REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°d'ordre :............
N°de série :...........

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME DE MAGISTERE
EN
MATHEMATIQUES

Quelques propriétés du Mouvement Brownien classique et Mouvement Brownien Fractionnaire (Le Modele de Black et Scholes)

présenté par :

KAOUACHE RAFIK

Option :Probabilités et Statistiques

Devant le jury :

MOHDEB ZAHER	Prof.	Université Mentouri	Président
RAHMANI FOUAD LAZHAR.	MC.	Université Mentouri	Rapporteur
MESSACI FATIHA	MC.	Université Mentouri	Examinatrice
GHERIBI ZOUBIDA	MC.	Université Mentouri	Examinatrice

Table des matières

Remerciements

Je remercie vivement mon professeur Rahmani Fouad Lazhar pour avoir dirigé mon mémoire et avoir stimulé en moi le goût de la recherche sur un sujet qui m'interesse beaucoup.
Je remercie mes parents qui m'ont soutenu durant tout le temps de préparation de mon mémoire.

Introduction

Le mouvement brownien est à la fois un phénomène naturel, et un objet mathématique. Le phénomène naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il a été observé dès le 18 ème siècle, sinon avant. L'objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé. Norbert Wiener, qui l'a défini en 1923, l'appelait " the fundamental random function ".

On ne va pas pouvoir tout détailler, parce que le mouvement brownien occupe aujourd'hui une place centrale en mathématiques et qu'il est lié à la plupart de leurs branches : les équations d'évolution, l'analyse de Fourier, la théorie du potentiel, la théorie des fonctions d'une variable complexe, la géométrie et la théorie des groupes, l'analyse numérique.

L'objectif majeur de cette étude est de démontrer quelques propriétés principales de ce mouvement, ainsi que d'expliquer un exemple de son application dans les mathématique financière.
Pour cela, l'étude a été divisée en quatre chapitres :

- Le premier chapitre est réservé aux notions fondamentales du mouvement brownien standard et fractionnaire.
- Le second chapitre, consideré comme étant le noyau de ce travail, est consacré aux propriétés du mouvement brownien standard et fractionnaire. Il inclut deux sous chapitres, à savoir l'étude des propriétes de mémoire et les deux propriétés trajectorielle du mouvement brownien standard et fractionnaire et l'étude de variation. Dans ce dernier,il est a noter que la α variation du mouvement brownien a été démontrée pour le cas :$t_i = i2^{-N}, \quad i = 0...2^N$.
- Dans le troisième chapitre, on aborde la construction de l'intégrale stochastique

et le calcul d'Itô,ces derniers sont en quelque sorte des applications directes du mouvement brownien standard.

– Et pour terminer, un exemple d'application du mouvement brownien standard dans le domaine des mathématiques financières a été donné. Il s'agit du modéle de Black et Sholes trés répandu en finances et utilisé principalement dans l'étude du probléme des options et l'evolution des cours du marché financier.

Chapitre 1

Mouvement Brownien

1.1 Le mouvement Brownien standard

Définition 1.1. *Une variable aléatoire* $X = (X_1, ..., X_d)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est un vecteur gaussien, si pour tous reéls* $a_1, ..., a_d$ *la variable aléatoire reélle* $\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ *est une gaussienne.*

Définition 1.2. *Le processus* X *est un processus gaussien si chaque famille finie* $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ *est un vecteur gaussien.*

Définition 1.3. *Le mouvement brownien standard est défini comme suit :*

- $B_0 = 0$ *(issue de 0)*
- *Pour tout* $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable gaussienne* $N(0, t-s)$ *indépendante de la tribu* F_s *engendreé par* $\{B_u, u \leq s\}$

Remarque 1.1. *Soit* N *une variable aléatoire gaussienne centrée réduite la variable aléatoire* $N\sqrt{t-s}$ *à la même loi que* $B_t - B_s$

Théorème 1.1. *Si* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est un mouvement brownien et si* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *alors* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Preuve 1.1. *Soit* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *, alors le vecteur aléatoire* $(X_{t_1}, X_{t_2 - t_1}, ..., X_{t_{n+1} - t_n})$ *est composé de variables aléatoires gaussiennes et indépendantes (d'aprés la définition du mouvement brownien) ,ce vecteur donc est un vecteur gaussien.*
Il est donc de même pour $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ $\square$

Proposition 1.1. *B_t est un processus gaussien dont la fonction de covariance est :*

$$\rho(s,t) = s \wedge t$$

.

Preuve 1.2. *Soit $s \leq t$ on a :*

$$\rho(s,t) = Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) - E(B_t)E(B_s)$$

Comme B_t suit une loi gaussienne centrée ($E(B_t) = 0$) donc

$$\rho(s,t) = E(B_t B_s + B_s^2 - B_s^2) = E(B_s^2) + E(B_s(B_t - B_s))$$

Pour $s \leq t$ on utilise l'indépendance ,et l'évoluation $B_t \sim N(0,s)$.
Nous obtenons la valeur

$$\rho(s,t) = E(B_s^2) + E(B_s)E(B_t - B_s) = E(B_s^2) = s$$

□

Proposition 1.2. - *Si B_t est un mouvement brownien alors X_t définie par :*

$$X_t = (1-t)B\Big(\frac{t}{1-t}\Big) \quad , t \in [0,1]$$

est un mouvement Brownien .

Preuve 1.3. *D'aprés la définition de X_t l'espérance de $X_t X_s$ est égale à :*

$$E(X_t X_s) = E\Big((1-t)(1-s)B\big(\frac{t}{1-t}\big)B\big(\frac{s}{1-s}\big)\Big)$$

pour $s, t < 1$

$$= (1-t)(1-s)\min\left(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}\right)$$

$$= \min\{s,t\}$$

□

1.1.1 Pont Brownien

Le mouvement brownien standard $\{B_t; t \geq 0\}$ défini sur [0,1], et conditionné sur $\{B_1 = 0\}$ est appelé pont brownien.
Autrement dit, le pont brownien est un mouvement brownien sur [0,1] conditionné à retourner à 0 à l'instant 1.

Remarque 1.2. *Ce conditionnement est spécifique .*

Considérons un mouvement brownien $\{B_t; t \in [0,1]\}$, il satisfait la relation

$$B_t = B_t - tB_1 + tB_1 = \tilde{B}_t + tB_1$$

pour $\tilde{B}_t = B_t - tB_1$ Donc $\tilde{B}_t$ est un processus gaussien.
Fixons $t \in [0,1]$;le couple $(\tilde{B}_t, B_1)$ est un vecteur gaussien centré avec

$$E(\tilde{B}_t B_1) = E(B_t B_1) - tE(B_1^2) = t - t = 0$$

D'où l'indépendance entre $\tilde{B}_t$ et B_1 cela implique l'indépendance entre le processus $\{\tilde{B}_t; t \in [0,1]\}$ et la variable B_1. Par consèquent

$$\{\tilde{B}_t; t \in [0,1] \setminus B_1 = 0\} = \{\tilde{B}_t + tB_1; t \in [0,1] \setminus B_1 = 0\}$$

$$= \{\tilde{B}_t; t \in [0,1] \setminus B_1 = 0\} = \{\tilde{B}_t; t \in [0,1]\} \quad \textit{en loi.}$$

Définition 1.4. *Si B_t est un mouvement brownien,alors l'ensemble*

$$\{\tilde{B}_t = B_t - tB_1; t \in [0,1]\}$$

est un pont brownien.

Proposition 1.3. *$\tilde{B}_t$ est gaussien,centré, de covariance*

$$E(\tilde{B}_t \tilde{B}_s) = \min(s,t) - st \qquad \forall (s,t) \in [0,1]^2$$

Proposition 1.4.
- *Si $\tilde{B}_t$ est un pont brownien, $-\tilde{B}_t$ l'est aussi.*
- *Soit*

$$X_t = (1+t)\tilde{B}\left(\frac{t}{1+t}\right) \qquad t \in \mathbb{R}_+;$$

Si $\tilde{B}_t$ est un pont brownien alors X_t l'est aussi.

Preuve 1.4. – *Soit* $-\tilde{B}_t = -B_t + tB_1$ *par définition* X *est gaussien alors* $-X$ *l'est aussi ,* $E(X_tX_s) = E(-X_t(-X_s))$ *ils ont de même structure de covariance ainssi* $-\tilde{B}_t$ *est un pont brownien.*

– *Par définition la covariance de* X_tX_s *est égale à*

$$E(X_tX_s) = E\Big((1+t)\tilde{B}(\frac{t}{1+t})(1+s)\tilde{B}(\frac{s}{1+s})\Big)$$
$$= (1+t)(1+s)E\Big(\tilde{B}(\frac{t}{1+t})\tilde{B}(\frac{s}{1+s})\Big)$$
$$= (1+t)(1+s)\Big[\min\{\frac{t}{1+t}, \frac{s}{1+s}\} - \frac{st}{(1+t)(1+s)}\Big]$$
$$= \min\Big\{t(1+s), s(1+t)\Big\} - st$$
$$= \min\{t, s\} - st$$

□

Proposition 1.5. *Si* B_t *est un mouvement brownien*

$$X_t = B_t - \int_0^t r^{-1}B_r dr \quad avec \ \ t \in [0,1]$$

est un mouvement brownien.

Preuve 1.5. *Voir[2]*

Proposition 1.6. *Si* $\tilde{B}$ *est un pont brownien alors*

$$X_t = \tilde{B}_t - \int_0^t r^{-1}\tilde{B}_r dr \quad avec \ \ t \in [0,1] \tag{1.1}$$

est un mouvement brownien

Preuve 1.6. *On a :*

$$\tilde{B}_t = B_t - tB_1$$

Donc d'aprés l'équation (1,1) on trouve

$$X_t = B_t - \int_0^t r^{-1}B_r dr \quad avec \ \ t \in [0,1]$$

On est dans le cas de la proposition précedente donc X_t *est un mouvement brownien.* □

1.2 Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe on va présenter le mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.5. *Le mouvement brownien fractionnaire B^H_T est un gaussien centré de covariance*

$$\rho(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) \quad .$$

Remarque 1.3. *Si $H = \frac{1}{2}$ on est dans le cas du mouvement brownien classique .*

Proposition 1.7. *le mouvement Brownien fractionnaire B^H_T est un processus à accroissement stationaire .*

Preuve 1.7. *Comme B^H_T est un processus gaussien il suffit de verifier que*

$$Cov(B^H_{t_1} - B^H_{t_0}, B^H_{s_1} - B^H_{s_0}) = Cov(B^H_{t_1+h} - B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h} - B^H_{s_0+h})$$

tel que $s_0 < s_1 < t_0 < t_1$, par simplification on se ramène au cas où il y a deux incréments :

$$Cov(B^H_{t_1} - B^H_{t_0}, B^H_{s_1} - B^H_{s_0}) = Cov(B^H_{t_1}, B^H_{s_1}) - Cov(B^H_{t_1}, B^H_{s_0})$$
$$-Cov(B^H_{t_0}, B^H_{s_1}) + Cov(B^H_{t_0}, B^H_{s_0})$$
$$= \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_1^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_0^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H})$$
$$-\frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_1^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}) + \frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_0^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$Cov(B^H_{t_1} - B^H_{t_0}, B^H_{s_1} - B^H_{s_0}) = \frac{1}{2}\Big\{(t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}\Big\}$$

et

$$Cov(B^H_{t_1+h} - B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h} - B^H_{s_0+h}) = Cov(B^H_{t_1+h}, B^H_{s_1+h}) - Cov(B^H_{t_1+h}, B^H_{s_0+h})$$
$$-Cov(B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h}) + Cov(B^H_{t_0+h}, B^H_{s_0+h})$$
$$= \frac{1}{2}((t_1+h)^{2H} + (s_1+h)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}((t_1+h)^{2H} + (s_0+h)^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H})$$
$$= \frac{1}{2}((t_0+h)^{2H} + (s_1+h)^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}((t_0+h)^{2H} + (s_0+h)^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$Cov(B^H_{t_1+h}-B^H_{t_0+h},B^H_{s_1+h}-B^H_{s_0+h}) = \frac{1}{2}\Big\{(t_1-s_0)^{2H}-(t_1-s_1)^{2H}+(t_0-s_1)^{2H}+(t_0-s_0)^{2H}\Big\}$$

d'où le résultat $\square$

Proposition 1.8. *Si X_t est un processus gaussien stationnaire et $X_0 = 0$ tel que $Var(X_t) = t^{2H}$ alors X_t est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H.*

Preuve 1.8. *On a :*

$$Cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\Big\{Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_t - X_s)\Big\}$$

on utilise la stationnarité d'où l'on deduit :

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= \frac{1}{2}\Big\{Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_{t-s})\Big\} \\ &= \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - (t-s)^{2H}) \quad . \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.4. *En remarque que :*

$$B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} = (t_{i+1} - t_i)^H N \quad en \quad loi$$

où N suit une loi gaussienne centrée réduite.

Chapitre 2

Propriétés Principales

2.1 Propriétes de mémoire

Soit $r(n) = E((X_{n+1} - X_n)X_1)$

Définition 2.1. *On dit que X_t est à courte mémoire tant que $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ et X_t a longue mémoire si $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$*

Proposition 2.1. *Le mouvement brownien fractionnaire B^H a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H \leq \frac{1}{2}$.*

Preuve 2.1.
- *Si $H = \frac{1}{2}$ on est dans le cas d'un mouvement brownien standard on a :*

$$r(n) = E(B_{n+1}B_1) - E(B_nB_1) = 1 - 1 = 0$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ (courte mémoire).
- *Si $H \neq \frac{1}{2}$*

$$r(n) = E(B_{n+1}B_1) - E(B_nB_1) = \frac{1}{2}\Big\{(n+1)^{2H} - n^{2H} + (n-1)^{2H} - n^{2H}\Big\}$$

donc :

$$r(n) = 2H\int_0^1 ((n+a)^{2H-1} - (n-a)^{2H-1})da = 2H(2H-1)\int_0^1 da \int_{-1}^1 db(n+ab)^{2H-2}$$

d'où

$$r(n) \leq (n+1)^{2H-2}$$

et

$$r(n) > (n-1)^{2H-2}$$

on conclut que

$$r(n) \sim n^{2H-2}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ *si* $H \leq \frac{1}{2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$ *si* $H > \frac{1}{2}$ *(c.q.f.d).*

□

2.2 Etude des deux propriétes trajectorielles

Définition 2.2. *Soit*

$$f : I \to \mathbb{R}$$

f est hölder continu de paramétre $\mu \in [0,1]$ *s'il existe* $c > 0$ *tel que :*

$$| f(t) - f(s) | \leq c \mid t - s \mid^{\mu}, \forall s, t \in I$$

On va citer le théorème de KOLMOGROV qui est un théorème de base

Théorème 2.1. *Soit* X_t*,un processus à valeurs reélles pour lequel il existe trois constantes strictement positives* $,\gamma, c, \varepsilon$ *telque :*

$$E\Big[\mid X_t - X_s \mid^{\gamma} \Big] \leq \mid t - s \mid^{d+\varepsilon}$$

Alors il existe une modification $\tilde{X}$ *de* X *telque :*

$$E\bigg[\Big(\sup_{t \neq s} \mid \tilde{X}_t - X_s \mid / \mid t - s \mid^{\alpha} \Big)^{\gamma}\bigg] < \infty$$

Pour chaque $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma]$.
En particulier les trajectoires de $\tilde{X}$ *sont hölder continues de paramétre* α.

Preuve 2.2. *Voir[3] page 26,27.*

Examinons quelques conséquences du théorème
On a :

$$E\bigg[\Big(\sup_{t \neq s} \mid \tilde{X}_t - X_s \mid / \mid t - s \mid^{\alpha} \Big)^{\gamma}\bigg] < \infty$$

Ceci implique en particulier

$$\Big(\sup_{t \neq s} \mid \tilde{X}_t - X_s \mid / \mid t - s \mid^{\alpha} \Big)^{\gamma} < \infty \quad p.s$$

Donc :

$$\sup_{t \neq s} \mid \tilde{X}_t - X_s \mid / \mid t - s \mid^{\alpha} < \infty \quad p.s$$

Ceci preuve que $\tilde{X}$ hölder continus de paramétre α p.s .

2.2.1 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien standard

Dans ce paragraphe on va illustrer l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien standard.

Proposition 2.2. *Les trajectoires du mouvement brownien classique(standard) sont hölder continues de paramétre $\alpha < 1/2$.*

Preuve 2.3. *On prend $\mu = 2n$*

$$E\Big[\mid B_t - B_s \mid^{2n} \Big] = E\Big(\mid Z \mid^{2n} \Big)(t-s)^n$$

D'après le collolaire 1,
On a $\gamma = 2n, d = 1, d + \varepsilon = n$
En appliquant le théorème de KOLMOGROV
B_t a une modification (version) $\tilde{B}$ dont les trajectoires sont hölder continues de paramétre

$$\alpha \in \Big[0, \varepsilon/\gamma\Big] = \Big[0, \frac{n-1}{2n}\Big] = \Big[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\Big]$$

En prenant n grand, on a prouvé que $\tilde{B}$ est hölder continu de paramétre $\alpha < 1/2$. □

2.2.2 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe en va présenter l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire.

Proposition 2.3. *Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont hölder continues de paramétre $\alpha < H$.*

Pour la démonstration on utilise le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire on a :*

$$E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) \quad .$$

et

$$E(B_t^{2H}) = t^{2H}$$

Preuve 2.4. *on a :*

$$E(\mid B_t^H - B_s^H \mid^2) = E(\mid B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H} \mid)$$

Par application de la linéarité de l'espérance et du corrollaire précédent on a :

$$E(\mid B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H} \mid) = E(\mid B_t^{2H} \mid) - 2E(\mid B_t^H B_s^H \mid) + E(\mid B_s^{2H}) \mid)$$

$$= \mid t^{2H} \mid + \mid s^{2H} \mid - \mid (t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) \mid$$

$$= \mid t - s \mid^{2H}$$

Donc on a :

$$E(\mid B_t^H - B_s^H \mid^2) = \mid t - s \mid^{2H}$$

On prend $\gamma = 2, d = 1, d + \varepsilon = 2H$ *d'oû* $\varepsilon = 2H - 1$
d'après le théorème de KOLMOGROV, B_t^H *à une modification(vérsion)* $\tilde{B}^H$ *dont les trajectoire sont hölder continues de paramétre*

$$\alpha \in [0, \varepsilon/\mu[= [0, \frac{2H-1}{2}[= [0, H - \frac{1}{2}[$$

On a prouvé que $\tilde{B}^H$ *hölder continue de paramétre* $\alpha < H$ □

2.3 Etude de Variation

On procède dans ce chapitre de façon similaire à l'article de F. Russo, P Valois. (Voir[4]).

2.3.1 Variation Quadratique du Mouvement Brownien Classique

Dans ce paragraphe on va calculer la variations quadratique d' un mouvement brownien.

Définition 2.3. *Un processus X est dit à variation quadratique finie sur [0,T] si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ on a :*

$$\sum_{i=0}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y,dans ce cas Y sera appelée la variation quadratique de X.

Soit $(t_i^n)_{i=0}^{N(n)}$ une subdivision de $[0,T]$ et

$$\delta(n) = \sup_i^{N(n)} (t_{i+1}^n - t_i^n)$$

Proposition 2.4. *Pour toute famille de subdivision (t_i^n) tel que $\delta(n) \longrightarrow 0$*

$$\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \longrightarrow T \quad P, ps.$$

Remarque 2.1. *En réalité on peut montrer la convergence dans L^2 ce qui signifie que :*

$$E\Big(\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \Big) \longrightarrow T \quad P, ps.$$

Preuve 2.5. *Il reste à voir que*

$$E\Big((\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - T)^2 \Big) \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

On a :

$$E\Big(\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \Big)^2 = E\Big(\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \sum_{j=0}^{N(n)} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \Big)$$

$$= E\Big(\sum_{i,j}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \Big) = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \sum_{i=0}^{N(n)} E\Big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 \Big)$$

et

$$I_2 = 2\sum_{j>i} E\Big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\Big)$$

On sait d'après la Remarque 1.1 que

$$B_t - B_s = N\sqrt{t-s} \tag{2.2}$$

en loi avec $N \sim N(0,1)$
Donc on a :

$$I_1 = \sum_{i=0}^{N(n)} E\Big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4\Big) = \sum_{i=0}^{N(n)} E((N\sqrt{t_{i+1}-t_i})^4)$$

$$= \sum_{i=0}^{N(n)} E(N^4)(t_{i+1}-t_i)^2$$

Donc

$$I_1 \leq \delta(n)E(N^4)\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{i+1}-t_i)$$

car $(t_{i+1}-t_i) \leq \delta(n)$
Mais

$$\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{i+1}-t_i) = T \tag{2.3}$$

et comme $N \sim N(0,1)$ *on a* $E(N^4) = 2$ *d'òu l'équation suivante :*

$$I_1 \leq 2T\delta(n) \longrightarrow 0\, n \longrightarrow \infty \tag{2.4}$$

Maintenant on va calculer I_2

$$I_2 = 2\sum_{j>i} E\Big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\Big) = 2\sum_{j=0}^{N(n)}(t_{j+1}-t_j)\sum_{i=0}^{j-i}(t_{i+1}-t_i)$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{j-i}(t_{i+1}-t_i) = t_j$$

Donc

$$I_2 = 2\sum_{j=0}^{N(n)}(t_{j+1}-t_j)t_j$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale de Rieman, on a l'équation suivante :

$$I_2 \longrightarrow 2\int_0^T t\,dt = T^2 \tag{2.5}$$

D'aprés (2,2) et (2,3) on a

$$E\Big((\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) \Big)^2 = T^2 \tag{2.6}$$

et

$$-2TE\Big(\sum_{i=0}^{N(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \Big) = -2T\sum_{i=0}^{N(n)} (t_{i+1} - t_i) = -2T^2 \tag{2.7}$$

D'aprés (2,4),(2,5),(2,6) et (2,7) on a :

$$E\Big(\sum_{i=0}^{N(n)} ((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - T)^2 \Big) \longrightarrow 0$$

d'où le résultat $\square$

2.3.2 Variation du mouvement brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe on va calculer la α variations d 'un mouvement brownien fractionnaire.

Définition 2.4. *Un processus X est dit à α variation finie si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ on a :*

$$\sum_{i=0}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^\alpha$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y,dans ce cas Y sera appelée la α variation de X.

Proposition 2.5. *La α variation de B_t^H vaut $TE(\mid N \mid^\alpha)$ pour $\alpha = \frac{1}{H}$.*

Lemme 2.1. *Soit*

$$A = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H (t_{j+1} - t_j)^H}$$

Alors $\sup_{i,j} A \longrightarrow 0\,\forall i, j.$

Preuve 2.6. *On va vérifier le cas* $t_i = i2^{-N}$, $i = 0, ..., 2^N$
On a :

$$t_{i+1} - t_i = t_{j+1} - t_j = 2^{-N} = \varepsilon$$

d'où

$$\begin{aligned} Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}) &= \frac{1}{2}\Big((t_i - t_j + \varepsilon)^{2H} + (t_i - t_j - \varepsilon)^{2H} - 2(t_i - t_j)^{2H}\Big) \\ &= \frac{\varepsilon^{2H}}{2}\varphi(\frac{t_i - t_j}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

où

$$\varphi(s) = s^{2H}\Big((1 + \frac{1}{s})^{2H} + (1 - \frac{1}{s})^{2H} - 2\Big)$$

et $\lim \varphi(s) = 0$ *quand* $s \longrightarrow \infty$
Donc $\mid \varphi(s) \mid$ *est borné et*

$$\frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{\varepsilon^{2H}} < c$$

Alors la limite tend vers 0 ,d'où le résultat $\square$

Maintenant on va démontrer la proposition.

Preuve 2.7. *Soit* (t^n_i) *une subdivision de* $[0, T]$*tel que* $\delta(n) \longrightarrow 0$ *on pose*

$$K = \sum_{i=0}^{n} \mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^\alpha$$

Alors on montre que

$$E((K)^2) \longrightarrow T^2\{E(\mid N \mid^\alpha)\}^2$$

On a :

$$K^2 = \sum_{i,j} \mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^\alpha \mid B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} \mid^\alpha$$

On sait que :

$$K^2 = \sum_{i=0}^{n} \mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^{2\alpha} + 2\sum_{i>j} \mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^\alpha \mid B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} \mid^\alpha$$

$E(K^2) = I_1 + I_2$ *tel que :*$I_1 \longrightarrow 0$ *quand* $\delta(n) \longrightarrow 0$ *car*

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n} E\Big(\mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^{2\alpha} \Big) = \sum_{i=0}^{n} E(\mid N \mid^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)^{2\alpha H}$$

d'aprés la Remarque (1.4)
Et comme $\alpha = \frac{1}{H}$

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n} E(\mid N \mid^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} E(\mid N \mid^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Mais

$$(t_{i+1} - t_i) \leq \delta(n)$$

de plus

$$\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1} - t_i) = T$$

on déduit que

$$I_1 \leq 2T\delta(n) \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty$$

Maintenant en va calculer la quantité I_2

$$I_2 = 2\sum_{i>j} E\Big(\mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^{\alpha} \mid B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} \mid^{\alpha} \Big)$$

en utilisant la regression linéaire on obtient que

$$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = a_{ij}(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}) + R \tag{2.8}$$

où

$$a_{ij} = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{Var(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})}$$

d'après la Remarque (1.4) et l'équation (2.8)

$$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{\sqrt{Var(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})}} N_1 + R$$

Donc :

$$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H} N_1 + R \tag{2.9}$$

où R *est une v.a indépendante de* N_1 *de moyenne nulle, on va calculer sa variance à partir de l'équation (2.9)*

$$(t_{j+1} - t_j)^{2H} = \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^{2H}} + Var(R) \tag{2.10}$$

en utilisant l'équation(2.10) on déduit que

$$R = \sqrt{(t_{j+1}-t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{2H}}} N_2$$

où

$$N_2 \sim N(0,1)$$

Donc :

$$(B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}) = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{H}} N_1$$
$$+ \sqrt{(t_{j+1}-t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{2H}}} N_2$$

où N_1 et N_2 sont indépendantes.
On pose

$$r_{ij} = E\Big(\mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^\alpha \mid B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} \mid^\alpha \Big)$$

alors d'après l'équation précédente et la Remarque (1.4)

$$r_{ij} = E\Big(\mid t_{i+1} - t_i \mid^{\alpha H} \mid N_1 \mid^\alpha \Big(\mid \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{H}} N_1$$
$$+ \sqrt{(t_{j+1}-t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{2H}}} N_2 \mid^\alpha \Big)$$

Comme $\alpha = \frac{1}{H}$ on a :

$$r_{ij} = (t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j) E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \mid \Big(\frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{H}(t_{j+1}-t_j)^{H}} N_1$$
$$+ \sqrt{1 - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{2H}(t_{j+1}-t_j)^{2H}}} N_2 \mid^\alpha \Big)$$

on sait que

$$I_2 = 2\sum_{i>j} E\Big(\mid B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} \mid^\alpha \mid B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} \mid^\alpha \Big) = 2\sum_{i>j} r_{ij}$$

D'aprés le lemme(1.1)

$$I_2 = 2\sum_{i>j} (t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j) E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \mid N_2 \mid^\alpha \Big)$$

$$= 2E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \mid N_2 \mid^\alpha \Big) \sum_{i>j} (t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)$$

Comme N_1, N_2 *sont indépendantes on a :*

$$I_2 = 2E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \Big) E\Big(\mid N_2 \mid^\alpha \Big) \sum_{i>j} (t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)$$

$$= 2E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \Big) E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \Big) \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) \sum_{j=0}^{i-j} (t_{j+1} - t_j)$$

Mais

$$\sum_{j=0}^{i-j} (t_{j+1} - t_j) = t_i$$

Donc :

$$I_2 = 2E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \Big) E\Big(\mid N_1 \mid^\alpha \Big) \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) t_j$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale de Reiman on a :

$$\sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) t_j \longrightarrow 2 \int_0^T t \, dt = T^2$$

on déduit alors que :

$$I_2 \longrightarrow T^2 \{ E(\mid N \mid^\alpha) \}^2$$

donc

$$E((K)^2) \longrightarrow T^2 \{ E(\mid N \mid^\alpha) \}^2$$

$\square$

Chapitre 3

Construction de l'intégrale stochastique et calcul d'Itô

3.1 Généralisation sur les processus à temps continu

Commençons par préciser ce que l'on entend par processus à temps continu.

Définition 3.1. *Soit* $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, une filtration* $(\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une famille croissante de sous tribus de* $\mathbb{A}$.

La tribu $\mathbb{F}_t$ *représente l'information dont on dispose à l'instant* t.
On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est adapté à* $(\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}$*,si pour chaque* t, X_t *est* $\mathbb{F}_t$*-mesurable.*

Remarque 3.1. *Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante*

$$Si \quad A \in \mathbb{A} \quad et\ si \quad \mathbb{P}(A) = 0 \quad alors\ pour\ tout\ t, \quad A \in \mathbb{F}_t \ .$$

Définition 3.2. *On appellera* $\mathbb{F}_t$*- mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

- *Pour tout* $t \geq 0$,X_t *est* $\mathbb{F}_t$ *mesurable.*
- *Si* $s \leq t$,$X_t - X_s$ *est indépendant de la tribu* $\mathbb{F}_s$.
- *Si* $s \leq t$ *la loi de* $X_t - X_s$ *est identique à celle de* $X_{t-s} - X_0$.

Remarque 3.2. *Le premier point de la définition précédente prouve que*

$$\sigma(X_u, u \leq t) \subset \mathbb{F}_t$$

.

3.1.1 Martingales à temps continu

Définition 3.3. *Soit* $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de cet espace.Une famille adaptée* $(M_t))_{t\geq 0}$ *de variables aléatoires intégrables (c'est-à-dire vérifiant* $E(\mid M_t \mid) < +\infty$ *pour tout* t*) est*
- *une martingale si, pour tout* $s \leq t$, $E(M_t \setminus \mathbb{F}_s) = M_s$.
- *une surmartingale si,pour tout* $s \leq t$, $E(M_t \setminus \mathbb{F}_s) \leq M_s$.
- *une soumartingale si,pour tout* $s \leq t$, $E(M_t \setminus \mathbb{F}_s) \geq M_s$.

Remarque 3.3. *On déduit de cette définition que si* M_t *est une martingale,alors*

$$E(M_t) = E(M_0), \quad \text{pour tout } t$$

Donnons des exemples de martingales que l'ont peut construire à partir du mouvement brownien.

Proposition 3.1. *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un* -$\mathbb{F}_t$ *mouvement brownien standard :*
- X_t *est une* $\mathbb{F}_t$ *martingale.*
- $X_t^2 - t$ *est une* $\mathbb{F}_t$ *martingale.*
- $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$ *est une* $\mathbb{F}_t$ *martingale,* $\sigma \in \mathbb{R}$.

Preuve 3.1.
- *Si* $s \leq t$ *alors* $X_t - X_s$ *est indépendante de la tribu* $\mathbb{F}_s$*.Donc*

$$E(X_t - X_s \setminus \mathbb{F}_s) = E(X_t - X_s)$$

Mais un mouvement brownien standard est centré donc

$$E(X_t - X_s) = 0$$

on deduit que

$$E(X_t - X_s \setminus \mathbb{F}_t) = E(X_t \setminus \mathbb{F}_s) - X_s = 0$$

d'oû le résultat.
- *Pour démonter la deuxième assertion remarquons que :*

$$E(X_t^2 - X_s^2 \setminus \mathbb{F}_s) = E((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) \setminus \mathbb{F}_s)$$

comme l'ésperence conditionnelle est linéaire on :

$$= E((X_t - X_s)^2 \setminus \mathbb{F}_t)) + 2X_s E((X_t - X_s) \setminus \mathbb{F}_s)$$

Mais comme $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale

$$E(X_t - X_s \setminus \mathbb{F}_s)) = 0$$

et donc :

$$E(X_t^2 - X_s^2 \setminus \mathbb{F}_s) = E((X_t - X_s)^2 \setminus \mathbb{F}_s)$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permettent de plus, d'affirmer que :

$$E((X_t - X_s)^2 \setminus \mathbb{F}_s) = E(X_{t-s}^2)$$

$$= t - s.$$

La dernière égalité est due au fait que X_t suis une loi gaussienne centrée de variance t.
On en déduit que

$$E((X_t^2 - t \setminus \mathbb{F}_s) = X_s^2 - s \quad si \ s \leq t.$$

– *Pour demontrer le dernier point, rappelons, tous d'abord, que, si N est une gaussienne centrée réduite, on :*

$$E(e^{\lambda N}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{\frac{-x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\Pi}} = e^{\lambda^2/2}.$$

De plus, si $s \leq t$:

$$E(e^{(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)} \setminus \mathbb{F}_s) = e^{(\sigma X_s - (\sigma^2/2)t)} E(e^{\sigma(X_t - X_s)} \setminus \mathbb{F}_s)$$

car X_s est $\mathbb{F}_s$-mesurable, et comme $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathbb{F}_s$, on a :

$$E(e^{\sigma(X_t - X_s)} \setminus \mathbb{F}_s) = E(e^{\sigma(X_t - X_s)})$$

$$= E(e^{\sigma(X_{t-s})}$$

$$= E(e^{\sigma N \sqrt{t-s}})$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 (t-s)}{2}}$$

Ce qui donne le résultat enoncé.

□

Théorème 3.1. *Théorème du temps d'arrêt :*
Si $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale continue par rapport à une filtration* $(\mathbb{F}_s)_{t\geq 0}$*, et si* τ_1, τ_2 *sont deux temps d'arrêt tels que* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$*,* K *étant une constante réelle finie, alors,* M_{τ_2} *est intégrable et :*

$$E(M_{\tau_2} \setminus \mathbb{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad P \; ps.$$

Preuve 3.2. *Voir[5]*

Remarque 3.4.
- *Ce résultat entraîne que si* τ *est un temps d'arrêt borné alors* $E(M_\tau) = E(M_0)$ *(il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt tels que* $\tau_1 = 0, \tau_2 =$ 0 *et de prendre l'espérance des deux nombres.)*
- *Si* M_t *est une soumartingale, on a le même théorème en remplaçant l'égalité précédente par*

$$E(M_{\tau_2} \setminus \mathbb{F}_{\tau_1}) \geq M_{\tau_1} \quad P \; ps.$$

Nous allons donner un exemple d'application de résultat au calcul des temps d'atteinte d'un point par le mouvement brownien.

Proposition 3.2. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un -*$\mathbb{F}_t$ *mouvement brownien.Noton, si a est un nombre réel* $T_a = \inf\{s \geq 0, X_s = a\}$ *, ou* $+\infty$ *si cet ensemble est vide.*
Alors T_a *est un temps d'arrêt fini presque sûrement, dont la loi est caractérisée par sa transformée de la place :*

$$E(e^{-\lambda T_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}|a|}.$$

Preuve 3.3. *Voir[5]*

3.2 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{F}_t$-mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathbb{A}, (\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nous allons donner un sens à $\int_0^t f(s,w)dB_s$ pour une classe de processus $f(s,w)$ adapté a la filtration $(\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}$.
On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires.
Dans la suite, on fixe T un réel strictement positif .

Définition 3.4. *On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme*

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(w) 1_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$ et ϕ_i est $\mathbb{F}_{t_{i-1}}$ - mesurable et bornée.
l' intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition,le processus continu $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(B_t - B_{t_k}) \quad si, \quad t \in]t_{k-1}, t_k].$$

Notons que $I(H)_t$ peut s'écrit :

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i (B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t}),$$

ce qui prouve la continuité de la fonction $t \longrightarrow I(H)_t$.On notera $\int_0^t H_s dB_s$ pour $I(H)_t$. On a alors le résultat éssentiel suivant :

Proposition 3.3. *Si $(H)_{t_{0\leq t\leq T}}$ est un processus élémentaire :*
- $\int_0^t H_s dB_s$ *est une $\mathbb{F}_t$ martingale,*
- $E\Big((\int_0^t H_s dB_s)^2 = E\Big(\int_0^t H_s^2 ds \Big), \Big),$
- $E\Big(\sup_{t\leq T} \mid \int_0^t H_s dB_s \mid^2 \Big) \leq 4E\Big(\int_0^t H_s^2 ds), \Big),$

Preuve 3.4. *Voir[5]*

On vient de définir et donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés :

$$\mathbb{H} = \Big\{ (H)_{t_{0\leq t\leq T}}, \quad processus\ adapte\ a \quad (\mathbb{F}_t)_{t<T} E\Big(\int_0^t H_s^2 ds \Big) < +\infty \Big\}.$$

Proposition 3.4. *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathbb{F}_t$ *brownien.Alors il existe une unique application linéaire* J *de* $\mathbb{H}$ *dans l'espace des* $\mathbb{F}_t$*-martingales continues défines sur [0,T],telle que :*

– *Si* $(H)_{t\leq T}$ *est un processus élémentaire,*$\mathbb{P}p.s$ *pour tout* $0 \leq t \leq T$

$$J(H)_t = I(H)_t$$

Si $t \leq T$

$$E({J(H)_t}^2) = E\Big(\int_0^t {H_s}^2 ds\Big)$$

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J, J_1 sont deux prolongements linéaires , vérifiant les propriétés précédentes alors :

$$\mathbb{P}p.s \;\; \forall 0 \leq t < T \;\; J(H)_t = J_1(H)_t$$

on note si $H \in \mathbb{H}$ $J(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$.
De plus cette intégrale intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.5. *Si* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus de* $\mathbb{H}$ *alors :*

– *On a :*

$$E\Big(\sup_{t\leq T} \mid \int_0^t H_s dB_s \mid^2 \Big) \leq 4E\Big(\int_0^t H_s^2 ds\Big),$$

– *Si* τ *est un* $\mathbb{F}_t$*-temps d'arrêt alors :*

$$\mathbb{P}p.s \int_0^\tau H_s dB_s = \int_0^T 1_{s\leq\tau} H_s dB_s$$

Preuve 3.5. *Voir[5]*

3.3 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques.
On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô "

Définition 3.5. *Soient $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{F}_t$-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\mathbb{P}p.s \quad \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Avec :
- *X_0 $\mathbb{F}_t$ -mesurable*
- *$(K_s)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_s)_{0\leq t\leq T}$ des processus adaptés à $\mathbb{F}_t$.*
- *$\int_0^t \mid K_s \mid ds < +\infty, \mathbb{P}p.s$*
- *$\int_0^t \mid H_s \mid^2 ds < +\infty, \mathbb{P}p.s$*

Proposition 3.6. *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \quad avec \quad \mathbb{P}p.s, \quad \int_0^T \mid K_s \mid ds < +\infty,$$

alors :

$$\mathbb{P}p.s, \quad \forall t \leq T, M_t = 0.$$

ceci entraîne que :
- *La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique .Ce qui signifie que si :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dB_s$$

  alors $X_0 = X_0^{'}$ $Pp.s$ $\quad H_s = H_s^{'}$ $ds \times Pp.p$ $\quad K_s = K_s^{'}$ $ds \times Pp.p$
- *Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$ alors $K_t = 0$ $dt \times Pp.p$*

La formule d'Itô prend la forme suivante :

Théorème 3.2. *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et f une fonctioin deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_s)\ d < X, X >_s .$$

où par définition :

$$< X, X >_t = \int_0^t {H_s}^2 ds,$$

et

$$\int_0^t f^{'}(X_s)\ dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s) K_s ds + \int_0^t f^{'}(X_s) H_s dB_s.$$

De même si $(t, x) \longrightarrow f(t, x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en t,ces dérivées étant continues en (t,x)(on dit dans ce cas que f est de classe* $C^{1,2}$*), on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t {f_s}^{'}(s, X_s) ds + \int_0^t {f_s}^{'}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t {f_{xx}}^{''}(X_s)\ d < X, X >_s .$$

Preuve 3.6. *Nous renvoyons à [6] pour la démonstration élémentaire dans le cas du brownien ou à [7] pour la démonstration compléte.*

Exemple 3.1. *Si* $f(x) = x^2$ *et* $X_t = B_t$*, on a* $K_s = 0$ *et* $H_s = 1$ *donc :*

$$B_t = 2\int_0^t B_s\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

on obtient :

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s\ dB_s.$$

Comme $E(\int_0^t B_s^2 ds) < +\infty$ *on retrouve le fait que* $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

3.3.1 Exemple d'application

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions $(S_t)_{t\geq 0}$ de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s) \tag{3.1}$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0 \tag{3.2}$$

Cala signifie que l'on cherche un processus adapté $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que les intégrales $\int_0^t S_s ds$ et $\int_0^t S_s dB_s$ aient un sens , et qui vérifie pour chaque t :

$$\mathbb{P}p.s \quad S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

Faisons tout d'abord un calcul formel , posons $Y_t = \log(S_t)$ oú S_t est un processus d'Itô avec $K_s = \mu S_s$ et $H_s = \sigma S_s$.
Appliquons la formule d'Itô à $f(x) = \log x$ on obtient ,en supposant que S_t est positif :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds$$

Soit en utilisant (3.2) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t.$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

Soit une solution de l'equation (3.1).
Vérifions rigoureusement cela.
$S_t = f(t, B_t)$ où :

$$f(t,x) = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x$$

La formule d'Itô donne :

$$S_t = f(t, B_t)$$

$$= f(0, B_0) + \int_0^t {f_s}'(s, B_s)ds$$
$$+ \int_0^t {f_x}'(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t {f_{xx}}''(s, B_s)d < B, B >_s$$

Mais comme la variation quadratique du mouvement brownnien vaut (t) ($< B, B >_t = t$) d'aprés la proposition (2.4) on a :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s.$$

On vient donc de démontrer l'existence d'un solution de (3.1). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cele, nous allons utiliser une propriété généralisant "la formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

Proposition 3.7. *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t {K_s}' ds + \int_0^t {H_s}' dB_s.$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + < X, Y >_t$$

avec la convention

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_s {H_s}' ds.$$

Preuve 3.7. *On a d'après la formule d'Itô :*

$$(X_t+Y_t)^2=(X_0+Y_0)^2+2\int_0^t (X_s+Y_s)d(X_s+Y_s)+\int_0^t (H_s+H_s^{'})^2 ds$$

avec

$$X_t^2=X_0^2+2\int_0^t X_s dX_s+\int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$Y_t^2=Y_0^2+2\int_0^t Y_s dY_s+\int_0^t H_s^{'2} ds$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_s dY_s+\int_0^t Y_s dX_s+\int_0^t H_sH_s^{'} ds.$$

Montrons,maintenant, l'unicité d'une solution de l'equation (3.1).
Notons que :

$$S_t=x_0\exp((\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t)$$

est une solution de (3.1) et suposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ *en soit une autre.*
on va chercher à exprimer la "differentielle stochastique" $X_tS_t^{-1}$.
Posons :

$$Z_t=\frac{S_0}{S_t}=\exp((-\mu+\frac{\sigma^2}{2})t-\sigma B_t)$$

et $\mu^{'}=-\mu+\sigma^2$ *et* $\sigma^{'}=-\sigma$
Alors

$$Z_t=\exp((\mu^{'}-\frac{\sigma^{'2}}{2})t-\sigma^{'}B_t)$$

et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t=1+\int_0^t Z_s(\mu^{'}ds+\sigma^{'}dB_s)=1+\int_0^t Z_s((-\mu+\sigma^2)ds-\sigma dB_s)$$

On peut alors exprimer la "differentielle" de X_tZ_t *grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :*

$$<X,Z>_t=<\int_0^{\cdot} X_s\sigma dB_s,-\int_0^{\cdot} Z_s\sigma dB_s>_t=\int_0^t \sigma^2 X_sZ_s ds.$$

On en déduit que :

$$d(X_tZ_t) = X_tZ_t((-\mu+\sigma^2)dt - \sigma dB_t) + X_tZ_t(\mu dt + \sigma dt) + X_tZ_t\sigma^2 dt = 0$$

X_tZ_t *est donc égale à* X_0Z_0*, ce qui entraîne que :*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}p.s. \ X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

Les processus X_t *et* Z_t *étant continus, ceci prouve que :*

$$\mathbb{P}p.s. \ \ \forall t \geq 0 \ \ X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

□

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3. μ, σ *étant deux nombres réels,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *étant un mouvement brownien et* T *un réel strictement positif, il existe un processus d'Itô unique* $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ *qui vérifie pour tout* $t \leq T$ *:*

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

Remarque 3.5.
- *Le processus* S_t *que l'on vien d'expliciter servira de modéle standard pour le prix d'un actif financier.On l'appelle le modéle de Black et Scholes.*
- *Lorsque* $\mu = 0, S_t$ *est une martingale(voir proposition 3.1), ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.*

Chapitre 4

Exemple d'application du modèle de Black et Scholes en finance

Avant d'aborder l'exemple d'application du modèle de Black et Sholes répandu en finances, Il est utile de donner un bref aperçu sur son histoire. Pour cela on s'est inspiré grandement de l'article de Gilles Pagès, Marc Yor , Emmanuel Gobet,voir[10] auquel on apporté une explication plus détaillée et quelques modifications.

4.1 Un peu d'histoire([10])

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [8] intitulée Théorie de la spéculation et soutenue à la Sorbonne en 1900. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu en probabilités, et d'autre part celle des stratégies à temps continu pour la couverture de risque en finance. Du côté mathématique, sa thèse influença grandement les recherches de A.N. Kolmogorov sur les processus à temps continu dans les années 1920 et ceux de K. Itô - l'inventeur du calcul stochastique - dans les années 1950. En revanche, en ce qui concerne la finance, l'approche de Bachelier fut oubliée durant près de trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black, Scholes et Merton [9]. Revenons à cette époque des années 1970 pour mieux cerner le contexte. C'est alors qu'émerge la volonté politique de déréglementer les marchés financiers, rendant ainsi les taux d'intérêt volatiles et les taux de change instables. Dans un tel environnement dérégulé, les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques accrus, liés par exemple à l'extrême variabilité des taux de change : cette situation est inconfortable, tout particuliérement lorsque recettes et dépenses sont libellées dans des monnaies différentes (disons dollar et euro). Pour fournir aux entreprises des outils adaptés à ces problémes et plus généralement pour permettre aux compagnies d'assurance et aux banques de couvrir ces nouveaux risques, de nouveaux marchés organisés ont été créés, permettant aux intervenants d'échanger massivement des produits d'assurance. Cela marque l'émergence de nouveaux instruments financiers, dits -produits dérivés.

4.2 Le problème des options ([5])

Ce paragraphe est principalement centré sur les probléme des options, qui a été le moteur de la théorie et reste l'exemple le plus frappant de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance.
Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou vendre(selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente)une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à prix fixé d'avance.
La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- La nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne, de call pour une option d'achat et de put pour une option de vente.
- l'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option : dans le pratique, il s'agit d'une action, d'une obligation, d'une devise etc...
- Le montant, c'est-à-dire la quantité d'actif sou-jacent à acheter ou à vendre.
- L'échéance ou date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option peut être excercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle alors d'option américaine, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option européenne.
- Le prix d'execice, qui est le prix(fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option, elle même , a un prix, appelé la prime. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le probléme du calcul de la prime se pose (Et, même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modéle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché).

Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance T, sur une action, dont le cours à la date t est donnée par S_t. Soit K le prix d'exercice. L'option d'achat (ou Call) est le prototype de ces produits dérivés et reste encore aujourd'hui un des instruments les plus utilisés : dans l'exemple précédent, une telle option protège l'entreprise contre la hausse du taux de change dollar/euro.
Acquise aujourd'hui par l'entreprise, elle va lui conférer le droit (mais pas l'obligation) d'acheter 1 euro en échange de K dollar (le prix d'exercice ou strike K est une caractéristique fixe du contrat) à la date future T fixée (appelée maturité ou échéance). Si le taux de change en question vaut S_t à la date t (i.e. $1euro = S_t$ dollars), cette assurance revient du point de vue de l'entreprise à percevoir un montant $\max(S_t - K, 0)$ euros à la maturité T : si $S_t \leq K$, le taux d'achat du dollar est plus avantageux que celui prévu par le contrat et elle ne reçoit donc rien (et va changer ses dollars en euros sur le marché dollar/euro si nécessaire) ; en revanche si $S_t > K$, elle exerce son droit d'acquérir des dollars au taux plus avantageux garanti par le contrat d'option :
1 euro $= K$ dollars (le nombre des euros qui peuvent être achetés ainsi est aussi un terme du contrat d'option). Deux questions se sont posées aux intervenants sur ces marchés : quel est le prix (appelé la prime) de tels contrats optionnels et quelle attitude adopter lorsqu'on a vendu un tel produit et ainsi endossé le risque - hausse du dollar contre l'euro à la maturité du contrat - en lieu et place de l'acheteur ? tout d'abord on va commecer à décrire l'évolution des cours

4.2.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Sholes pour d'écrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de pris S_t^0 à l'instant t).On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivant

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \tag{4.1}$$

oú r est une constante positive. Cele signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égale à r
On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}, \quad pour t \geq 0$.
On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle

stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \tag{4.2}$$

oú μ et σ sont deux constantes et B_t un mouvement brownien standard.
Le modèle est étudié sur l'intervale $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier.Comme nous l'avons vue deja ,l'équation (4.2) se résout, explicitement :

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.Il en résulte en particulier que, selon ce modéle, la loi de S_t est log-normale
Plus précisément, on voit que le processus S_t vérifie une équation du type (4.2) si et seulement si le processus $\log(S_t)$ est un mouvement brownien.
Compte tenu de la définition du mouvement brownien ,S_t vérifie les propriétée suivante :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t, S_t/S_u$ où ,l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$,
- Stationnarité des accroissement relatifs : si $u \leq t$ la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$

Ces trois propriétés traduisent de façon concréte les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action. Pour formaliser la notion de couverture dynamique, conservons l'exemple du taux de change. A la date 0, le vendeur reçoit de l'acheteur la prime C_0 (le prix du produit dérivé). Il va investir cette prime au cours du temps en dollars (américains). Plus précisément, il en achète une quantité (algébrique) δ_t à chaque instant t, le reste étant non investi (nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que le taux d'intérêt, qui rémunère l'argent non investi, ici les liquidités en dollar, est nul). Aucun apport extérieur d'argent ne doit intervenir dans sa gestion dynamique : on dira que son portefeuille est autofinancé.
Si sa valeur au cours du temps est $(V_t)_{t\in[0,T]}$, alors sa variation infinitésimale doit satisfaire

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t(S_{t+dt} - S_t) \tag{4.3}$$

avec la contrainte d'obtenir à maturité T ce à quoi il s'est engagé auprès de l'acheteur, à savoir

$$V_T = max(S_T - K, 0) \tag{4.4}$$

Arrivé à ce point de l'analyse, il devient important de préciser le modèle (stochastique) d'évolution du taux de change $(S_t)_{t\geq 0}$. Sans perdre en généralité, il est assez naturel de décomposer son rendement instantané comme la superposition d'une tendance locale et d'un bruit. Samuelson (1960), puis Black, Scholes et Merton (1973) proposent une modélisation du bruit à l'aide d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, ce qui conduit à une dynamique infinitésimale du type

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t) \tag{4.5}$$

L'amplitude locale du bruit est donnée par le paramètre σ (supposé non nul), appelée volatilité. Un calcul différentiel peut aussi être développé, avec pour base la formule d'Itô : pour toute fonction f suffisamment régulière, on a :

$$f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt + \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt \tag{4.6}$$

La présence du terme supplémentaire $\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt$ faisant apparaitre la dérivée seconde de f en la seconde variable provient de la variation quadratique finie du mouvement brownien. C'est en quelque sorte la marque de fabrique du calcul différentiel stochastique puisqu'il n'intervient pas dans le calcul différentiel ordinaire.

À l'aide de ces outils mathématiques, Black, Scholes et Merton résolvent le problème de couverture de l'option d'achat. En effet, si la valeur du portefeuille associée s'écrit $V_t = C(t, S_t)$, alors en identifiant les équations (4.3), (4.4) et (4.6), on a nécessairement d'une part $\delta(t) = \partial_x C(t, S_t)$

et d'autre part

$$\partial_t C(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{x,x} C(t, x) = 0, \quad C(T, x) = \max(x - K, 0).$$

Cette dernière équation aux dérivées partielles se ramène par changement de variables à l'équation de la chaleur dont la solution, bien connue depuis longtemps, est explicite : on obtient ainsi la célèbre formule de Black et Scholes utilisée dans toutes les salles de marché du monde, donnant la valeur $V_0 = C(0, S_0)$ de l'option aujourd'hui. Il est alors remarquable qu'avec la stratégie ci-dessus, le vendeur de l'option parvienne dans tous les scénarios de marché à générer la cible aléatoire $\max(S_T - K, 0)$.

Il est aussi surprenant de constater que la prime V_0 ne dépend du modèle (4.5) que par l'intermédiaire de la volatilité σ : en particulier le rendement local (μ_t) n'intervient pas dans la formule.

Le prix (ou la prime) de l'option d'achat de maturité T et de prix d'exercice K est donné par la fonction

$$\begin{cases} C(t,x) = xN[d_1(x/K,t)] - KN[d_0(x/K,t)] \\ d_0(x/K,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln(y) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(x/K,t) = d_0(x/K,t) + \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

ou N est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite. La stratégie de couverture associée est donnée à l'instant t par $\sigma(t) = C''_x(t, S_t) = N[d_1(S_t/K,t)]$ parts de l'actif risqué.

4.3 Perspectives

En conclusion de ce travail , il parait utile de developper et d'approfondir l'étude du mouvement brownien standard et fractionnaire , à travers leurs propriétes trajectorielles, l'etude de la variation et leurs proprités asymptotiques et d'éxaminer leurs applications en mathématique financière et d'autres domaine tels que l'électronique(traitement de signal....). Pour cela, il est utile de se pencher sur d'autres méthodes de simulation tel que la méthode de Monte Carlo , la méthode de Cox-Ingersoll- Ross ...

4.4 Bibliographie

- [1] Jean-Pierre KAHANE : Le Mouvement Brownien et son histoire,réponses à quelques questions
- [2] SHORACK, G.R, WELLNER, J.A : Empirical Processes with Applications to Stochastics,Wiley New York, 1986 pp.30-33.
- [3] DANIEL .R(F-Paris7) , MARC Y (F-Paris6).Continuous Martingales and Brownien Motion.Third edition. Springer-Verlag,Berlin 1999.
- [4] RUSSO, F(F-Paris 13-GL) ; P, VALLOIS(F-NANCY) Stochastic calculus with respect to continious finite quadratic variation processes,stochastics Rep.70(2000),
  no.1-2,1-40.
- [5] LAMBERTON .D ;LAPEYER . B Introduction au calcul sthochastique appliqué a la finance .(French)[Introduction to stochastic calculus applied to finance]Ellipses, Edition Marketing,Paris 1997.
- [6] N .BOULEAU, Processus stochastiques et Applications, HERMANN, 1988.
- [7]I. KARATZAS, S.E.SHERV,Bownien Motion and Stochastic calculus, Springer-Verlag, New York 1988.
- [8] L. BACHELIER, Théorie de la spéculation,thése,ann.Sci. de l'Ecol Norm. Sup.. Série 3,janvier 1900,17 : 21-86.
- [9] F.BLACK,M.SCHOLES. the pricing of options and coporate liabilities, journal of political economy, 81 :637-654,1973(May-June).
- [10] GILLES PAGES, MARC YOR , EMMANUEL GOBET,Mathématiques et finance.

4.5 Abstract

The Brownian motion or Wiener process was observed by Robert Brown at no defferentiable of fine particules in a fluid in 1827. In my repport i had defined standard Brownian motion and fractional Brownian motion,and i was interested at its fondamental properties and the study of its variation.However,in this actual time Brownian motion play an important role in financical mathematics, I closed this repport by an application " Black and Scholes "

4.6 résumé

Le mouvement Brownien ou processus de Wiener a été observé par Robert Brown au trajectoire non différentiable de fine particules dans un fluide en 1987. Dans le cadre de mon mémoire j'ai défini le mouvement Brownien standard et le mouvement Brownien fractionnaire et je me suis intéressé à ses propriétés fondamentales ainsi qu'a l'étude de sa variation. Comme le mouvement Brownien joue un rôle important en mathématique financières, à l'heur actuelle, j'ai terminé ce travaille par une application " Le modèle de Black et scholes ".