simplement produit) $C \circ D : E \to G$ de C et D est défini par:

$$(C \circ D)(x) = \cup_{y \in D(x)} C(y).$$

(2) le produit carré $C \square D : E \to G$ de C et D est défini par:

$$(C \square D)(x) = \cap_{y \in D(x)} C(y).$$

On désigne par $\mathbf{1}$ l'application identité d'un ensemble dans lui même. Nous déduisons les formules:

$$\begin{aligned} Graph(C \circ D) &= (D \times \mathbf{1})^{-1}(Graph(C)) \\ &= (\mathbf{1} \times C)(Graph(D)), \\ Graph(C \square D) &= (D \times \mathbf{1})^{+1}(Graph(C)). \end{aligned}$$

aïnsi que les formules énonçant que l'inverse d'un produit est le produit des inverses (en ordre inverse) *(i)* $(C \circ D)^{-1}(z) = D^{-1}(C^{-1}(z)) = (D^{-1} \circ C^{-1})(z)$,

(ii) $(C \square D)^{-1}(z) = D^{+1}(C^{-1}(z))$.

On observe aussi que:

$$x \in (C \square D)^{-1}(z) \Longleftrightarrow D(x) \subset C^{-1}(z),$$

$$x \in (D^{-1} \square C^{-1})(z) \Longleftrightarrow C^{-1}(z) \subset D(x).$$

et donc que:

$$D(x) = C^{-1}(z) \Longleftrightarrow x \in (D^{-1} \square C^{-1})(z) \cap (C \square D)^{-1}(z).$$

Quand M est un sous-ensemble de G, alors:

$$\begin{aligned} (C \circ D)^{-1}(M) &= D^{-1}(C^{-1}(M)), \\ (C \circ D)^{+1}(M) &= D^{+1}(C^{+1}(M)). \end{aligned}$$

1.4 La semi-continuité des fonctions

Définition 5 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On rappelle qu'une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement sur E (s.c.i.), si elle satisfait aux conditions équivalentes suivantes,*

(1) $\forall a \in \mathbb{R}, V_a = \{u \in E / f(u) \leq a\}$ *est fermé.*

(2) $\forall \overline{u} \in E, \varliminf_{u \to \overline{u}} f(u) \geq f(\overline{u})$.

Bien entendu, f sera dite semi-continue supérieurement ($s.c.s.$), si $(-f)$ est $s.c.i.$

Le cas des fonctions convexes revêt un intérêt particulier car la semi-continuité inférieure subsite quand on affaiblit la topologie de E. C'est une propriété extrêmement précieuse.

Proposition 6 *Une fonction numérique f est continue sur E si, et seulement si, elle est à la fois s.c.i. et s.c.s. sur E.*

La proposition suivante caractérise les fonctions semi-continues inférieurement sur un espace métrique E.

Proposition 7 *Les propriétés suivantes sont équivalentes,*

(i) f *est s.c.i. sur* E,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *les ensembles* $V_\lambda = \{x \in E \text{ tels que } f(x) > \lambda\}$ *sont ouverts,*

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *les sections* $S(f, \lambda) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) \leq \lambda\}$ *sont fermées,*

(iv) l'épigraphe $\mathcal{E}p(f) = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \leq \lambda\}$ *est fermé.*

Proposition 8 *Toute fonction convexe s.c.i. f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ reste s.c.i l'orsqu'on munit E de sa topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

1.5 Continuité des Multifonctions

Les concepts de multifonctions semi-continues sont été introduit en 1932 par G-Bouligand et par K-Kuratowski. Nous commençons par les multifonctions semi-continues supérieurement:

Ici, E, F, G désignent des espaces métriques. On convient de compter l'ensemble vide parmi les voisinages de l'ensemble vide.

Définition 9 [*6*]

Une multifonction $C : E \to F$ est appelée semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x \in E$ si, et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $C(x), \exists \eta > 0$ tel que:

$$\forall x' \in B_E(x, \eta), C(x') \subset \mathcal{U}.$$

Elle est dite s.c.s. si elle est s.c.s. en tout point de E.

Quand $C(x)$ est compact, C est *s.c.s.* en x si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x' \in B_E(x, \eta), C(x') \subset B_F(C(x), \varepsilon).$$

Le domaine d'une multifonction *s.c.s.* est fermé. En effet, si $x \notin Dom(C)$, en prenant l'ensemble vide comme voisinage de $C(x)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \eta), C(y) \subset \Phi$. Cette boule est donc contenue dans le complémentaire du domaine de C, qui est alors ouvert.

On observe que cette définition est une adaptation naturelle de la définition d'une application continue. Pourquoi alors utiliser l'adjectif *s.c.s.* au lieu de continu?. Une des raisons est que la caractérisation de la continuité des applications univoques -une application f est continue en x si, et seulement si, elle renvoie les suites convergeant vers x en suites convergentes vers $f(x)$- n'est plus vraie dans le cas multivoque. En effet, la version multivoque de cette dernière propriété conduit à la définition suivante:

Définition 10 [*6*]

Une multifonction $C : E \to F$ est appelée semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x \in Dom(C)$ si pour tout $y \in C(x)$ et pour toute suite d'éléments $x_n \in Dom(C)$ convergeant vers x, il existe une suite d'éléments $y_n \in C(x_n)$ convergeant vers y.

Elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. en tout point $x \in Dom(C)$.

En fait, comme dans le cas univoque, cette définition est équivalente à:

- Pour tout sous ensemble ouvert $\mathcal{U} \subset F$ tel que $\mathcal{U} \cap C(x) \neq \Phi, \exists \eta > 0$ tel que:

$$\forall x' \in B_E(x, \eta), C(x) \cap \mathcal{U} \neq \Phi.$$

Malheuresement, il existe des multifonctions qui bénéficient d'une propriété sans satisfaire l'autre.

Exemple 11 [*6*]

1) La multifonction $C_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:*

$$C_1(x) = \begin{cases} [-1,1], & si\ x \neq 0. \\ \{0\}, & si\ x = 0. \end{cases}$$

est s.c.i. en zéro mais n'est pas s.c.s. en zéro.

2) La multifonction $C_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:*

$$C_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & si\ x \neq 0. \\ [-1,1], & si\ x = 0. \end{cases}$$

est s.c.s. en zéro mais n'est pas s.c.i. en zéro.

Définition 12 [*6*]

On dit que la multifonction C *est continue en* x *si elle est à la fois s.c.s. et s.c.i. en* x, *et qu'elle est continue si elle est continue en tout point de* $Dom(C)$.

Remarque 13 [*6*]

On peut utiliser les concepts d'image inverse et de coeur pour caractériser les multifonctions semi-continues inférieurement et supérieurement:

Proposition 14 [*6*]

Une multifonction $C : E \to F$ *est s.c.s. en* x *si le coeur de tout voisinage de* $C(x)$ *est un voisinage de* x, *et une multifonction est s.c.i. en* x *si l'image inverse de tout sous-ensemble ouvert intersectant* $C(x)$ *est un voisinage de* x.

Donc, C *est s.c.s. si, et seulement si, le couer de tout sous-ensemble ouvert est ouvert, et est s.c.i. si, et seulement si, l'image inverse de tout sous-ensemble ouvert est ouverte.*

Si $Dom(C)$ *est fermé, alors* C *est s.c.i. si, et seulement si, le coeur de tout sous-ensemble fermé est fermé, et* C *est s.c.s. si, et seulement si,l'image inverse de tout sous ensemble fermé est fermée.*

On peut également adapter les définitions de limites inférieures et supérieures au cas d'une multifonction $C : E \to F$. La notation $x' \to_C x$ signifie que x' reste dans $Dom(C)$ et converge vers x.

Définition 15 [6]

Lorsque $C : E \to F$ est une multifonction, nous dirons que:

$$\limsup_{x' \to x} C(x') = \{y \in F / \liminf_{x' \to x} d(y, C(x')) = 0\},$$

est la limite supérieure de $C(x')$ quand $x' \to x$, et que:

$$\liminf_{x' \to x} C(x') = \{y \in F / \lim_{x' \to x} d(y, C(x')) = 0\},$$

est la limite inférieure de $C(x')$ quand $x' \to x$.

Elles sont évidement fermées. Nous observons aussi que:

$$\forall x \in Dom(C), \liminf_{x' \to x} C(x') \subset \overline{C(x)} \subset \limsup_{x' \to x} C(x').$$

Les liens entre semi-continuité des multifonctions et limites sont donnés par la:

Proposition 16 [6]

Un point (x, y) appartient à l'adhérence du graphe de la multifonction $C : E \to F$ si, et seulement si,

$$y \in \limsup_{x' \to x} C(x'),$$

et C est s.c.i. en $x \in Dom(C)$ si, et seulement si,

$$C(x) \subset \liminf_{x' \to x} C(x').$$

Remarque 17 [6]

cette proposition à conduit plusieurs auteurs à appeler "semi-continues" les multifonctions que nous avons appelées fermées dans la terminologie que nous avons adaptée. Naturellement, cex deus concepts coïncident pour les multifonctions à valeurs compactes.

Proposition 18 *[6]*

Le graphe d'une multifonction s.c.s. $C : E \to F$ *à valeurs fermées est fermé.*

La réciproque est vraie si nous l'on suppose que F *est compact.*

Plus généralement, on démontre le résultat suivant:

Proposition 19 *[6]*

Soient C *et* D *deux multifonctions de* E *dans F. On suppose que* C *est fermée, que* $D(x)$ *est compact et que* D *est s.c.s. en* $x \in Dom(C \cap D)$*. Alors* $C \cap D$ *est s.c.s. en* x*.*

Preuve. *On considère une suite d'éléments* (x_n, y_n) *du graphe de* C *convergeant vers* (x, y)*. Puisque* C *est s.c.s.; pour tout* ε*, il existe un entier* $N(\varepsilon)$ *tel que, pour tout* $n > N(\varepsilon)$*, on obtient:*

$$y_n \in C(x_n) \subset C(x) + \varepsilon B.$$

On déduit donc que y *appartient à l'adhérence de* $C(x)$*, qui coïncide avec* $C(x)$*. La limite* (x, y) *appartient donc au graphe de* C*.*

On suppose maintenant que le graphe de C *est fermé et que* F *est compact.*

Soit $x \in E$ *et* $\mathcal{V}$ *un voisinage ouvert de* $C(x)$*. On désigne par* M *le complémentaire de* $\mathcal{V}$*, qui est compact et disjoint de* $C(x)$*.*

Puisque pour $y \in M$*, le couple* (x, y) *n'appartient pas au graphe de* C*, qui est fermé, il existe des voisinages ouverts* $\mathcal{W}_y(x)$ *de* x *et* $\mathcal{U}(y)$ *de* y *tels que:*

$$Graph(C) \cap ((\mathcal{W}_y(x)) \times (\mathcal{U}(y))) = \Phi.$$

Le compact M *pouvant être recouvert par* n *voisinages* $\mathcal{U}(y_i)$*, on considère le voisinage:*

$$\mathcal{W}_0(x) = \cap_{i=1}^{n} \mathcal{W}_{y_i}(x).$$

Il est claire que:

$$\forall x' \in \mathcal{W}_0(x), C(x') \cap (\cup_{i=1}^{n} \mathcal{U}(y_i)) = \Phi.$$

Par suite, puisque:

$$M = F \backslash \mathcal{V} \subset \cup_{i=1}^{n} \mathcal{U}(y_i),$$

on déduit que $C(x') \subset \mathcal{V}$*, c'est-à-dire que* C *est s.c.s. en* x. ■

La proposition ci-dessus fournit un moyen aisé de construire des multifonctions s.c.s., en "coupant" des multifonctions à graphe fermé par des multifonctions associant des boules dont les rayons sont s.s.s.:

Corollaire 20 [6]

Soit $C : E \rightarrow F$ *une multifonction fermée et* $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction s.c.s.*

Si la dimension de F *est finie, alors la multifonction coupée* $C_r : E \rightarrow F$ *définie par:*

$$Cr(x) = C(x) \cap r(x)B,$$

est s.c.s.

Ceci est dû au fait que $x \rightarrow r(x)B$ *est s.c.s. (resp. s.c.i., lipschitzienne) toute les fois que* r *est s.c.s. (resp. s.c.i., lipschitzienne).*

Exemple 21 (*Multifonctions paramétrisées*) [6]

On considère trois espaces métriques E, F *et* G*, une multifonction* $U : E \rightarrow Z$ *et une application univoque* $f : Graph(U) \rightarrow F$*. On leur associe la multifonction* $C : E \rightarrow F$ *définie par:*

$$\forall x \in E, C(x) = \{f(x, u)\}_{u \in U(x)}.$$

Proposition 22 [6]

On suppose que f *est continue de* $Graph(U)$ *dans* F*.*

- *Si U est s.c.i., il en est de même de C.*

- *Si U est s.c.s. à valeurs compactes, il en est de même de C.*

Preuve. *On considère une suite $x'_n \in Dom(C)$ convergeant vers $x \in Dom(C)$ et on prend $y = f(x,u)$ dans $C(x)$, où $u \in U(x)$.*

Puisque U est s.c.i., il existe une suite $u_n \in U(x_n)$ convergeant vers u. Alors la suite $y_n = f(x_n, u_n)$, où y_n appartient à $C(x_n)$, converge vers y parceque f est continue. Donc C est s.c.i.

Fixons maintenant $x \in Dom(U)$, $\varepsilon > 0$ et considérons $B(C(x), \varepsilon)$.

Puisque c'est un voisinage de $C(x)$, et donc de chaque $f(x,u)$ quand $u \in U(x)$, la continuité de f implique l'existence de $\eta_u > 0$ et de $\delta_u > 0$ tels que:

$$\forall (x', v) \in Graph(U) \cap (B(u, \eta_u) \times B(u, \delta_u)), f(x', v) \in B(C(x), \varepsilon).$$

Le sous-ensemble $U(x)$ étant compact, il peut être recouvert par p boules $B(u_i, \delta_{u_i})$.

Puisque U est s.c.s., il existe $\eta_0 > 0$ tel que:

$$\forall x' \in B(x, \eta_0), U(x') \subset \cup_{i=1}^{p} B(u_i, \delta_{u_i}).$$

On prend:

$$\eta = \min(\eta_0, \min{}_{i=1,2,\ldots,p} \eta_{u_i}) > 0.$$

Nous déduisons alors que:

$$\forall x' \in B(x, \eta), C(x') \subset B(C(x), \varepsilon),$$

c'est-à-dire, que C est s.c.s. en x. ■

1.6 Distance de Hausdorff

désignons par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fermés non vides d'un espace métrique compact E. Il peut être utile de prendre compte de la limite ensembliste en munissant $\mathcal{F}(E)$ d'une distance.

On définit l'application suivante j de $\mathcal{F}(E)$ dans l'espace de Banach $C_\infty(E)$ des fonctions continues sur l'espace métrique compact E par:

$$\forall A \in \mathcal{F}(E) \to j(A)(x) = d(x, A) \in C_\infty(E),$$

où:

$$d(x, A) = \inf{}_{y \in A} d(x, y).$$

Proposition 23 [*6*]

- *L'application j de $\mathcal{F}(E)$ dans $C_\infty(E)$ est injective.*

- *L'image $j(\mathcal{F}(E))$ est un ensemble compact de $C_\infty(E)$.*

Preuve. *a) Supposons que $j(A) = j(B)$; c'est-à-dire que $d(x, A) = d(x, B)$ pour tout $x \in E$. Si $x \in A$, alors $d(x, B) = 0$, ce qui implique que $x \in \overline{B} = B$ puisque B est fermé. Donc que $A \subset B$.*

De même, si $x \in B, d(x; A) = 0$, et par suite, $B \subset \overline{A} = A$. Donc $A = B$ et j est injective.

b) L'ensemble $j(\mathcal{F}(E))$ des fonctions $j(A)$ lorsque A parcourt $\mathcal{F}(E)$ est (uniformément) équicontinu puisque,

$$|j(A)(x) - j(A)(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

pour tout $x, y \in E$ et pour tout $A \in \mathcal{F}(E)$.

c) Pour montrer que $j(\mathcal{F}(E))$ est fermé, prenons une suite de fermés (A_n) non vides de E tels que d_{A_n} converge uniformément (et donc simplement) vers une fonction $f \in C_\infty(E)$.

Posons:

$$A = \{z \in E / f(z) = 0\},$$

et montrons que $f = d_A$.

Fixons $x \in E$ *et considérons des points* $y_n \in A_n$ *tels que* $d(x, y_n) = d_{A_n}(x)$ *qui existent puisque* E *est compact. De plus, une sous-suite (encore désignée par)* y_n *converge vers un élément* $y \in E$ *vérifiant* $f(x) = d(x, y)$.

En passant à la limite dans les inégalités:

$$f(y) \leq |f(y) - d_{A_n}(y)| + |d_{A_n}(y) - d_{A_n}(y_n)| \leq |f(y) - d_{A_n}(y)| + d(y, y_n),$$

on déduit que $f(y) \leq 0$, *et donc, que,* $f(y) = 0$, *de sorte que* y *appartienne à* A.

Par conséquent,

$$f(x) = d(x, y) \geq d_A(x).$$

Pour démontrer l'inégalité dans l'autre sens, on observe que f *est lipschitzienne de constante 1 en passant à la limite dans les inégalités:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - d_{A_n}(x)| + |d_{A_n}(x) - d_{A_n}(y)| + |d_{A_n}(y) - f(y)|, \\ &\leq |f(x) - d_{A_n}(x)| + d(x, y) + |d_{A_n}(y) - f(y)|. \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur A *dans les inégalités:*

$$f(x) \leq f(y) + d(x, y),$$

on en déduit que $f(x) \leq d_A(x)$. *Par suite,* $f = d_A$ *et donc,* $j(\mathcal{F}(E))$ *est fermée.*

d) Puisque $j(\mathcal{F}(E))$ *est un ensemble équicontinu et puisque les ensembles* $\{d(x, A)\}_{A \in \mathcal{F}(E)}$ *sont bornés pour tout* $x \in E$, *le théorème d'Ascoli implique que* $j(\mathcal{F}(E))$ *est un ensemble compact de* $C_\infty(E)$.

e) Puisque E *est compact et puisque* $j(\mathcal{F}(E))$ *est un ensemble équicontinu, les fonctions* $j(A_n)$ *convergent uniformément vers* $j(A)$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in D, j(A_n)(x) = d(x, A_n)$ *converge vers* $j(A)(x) = d(x, A)$. ∎

Puisque j est injective et puisque $C_\infty(E)$ est un espace métrique, nous pouvons munir $\mathcal{F}(E)$ d'une distance faisant de j une isométrie.

Définition 24 [*6*]

Si (E, d) est un espace métrique compact, la distance $h(A, B)$ sur $\mathcal{F}(E)$ définie par:

$$h(A, B) = \sup_{x \in E} |d(x, A) - d(x, B)| = \|j(A) - j(B)\|_\infty,$$

est appelée distance de Hausdorff sur $\mathcal{F}(E)$.

Il en résulte ce théorème qui résume les propriétés de la distance de Hausdorff:

Théorème 25 [*6*]

Si E est compact, l'espace $\mathcal{F}(E)$ est compact. De plus, si $D \subset E$ est un sous-ensemble dense de E, une suite (A_n) de fermés non vides de E converge vers A si, et seulement si, $\forall x \in D$, la suite $d(x, A_n)$ converge vers $d(x, A)$.

Preuve. *Puisque j est une isométrie de $\mathcal{F}(E)$ dans $C_\infty(E)$ et puisque $j(\mathcal{F}(E))$ est un ensemble compact de $C_\infty(E)$, on en déduit que $\mathcal{F}(E)$ est un espace métrique compact.* ■

Nous observons que:

$$h(A, B) = \max(h_\flat(A, B), h_\sharp(A, B)),$$

où:

$$\begin{aligned} h_\sharp(A, B) &= \sup{}_{x \in E}(d(x, B) - d(x, A)), \\ h_\flat(A, B) &= \sup{}_{x \in E}(d(x, A) - d(x, B)) = h_\sharp(B, A). \end{aligned}$$

Proposition 26 [*6*]

La distance de Hausdorff vérifie:

$$\begin{array}{c} h_\sharp(A,B) = \sup{}_{x\in A} \inf{}_{y\in B} d(x,y), \\ h_\flat(A,B) = \sup{}_{x\in B} d(x,A) = \sup{}_{x\in B} \inf{}_{y\in A} d(x,y). \end{array} \tag{1.1}$$

et:

$$d(a,b) = h_\flat(\{a\},\{b\}) = h_\sharp(\{a\},\{b\}). \tag{1.2}$$

Preuve. *En effet, puisque $d(x,B) = 0$ lorsque $x \in B$,*

$$\begin{aligned} \sup{}_{x\in B} d(x,A) &= \sup{}_{x\in B}(d(x,A) - d(x,B)), \\ &\leq \sup{}_{x\in E}(d(x,A) - d(x,B)) = h_\flat(A,B). \end{aligned}$$

Inversement, pour tout $x \in E$, pour tout $b \in B$ et pour tout $a \in A$, on a:

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a).$$

En prenant l'infimum par rapport à $a \in A$, on obtient:

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq d(x,b) + d(b,A), \\ &\leq d(x,b) + \sup{}_{x\in B} d(x,A). \end{aligned}$$

et, en prenant l'infimum par rapport à $b \in B$, on obtient:

$$d(x,A) \leq d(x,B) + \sup{}_{x\in B} d(x,A). \tag{1.3}$$

En prenant le supremum par rapport $x \in E, (1.3)$ implique:

$$\begin{aligned} h_\flat(A,B) &= \sup{}_{x\in E}(d(x,A) - d(x,B)), \\ &\leq \sup d(x,A), \\ &\leq h_\flat(A,B). \end{aligned}$$

On obtient l'égalité (1.1) en échangant A et B. Nous avons déjà démontré (1.2) puisque,

$$j(\{b\})(x) = j(b)(x) = d(x,b).$$

■

1.7 Quelques résultats sur l'existence des sélections

Théorème 27 (***Théorème de Kuratowski et Ryll Nardewski***) *Soient* (E, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique complet séparable et* $F : E \to X$ *une multifonction* Σ*-mesurable à valeurs fermées, Alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Proposition 28 [7]

Soient X *et* Y *deux espaces métriques,* G *une mulifonction de* X *à valeurs dans* Y *semi-continue inférieurement et* $g : X \to Y$ *une fonction continue. Soit* $x \mapsto \varepsilon(x)$*, une fonction semi-continue de* X *dans* $\mathbb{R}^+$*. Alors la fonction* $x \mapsto \Phi(x)$*, définie par:*

$$\Phi(x) = \overset{\circ}{B}[g(x), \varepsilon(x)] \cap G(x),$$

est semi-continue inférieurement.

Théorème 29 (***Théorème de Michael***) [7]

Soient X *un espace métrique,* Y *un espace de Banach. Soit* F *une multifonction de* X *à valeurs convexes fermées dans* Y *semi-continue inférieurement. Alors il existe* $f : X \to Y$*, une sélection continue de* F*.*

1.8 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 30 (***Théorème de Brower***) [17]

Soient X *un espace vectoriel normé de dimension finie,* M *un sous ensemble convexe compact de* X*. Alors toute fonction continue de* M *dans* M *admet au moins un point fixe.*

Définition 31 [*17*]

Soient X et Y deux espaces normés. La fonction $f : M \subseteq X \to M$ est dite compacte si, et seulement si,

(1) f est continue,

(2) f transforme un ensemble borné de M à un autre relativement compact de M.

Evidemment, la propriété (2) est équivalent à la suite,

- Si (u_n) est une suite bornée dans M, alors il existe une sous-suite (u'_n) de (u_n) telle que $(f(u_n))$ convergente dans Y.

Théorème 32 (*Théorème de Schauder*) [*17*]

Soient X un espace de Banach, M un sous ensemble borné fermé convexe non vide de X. Alors, toute fonction compacte de M dans M admet au moins un point fixe.

Théorème 33 (*Théorème de Kakutani-Ky-Fan*) [*21*]

Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un ensemble compact convexe non vide de X.

Alors, toute multifonction $F : C \to C$ semi-continue supérieurement de C à valeurs compactes convexes non vides dans C admet au moins un point fixe.

1.9 Notions d'opérateurs maximaux monotones

Définition 34 [*10*]

Un opérateur A de H est dit monotone si:

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) : (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2 : (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

Exemple 35 *[10]*

Soit A Un opérateur monotone de H, les opérateurs suivant construits à partir de A sont monotones: A^{-1}, λA pour $\lambda \geq 0$, $\overline{A}$ fermeture de A dans $H \times H_w$, $\widetilde{A}x = \overline{convAx}$.

Soit J une contraction de $D \subset H$ dans H, l'opérateur $I + J$ est monotone.

Etant donné un convexe fermé C de H, l'opérateur $x \rightarrow proj_C x$ est monotone.

Si A et B sont monotones, alors $A + B$ est monotone.

Proposition 36 *[10]*

Soit A Un opérateur de H, A est monotone si, et seulement si,

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0, |x_1 - x_2| \leq |(x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2)|,$$

ou plus précisément,

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2, \forall \lambda > 0, |x_1 - x_2| \leq |(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|.$$

Preuve. *On a:*

$$|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2 |y_1 - y_2|^2.$$

La condition est donc est nécessaire. Elle est aussi suffisante, car on a alors:

$$2\lambda(y_1 - y_2, x_1 - x_2) + \lambda^2 |y_1 - y_2|^2 \geq 0.$$

On divise par λ et on obtient le résultat en faisant tendre λ vers 0. ■

La condition d'accrétivité exprime que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I+\lambda A)$ dans H. Autrement dit, pour tout $y \in H$, l'équation

$x + \lambda Ax \ni y$ admet au plus une solution et si x_1, x_2 sont les solutions correspondant à y_1, y_2 on a $|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_2|$.

Les opérateurs que nous allons considérer maintenant sont ceux pour lesquels l'équation $x + \lambda Ax \ni y$ admet exactement une solution x pour tout $y \in H$ et tout $\lambda > 0$.

Définition 37 [*10*]

Un opérateur A de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.

Explicitons cette définition; A est maximal monotone si, et seulement si, A est monotone et pour tout $[x, y] \in H \times H$ tel que $(y - A\xi, x - \xi) \geq 0, \forall \xi \in D(A)$, alors: $y \in Ax$.

Proposition 38 [*10*]

Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur monotone de H. On a, si A est maximal, alors Ax est fermé pour tout $x \in D(A)$.

Preuve. *Supposons A maximal et soient $x \in D(A)$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de H convergeant vers y dans H avec $y_n \in Ax$, pour tout $n \geq 1$.*

Démontrons que $y \in Ax$. Comme A est maximal, il suffit de démontrer que:

$$\langle y - z_2, x - z_1 \rangle_H \geq 0, \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Puisque A est monotone, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\langle y_n - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0, \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Il en résulte, de la continuité du produit scalaire, que:

$$\langle y - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0, \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

■

Proposition 39 [*10*]

Soit A Un opérateur monotone de H. Il y a équivalence entre les trois relations suivantes,

(i) A est maximal monotone,

(ii) A est monotone et $R(I + A) = H$,

(iii) Pour tout $\lambda > 0, (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.

Preuve. *L'implication $(iii) \implies (ii)$ est une conséquence imédiate de la proposition36.*

Pour l'implication $(ii) \implies (i)$, il suffit de remarquer que si $A \subset B$ avec B monotone et si $y \in Bx$, il existe, par notre hypothèse $x' \in D(A)$ tel que $x + y \in x' + Ax'$, d'où $x + y \in x + Bx$ et $x + y \in x' + Bx'$ et donc $x = x'$ et $y \in Ax$.

Pour prouver l'implication $(i) \implies (iii)$ on utilise le théorème suivant,

Théorème 40 [*10*]

Soient C un convexe fermé de H et A un opérateur monotone de H. Alors, pour tout $y \in H$, il existe $x \in C$ tel que:

$$(\eta + x, \xi - x) \geq (y, \xi - x), \qquad \forall(\xi, \eta) \in A.$$

■

Exemple 41 [*10*]

Soit A Un opérateur maximal monotone de H, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.

Par contre A et B peuvent être maximaux monotones sans qu'il en soit aïnsi de $A + B$ car on peut avoir $D(A) \cap D(B) = \phi$.

Dans ce qui suit A est un opérateur maximal monotone. On désigne par $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ la résolvante de A qui, pour tout $\lambda > 0$ est une contraction de H dans H. Il est imédiate que J_λ vérifie:

$$J_\lambda x = J_\mu(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})J_\lambda x) \qquad \forall x \in H, \forall \lambda, \mu > 0.$$

Théorème 42 *[10]*

$\overline{D(A)}$ est convexe, et pour tout $x \in H$ on a:

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = proj_{\overline{D(A)}} x.$$

Nous avons vu à l'exemple(..) que l'opérateur $x \mapsto \overline{conv(Ax)}$ est encore monotone si A est monotone. Donc pour tout $x \in D(A)$, Ax est convexe fermé lorsque A est maximal monotone. Nous poserons $A^\circ x = proj_{Ax} 0$, c'est-à-dire $A^\circ x$ est l'élément de Ax ayant une norme minimale. D'autre part on désigne par $A_\lambda = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}$ l'approximation yosida de A.

Proposition 43 *[10]*

(i) *A_λ est maximal monotone et lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$,*

(ii) *$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ pour tout $\lambda, \mu > 0$,*

(iii) *Pour tout $x \in D(A)$, on a $|A_\lambda x| \uparrow |A^\circ x|$ et $A_\lambda x \to A^\circ x$ quand $\lambda \downarrow 0$ avec:*

$$|A_\lambda x - A^\circ x|^2 \leq |A^\circ x|^2 - |A_\lambda x|^2,$$

(iv) *Pour $x \notin D(A)$, $|A_\lambda x| \uparrow +\infty$ quand $\lambda \downarrow 0$.*

Preuve. Des inégalités:

$$|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2| . |x_1 - x_2| \geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2),$$

$$\begin{aligned} &= (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2), \\ &\geq \lambda \left| A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2 \right|^2, \end{aligned}$$

on déduit que A_λ est monotone et lipschitzien de rapport $\frac{1}{\lambda}$. A_λ est maximal monotone. La vérification de (ii) est imédiate en remarquant que:

$$[x, y] \in A_\lambda \iff [x - \lambda y, y] \in A.$$

Etant donné $x \in D(A)$, on a:

$$(A^\circ x - A_\lambda x, x - J_\lambda x) \geq 0,$$

d'où,

$$\left| A_\lambda x \right|^2 \leq (A^\circ x, A_\lambda x),$$

et par suite:

$$\left| A_\lambda x \right| \leq \left| A^\circ x \right|.$$

Substituant A_μ à A dans les inégalités précédentes et utilisant (ii), on a pour $x \in H$:

$$\left| A_{\lambda+\mu} x \right|^2 \leq (A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x) \text{ et } \left| A_{\lambda+\mu} x \right| \leq \left| A_\lambda x \right| \ \forall \lambda, \mu > 0.$$

On en déduit que:

$$\left| A_{\lambda+\mu} x - A_\lambda x \right|^2 \leq \left| A_\lambda x \right|^2 - \left| A_{\lambda+\mu} x \right|^2.$$

Donc si $|A_\lambda x|$ est borné quand $\lambda \to 0$, $(A_\lambda x)$ est de cauchy et par suite $A_\lambda x \to y$, mais $x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x$ et donc $J_\lambda x \to x$. Il en résulte que $x \in D(A)$ et $[x, y] \in A$, mais alors $|y| \leq |A^\circ x|$ implique $y = A^\circ x$. ■

Proposition 44 [*10*]

Soient A un opérateur maximal monotone et B un opérateur monotone lipschitzien de H dans H. Alors $A + B$ est maximal monotone.

Preuve. *La propriété "A est maximal monotone" étant invariable par homothétie de rapport* $\lambda > 0$, *on peut toujours supposer que la constante de lipschitz de B est* < 1. *Soit* $y \in H$, *l'équation* $x + Ax + Bx \ni y$ *est équivalente à* $x = (I+\lambda A)^{-1}(y - Bx)$. *Or l'application* $x \mapsto (I + \lambda A)^{-1}(y - Bx)$ *est une contraction sricte et admet donc un point fixe.* ■

Proposition 45 [*10*]

Soient A *et* B *deux opérateurs maximaux monotones tels que* B *soit dominé par* A, *c'est-à-dire* $D(A) \subset D(B)$, *et*

il existe $K < 1$ *et une fonction continue* $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tels que:*

$$|B^{\circ}x| \leq k\,|A^{\circ}x| + \omega(|x|) \quad \textit{pour tout } x \in D(A).$$

Alors $A + B$ *est maximal monotone.*

1.10 Fonction conjuguée, fonction support et fonction sous-différentiel

1.10.1 La fonction conjuguée

Suivant le mathématicien *Danois Fenchel*, qui a introduit ce concept en 1949, après une longue histoire commençant en 1912 avec l'inégalité de Young,nous proposons la définition suivante,

Définition 46 *Soient* X *un espace normé dont le dual topologique est noté* X^*, *et* f *une fonction stricte* ($\not\equiv +\infty$) *de* X *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Alors la fonction* f^* *de* X *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *définie par:*

$$\forall p \in X^*, f^*(p) = \sup_{x \in X}(p(x) - f(x)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

est appelée la fonction conjuguée (de Fenchel) de f, et la fonction $f^{**}: X \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x \in X, f^{**}(x) = \sup_{p \in X}(p(x) - f^*(p)),$$

la fonction biconjuguée de f.

Remarque 47 *Si $(X, \langle ., . \rangle)$ est un espace de Hilbert identifié à son dual, et $p \in X^*(\equiv X)$, on notera généralement $\langle p, x \rangle$ au lieu de $p(x)$ pour tout $x \in X$. On dit que $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire dans la dualité X, X^*.*

La conjuguée de la fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est alors la fonctiion $f^* : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par:

$$f^*(p) = \sup_{x \in X}(\langle p, x \rangle - f(x)) \text{ pour tout } x \in X.$$

On observe que l'inégalité dite de Fenchel,

$$\forall x \in X, \forall p \in X^*, \langle p, x \rangle \leq f(x) + f^*(p),$$

est toujours vrais et que,

$$\forall x \in X, f^{**}(x) \leq f(x).$$

Théorème 48 *Une fonction stricte $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et s.c.i. si, et seulement si, $f = f^{**}$. Dans ce cas f^* est aussi stricte.*

On remarque les propriétés élémentaires suivantes:

Proposition 49

- *f^* est convexe s.c.i., et si le domaine de f est non vide, alors f^* ne prend jamais la valeur $-\infty$,*
- *Si $f \leq g$, alors $g^* \leq f^*$,*

- *Si* $g(x) = f(\lambda x)$, *alors* $g^*(p) = f^*(p/\lambda)$,

- *Si* $h(x) = \lambda f(x)$, *alors* $h^*(p) = \lambda f^*(p/\lambda)$.

1.10.2 La fonction support

Définition 50 *Soit X un espace normé et C un sous ensemble de X. La fonction indicatrice de C est la fonction notée Ψ_C définie par:*

$$\begin{cases} \Psi_C(x) = 0 \text{ pour } x \text{ dans } C \text{ et} \\ \Psi_C(x) = +\infty \text{ pour } x \text{ extérieur de } C. \end{cases}$$

Définition 51 *Soient X un espace normé et C un ensemble non vide de X. La conjuguée de la fonction indicatrice de C, notée par: $\Psi_C^* : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, est appelée la fonction support de C (ou la fonction d'appui de C), et est souvent désignée par:*

$$\sigma_C(p) = \sigma(C, p) = \sup_{x \in C} \langle p, x \rangle .$$

1.10.3 La fonction sous-différentiel

Définition 52 *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction stricte convexe. Nous dirons que le sous-ensemble $\partial f(x_0)$ défini par:*

$$\partial f(x_0) = \{p \in X^* / \forall v \in X, \langle p, v \rangle \leq Df(x_0)(v)\},$$

est le sous-différentiel de f en x_0.

Explicitons cette définition,

$$p \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow \forall v \in X, \langle p, v - x_0 \rangle + f(x_0) \leq f(v).$$

Notons que $Df(x_0)(v)$ désigne la dérivée à droite de f en x_0 dans la direction v. Elle est définie par:

$$Df(x_0)(v) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}.$$

Le sous-différentiel est toujours un ensemble convexe fermé, éventuellement vide (c'est le cas si $Df(x_0)(v) = -\infty$ pour au moins une direction v).

Proposition 53 *Soit f une fonction stricte convexe de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que $\partial f(x) \neq \phi$. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

(a) $p \in \partial f(x)$,

(b) $\langle p, x \rangle = f(x) + f^*(p)$,

(c) $\forall y \in X, f(x) - \langle p, x \rangle = \inf_{x \in X}(f(y) - \langle p, y \rangle)$.

Remarque 54 *La propriété (b) caractérisant le sous-différentiel à l'aide de la fonction conjuguée, s'avérera très utile, car elle est très simple à utiliser.*

Elle a de plus la conséquence suivante,

Corollaire 55 *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction stricte convexe s.c.i. Alors,*

$$p \in \partial f(x) \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(p).$$

Le corollaire précédent affirme que: l'inverse du sous-diférentiel $x \longmapsto \partial f(x)$ est le sous-différentiel $p \longmapsto \partial f^*(p)$ de la fonction conjuguée de f.

Définition 56 *Considérons un sous-ensemble convexe K de X. Si $x \in K$, on appelle cône normal à K en x le sous-différentiel $\partial \Psi_K(x)$ de la fonction indicatrice de K en x, et on le note par: $N_K(x) = \partial \Psi_K(x)$.*

On vérifie aisément que:

$$\partial\Psi_K(x) = \{p \in X^* / \langle p, x\rangle = \sigma_K(p)\}.$$

1.11 La pseudo distance introduite par Vladimirov

Définition 57 [*31*]

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs maximaux monotones définis sur un espace de Hilbert dans lui même. On définit la distance entre A_1 et A_2 par:

$$dis(A_1, A_2) = \sup_{\substack{x_1 \in D(A_1), y_1 \in A_1(x_1) \\ x_2 \in D(A_2), y_2 \in A_2(x_2)}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1}.$$

(la distance dis peut prend la valeur $+\infty$).

La distance dis n'est pas métrique, car, en générale, l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.

Lemme 58 [*31*]

L'égalité $dis(A_1, A_2) = 0$ satisfaite si, et seulement si, $A_1 = A_2$.

Lemme 59 [*31*]

Si A_1 et A_2 sont maximaux monotones, alors:

$$d(D(A_1), D(A_2)) \leq dis(A_1, A_2).$$

Lemme 60 [*31*]

Soit A un opérateur maximal monotone de H, p un élément de H et B un opérateur de H défini par:

$$Bx = A(x + p), x \in D(B) = D(A) - p.$$

Alors,

$$dis(A,B) \leq |p| \,.$$

Preuve. Prenons $x_1 \in D(A), x_2 \in D(B), y_1 \in Ax_1, y_2 \in Bx_2$.

$Bx_2 = A(x_2 + p)$, par définition de B. Alors, d'après la monotonie de A,

$$\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2 - p\rangle \leq 0,$$

donc, on a:

$$\begin{aligned}
\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2 - p\rangle &\leq 0, \\
\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle &\leq \langle y_2 - y_1, p\rangle \,, \\
&\leq |p| \,.\, |y_2 - y_1| \,, \\
&\leq |p| \,.(|y_2| + |y_1|), \\
&\leq |p| \,.(|y_2| + |y_1| + 1),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2| + 1} \leq |p| \,,$$

et alors $dis(A,B) \leq |p|$. ■

Lemme 61 *[31]*

Soit A un opérateur maximal monotone de H tel que $D(A) \subset B(0,R)$ $(R > 0)$, h un élément de H, et B un opérateur de H défini par:

$$Bx = Ax + h, x \in D(B) = D(A),$$

alors:

$$dis(A,B) \leq 2Rh.$$

Preuve. *prenons* $x_1, x_2 \in D(A)$ *et* $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$. *Alors* $(y_2 + h) \in Bx_2$ *et on a:*

$$\begin{aligned}
\frac{\langle y_2 + h - y_1, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2 + h| + 1} &= \frac{\langle y_2 - y_1, x_1 - x_2\rangle + \langle h, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2 + h| + 1}, \\
&\leq \frac{\langle h, x_1 - x_2\rangle}{|y_1| + |y_2 + h| + 1} \text{ (d'après la monotonie de } A), \\
&\leq \frac{|h| . |x_1 - x_2|}{|y_1| + |y_2 + h| + 1}, \\
&\leq \frac{|h| .(|x_1| + |x_2|)}{|y_1| + |y_2 + h| + 1}, \\
&\leq \frac{2R|h|}{|y_1| + |y_2 + h| + 1} \leq 2R|h|,
\end{aligned}$$

d'où, $dis(A, B) \leq 2R|h|$. ■

Lemme 62 [*31*]

Soient C_1, C_2 *deux ensembles fermés convexes de* H *et* $A_i = \partial I_{C_i} = N_{C_i}, i = 1, 2$. *Alors,*

$$dis(A_1, A_2) = d(C_1, C_2).$$

Théorème 63 [*31*]

Pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* A, B, C *sont trois opérateurs maximaux monotones de* H *et* $dis(A, B) < \delta$, $dis(B, C) < \delta$, *alors* $dis(A, C) \leq \varepsilon$.

1.12 Théorèmes Fondamentaux

1.12.1 Le lemme de Gronwall

Ce lemme est fort utile pour majorer des fonctions à partir d'inéquations intégrales.

Lemme 64 (*Lemme de Gronwall*) [*6*]

On considère deux fonctions continues φ, α et une fonction croissante intégrale μ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant:

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \mu'(s)\varphi(s)ds.$$

Alors la fonction φ est majorée de la façons suivante:

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\mu'(s)e^{\mu(t)-\mu(s)}ds. \tag{1.4}$$

En particulier, l'inégalité:

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \beta(s)ds + \int_0^t \mu'(s)\varphi(s)ds,$$

implique:

$$\forall t \in [0,T], \varphi(t) \leq C.\exp(\mu(t)-\mu(0)) + \int_0^t \beta(s)\exp(\mu(t)-\mu(s))ds. \tag{1.5}$$

Preuve. *Posant:*

$$v(t) = \int_0^t \mu'(s)\varphi(s)ds,$$

on obtient:

$$v'(t) = \mu'(s)\varphi(s) \leq \alpha(t)\mu'(t) + \mu'(t)v(t),$$

puisque $\mu'(t) \geq 0$.

On observe maintenant que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(e^{-\mu(s)}v(s)) &= e^{-\mu(s)}(v'(s) - \mu'(s)v(s)), \\ &\leq e^{-\mu(s)}\alpha(s)\mu'(s). \end{aligned}$$

Intégrant cette inégalité de 0 *à* t*, on déduit que:*

$$e^{-\mu(t)}v(t) \leq \int_0^t e^{-\mu(s)}\alpha(s)\mu'(s)ds.$$

Par conséquent:

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + v(t) + \int_0^t e^{\mu(t)-\mu(s)}\alpha(s)\mu'(s)ds,$$

qui est l'inégalité cherchée. ■

1.12.2 Le théorème de compacité d'Ascoli

Soit E un espace métrique compact.

Rappelons que $\mathcal{C}_\infty(E)$ est un sous-espace fermé de l'espace vectoriel $\mathcal{U}(E)$ des fonctions numériques bornées sur E, muni de la norme $\|f\|_\infty$ de la convergence uniforme, et par suite, que $\mathcal{C}_\infty(E)$ est un espace de Banach (c'est-à-dire normé et complet) puisque nous avons établi que $\mathcal{U}(E)$ est un espace de Banach.

Nous allons maintenant caractériser les sous-ensembles compacts de $\mathcal{C}_\infty(E)$ et pour cela, introduire la notion d'ensemble équicontinu de fonctions continues.

Plus généralement, si F est un espace métrique complet, nous avons vu que l'espace $\mathcal{C}_\infty(E, F)$ des applications continues est un espace complet pour la distance de convergence uniforme, dont nous allons caractériser les sous-ensembles compacts.

Définition 65 [*6*]

Nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(E, F)$ de l'espace des applications continues de E dans F est équicontinu en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon, x_0, \mathcal{H})$ (dépendant de $\mathcal{H}$ et non des fonctions f de $\mathcal{H}$) tel que:

$$\forall f \in \mathcal{H}, d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad \textit{dès que} \quad d(x, x_0) \leq \eta = \eta(\varepsilon, x_0, \mathcal{H}).$$

Nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est équicontinu s'il est équicontinu en tout point de E et qu'il est uniformément équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta = \eta(\varepsilon, \mathcal{H})$ indépendant de $x \in E$ tel que:

$$\forall f \in \mathcal{H}, d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \quad \textit{dès que} \quad d(x, y) \leq \eta = \eta(\varepsilon, \mathcal{H}).$$

Exemple 66 [*6*]

Tout ensemble fini d'applications continues en x_0 (resp. uniformément continues) est équicontinu en x_0 (resp. uniformément équicontinu).

Exemple 67 *[6]*

Supposons qu'il existe deux constantes c et $\alpha > 0$ telles que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c(d(x,y))^{\alpha} \text{ pour tout } f \in \mathcal{H} \text{ et } x, y \in E.$$

Alors $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu.

Exemple 68 *[6]*

Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(E,F)$ un ensemble d'opérateurs linéaires continus A d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F.

Alors $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu si, et seulement s'il est borné:

$$\sup_{A \in \mathcal{H}} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = M < +\infty.$$

Puisque dans ce cas,

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &= \|A(x-y)\|, \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x-y\|, \\ &\leq M \|x-y\|. \end{aligned}$$

En particulier, si $\mathcal{H} \subset E^*, \mathcal{H}$ est uniformément équicontinu si, et seulement s'il est borné,

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\|_* = M < +\infty.$$

Puisque dans ce cas, la norme duale $\|f\|_*$ est définie par:

$$\|f\|_* = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Nous alons maintenant caractériser les sous-ensembles compacts de $\mathcal{C}_\infty(E)$ à l'aide de cette notion d'équicontinuité.

Théorème 69 *[6]*

Soit E un espace métrique compact, $\mathcal{H} \in \mathcal{C}_\infty(E)$ un sous-ensemble de fonctions numériques sur E. Pour que $\mathcal{H}$ soit un sous-ensemble compact de l'espace de Banach $\mathcal{C}_\infty(E)$, il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ soit fermé, équicontinu et que, pour tout $x \in E$, les ensembles $\mathcal{H}(x) = \{f(x)\}_{f\in\mathcal{H}}$ soient compacts dans $\mathbb{R}$.

Ce théorème est une conséquence de l'énoncé plus général (avec la même démonstration) caractérisant les sous-ensembles compacts de $\mathcal{C}_\infty(E, F)$.

Théorème 70 (*Théorème d'Ascoli*) [*6*]

Soit E un espace métrique compact, F un espace métrique complet, $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_\infty(E, F)$ un sous-ensemble d'applications de E dans F. Pour que $\mathcal{H}$ soit un sous-ensemble compact de l'espace $\mathcal{C}_\infty(E, F)$, il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ soit fermé, équicontinu et que, pour tout $x \in E$, les ensembles $\mathcal{H}(x) = \{f(x)\}_{f\in\mathcal{H}}$ soient relativement compacts dans F.

Preuve. a) Supposons que $\mathcal{H}$ soit compact. Il est fermé. D'autre part, si $x \in E$, l'application $\delta(x) : f \in \mathcal{C}_\infty(E) \longmapsto f(x) \in F$ est continue puisque,

$$d(\delta(x)f(x), \delta(x)g(x)) = d(f(x), f(y)) \leq d_\infty(f, g).$$

Donc $\mathcal{H}(x) = \delta(x)(\mathcal{H})$ étant image par $\delta(x)$ du compact $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble compact de F. Enfin, montrons que $\mathcal{H}$ est équicontinu. Puisque $\mathcal{H}$ est compact, il existe une suite fini d'application $f_i \in \mathcal{H}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ telle que:

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \min_{i=1,2,\ldots,n} d_\infty(f, f_i) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

puisque les f_i sont continues, il existe $\eta = \eta(\varepsilon, x)$ tel que:

$$\max_{1\leq i\leq n} d(f_i(x), f_i(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ dès que } d(x, y) \leq \eta = \eta(\varepsilon, x).$$

Par suite, si $f \in \mathcal{H}$ et si f_i est tel que:

$$d_\infty(f, f_i) = \sup_{y\in E} d(f(y), f_i(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

on en déduit que si $d(x, y) \leq \eta = \eta(\varepsilon, x, \mathcal{H})$,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)), \\ &\leq 2d_\infty(f, f_i) + d(f_i(x), f_i(y)) \leq \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}$ est équicontinu.

b) Inversement, montrons que $\mathcal{H}$ est compact, en montrant que cet ensemble est complet (mais nous avons déjà qu'étant fermé dans l'ensemble compact $\mathcal{C}_\infty(E, F)$, il est compact) et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite fini $f_1, f_2, ..., f_n$ de fonctions $f_i \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe f_i vérifiant:

$$d_\infty(f, f_i) = \sup_{x \in E} d(f(x), f_i(x)) \leq \varepsilon.$$

Puisque $\mathcal{H}$ est un ensemble équicontinu, on peut associer à tout $x \in E$ un nombre $\eta = \eta(\varepsilon, x, \mathcal{H})$ tel que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ dès que } y \in B(x, \eta(x)) \text{ pour tout } f \in \mathcal{H}.$$

Puisque E est compact, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes $\mathring{B}(x_j, \eta(x_j))$ $(1 \leq j \leq p)$. Associons à tout $f \in \mathcal{C}_\infty(E, F)$ la suite $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_p))$ de F^p et considérons le sous-ensemble $\mathcal{H}(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_p)$ de F^p formé de ces suites lorsque f parcourt $\mathcal{H}$.

Puisque $\mathcal{H}(x_j)$ est le jième projection de $\mathcal{H}(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_p)$ sur F et puisqu'elle est relativement compacte par hypothèse, le sous-ensemble $\mathcal{H}(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_p)$ est sous-ensemble relativement compact de F^p. Il peut donc être recouvert par une suite finie de boules de rayon $\varepsilon/3$: il existe une suite $f_1, f_2, ..., f_i, ..., f_n$ de n éléments f_i de $\mathcal{H}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe f_i vérifiant:

$$\max_{1 \leq j \leq p} d(f(x_j), f_i(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par suite, si x est un élément arbitraire de E, il appartient à une boule $\mathring{B}(x_j, \eta(x_j))$ et donc,

$$\begin{aligned} d(f(x), f_i(y)x)) &\leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f_i(x_j)) + d(f_i(x_j), f_i(x)), \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui implique que $d_\infty(f, f_i) \leq \varepsilon$. ■

Théorème 71 (*Corollaire du théorème d'Ascoli*) *Soient E un ensemble compact de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur E à valeurs dans F vérifiant les conditions suivantes:*

- *$\forall t \in E$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans F,*
- *il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(E)$ tel que $\|f'(t)\| \leq h(t)$, p.p sur E.*

Alors, il existe une sous suite de $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction absolument continue $f : E \to F$ au sens suivant:

(1) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f,

(2) $(f'_n)_n$ converge faiblement vers f' dans $L^1_F(E)$.

Preuve.

$$h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(F) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 : \int_{t-\delta}^{t+\delta} h(s)ds < \delta.$$

Montrons que la suite (f_n) est équicontinue c'est à dire

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists?\eta > 0 : |s - t| \leq \eta \Rightarrow \|f_k(t) - f_k(s)\| \leq \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Les fonctions f_n sont absolument continues et par suite

$$\begin{aligned}
\|f_k(t) - f_k(s)\| &= \left\| \int_s^t f_k'(\tau) d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \|f_k'(\tau)\| \, d\tau \\
&\leq \int_s^t h\,(\tau)\, d\tau \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

il suffit de prendre $\eta = \delta$ et donc la suite $(f_n)_n$ est équicontinue.

D'autre part $(f_n(t))$ est relativement compacte dans F, vu le théorème d'Ascoli-Arzelà $(f_n)_n$ est relativement compacte dans $C(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On peut alors lui extraire une sous suite qu'on note aussi $(f_n)_n$ convergeant uniformément vers $f \in C(E, F)$.

D'autre part, nous avons

$$\|f_n'(t)\| \leq h(t)$$

en posant

$$g_n(t) = \frac{f_n'(t)}{h(t)}$$

on aura

$$\|g_n(t)\| \leq 1.$$

Et donc $g_n \in \overline{\mathbb{B}}_{L^\infty}(0, 1)$ qui est faiblement compact, donc on peut extraire de (g_n) une sous suite qu'on notera aussi (g_n) et qui converge faiblement vers une fonction $g \in L^\infty_{F'}(E)$. La convergence de g_n vers g nous permet d'écrire pour $z \in L^1_F(E)$ que

$$\langle g_n, z \rangle \underset{n \to \infty}{\to} \langle g, z \rangle .$$

Soit $y \in L^\infty_F(E)$

$$\begin{aligned}
\langle f_n', y \rangle &= \langle h g_n, y \rangle \\
&= \langle g_n, h y \rangle
\end{aligned}$$

nous avons

$y \in L_F^\infty(E)$ et $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(E) \Rightarrow hy \in L^1_F(E)$, et alors

$$\langle f_n', y \rangle = \langle g_n, hy \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle g, hy \rangle = \langle hg, y \rangle .$$

C'est à dire (f_n) converge faiblement dans $L^1_F(E)$ vers la fonction $hg = v$, et par suite

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n', y \rangle = \langle v, y \rangle \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_s^t f_n'(\tau) y(\tau) d\tau = \int_s^t v(\tau) y(\tau) d\tau$$

en particulier pour $y(\tau) = 1$. Comme f_n est absolument continue alors

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(t) - f_n(s)) = \int_s^t v(\tau) d\tau$$

donc

$$f(t) - f(s) = \int_s^t v(\tau) d\tau.$$

On conclut alors que f est absolument continue, et donc

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(\tau) d\tau,$$

d'où $f = v$ p.p, et donc(f_n') converge faiblement vers f'. ■

1.12.3 Théorème de fermeture

Proposition 72 [7]

Soit E un espace de Banach. Si le dual E' de E est uniformément convexe, alors l'application de dualité M est univoque et uniformément continue sur les parties bornées de E.

Soit E un espace de Banach dont le dual E' soit uniformément convexe, A un opérateur de $[0, T] \times E$ à valeurs dans E tel que pour tout $t \in [0, T]$, $A(t)$ soit un opérateur maximal monotone (m-accrétif) dans E et telle que la condition suivante soit vérifiée:

– il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in E$, l'application $\omega_x : t \mapsto [I + \lambda A(t)]^{-1}x$ appartient à $L^2_E([0,T], ds)$.

Théorème 73 [7]

Soient $(y_m)_{m\geq 1}$ une suite d'applications dans $L^2_E([0,T], ds)$ convergeant pour la topologie faible $\sigma(L^2_E([0,T], ds), L^2_{E'}([0,T], ds))$ vers une application y, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications convergeant fortement dans $L^2_E([0,T], ds)$ vers une application u. Si pour tout $n \geq 1$, on a:

$$y_n(t) \in A(t, u_n(t)) \qquad p.p. \tag{1.6}$$

Alors,

$$y(t) \in A(t, u(t)) \qquad p.p. \tag{1.7}$$

Preuve. *Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur de $L^2_E([0,T], ds)$ dans lui-même associé à A par la formule:*

$$g \in \mathcal{A}(f) \Longleftrightarrow g(t) \in A(t, f(t)) \qquad p.p.$$

Démontrons d'abord que $\mathcal{A}$ est m-accrétif, c'est-à-dire,

$$R(I + \mu\mathcal{A}) = L^2_E([0,T], ds).$$

Soit, donc, $g \in L^2_E([0,T], ds)$. Pour tout $t \in [0,T]$, posons:

$$v(t) = [I + \mu\mathcal{A}(t)]^{-1}g(t).$$

L'application v est bien définie sur $[0,T]$, car, pour tout $t \in [0,T]$, $A(t)$ est m-accrétif. Démontron que $v \in L^2_E([0,T], ds)$. Puisque g est mesurable, aînsi, pour tout $t \in [0,T]$, on a:

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \left\|[I + \mu\mathcal{A}(t)]^{-1}g(t) - [I + \mu\mathcal{A}(t)]^{-1}0\right\| + \left\|[I + \mu\mathcal{A}(t)]^{-1}0\right\|, \\ &= \|g(t)\| + \|\omega_0(t)\|, \end{aligned}$$

or, $g, \omega_0 \in L^2_E([0,T], ds)$, *donc* $v \in L^2_E([0,T], ds)$.

La relation (1.7) est équivalente à $y \in \mathcal{A}(u)$ *par définition.*

Définissons sur $L^2_E([0,T], ds) \times L^2_{E'}([0,T], ds)$ *le produit:*

$$\langle f, h \rangle_s = \int_0^T \langle f(s), h(s) \rangle_s, \quad \forall (f,h) \in (L^2_E([0,T], ds))^2.$$

Comme $\mathcal{A}$ *est m-accrétif, il suffit de démontrer que* $\langle y - v, u - g \rangle_s \geq 0$, $\forall g \in D(\mathcal{A})$ *et* $\forall v \in \mathcal{A}(g)$.

Soit, donc, $(g, v) \in (L^2_E([0,T], ds))^2$ *tel que* $g \in D(\mathcal{A})$ *et* $v \in \mathcal{A}(g)$. *D'après l'hypothèse et l'accrétivité de* $\mathcal{A}$ *on a:*

$$\langle y_n - v, u_n - g \rangle_s \geq 0, \forall n \geq 1.$$

Comme E' *est uniformément convexe, l'application de dualité,* M, *est univoque et continue sur les parties de* E. *Pour tout* $n \geq 1$, *posons:*

$$\begin{aligned} f_n(s) &= M(u_n(s) - g(s)), \\ f(s) &= M(u(s) - g(s)), \quad \textit{pour tout } s \in [0,T]. \end{aligned}$$

Vu la définition de M, *on a:*

$$(f, f_n) \in (L^2_E([0,T], ds))^2, \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

Du fait que M *est continue, la suite* $(f_n)_{n \geq 1}$ *converge fortement vers* f *dans* $L^2_E([0,T], ds)$.

Comme la suite $(y_n - v)_{n \geq 1}$ *converge vers* $y - v$, *pour la topologie faible* $\sigma(L^2_E([0,T], ds), L^2_{E'}([0,T], ds))$, *on obtient:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \langle y_n(s) - v(s), f_n(s) \rangle \, ds = \int_0^T \langle y(s) - v(s), f(s) \rangle \, ds,$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \to \infty} \langle y_n - v, u_n - g \rangle_s = \lim_{n \to \infty} \int_0^T \langle y_n(s) - v(s), u_n(s) - g(s) \rangle \, ds, \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_0^T \langle y_n(s) - v(s), f_n(s) \rangle \, ds, \\ &= \int_0^T \langle y(s) - v(s), f(s) \rangle \, ds, \\ &= \langle y - v, u - g \rangle_s . \end{aligned}$$

■

Proposition 74 [7]

Avec les hypothèses et les notations du théorème précédent, si pour tout $n \geq 1$, *on a:*

$$y_n(t) \in A(t, u_n(t)) + \rho_n(t)B(0,1) \qquad p.p.$$

où $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *est une suite uniformément bornée de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers* 0 *lorsque* $n \to \infty$, *alors, on a:*

$$y(t) \in A(t, u(t)).$$

Chapitre 2

L'existence de solutions à variation bornée

Dans ce chapitre, on s'interesse à l'existence de solutions pour des inclusions différentielles gouvernées par un opérateur maximal monotone avec perturbation multivoque. Plus précisément, on considère un espace de Hilbert H, un opérateur maximal monotone $A(t)$ de H, et une multifonction F définie sur $[0, T] \times H$.

Soit $u_0 \in D(A(0))$, on va étudier le problème:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t, u(t)) + F(t, u(t)) & p.p. \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)) \end{cases} \qquad (P_F)$$

Récemment, plusieurs auteurs s'intéressent à ce type de problèmes dans le cas où A est un opérateur m-accrétif ne dépendant pas du temps t, défini sur un espace de Banach E, et F une multifonction $s.c.i.$ Citons *Alberto Bressan* & *Vasil Staicu* [*4*], *E. Mitidieri* & *I. I. Vrabi* [18], *N. S. Papageorgiou* [28], *et A. Faik* [2].

Le travail de ces auteurs est basé sur l'étude de l'existence de solutions intégrales du problème (P_F). i.e, les solutions $u(t) \in \overline{D(A)}$ de (P_F) qui vérifient:

– il existe une fonction $f \in L^1_E([0, T])$ telle que,

(i) $f(t) \in F(t, u(t))$ $p.p.\ sur$ $[0, T]$,

(ii) pour tout $x \in D(A)$, pour tout $y \in Ax$ et pour tout $s,t \in [0,T]$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, on a l'inégalité suivante:

$$\|u(t)-x\|^2 \leq \|u(s)-x\|^2 + 2\int_{[s,t]} \langle f(\tau)-y, u(\tau)-x\rangle_+ \, d\tau,$$

avec $\langle x,y\rangle_+ = \delta^*(y, j(x))$ où j est l'application de dualité et δ^* est la fonction d'appui.

Lorsque A dépend du temps, citons Ahmed-Gamal, Mohamed [1], Evgenios P. Avgerinos and Nikolaos S. Papageorgiou [20], Nikolaos S. Papageorgiou [27].

Dans ce travail, on va étudier l'existence de solutions absolument continues et à variation bornée de (P_F) dans le cas où A est un opérateur maximal monotone défini sur un espace de Hilbert H, et F est une multifonction $s.c.s.$ à valeurs convexes compactes dans H.

Dabord donons quelques définitions et résultats nécessaires dans l'étude des solutions des équations d'évolutions.

Définition 75 [*10*]

Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$. Étant donnée une fonction f de $[0,T]$ dans X, on appelle variation totale de f sur $[0,T]$ l'expression:

$$Var(f;[0,T]) = \sup(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \|f(a_k)-f(a_{k+1})\|).$$

pour toute les subdivisions $0 = a_0 < a_1 < ... < a_n = T$.

Si $Var(f;[0,T]) < +\infty$, on dit que f est à variation bornée; on désigne par $VB([0,T],X)$ l'espace des fonctions à variation bornée de $[0,T]$ dans X.

Définition 76 [*10*]

On dit qu'une fonction f de $[0,T]$ dans X est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute suite d'intervalle $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$ deux à deux *disjoints vérifiant* $\sum_n |\beta_n - \alpha_n| \leq \eta$, *on ait:*

$$\sum_n \|f(\beta_n) - f(\alpha_n)\| \leq \varepsilon.$$

On vérifie facilement que toute fonction f *absolument continue est à variation bornée.*

Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone de l'espace $H \quad \forall t \in [0,T]$. Soit $F : D(A(t)) \times H \to ck(H)$ une multifonction de H à valeurs convexes compactes dans H. On considère le problème d'évolution suivant:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) + F(t,u(t)) & p.p. \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)) \end{cases} \tag{P_F}$$

Définition 77 *Une fonction continue* $u : [0,T] \to H$ *est appelée solution à variation bornée (resp. solution absolument continue) du problème* (P_F) *s'elle vérifie les conditions suivantes:*

(i) u *est à variation bornée (resp. absolument continue) sur* I,

(ii) $u(t) \in D(A(t))$ *p.p. sur* I *et* $u(0) = u_0$,

(iii) il existe une fonction $f : I \to H$ *telle que, pour presque tout* $t \in I$, *on ait:*

$$f(t) \in F(t,u(t)) \text{ et } u'(t) \in -A(t,u(t)) + f(t).$$

Remarque 78 *La condition (iii) équivaut à dire que* u *est l'unique solution du problème d'évolution:*

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) + f(t) & p.p. \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)) \end{cases} \tag{P_f}$$

2.1 Le cas d'un opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone de l'espace H $\forall t \in [0,T]$, et soit dr la mesure de Stieltjes sur $I = [0,T]$ d'une fonction r continue à droite et non décroissante.

Soit $\forall t \in I, A(t)$ est donné tel que:

$(H1)$ $dis(A(t), A(s)) \leq dr(]s,t]) = r(t) - r(s)$ pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

où $dis(.,.)$ est la pseudo-distance entre les opérateurs maximaux monotones introduite par Vladimirov,

$(H2)$ Il existe un non négative $c \in L^1(0,T;dr)$ tel que:

$\|A^0(t,x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|)$ pour $t \in [0,T]$ et $x \in D(A(t))$,

$(H3)$ Il existe une fonction $a \in W^{1,1}([0,T])$ telle que:

$dis(A(t), A(s)) \leq |a(t) - a(s)|$ pour $t, s \in [0,T]$.

On a les résultats suivants dus à Kunze-Marques,

Théorème 79 (*Kunze-Marques*) [22]

Sous les hypothèses (H1) et (H2), il existe une fonction unique u de $[0,T]$ dans H à variation bornée solution du problème:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) & p.p. \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)) \end{cases} \tag{P}$$

Théorème 80 (*Kunse-Marques*) [22]

Sous les hypothèses (H2) et (H3), le problème (P) admet une unique solution absolument continue.

Soit f une fonction de $L^1_H([0,T])$. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) + f(t) \qquad p.p. \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)). \end{cases} \tag{P_f}$$

Le résultat suivant est une généralisation du théorème précédent à un problème d'évolution avec perturbation univoque,

Théorème 81 *Sous les conditions du théorème 80, le problème (P_f) admet une unique solution absolument continue.*

Preuve. *Posons:*

$$v(t) = u(t) - \int_0^t f(s)ds$$

donc:

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t) + \int_0^t f(s)ds, \\ v(0) &= u(0) = u_0, \\ \text{et } v'(t) &= u'(t) - f(t) \in -A(t,u(t)) = -A(t, v(t) + \int_0^t f(s)ds). \end{aligned}$$

Alors, le problème (P_f) est équivalent au problème suivant:

$$\begin{cases} v'(t) \in -A(t, v(t) + \int_0^t f(s)ds) \qquad p.p. \\ v(0) = u_0. \end{cases} \tag{P'}$$

On note par $\tilde{A}$ l'opérateur défini par:

$$(t,u(t)) \longmapsto \tilde{A}(t,u(t)) = A(t, u(t) + \int_0^t f(s)ds), \quad \forall (t,u(t)) \in [0,T] \times H.$$

Aïnsi, il suffit de prouver que le nouveau opérateur, $\tilde{A}$, satisfait tous les conditions du théorème80.

En début, montrons que $\tilde{A}$ est maximal monotone. D'après la proposition39, $\tilde{A}$ est maximal monotone si $\tilde{A}$ est monotone et $R(I+\tilde{A}) = H$.

Soient $v_1(t)$ et $v_2(t)$ deux éléments de H tels que, pour $u_1(t), u_2(t) \in D(\tilde{A}(t))$,

$$\begin{aligned} v_1(t) &\in \tilde{A}(t, u_1(t)) = A(t, u_1(t) + \int_0^t f(s)ds), \\ v_2(t) &\in \tilde{A}(t, u_2(t)) = A(t, u_2(t) + \int_0^t f(s)ds), \end{aligned}$$

$$(v_1(t) - v_2(t), u_1(t) - u_2(t)) =$$

$$(v_1(t) - v_2(t), (u_1(t) + \int_0^t f(s)ds) - (u_2(t) + \int_0^t f(s)ds)) \geq 0.$$

car A est monotone. De plus, $R(\tilde{A}) = R(A)$, et aïnsi $\tilde{A}$ est maximal monotone.

En outre, $\tilde{A}$ reste vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3) alors, d'après le théorème80, le problème (P') a une unique solution absolument continue $v(t)$, et par suite, le problème (P_f) admet une unique solution $u(t) = v(t) + \int_0^t f(s)ds$, absolument continue comme somme de deux fonctions absolument continues. $\blacksquare$

Corollaire 82 *Sous les conditions du théorème79, le problème (P_f) admet une unique solution à variation bornée.*

La démonstration s'obtiendra par un changement simple dans la démonstration du théorème précédent.

La proposition suivante est un résultat de convergence reposons sur le dans la démonstration du théorème qui suit.

Proposition 83 *Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone vérifie les hypothèses (H1) et (H2), et soit $u_0 \in D(A(t))$ fixé.*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^2_H([0,T])$converge faiblement vers $f_\infty \in L^2_H([0,T])$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, soit u_{f_n} l'unique solution absolument continue du problème:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t, u(t)) + f_n(t) & p.p. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{P_{f_n}}$$

Si, pour tout $t \in [0,T]$, *l'ensemble:* $\{u_{f_n}(t), n \in \mathbb{N}\}$ *est relativement compact pour la topologie norme de* H *alors, elle existe une suite* $(u_{f_{nk}})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* $t \in [0,T]$, $(u_{f_{nk}}(t))$ *converge vers* u_{f_∞} *pour la topologie norme de* H.

Preuve. Rappelons que l'existence de u_{f_n} est assurée par le théorème81.

Par nos hypothèses, u_{f_n} est l'unique solution absolument continue du problème:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) + f_n(t) & p.p. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (P_{f_n})$$

Donc on a:

$$\begin{cases} u'_{f_n}(t) \in -A(t,u_{f_n}(t)) + f_n(t) & p.p. \\ u_{f_n}(0) = u_0. \end{cases}$$

Quand (f_n) est convergente, donc (f_n) et (du_{f_n}/dt) sont bornées dans $L^2_H([0,T])$. Alors, on peut assuré que $(du_{f_n}(t)/dt)$ est $\sigma(L^2,L^2)$-convergente vers un élément $v \in L^2_H([0,T])$.

Posons:

$$u(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Donc, on a, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} u_{f_n}(t) &= x_0 + \int_0^t \frac{du_{f_n}}{dt}(s)ds \\ \lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) &= x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_0^t \frac{du_{f_n}}{dt}(s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t (\lim_{n\to\infty}\frac{du_{f_n}}{dt}(s))ds \\ &= x_0 + \int_0^t v(s)ds, \end{aligned}$$

pour la topologie faible $\sigma(L^2,L^2)$.

De plus, (u_{f_n}) est bornée dans $\mathcal{C}_H([0,T])$ pour la sup-norme.

Donc $\{u_{f_n}(t), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour la norme de H, et on a:

$$\lim_{n\to\infty} u_{f_n}(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds = u(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,T],$$

avec respect de la topologie norme de H. En particulier, (u_{f_n}) converge vers u pour la norme de $L^2_H([0,T])$ avec: $du/dt = v \quad p.p.$

Donc la suite $(du_{f_n}/dt - f_n)$ est $\sigma(L^2, L^2)$-convergente vers $(du/dt - f_\infty)$, et on conclut que:

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -A(t,u(t)) + f_\infty(t) & p.p. \\ u(0) = x_0. \end{cases}$$

Aïnsi, d'après l'unicité de la solution, u coïncide avec la solution absolument continue u_{f_∞} du problème:

$$\begin{cases} du_{f_\infty}/dt(t) \in -A(t,u_{f_\infty}(t)) + f_\infty(t) & p.p. \\ u_{f_\infty}(0) = u_0. \end{cases}$$

■

On peut maintenant énoncer le résultat principal pour ce chapitre,

Théorème 84 *Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone vérifi les hypothèses du théorème80.*

Soit F une multifonction définie sur $[0,T] \times D(A(t))$ à valeurs dans $ck(H)$ telle que,

a/ $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement pour tout $t \in [0,T]$,

b/ $F(.,x)$ est λ-mesurable sur $[0,T]$ pour tout $x \in D(A(t))$,

c/ Elle existe une fonction $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0,T])$ telle que,

$$|F(t,x)| \leq m(t) \text{ pour tout } (t,x) \in [0,T] \times D(A(t))$$

Alors, pour tout $u_0 \in D(A(0))$, le problème d'évolution:

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -A(t,u(t)) + F(t,u(t)) & p.p. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (P_F)$$

admet une solution absolument continue.

Preuve. Soit:

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2_H([0,T]) : \|f(t)\| \leq m(t) \quad p.p. \right\}.$$

On montre que $\mathcal{H}$ est convexe $\sigma(L^2, L^2)$-compact.

Soit $f, g \in \mathcal{H}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, on a:

$$\begin{aligned} \|\lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)\| &\leq \lambda \|f(t)\| + (1-\lambda)\|g(t)\|, \\ &\leq \lambda m(t) + (1-\lambda)m(t) = m(t). \end{aligned}$$

Donc $(\lambda f + (1-\lambda)g) \in H$, et aïnsi H est convexe.

On note par B_{L^2} la boule unité dans $L^2_H([0,T])$ ie:

$$B_{L^2} = \{h \in L^2_H([0,T]); \|h\| \leq 1\}.$$

Donc: $\mathcal{H} = |m(t)| \, B_{L^2}$, et d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Burbaki, la boule B_{L^2} est compacte pour la topologie faible $\sigma(L^2, L^2)$. Alors, $\mathcal{H}$ est faiblement compact.

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, soit u_f l'unique solution absolument continue du problème:

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -A(t, u(t)) + f(t) \qquad p.p. \\ u(0) = x_0. \end{cases} \tag{P_f}$$

qui l'existence est assurée par le théorème81.

On note que l'ensemble $\{u_f, f \in \mathcal{H}\}$ est borné et équicontinu dans $\mathcal{C}_H([0,t])$.

D'après le théorème d'Ascoli, pour montrer que l'ensemble $\{u_f, f \in \mathcal{H}\}$ est compact dans $\mathcal{C}_H([0,t])$, il suffit de démontré que, pour tout $t \in [0,T]$,

$\{u_f(t), f \in \mathcal{H}\}$ est compact dans H.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}$. Par extraction d'une sous-suite, on peut assuré que $f_n \to f_\infty \in \mathcal{H}$ pour la topologie $\sigma(L^2, L^2)$. Alors, d'après la *proposition83,* $(u_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution u_{f_∞} du promlème d'évolution:

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -A(t, u(t)) + f_\infty(t) \qquad p.p. \\ u(0) = x_0. \end{cases}$$

aïnsi $\{u_f, f \in \mathcal{H}\}$ est compact dans $\mathcal{C}_H([0,t])$.

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, soit:

$$\Phi(f) = \{g \in \mathcal{H}, g(t) \in F(t, u_f(t)) \quad p.p.\}.$$

Quand u_f est continue sur $[0,T], F(t,.)$ est semi-continue supérieurement et $\mathcal{H}$ est convexe faiblement compact, d'après un résultat de Castaing-Valadier, $\Phi(f)$ est convexe non vide $\sigma(L^2, L^2)$-compact, et le graphe de la multifonction $\Phi : \mathcal{H} \to cwk(\mathcal{H})$ est séquentielement $\sigma(L^2, L^2)$-fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Equivalement, le graphe de Φ est $\sigma(L^2, L^2)$-compact dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

D'ici $\Phi : \mathcal{H} \to cwk(\mathcal{H})$ est une multifonction semi-continue supérieurement pour la topologie $\sigma(L^2, L^2)$.

Donc, d'après le théorème du point fixe de Kakutani-Ky-Fan, Φ admet un point fixe f, qui est $f \in \Phi(f)$. par conséquent, il existe une fonction absolument continue $u_f : [0,T] \to H$ telle que:

$$\begin{cases} du_f/dt(t) \in -A(t, u_f(t)) + f(t) & p.p. \\ f(t) \in F(t, u_f(t)) & p.p. \\ u_f(0) = x_0. \end{cases}$$

et la démonstration complété. ■

Corollaire 85 *Sous les hypothèses (H1) et (H2) sur $A(t)$, et (a), (b) et (c) du théorème précédent sur F, le problème d'évolution (P_F) admet une solution à variation bornée.*

2.2 Le cas du sous différentiel

Théorème 86 (*Peralba*) [*30*]

Soit $\varphi : [0,T] \times H \to]-\infty, +\infty]$ vérifiant, *1) Pour chaque* $t \in [0,T], u \longmapsto \varphi(t,u)$ *est convexe, semi-continue inférieurement et différent de* $+\infty$,

2) Ils existe deux fonctions,

– *l'une* $k : H \to \mathbb{R}^+$ *lipschitzienne de rapport* ρ,

– *l'autre* $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ *absolument continue et à dérivée dans* $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ *telles que:*

$$\varphi^*(t,u) \leq \varphi^*(s,u) + k(u).\left|a(t) - a(s)\right|,$$

où $\varphi^*(t,.)$ *désigne la fonction duale de* $\varphi(t,.)$.

3) $0 \in dom\varphi^*$.

Alors, il existe, pour chaque $x \in dom\varphi(0,.)$, *une fonction unique* u *à valeurs dans* H, *définie sur* $[0,T]$ *et telle que:*

a) u *est absolument continue et donc p.p. dérivable,*

b) $du/dt(t) \in L^2_H([0,T])$,

c) $u(t) \in dom\partial\varphi(t,.)$ *et* $du/dt(t) \in -\partial\varphi(t,u(t))$ *p.p,*

d) $u(0) = x$.

Soit f une fonction de $L^1_H([0,T])$, on a,

Théorème 87 *Sous les hypothèses du théorème précédent, le problème d'évolution,*

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -\partial\varphi(t,u(t)) + f(t) & p.p. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (P_f)$$

admet une unique solution absolument continue.

Preuve. Comme dans la démonstration du théorème81 de la première partie, si on pose:

$$v(t) = u(t) - \int_0^t f(s)ds,$$

le problème (P_f) équivalent à:

$$\begin{cases} dv/dt(t) \in -\partial\tilde{\varphi}(t, v(t)) & p.p. \\ v(0) = u_0. \end{cases} \tag{P'}$$

où $\tilde{\varphi}$ est définie par:

$$(t, u(t)) \longmapsto \tilde{\varphi}(t, u(t)) = \varphi(t, u(t) + \int_0^t f(s)ds).$$

Montrons que $\tilde{\varphi}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent.

$\tilde{\varphi}$ est convexe semi continue inférieurement propre.

En effet, soient $u, v \in H$, $0 \leq \lambda \leq 1$, on a:

$$\tilde{\varphi}(t, \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)) =$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(t, \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t) + \int_0^t f(s)ds), \\ &= \varphi(t, \lambda(u(t) + \int_0^t f(s)ds) + (1-\lambda)(v(t) + \int_0^t f(s)ds)), \\ &\leq \lambda\varphi(t, u(t) + \int_0^t f(s)ds) + (1-\lambda)\varphi(t, v(t) + \int_0^t f(s)ds), \\ &= \lambda\tilde{\varphi}(t, u(t)) + (1-\lambda)\tilde{\varphi}(t, v(t)). \end{aligned}$$

d'où $\tilde{\varphi}(t, .)$ est convexe.

Quand $\varphi(t, .)$ est propre, il existe $u \in H$ tel que $\varphi(t, u(t)) \neq +\infty$,

$$\varphi(t, u(t)) = \tilde{\varphi}(t, u(t) - \int_0^t f(s)ds) \neq +\infty$$

Donc il existe $v \in H, v(t) = u(t) - \int_0^t f(s)ds$, tel que: $\tilde{\varphi}(t, v(t)) \neq +\infty$, et aïnsi $\tilde{\varphi}(t, .)$ est propre.

Notons par:

$$\begin{aligned} V_a &= \{u \in H; \varphi(t, u(t)) \leq a\} \\ \tilde{V}_a &= \{u \in H; \tilde{\varphi}(t, u(t)) \leq a\} \end{aligned}$$

Quand $\varphi(t, .)$ est semi-continue inférieurement, l'ensemble V_a est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} V_a &= \{u \in H; \varphi(t, u(t)) \leq a\}, \\ &= \{(u + \int f) \in H; \varphi(t, u(t) + \int_0^t f(s)ds) \leq a\}, \\ &= \{(u + \int f) \in H; \tilde{\varphi}(t, u(t)) \leq a\}, \\ &= \tilde{V}_a + \{\int f\}. \end{aligned}$$

Alors $\tilde{V}_a = V_a - \{\int f\}$ et donc il est fermé $\forall a \in \mathbb{R}$.

Par conséquent $\tilde{\varphi}(t, .)$ est convexe, semi-continue inférieurement propre. ■

Théorème 88 *Soit $\varphi : [0, T] \times H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ vérifie les conditions du théorème86, et soit F une multifonction définie sur $[0, T] \times dom\varphi(t)$ à valeurs dans $ck(H)$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) du théorème84 de la première partie.*

Alors, le problème d'évolution:

$$\begin{cases} du/dt(t) \in -\partial\varphi(t, u(t)) + F(t, u(t)) & p.p. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad (P_F)$$

admet une solution absolument continue.

La démonstration est analogue de celle utilisé dans la démonstration du théorème84 de la première partie.

Chapitre 3

L'existence de solutions périodiques

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions absolument continues $T-$périodiques pour des inclusions différentielles gouvernées par un opérateur maximal monotone avec perturbation univoque.

Soient H un espace de Hilbert, $A(t)$ un opérateur maximal monotone définit sur H et f une fonction définie sur $[0, T] \times D(A(t))$.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions absolument continues $T-$périodiques du problème:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t, u(t)) + f(t, u(t)) \qquad p.p. \\ u(0) \in D(A(0)). \end{cases} \tag{P_F}$$

Autrement dit les solutions absolument continues de (P_f) u, qui vérifies $u(0) = u(T)$.

De nombreux auteurs sont intéressés à ce type de problèmes, L. Aicha Faik[2] a étudié les solutions périodiques du problème (P_f) dans un espace de Hilbert où A est indépendant du temps et la perturbation est multivoque, Norimichi Hirano[29] a montré l'existence de solutions périodiques du problème (P_f) dans le cas où l'opérateur A est indépendant du temps et la perturbation est une fonction de Carathéodory.

Dans ce travail on donne un résultat d'existence de solutions périodiques dans le cas où A est un opérateur dépendant du temps et f est une fonction lipschitzienne sur $D(A(t))$.

3.1 Le problème homogène

Théorème 89 *Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone de H. Soit, pour tout $t \in [0,T], A(t)$ est donné tel que:*

(i) Il existe un non négatif $c \in L^1(0,T;dr)$ tel que:

$$\left\|A^0(t,x)\right\| \leq c(t)(1+\|x\|) \text{ pour tout } t \in [0,T] \text{ et } x \in D(A(t)),$$

(ii) Il existe une fonction $a \in W^{1,1}([0,T])$ telle que:

$$dis(A(t),A(s)) \leq |a(t)-a(s)| \text{ pour tout } t,s \in [0,T].$$

Alors, si u_1 et u_2 sont deux solutions absolument continues du problème d'évolution:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) & p.p. \\ u(0) \in D(A(0)). \end{cases} \tag{P_1}$$

on a l'inégalité suivante:

$$\|u_1(t)-u_2(t)\| \leq \|u_1(0)-u_2(0)\|, \forall t \in [0,T]. \tag{3.1}$$

Preuve. Comme u_1 et u_2 sont deux solutions absolument continues du problème (P_1), alors ils vérifient:

$$u_1'(t) \in -A(t,u_1(t)) \quad \text{et} \quad u_2'(t) \in -A(t,u_2(t)). \tag{3.2}$$

Quand l'opérateur $A(t)$ est maximal monotone, en vertu de (3.2), on a:

$$\langle -u_1'(t)+u_2'(t), u_1(t)-u_2(t)\rangle \geq 0.$$

Donc,

$$\langle \frac{d}{dt}(u_1 - u_2)(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle \leq 0.$$

En intégrant sur $[0,t], t \in [0,T]$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle \frac{d}{ds}(u_1 - u_2)(s), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds &\leq 0, \\
\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\|u_1(s) - u_2(s)\right\|^2 ds &\leq 0, \\
\|u_1(t) - u_2(t)\| - \|u_1(0) - u_2(0)\| &\leq 0,
\end{aligned}$$

ceci implique (3.1) et termine la démonstration. ■

Corollaire 90 *Sous les hypothèses du théorème 89, pour tout $a \in D(A(0))$, le problème d'évolution (P_1) admet une unique solution absolument continue $u : [0,T] \rightarrow D(A(t))$ telle que $u(0) = a$.*

Preuve. Soient u_1 et u_2 deux solutions absolument continues de (P_1) telles que $u_1(0) = u_2(0) = a$.

D'après le théorème 89, on a:

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \|u_1(0) - u_2(0)\|, \\
&= \|a - a\| = 0, \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Donc $u_1 = u_2$. ■

Corollaire 91 *Sous les hypothèses du théorème 89, l'application $a \longmapsto u_a(t)$, où u_a est l'unique solution absolument continue de (P_1) telle que $u_a(0) = a$, est lipschitzienne sur $D(A(0))$.*

Preuve. Soient u_a, u_b deux solutions absolument continues de (P_1) telles que $u_a(0) = a$ et $u_b(0) = b$, où a et b sont deux éléments distincts de $D(A(0))$. En appliquant le théorème89 à $t = T$, on obtient:

$$\|u_a(T) - u_b(T)\| \leq \|u_a(0) - u_b(0)\| = \|a - b\|, \quad \forall a, b \in D(A(0)).$$

Ce qui montre le corollaire. ■

Théorème 92 *Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone vérifie les conditions du théorème 89. Supposons de plus que $D(A(0))$ est convexe et compact dans H.*

Alors le problème d'évolution (P_1) admet au moins une solution absolument continue T-périodique u, i.e. $u(0) = u(T)$.

Preuve. En vertu du Corollaire 90, pour tout $a \in D(A(0))$, le problème (P_1) admet une unique solution absolument continue u_a telle que $u_a(0) = a$.

D'autre part, le corollaire 91 implique que pour tout $a \in D(A(0))$, l'application $a \longmapsto u_a(T)$ est lipschitzienne sur $D(A(0))$. Comme $D(A(0))$ est un ensemble convexe compact de H, le théorème du point fixe de Schauder implique que cette application admet un point fixe $a \in D(A(0))$, i.e. $u_a(T) = a = u_a(0)$.

Par suite u_a est une solution T-périodique de (P_1). ■

3.2 Le problème perturbé

Théorème 93 *Soit H un espace de Hilbert et $A(t) : D(A(t)) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone vérifie les conditions du théorème 89.*

Soit f une fonction définie sur $[0, T] \times D(A(t))$ à valeurs dans $ck(H)$ telle que:

(i) $f(., x)$ est $\lambda-$mesurable sur $[0, T]$ pour tout $x \in D(A(t))$,

(ii) $f(t, .)$ est lipschtzienne avec:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t) \|x - y\|, \text{ où } \alpha \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0, T]),$$

(iii) Il existe une fonction $m \in L^2_{\mathbb{R}^+}([0, T])$ telle que:

$$\|f(t, x)\| \leq m(t) \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times D(A(t)).$$

Alors, si u_1 et u_2 sont deux solutions absolument continues du problème d'évolution:

$$\begin{cases} u'(t) \in -A(t,u(t)) + f(t,u(t)) & p.p. \\ u(0) \in D(A(0)). \end{cases} \tag{P_2}$$

on a l'inégalité suivante:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(0) - u_2(0)\| \exp[\int_0^t \alpha(s)ds], \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Preuve. Comme u_1 et u_2 sont deux solutions absolument continues du problème (P_2), alors elles vérifient:

$$u_1'(t) \in -A(t,u_1(t)) + f(t,u_1(t)) \text{ et } u_2'(t) \in -A(t,u_2(t)) + f(t,u_2(t)).$$

En utilisant la monotonie de A, on obtient:

$$\begin{aligned} \langle -u_1'(t) + f(t,u_1(t)) + u_2'(t) - f(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle &\geq 0, \\ \langle -u_1'(t) + u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle &\leq \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle, \\ \langle \frac{d}{dt}(u_1(t) - u_2(t), u_1(t) - u_2(t)) &\leq \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 &\leq \langle f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle, \\ &\leq \|f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))\| . \|u_1(t) - u_2(t)\| . \end{aligned}$$

On note par:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 .$$

Donc:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) \leq 2\alpha(t)\varphi(t) \qquad p.p.$$

Ce qui implique que:

$$0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) + \int_0^t 2\alpha(s)\varphi(s)ds.$$

Appliquant l'inégalité de Gronwall, on trouve:

$$\varphi(t) \leq \varphi(0).\exp(\int_0^t 2\alpha(s)ds).$$

Donc:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 .\exp(\int_0^t 2\alpha(s)ds).$$

Ce qui implique (3.3) et termine la démonstration. ■

Corollaire 94 *Sous les hypothèses du théorème 93, pour tout $a \in D(A(0))$, le problème d'évolution (P_2) admet une unique solution absolument continue $u : [0,T] \to D(A(t))$ telle que $u(0) = a$.*

Preuve. Soient u_1, u_2 deux solutions absolument continues de (P_2) telles que $u_1(0) = u_2(0) = a$. D'après le théorème 93, on a:

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \|u_1(0) - u_2(0)\| .\exp(\int_0^t 2\alpha(s)ds), \\
&= \|a - a\| .\exp(\int_0^t 2\alpha(s)ds) = 0, \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Donc $u_1 = u_2$. ■

Corollaire 95 *Sous les hypothèses du théorème 93, l'application $a \longmapsto u_a(T)$, où u_a est l'unique solution absolument continue de (P_2) telle que $u_a(0) = a$, est lipschitzienne sur $D(A(0))$.*

Preuve. Soient u_a, u_b deux solutions absolument continues de (P_2) telles que $u_a(0) = a$ et $u_b(0) = b$, où a et b sont deux éléments distincts de $D(A(0))$. En appliquant le théorème 93 à $t = T$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\|u_a(T) - u_b(T)\| &\leq \|u_a(0) - u_b(0)\| .\exp(\int_0^T 2\alpha(s)ds), \\
&= \|a - b\| .\exp(\int_0^T 2\alpha(s)ds), \quad \forall a, b \in D(A(0)).
\end{aligned}$$

Ce qui montre le corollaire. ■

Théorème 96 *Soient les conditions du théorème 93 sont vérifiés.*

Supposons de plus que $D(A(0))$ est convexe et compact dans H.

Alors, le problème d'évolution (P_2) admet au moins une solution absolument continue T-périodique u, i.e. $u(0) = u(T)$.

Preuve. D'après le corollaire 94, pour tout $a \in D(A(0))$, le problème (P_2) admet une unique solution absolument continue telle que $u_a(0) = a$.

D'autre part, en vertu du corollaire 95 l'application: $u : a \longmapsto u_a(T)$ est lipschitzienne sur $D(A(0))$. Comme $D(A(0))$ est un ensemble convexe et compact de H, d'après le théorème du point fixe de Schauder, l'application u admet un point fixe $a \in D(A(0))$. i.e: $u_a(T) = a = u_a(0)$.

Par suite, u_a est une solution T-périodique de (P_2). $\blacksquare$

Bibliography

[1] Ahmed-Gamal, Mohamed: Perturbation non Convexe d'une Equation d'Evolution dans un Espace de Banach, Séminaire d'Analyse Convexe, Monpellier 1982, Exposé N°17.

[2] L. Aicha Faik: Contribution à l'Analyse des Multifonctions et à l'Étude de Quelques Problèmes d'Évolution, Thèse de Doctorat (30 mai 1995), univ. Monpellier II.

[3] L. Aicha Faik and Aicha Syam: Differential Inclusions Governed by a Nonconvex Sweeping Process, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Volume 2, Number 3, 2001, 381-392.

[4] Alberto Bressan and Vasile Staicu: On Nonconvex Perturbations of Maximal Monotone Differential Inclusions, Set-Valued Analysis (1994), 415-437.

[5] H. Attouch and A. Damlamian: Problèmes d'Evolution dans les Hilberts et Applications, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome 54-1975, N°1, 53-74.

[6] J. P. Aubin, Initiation à l'Analyse Appliquée, Masson, Paris, 1994.

[7] J. P. Aubin, A. Cellina: Differential Inclusions; Set-Valued Maps and Viability theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[8] H. Benabdelleh, C. Castaing, A. Salvadori: Compactness and Discretization Methods for Differential Inclusions and Evolution Problems, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLV, 9-51 (1997).

[9] H. Brézis: Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[10] H. Brézis: Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Company, amsterdam-London 1973.

[11] C. Castaing: Sur une nouvelle classe d'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert, Séminaire d'Analyse Convexe, Monpellier 1983, Exposé N°10.

[12] C. Castaing, M. D. P.M. Marques: BV Periodic Solutions of an Evolution Problem Associated with Continuous Moving Convex Sets, Set-Valued Analysis, 3 (1995), 381-399.

[13] C. Castaing, M. D. P.M. Marques: Periodic Solutions of Evolution Problem Associated with Moving Convex Sets, Discusiones Mayhematicae, Differential inclusions, 15, (1995), 99-127.

[14] C. Castaing, T. X. Dúc Hā, M. Valadier: Evolution Equations Governed by the Sweeping Process, Set-Valued Analysis 1, 109-139, 1993.

[15] A. Cellina and M. V. Marchi: Non-Convex Perturbations of Maximal Monotone Differential Inclusions. Isr. journ. Math. 46, (1983), 1-11.

[16] Dimitrios Kravvaritis: Multivalued Perturbations of Subdifferential Type Evolution Equations in Hilbert Spaces, Journal of Differential Equations 76, 238-255 (1988).

[17] Eberhard Zeidler: Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1999.

[18] Enzo Mitidieri, Ioan I. Vrabie: Differential Inclusions Governed by Nonconvex Perturbations of m-Accretive Operators, Differential and Integral Equations, V2, N°4, October 1989, pp. 525-531.

[19] Eric Schechter: Perturbations of Regularizing Maximal Monotone Operators, Israel Journal of Mathematics, Vol 43, N°1, 1982, pp. 49-61.

[20] Evgenios P. Avgerinos and Nikolaos S. Papageorgiou: Non-convex perturbations of evolution equations with m-dissipative operators in Banach spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae 30, 4 (1989), 657-664.

[21] Jonathan M. Borwein, Adrian S. Lowis: Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 2000.

[22] M. Kunze and M. D. P. M. Marques: B. V. Solutions to Evolution Problems with Time-Dependent Domains. Set valued Analysis, vol. 5, N°1, p. 57-72.

[23] Mohammed Moussaoui: Convex and Nonconvex Multivalued Perturbation of Moreau's Process: a Relaxation Result, prèspublication, Université d'Avignon, Novembre 1996.

[24] J. J. Moreau: Rafle par un Convexe Variable, Séminaire d'Analyse Convexe, Monpellier 1971, Exposé N°15.

[25] J. J. Moreau: Solutions du Processus de Rafle au sens des Mesures Différentielles, Sém. d'Analyse Convexe, Monpellier 1976, Exposé N°1.

[26] J. J. Moreau: Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space, Journal of Differential Equations 26, 347-374 (1977).

[27] Nikolaos S. Papageorgiou: On Evolution Inclusions Associated with Time Dependent Convex Subdifferentials, Comment. Math. Univ. Carolinae 31, 3 (1990), 517-527.

[28] Nikolaos S. Papageorgiou: On the Properties of the Solution set of Nonconvex Evolution Inclusions of the Subdifferential Type. Comment math. univ. Carolinae, 1993, p. 673-687.

[29] Norimichi Hirano: Existence of Periodic Solutions for Nonlinear Evolution Equations in Hilbert Spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 120, (1994), 185-192.

[30] J. C. Peralba: Un Problème d'Evolution relatif à un Opérateur Sous-différentiel Dépendant du Temps, Séminaire d'analyse convexe, Monpellier 1972, Exposé N°6.

[31] A. A. Vladimirov: Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space, Nonlinear Analysis, Theory and app., Vol. 17, N°6, pp. 499-518, 1991.

ملــخــص

مذكرة ماجستير

للطالب

منيـغر حمّود

مسألـة تطوريـة محكومـة بمؤثر رتيب أعظميا

في هذه المذكرة نتطرق إلى دراسة وجود حلول ذات تغير محدود، أو دورية للمسألـة التطوريـة الغيـر خطيـة للإحتـواء التفاضـلي محكومـة بمـؤثر رتيـب أعظميـا، وفـي الحالـة الخاصـة للتفاضل التحتي لتابع محدب ذاتي نصف مستمر من الأسفل.

Abstract

of

memory of magister

of the student

Menigher Hammoud

Problem of Evolution Governed by Maximal Monotone Operator

In this work, we studie the existence of solutions with bounded variations, or periodic for a non linear evolution problem for a differential inclusion governed by a maximal monotone operator, and in the special case of the sub differential of a convex proper lower semi continuous function.

Résumé

de

mémoire de magister

de l'étudiant

Menigher Hammoud

Problème d'évolution gouverné par un Opérateur Maximal Monotone

Dans ce travail, on étudiant l'existence de solutions à variation borne, ou périodiques pour le problème d'évolution non linéaire pour l'inclusion différentielle gouverné par un opérateur maximal monotone, et dans le cas particulier du sous différentiel d'une fonction convexe propre semi continue inférieurement.