REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mentouri Constantine

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

N° de série………..

N° d'ordre ………..

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

Magistère en Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

Par :

M : Abdelaziz SABA

THEME :

METHODE DE DECOMPOSITION ET CONTRÔLABILITE D'UN SYSTEME NON LINEAIRE

Devant le Jury :

DENCHE. M	Prof	Université Mentouri Constantine	Président
AYADI. A	Prof	C.U Larbi Ben M'hidi O E B	Rapporteur
DJEZZAR. S	M.C	Université Mentouri Constantine	Examinateur
AISSAOUI. M.Z	M.C	Université de Guelma	Examinateur
DJEBARNI. M	M.C	C.U Bordj Bouariridj	Examinateur

TABLE DES MATIERES

Introduction

Beaucoup de phénomènes sont modélisés par des systèmes non linéaires spatio-temporels de dimension infinie .la théorie de contrôlabilité et d'observabilité est un outil mathématique essentiel pour analyser ce type de phénomènes en passant par la méthode de décomposition.

La méthode de décomposition est une méthode mathématique introduite par **GEORGE ADOMIAN** au début des années 1980 pour résoudre des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires de différents types (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles , intégrales, intégrodifferentielles, …etc.) et aussi les systèmes de ces types d'équations.

Beaucoup de phénomènes physiques, biologiques, de l'environnement ….etc, sont modélisés par des systèmes de dimension finie ou infini dimensionnels. Pour résoudre ces systèmes beaucoup de méthodes mathématiques ont été introduites dans la littérature, mais la majorité de ces méthodes exigeaient soit une analyse ennuyeuse, soit une assez grande place mémoire d'ordinateurs de plus dans le cas non linéaire il y a en quelque sorte un manque d'une théorie unifiée. La méthode décompositionnelle d'Adomian est une technique puissante venue pour résoudre différents types de problèmes et entre autre les problèmes modélisés par les équations aux dérivées partielles non linéaires.

Rappelons quelques propriétés fondamentales de cette méthode : considérons l'équation fonctionnelle :

$$\mathbf{Z - N(z) = g}$$

Où N est un opérateur non linéaire (différentiel, intégral, différentiel partiel,…..etc.), g une fonction connue et z le problème inconnu.

La méthode Adomian consiste à trouver la solution z (si elle existe) sous la forme d'une série:

$$\mathbf{z} = \sum_{i=0}^{\infty} z_i$$

Et de décomposer l'opérateur non linéaire N sous la forme :

$$N(z) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$$

Où les A_i sont les polynômes d'Adomian

En remplaçant dans l'équation initiale on aura

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i - \sum_{i=0}^{\infty} A_i = g$$

Et par identification on peut calculer tous les termes z_i si les polynômes d'Adomian A_i sont connus ou calculés.

Cette méthode de décomposition s'applique aussi combinée à la méthode réductrice Aliénor pour la résolution de problèmes de contrôle optimal

La méthode décompositionnelle, permet alors d'exprimer la solution du système sous forme de série convergente dépendant explicitement des paramètres du système de contrôle alors que la méthode Aliénor basé sur l'approximation de R^n par des courbes $\propto -$ denses réduit le problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables en un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable en utilisant des transformations réductrices.

Cette approche permet de transformer le problème de contrôle optimal en un problème classique d'optimisation.

Cette méthode combinée a été appliquée à la résolution du problème de la recherche de la chimiothérapie optimale du modèle du V.I.H (virus immunodéficitaire humain)

Le système dynamique du virus immunodéficitaire est représenté par le modèle suivant proposé par **NOWAK** et **BANGHAM** (1996)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda - dz_1 - \beta\, z_1 z_3 \\ \dot{z}_2 = \beta\, z_1 z_3 - a\, z_2 - p\, z_2 z_4 \\ \dot{z}_3 = k\, z_2 - v\, z_3 \\ \dot{z}_4 = c\, z_2 z_4 - b\, z_4 \end{cases}$$

Où $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{z}_3$, $\dot{z}_4$, représentent respectivement, le nombre de cellules saines, le nombre de cellules infectées, la charge virale, et l'antigène cytotoxique CTL. C'est un système d'équations ordinaires non linéaires.

les paramètres du système $\lambda, d, a, \beta, p, b, c, v, k$ sont les taux, respectivement de production de cellules saines, de mortalité de cellules saines, de mortalité naturelle de cellules infectées, d'infection de cellules saines par le virus, de mortalité de cellules infectées , de déclin naturel du CTL et de production du CTL

Le critère à minimiser est le suivant :

$$J = z^2{}_3(T) + B \int_0^T u^2(t)\, dt$$

T est le temps final de la thérapie fixé par le praticien

La démarche à suivre pour résoudre ce problème est la suivante :

On reporte le contrôle $u(t)$ donné ici par :

$$u(t) = \mathrm{r}e^{-nt} \qquad 0 \leq u(t) \leq 1$$

$$\beta(t) = \beta(1 - u(t))$$

Dans le système.

On résoud le système par la méthode Adomian, la solution fonction de r et n est reporté dans le critère qui est minimisé par la méthode Aliénor.

Après simulation numérique on a constaté que les résultats donnés par cette méthode étaient comparables a ceux obtenues par les méthodes classiques

(Voir travaux de **Y-CHERRUAULT, S- MANSEUR, K –ATTALAH**)

Je reviens à la notion de contrôlabilité et à sa notion duale d'observabilité d'ont je parlais au début.

Ce sont des notions importantes dans l'analyse et le contrôle des systèmes.

Pour les systèmes dynamiques non linéaires la théorie de contrôlabilité et d'observabilité n'est pas uniforme comme dans le cas linéaire

La plupart des résultats et des critères de contrôlabilité n'ont qu'un caractère local ou alors ils concernent uniquement une classe limitée de problèmes.

Dans l'étude de la contrôlabilité des systèmes dynamiques non linéaires on utilise différentes méthodes suivant le type du problème et le type de la contrôlabilité.

parmi les méthodes utilisées je citerais les méthodes, du principe du maximum , des théorèmes du point fixe et des théorèmes des fonctions implicites , la méthode de perturbation ou la contrôlabilité d'un système non linéaire perturbé se fait par l'étude de la contrôlabilité d'un système linéaire approprié sans perturbation……. etc.

Le choix de la méthode est basé sur le type du problème non linéaire.

La contrôlabilité stochastique des systèmes dynamiques non linéaires a été traitée par **SUNAHARA, AIKARA et KISHINO** (1975)

Probablement la méthode qui donne les meilleurs résultats est celle basée sur les théorèmes du point fixe dont le théorème du point fixe de SCHAUDER ou le théorème du point fixe de DARBOUX.

Il faut signaler que la théorie de contrôlabilité et d'observabilité des systèmes dynamiques non linéaires se développe encore surtout avec les notions récentes de contrôlabilité et d'observabilité régionales.

Enfin j'ajouterais quelques mots sur la théorie des sentinelles pour les systèmes distribués, théorie introduite par **(J.L. LIONS).**

Les sentinelles sont des êtres mathématiques aussi proches que possible d'une moyenne pondérée et qui sont peu sensibles à des variations de termes imprévisibles ou hors d'atteinte dans les conditions initiales , les conditions aux limites ….etc.

Dans beaucoup de phénomènes, comme ceux lies à l'écologie, l'immunologie,…etc.

Les conditions initiales, les conditions aux limites …etc. ne sont pas connues ou uniquement partiellement connues.

La théorie des sentinelles permet par exemple de donner une estimation des termes polluants indépendamment des termes manquants

La construction de sentinelles repose sur la résolution de problèmes du type contrôlabilité.

Dans ce travail on s'intéresse à la méthode de décomposition d'Adomian et à son utilisation à la résolution de problèmes non linéaires.

Apres avoir exposé les grands principes de la méthode, on montre ici comment on peut l'appliquer pour résoudre un problème parabolique non linéaire, puis on prouve sur un exemple numérique l'efficacité de cette puissante technique qui donne la solution sous forme de séries rapidement convergentes.

On propose deux méthodes simples pour le calcul des polynômes d'Adomian

On montre aussi comment cette méthode combinée à la méthode Alienor permet de résoudre des problèmes de contrôle optimal.

On s'intéresse enfin à la construction de sentinelles qui nous permettent d'estimer les termes polluants indépendamment des termes manquants et ceci dans le cas des systèmes à données incomplètes

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur l'optimisation, sur la théorie des semi groupes et sur les systèmes d'évolution paraboliques.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à la théorie de contrôlabilité et d'observabilité.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de décomposition d'Adomian et à quelques unes de ses applications.

Enfin un quatrième chapitre est consacré à la théorie des sentinelles

Chapitre 1

Chapitre 1

Quelques Rappels

1.1. Rappels d'optimisation convexe :

1.1.1 Quelques définitions

Donnons d'abord les définitions de fonction convexe et de fonction semi- continue inférieurement

Définition 1 **(Fonction convexe)**

Soit : $J : K \subset X \rightarrow R$, X étant un espace vectoriel

J est dite convexe, si K est convexe et si :

$$\forall\ x, y \in K, \quad \forall t \in [0,1] : \quad J(t\,x + (1-t)\,y) \leq t\,J(x) + (1-t)\,J(y)$$

Elle est dite strictement convexe si K est convexe et si :

$$\forall\ x, y \in K \text{ et } x \neq y, \quad \forall t \in]0, 1[:$$

$$J(t + (1-t)\,y) < t\,J(x) + (1-t)\,J(y)$$

Si J est convexe alors : $\forall \lambda \in R$, $\{J \leq \lambda\}$ est convexe.

Définition 2 **(Fonction semi continue inférieurement)**

Soit X un espace topologique et $J : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$

J est dite semi continue inférieurement **(**s.c.i) si :

$$\forall\ x \in X \text{ et } \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ V, \text{ voisinage de x tel que :}$$

$$\forall y \in V, \quad J(x) - \varepsilon \leq J(y)$$

On a : J **(**s.c.i) au point a $\Leftrightarrow$ $J(a) = \liminf\limits_{x \to a} J(x)$

On a l'équivalence entre :

- J est (s.c.i)
- $\forall \lambda \in \Re$, $\{J \leq \lambda\}$ est fermé
- Epig J = $\{ (x, y) \in X \times R , \ J(x) \leq \lambda \}$ est fermé
- Si $x_n \rightarrow x$ alors $J(x) \leq \liminf J(x_n)$

Désormais, X sera un espace de Hilbert et $X_{ad} \subset X$

En théorie du contrôle X_{ad} est l'espace des contrôles admissibles

J étant une fonctionnelle sur X on considère le problème :

$$\text{Trouver, } \quad x^* \in X_{ad} \; / \quad J(x^*) = \alpha = \min_{x \in X_{ad}} J(x)$$

Théorème 1.1.1

Soit $X_{ad} \subset X$, fermé, convexe

Si J est (s.c.i), convexe, cœrcive (i.e $\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = +\infty$)

$$\text{Alors : } \quad \exists\, x^* \in X_{ad} / \;\; J(x^*) = \alpha = \min_{x \in X_{ad}} J(x)$$

Si J est strictement convexe alors x^* est unique

Preuve :

Existence:

Soit (x_n) une suite minimisante de X_{ad} (i.e)

$$J(x_n) \to \inf_{x \in X_{ad}} J(x)$$

Comme J est coercive, (x_n) est bornée, donc on peut extraire de (x_n)

Une sous suite x_μ telle que : $\quad x_\mu \to \omega$ faiblement

X_{ad} est faiblement fermé, car convexe, fermé, donc $\omega \in X_{ad}$

J est faiblement s.c.i car elle est convexe, s.c.i, donc :

$$\text{Lim inf } J(x_\mu) \geq J(\omega)$$

$$\text{D'ou } \inf_{x \in X_{ad}} J(x) \geq J(\omega)$$

$$\text{d'où : } J(\omega) = \inf_{x \in X_{ad}} J(x)$$

Unicité :

Soit y^* une autre solution

$$t\, x^* + (1-t)\, y^* \in X_{ad} \quad , \quad \forall t \in]0,1[$$

$$J(t\, x^* + (1-t)\, y^*) < t\, J(x^*) + (1-t)\, J(y^*)$$

$$< J(y^*)$$

C'est absurde, donc $x^* = y^*$

1.1.2 Caractérisation de x^*

Théorème

On suppose que les hypothèses précédentes sont vérifiées et que de plus J est différentiable alors l'unique élément x^* est caractérisé par :

$$J'(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in X_{ad}$$

Preuve :

On a : $J(t x + (1-t) x^*) \geq J(x^*)$ (par définition)

Donc : $\dfrac{J(x^* + t(x - x^*)) - J(x^*)}{t} \geq 0 \quad , \quad \forall t \in]0,1[$

Si : $t \to 0^+$ on conclut que : $J'(x^*)(x - x^*) \geq 0$

Réciproquement:

Puisque J est convexe on a : $\forall x, y, \ \forall \theta \in]0,1[$

$$J((1-\theta) y + \theta x) \leq (1-\theta) J(y) + \theta J(x) \quad \text{et donc :}$$

$$\frac{1}{\theta}[J((1-\theta) y + \theta x) - J(y)] \leq J(x) - J(y)$$

D'où $J'(y)(x - y) \leq J(x) - J(y)$

Si : $y = x^*$

$$0 \leq J'(x^*)(x - x^*) \leq J(x) - J(x^*)$$

D'où $J(x^*) \leq J(x) \quad \forall x \in X_{ad}$

Théorème

Sous les hypothèses précédentes, la caractérisation

$$J'(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X_{ad}$$

est équivalente à :

$$J'(x)(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X_{ad}$$

Preuve :

$$J'(x^*)(x - x^*) \geq 0 \Rightarrow J'(x)(x - x^*) \geq 0$$

On vérifiée que l'opérateur : $J' : x \to x'$ est monotone

$$(J'(x) - J'(y))(x - y) \geq 0$$

En effet on a montré que :

$$J(x) - J(y) \geq J'(y)(x - y) \quad \forall x, y \in X_{ad}$$

En permutant x et y : $J(y) - J(x) \geq J'(x)(y - x)$

D'où $J'(x) - J'(y)(x - y) \geq 0$

D'autre part : $J'(x)(x - x^*) = J'(x^*)(x - x^*) + (J'(x)-J'(x^*))\text{-}(x - x^*)$

D'où $J'(x)(x - x^*) \geq 0$

<u>L'implication inverse :</u>

$$J'(x)(x - x^*) \geq 0 \Rightarrow J'(x^*)(x - x^*) \geq 0$$

On prend : $x = (1 - \theta)\,y + \theta x^*$, $y \in x_{ad}$, $\theta \in]0,1[$

On déduit que :

$$(1 - \theta)\, J'((1 - \theta)\, y + \theta x^*).(y - x^*) \geq 0$$

Donc : $J'((1 - \theta)\, y + \theta x^*).(y - x^*) \geq 0$

Quand $\theta \to 1$ on a :

$$J'(x^*)(y - x^*) \geq 0 \qquad \forall\, y \in X_{ad}$$

1.2. Semi- groupes d'opérateurs :

1.2.1 Définition

Soit $(G(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires continus définis dans un espace de Banach X de norme $\|.\|$

$(G(t))_{t \geq 0}$ sera dit semi groupe fortement continu ou de classe C^0 si :

1- $G(0) = I$, $I \in L(x)$

2- $G(s+t) = G(s)\,G(t)$ $\forall\, s, t \geq 0$

3- $\lim\limits_{t \to 0^+} \|G(t)x - x\| = 0$ $\forall x \in X$

Si (2) est vérifiée pour s, t dans R, on dira que G (t) est un groupe de classe C^0

1.2.2 Exemples :

(1) x étant de dimension finie et $A \in L(x)$

La solution de : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + Ax = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

est : $x(t) = e^{-tA} x_0 = G(t)\, x_0$

$G(t)$ est un semi -groupe et même un groupe de classe C^0

(2) soit $X = \ell_2 = \left\{ (x_n)_{n \in N^*} : \sum_1^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$

L'espace des suites de carré sommable est de dimension infinie muni de la norme : $\| x \|_{l_2} = \left(\sum_1^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$

Et soit G (t) défini par :

$$G(t)\, x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{N^*} \in \ell_2 \qquad \forall\ t \geq 0$$

G (t) est un semi groupe qui n'est pas prolongeable en un groupe car

$$G(-t)\, x = \{ e^{n^2 t} x_n \} \notin \ell_2 , \quad \forall\ x \in \ell_2 , \quad \forall\ t \neq 0$$

Remarques :

- $\exists\ M \geq 1, \exists \omega \in \Re$ tel que : $\| G(t) \| \leq M\, e^{\omega t}$

  La borne inférieur des ω tel que :

$$\| G(t) \| \leq M_{\omega}\, e^{\omega t} , \quad t \geq 0$$

est appelée type du semi- groupe.

- On a $\forall x \in X$: $t \to G(t)\, x$ est continue

Preuve :

Soit $t > 0$ fixé, si $s > 0$ et $x \in X$ on a :

$$\| G(t+s)\, x - G(t)\, x \| \leq \| G(t) \| \| G(s) x - x \| \to 0$$

D'où la continuité à droite

Si : $0 < s < t$ on a :

$$\| G(t-s)\, x - G(t)\, x \| \leq \| G(t-s) \| . \| G(s)\, x - x \| \leq M_t \| G(s)\, x - x \|$$

D'où la continuité à gauche.

Quelques catégories de semi- groupes

- Un semi- groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est de contraction si $\|G(t)\| \leq 1$
- Il est dit analytique dans le secteur $\Delta \subset Z$

$$\Delta = \{ z, \quad \phi_1 < \arg z < \phi_2, \quad \phi_1 < 0 < \phi_2 \}$$

Si G : z $\rightarrow$ G (z) est prolongeable en un semi groupe holomorphe dans Δ

- il est dit compacte si l'opérateur G (t) est compacte $\forall\, t > 0$
- il est dit différentiable si : $\forall\, t > 0, \quad \forall\, x \in X$

$$t \rightarrow G(t)x \quad \text{est différentiable}$$

1.2.3 Générateur infinitésimal de semi- groupe

Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe de classe C^0

On pose : $$D = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)x - x}{h} \ \text{existe} \right\}$$

et soit A l'opérateur de domaine D tel que :

$$A\,x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)x - x}{h}$$

L'opérateur A (en général non borné) est appelé **g**énérateur infinitésimal du semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$

Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$G(t)\,x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{n \in N^*}, \qquad X = \ell^2$$

$$\forall n \in N^*, \text{ On a: } \quad \frac{e^{-n^2 h} - 1}{h} x_n = -n^2 x_n e^{-\theta_n n^2 h}, \qquad 0 < \theta_n < 1$$

D'où : $$D = \{ x \in \ell^2 / \quad \{n^2 x_n\} \in \ell^2 \}$$

Domaine de l'opérateur non borné $A = \{ -n^2 x_n \}$

On vérifie facilement que :

- A est linéaire et D est un sous espace non vide qui est dense dans X
- $\forall\, x \in D,\quad \forall\, t \geq 0,\quad G\,(t)\, x \in D$ et on a : A G (t) x = G (t) A x
- t $\rightarrow$ G (t) x est dérivable, $\forall x \in D$ et on a :

$$\frac{d}{dt} G\,(t)\, x = A\, G\,(t)\, x = G\,(t)\, A\, x$$

Ici on pourra montrer qu'elle est dérivable à droite et à gauche et que les dérivées sont égales.

Maintenant un opérateur A (non borné) étant donné existe-t-il un semi-groupe dont A est le GI.

Par exemple :

Ω étant un ouvert de R^n , on considère l'opérateur :

$$A \;=\; -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, i, j = 1,…n, vérifiant:

$$\text{(H)} \qquad \Re_e \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_j\,\bar{\xi}_j \;\geq\; \alpha \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^2, \qquad \alpha > 0,\quad pp\ sur\ \Omega$$

On prend : $D\,(A) = \left\{\; u \in H_0^1(\Omega)\, /\quad Au \in L^2(\Omega) \;\right\}$

(i.e) condition de Dirichlet au bord de Ω alors (-A) est générateur infinitésimal d'un semi- groupe de contraction de classe C^0 dans $L^2(\Omega)$

Un théorème qui caractérise les GISG est le :

Théorème de **Hille-Yoshida**

1.2.4 Théorème

X étant un espace de Banach soit un opérateur fermé de domaine D (A) dense dans X, A est GISG de classe C^0 si : $\exists \omega \in \Re$ tel que :

* - Au + ku = f a une solution unique $\begin{matrix} \forall \lambda = \cdots \mathrm{Re}(k) > \omega \\ \forall u \in D(A) \end{matrix}$

* si u = R(k) f est cette solution alors :

$$\left\| R^n(k) \right\| \;\leq\; \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

Dans l'exemple précédent:

Si $k = \lambda + i\,\mu, \quad \mu \in D(A), \quad f \in L^2(\Omega)$

Il faut résoudre: Au + ku = f

i.e $\{$ trouver u $\in H_0^1(\Omega)$ / $a(u,v) + k\,(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Où $(u, v) = \int_\Omega u\,\bar{v}\,dx$, $\qquad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$

D'après (H)

$$\mathrm{Re}\,(a(u,v) + k(u,v)) \geq \inf(\alpha, \lambda)\ \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad (\lambda > 0)$$

Donc le problème admet une solution unique, par ailleurs

$$\mathrm{Re}\ a(u,u) + \lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)} = \mathrm{Re}\,(f,u)$$

Puisque Re a (u,u) ≥ 0

$$\lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| f \|_{L^2(\Omega)} \| u \|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \| u \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \| f \|_{L^2(\Omega)}$$

Remarque : pour plus de détails voir les ouvrages spécialisés

1.2.5 Semi- groupe Adjoint :

X étant un espace de Hilbert et A un opérateur fermé de domaine D(A) dense dans X, si A* est l'Adjoint de A, X étant réflexif, A* est fermé et D(A*) dense dans X.

Si A est GISG alors A* est GISG

Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est le semi groupe engendré par A, alors $(G^*(t))_{t\geq 0}$ est le semi groupe engendré par A*, appelé semi groupe adjoint, où G*(t) est l'adjoint de G (t)

Lorsque A est générateur infinitésimal d'un semi groupe G(t) fortement continu (i.e) satisfasse les conditions du théorème de **Hille-Yoshida**, la théorie des semi -groupes permet de traiter beaucoup de problèmes d'évolution, la solution du

problème suivant: $\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = f \\ u(o) = u_0 \end{cases}$

$u_0,\ f,\ \ donnés$

S'écrit alors:

$$u\,(t) = \int_0^t G(t-s)\ f(s)\,ds\ + G\,(t)\,u_0$$

1.3. problèmes d'évolution paraboliques :

1.3.1 Problème considéré

Soit Ω un ouvert de $\Re^u$, de frontière Γ et soi Q = $\Omega \times]\ 0,T\ [$ et $\Sigma = \Gamma \times]\ 0,T\ [$ sa frontière latérale,] 0,T [est l'intervalle de temps

On considère le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = f \\ u(o) = u_0 \end{cases}$$

Où A est un opérateur différentiel linéaire elliptique de la forme :

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

(P) est alors un problème parabolique du 2° ordre

L'équation type est celle de la chaleur qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad dans\ Q........(*) \\ u\,(0) = u_0 \qquad dans\ \Omega \\ u = 0 \qquad sur\ \sum \end{cases}$$

Où $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\ 2}}$ est le **Laplacien**

Multiplions l'équation (*) par une fonction test v et intégrons sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial z}{\partial t} v dx - \int_\Omega \Delta z v dx = \int_\Omega f v dx$$

D'après la formule de Green :

$$-\int \Delta u \; v \; dx \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx \quad - \quad \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \, v \; d\Gamma$$

Si on suppose que v$\in H_0^1(\Omega)$

On déduit :

Soit :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \, v \; dx \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx \quad = \quad \int_\Omega f \;\; v \; dx$$

$$a\;(u,v) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx$$

Donc le problème revient à trouver : $u : \;\;]\,0,T\,[\;\; \to \;\; H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \begin{cases} (\frac{du}{dt}, v) \;\; + \;\; a\;(u,v) \; = \; (f,v) & dans \; Q \\ u\;(0) = u_0 & dans \; \Omega \end{cases}$$

C'est un problème de **cauchy-Dirichlet**

<u>1.3.2 Formulation abstraite du problème :</u>

Formulons de façon abstraite et dans un cadre général le problème (P)

On se donne:

(1)– deux espaces de Hilbert V et H tels que

V $\to$ H (i.e V $\subset$ H avec injection continue)

V dense dans H

On identifie H à son dual H' de telle façon que si V' est le dual de V on a.

V $\to$ H $\to$V'

(2) une famille de formes bilinéaires continues sur V

(u ,v) $\to$ a(t,u,v) , $\forall t \in$]0,T[

(On a supposé le cas général ou a est dépendant de t)

Telles que :

i) $\forall u, v \in V \quad t \to a(t,u,v)$ *mesurable sur* $]0,T[$ *et* $|a(t,u,v)| \leq c \| u \| \, \| v \|$

ii) a est V - coercive par rapport à H (i.e)

$\exists \alpha > 0, \ \exists \lambda \in \Re \ /$

$\forall t \in \,]0,T[\ , \ \forall v \in V$

$$a(t,u,v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$$

NB : on peut se ramener au cas $\lambda = 0$ sans perte de généralité

On pose : $y = e^{\lambda t} z$

Le problème est équivalent à :

$$\frac{dz}{dt} + (A(t) + \lambda I) z = e^{-\lambda t} f$$

On a :

$\forall t \in]0,T[$, a (t,u,v) = (A(t)u,v)

où A (t) $\in$ L (L^2(0, t ; V), L^2(0, t ; V'))

i.e A (t) u : est la fonction :

$$t \to A(t)u(t) \in V'$$

Le problème (P) est le suivant: $u_0 \in H, \quad f \in L^2(0,T;V')$

Trouver u dans un espace convenable tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)\, u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Ce qui revient à trouver u telle que :

$$(\frac{du}{dt}, v) + a\,(t,u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V$$
$$u\,(0) = u_0$$

L^2 (0, T; V) représente l'espace des (classes) de fonctions f de]0,T[à valeurs dans V telles que :

$$\| f \|_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T \| f(t) \|_V^2 \, dt < +\infty$$

C'est un Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_V \, dt$$

1.3.3 Résolution du problème (P)

Théorème

Si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées alors il existe une solution unique u au problème (P) telle que u $\in$ W (0, T; V; V') et dépendant continûment des données

Où W (0, T; V; V') = $\{ \; u \in L^2(0,T,V) \;\; et \;\; u' \in L^2(0,T,V') \; \}$

On notera pour abréger :

$$W(0, T, V, V') = W(0, T)$$

Il est muni de la norme :

$$\| u \| = (\| u \|^2_{L^2(0,T,V)} + \| u' \|^2_{L^2(0,T,V')})^{1/2} = (\int_0^T \| u(t) \|^2_V + \| u'(t) \|^2_{V'} \, dt)^{1/2}$$

Remarque :

W(0,T) $\subset$ C^0 ([0,T] ,H) ou C^0 ([0,T] ,H) est l'espace des fonctions continues de [0,T] $\rightarrow$ H

1.3.4 Exemples d'application :

Exemple 1:

Soit $a_{ij} \in L^\infty(Q)$ telles que

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t)\, \xi_i \xi_j \;\geq\; \alpha \| \xi \|^2 \qquad ,\alpha > 0 \quad (pp \quad dans \quad Q)$$

Où $\xi = (\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$

On pose : a (t, u, v) = $\sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$

Le théorème précédent s'applique au problème suivant:

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f \quad dans \quad Q$$

$$ou \quad Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j})$$

$$prenons \quad V = H^1(\Omega)$$

Par le même raisonnement que précédemment :

On utilise la formule de **Green** :

$$\int_{\Omega} Au \ v \, dx \;=\; -\int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \upsilon_A} v \, d\sigma \;+\; a\,(t,u,v)$$

$$ou \qquad \frac{\partial u}{\partial \upsilon_A} \;=\; \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i)$$

Cos (n,x_i) : i^e = cosinus directeur de la normal extérieur à Ω

Le problème (P) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx \;+\; \int_{\Omega} Au\, v\, dx \;=\; \int_{\Omega} f \ v \ dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \ dx \;-\; \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial v_A} v \ d\sigma \;+\; a(u,v) \;=\; \int_{\Omega} f \ v\, dx$$

Il s'interprète par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f & dans \quad Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_A} = 0 & sur \quad \sum \\ u(.,0) = u_0 & dans \quad \Omega \end{cases}$$

C'est le problème de **cauchy-Neumann**.

<u>Exemple 2 :</u>

Si on choisit : $V = \left\{ \ v \in H^1(\Omega) / \quad v / \Gamma_0 = 0 \ \right\}$

De telle sorte que : $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_A} = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \times]0,T[$

Où $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$

Il s'interprète par:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A\,u \ = f & dans \quad Q \\ u \ = 0 & sur \quad \Gamma_0 \times]0,T[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon_A} = 0 & sur \quad \Gamma_1 \times]0,T[\\ u(.,0) \ = \ u_0 & dans \quad \Omega \end{cases}$$

C'est un problème avec conditions aux limites mêlées

(Dirichlet- Neumann.)

Chapitre 2

Chapitre 2

Contrôlabilité et observabilité

Partie I: Contrôlabilité et observabilité linéaires

Systèmes considérés :

On considère les systèmes décrits par l'équation différentielle opérationnelle:

$$\begin{cases} z'(t) = A\,z(t) + B\,u(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (2-1)$$

Augmentés de l'équation de sortie:

$$Y = C\,z \qquad (2\text{-}2)$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- E, ν, O sont des espaces de Hilbert séparables qui représentent respectivement les espaces, d'état, de contrôle et d'observation
- $B \in L(\upsilon, E)$, $C \in L(E, \mathrm{O})$ *et* $u \in L^2(0,T;\upsilon)$
- A auto adjoint à résolvante compacte et engendre un semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ de classe C^0 sur E. Avec ces hypothèses le système (2.1)

admet une solution faible unique sur $[0,T]$ donnée par:

$$z(t) = G(t)z_0 + \int_0^t G(t-s)Bu(s)\;ds$$

On suppose momentanément que $z_0 = 0$

Notons par H, l'opérateur linéaire borné défini par :

$$H: \quad L^2(0,T;\,\upsilon) \;\to E$$

$$H(u) = \int_0^T G(T-s)\,B\,u(s)\;ds$$

2.1. Contrôlabilité linéaire

2.1.1 Exacte et faible contrôlabilité

Définition 1

Le système (2-1) est dit exactement contrôlable sur $[0,T]$ si :

$$\forall\ z_d \in E\ ,\ \exists\, u \in L^2(0,T;\upsilon) \quad tel\,que \qquad z(t) = z_d$$

Remarque : 1

La définition ci- dessus est équivalente à:

$$\operatorname{Im} H = E$$

Définition 2

Soit $F \subset E$ un sous-espace de E le système (2-1) est dit exactement contrôlable dans F si:

$$\forall\ z_d \in F\ ,\quad \exists\ u \in L^2(0,T;\upsilon)\ \ tel\,que \qquad z(T) = z_d$$

Remarque : 2

La définition précédente est équivalente à :

$$F \subset \operatorname{Im} H$$

Les éléments de E ne sont pas tous atteignables en général, On est conduit à définir une autre notion de contrôlabilité.

Définition 3 Contrôlabilité faible

Le système (2-1) est dit faiblement contrôlable sur $[0,T]$ si pour tout z_d dans E:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, u \in L^2(0,T;\upsilon)\ \ tel\,que\ :\left\| z(T) - z_d \right\| \ \le\ \varepsilon$$

2.1.2 Caractérisations:

a) Contrôlabilité exacte:

Le système (2-1) est exactement contrôlable sur $[0,T]$ ssi:

$$\exists\, \gamma > 0\ \ tel\,que : \left\| z^* \right\|_{E^*} \le \gamma \left\| B^* G^*(.) z^* \right\|_{L^2} \qquad pour\ tout\ z^* \in E^*$$

Cette caractérisation ramène donc le problème d'exacte contrôlabilité à celui d'expliciter une inégalité plus facile

Proposition

Soit H_t l'opérateur : $L^2(0,T;\upsilon) \to E$ défini par:

$$H_t(u) = \int_0^t G(t-s)Bu(s) \quad ds$$

Si pour tout t≥0, H_t est compact alors le système (2-1) n'est pas exactement contrôlable

Conséquences:

1- Si G(t) est compact pour tout t >0 alors le système (2-1) n'est pas exactement contrôlable
2- Si B est compact alors le système (2-1) n'est pas exactement contrôlable

b) Contrôlabilité faible :

On a l'équivalence entre:

1- le système (2-1) est faiblement contrôlable sur $[0,T]$
2- $\overline{\operatorname{Im} H} = E$
3- $Ker\,(H^*) = Ker\,(H^*\ H) = \{0\}$
4- $\{z, G(s)Bu) = 0 \quad , \ \forall s \in [0,T]\, et\ \forall\, u \in \upsilon\} \Rightarrow z = 0$
5- Si le semi groupe $(G(t))_{t>0}$ est analytique alors on a:

$$\bigcup_{n\in N} \overline{I_m(A^n G(s)\ B)} = E\ , \quad \forall\ s \in [0,T]$$

Preuve :

$1 \Leftrightarrow 2$ Et $1 \Leftrightarrow 3$ immédiat

$3 \Leftrightarrow 4$

$$Ker\,(H^*) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (B^*G^*(s)\ z, u) = 0 \\ \forall s \in [0,T]\, et\ \forall\, u \in \upsilon \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0$$

D'où $$Ker(H^*) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (z, G(s)Bu) = 0 \\ \forall\ s \in [0\,,T]\, et\ \forall u \in \upsilon \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0$$

$4 \Rightarrow 5$

Si non,

$$\exists\, z \neq 0 \;\; , \exists\, s \in \left]0\,,T\right[\qquad tels \quad que:$$
$$< z\,, A^n\, G(s)\, B\,u > = 0 \quad \forall\, n \in N \quad et \quad \forall\, u \in \upsilon$$
$$mais \;\; < z\,, A^n G(s)\, B\,u > = \frac{d^n}{ds^n} < z\,, G(s)\; Bu >, \forall\, n \in N$$

De l'analyticité on déduit que:

$$< z, G(s)\; Bu > = 0\,, \forall\, u \in \upsilon \quad et \quad \forall\, t \in [0,T]$$

Et 4) n'est pas vérifiée

$5 \Rightarrow 4$

Si non, $\exists\, z \neq 0$ tel que

$$< z\,, G(s)\; Bu > = 0\,, \;\forall\; s \in [0,T] \;\; et \;\; \forall\; u \in \upsilon$$

$$\frac{d^n}{ds^n} < z\,, G(s)\; Bu > = < z\,, A^n\;\; G(s)\; Bu > = 0$$

Et donc $\bigcup\limits_{n} A^n G(s) Bu$ n’est pas partout dense dans E

2.2 Observabilité linéaire

Souvent l'état d'un système distribué ne peut pas être directement mesuré, la question qui se pose est celle de pouvoir reconstruire un tel état à partir des mesures effectuées, c'est le problème de l'observabilité mais, connaissant la dynamique du système et la commande il suffit de reconstruire l'état initial z (0).

Il est nécessaire de connaître l'état initial pour démarrer tout algorithme de contrôle sur le système, habituellement on laisse le système en évolution libre pendant un certain intervalle de temps $[0,T_m]$ pendant lequel ou effectue des mesures par l'intermédiaire de capteurs.

Ensuite on utilise ces mesures pour la reconstruction de z (0) si les informations sur le système sont fournies alors on a:

$$Y(t) = C\,G(t)\; z(0) = K(t) z(0)$$

Donc le problème de l'observabilité est celui de l'existence d'un opérateur P

$$P: \quad L^2\,(0,T;O) \rightarrow E \quad telque$$
$$PY = z(0)$$

L'opérateur:

$$K(t): \quad E \rightarrow L^2(0,T_m;\mathrm{O})$$

Est linéaire borné.

$$K^*: \quad L^2(0,T_m;\mathrm{O}) \rightarrow E^*$$

Et défini par:

$$K^* z = \int_0^{T_m} G * C * z(t)dt$$

Comme l'état initial n'est pas toujours observable et qu'on peut observer des états aussi proche de z_0 que l'on veut. On est amener à définir une observabilité plus faible que l'exacte observabilité.

2.2.1 Exacte et faible observabilité

Définition 1 **(Observabilité exacte)**

Le système (2-1) augmenté de l'équation (2-2) est dit exactement observable sur $[0,T_m]$ si :

$$E^* \subset \mathrm{Im}\,(K^*)$$

Définition 2 **(Observabilité faible)**

Le système (2-1) augmenté de l'équation (2-2) est dit faiblement observable sur $[0,T_m]$ si: $Ker(K) = \{0\}$

2.2.2 Caractérisation

Caractérisation de l'exacte observabilité

Le système (2-1) augmenté de l'équation (2-2) est exactement observable sur $[0,T_m]$ si:

$$\exists \gamma > 0 \; telque: |z_0|_E < \gamma \|K z_0\|_{L^2(0,T_m,O)} \quad pour\ tout\ z_0 \in E$$

Caractérisation de l'observabilité faible

On a l'équivalence entre:

1) (2-1), (2-2) faiblement observable
2) $\overline{\mathrm{Im}(K^*)} = \overline{\mathrm{Im}(K^*K)} = E^*$
3) $\overline{\bigcup_{0\le t\le T} \mathrm{Im}(G^*(t)\,C^*} = E^*$

Preuve:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) immédiat car:

$$\overline{\mathrm{Im}(K^*)} = \mathrm{Ker(K)}^{\perp}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (3)

$$Ker(K) = \{z \in E \,/ C\,G(t)\,z = 0\,,\quad 0 \le t \le T_m\} = 0$$

Mais :

$$C\,G(t)\,z = 0 \Rightarrow \text{Pour tout } z^* \in E^*$$

$$< z^*, C\,G(t)\,z > = < G^*(t)\,C^*z^*, z > = 0$$

$$\forall\, t \in [0, T_m], \quad G^*(t)\,C^*z^* \in Ker(K)^{\perp}$$

Donc

$$G^*(t)\,C^*z^* \in E^*$$

On considère l'opérateur auto adjoint:

$$N = K^*K: \quad E \to E^*$$

Alors on a la propriété suivante:

Reconstruction de l'état initial:

Le système (2-1) augmenté de l'équation (2-2) est exactement (respectivement faiblement) observable sur $[0, T_m]$ si l'opérateur N est défini positif (resp. positif)

Preuve:

Soit $N = K^* K$ défini positif alors:

$$\exists\, k > 0 \ \ telque : (N\, z, z) \ \geq \ k \parallel z \parallel^2 \quad pour\ tout\ z\ de\ E$$

$$\Leftrightarrow (\int_0^{T_m} G^*(t) C^* C\, G(t)\ Z\ dt\ ,\ Z) \geq k \left\|Z\right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{T_m} \ (CG(t)z\, , CG(t)z)\ dt \geq \ k\ z^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{T_m} \parallel K(t)\ z\ \parallel_0^2 dt \ = \ \parallel K\ z \parallel^2_{L^2(0,T_m,O)} \geq k \parallel z \parallel^2$$

et le système est exactement observable d'après la propriété de caractérisation

- Dans le cas ou N est positif

$$(N\, z,\ z) \geq 0\ ,\ \ \forall z \in E \quad et \ \ (N\, z, z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

Si $K\, z(0) \ \ alors:$

$$\int_0^{T_m} \left\|k(t)\, z(0)\right\|^2 dt \ = \int_0^{T_m} (C\, G(t)\, z(0)\ ,\ C\, G(t)\, z(0))\ dt = 0$$

Soit : $$(N \ \ z(0), z(0)) \ = \ 0 \ \ et \ \ donc \ \ \ z(0) = 0$$

C'est-à-dire le système est faiblement observable d'après la propriété de caractérisation

Dans les deux cas l'opérateur N^{-1} existe et on peut alors déterminer l'état z(0) :

$z(0) = (K^* K)^{-1} K^* y$

Soit encore:

$$z(0) = (\int_0^{T_m} G^*(t) C^* C\, G(t)\ \ dt)^{-1} \int_0^{T_m} G^*(t)\ C^* Y(t)\ dt$$

Et donc l'opérateur de reconstruction n'est autre que:

$$P = (K^* K)^{-1} K^* = K^+$$

Ou K^+ est appelé pseudo inverse de K

Proposition:

Si le système (2-1) augmenté de (2-2) est exactement observable sur $[0,T_m]$ alors:

$$P : L^2(0,T_m,O) \to E$$
$$Y \to z(0)$$

Est continue.

Preuve:

(2-1), (2-2) exactement observable

$$\Leftrightarrow \exists k > 0 \ telque : (K^*K\,z\,,\,z) \geq k\,\|z\|^2 \ pour\ tout\ z \in E$$

On sait que T est inversible et d'inverse continu si et seulement si

$$\exists m > 0 \ telque : m\,\|z\| \leq \|T\,z\|$$

Or $\qquad \|K^*K\,z\|.\|z\| \geq (K^*K\,z\,,\,z) \geq k\|z\|^2$

D'où: $\qquad \|K^*K\,z\| \geq k\|z\|$

La proposition précédente montre que pour un système exactement observable la détermination de z (0) à partir de la formule:

$$z(0) = (K^*K)^{-1}K^*Y$$

Est satisfaisante puisque z (0) dépend continûment des mesures effectuées. Une mesure affectée d'une faible erreur ne conduit pas à un état initial erroné.

PARTIE II :

CONTROLABILITE ET OBSERVABILITE NON LINEAIRES

Introduction

Dans les problèmes réels, souvent les modèles sont non linéaires. L'étude des notions de Contrôlabilité et d'observabilité de tels systèmes est beaucoup plus délicate s'il faut tenir compte des effets de la non linéarité.

Ces deux notions n'ont plus qu'un caractère local et le contrôle qui permet d'atteindre un état désiré n'est plus explicite

L'idée ici pour analyser ces systèmes et d'essayer de joindre les résultats de la théorie linéaire à certains théorèmes du point fixe

Considérons donc un modèle de base de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t) \\ x(0) = x_0 \\ y = h(x,u,t) \end{cases} \qquad (1)$$

L'approche est la suivante:

On choisit dans les deux cas un contrôle $\bar{u}$ et un état initial $\overline{x_0}$ pour résoudre le système et obtenir les solutions $\bar{x}$ et $\bar{y}$

Posons:

$$\begin{aligned} x_0 &= \overline{x_0} + z_0 \\ x &= \bar{x} + z \\ u &= \bar{u} + \hat{u} \\ y &= \bar{y} + \hat{y} \end{aligned}$$

En linéarisant autour de $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ on a:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = A(t)\, z(t) + B(t)\, \hat{u}(t) + N(z(t), \hat{u}(t), t) \\ z(0) = z_0 \\ \hat{y}(t) = C(t)\, z(t) + D(t)\, \hat{u}(t) + M(z(t), \hat{u}(t), t) \end{cases} \qquad (2)$$

Où A, B, C et D sont des opérateurs linéaires on suppose pour simplifier que A et B sont indépendants de t et qu'on a les hypothèses suivantes:

$(H_1): E, \upsilon, O$ Sont des espaces de Hilbert séparables désignant l'espace d'état, de contrôle et d'observation

$(H_2): \quad u \in L^2(0,T;E), \quad B \in L(\upsilon, E), \quad C \in L(E, O)$

(H_3) A, engendre un semi groupe fortement continu $(G(t))_{t\geq 0}$ sur E

2.3 CONTROLABILITE NON LINEAIRE :

Il faut rappeler que le but est d'amener l'état du système de x_0 $\;à\; x_d$ Dans ce cas $\overline{x_0}$ est supposé égal à x_0 et $\bar{u}$ est une première tentative de contrôle pour amener le système à x_d

Supposons donc que les hypothèses $(H_1)\,,(H_2)\,,(H_3)$ sont vérifiées et que $z_0 = 0$ et on s'intéresse à déterminer û tel que:

$$z(t) = z_{\hat{u}}(T) = x(T) - x_d = z_d$$

La première équation dans (2) est considérée au sens faible c'est-à-dire (3) :

$$z(t) = \int_o^t G(t-\tau)\; B\,\hat{u}\,(\tau)\,d\tau + \int_o^t G(t-\tau)\; N\,(z(\tau),\hat{u}(\tau),\tau)d\tau$$

$$si \quad z(T) = z_d \quad alors:$$

$$z_d = \int_o^T G(T-\tau)\; B\,\hat{u}\,(\tau)d\tau + \int_o^T G(T-\tau)\; N(z(\tau),\hat{u}(\tau),\tau)d\tau$$

$$On\ consider\acute{e}\ de\ nouveau\ l'op\acute{e}rateur\ H\ definit \quad par:$$

$$H: L^2\ (0,T,IR^p) \to E$$

$$\hat{u} \to H\hat{u} = \int_O^T G(T-\tau)\; B\,\hat{u}\,(\tau)\,d\tau$$

Et son pseudo inverse H^+

Si $$z_d - \int_O^T G(T-\tau)\; N\,(z(\tau),\hat{u}(\tau),\tau) \quad d\tau \;\in\; \mathrm{Im}(H)$$

On peut définir implicitement un contrôle u^* par:

$$u^* = H^+(z_d - \int_O^T G\,(T-\tau)\; N\;(z(\tau),u^*(\tau),\,\tau)\,d\tau)$$

Et l'équation (3) devient (4):

$$z(t) = \int_o^t G(t-\tau) B\,u^*(\tau)\,d\tau + \int_o^t G(t-\tau)\; N\,(z(\tau),u^*(\tau),\tau)\,d\tau$$

Si le couple (z,u^*) existe alors $z(T) = z_d$. Le problème de la contrôlabilité est donc ramené à celui de la détermination d'un point fixe pour (3) et (4) il faut tenir compte de certaines considérations techniques liées à ce problème:

- Il faut choisir l'espace auquel appartient (z,u^*), on le prendra égal à :

$C(0,T;E)\times L^2(0,T;\upsilon)$

- Il faut définir une topologie sur $\operatorname{Im}(H)$ pour laquelle cet espace est de Banach qu'on notera E alors: $H^+ \in L\,(E',\, L^2(0,T;\upsilon))$

On supposera aussi que:

$$z_d - \int_O^T G(T-\tau)\; N\;(z(\tau),u^*(\tau),\tau)\; d\tau \in E'$$

- En dimension infinie, la non linéarité N peut ne pas appliquer

$$C(0,T;E)\times L^2(0,T;\upsilon)\times[0,T] \quad dans \quad C(0,T;E)$$

Alors on supposera que N est à valeurs dans:

$L^r\;(0,T;E'') \quad avec \quad r\geq 1 \;\; et \;\; E\subset E''$

On supposera aussi que le semi- groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ vérifie :

$$\int_o^t G(t-\tau)\;\hat{z}(\tau)d\tau \in C(0,T;E)\; pour\; tout\; \hat{z}\; dans\; L^r(0,T;E'')$$

- B n'est pas nécessairement borné .Avec ces précisions on peut appliquer certains théorèmes du point fixe.

THEOREME:

Supposons qu'il existe des constantes $\alpha,\ \ \beta,\ \ \gamma$ telles que:

(a)- $$\left\|\int_0^t G(t-\tau)\; B\,u(\tau)d\tau\right\|_{C(0,T;E)} \leq \alpha\|u\|_{L^2(0,T;\upsilon)}$$

(b)- $$\left\|\int_0^T G(T-\tau)z(\tau)\; d\tau\right\|_E \leq \beta\|z\|_{L^r(0,T;E'')}$$

(c)- $$\left\|\int_0^t G(t-\tau)\; z(\tau)d\tau\right\|_{C(0,T;E)} \leq \gamma\|z\|_{L^r(0,T,E'')}$$

(d)- L'application:

$$C(0,T;E)\times L^2(0,T;\upsilon)\times[0,T]\rightarrow L^r(0,T;E'')$$
$$(z(.),u(.),.\,)\rightarrow N\;(z(.),u(.)\,,.)$$

Est une contraction au voisinage de l'origine alors il existe un réel d tel que pour tout $z_d \;:\; \|z_d\| < d$

(3) et (4) admettent un point fixe.

Pour la preuve du théorème, il faut utiliser le théorème du point fixe de Banach.

2.4. OBSERVABILITE NON LINEAIRE

L'observabilité consiste à déterminer l'état $x(t)$ du système à partir des entrées – sorties, l'approche est la suivante:

Dans ce cas et avec les mêmes notations précédentes On pose $\bar{u} = u$ c'est-à-dire $\hat{u} = 0$ et on se fixe $\bar{x}_0$, alors $\bar{x}$ sera en fait une première estimation de l'état x à déterminer.

On suppose que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) sont vérifiées, On s'intéresse à la construction de l'état $z(t)$:

$$z(t) = \int_o^t G(t-\tau)\ \beta\ \hat{u}(\tau) d\tau \quad + \quad \int_o^t G(t-\tau)\ N\ (z(\tau), \hat{u}(\tau), \tau)) d\tau \quad + \quad G(t)\, z_0$$

$$si \quad \hat{u} = 0 \quad alors \quad le \quad système \quad (2) \quad devient:$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = A(t)\ z(t) \quad + \quad N\,(z(t), t) \\ z(0) = z_0 \\ \hat{y}(t) = C(t)\ z(t) \quad + \quad M\,(z(t), t) \end{cases}$$

Sa solution vérifie :

$$z(t) = \ G(t) z_0 + \int_0^t G(t-\tau)\ N\ (z(t), \tau)\ d\tau$$

On va supposer que la partie linéaire (A, C) est exactement observable ce qui revient à dire (d'après la théorie linéaire) que $\exists \alpha > 0$ tel que pour tout x_0 dans E:

$$\begin{aligned} &\| \ Kx_0\ \|_y \geq \alpha\ \|\ x_0\ \|_E \\ &[(\ Kx_0)\ (t) = \ C\ G(t) x_0] \end{aligned} \qquad (*)$$

Si la condition est trop forte on peut agrandir l'espace d'observation ($\bar{y} \supset y$) l'état peut alors être mis sous la forme suivante:

$$z(t) = G(t)\ K^+ \left[\ \hat{y}\ (.) - M(z(.), .) - C \int_o^{.} G(. - \tau)\ N\ (z(\tau), \tau) d\tau \right] + \int_o^t G(t-\tau)\ N\ (z(\tau), \tau) d\tau \qquad (5)$$

$$K^+ = (\ K^* K\ )^{-1} K^*$$

Désigne le pseudo- inverse de K nous avons le résultat suivant:

THEOREME :

Supposons qu'il existe $\alpha,\ \beta,\ \ \gamma$ telles que :

(a) la relation (*) précédente est vérifiée (i.e) la partie linéaire est exactement observable

$$(b) \qquad \left\| C\int_0^{\cdot} G(.-\tau)\,\hat{z}\,(\tau)d\tau \right\| \ \leq\ \beta \left\| \hat{z} \right\|_{L^r(0,T;E^{''})}$$

$$(c) \qquad \left\| \int_0^{\cdot} G(.-\tau)\,\hat{z}\,(\tau)d\tau \right\|_{C(0,T;E')} \leq \gamma \left\| \hat{z} \right\|_{L^r(0,T;E^{''})}$$

(d)- Les applications:

$$\begin{array}{l} C(0,T;E)\times[0,T]\rightarrow L^r(0,T;E^{''}) \\ \qquad (z(.),.)\rightarrow N\ (z(.),.) \\ \quad et \\ C(0,T;E)\times[0,T]\rightarrow Y \\ \qquad (z(.),.)\rightarrow M\ (z(.),.) \end{array}$$

Sont contractantes au voisinage de l'origine alors il existe un réel d tel que pour tout $\hat{y}$ vérifiant: $\quad \left\|\hat{y}\right\|_{\bar{Y}} < d$

(5) admet un point fixe unique solution de (2)

Chapitre 3

Chapitre 3

METHODE DE DECOMPOSITION

Introduction

Ces quelque dernières années, la méthode de décomposition d'Adomian (M, D, A) a été appliquée à des classes très larges de problèmes dans de nombreux domaines, comme les mathématiques, la physique la biologie, etc.……

Cette méthode permet de résoudre les équations fonctionnelles de différents types et vient s'ajouter aux autres méthodes existantes. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré, la solution est obtenue sons forme de séries rapidement convergentes. Beau coup d'auteurs ont donné un grand intérêt à l'application de la méthode de décomposition à la résolution de problèmes aussi bien déterministes que stochastiques.

Dans ce chapitre, je vais exposer les grands principes de cette méthode sur un problème non linéaire, je proposerais ensuite deux méthodes pratiques de calcul de polynômes d'Adomian après je parlerais de la convergence de la méthode et enfin je montrerais concrètement l’efficacité et la précision de la méthode en considérant un problème parabolique non linéaire avec exemple numérique.

3.1. Problème considéré et grands principes de la méthode:

Considérons le problème suivant:

$$F(z) = g$$

Où F représente un opérateur différentiel non linéaire incluant des termes linéaires et des termes non linéaires. La partie linéaire est décomposée en L+R où L est l'opérateur différentiel d'ordre le plus élevé et R la partie restante

On suppose donc que le problème non linéaire s'écrit sous la forme:

$$L\,z + R\,z + N\,z = g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Où L : est inversible

R : Un opérateur différentiel linéaire

N : représente les termes non linéaires

g : le terme source.

L'équation (1) peut s'écrire:

$$L\,z = g - R\,z - N\,z$$

Comme L est inversible on a aussi:

$$L^{-1} L\,z = L^{-1}g - L^{-1}Rz - L^{-1} N\,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Par exemple si L est un opérateur différentiel d'ordre 1 alors:

$$L^{-1}Lz = z - a$$

L'équation (2) s'écrit alors:

$$z = a + L^{-1} g - L^{-1} R\,z - L^{-1} N\,z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

On va chercher z sous la forme de séries:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Où $z_0 = a + L^{-1}g \;\; et \;\; (z_n\,,\, n > 0)$ est à déterminer. On décompose le terme non linéaire, N sous forme de séries de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian :

$$N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ces polynômes A_n sont obtenus en introduisant un paramètre λ et en écrivant:

$$z(\lambda) = \sum_{K=0}^{\infty} \lambda^k z_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$N(z(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De (6) et (7) en déduit:

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}(N(z(\lambda)))\right]_{\lambda=0}$$

Remarque:

Les polynômes d'Adomian peuvent être calculés par la formule:

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(v_n(\lambda))\right]_{\lambda=0} \quad où \quad v_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i z_i$$

Cette formule est valable pour tous les types de non linéarité. On substitue les équations (4) et (5) dans (3) on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 - L^{-1}R \sum_{K=0}^{\infty} z_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Pour déterminer les z_n on peut utiliser le procédé itératif suivant:

$$\begin{cases} z_0 = a + L^{-1}g \\ z_1 = -L^{-1}R\, z_0 - L^{-1}A_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ z_{n+1} = -L^{-1}R\, z_n - L^{-1}A_n \end{cases}$$

Il faut remarquer qu'en pratique la série $\sum_{1=0}^{\infty} z_n$ converge rapidement, donc la somme partiel des n premiers termes $\sum_{i=0}^{n-1} z_i$ peut servir de solution.

3.2. Quelques méthodes de calcul des polynômes d'Adomian

Une étape importante dans la méthode de décomposition est le calcul des polynômes d'Adomian je propose ci- dessous quelques méthodes pratiques pour la détermination de ces polynômes avec des exemples

Méthode 1 :

On a : $N(z(\lambda)) = \sum_{0}^{\infty} \lambda^k A_k$

D'autre part : $\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} N(z(\lambda))\right]_{\lambda=0} = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} N(\sum_{0}^{n} \lambda^k z_k)\Big[_{\lambda=0}$

Pour obtenir les A_n on dérive à l'ordre n les deux membres de la première égalité on obtient

$$\frac{\partial^n N}{\partial \lambda^n}\left(\sum_0^n \lambda^k z_k\right) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left(\sum_0^n \lambda^k A_k\right)_{\lambda=0}$$

Si n=0 on détermine A_0

Si n=1 on détermine A_1.........etc.

Exemple:

$$N(z) = zz_x$$

$$z(\lambda) = z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_{2x} + ...)$$

$$\sum \lambda^k A_k = (z_0 + \lambda z_1 + ...)(z_{0x} + \lambda z_{1x} + \lambda^2 z_{2x} + ...)$$

$$Si \quad \lambda = 0: \quad A_0 = z_0 z_{0x}$$

derivée première :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(A_0 + \lambda A_1)\Big]_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(z_0 + \lambda z_1)(z_{0x} + \lambda z_{1x})\Big]_{\lambda=0}$$

$$A_1 = z_1 z_{0x} + z_0 z_{1x}$$

derivée Seconde :

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2)(z_{0x} + \lambda z_{1x} + \lambda^2 z_{2x})\Big|_{\lambda=0}$$

$$2A_2 = 2(z_0 z_{2x} + z_1 z_{1x} + z_2 z_{0x})$$

....

Méthode 2 :

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on utilise les formules:

$$z_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \lambda^n \qquad , \qquad N_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

On développe $N_\lambda(z)$ sous forme de puissances de λ, par comparaison, A_n est donné par le coefficient de λ^n.

Exemple :

$$N(z) = zz_x$$

On pose: $z_\lambda = \sum_0^\infty z_n \lambda^n, \qquad z_{\lambda x} = \sum_0^\infty z_{nx} \lambda^n$

Après substitution dans N (z) on a :

$$N_\lambda(z) = (z_0 + \lambda z_1 + ...)(z_{0x} + \lambda z_{1x} + ...)$$

On rassemble tous les termes du même degré de λ ou obtient:

$$N_\lambda(z) = z_0 z_{0x} + (z_1 z_{0x} + z_0 z_{1x})\lambda + (z_2 z_{0x} + z_1 z_{1x} + z_0 z_{2x})\lambda^2 + ...$$

Les polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$A_0 = z_0 z_{0x,}$$
$$A_1 = z_1 z_{0x} + z_0 z_{1x}$$
$$A_2 = z_2 z_{0x} + z_1 z_{1x} + z_0 z_{2x}$$

Les autres A_n se calculent de la même façon

Remarque:

Si on a par exemple le système suivant:

$$\begin{cases} L_1 z_1 + R_1(z_1,....z_n) + N_1(z_1,....z_n) = f_1 \\ L_2 z_2 + R_2(z_1,...z_n) + N_2(z_1,...z_n) = f_2 \\ .... \\ L_n z_n + R_n(z_1,....., z_n) + N_n(z_1,...z_n) = f_n \end{cases}$$

L'opérateur non linéaire est de la forme $N(z_1,....z_n)$

Dans ce cas les polynômes d'Adomian sont donnés par:

$$A_{in} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N_i(z_1(\lambda),..., z_n(\lambda))\right]_{\lambda=0}$$

Avec $z_i(\lambda) = \sum_0^n \lambda^j z_{ij} \quad , \ i = 1,........n$

Les calculs peuvent être longs et compliqués Certaines auteurs ont proposé des algorithmes permettant de simplifier les calcules des A_{in}

Voir par exemple les travaux de Huifeng Gu et Zhi-bin Li (universités de la République de Chine).

3.3 Résultat de convergence:

Considérons le problème sous la forme:

$$z \ + \ N(z) \ = \ g$$

On sait que la méthode d'Adomian est équivalente à déterminer la suite (S_n) telle que :

$$S_n = z_1 + z_2 + ...z_n$$

Par le schéma suivant:

$$S_{n+1} = N\ (z_0 + S_n)$$
$$S_0 = 0$$

Et l'équation :

$$S = N\ (z_0 + S)$$

Cette équation peut être résolue à l'aide d'un théorème du point fixe, On détermine alors des conditions sur l'opérateur N suffisantes pour la convergence

Ordre de convergence

On suppose que la suite (S_n) converge vers S

Définition :

S’il existe deux constantes réelles positives k et c telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{S_{n+1} - S}{(S_n - S)^k} \right| = c$$

Alors l'ordre de convergence de (S_n) et égale à k

Théorème :

On suppose que

$$N \in C^k,\ si \quad N^{(n)}(z_0 + S) = 0$$
$$n = 1, 2, ...,\ k-1\ et\ \ N^{(k)}(z_0 + s) \neq 0$$

Alors la suite (S_n) et d'ordre k.

Preuve:

On écrit $N(z+S_n)$ sous la forme:

$$N(z_0+S_n)=N(z_0+S)\cdots+\frac{N'(z_0+S)}{1!}(S_n-S)+.....+\frac{N^{(n)}(z_0+S)}{n!}(S_n-S)^n+......$$

On déduit que:

$$S_{n+1}-S=N'(z_0+S)(S_n-S)+..........+\frac{N^{(n)}(z_0+S)}{n!}(S_n-S)^n+....$$

On utilisant l'hypothèse du théorème.

$$S_{n+1}-S=\frac{N^{(k)}(z_0+S)}{k!}(S_n-S)^k+\frac{N^{(k+1)}(z_0+S)}{(k+1)!}(S_n-S)^{k+1}+.....$$

$$\frac{S_{n+1}-S}{(S_n-S)^k}=\frac{N^{(k)}(z_0+S)}{k!}+\frac{N^{(k+1)}(z_0+s)}{(k+1)!}(S_n-S)+........$$

En passant à la limite on a le résultat

3.4 Application

Dans cette section on va appliquer la méthode de décomposition à la résolution d'une équation parabolique non linéaire avec condition initiale.

3.4.1 Problème considéré :

Concéderons donc le problème suivant:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+N(z)+f(x,t)............(1)\\ z(x,0)=g(x)................................(2)\end{array}\right\}$$

$$(x,t)\in[a,b]\times[0,T]$$

Ou veut trouver la solution vérifiant (1) et (2), la méthode de décomposition consiste à écrire la solution sous forme de séries infinies:

$$z(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}z_n(x,t).......................(3)$$

Et de décomposer N sous la forme

$$N(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z_0,z_1,....z_n)...........(4)$$

Où les A_n sont les polynômes d'Adomian donnés par:

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_k \lambda^k z_k)\right]_{\lambda=0} \text{...........(5)}$$

L'équation (1) peut s'écrire:

$$L_t z = L_{xx} z + N(z) + f(x,t) \text{.............(6)}$$

$$où \quad L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad et \quad L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

L'inverse de l'opérateur L_t est $L_t^{-1} = \int_0^t (.)dt$

De l'équation (6) on déduit :

$$z(x,t) = z(x,0) + L_t^{-1}(L_{xx} z) + L_t^{-1}(N(z)) + L_t^{-1}(f(x,t))$$

En utilisant les équations (3) et (4) on aura:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x,t) = z(x,0) + L_t^{-1}(f(x,t)) + L_t^{-1}(\sum_0^{\infty} z_{nxx}) + L_t^{-1}(\sum_0^{\infty} A_n)$$

Par suite on détermine les z_n par le processus itératif suivant:

$$\begin{cases} z_0(x,t) = z(x,0) + L_t^{-1}(f(x,t)) \\ z_{n+1}(x,t) = L_t^{-1}(z_{nxx} + A_n), \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \text{................(9)}$$

En pratique on ne peut pas calculer tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x,t)$, mais on peut approcher la solution par la série tronquée :

$$z_M(x,t) = \sum_{n=0}^{M} z_n(x,t)$$

$$avec \quad \lim M \to \infty, \; z_M(x,t) = z(x,t)$$

<u>3.4.2 Exemple numérique</u>:

Dans cette partie On va appliquer la méthode de décomposition à l'équation (1) avec la condition initiale (2) sur un exemple numérique :

Considérons le problème suivant où le terme source est non linéaire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{-z} + e^{-2z} \\ z(x,0) = \ln(x+2) \end{cases} \qquad (x,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

Dans cet exemple:

$$f(x,t)=0,\quad g(x)=\ln(x+2),\quad N(z)=e^{-z}+e^{-2z}$$

Les polynômes d'Adomian sont donnés par:

$$A_0=e^{-z_0}+e^{-2z_0}$$
$$A_1=z_1(-e^{-z_0}-2e^{-2z_0})$$
$$A_2=(-z_2+\frac{1}{2}z_1{}^2)e^{-z_0}+(-2z_2+2z_1{}^2)e^{-2z_0}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Les autres polynômes se calculent de la même façon.

En utilisant les formules (9) on a:

$$z_0=\ln(x+2)$$
$$z_1=\frac{t}{x+2}$$
$$z_2=\frac{-t^2}{2(x+2)^2}$$
$$z_3=\frac{t^3}{3(x+2)^3}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n=\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n(x+2)^n}$$

De l'équation (3) on déduit :

$$\begin{aligned} z(x,t) &= \ln(x+2)+\frac{t}{x+2}-\frac{t^2}{2(x+2)^2}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n(x+2)^n}+\dots \\ &= \ln(x+2)+\ln(\frac{t}{x+2}+1) \\ &= \ln(x+t+2) \end{aligned}$$

On peut vérifier la précision de la méthode en calculant les M premiers termes de la solution et par comparaison avec la solution exacte on a reporté l'erreur absolue dans un tableau.

L'erreur absolue est donnée par:

$$\left| z(x_i,t_k)-z_M(x_i,t_k) \right|$$

Où z est la solution exacte et $z_M=\sum_0^M z_n(x,t)$.

M=5

x/t	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,2	8.7288E-8	5.2430E-6	5.5632E-5	2.9414E-4	0.0011
0.4	5.2100E-8	3.1268E-6	3.3532E-5	1.7801E-4	6.436E-4
0.6	302396E-8	1.9530E-6	2.1027E-5	1.1202E-4	4.0630E-4
0.8	2.0859E-8	1.2624E-6	1.3640E-5	7.2890E-5	2.6512E-4
1	1.3842E-8	8.4059E-7	9.1099E-6	4.8819E-5	1.7801E-4

M=10

x/t	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.2	2.9388E-13	5.5942E-10	4.5169E-8	1.0028E-6	1.0989E-5
0.4	1.1369E-13	2.1740E-10	1.7638E-8	3.9323E-7	4.3255E-6
0.6	4.6851E-14	9.1057E-11	7.4176E-9	1.6601E-7	1.8321E-6
0.8	2.1094E-14	4.0656E-11	3.3245E-9	7.4639E-8	8.2616E-7
1	9.9920E-15	1.9182E-11	1.5736E-9	3.5433E-8	3.9323E-7

On remarque que pour M=5, M=10, c'est-à-dire en calculant (5), (10) termes de la série, On a obtenu une bonne approximation de la solution.

Si on veut augmenter la précision on calcule un plus grand nombre de termes.

3.5 Application de la méthode de décomposition à la théorie du contrôle

Dans cette section on va développer une approche nouvelle pour le contrôle de systèmes en combinant deux méthodes:

La méthode de décomposition et la méthode Alienor.

L'idée consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème classique d'optimisation en utilisant la méthode d'Adomian puis de résoudre ce problème par la méthode Alienor.

3.5.1 Formulation du problème:

On considère le phénomène d'évolution décrit par le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = f(t,z,u) \\ z(0) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

Où $z(t) \in R^n$ est le vecteur d'état

$u(t) \in R^p$ est le vecteur contrôle

α : Un vecteur donné.

On supposera que le contrôle $u(t)$ est admissible

On suppose que pour contrôler ce système on a à minimiser le critère suivant:

$$J = \int_0^T g(t,z,u)\, dt \qquad (2)$$

Où z et u vérifient l'équation (1)

g est continue et $[0,T]$ est l'intervalle d'observation. La résolution de problèmes de contrôle se fait avec les méthodes classiques comme par exemple le principe du maximum de Pontryagin, ou la programmation dynamique mais l'implémentation de ces méthodes est souvent difficile

3.5.2 Méthode Alienor:

Cette méthode a été inventée par y. Cherruault au début des années 1980 Elle consiste à ramener une fonction multi variables en une fonction d'une seule variable à l'aide d'une transformation réductrice.

Cette transformation est basée sur l'approximation de R^n par des courbes α-denses.

<u>Définition</u>

Une courbe définie par:

$$h: \quad [0, M] \quad \rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$$

Est dite α - dense dans $\prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$ si:

$$\forall\, w \in \prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i], \quad \exists\, \theta \in [0, M] \quad \textit{tel que}:$$
$$d(w, h(\theta)) \;\le\; \alpha$$

Où d : est la distance euclidienne dans R^n

$M \ et\ \alpha$: Des constantes positives

α Est appelé paramètre de densification

<u>Définition</u>

Un sous-espace $X \ de\ R^n$ est dit α - dense dans R^n si:

$$\forall\, M \in R^n , \quad \exists\, M' \in X : \ d(M, M') \ \le \quad \alpha$$

<u>Exemple</u> (simple)

La spirale d'Archimède $(r = a\theta)\ est\ \pi a - dense\ dans\ R^2$

$$\text{Soit} \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \qquad \textit{en coordonnées polaires}$$

On obtient:
$$\begin{cases} x = a\,\theta \cos\theta = h_1\ (\theta) \\ y = a\,\theta \sin\theta = h_2\ (\theta) \end{cases}$$

Tout point de R^2 est approché par un point de la courbe $h(\theta) \ = \ (h_1(\theta), h_2\ (\theta))$

Soit J une fonction continue sur R^n vérifiant la condition de convexité globale:

$$\lim_{\|z\|^2 \to \infty} J\ (z_1, ..., z_n) \ = \ \infty$$

Et soit à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$Min \ \ J\ (z_1, ..., z_n) \qquad\qquad (3)$$

On construit une courbe paramétré : $h(\theta) = (h(\theta_1), ...h(\theta_n)) \quad , \alpha - dense:$

$$z_i \ = \ h_i\ (\theta) \quad , \quad i \ = 1.....n$$

Le problème précédent devient:

$$\underset{\theta}{Min}\ J^*\ (\theta) = \underset{\theta}{Min}\ J\ (h_1(\theta),...,h_n(\theta)) \qquad (4)$$

Où $\theta \in [0,\theta_{\max}]$ $\theta_{\max}$ est la plus grande valeur que peut prendre θ.

Y. Cherruault a montré que toute solution de l'équation (3) peut être approchée par une solution correspondante de l'équation (4)

$J^*(\theta)$, est définie continue sur un compact, donc elle possède au moins un minimum et donc les minima de J pourront être approchés par les minima de $J^*(\theta)$

Ces derniers peuvent être calculés en utilisant un opérateur qui préserve l'optimisation (O. P .O).

3.5.3 Nouvelle approche utilisant la méthode Adomian \ Alienor

Soit le problème de contrôle optimal donné par:

$$\underset{u}{Min}\ \int_0^T G\ (z,u,t)\ dt$$

Avec les contraintes:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = f_i\ (z,u,t) \\ z_i(0) = \alpha_i \end{cases} \qquad (5)$$

Et $\qquad \|u\|_{\min} \leq \|u\| \leq \|u\|_{\max}$

Le système (5) peut alors être résolu par la méthode d'Adomian après passage à la forme canonique

La solution obtenue s'écrit sous forme de séries:

$$z_i = \sum_{j=1}^{q} v_j^{\ i}\ (u_1,....,u_p)\ , \quad i = 1,...n \qquad (6)$$

$$où \quad v_j^{\ i}\ , \quad depend\ \exp licitement\ de\ u_1,....u_p$$

On prend alors $u_i\ (t)$ sous la forme suivante:

$$u_i\ (t) = \sum_{r=1}^{m}\ c_r^{\ i}\ \theta_i\ (t)\ , \qquad i = 1,...p$$

Où les $\theta_i\,(t)$ sont des fonctions connues du type (polynômes, fractions, fonctions splines, exponentielles, etc.…) les solutions z_i de l'équation (6) dépendent explicitement de c_r^i de façon précise:

$$z_i\;(t) = \sum_{j=1}^{q} v_j^i\,(c_r^i\,,t)$$

Utilisons les expressions de z_i et u_i dans le critère on obtient une fonction qui dépend explicitement des paramètres c_r^i.

$$\underset{c_r^i}{Min} \int_0^T g\,(\sum_{j=1}^{q} v_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^{q} v_j^n, u_1,\ldots,u_p)\;dt \;= \underset{c_r^i}{Min}\quad J\,(c_r^i)$$

C'est un problème d'optimisation classique .Ce problème est ensuite résolu directement en utilisant la méthode Alienor.

Une transformation réductrice peut être utilisée.

Soit une transformation $\alpha - dense$: (h_r^i) $\quad i = 1,\ldots.p\;,\quad r = 1,\ldots\ldots.n$

On pose : $\quad C_r^i \;=\; h_r^i(\theta)$ pour tout r, i , et la fonctionnelle J devient alors :

$$J^*(\theta) \;=\; J\;(h_r^i(\theta))$$

Fonction d'une unique variable θ sur laquelle on applique les techniques d'optimisations dans R

Application:

Il est clair que cette nouvelle approche peut être utilisée efficacement pour résoudre différents problèmes de contrôle dans beaucoup de domaines en Biologie par exemple on pourra traiter les problèmes liés au traitement optimal du VIH/ SIDA, du cancer, du paludisme, etc.…

3.6. Application à un modèle du V.I.H \ SIDA :

Ce modèle a été proposé par Novak et Bangham (1996).Il est constitué d'un système de quatre équations différentielles non linéaires décrivant l'interaction entre le système immunitaire et le (V.I.H):

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda - d\,z_1 - \beta\, z_1 z_3\\ \dot{z}_2 &= \beta\, z_1 z_3 - a\,z_2 - p\,z_2 z_4\\ \dot{z}_3 &= k\,z_2 - v\,z_3\\ \dot{z}_4 &= c\,z_2 z_4 - b\,z_4\end{aligned}$$

Les variables : $z_1(t)\,, z_2(t)\,, z_3(t)\,, z_4(t),$ représentent respectivement :

— -Le nombre de cellules saines

-Le nombre de cellules infectées

-La charge virale

-L'antigène cytotoxique CTL

Les paramètres du système : $\lambda,\ d,\ a,\ \beta,\ p,\ b,\ c,\ v,\ k,$ sont respectivement :

-Le taux de production de cellules saines

-Le taux de mortalité de cellules saines

-Le taux de mortalité naturelle de cellules infectées

-Le taux de mortalité de cellules saines par le virus

-Le taux de mortalité de cellules infectées

-Le taux de déclin naturel de CTL

-Le taux de production de CTL

-Le taux de déclin naturel du virus

-Le taux de production du virus

Dans la première équation du système le taux de production de cellules saines diminue de $(-\beta\, x_1 x_3)$ du fait de l'interaction du virus avec les cellules saines.

On prendra donc : $\beta(t) = \beta\,(1 - u(t)) \quad avec \qquad 0 \le u(t) \le 1$

On notera que u(t) = 1 représente la thérapie maximale et que u(t) = 0 représente l'absence de traitement

La fonctionnelle à minimiser est :

$$J = z_3^{\,2}(t) + B \int_0^T u^2(t)\,dt$$

Qui exprime qu'on veut faire diminuer les effets secondaires du traitement ainsi que la charge virale. B représente un paramètre qui dépend d'autres considérations, T est le temps final de la thérapie.

Résultats numériques :

Pour la simulation numérique on choisit :

$$z_1(0) = 1.0, \quad z_2(0) = 0.2, \quad z_3(0) = 0.8, \quad z_4(0) = 0.03$$
$$a = 0.8, \quad b = 0.01, \quad c = 0.1, \quad d = 1.0$$
$$v = 0.01, \quad p = 0.05, \quad \lambda = 1.0, \quad \beta = 1.0$$

Le contrôle est choisit de la forme : $u(t) = \rho \ e^{-kt}, \quad 0 \leq u(t) \leq 1$

On reporte le contrôle dans le système considéré qu'il faut résoudre par la méthode de décomposition d'Adomian, la solution est reportée dans la fonctionnelle objective et minimisée par la méthode Alienor en utilisant une transformation réductrice adéquate.

La simulation a donné des résultats comparables à ceux obtenus par d'autres méthodes classiques.

Chapitre 4

Chapitre 4

LES SENTINELLES

Introduction :

La modélisation de beaucoup de phénomènes conduit à des systèmes spatiotemporels à données incomplètes. C'est le cas par exemple dans les problèmes environnementaux.

J'entends par données incomplètes, les conditions initiales, le second membre et éventuellement les conditions aux limites.

L'un des objectifs dans l'étude de ces problèmes est d'obtenir des informations sur les termes polluants présents dans l'équation d'état du système indépendamment des termes manquants.

Il y a pour cela une méthode que je vais introduire dans ce chapitre, c'est la méthode des sentinelles développée par J. L. LIONS.

L'idée est d'observer la solution par exemple dans une région du domaine spatial pendant un intervalle de temps puis en utilisant une moyenne de ces observations, on construit des fonctionnelles qui nous permettent d'obtenir des informations sur les termes polluants indépendamment des termes manquants.

Ces fonctionnelles s'appellent sentinelles. Donc la théorie des sentinelles est très importante pour les applications.

4.1. Problème à considérer et notations :

On va utiliser les notations habituelles suivantes:

- Ω désignera un ouvert de R^n $,n\geq 1$, borné, régulier de frontière $\partial\Omega$
- $[0,T]$ $,T>0$ un intervalle de temps
- $Q=]0,T[\times\Omega$, $\Sigma=]0,T[\times\partial\Omega$
- A désigne un opérateur différentiel elliptique du second ordre.

- A^* désignera l'opérateur adjoint de A.

Le système à Considérer est décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + Az + F(z) = f(x,t) & dans \quad Q \\ z(0) = z^0 & dans \quad \Omega \\ z(x,t) = 0 & sur \quad \Sigma \end{cases} \qquad (1)$$

$z(t,x)$ Est notée z pour simplifier l'écriture, on supposera que

$$F: \quad \Re \to \Re \qquad est\ de\ classe\ C^1$$

4.2. Construction de sentinelles:

Dans cette section on va supposer donc que le système s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x;\lambda,\tau) + A\,z(t,x,\lambda,\tau) + F(z(t,x,\lambda,\tau)) = f(x,t) + \lambda \overline{f}(x,t) & dans\ Q \\ z(0,x,\lambda,\tau) = z^0(x) + \tau \overline{z}(x) & dans\ \Omega \\ z(t,x,\lambda,\tau) = 0 & sur\ \Sigma \end{cases} \qquad (2)$$

f et z^0 Sont des fonctions connues

$\overline{f}$ et $\overline{z}$ Sont inconnues

λ et τ Des petits paramètres inconnus : $\lambda << 1, \quad \tau << 1$

$\lambda \overline{f}$ et $\tau \overline{z}$ Sont appelés respectivement terme polluant et terme manquant.

On suppose que ce système possède une solution unique notée par :

$z(\lambda,\tau) = z(t,x,\lambda,\tau)$ Dans un espace convenable

Soit $O \subset \Omega$ l'observatoire et z_m l'observation faite sur O

La question suivante se pose:

Comment estimer le terme $\lambda \overline{f}$ indépendamment du terme $\tau \overline{z}$

Une solution consiste à utiliser la méthode des moindres carrés: on considère les inconnus $\lambda \bar{f}$ *et* $\tau \bar{z}$ comme deux variables de contrôle et on cherche a amener l'état $z(t,x,\lambda,\tau)$ vers un état proche de z_m.

Cela revient donc a un problème de contrôle optimal.

Il existe une autre méthode dite des sentinelles c'est la suivante:

Les Sentinelles :

Soit $h_0 \in L^2((0,T)\times O)$

On définit la fonctionnelle suivante:

$$S(\lambda,\tau) = \iint_{(0,T)\times O} (h_0 + \varphi)\, z(t,x,\lambda,\tau)\, dx\, dt$$

où $\varphi \in L^2((0,T)\times O)$

Définition:

La fonctionnelle $S(\lambda,\tau)$ est dite sentinelle définie par h_0 si les conditions suivantes sont vérifiées:

1- il existe :

$$u \in L^2((0,T)\times O) \quad \textit{tel que}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

$$\forall\ \bar{z} \in L^2(\Omega) \quad \textit{dont le support est dans}\quad O$$

2- $$\| u \|_{L^2((0,T)\times O)} = \min \| \varphi \|_{L^2((0,T)\times O)} \quad \varphi : \ \textit{verifiant l'equation}\ (1)$$

Construction de la sentinelle:

Voyons maintenant la construction de la sentinelle:

Soit : $\hat{z}(t,x,\lambda,\tau)$ (*notée* $\hat{z}$ *pour simplifier*) la solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x,\lambda,\tau) + Az(t,x,\lambda,\tau) + F(z(t,x,\lambda,\tau)) = f(x,t) & \textit{dans} Q \\ z(0,x,\lambda,\tau) = z^0 & \textit{dans}\ \Omega \\ z(t,x,\lambda,\tau) = 0 & \textit{sur}\ \Sigma \end{cases} \qquad (4)$$

La dérivée du système (4) par rapport au paramètre λ est donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_\lambda}{\partial t} + A\, z_\lambda + F'(z_0)\, z_\lambda = \overline{f} & \text{dans} \quad Q \\ z_\lambda(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ z_\lambda(x,t,\lambda,\tau) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \qquad (5)$$

Et la dérivée du système (4) par rapport au paramètre τ est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_\tau}{\partial t} + A z_\tau + F'(z_0)\, z_\tau = 0 & \text{dans} \;\; Q \\ z_\tau(0) = 0 & \text{dans} \;\; \Omega \\ z_\tau(t,x,\lambda,\tau) = 0 & \text{sur} \;\; \Sigma \end{cases} \qquad (6)$$

Les systèmes (5) et (6) sont résolubles, le système adjoint associé à (6) est défini par:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q + F'(z_0)\, q = (h_0 + \varphi)\, X\big|_O & \text{dans} \quad Q \\ q(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ q(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \end{cases} \qquad (7)$$

Le problème (7) est résoluble, la solution q dépendra de φ.

En multipliant la première équation de (7) par z_τ et en intégrant par partie sur Q on obtient:

$$\int_Q (h_0 + \varphi)\, z_\tau(t,x,\lambda,\tau)\, dx\, dt = \int_\Omega q(0)\, \bar{z}\, dx$$

D’autre part la condition (3) est équivalente à :

$$\int_Q (h_0 + \varphi)\, z_\tau\, dx\, dt = 0 \qquad (8)$$

$$donc \qquad (8) \quad \Leftrightarrow \quad q(0) = 0$$

(i .e) un problème de contrôlabilité.

4.3. <u>Estimation des termes polluants :</u>

Si z_m est l'état du système mesuré sur l'observatoire O pendant l'intervalle de temps $]0,T[$ alors la sentinelle mesurée est :

$$S(\lambda,\tau) = \iint_{(0,T)\times O} (h_0 + \varphi)\, z_m(t,x,\lambda,\tau)\, dx\, dt$$

Théorème :

Si le contrôle φ est connu alors on a l'estimation suivante du terme polluant :

$$\lambda \iint_{(0,T)\times O} q\,\overline{f}\; dx\, dt = \iint_{(0,T)\times O} (h_0+\varphi)\,(z_m\,(x,t) - \hat{z}\,(x,t)\,)\; dx\, dt$$

Preuve :

On sait que:

$$S\,(\lambda,\tau) \;\approx\; S(0,0) + \lambda\,\frac{\partial S}{\partial \lambda}\,(0,0) + \tau\,\frac{\partial S}{\partial \tau}\,(0,0)$$

$$donc \qquad \lambda \;\; \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,(0,0) \;\approx\; S(\lambda,\tau) - S(0,0)$$

$$où \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\,S\,(\lambda,\tau)_{\lambda=0,\tau=0} \;=\; \iint_{(0,T)\times O} (h_0+\varphi)\; z_\lambda\;\, dx\, dt$$

$$et \quad S(0,0) \;=\; \iint_{(0,T)\times O} (h_0+\varphi)\;\hat{z}\;(t,x)\; dx\, dt$$

$$d'où \quad \lambda\,\frac{\partial S}{\partial \lambda}\,(0,0) \;\approx\; \int_Q (h_0+\varphi)\,(z_m - \hat{z})\; dx\, dt$$

$$mais \qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,(0,0) \;\;=\;\; \int_Q q\;\overline{f}\;\, dx\, dt$$

$$d'où \qquad \lambda \iint_{(0,T)\times O} q\;\overline{f}\;\, dx\, dt \;=\; \iint_{(0,T)\times O} (h_0+\varphi)\,(z_m - \hat{z})\; dx\, dt.$$

Bibliographie

[1] G. ADOMIAN, Stochastic Systems, Academic Press, New York (1983).

[2] A. AYADI, M. DJEBARNI, Pollution Terms Estimation in Parabolic System With incomplete Data, Far East Journal of Mathematical Sciences (2005).

[3] PO - FANG HSIEH, YASUTAKA SIBUYA, Basic Theory of Ordinary Differential Equations, Springer Verlag.

[4] SHOSHICHI KOBAYASHI, Hyperbolic Complex Spaces, Springer Verlag(1998).

[5] LIAO XIAO - XIN, Absolute Stability of Nonlinear Control Systems, Kluwer Academic Publishers (1993).

[6] KOSAKU YOSIDA, Functional Analysis, Springer Verlag (1995).

[7] ZHEN, Numerical Bifurcation Analysis for Reaction Diffusion Equations, Springer Berlin (2000).

[8] A. PAZY, Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag (1983).

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à la méthode de décomposition d'Adomian et à son utilisation à la résolution de problèmes non linéaires.

Après avoir exposé les grands principes de la méthode, on montre ici comment on peut l'appliquer pour résoudre un problème parabolique non linéaire et on illustre par un exemple numérique l'efficacité de cette puissante technique qui donne la solution sous forme de séries rapidement convergentes.

On a proposé deux méthodes simples pour le calcul des polynômes d'Adomian

On montre aussi comment cette méthode combinée à la méthode Aliénor pérmet de résoudre des problèmes de control optimal.

On s'intéresse enfin à la construction de sentinelles qui nous permettent d'estimer les termes polluants indépendamment des termes manquants et ceci dans les systèmes à donnés incomplètes

Mots clefs : problème parabolique non linéaire, contrôlabilité, méthode de décomposition, polynômes d'Adomian,théorie des sentinelles

ABSTRACT

This work deals with a study of Adomian decomposition method and its applications to solve nonlinear problems.

Here we expose principles of the method and we show how to use it to solve a nonlinear parabolic problem, also we see with example the efficiency of this power full method witch give the solution into series rapidly convergent.

We propose two simple methods to calculate Adomian polynomials and we show how we can use Adomian method with Alienor method to solve optimal control problems.

We also interested to the construction of sentinels witch allow estimation of pollution terms independently of the missing ones

Key words : non linear parabolic problem, controllability, decomposition method, Adomian polynomial ,sentinels method

ملخص

طريقة التجزئة و مراقبة جملة لا خطية

هذا العمل يدور حول طريقة التجزئة و تطبيقاتها في حل المسائل اللا خطية فبعد التذكير بالمبادئ الأساسية لهذه الطريقة بينا كيف يمكن تطبيقها في حل مسألة مكافئة لا خطية وأثبتنا عن طريق المثال أن هذه الطريقة ناجعة و تعطى الحل على شكل متسلسلة سريعة التقارب كما اقترحنا طريقتين مبسطتين لحساب متعدد حدود أداميان .كما بينا أنه يمكن حل مسائل المراقبة المثلى باستعمال طريقة التجزئة مقرونة بطريقة ألنور وقمنا بتبيين كيف أن نظرية الحراس تمكن من حساب المقدار الملوث من دون الاعتماد على المقدار الناقص.

الكلمات المفتاحية

مسألة مكافئة لا خطية ، مراقبة ، نظرية التجزئة ، كثير حدود أداميان، نظرية الحراس