

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES

**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

N° d'ordre : 042/Mag/2009  
Série : 002/Mat/2009



**MEMOIRE**

*Présenté pour obtenir le diplôme de*

**MAGISTÈRE EN MATHÉMATIQUES**

*Thème*

**Les systèmes  
Chaotiques à dérivées  
Fractionnaires**

*Option :*

**Equations différentielles et applications**

*Présenté par :*

**ABD ELOUAHAB MOHAMED**

**SALAH**

**Devant le jury :**

<b>Président</b>	M.Denche	Prof Univ. Constantine.
<b>Rapporteur</b>	N.Hamri	Prof Univ. Constantine.
<b>Examineur</b>	Elhadj.Zeraoulia	Mc Univ.Tébessa
<b>Examineur</b>	K.Haouam	Mc Univ.Tébessa

**Soutenu le : 02/03/2009**

# Remerciements

*C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*En tout premier lieu, je tiens à remercier le professeur Nasr-eddine Hamri d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.*

*Je remercie vivement le professeur Mohamed Denche de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury. Je remercie également le docteur Elhadj Zeraoulia et le docteur Kamel Houam membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail et pour leurs conseils durant la réalisation de ce mémoire.*

*Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille, en particulier mon père et mon épouse de l'affection dont elle a su m'entourer depuis toujours.*

*J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.*

*Enfin, je dédie ce travail à celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>La dérivation fractionnaire</b>	<b>13</b>
1.1	<b>Outils de base</b>	13
1.1.1	La fonction Gamma et la fonction Béta	13
1.1.2	La Transformée de Laplace	14
1.2	<b>Intégration fractionnaire</b>	15
1.3	<b>Dérivation fractionnaire</b>	16
1.3.1	Approche de Grünwald-Letnikov	16
1.3.2	Approche de Riemann-Liouville	22
1.3.3	Approche de Caputo	26
1.4	<b>Quelques propriétés des dérivées fractionnaires</b>	28
1.4.1	Linéarité	28
1.4.2	Règle de Leibniz	28
1.5	<b>Interprétation des dérivées fractionnaires</b>	29
1.5.1	Interprétation géométrique des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville	30
1.5.2	Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes	32
1.5.3	Interprétation physique de l'intégration fractionnaire	34
1.5.4	Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	35
1.6	<b>Application des dérivées fractionnaires dans la modélisation</b>	36

1.6.1	Modèles rhéologiques élémentaires . . . . .	36
1.6.2	Modèles fractionnaires . . . . .	39
1.7	<b>Equations différentielles fractionnaires</b> . . . . .	43
1.7.1	Existence et unicité . . . . .	43
1.7.2	Résolution numérique . . . . .	46
1.8	<b>Conclusion</b> . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques et chaos</b> . . . . .	<b>50</b>
2.1	<b>Notions de système dynamique</b> . . . . .	50
2.1.1	Orbite . . . . .	51
2.1.2	Flot . . . . .	51
2.1.3	Points d'équilibres . . . . .	52
2.1.4	Ensembles limites . . . . .	53
2.1.5	Attracteurs . . . . .	53
2.1.6	Notions de stabilité . . . . .	55
2.1.7	Stabilité d'un cycle limite . . . . .	63
2.1.8	Théorème de la variété centrale . . . . .	65
2.2	<b>Bifurcations locales</b> . . . . .	67
2.2.1	Stabilité structurelle . . . . .	68
2.2.2	Valeur de bifurcation et codimension . . . . .	68
2.2.3	Bifurcation de codimension un (I) . . . . .	69
2.3	<b>Le chaos</b> . . . . .	73
2.3.1	Propriétés du chaos . . . . .	74
2.3.2	Scénarios de transition vers le chaos . . . . .	75
2.3.3	Les exposants de Lyapunov . . . . .	76
2.3.4	Estimation du plus grand exposant de Lyapunov . . . . .	79
2.4	<b>Conclusion</b> . . . . .	80

<b>3</b>	<b>Etude de quelques systèmes d'ordre fractionnaire</b>	<b>81</b>
3.1	<b>Un modèle financier</b>	81
3.1.1	Description du système	82
3.1.2	Analyse du système	83
3.1.3	Points d'équilibre	84
3.1.4	Etude numérique	87
3.1.5	Extension au cas fractionnaire	89
3.2	<b>Système de Chua</b>	99
3.2.1	Présentation du système	99
3.2.2	Les points fixes	100
3.2.3	Extension au cas fractionnaire	103
3.2.4	Etude numérique	104
3.3	<b>Conclusion</b>	108
<b>4</b>	<b>Le contrôle du chaos</b>	<b>109</b>
4.1	<b>La méthode OGY</b>	110
4.1.1	Présentation de la méthode	110
4.1.2	Application dans le cas discret	112
4.1.3	Application dans le cas continu	115
4.2	<b>La méthode feedback</b>	121
4.2.1	La méthode feedback avec force externe	122
4.2.2	Exemple d'application	123
4.2.3	La méthode feedback retardé	130
4.2.4	Exemples d'application	131
4.3	<b>Conclusion</b>	145
4.4	<b>Conclusion générale</b>	146
4.5	<b>Annexe</b>	147

# Table des figures

1-1	Grillage et ses ombres ${}_0\mathbf{I}_t^\alpha f(t)$ et ${}_0\mathbf{I}_t^1 f(t)$ pour $\alpha = 0.75$ et $\alpha = 1.25$ , $f(t) = t + 0.5\sin t$ ; $0 \leq t \leq 10$ . . . . .	31
1-2	Le processus de changement de la forme de la base du grillage pour : ${}_0I_t^\alpha f(t)$ ; $\alpha = 0.75$ , $0 \leq t \leq 10$ . . . . .	32
1-3	Le profil du changement de l'ombre suivant le changement du grillage pour : ${}_0I_t^\alpha f(t)$ ; $\alpha = 0.75$ , $0 \leq t \leq 10$ avec la période de temps $\Delta t = 0.5$ entre les profils . . . . .	33
1-4	Schématisation des éléments rhéologiques usuels en viscoélasticité . . . . .	37
1-5	Modèles rhéologiques usuels . . . . .	37
1-6	Schématisation de l'élément spring-pot . . . . .	40
1-7	Modèles fractionnaires . . . . .	41
2-1	Stabilité globale . . . . .	57
2-2	Region de stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire $\alpha$ . . . . .	62
2-3	Section de Poincaré et application de premier retour. . . . .	64
2-4	Diagramme de bifurcation noeud-col . . . . .	70
2-5	Diagramme de bifurcation transcritique. . . . .	71
2-6	Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sou-critique. . . . .	72
2-7	Diagramme de bifurcation Hopf. . . . .	72
2-8	Sensibilité aux conditions initiales. . . . .	73
2-9	Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov . . . . .	79

3-1	Estimation de plus grand exposant de Lyapunov . . . . .	87
3-2	Transition vers le chaos via le doublement de période. . . . .	88
3-3	Evolution de la valeur critique de $q$ . . . . .	93
3-4	Evolution du plus grand exposant de Lyapunov $\lambda$ suivant l'ordre de dériv- ation. . . . .	94
3-5	La dynamique du système pour différentes valeurs de $q$ . . . . .	94
3-6	Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de $q_1$ . . . . .	95
3-7	Portrait de phase pour quelques valeurs de $q_1$ . . . . .	95
3-8	Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de $q_2$ . . . . .	96
3-9	Le portrait de phase et l'évolution temporelle pour quelques valeurs de $q_2$ . . . . .	96
3-10	Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de $q_3$ . . . . .	97
3-11	Portrait de phase pour quelques valeurs de $q_3$ . . . . .	98
3-12	La transition vers le chaos via l'intermittence. . . . .	98
3-13	Le circuit de Chua. . . . .	99
3-14	Diagrammes de bifurcation en fonction de : <b>a)</b> $q$ , <b>b)</b> $q_1$ , <b>c)</b> $q_2$ , <b>d)</b> $q_3$ . . . . .	105
3-15	Portraits de phase et evolutions temporelle du circuit de Chua pour quelques valeurs de $q$ . . . . .	106
3-16	Portrait de phase et evolution temporelle pour $q = 1$ . . . . .	107
3-17	Portrait de phase et evolution temporelle pour $q = 1.015$ . . . . .	107
4-1	Les directions propres stables et instables au voisinage du point fixe. . . . .	111
4-2	Attracteur de Hénon et l'évolution temporelle pour $a = 1.4$ , $b = 0.3$ $(x_0, y_0) = (0.01, 0.01)$ . . . . .	113
4-3	Résultat de contrôle pour l'application de Hénon en appliquant la méthode OGY. . . . .	114
4-4	Section de Poincaré pour le système financier à $y = y_{\min}$ . . . . .	115
4-5	Application de premier retour pour $a = 2, 3, 4$ . . . . .	116
4-6	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $d$ . . . . .	117
4-7	Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de $d$ . . . . .	118

4-8	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $K = \frac{\partial a}{\partial y_f}$ . . . . .	119
4-9	Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de $k$ . . . . .	119
4-10	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $q$ . . . . .	120
4-11	Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de $q$ . . . . .	121
4-12	Stabilisation du point fixe instable $(0, 0, 0)$ dans le circuit de Chua. . . . .	126
4-13	L'influence de l'ordre de dérivation $q$ sur la stabilisation du point fixe 0 . . . . .	126
4-14	L'influence de l'ordre de dérivation $q_1$ sur la stabilisation du point fixe 0 . . . . .	127
4-15	L'influence de l'ordre de dérivation $q_2$ sur la stabilisation du point fixe 0. . . . .	127
4-16	L'influence de l'ordre de dérivation $q_3$ sur la stabilisation du point fixe 0. . . . .	128
4-17	Résultat de la stabilisation d'un cycle limite dans le circuit de Chua . . . . .	128
4-18	Bifurcations de $x$ et $z$ en fonction de l'ordre de dérivation. . . . .	129
4-19	Résultats de contrôle pour quelques valeurs de l'ordre de dérivation. . . . .	130
4-20	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $T_1$ . . . . .	132
4-21	Diagramme de bifurcation et évolution de $dx, dy, dz$ en fonction de $K_1$ . . . . .	132
4-22	Résultats de contrôle par le retard dans les intérêts $x$ . . . . .	133
4-23	Diagramme de bifurcation de $y$ et évolution de $dx, dy, dz$ en fonction de $T_2$ . . . . .	134
4-24	Résultats de contrôle par le retard dans la demande d'investissement $y$ . . . . .	135
4-25	Diagramme de bifurcation de $y$ et évolution de $dx, dy, dz$ en fonction de $T_3$ . . . . .	136
4-26	Résultats de contrôle par le retard dans l'indice des prix $z$ . . . . .	136
4-27	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $K$ pour $T_1 = T_2 = T_3 = 4$ . . . . .	137
4-28	Diagramme de bifurcation de $y$ et évolution de $dx, dy, dz$ en fonction de $T$ . . . . .	138
4-29	Résultats de contrôle par le retard dans les trois variables $x, y$ et $z$ . . . . .	138
4-30	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $T$ , ( $T_1 = T_3 = T$ ). . . . .	139
4-31	Résultats de contrôle par le retard dans les deux variables $x$ et $z$ . . . . .	140
4-32	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $q_1$ . . . . .	141
4-33	Résultats de contrôle pour quelques valeurs de $q_1$ . . . . .	142
4-34	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $q_2$ . . . . .	142
4-35	Résultats de contrôle pour quelques valeurs de $q_2$ . . . . .	143

4-36	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $q_3$ . . . . .	143
4-37	Résultats de contrôle pour quelques valeurs de $q_3$ . . . . .	144
4-38	Diagramme de bifurcation de $y$ en fonction de $q$ . . . . .	144
4-39	Résultats de contrôle pour quelques valeurs de $q$ . . . . .	145

# Introduction générale

## Contexte historique

La **théorie de dérivation fractionnaire** est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent [1] à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole  $\frac{d^n f}{dt^n}$  pour désigner la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction  $f$ . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que  $n \in \mathbb{N}$ ), l'Hôpital a répondu :



Que signifie  $\frac{d^n f}{dt^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a

demandé spécifiquement pour  $n = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

**Une autre théorie** se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est **la théorie des systèmes dynamiques**, qui a pour but l'étude des systèmes physiques... , qui évoluent au cours du temps. Elle a son origine dans les travaux d'Henri Poincaré (1854 – 1912), à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, sur le problème des trois corps. Poincaré a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, dans l'introduction de son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, publié en 1881 Poincaré a dit : "Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres..."

L'oeuvre de Poincaré a donc la particularité de constituer un point d'origine incontestable du domaine, par la variété des outils, des méthodes et des concepts nouveaux qui s'y déploient au service du problème de la mécanique céleste.

Après cette oeuvre fondatrice on peut mentionner les principaux moments suivants

- La théorie de la stabilité d'Alexandre Lyapunov à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle.
- Les travaux de George D. Birkhoff sur la topologisation des systèmes dynamiques conservatifs dans l'entre-deux-guerres.
- Les recherches de Balthasar Van der Pol et d'autres ingénieurs dans les années 1930 sur des équations à un petit nombre de degrés de liberté.
- L'école d'Alexandre Andronov à Gorki autour de la théorie des oscillations, avec

en particulier les résultats d'Andronov et Lev Pontrjagin sur les systèmes grossiers à 2 dimensions.

— Les travaux de topologie fine sur les équations différentielles, à l'époque de la Seconde Guerre mondiale, ceux de Mary Cartwright et John Littlewood d'une part de Norman Levinson et quelques autres, d'autre part.

— L'école de Solomon Lefschetz à Princeton, Baltimore, puis Brown University dans les années cinquante et soixante.

— Les travaux autour de Andrei Kolmogorov sur l'étude de la stabilité des systèmes hamiltoniens, etc...

— Les travaux d'Eberhard Hopf ou ceux de Kurt Otto Friedrichs sur les bifurcations.

— Le concept de chaos est introduit avec le célèbre papillon d'E.N. Lorenz en 1963, mais le terme « chaos » n'est introduit dans la littérature scientifique qu'en 1975 par les chercheurs Tien-Yien Li et James A Yorke [4] pour décrire le comportement des systèmes dynamiques qui ont une grande sensibilité aux conditions initiales (un système chaotique est un système déterministe et imprévisible).

— Au début des années 90 les trois scientifiques Ott, Grebogi et Yorke ont publié le premier article sur le contrôle du chaos [5]

— Récemment, l'étude des systèmes d'ordre fractionnaires est devenue un domaine de recherche très actif.

Il existe des différences importantes dans de nombreux aspects entre les systèmes différentielles ordinaires et les systèmes différentielles fractionnaires correspondants, par exemple, les propriétés qualitatives. La plupart des propriétés des systèmes ordinaires ne peuvent pas être simplement étendues au cas des systèmes d'ordre fractionnaire. Un problème que nous allons étudier c'est quand un système ordinaire est chaotique, dans quelles conditions le système fractionnaire correspondant est aussi chaotique? Plus précisément pour quelles ordres, le système d'ordre fractionnaire reste chaotique?

**Ce mémoire** a pour objet l'étude des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires. Il contient quatre chapitres.

**Dans le premier chapitre**, nous allons aborder la dérivation fractionnaire en présentent trois approches célèbres, ensuite nous donnons des interprétations géométriques et physiques quelques applications dans la modélisation.

**Au deuxième chapitre** nous donnons des notions de la théorie des systèmes dynamiques (notions de stabilité, de bifurcation, ainsi que des caractéristiques des systèmes chaotiques et les différentes manières de transition vers le chaos).

**Le troisième chapitre** est consacré à l'étude de quelques systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires où nous allons montrer que le chaos existe dans des systèmes autonomes d'ordre total inférieur à trois.

Enfin **au quatrième chapitre** nous présentons deux méthodes pour contrôler le chaos, la méthode **OGY** et la méthode **Feedback** ainsi que leurs applications à des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ensuite nous observons l'influence de la variation d'ordre fractionnaire sur les systèmes contrôlés.

# Chapitre 1

## La dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et d'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

### 1.1 Outils de base

#### 1.1.1 La fonction Gamma et la fonction Bêta

1. La fonction  $\Gamma$  d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes [6].

Pour  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  on définit  $\Gamma(\alpha)$  par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

La fonction  $\Gamma$  s'étend (en une fonction holomorphe) à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$  tout entier

On a  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  et pour  $n$  entier on a  $n! = \Gamma(n+1)$ , pour plus d'informations sur la fonction  $\Gamma$  voir [6]

2. La fonction Béta est définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(q) > 0$$

### 1.1.2 La Transformée de Laplace

1. Si la fonction  $f$  est d'ordre exponentiel  $\alpha$  (c'est à dire qu' il existe deux constantes positives  $M$  et  $T$  telles que  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$  pour  $t > T$  ) alors la fonction  $F$  de la variable complexe  $s$  définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction  $f$ .

2. On peut reconstituer  $f$  à partir de sa transformée  $F$  à l'aide de la transformée de Laplace inverse  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$   $c = \operatorname{Re}(s)$

3. La Transformée de Laplace du produit de deux fonctions  $f$  et  $g$  qui sont nulles pour  $t < 0$  est égale au produit de leur transformées de Laplace.

4. La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

5. La transformée de Laplace de la fonction  $t^{p-1}$  est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p) s^{-p}$$

## 1.2 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction  $f$  définie pour  $t > a$

on pose

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \quad , \quad (I^2f)(t) = \int_a^t (If)(u)du = \int_a^t \left( \int_a^u f(\tau)d\tau \right) du$$

en répétant  $n$  fois on obtient d'après la formule de Cauchy

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

en utilisant la fonction  $\Gamma$  d'Euler (1.1) on aura (voir [3],[7]) la définition suivante :

### Définition 1.1

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  ; l'opérateur  $I^\alpha$ , définit sur  $L_1[a, b]$  par :

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{1.2}$$

pour  $t \in [a, b]$  est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre  $\alpha$ .

### Théorème 1.1

Soit  $f \in L_1[a, b]$  et  $\alpha > 0$ , l'intégrale  $(I^\alpha f)(t)$  existe pour tout  $t \in [a, b]$  et la fonction  $I^\alpha f$  elle même est un élément de  $L_1[a, b]$

Pour la démonstration de ce théorème voir [7]

### Propriétés

1. Pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  on a  $I^\alpha \circ I^\beta = I^\beta \circ I^\alpha = I^{\alpha+\beta}$
2. (**Transformée de Laplace**) On prend  $a = 0$ , pour une fonction  $f$  qui possède la transformée de Laplace  $F(s)$  dans le demi plan  $\text{Re}(s) > 0$  nous avons :

$$L[I^\alpha f](s) = s^{-\alpha} F(s)$$

## Exemple

$$\begin{aligned} I^\alpha(t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (\mathbf{t}-\mathbf{a})^{\alpha+m} \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = 0.5$ ,  $m = 1$  et  $a = 0$  on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (t)^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$$

$$\begin{aligned} I^\alpha(t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (\mathbf{t}-\mathbf{a})^{\alpha+m} \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = 0.5$ ,  $m = 1$  et  $a = 0$  on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (\mathbf{t})^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}$$

## 1.3 Dérivation fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons souligner les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

### 1.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier  $p$  (si  $p$  est positif) et l'intégrale répétée  $(-p)$  fois (si  $p$  est négatif) d'une

fonction  $f$  par la formule générale suivante :

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh) \quad \text{avec} \quad \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

qui représente la dérivée d'ordre entier  $p$  si  $0 < p < n$  et l'intégrale répétée  $(-p)$  fois si  $-n < p < 0$  avec  $nh = t - a$

La généralisation de cette formule pour  $p$  non entier (avec  $0 \leq n - 1 < p < n$  et  $(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)(2-p)\dots(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}$ ) nous donne :

$$\boxed{{}^G D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t - kh)} \quad (1.3)$$

et

$$\boxed{{}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t - kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau} \quad (1.4)$$

Si  $f$  est de classe  $C^n$  alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$\boxed{{}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t - \tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau} \quad (1.5)$$

et aussi :

$$\boxed{{}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau} \quad (1.6)$$

## Exemple

### 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov

*En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.*

Si  $f(t) = c$  et  $p$  non entier on a :  $f^{(k)}(t) = 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p f(t) &= \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}}_{\downarrow 0} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{\downarrow 0} \\
&= \boxed{\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}}
\end{aligned}$$

## 2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Grünwald-Letnikov.

Soit  $p$  non entier et  $0 \leq n-1 < p < n$  avec  $\underline{\alpha > n-1}$  alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et } f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

d'où

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

En faisant le changement de variable  $\tau = a + s(t-a)$  on aura :

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
&= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}}
\end{aligned}$$

$$\text{par exemple } {}_0^G D_t^{\frac{1}{2}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}$$

## Propriétés

### 1. Composition avec les dérivées d'ordre entier

#### Proposition 1.1

Pour  $m$  entier positif et  $p$  non entier on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) &= {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \\ \text{et } {}_a^G D_t^p\left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) &= {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \end{aligned}$$

#### Preuve.

Pour  $m$  entier positif et  $p$  non entier avec  $(n-1 < p < n)$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t)}$$

mais

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p\left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \\ &= \boxed{{}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}} \end{aligned}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation convention-

nelle ne commutant que si :  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ .

## 2. Composition avec les dérivées fractionnaires

### Proposition 1.2

\* Si  $q < 0$  et  $p \in \mathbb{R}$  alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

\* Si  $0 \leq m - 1 < q < m$  et  $p < 0$  alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

seulement si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, m - 2$

\* Si  $0 \leq m - 1 < q < m$  et  $0 \leq n - 1 < p < n$  alors :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

seulement si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, r - 2$  avec  $r = \max(m, n)$

### Preuve

\* Si  $q < 0$  et  $p < 0$  alors :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} ({}_a^G D_t^q (f(\tau))) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - s)^{-q-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t f(s) ds \int_s^t (\tau - s)^{-q-1} (t - \tau)^{-p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-(p+q))} \int_a^t (t - s)^{-p-q-1} f(s) ds \\ &= \boxed{{}_a^G D_t^{p+q} f(t)} \end{aligned}$$

\* Si  $q < 0$  et  $0 \leq n-1 < p < n$  on a  $p = n + (p-n)$  avec  $(p-n) < 0$  alors :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}_a^G D_t^{p-n} ({}_a^G D_t^q (f(t))) \} \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^G D_t^{q+p-n} (f(t))) \\ &= \boxed{{}_a^G D_t^{p+q} f(t)} \end{aligned}$$

\* Pour  $0 \leq m-1 < q < m$  et  $p < 0$  on a :

$${}_a^G D_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_a^t (t-\tau)^{m-q-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

et  $(t-a)^{k-q}$  ont des singularités non-integrables donc  ${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t)))$  n'existe que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, m-2$  et dans ce cas on a :

$${}_a^G D_t^q f(t) = \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-q}}{\Gamma(m-q)} + {}_a^G D_t^{q-m} f^{(m)}(t)$$

alors

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-q-p}}{\Gamma(m-q-p)} + {}_a^G D_t^{p+q-m} f^{(m)}(t) \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-(q+p)-1}}{\Gamma(m-q-p)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-(p+q))} \int_a^t (t-\tau)^{m-(p+q)-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a^G D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

\* Pour  $0 \leq m-1 < q < m$  et  $0 \leq n-1 < p < n$  on a :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}_a^G D_t^{p-n} ({}_a^G D_t^q (f(t))) \} \\ \text{Si } f^{(k)}(a) &= 0 \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, m-2 \text{ alors :} \\ {}_a^G D_t^{p-n} ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= {}_a^G D_t^{q+p-n} (f(t)) \text{ par suite :} \\ {}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^G D_t^{q+p-n} (f(t))) \\ &= \boxed{{}_a^G D_t^{p+q} f(t)} \end{aligned}$$

### 3. Transformée de Laplace

Soit  $f$  une fonction qui possède la transformée de Laplace  $F(s)$ .

Pour  $0 \leq p < 1$  on a :

$$\begin{aligned} {}_0^G D_t^p f(t) &= \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \text{ alors :} \\ L[{}_0^G D_t^p f(t)](s) &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} [sF(s) - f(0)] \\ &= s^p F(s) \end{aligned}$$

Pour  $p \geq 1$  il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi :

$$L[{}_0^G D_t^p f(t)](s) = s^p F(s)$$

#### 1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a; t]$  alors la dérivée fractionnaire d'ordre  $p$  (avec  $n-1 \leq p < n$ ) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)) \end{aligned} \tag{1.7}$$

### Remarque

Si  $f$  est de classe  $C^n$  alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= {}^G D_t^p f(t) \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

### Exemple

1. **La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville.**

*En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :*

$${}^R D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

2. **La dérivée de  $f(t) = (t-a)^\alpha$  au sens de Riemann-Liouville.**

*Soit  $p$  non entier et  $0 \leq n-1 < p < n$  et  $\underline{\alpha > -1}$  alors on a :*

$${}^R D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

En faisant le changement de variable  $\tau = a + s(t - a)$  on aura :

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p (t - a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n - p)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{n + \alpha - p} \int_0^1 (1 - s)^{n - p - 1} s^\alpha ds \\
&= \frac{\Gamma(n + \alpha - p + 1) \beta(n - p, \alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \\
&= \frac{\Gamma(n + \alpha - p + 1) \Gamma(n - p) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - p + 1) \Gamma(n + \alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \\
&= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p}}.
\end{aligned}$$

Par exemple  ${}_0^R D_t^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$ .

## Propriétés

### 1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

\*  ${}_a^R D_t^p (I^p f(t)) = f(t)$ ; alors l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, et en générale on a :

$${}_a^R D_t^p (I^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p - q} f(t)$$

(si  $p - q < 0$  on pose  ${}_a^R D_t^{p - q} f(t) = I_t^{q - p} f(t)$  )

$$* {}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^q (f(t))) = {}_a^R D_t^{q - p} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}_a^R D_t^{q - k} f(t)]_{t=a} \frac{(t - a)^{p - k}}{\Gamma(p - k + 1)}$$

(avec  $m - 1 \leq q < m$ ) on déduit alors que la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

### 2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^p f(t)) &= {}_a^R D_t^{n + p} f(t) \\
\text{mais } {}_a^R D_t^p \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) &= {}_a^R D_t^{n + p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t - a)^{k - p - n}}{\Gamma(k - p - n + 1)}
\end{aligned}$$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si :  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

### 3. Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit  $n - 1 \leq p < n$  et  $m - 1 \leq q < m$  alors :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p ({}^R D_t^q (f(t))) &= {}^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D_t^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)} \\ &\text{et} \\ {}^R D_t^q ({}^R D_t^p (f(t))) &= {}^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^n [{}^R D_t^{p-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)} \end{aligned}$$

par suite deux opérateurs de dérivations fractionnaires  ${}^R D_t^p$  et  ${}^R D_t^q$  ne commutent que si  $p=q$  et  $[{}^R D_t^{p-k} f(t)]_{t=a} = 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$  et  $[{}^R D_t^{q-k} f(t)]_{t=a} = 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, m$ .

### 4. Transformée de Laplace

Si  $f$  possède la transformée de Laplace  $F(s)$  alors :

$$L[{}^R D_t^p f(t)](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^R D_t^{p-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{avec } n - 1 \leq p < n)$$

L'application de cette transformée est limitée à cause de l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure  $t = 0$ .

### 1.3.3 Approche de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure  $t = a$ .

Une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo.

Soit  $p \geq 0$  (avec  $n - 1 \leq p < n$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ )  $f$  est une fonction telle que  $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a, b]$ .

La dérivée fractionnaire d'ordre  $p$  de  $f$  au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p} \left( \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned}$$

#### Propriétés

##### 1. Relation avec la dérivée de Riemann Liouville

Soit  $p \geq 0$  (avec  $n - 1 \leq p < n$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ) supposons que  $f$  est une fonction telle que  ${}_a^C D_t^p$  et  ${}_a^R D_t^p$  existent alors :

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}$$

On déduit que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  on aura  ${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t)$

##### 2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si  $f$  est continue on a :

$${}_a^C D_t^p I_a^p f = f \text{ et } I_a^p {}_a^C D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur

d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droite.

### 3. Transformée de Laplace

Si  $f$  possède la transformée de Laplace  $F(s)$  alors :

$$L[{}^C D_t^p f(t)](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{avec } n-1 \leq p < n)$$

Comme cette transformée induit les valeurs de la fonction  $f$  et ces dérivées  $f^{(k)}$  en la borne inférieure  $t = 0$  pour lesquelles certaine interprétation physique existe elle peut être très utile dans l'application.

#### Exemple

##### 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :  ${}^C D_t^p C = 0$

##### 2. La dérivée de $f(t) = (t - a)^\alpha$ au sens de Caputo .

Soit  $p$  non entier et  $0 \leq n-1 < p < n$  avec  $\alpha > n-1$  alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau - a)^{\alpha-n} \text{ d'ou}$$

$${}^C D_t^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha-n} d\tau$$

En faisant le changement de variable  $\tau = a + s(t - a)$  on aura :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1 - s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\beta(n - p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \\ &= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t - a)^{\alpha-p}} \end{aligned}$$

## 1.4 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

### 1.4.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t)$$

où  $D^p$  désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

### 1.4.2 Règle de Leibniz

Pour  $n$  entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) - R_n^p(t)$$

ou  $n \geq p + 1$  et  $R_n^p(t) = \frac{1}{n\Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau - \xi)^n d\xi$ . (on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0$ )

Si  $f$  et  $g$  avec toutes ses dérivées sont continues dans  $[a, t]$  la formule devient :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t)$$

$D^p$  est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

## 1.5 Interprétation des dérivées fractionnaires

Généralement les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science. Cependant, Le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

L'intégration et la différenciation fractionnaires sont des généralisations de notions d'intégration et de différenciation d'ordre entier, incluent des dérivés d'ordre  $n$  et d'intégrales répétés  $n$  fois comme cas particuliers. A cause de ceci, il serait idéal pour avoir des telles interprétations physiques et géométriques d'opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront aussi un lien aux interprétations classiques de différenciation et d'intégration d'ordre entier connues.

Le manque de ces interprétations a été reconnu à la première Conférence Internationale sur le Calcul Fractionnaire dans (New Haven USA) en 1974 en l'incluant dans la liste de problèmes ouverts . La question était sans réponse, et par conséquent il a été répété aux conférences subséquentes à l'Université de Strathclyde (Royaume-Uni) en 1984 et à l'Université Nihon (Tokyo, Japon) en 1989. La conférence sur les Méthodes des Transformées et les Fonctions Spéciales dans Varna (1996) a montré que le problème était encore irrésolu.

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à essayer de lier les intégrales et les dérivées fractionnaires d'un côté, et la géométrie fractale, d'un autre (R. Nigmatullin 1992; Fu-Yao Ren, Zu-Guo Yu et Feng Su 1996; Zu-Guo Yu, Fu-Yao Ren et Ji Zhou 1997; M. Monsref-Torbati et J.K. Hammond 1998;etc.) Cependant, cette approche a été critiquée par R. Rutman. En principe, les fractales eux-mêmes, ne sont pas en rapport directement avec les intégrales fractionnaires ou les dérivées fractionnaires, seulement la description de processus dynamiques dans les structures fractales peut mener à des modèles qui concernent des opérateurs de l'ordre fractionnaires.

### 1.5.1 Interprétation géométrique des intégrales fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville

Soit l'intégrale fractionnaire à gauche d'ordre  $\alpha$  de Riemann-Liouville suivant :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

On peut l'écrire sous la forme :

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (1.9)$$

Avec

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\} \quad (1.10)$$

La fonction  $g_t(\tau)$  a une propriété d'échelle intéressante. En effet, si on prend  $t_1 = kt$  et  $\tau_1 = k\tau$ ;  $k > 0$  on obtient alors :

$$g_{t_1}(\tau_1) = g_{kt}(k\tau) = k^\alpha g_t(\tau) \quad (1.11)$$

Considérons maintenant l'intégrale (1.9) pour un  $t$  fixé, alors elle devient simplement une intégrale de Stieltjes, et nous pouvons alors utiliser l'idée de G. L Bullock suivante :

Prenons les axes  $\tau$ ,  $g$ , et  $f$ . Dans le plan  $(\tau; g)$  nous traçons le graphe de la fonction  $g_t(\tau)$  pour  $0 \leq \tau \leq t$ . Le long de la courbe obtenue nous "construisons un grillage" de la hauteur variable  $f(\tau)$ , donc le bord supérieur du "grillage" est une ligne à trois dimensions  $(\tau; g_t(\tau); f(\tau))$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Ce "grillage" peut être projeté sur deux surfaces (voir fig 1-1) :

- L'aire de la projection de ce "grillage" sur le plan  $(\tau; f)$  correspond à la valeur de l'intégrale

$${}_0I_t^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau; t \geq 0 \quad (1.12)$$

- L'aire de la projection de ce "grillage" sur le plan  $(g; f)$  correspond à la valeur de

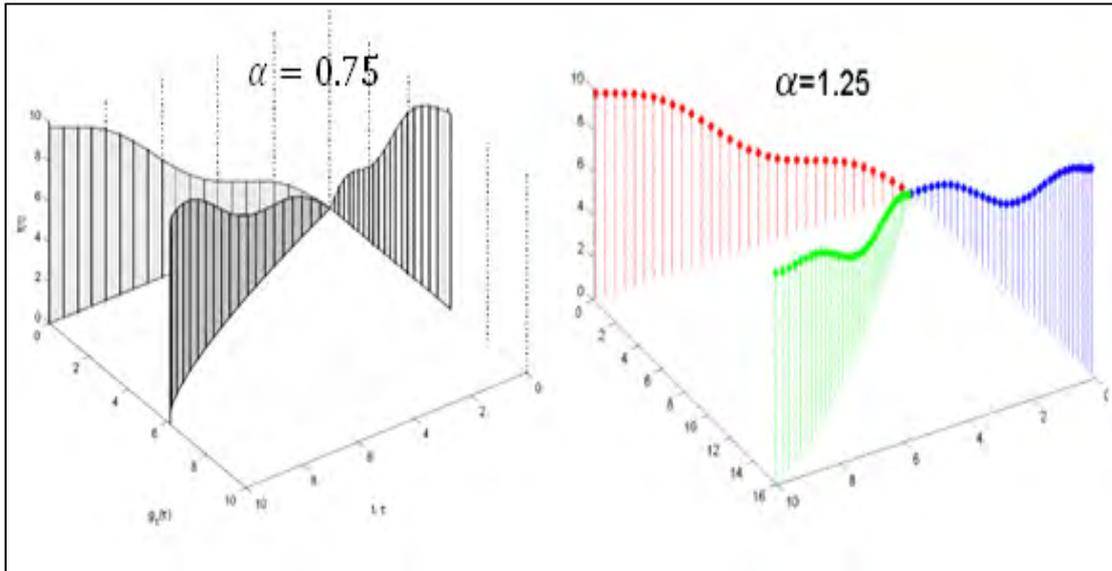


FIG. 1-1 – Grillage et ses ombres  ${}_0\mathbf{I}_t^\alpha f(t)$  et  ${}_0\mathbf{I}_t^1 f(t)$  pour  $\alpha = 0.75$  et  $\alpha = 1.25$ ,  $f(t) = t + 0.5sint$ ;  $0 \leq t \leq 10$ .

l'intégrale (1.9) qui est la même valeur de l'intégrale fractionnaire (1.8).

En d'autres termes, notre "grillage" projette deux ombres sur deux murs. La première d'entre elle, qui est sur le mur  $(\tau; f)$ , est " l'aire célèbre sous la courbe  $f(\tau)$ " qui est une interprétation géométrique standard de l'intégrale (1.12). L'ombre sur le mur  $(g; f)$  est une interprétation géométrique de l'intégrale fractionnaire (1.8) pour un  $t$  fixé.

Evidemment, si  $\alpha = 1$ , alors  $g_t(\tau) = \tau$ , et les deux "ombres" sont égales. Cela montre que l'intégration définie classique est même un cas particulier de l'intégration fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville du point de vue géométrique.

Que se passe quand  $t$  varie? Comme  $t$  change, le "grillage" change simultanément sa longueur et, dans un certain sens sa forme aussi, (Figure (1-2))

Si nous suivons le changement de l'ombre sur le mur  $(g; f)$  qui change simultanément avec le "grillage" (figure 1-3), alors on obtient une interprétation géométrique dynamique de l'intégrale fractionnaire (1.8) comme une fonction de la variable  $t$ .

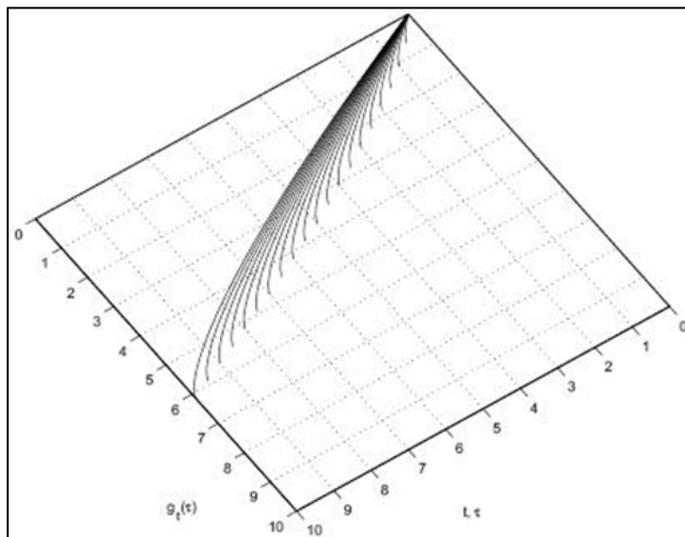


FIG. 1-2 – Le processus de changement de la forme de la base du grillage pour :  ${}_0I_t^\alpha f(t)$ . ;  $\alpha = 0.75$ ,  $0 \leq t \leq 10$ .

### 1.5.2 Interprétation physique de l'intégrale de Stieltjes

L'interprétation géométrique de l'intégration fractionnaire, donnée dans la section précédente est essentiellement fondée sur l'ajout de la troisième dimension ( $g_i(\tau)$ ) à la classique paire,  $(\tau; f(\tau))$ . Si on considère  $\tau$  comme le temps, alors  $g_i(\tau)$  peut être interprété comme un "déformé" échelle de temps.

Imaginons une voiture équipée de deux appareils de mesure : le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse  $v(\tau)$  et l'horloge qui devrait afficher l'heure  $\tau$ , cependant l'horloge affiche le temps incorrectement.

Nous supposons que la relation entre le temps incorrect  $\tau$ , qui est indiqué par l'horloge et dont le conducteur considère comme l'heure exacte, d'une part, et le vrai temps  $T$ , d'autre part, est décrit par la fonction  $T = g(\tau)$ . Cela signifie que lorsque le conducteur mesure l'intervalle de temps  $d\tau$ , alors l'intervalle de temps vrai sera donné par  $dT = dg(\tau)$ .

Le conducteur  $A$ , qui ne connaît pas le mauvais fonctionnement de l'horloge calcule

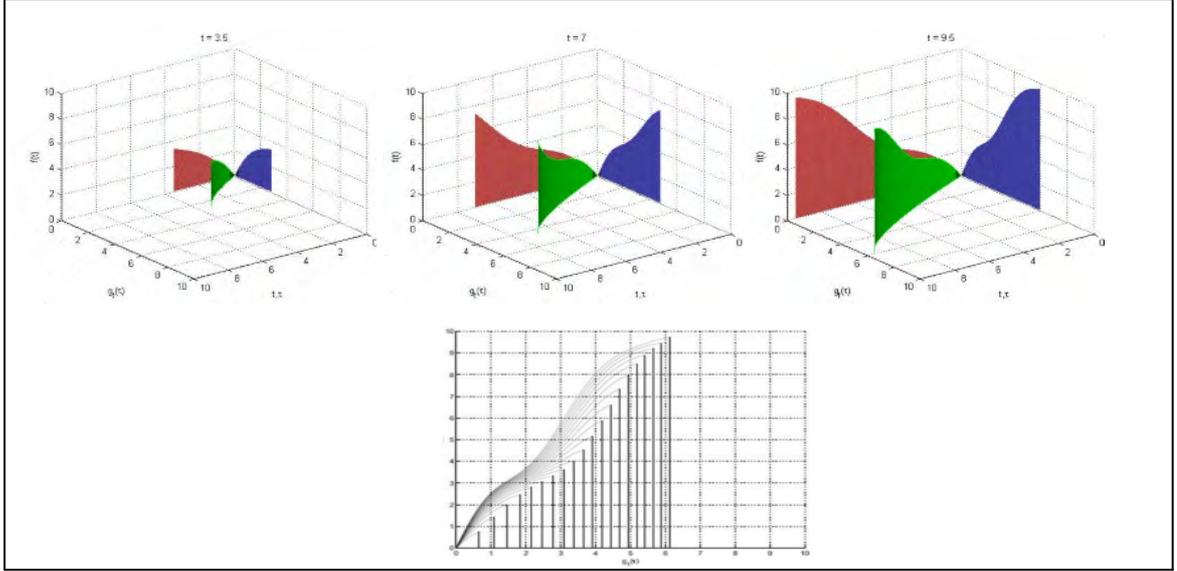


FIG. 1-3 – Le profil du changement de l’ombre suivant le changement du grillage pour :  ${}_0I_t^\alpha f(t)$ . ;  $\alpha = 0.75$ ,  $0 \leq t \leq 10$  avec la période de temps  $\Delta t = 0.5$  entre les profils

la distance parcourue comme l’intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Cependant, l’observateur  $O$  qui est en connaissance de la mauvaise horloge et ayant la fonction  $g(\tau)$ , qui rétablit les valeurs correctes du temps à partir de la cabine de conduite, va calculer la distance réellement parcourue comme :

$$S_o(t) = \int_0^t v(\tau) dg(\tau) \tag{1.13}$$

Cet exemple montre que l’intégrale de Stieltjes (1.13) peut être interprété comme la véritable distance parcourue par un objet en mouvement, pour lequel nous avons enregistré des valeurs correctes de vitesse et des valeurs inexactes de temps ; le rapport entre le temps incorrectement consigné et l’heure exacte  $T$  est donné par une fonction

connue  $T = g(\tau)$ .

### 1.5.3 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire

Considérons l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville suivante :

$$S_o(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = {}_0I_t^\alpha v(t) \quad (1.14)$$

Où  $g_t(\tau)$  est donnée par (1.10).

L'intégrale fractionnaire  $S_o(t)$  de la vitesse individuelle  $v(\tau)$  peut être interprété comme la vraie distance parcourue par un objet mobile, pour lequel nous avons enregistré les valeurs locales de sa vitesse  $v(\tau)$  (vitesse individuelle) et les valeurs locales de ses temps (temps individuels), la relation entre le temps enregistré localement (ce qui est considéré comme découlant uniforme) et le temps cosmique (qui coule non uniformément) est donné par la fonction connue  $g_t(\tau)$ .

La fonction  $g_t(\tau)$  décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de  $\tau$ , mais aussi du paramètre  $t$  qui représente la dernière valeur mesuré du temps individuel de l'objet mobile. Quand  $t$  change, l'intervalle de temps cosmique précédent change également. C'est en accord avec les vues courantes en physique, par exemple, ces périodicités du temps dépendent des champs gravitationnels.

Ceci est en accord avec les vues actuelles de la physique. en effet, B. N. Ivanov a mentionné que « les intervalles de temps dépendent du champ de la gravité ». De même, S. Hawking a écrit que : «Le temps devrait paraître courir plus lentement près d'un corps massif comme la terre.»

« . . . Il n'y a pas de temps absolu unique, mais plutôt chaque individu a sa propre mesure personnelle de temps qui dépend d'où il est, et comment il se déplace. »

Quand un corps mobile change sa position dans l'espace-temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de ce mouvement. Par conséquent, l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement

de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul (employant formule (1.14)) de la vraie distance  $S_O(t)$  parcourue par cet objet mobile.

En d'autres termes, l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la vitesse Individuelle  $v(\tau)$  d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel  $\tau$  et le temps cosmique  $T$  à chaque instant individuelle donnée  $t$  est donné par la fonction connue  $T = g_t(\tau)$  décrite par l'équation (1.10), représente la véritable distance  $S_O(t)$  parcourue par cet objet.

#### 1.5.4 Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Nous pouvons utiliser les propriétés de la différentiation et de l'intégration fractionnaire pour exprimer  $v(t)$  de l'équation (1.14) comme la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville de  $S_O(t)$  :

$$V(t) = {}_0D_t^\alpha S_O(t) \quad (1.15)$$

Où  ${}_0D_t^\alpha$  dénote la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville définie pour  $0 < \alpha < 1$  par :

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

Ceci montre que la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la vraie distance  $S_O(t)$  parcourue par un objet mobile, pour lequel le rapport entre son temps individuel  $\tau$  et le temps cosmique  $T$  à chaque temps individuel  $t$  est donné par la fonction connue  $T = g_t(\tau)$  décrite par l'équation (1.10), est égale à la vitesse individuel  $v(\tau)$  de cet objet.

D'autre part, nous pouvons différencier la relation (1.14) par rapport au variable de temps  $t$ , qui donne la relation entre la vitesse  $v_o(t) = S'_O(t)$  du mouvement de point de

vue de l'observateur indépendant  $O$  et la vitesse individuel  $v(t)$  :

$$v_o(t) = \frac{d}{dt} I_t^\alpha v(t) = {}_0D_t^{1-\alpha} v(t) \quad (1.16)$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $(1 - \alpha)$  de la vitesse individuel  $v(t)$  est égale à la vitesse du point de vue de l'observateur indépendant  $v_o(t)$ , si le temps individuel  $\tau$  et le temps cosmique  $T$  sont reliés par la fonction  $T = g_t(\tau)$  décrite par l'équation (1.10).

Pour  $\alpha = 1$ , quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncidentes :  $v_o(t) = v(t)$

### Remarque 1.1

*L'interprétation physique suggérée de l'intégration et de la Différenciation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps : Le temps cosmique et le temps individuel, par contre l'ensemble du calcul différentiel et d'intégral classique est basée sur l'utilisation du temps mathématique (homogène, coulant uniformément).*

*En réalité l'échelle de temps homogène est juste une notion idéale, qui est nécessaire pour développer les modèles mathématiques décrivant le temps cosmique non homogène et leur changement.*

## 1.6 Application des dérivées fractionnaires dans la modélisation

### 1.6.1 Modèles rhéologiques élémentaires

Pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires, on fait un assemblage des modèles rhéologiques de base qui sont constitués uniquement de ressorts (élastique) ou d'amortisseurs (visqueux) ([13],[14]) (figure 1-4)

\* Le ressort représente un élément élastique idéal :

La contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la déformation  $\varepsilon$  comme le montre la loi de

Hooke :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t)$$

\* L'amortisseur représente un élément visqueux :

La contrainte  $\sigma$  est proportionnelle à la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  comme le montre la loi du frottement visqueux de Newton :

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$$

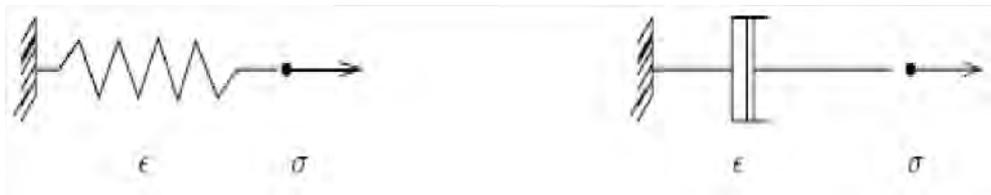


FIG. 1-4 – Schématisation des éléments rhéologiques usuels en viscoélasticité

La combinaison de ces deux éléments nous donne des modèles viscoélastiques linéaires classiques (Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener figure 1-5)

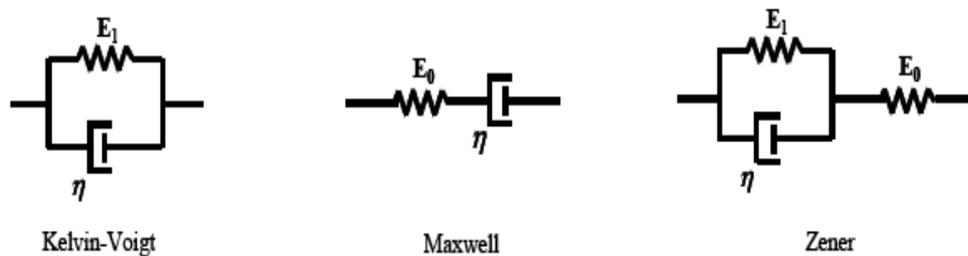


FIG. 1-5 – Modèles rhéologiques usuels

## 1. Modèle de Maxwell

Il est constitué d'un ressort en série avec un amortisseur ; l'équation différentielle associée est :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E_0} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t)$$

en posant  $\tau_0 = \frac{\eta}{E_0}$  et  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$  nous obtenons le modèle dynamique associé à un modèle de Maxwell

$$M(\omega) = E_0 \frac{i\tau_0\omega}{1 + i\tau_0\omega} = \frac{E_0(\tau_0\omega)^2}{1 + (\tau_0\omega)^2} + i \frac{\eta\omega}{1 + (\tau_0\omega)^2}$$

La force de relaxation associée est :

$$r(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$$

A l'infini, il y a relaxation complète des contraintes. C'est pourquoi ce modèle est généralement utilisé avec un ressort pour avoir une élasticité "infinie".

## 2. Modèle de Kelvin-Voigt

Il s'agit d'un ressort de module d'élasticité  $E_1$  en parallèle avec un amortisseur de viscosité  $\eta$ , régit par l'équation différentielle :

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

son modèle complexe est :

$$M(\omega) = E_1 + i\eta\omega$$

En posant  $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$ , ce dernier peut aussi s'écrire :

$$M(\omega) = E_1(1 + i\tau_1\omega)$$

La fonction de fluage est

$$f(t) = \frac{1}{E_1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

### 3. Modèle de Zener

Le modèle de Zener est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres  $(E_1, \eta)$  en série avec un ressort de module d'élasticité  $E_0$ . Si  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et  $\sigma$  la contrainte associée, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \sigma &= E_0\varepsilon_0 \\ \sigma &= E_1\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1\end{aligned}$$

après la combinaison de ces trois relations on obtient l'équations de comportement

$$(E_0 + E_1)\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = E_0(E_1\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}(t))$$

En posant  $\tau_1 = \frac{\eta}{E_1}$ ,  $\tau = \frac{\eta}{E_0 + E_1}$ ;  $E = \frac{E_0E_1}{E_0 + E_1}$  Le modèle complexe s'écrit :

$$M(\omega) = E \frac{1 + i\tau_1\omega}{1 + i\tau\omega}$$

#### 1.6.2 Modèles fractionnaires

Les modèles rhéologiques présentés dans la section précédente sont constitués de ressorts ou d'amortisseurs. En introduisant l'opérateur différentiel non entier  $D^\alpha$  la relation contrainte-déformation pour le ressort ou l'amortisseur s'écrit classiquement :

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t)$$

Pour  $\alpha = 0$ , on retrouve un ressort pur de module d'élasticité  $E$  et pour  $\alpha = 1$  on retrouve un amortisseur pur visqueux de viscosité  $\eta = E\tau$  (figure 1-4).

Pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  on introduit un nouvel élément nommé "spring-pot" (figure 1-6)

Le remplacement de l'amortisseur par le spring-pot dans les modèles classiques vus précédemment, conduit à des modèles rhéologiques fractionnaires (figure 1-7)

Les lois de comportement de ces modèles sont de type :

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^{\alpha_k} \sigma}{dt^{\alpha_k}} = E\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_k \frac{d^{\beta_k} \varepsilon}{dt^{\beta_k}} \quad (1.17)$$

les indices  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  représentent des ordres de dérivation non entiers.

Lorsqu'ils sont entiers, on retrouve les modèles rhéologiques usuels en unidimensionnel de type :

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = E\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}$$

avec  $N$  entier,  $a_n$  et  $b_n$  sont des coefficients caractéristiques du matériau.

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1.17) et en ne considérant que le premier terme de la somme, le modèle complexe lié à la fréquence est :

$$M(\omega) = \frac{E + b(i\omega)^\beta}{1 + a(i\omega)^\alpha}$$

La loi constitutive du modèle Bagley et Torvik s'écrit alors :

$$\sigma + aD^\alpha(\sigma) = E\varepsilon + bD^\beta(\varepsilon)$$

Bagley-Torvik [32] ont montré que ce modèle peut être utilisé pour modéliser beaucoup de matériaux viscoélastiques. C'est une référence pour la modélisation et l'identification du comportement des polymères et des élastomères, d'autre part ils ont fait l'étude

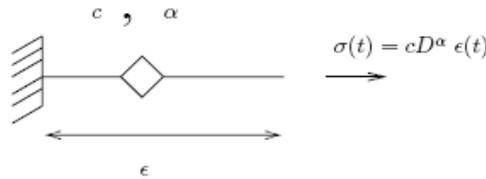


FIG. 1-6 – Schématisation de l'élément spring-pot

thermodynamique d'un tel modèle et ont montrés qu'avoir une énergie de déformation positive impose sur les coefficients les restrictions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ E \geq 0 \\ \alpha = \beta \\ \frac{b}{a} \geq E \end{array} \right.$$

Ce qui restreint considérablement le domaine de recherche des paramètres. L'élasticité "infinie" de ce modèle étant donnée par le coefficient  $E$ , et l'élasticité "instantanée" par le rapport  $\frac{b}{a}$ .

### 1. Modèle de Zener fractionnaire (ZF)

De même en substituant l'élément amortissement visqueux par un spring-pot dans le modèle classique de Zener, nous obtenons un modèle dit de Zener fractionnaire dont la loi de comportement est

$$\sigma + \frac{E}{E_0} \tau^\alpha D^\alpha(\sigma) = E\varepsilon + E\tau^\alpha D^\alpha\varepsilon$$

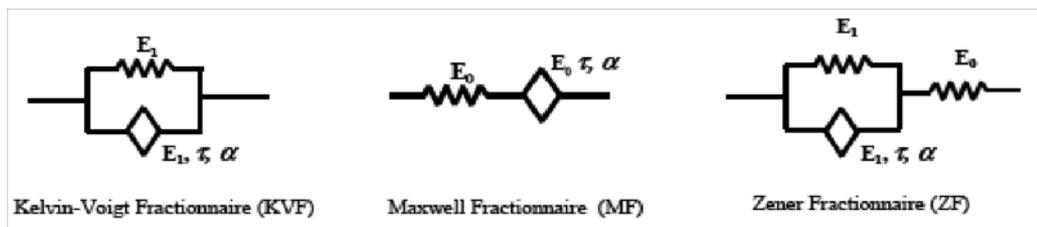


FIG. 1-7 – Modèles fractionnaires

En posant  $E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ , le modèle complexe s'écrit :

$$M(\omega) = E \frac{1 + (i\tau\omega)^\alpha}{1 + \frac{E}{E_0}(i\tau\omega)^\alpha}$$

## 2. Modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire (KVF)

Le modèle de Kelvin Voigt fractionnaire est constitué d'un ressort en parallèle avec un spring-pot. La loi correspondante est :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_1 \tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t) = E_1 \varepsilon + b D^\alpha(\varepsilon)$$

Le modèle complexe est défini par :

$$M(\omega) = E_1(1 + (i\tau\omega)^\alpha)$$

On peut obtenir le modèle KVF en faisant tendre  $E_0$  vers l'infini à partir de modèle de Zener fractionnaire où on a alors  $E = E_1$ .

## 3. Modèle de Maxwell fractionnaire (MF)

Le modèle complexe du modèle de Maxwell fractionnaire (MF) se déduit de celui de Maxwell simple en remplaçant  $i\tau_0\omega$  par  $(i\tau\omega)^\alpha$  alors :

$$M(\omega) = E_0 \frac{(i\tau\omega)^\alpha}{1 + (i\tau\omega)^\alpha}$$

et de même pour la loi de comportement on a :

$$\sigma + \tau_0^\alpha D^\alpha(\sigma) = E_0 \tau_0^\alpha D^\alpha \varepsilon$$

### Remarque 1.2

*Il est possible de lier les fonctions fluage et relaxation (ou le modèle dynamique) à l'aide des modèles rhéologiques généralisés, mais l'inconvénient de ce type d'approche est*

le nombre de paramètres à prendre en compte pour pouvoir représenter correctement le comportement du matériau. L'utilisation de la dérivée fractionnaire pour la modélisation des élastomères répond initialement à un souci de réduction du nombre de paramètres de la loi de comportement mécanique du matériau [14], on peut remplacer un système d'équations ordinaires par une seule équation d'ordre fractionnaire.

## 1.7 Equations différentielles fractionnaires

On se restreint dans cette section aux équations d'un seul terme de dérivation de la forme :

$$D_0^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

### 1.7.1 Existence et unicité

Soit  $\alpha$  un réel positif vérifiant  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  ${}^C D^\alpha$  désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(t) = f(t, y) \\ D_0^k y(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (1.18)$$

#### Lemme 1.1

Si la fonction  $f$  est continue alors le problème aux conditions initiales (1.18) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (1.19)$$

#### Preuve.

Premièrement supposons que  $y$  est solution de (1.19), on peut écrire cette équation

sous la forme réduite :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + I_0^\alpha f(t, y(t)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation  $D_0^\alpha$  sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que  $y$  est solution de l'équation différentielle de (1.18).

Appliquons maintenant l'opérateur  $D_0^k$ ,  $0 \leq k \leq m-1$  sur l'équation de Volterra (1.19)

$$D_0^k y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} D_0^k \frac{(t)^j}{j!} y_0^{(j)} + D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)).$$

$D_0^k(t)^j = 0$  pour  $j < k$  alors si  $t = 0$  on a :

$$D_0^k y(0) = D_0^k \frac{(t)^k}{k!} y_0^{(k)} \Big|_{t=0} + I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)) \Big|_{t=0}.$$

et comme  $\alpha - k \geq 1$ , l'intégral est nul  $I_0^{\alpha-k} f(t, y(t)) \Big|_{t=0} = 0$

par suite  $D_0^k y(0) = y_0^{(k)}$

D'autre part on définit  $z(t) = f(t, y(t))$  alors  $z \in C[0, h]$  on réécrit l'équation de la forme

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, y(t)) = {}^C D_0^\alpha y(t) = D_0^\alpha (y - T_{m-1}[y; 0])(t) \\ &= D_0^m I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1}[y; 0])(t) \end{aligned}$$

$T_{m-1}[y; 0]$  est le polynôme de Taylor de degré  $m-1$  ( $T_{m-1}[y; 0] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ ) pour la fonction  $f$  autour de 0. En appliquant l'opérateur  $I_0^m$  sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1}[y; 0])(t) + q(t)$$

Avec  $q$  un polynôme de degré ne dépassant pas  $m-1$ . Comme  $z$  est continue la fonction  $I_0^m z$  a un zéro d'ordre au moins  $m$  à l'origine. En outre la différence  $y - T_{m-1}[y; 0]$  a la

même propriété par construction. Et donc la fonction  $I_0^{m-\alpha}(y - T_{m-1}[y; 0])$  doit avoir un zéro d'ordre  $m$  aussi. Par suite le polynôme  $q$  a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas  $m - 1$  il en résulte que  $q = 0$ , par conséquent

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha}(y - T_{m-1}[y; 0])(t)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville  $D_0^{m-\alpha}$  sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$y(t) - T_{m-1}[y; 0](t) = I_0^\alpha z(t)$$

En substituant  $z(t)$  et  $T_{m-1}[y; 0](t)$  on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

■

### **Théorème 1.2**

Soient  $K > 0, h^* > 0$ , et  $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ . définissent  $G = [0, h^*] \times [y_0^{(0)} - K, y_0^{(0)} + K]$  et soit  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, satisfaisant la condition de Lipchitz par rapport à  $y$  suivante :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|, \quad A = \text{constante}$$

Posent  $h = \min\{h^*, (K\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\}$  avec  $M = \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$ , alors il existe une fonction unique  $y \in C[0, h]$  solution du problème (1.18).

Dans le cas linéaire le théorème suivant donne une expression explicite de la solution en utilisant la transformée de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler  $E_\alpha$  défini par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}$$

### **Théorème 1.3**

Soit  $\alpha > 0$ ,  $m$  entier tel que  $m - 1 < \alpha \leq m$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La solution du problème aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases}$$

Où  $q \in C[0; h]$ , est la fonction donnée par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

$$\text{avec } \tilde{y}(t) = \begin{cases} I_0^\alpha q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t - \tau) \dot{u}_0(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}, u_k(t) = I_0^k e_\alpha(t), k = 0, 1, \dots, m - 1, \text{ et} \\ e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

## **1.7.2 Résolution numérique**

Il y a plusieurs méthodes pour la résolution des systèmes fractionnaires.

Dans le cas linéaire la méthode la plus simple et rapide est basée sur la définition de la dérivation fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov.

La méthode la plus adaptée pour les équations non linéaires est la méthode prédiction-correction (PCEC, Predict-Evaluate-Correct-Evaluate) qui est une généralisation naturelle de la méthode très connue de Adams-Bashforth-Moulton, c'est cette méthode que nous allons utiliser dans notre travail.

### **1. Présentation de l'algorithme**

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (1.18) par l'équation intégrale de Volterra (1.19) et on utilise la formule ( produit de quadrature des trapezes) pour remplacer l'intégrale par les noeuds  $t_j, j = 0, 1, \dots, n + 1$  qui sont

prises respectivement à la fonction  $(t_{n+1} - \cdot)^{\alpha-1}$  c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau &\approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{n+1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \end{aligned}$$

$$\text{avec } a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & , \text{si } j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} & ; \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

Cela nous donne la formule de correction (corrector) :

$$\begin{aligned} yh(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [f(t_{n+1}, y_{n+1}^p) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j)] \end{aligned}$$

pour déterminer la formule de prédiction (predictor) qui donne  $y_{n+1}^p$ , on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j)$$

$$\text{où } b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha)$$

par conséquent on a :

$$y_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_{h_j})$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée (voir [8]) par :

$$\max_{j=0,1,2,\dots,N} |y_j - y_{h_j}| = O(h^p), \text{ avec } p = \min(2, 1 + \alpha)$$

## 2. Extension au système d'équations

Un système ayant trois équations différentielles fractionnaire de la forme :

$$\begin{cases} D^{\alpha_1}x(t) = f_1(t, x, y, z) , x^{(k)}(0) = x_0^k , k = 1, 2, \dots, m_1 - 1 \\ D^{\alpha_2}y(t) = f_2(t, x, y, z) , y^{(k)}(0) = y_0^k , k = 1, 2, \dots, m_2 - 1 \\ D^{\alpha_3}z(t) = f_3(t, x, y, z) , z^{(k)}(0) = z_0^k , k = 1, 2, \dots, m_3 - 1 \end{cases}$$

est équivalent au système a trois équations intégrales de Volterra suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_1-1} f_1(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \\ y(t) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t^k}{k!} y^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_2-1} f_2(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \\ z(t) = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t^k}{k!} z^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_3-1} f_3(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (1.20)$$

Soit  $h = \frac{T}{N}$ ,  $t_n = nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$

La discrétisation de (1.20) nous donne :

$$\begin{cases} x(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^k + \frac{h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)} [f_1(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) \\ \quad + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^1 f_1(t_j, x_j, y_j, z_j)] \\ y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^k + \frac{h^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+2)} [f_2(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) \\ \quad + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^2 f_2(t_j, x_j, y_j, z_j)] \\ z(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} z_0^k + \frac{h^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3+2)} [f_3(t_{n+1}, x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, z_{n+1}^p) \\ \quad + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1}^3 f_3(t_j, x_j, y_j, z_j)] \end{cases}$$

$$\text{Où } \begin{cases} x_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_1-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^1 f_1(t_j, x_j, y_j, z_j) \\ y_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_2-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^2 f_2(t_j, x_{n+1}, y_j, z_j) \\ z_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} z_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1}^3 f_3(t_j, x_j, y_j, z_j) \end{cases}$$

$$a_{j,n+1}^i = \begin{cases} n^{\alpha_i+1} - (n - \alpha_i)(n + 1)^{\alpha_i} & , \text{si } j = 0 \\ (n - j + 2)^{\alpha_i+1} + (n - j)^{\alpha_i+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha_i+1} ; & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{si } j = n + 1 \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3.$

$$b_{j,n+1}^i = \frac{h^{\alpha_i}}{\alpha_i} [(n+1-j)^{\alpha_i} - (n-j)^{\alpha_i}] \quad , \quad 0 \leq j \leq n \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée par :

$$\max \left\{ \max_{0 \leq j \leq N} |x_j - xh_j|, \max_{0 \leq j \leq N} |y_j - yh_j|, \max_{0 \leq j \leq N} |z_j - zh_j| \right\} = O(h^p)$$

avec  $p = \min \{2, 1 + \alpha_1, 1 + \alpha_2, 1 + \alpha_3\}$

## 1.8 Conclusion

*Dans ce chapitre nous avons donné un aperçu du calcul fractionnaire.*

*On a introduit trois approches des dérivées fractionnaires (l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo) ainsi que leurs propriétés, puis nous avons essayé de donner des interprétations géométriques et physiques acceptables y compris ses applications dans la modélisation rhéologique.*

*Nous avons terminé le chapitre par une section consacré aux équations aux dérivées fractionnaires pour lesquelles les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont données, ainsi que des méthodes analytiques et numériques pour la résolution.*

# Chapitre 2

## Systemes dynamiques et chaos

### 2.1 Notions de systeme dynamique

On appelle systeme dynamique tout systeme evolutif par l'intermediaire d'au moins un parametre reel (qui pourra jouer le role de temps par exemple), qui utilise des equations differentielles (ordinaires, aux derivees partielles,...), des equations integro-differentielles, des iterations ou un ensemble composite de tout cela et de facon generale qui soit decrit par une ou des "relations" entre un etat du systeme et un (ou des) etat(s) a une autre etape (ou instant). Donc pratiquement toute description d'un phenomene qui evolue est en soi un systeme dynamique.

Dans le cas continu un systeme dynamique est decrit par un systeme d'equations differentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, \mu) \quad (2.1)$$

Ou de la forme generalisee :

$$\frac{d^\alpha X}{d^\alpha t} = F(X, t, \mu), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2)$$

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'etat,  $\mu \in D \subseteq \mathbb{R}^p$  le vecteur des parametres

$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé champ de vecteur sur  $\Omega$ .

Dans le cas discret un système dynamique est décrit par une itération de la forme

$$X_{k+1} = F(X_k, \mu), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Lorsque  $F$  dépend explicitement du temps (2.1) est dit non autonome. dans le cas contraire on dit que (2.1) est autonome.

### 2.1.1 Orbite

Une solution du système (2.1) est une fonction dérivable  $t \mapsto X(t)$ , définie d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\Omega$  telle que pour tout  $t \in I$  on a  $\dot{X}(t) = F(X, t, \mu)$ .

L'image d'une solution  $X$  est appelée orbite et notée :

$$\gamma_X = \{a \in \Omega; \exists t \in I : X(t) = a\}$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur  $F$ .

### 2.1.2 Flot

On suppose que les solutions du système (2.1) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$

#### Définition 2.1

*Le flot du système (2.1) est la famille avec un paramètre d'applications  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\Omega$  dans lui même définies par  $\phi_t(a) = X(t, a)$ , pour tout  $a \in \Omega$ ,  $X(t, a)$  est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, t, \mu) \\ X(0) = a \end{cases}$$

### Remarque 2.1

\*  $\phi_t$  est différentiable sur  $\Omega$ .

\*  $\phi_0 = Id$ ,  $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$  pour tout  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t$  est une bijection de  $\Omega$  et  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .

Alors l'ensemble  $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

\*  $\left. \frac{d}{dt} \phi_t(a) \right|_{t=0} = F(a, 0, \mu)$  cette formule montre que la donnée du flot  $\phi_t$  définit le système (2.1).

### 2.1.3 Points d'équilibres

#### Définition 2.2

1) Un point  $a$  est dit point d'équilibre du système (2.1) s'il satisfait  $F(a) = 0$  (ou pour tout  $t \in \mathbb{R} : \phi_t(a) = a$ ) sinon  $a$ , est dit point ordinaire.

2) Un point ordinaire  $a$  est dit périodique s'il existe  $T > 0$  tel que  $\phi_T(a) = a$ .

3) Un point ordinaire et non périodique  $a$ , est dit récurrent si pour tout voisinage  $V$  de  $a$  et tout  $T \in \mathbb{R}$  il existe  $t > T$  tel que  $\phi_t(a) \in V$ .

4) Une orbite  $\gamma_{x_0}$  telle qu'il existe deux points d'équilibre  $a$  et  $b$  vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(X_0) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(X_0) = b$$

est dite orbite hétérocline si  $a \neq b$  et homocline si  $a = b$ .



Orbite hétérocline et orbite homocline

## 2.1.4 Ensembles limites

\* Soit  $\phi_t$  un flot dans  $\Omega$  et soit  $a \in \Omega$ .

Un point  $X$  est dans l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(a)$  s'il existe une suite  $t_k \rightarrow +\infty$  telle que  $\phi_{t_k}(X) \rightarrow a$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

\* Un point  $X$  est dans l'ensemble  $\alpha$ -limite  $\alpha(a)$  s'il existe une suite  $t_k \rightarrow -\infty$  telle que  $\phi_{t_k}(X) \rightarrow a$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

### Remarque 2.2

\* Si  $a$  est un point d'équilibre alors  $\omega(a) = \alpha(a) = \{a\}$ .

\* Si  $a$  est périodique alors  $\omega(a) = \alpha(a) = \gamma_a$ .

\* Si  $a$  et  $b$  sont dans la même orbite alors  $\omega(a) = \omega(b)$  et  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , alors on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points.

\* Si  $\gamma$  est une orbite hétérocline allant du point d'équilibre  $a$  au point d'équilibre  $b$  alors  $\omega(\gamma) = \{b\}$  et  $\alpha\{\gamma\} = \{a\}$ .

## 2.1.5 Attracteurs

### Définition 2.3

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers laquelle évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :

- Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $X(X_0, t) = \phi_t(X_0)$  restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$
- $\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$
- Il existe une orbite dense dans  $A$ .

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

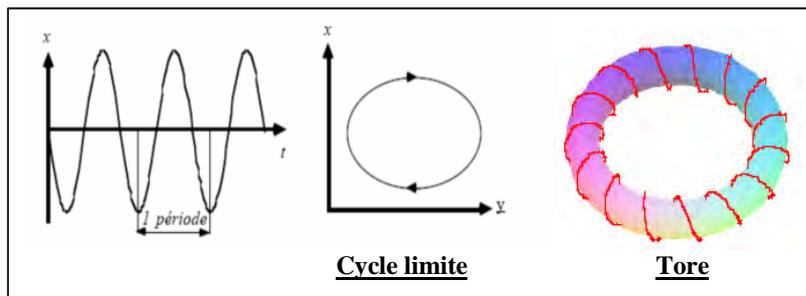
## 1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

**Le point fixe :** est l'attracteur le plus simple, dans le cas discret on dit que  $a \in E$  est un point fixe de l'application  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  si  $f(a) = a$ .

**Un cycle limite :** On appelle cycle limite sur un plan ou une variété bidimensionnelle, toute trajectoire fermée  $\Gamma$  dans l'espace des phases tel que : si  $a \notin \Gamma$ , alors  $\Gamma$  est un ensemble  $\alpha$ -limite de  $a$ , ou un ensemble  $\omega$ -limite de  $a$ .

**Un tore :** Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant  $n$  fréquences de base indépendantes.



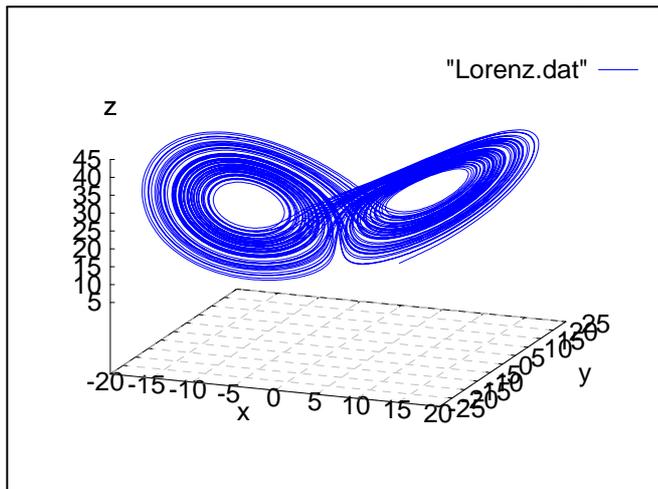
## 2. Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique)
2. La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale avec  $2 < d < n$  (ce qui justifie l'adjectif étrange)

3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

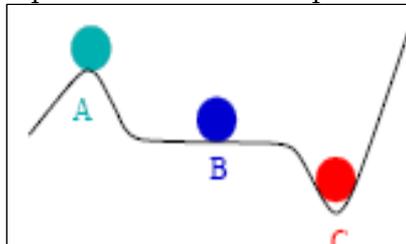


Attracteur étrange de Lorenz

### 2.1.6 Notions de stabilité

La question de la stabilité se pose de la façon suivante :

Si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il? Ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire, peut avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps?



A) Instable B) Localement stable C) Asymptotiquement stable.

#### Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (2.4)$$

avec  $F$  une fonction non linéaire.

**Définition 2.4** (*Stabilité*)

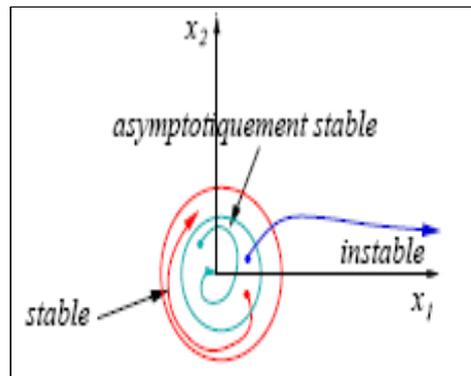
Un point d'équilibre  $a$  de (2.4) est stable au sens de Lyapunov si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

pour tout  $X$  vérifiant  $\|X - a\| \leq \eta$ , on a  $\|\phi_t(X) - a\| \leq \varepsilon$  pour tout  $t > 0$ .

**Définition 2.5** (*Stabilité asymptotique*)

Un point d'équilibre  $a$  de (2.4) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout  $X$  suffisamment proche de  $a$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(X) = a$$



Les définitions précédentes sont locales, elles ne concernent que les orbites voisines d'un point d'équilibre ( $\|x - a\| \leq \eta$ ). Nous présentons ici deux méthodes de Lyapunov pour étudier la stabilité :

**1. Méthode directe**

La méthode directe est difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le

long des trajectoires du système. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

**Théorème 2.1** (*Fonction de Lyapunov et stabilité globale*)

Si  $a$  est un point d'équilibre du système (2.4) et si la fonction  $V$  de classe  $C^1$

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$$

est telle que : \*  $V(a) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour  $x \neq a$ .

\*  $V$  décroît le long de toutes les trajectoires ( $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ).

Alors  $a$  est stable au sens de Lyapunov. Si de plus pour  $x \neq a$   $\frac{dV}{dt} < 0$  alors  $a$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encoeur que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $a$ , tendent vers  $a$  (on dit que  $a$  est globalement asymptotiquement stable), mais si  $\frac{dV}{dt} > 0$  pour  $x \neq a$  alors  $a$  est instable.  $V$  est appelé fonction de Lyapunov du système.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

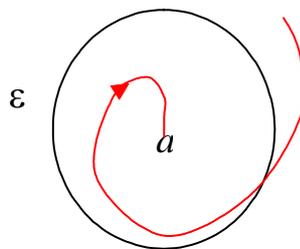


FIG. 2-1 – Stabilité globale

### Exemple

Soit le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

pour  $c$  compris entre 0 et 1, on vérifie que l'origine est un point fixe globalement stable.

Sa stabilité globale est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapunov qu'il faut déterminer intuitivement !

On vérifie que la fonction :

$$V(x, y, z) = \frac{x^2 + a(y^2 + z^2)}{2} \text{ convient.}$$

On a  $V(0, 0, 0) = 0$  et  $V(x, y, z) > 0$  pour  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= a(y - x)x + ay(cx - y - xz) + az(-bz + xy) \\ &= -a(x^2 + y^2 - (c + 1)xy + bz^2) \end{aligned}$$

Comme  $z^2 > 0$  et  $x^2 + y^2 - (c + 1)xy > 0$  pour  $c$  compris entre 0 et 1, alors on a  $\frac{dV}{dt} < 0$  pour  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

Par suite le point fixe  $(0, 0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

## 2. Méthode indirecte (Linéarisation)

Par un changement de coordonnées, le point fixe de (2.4) se ramène à l'origine ( $f(0) = 0$ ) et le développement de  $f$  en série de Taylor autour de  $x = 0$  donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots$$

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équi-

libre  $a$ , consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{2.5}$$

(Avec  $A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0}$  la matrice jacobienne de  $f$  en 0)

qui s'appelle le linéarisé du système (2.4) au point d'équilibre 0.

Si  $A$  possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  ( les valeurs propres de  $A$  sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de (2.5) est

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad v_i \text{ le vecteur propre associé à } \lambda_i$$

d'où le théorème suivant :

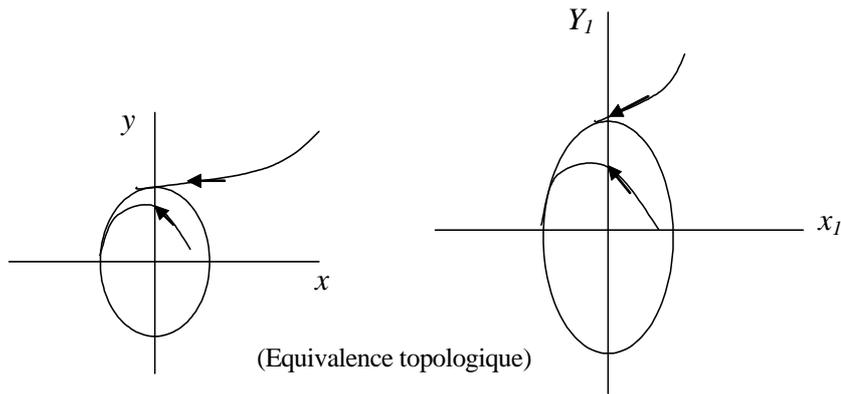
**Théorème 2.2**

*Considérons le système (2.5) avec  $r$  valeurs propres distinctes,  $p_1, \dots, p_r$  et  $a = 0$  point d'équilibre*

- \* Si  $Re(p_j) > 0$ , pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors 0 est instable.*
- \* Si  $Re(p_j) < 0$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors 0 est asymptotiquement stable.*
- \* Si  $Re(p_j) \leq 0$ , avec un pole de multiplicité 1 est tel que  $Re(p_j) = 0$ , pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ , alors 0 est stable.*

**Définition 2.6**

*Deux flots  $\phi_t$  et  $\psi_t$  sont dits topologiquement équivalents dans un voisinages du point d'équilibre, s'il existe un homéomorphisme  $h$  qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire  $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$ .*



**Théorème 2.3** (*Hartman-Grobman*).

Considérons le système (2.4), de flot  $\phi_t$ . Si  $a$  est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage  $V$  de  $a$  sur lequel le flot  $\phi_t$  est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en  $a$ .

Par conséquence on a le théorème suivant :

**Théorème 2.4**

Soit  $a$  un point d'équilibre de (2.4).

\* Si les valeurs propres de  $Df(a)$  sont toutes à partie réelle strictement négative, alors  $a$  est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

\* Si l'une des valeurs propres de  $Df(a)$  possède une partie réelle strictement positive alors  $a$  n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapunov.

Le point d'équilibre  $a$  est dit hyperbolique si tous ses exposants caractéristiques ont des parties réelles non nulles.

**Exemple**

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases}$$

L'origine 0 est un point fixe. Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $Df(0)$  sont  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$  toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable .

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont plus stables que les équations correspondantes d'ordre entier [35] cela est dû au fait que les systèmes de mémoire sont généralement plus stables que leurs correspondants qui sont de faible mémoire.

Dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire D. Matignon a donné dans son article [32] le théorème suivant :

**Théorème 2.5**

Le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha X = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad X \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1 \text{ et } A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

Ce système est stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

et les valeurs propres critiques qui satisfaisant  $|\arg(\lambda_i)| = \alpha \frac{\pi}{2}$  ont la multiplicité géométrique 1. où  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

Une extension de ce théorème au cas  $1 < \alpha < 2$  a été donnée dans [34].

**Théorème 2.6**

Le système (2.6) est localement asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n \text{ et } 1 < \alpha < 2$$

La figure (2-2) montre les régions stables et les régions instables.

Considérant maintenant le système non linéaire d'ordre fractionnaire suivant

$$D^\alpha X = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \alpha < 2 \tag{2.7}$$

Le linéarisé de (2.7) autour du point fixe  $a$  est donné par :

$$D^\alpha X \simeq Df(a)(X - a)$$

Alors l'équilibre  $a$  du système (2.7) est localement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice jacobienne  $A = Df(a)$  satisfaisant

$$|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2} \tag{2.8}$$

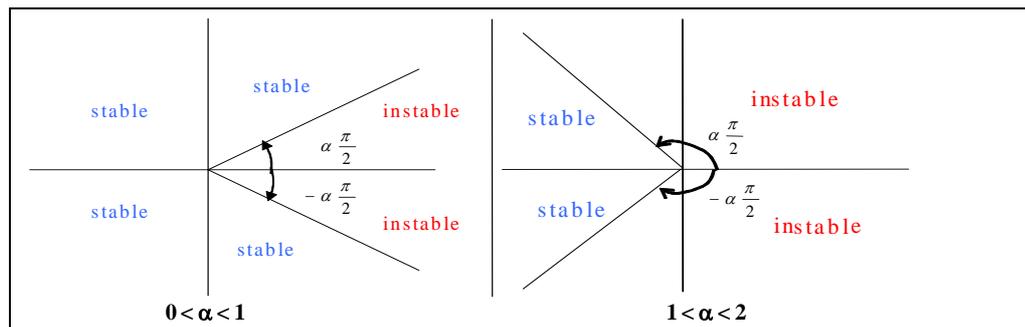


FIG. 2-2 – Region de stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire  $\alpha$ .

## 2.1.7 Stabilité d'un cycle limite

Pour étudier la stabilité d'un cycle limite on a souvent recours à la section de Poincaré et l'application de premier retour.

### 1. Section de Poincaré et application de premier retour

La section de Poincaré est un outil fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment la stabilité des orbites périodiques.

Considérons le système dynamique autonome à temps continu et présentant dans une région de l'espace un comportement asymptotique intéressant pour  $t \rightarrow \infty$ .

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

Définissons une hyper surface  $\Sigma_p$  de dimension  $n - 1$  appelée section de Poincaré. C'est une surface de section acceptable si elle est transversale au champ de vecteurs dans toute la région concernée et si naturellement elle coupe l'ensemble limite que nous voulons étudier (elle peut, en principe, être quelconque mais un choix approprié permet d'obtenir des sections aisément exploitables). On considère l'ensemble des points  $p_0, p_1, p_2, \dots$  correspondant aux intersections successives de la trajectoire  $\phi_t(x_0)$  avec l'hyper surface  $\Sigma_p$ . L'application de premier retour  $T$  est alors comprise comme l'application qui à un point  $p_i$  de  $\Sigma_p$  fait correspondre le point  $p_{i+1}$ , prochaine intersection de la trajectoire  $\phi_t(x_0)$  avec  $\Sigma_p$ .

De cette façon le système dynamique initial (2.9) de dimension  $n$  à temps continu est converti en un système en dimension  $n - 1$  à temps discret :

$$p_{k+1} = T(p_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Le numéro de l'intersection remplace le temps. Cette conversion se fait sans perte d'information, un point de la section  $\Sigma_p$  définissant une orbite et une seule. Une orbite du système originel est alors transformée en une suite d'intersections  $p_k, k =$

0, 1, 2, ... et on a les résultats suivants :

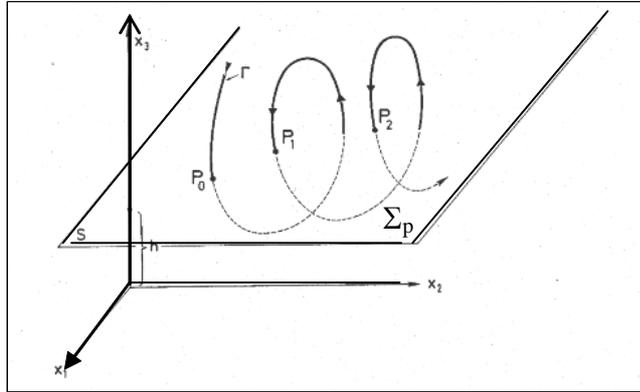


FIG. 2-3 – Section de Poincaré et application de premier retour.

Attracteur dans l'espace des phases	Application de Poincaré
Cycle limite	1 point
Cycle limite avec $p$ maxima par période	$p$ points
Attracteur quasi-périodique (tore)	Courbe fermée
Attracteur étrange (chaos)	Courbe(s) ouverte(s)

L'étude de la stabilité d'une orbite périodique peut se faire à travers l'analyse de l'application de premier retour  $T$ .

## 2. Multiplicateurs caractéristiques

Le comportement du système (2.10) au voisinage d'un point fixe  $a$  est étudié en linéarisant  $T$  autour de  $a$ , le linéarisé de (2.10) est :

$$\tilde{p}_{k+1} = J_P(a) \cdot \tilde{p}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

avec  $J_P(a) = \left. \frac{dT}{dp_k} \right|_{p_k=a}$  la matrice jacobienne de  $T$  au voisinage de  $a$ .

Les valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n-1$  de la matrice  $J_P(a)$  sont appelées multiplicateurs caractéristiques de la solution périodique correspondant au point  $a$ , on a :

1. Si  $|\lambda_i| < 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , alors le point fixe  $a$  est asymptotiquement stable et par conséquent la solution périodique correspondante est asymptotiquement stable.
2. Si  $|\lambda_i| > 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , alors le point fixe  $a$  est instable et par conséquent la solution périodique correspondant est instable.
3. Si  $|\lambda_i| > 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$  avec  $m < n-1$  et  $|\lambda_j| < 1$  pour  $j \neq i$ , alors le point fixe  $a$  est un point col et par conséquent la solution périodique correspondant est instable.

## 2.1.8 Théorème de la variété centrale

### Variétés invariantes

Etant donné un système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

dans  $\mathbb{R}^n$ , on considère les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $A$ , qui sont complexes et non distinctes en général, et les sous espaces vectoriels caractéristiques associés  $E_\lambda$ . On définit :

1. Le sous espace stable

$$E^s = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda < 0} E_\lambda$$

2. Le sous espace instable

$$E^i = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda > 0} E_\lambda$$

3. Le sous espace central

$$E^c = \bigoplus_{\operatorname{Re} \lambda = 0} E_\lambda$$

On a :

$$E^s \oplus E^i \oplus E^c = \mathbb{R}^n$$

et aussi

$$v \in E^s \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}v = 0, v \in E^i \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}v = 0$$

Par conséquent toutes les solutions issues de conditions initiales dans le sous-espace stable sont attirées vers l'origine tandis que celles issues de conditions initiales dans le sous-espace instable sont repoussées par l'origine. En particulier, lorsque  $E^s = \mathbb{R}^n$  toutes les solutions tendent vers l'origine qui est appelée un puits, et lorsque  $E^i = \mathbb{R}^n$  toutes les solutions proviennent de l'origine qui est appelée une source.

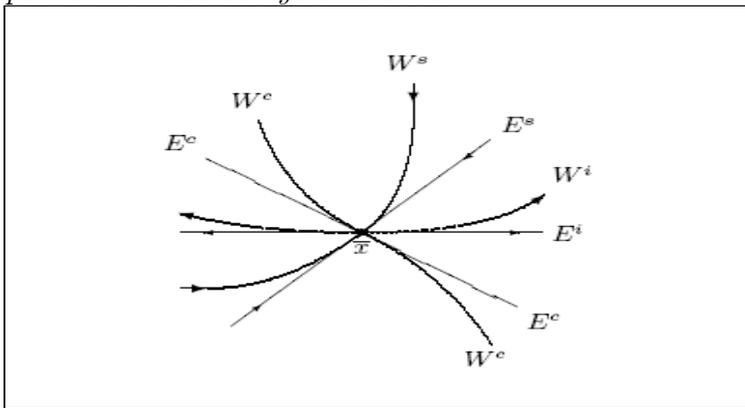
Si ni  $E^s$  ni  $E^i$  n'est réduit à  $\{0\}$ , et que  $E^c = \{0\}$  l'origine est appelée un point selle.

**Définition 2.7**

\* La variété stable  $W^s$  d'un point d'équilibre  $a$  du système (2.4) est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable  $E^s$  du linéarisé en  $a$  et telle que toutes les solutions issues de  $W^s$  tendent vers  $a$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

\* La variété instable  $W^i$  du point d'équilibre  $a$  est une variété différentiable qui est tangente au sous-espace instable  $E^i$  et telle que toutes les solutions issues de  $W^i$  tendent vers  $a$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

\* La variété centrale  $W^c$  est une variété tangente au sous espace central  $E^c$ . Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en  $a$ .



Variétés invariantes

**Théorème 2.7** (*Théorème de la variété centrale*).

*Considérons un système admettant 0 comme point d'équilibre. Soient  $E^s, E^i$  et  $E^c$  les sous espaces : stable, instable et central respectivement, du linéarisé du système en 0. Alors le système admet des variétés invariantes  $W^s, W^i$  et  $W^c$  passants par le point 0 et tangentes respectivement aux sous-espaces  $E^s, E^i$  et  $E^c$*

*Les solutions issues de  $W^s$  (resp  $W^i$ ) tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp  $t \rightarrow -\infty$ ) Le comportement des solutions dans la variété  $W^c$  est déterminé par les termes non linéaires.*

## 2.2 Bifurcations locales

Dans la modélisation des systèmes (biologiques, physiques...) les incertitudes liées aux phénomènes sont toujours présentes dans un modèle mathématique (estimation des paramètres etc.). Un moyen de tester la robustesse du modèle face aux perturbations ainsi engendrées serait donc un outil puissant. Mais des perturbations de même amplitude peuvent être de plusieurs natures et leurs conséquences sur le système sont alors très différentes, et comme l'incertitude la plus importante porte sur les paramètres, nous allons nous restreindre aux modèles paramétrés :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \mu \in D \subset \mathbb{R}^p, f \in C^r \quad (2.11)$$

Dans le cas de ces modèles, l'analyse de bifurcation est une méthode qui permet d'identifier des valeurs des paramètres pour lesquelles le comportement asymptotique du système change qualitativement (Valeurs de bifurcation). Elle permet donc bien de savoir si le système est consistant malgré les perturbations dues à l'incertitude sur l'estimation des paramètres (s'il n'y a pas de valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres) ou non (s'il existe au moins une valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres).

Elle peut aussi apporter beaucoup d'autres renseignements sur le système.

Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre.

## 2.2.1 Stabilité structurelle

### Définition 2.8

*Le système (2.11) est dit structurellement stable si et seulement s'il existe un voisinage  $V$  de  $\mu$  tel que pour tout  $\hat{\mu} \in V$  le système (2.11) est topologiquement équivalent au système  $\dot{x} = f(x, \hat{\mu})$ .*

### Remarque 2.3

*Si un système structurellement stable admet un seul point d'équilibre  $a$  asymptotiquement stable hyperbolique, alors, tout système "voisin" admet aussi un seul point d'équilibre, proche de  $a$ , asymptotiquement stable et hyperbolique.*

## 2.2.2 Valeur de bifurcation et codimension

\* Une valeur  $\hat{\mu}$  du paramètre pour laquelle le système (2.11) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation.

\* Si l'ensemble des valeurs de bifurcation est défini par  $k$  conditions

$$C_1(\mu) = C_2(\mu) = \dots = C_k(\mu) = 0 \text{ avec } 1 \leq k \leq p$$

La bifurcation est dite de codimension  $k$  (on peut dire que la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation).

### 2.2.3 Bifurcation de codimension un (I)

Nous présentons ici les quatre bifurcations de codimension un (nœud-col, transcritique, fourche et Hopf)

#### 1. Bifurcation nœud-col

C'est la bifurcation la plus simple lorsque  $\mu$  franchit 0, un point d'équilibre stable (nœud) et un point d'équilibre instable (col) apparaissent simultanément, elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \quad (2.12)$$

qui s'appelle équation générique de bifurcation nœud-col. On a alors  $f(x, \mu) = \mu - x^2$

\* Si  $\mu < 0$  l'équation  $f(x, \mu) = 0$  n'admet pas de solution alors on n'a pas de points fixes.

\* Si  $\mu > 0$  on a :

$$\mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu \iff \begin{cases} x = \sqrt{\mu} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

Par conséquent (2.12) admet deux points fixes .

$\frac{df(x,\mu)}{dx} = -2x$  alors  $\frac{df(x,\mu)}{dx} \Big|_{x=\sqrt{\mu}} = -2\sqrt{\mu} < 0$  et  $\frac{df(x,\mu)}{dx} \Big|_{x=-\sqrt{\mu}} = 2\sqrt{\mu} > 0$  par suite :

Le point fixe  $x = \sqrt{\mu}$  est stable, mais  $x = -\sqrt{\mu}$  est instable.

\* Si  $\mu = 0$  le seul point fixe est  $x = 0$ , par intégration de (2.12) on obtient

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

d'où le point  $x = 0$  est semi-stable. (stable si  $x_0 > 0$  et instable si  $x_0 < 0$ )

## 2. Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instables et vice versa) lorsque  $\mu$  franchit 0.

Elle est souvent représentée par l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \quad (2.13)$$

qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique. On a alors

$$\begin{aligned} \mu x - x^2 = 0 &\iff x(\mu - x) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$$\frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 2x \text{ donc } \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x=0} = \mu \text{ et } \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x=\mu} = -\mu \text{ par suite :}$$

\* Si  $\mu < 0$ , le point fixe  $x = 0$  est stable, mais  $x = \mu$  est instable.

\* Si  $\mu > 0$ , le point fixe  $x = 0$  est instable, mais  $x = \mu$  est stable.

On remarque un échange de stabilité en  $\mu = 0$ .

\* Si  $\mu = 0$ , le seul point fixe est  $x = 0$ , par intégration de (2.13) on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}}$$

D'où le point  $x = 0$  est semi-stable. (stable si  $x_0 > 0$  et instable si  $x_0 < 0$ )

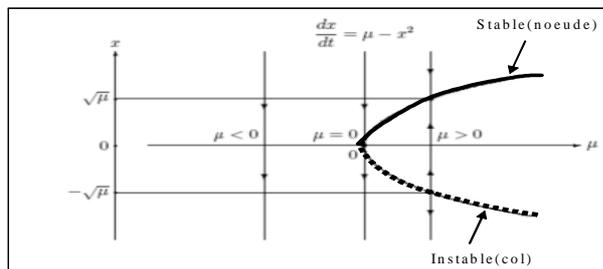


FIG. 2-4 – Diagramme de bifurcation noeud-col

### 3. Bifurcation fourche (Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de points fixes.

L'équation générique d'une bifurcation fourche (sur-critique) est

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$

et pour la sous-critique c'est

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a  $f(x, \mu) = \mu x - x^3$

$$\begin{aligned} \mu x - x^3 &= 0 \iff x(\mu - x^2) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu \end{array} \right. \end{aligned}$$

Alors si  $\mu < 0$  on a un seul point fixe  $x = 0$ .

Si  $\mu > 0$  on a trois points fixes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{array} \right.$$

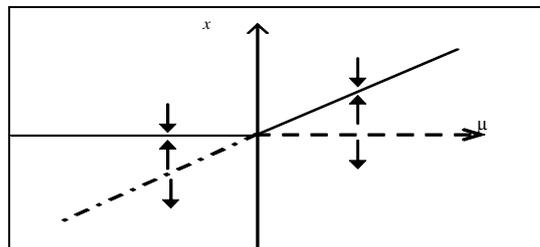


FIG. 2-5 – Diagramme de bifurcation transcritique.

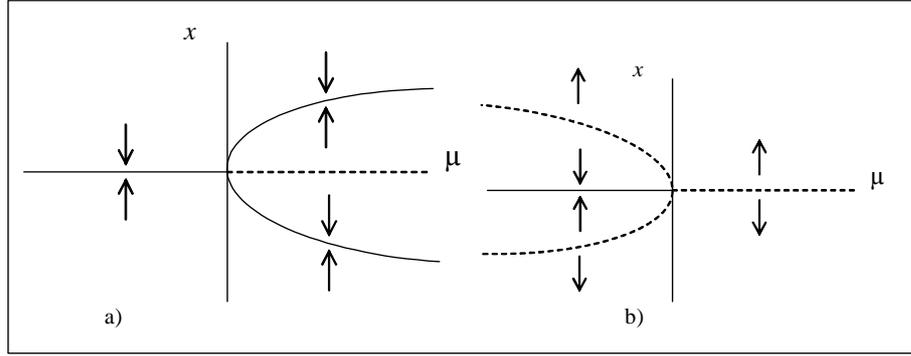


FIG. 2-6 – Diagramme de bifurcation fourche a) sur-critique b) sou-critique.

$$\frac{df(x,\mu)}{dx} = \mu - 3x^2 \text{ alors } \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x=0} = \mu \text{ et } \left. \frac{df(x,\mu)}{dx} \right|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \text{ par suite :}$$

\* Si  $\mu < 0$ , le seul point fixe  $x = 0$  est stable.

\* Si  $\mu > 0$ , le point fixe  $x = 0$  est instable, mais  $x = \sqrt{\mu}$  et  $x = -\sqrt{\mu}$  sont stables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes et dans la stabilité en  $\mu = 0$

#### 4. Bifurcation Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  prend une valeur critique  $\mu_0$  pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite .

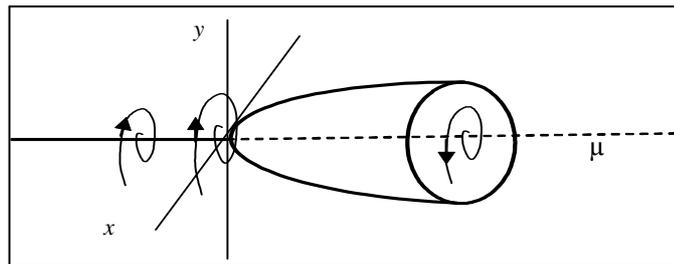


FIG. 2-7 – Diagramme de bifurcation Hopf.

## 2.3 Le chaos

On dit qu'un système est chaotique lorsque son évolution dans le temps est très sensible aux conditions initiales que l'on ne peut prédire exactement dans quel état il va se trouver si l'on attend trop longtemps.

L'atmosphère terrestre est un exemple quotidien, c'est parce que sa dynamique est chaotique que les météorologues ont tant de mal à faire des prévisions convenables au delà d'une petite semaine, même si l'on connaissait parfaitement les équations qui gouvernent l'atmosphère – ce qui est loin d'être le cas.

Dans des systèmes réguliers (non chaotiques) une petite erreur n'a que peu d'influence sur le mouvement alors qu'au contraire dans les systèmes chaotiques, par définition, une petite cause peut avoir de grands effets.

Typiquement dans un système régulier deux trajectoires séparées initialement d'une petite distance  $\delta x_0$  seront séparées au bout d'une durée  $t$  de  $dx = k t \delta x_0$  où  $k$  est une constante de proportionnalité dépendant du système, c'est à dire que les trajectoires se séparent de manière proportionnelle au temps (voir partie gauche du figure 2-8).

En revanche dans un système chaotique on aura  $dx = \delta x_0 e^{\frac{t}{T}}$ , la constante  $T$  étant positive et la séparation des trajectoires sera beaucoup plus rapide que dans le cas des systèmes réguliers même si  $\delta x_0$  est petit  $dx$  croît de façon exponentielle et les prédictions deviennent vite impossibles au bout de quelques  $T$ . (voir partie droite du figure 2-8 )

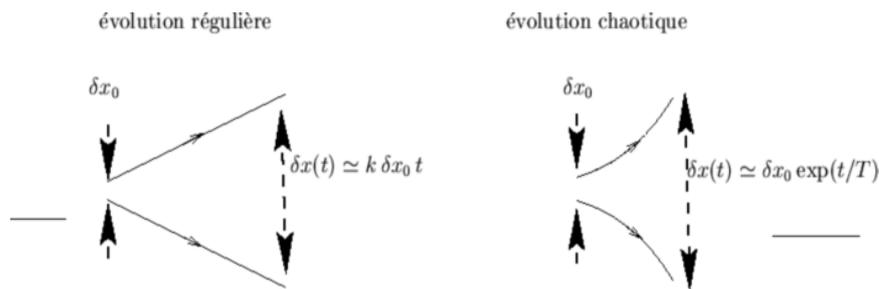


FIG. 2-8 – Sensibilité aux conditions initiales.

### 2.3.1 Propriétés du chaos

Les phénomènes chaotiques ne sont pas aléatoires, mais au contraire qui obéissent à des lois déterministes, parfois assez simples dans leur représentation mathématique. Les phénomènes traités par les lois du chaos se caractérisent par des propriétés génériques fondamentales en plus de la sensibilité aux conditions initiales on peut citer les propriétés suivantes :

#### 1. La non-linéarité

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perde ses propriétés. Mais un système non-linéaire, n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

#### 2. La structure fractale

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

#### 3. Les attracteurs étranges

Bien qu'imprévisibles et infiniment complexes à toutes les échelles, les systèmes chaotiques ne suivent pas des trajectoires privilégiées. La courbe d'un tel système, sans jamais repasser par les mêmes points évolue toujours dans un espace délimité dans lequel elle finit par décrire une figure géométrique particulière qui représente son attracteur, appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

### 2.3.2 Scénarios de transition vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui sont universels, et si un système entre dans un de ces scénarios, son évolution peut être décrite. Supposons que la dynamique étudiée dépend d'un paramètre de contrôle. Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.

On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos [37], [38] :

#### 1. L'intermittence vers le chaos :

Qui se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière.

#### 2. Le doublement de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcation fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc... ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

#### 3. Le scénario via la quasi-périodicité

Dans lequel un comportement devient chaotique par l'apparition successive de trois fréquences incommensurables.

### 2.3.3 Les exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée "exposant de Lyapunov" qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

#### 1. Cas d'une application unidimensionnelle

Considérons un système dynamique décrit par une application discrète  $f$  (c'est à dire  $x_n = f(x_{n-1})$ ) et soit  $x_0$  un condition initiale, perturbons  $x_0$  par l'ajout d'une très petite erreur  $\varepsilon$  et on observe le comportement des trajectoires  $x_n$  et  $\bar{x}_n$  issues des deux conditions initiales  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$ . Supposons qu'elles s'écartent en moyenne exponentiellement c'est à dire il existe un réel  $\lambda$  tel que après  $n$  itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon e^{n\lambda} \text{ d'ou } n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

finalemt pour  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.14)$$

$\lambda$  est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

\* Si  $\lambda > 0$  alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

\* Si  $\lambda < 0$  les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

## 2. Cas d'une application multidimensionnelle

Dans ce paragraphe nous allons généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles du type :

$$f : R^m \rightarrow R^m, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système  $m$ -dimensionnel possède  $m$  exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un  $\lambda_i$  soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des  $\lambda_i$  soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe.

Tout d'abord nous devons calculer les  $\lambda_i$ . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace  $m$ -dimensionnel de rayon  $\varepsilon$  (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons  $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ , on a le développement en série limité d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  suivant :

$$x_n - x'_n = \frac{df^n(x_0)}{dx_0} (x_0 - x'_0) = J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$  dénote la matrice jacobienne de  $f^n$  au point  $x_0$ , si elle est diagonalisable,

alors il existe une matrice inversible  $P_n$  telle que  $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n$ ,  $D_m^t$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $J^n$  qui seront notés par  $\wedge_i^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

On définit alors les  $m$  exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln [\wedge_i^n], \quad i = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

### 3. Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, comme nous l'avons mentionné précédemment si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

#### (a) Dimension de Mori.

Soient  $m_0$  le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls,  $m_+$  le nombre d'exposants positifs,  $\bar{\lambda}_+$  la moyenne des exposants positifs et  $\bar{\lambda}_-$  celle des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ \left( 1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|} \right) \quad (2.16)$$

#### (b) Dimension de Kaplan et Yorke

Soit  $j_0$  un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0 \quad (2.17)$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|} \quad (2.18)$$

### 2.3.4 Estimation du plus grand exposant de Lyapunov

En 1985, Wolf, Swift Swinney et Vastano [29] ont proposé une méthode de calcul du plus grand exposant et de la somme des  $n$  plus grands exposants de Lyapunov à partir des séries chronologiques.

Leur algorithme est basé sur le contrôle de la divergence entre les trajectoires voisines.

On choisit dans un premier temps deux orbites très voisines, et on note  $d(t_0)$  leur distance en un temps ultérieur, soit  $t_1$ , cette distance est devenue  $d'(t_1)$ . On effectue alors un remplacement : on se choisit une autre orbite, située à une distance  $d(t_1)$ . On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps  $t_1, \dots, t_M$ , voir figure(2-9) et on calcule l'estimateur du plus grand exposant par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^M \ln \frac{d'(t_i)}{d(t_{i-1})} \quad (2.19)$$

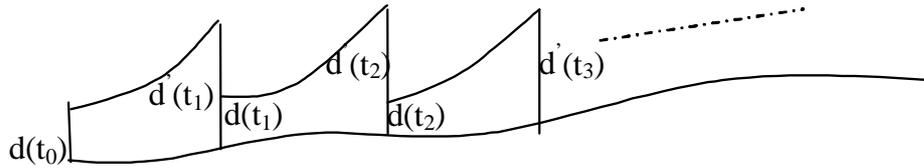


FIG. 2-9 – Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov

Wolf et d'autre proposent aussi un algorithme pour le calcul de la somme des deux plus grands exposants. Le principe est similaire : ils prennent trois trajectoires voisines et calculent l'aire du triangle de conditions initiales, soit  $A(t_0)$ . En un temps ultérieur  $t_1$ , cette aire est devenue  $A'(t_1)$ . On effectue alors un remplacement, et on obtient une nouvelle aire de conditions initiales  $A(t_1)$ . On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps

$t_1, \dots, t_M$  et on calcule l'estimateur de la somme des 2 plus grands exposants :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^M \ln \frac{A'(t_i)}{A(t_{i-1})} \quad (2.20)$$

## 2.4 Conclusion

*Dans ce chapitre nous avons présenté quelques éléments de la théorie des systèmes dynamiques et du chaos : notions de stabilité et des méthodes pour leur étude (la fonction de Lyapunov et la linéarisation pour les points fixes, et la section de Poincaré pour les cycles limites) ainsi nous avons remarqué qu'un système d'ordre fractionnaire  $\alpha$  ( $\alpha < 1$ ) possède une région de stabilité plus vaste que celle du système entier correspondant, les quatre types des bifurcations locales de codimension un (noeud-col, transcritique, fourche et Hopf), et la théorie du chaos où nous avons donné les propriétés du chaos (sensibilité aux conditions initiales, la non linéarité, la structure fractale, Les attracteurs étranges), les trois Scénarios de transition vers le chaos (l'intermittence, le doublement de période, la quasi-périodicité), et en fin un outil pour la détermination du chaos qui est le plus grand exposant de Lyapunov avec un algorithme de calcul.*

# Chapitre 3

## Etude de quelques systèmes d'ordre fractionnaire

### 3.1 Un modèle financier

Au cours des dernières années, l'éconophysique a été enrichi par une nouvelle méthode scientifique pour comprendre la dynamique très complexe des systèmes financiers et économiques. Les chercheurs s'efforcent d'expliquer les aspects centraux des données économiques : micro fluctuations irrégulières, les fluctuations macroéconomiques erratiques (cycles économiques), la croissance irrégulière, les changements structurels, et le chevauchement des ondes de développement économique. L'économiste précise un modèle dont les variables endogènes, en l'absence des forces extérieures, qui se comporte de façons simples (atteindre l'équilibre stationnaire, cycles périodiques, ou une croissance équilibrée). Le modèle est ensuite enrichi par des chocs exogènes variables dont le comportement est supposé provenir de forces en dehors du système économique en cours d'examen mais qui ont une incidence sur son fonctionnement. Ces chocs sont souvent supposés être aléatoires de sorte que les variables endogènes affichant des comportements irréguliers. Les influences typiques externes qui sont considérées comme des chocs aléatoires sont : des variables météorologiques, des événements politiques et d'autres facteurs

humains. Contrairement au point de vue des chocs exogènes mentionnés ci-dessus, le chaos est favorable à une explication endogène de la complexité observée dans les séries économiques. Au cours des dernières années, l'importance du chaos dans l'économie a considérablement augmenté" le chaos représente un changement radical de perspective sur les cycles d'affaires" [43] Le chaos est le caractère aléatoire inhérent à un système précis. Le caractère aléatoire est causé par le système interne, et non par des perturbations extérieures. Les principales caractéristiques du chaos déterministe, comme le portrait de phase complexe et les exposants de Lyapunov qui sont positifs, ont été trouvés dans de nombreuses données économiques agrégées comme le produit national brut [44]. Beaucoup de modèles chaotiques ont été proposés pour étudier la dynamique économique complexe dans la littérature, par exemple, le modèle de Van der Pol forcé ([45]-[47]), et le modèle proposé dans les références ([53]-[55]). Cette étude examine les deux caractéristiques les plus attrayantes, la mémoire et le chaos, dans les simulations des systèmes financiers. une des principales différences entre les modèles d'ordre fractionnaire et les modèles d'ordre entier c'est que les modèles fractionnaires possèdent la mémoire, c'est-à-dire le modèle d'ordre fractionnaire dépend de l'histoire du système.

Les variables financières tels que les taux de change, le produit intérieur brut, les taux d'intérêt, la production, et les prix du stock peuvent avoir de très longue mémoire, ([58],[59]). Cela signifie que toutes les fluctuations des variables financières sont en corrélation avec toutes les fluctuations futures. C'était la motivation des scientifiques pour la description des systèmes financiers en utilisant un modèle fractionnaire non linéaire car il possède en même temps la mémoire et le chaos. Dans la dernière décennie, des attracteurs chaotiques ont été trouvés dans des systèmes d'ordre fractionnaire ([60]-[69]).

### 3.1.1 Description du système

Les oeuvres récentes ([53]-[55]) ont introduit un modèle dynamique de financement, composé de trois équations différentielles de premier ordre.

Le modèle décrit les variations temporelles de trois variables d'état : le taux d'inté-

rêt,  $x$ , la demande d'investissement,  $y$  et l'indice des prix  $z$ . En choisissant un système de coordonnées et la mise en dimensions appropriées pour chaque variable d'état, les références ([53]-[55]) offrent le modèle de financement simplifié suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $a$  est le montant d'épargne,  $b$  est le coût d'investissement, et  $c$  est l'élasticité de la demande des marchés commerciaux. Dans le modèle (3.1), les facteurs qui influent sur les changements dans  $x$  viennent principalement des contradictions dans les investissements sur le marché et les ajustements structurelles des prix des marchandises. L'évolution du taux de  $y$  est proportionnelle au taux d'investissement, ainsi qu'à une inversion du coût de l'investissement et les taux des intérêts. Les changements dans  $z$  sont d'une part contrôlés par la contradiction entre l'offre et la demande sur les marchés commerciaux et d'autre part ils sont influencés par les taux des inflations. Il est évident que les trois constantes,  $a$ ,  $b$  et  $c$ , dans le modèle (3.1) ne sont pas négatifs.

### 3.1.2 Analyse du système

#### Propriétés mathématiques

Le système (3.1) est autonome, son espace de phase est tridimensionnel. Il est invariable par la transformation suivante :  $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z)$ .

On peut noter cette transformation par  $T$ , tel que :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

qui satisfait

$$f(TX) = Tf(X)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ et } X = (x, y, z).$$

### Dissipation et existence de l'attracteur

La divergence de champ de vitesse est donnée par :

$$\text{div} f = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

ce qui donne

$$\text{div} f = y - a - b - c$$

Pour que le système soit dissipatif, il faut que :

$$\text{div} f < 0$$

par conséquent (3.1) est dissipatif, pour  $y < a + b + c$ .

### 3.1.3 Points d'équilibre

Les points fixes sont les solutions de système :

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \end{cases}$$

Après un simple calcul, on trouve que :

\* Si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) \leq 0$  (ie  $a \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ) on a un seul point fixe :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0)$$

\* Si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) > 0$  (ie  $a < \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ) on a trois points fixes :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0), p_{2,3} = (\mp \sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}, (a + \frac{1}{c}), \pm \frac{\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}}{c})$$

On pose  $b = 0.1, c = 1$  et  $a \in \mathbb{R}^+$  alors

\* Si  $a \geq 9$ , on a un seul point fixe :

$$p_1 = (0, 10, 0)$$

\* Si  $a < 9$ , on a trois points fixes :

$$p_1 = (0, 10, 0), p_{2,3} = (\mp \sqrt{\frac{9-a}{10}}, (a+1), \pm \sqrt{\frac{9-a}{10}})$$

### Stabilité des points d'équilibre

Nous allons appliquer la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité au voisinage des points d'équilibres.

**Pour le point  $p_1$**  La matrice jacobienne associée est :

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} 10 - a & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (a - 8.9)\lambda^2 + (1.1a + -9.9)\lambda + (0.1a - 0.9)$$

Les valeurs propres de la matrice  $J_{p_1}$  sont les racines du polynôme  $P(\lambda)$ .

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres

sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} a - 8.9 > 0 \\ 0.1a - 0.9 > 0 \\ (a - 8.9)(1.1a + -9.9) - (0.1a - 0.9) > 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a > 8.9 \\ a > 9 \\ a \in ]-\infty, 8.9909[ \cup ]9.0, \infty[ \end{cases}$$

Alors  $p_1$  est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $a > 9$ .

plus précisément les valeurs propres de  $J_{p_1}$  sont :

$$\lambda_1 = -0.1 \text{ et } \lambda_{2,3} = \begin{cases} \frac{9-a \pm \sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} \text{ si } a \in ]0; 9] \cup [13; +\infty[ \\ \frac{9-a \pm i\sqrt{-a^2 + 22a - 117}}{2} \text{ si } a \in ]9; 13[ \end{cases}$$

$(\lambda_2, \lambda_3)$  est une paire de valeurs propres complexes conjugués qui traversent l'axe imaginaire pour  $a = 9$  on aura alors une bifurcation de Hopf.

### Pour les points $P_{2,3}$

Aux voisinages de ces deux points d'équilibre, la matrice jacobienne associée est

$$J_{p_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & \pm \sqrt{\frac{9-a}{10}} & 1 \\ \mp 2\sqrt{\frac{9-a}{10}} & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\dot{p}(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda^2 + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)\lambda + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)$$

Les valeurs propres de la matrice  $J_{p_{2,3}}$  sont les racines du polynôme  $\dot{P}(\lambda)$ .

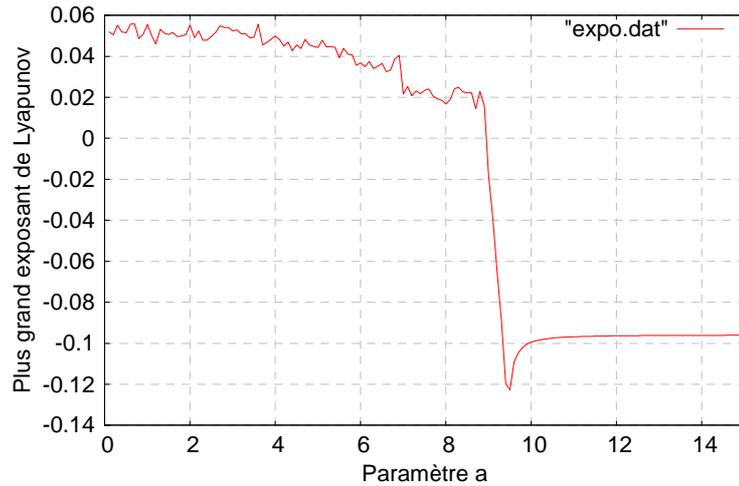


FIG. 3-1 – Estimation de plus grand exposant de Lyapunov

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz ces valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives, si et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}a + 1.8 > 0 \\ 0.1 \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right) - \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right) > 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a < 9 \\ a > 9 \end{cases}$$

Ainsi les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent les deux points fixes  $P_{2,3}$  ne seront jamais stables.

### 3.1.4 Etude numérique

Pour la résolution numérique du système (3.1) nous avons utilisé la méthode de Runge Kutta d'ordre 4, et pour détecter le chaos nous avons calculé le plus grand exposant de Lyapunov en utilisant l'algorithme de Wolf Swit présenté dans la section (2-3-4) avec les valeurs des paramètres  $b = 0.1$ ,  $c = 1$  et  $a$  varie de 15 à 0 d'un pas égal à  $-1$ .

Nous avons écrit des programmes en FORTRAN90 et les résultats sont représentés graphiquement à l'aide du logiciel GNUPLOT.

La figure (3-1) représente l'évolution du plus grand exposant de Lyapunov suivant la

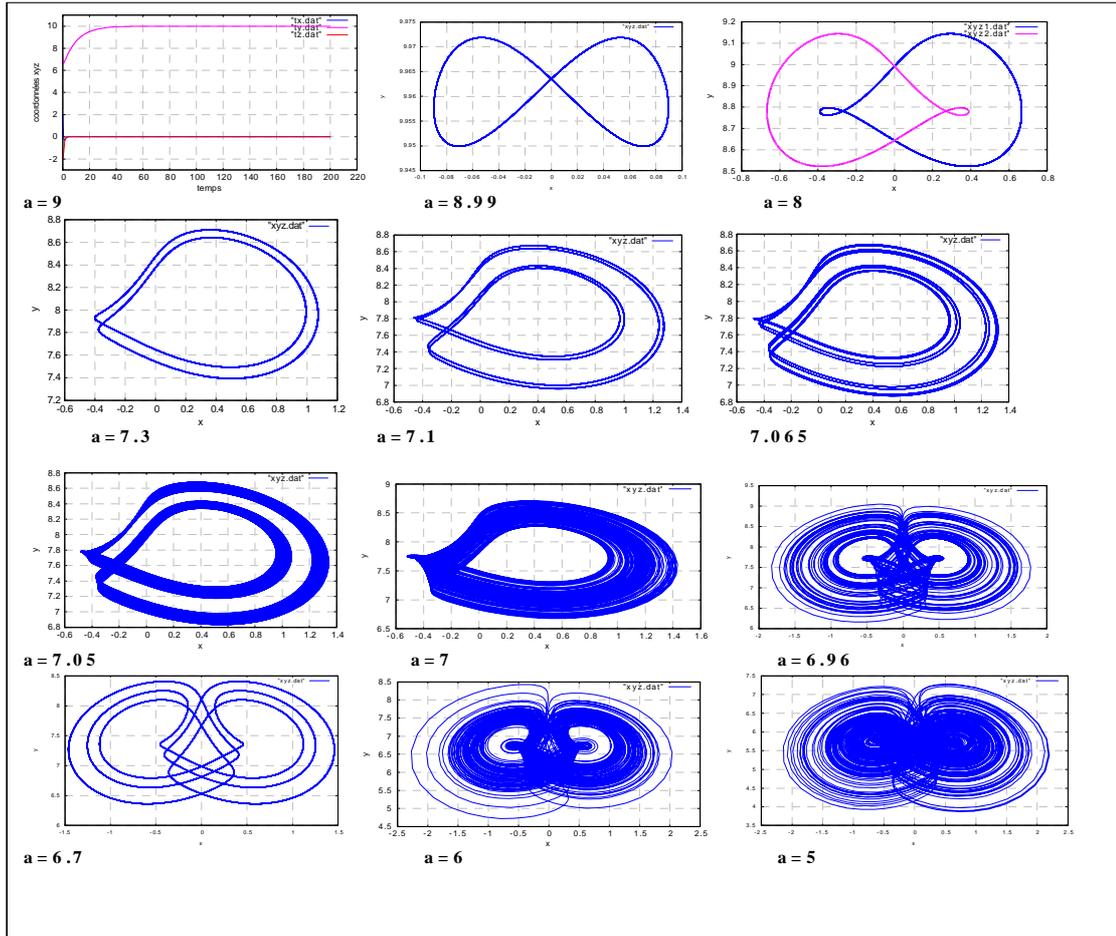


FIG. 3-2 – Transition vers le chaos via le doublement de période.

variation du paramètre  $a$  qui décroît de 15 à 0.

On remarque que pour  $a > 9$  le plus grand exposant de Lyapunov est strictement négatif ( $\lambda < 0$ ) par suite le comportement du système est stationnaire tandis que pour  $7 < a < 9$  le plus grand exposant de Lyapunov est presque nul ( $\lambda \approx 0$ ) alors on a un régime périodique. Finalement pour  $a \leq 7$  le plus grand exposant de Lyapunov est strictement positif dans ce cas le comportement est chaotique.

La figure (3-2) montre la transition vers le chaos du système (3.1). Pour  $a \geq 9$  le système possède un point fixe stable, pour  $8 < a < 9$  un cycle limite stable apparaît et se divise en deux cycles pour  $a \approx 8$ . Ces deux cycles doublent leurs périodes lorsque  $a \approx 7.3$

et redoublent pour  $a \approx 7.1$ , la vitesse de doublement de période augmente rapidement et les deux cycles se rattachent une autre fois lorsque  $a \approx 6.96$  pour donner un attracteur étrange. Pour  $a \approx 6.7$  un orbite périodique remplace l'attracteur étrange, mais le régime chaotique revient qu'on  $a \approx 6$  et reste pour  $a \leq 6$ .

On peut dire que c'est un scénario de doublement de période vers le chaos.

### 3.1.5 Extension au cas fractionnaire

Maintenant nous allons considérer l'ordre de dérivation comme un paramètre de contrôle alors nous réécrivons le système financier (3.1) dans la forme généralisée suivante :

$$\begin{cases} D^{q_1}x = z + (y - a)x \\ D^{q_2}y = 1 - by - x^2 \\ D^{q_3}z = -x - cz \end{cases} \quad (3.2)$$

$D^q$  est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo qui est défini dans le premier chapitre.

Nous calculons les points fixes de la même manière comme dans le cas entier et on trouve les même points (lorsque on change l'ordre de dérivation les points fixes ne changent pas, c'est la stabilité qui peut être changé)

\* Si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) \leq 0$  (ie  $a \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ), on a un seul point fixe :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0)$$

\* Si  $1 - b(a + \frac{1}{c}) > 0$  (ie  $a < \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ), on a trois points fixes

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0), p_{2,3} = (\mp \sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}, (a + \frac{1}{c}), \pm \frac{\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}}{c})$$

On pose  $b = 0.1, c = 1$  et  $a \in \mathbb{R}^+$  alors

\* Si  $a \geq 9$  on a un seul point fixe :

$$p_1 = (0, 10, 0)$$

\* Si  $a < 9$  on a trois points fixes

$$p_1 = (0, 10, 0), p_{2,3} = (\mp\sqrt{\frac{9-a}{10}}, (a+1), \pm\sqrt{\frac{9-a}{10}})$$

### Stabilité des points d'équilibre

Dans cette section il est considéré que  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  et  $0 < q \leq 1$ .

Nous allons appliquer la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité aux voisinage des points d'équilibres, en tenant compte du théorème (2.6) qui donne un critère pour la stabilité des systèmes linéaires généralisés.

**Pour le point  $p_1$**  La matrice jacobienne associée est :

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (a - 8.9)\lambda^2 + (1.1a + -9.9)\lambda + (0.1a - 0.9)$$

Les valeurs propres de la matrice  $J_{p_1}$  sont les racines du polynôme  $P(\lambda)$ .

$$\lambda_1 = -0.1 \text{ et } \lambda_{2,3} = \begin{cases} \frac{9-a \pm \sqrt{a^2 - 22a + 117}}{2} & \text{si } a \in ]0; 9] \cup [13; +\infty[ \\ \frac{9-a \pm i\sqrt{-a^2 + 22a - 117}}{2} & \text{si } a \in ]9; 13[ \end{cases}$$

\* Si  $a > 9$  les parties réelles de toutes les valeurs propres sont strictement négatives par suite les valeurs absolues de ses arguments sont supérieures à  $\frac{\pi}{2}$ . alors quelque soit

$0 < q \leq 1$ , on a :

$$|\arg(\lambda_{1,2,3})| > q \frac{\pi}{2}$$

d'où le point fixe  $p_1$  est localement asymptotiquement stable pour  $0 < q \leq 1$ .

\* Si  $a < 9$  deux valeurs propres sont réelles négatives mais la troisième est réelle positive (son argument est nul la condition (2.8) n'est pas vérifiée) alors le point fixe  $p_1$  est instable quelque soit  $0 < q \leq 1$ .

### **Pour les points $P_{2,3}$**

Au voisinage de ces deux points d'équilibre, la matrice jacobienne associée est

$$J_{p_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & \pm \sqrt{\frac{9-a}{10}} & 1 \\ \mp 2\sqrt{\frac{9-a}{10}} & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\dot{p}(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda^2 + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)\lambda + \left(-\frac{1}{5}a + 1.8\right)$$

Comme nous avons vu précédemment, en appliquant le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles des valeurs propres, ne seront jamais tous négatives, en même temps.

Nous avons calculé ces valeurs propres et les valeurs critiques de  $q$  pour plusieurs valeurs de  $a$  compris entre 0 et 9. Les résultats sont représentés dans le tableau suivant :

$a$	Les valeurs propres de la matrice jacobienne	$q$
0.1	$0.33406 - 1.4497i, 0.33406 + 1.4497i, -0.76812$	0.85748
0.5	$0.33044 + 1.4120i, 0.33044 - 1.4120i, -0.76087$	0.85582
1	$0.33406 - 1.4497i, 0.33406 + 1.4497i, -0.76812$	0.85365
1.5	$0.32654 - 1.373i, 0.32654 + 1.373i, -0.75308$	0.85135
2	$0.32233 - 1.3327i, 0.32233 + 1.3327i, -0.74466$	0.84893
2.5	$0.31776 - 1.2909i, 0.31776 + 1.2909i, -0.73553$	0.84635
3	$0.31278 + 1.2474i, 0.31278 - 1.2474i, -0.72556,$	0.84360
3.5	$0.30732 - 1.2020i, 0.30732 + 1.2020i, -0.71464$	0.84065
4	$0.30128 + 1.1544i, 0.30128 - 1.1544i, -0.70257$	0.83748
4.5	$0.29457 + 1.1042i, 0.29457 - 1.1042i, -0.68913$	0.83403
5	$0.28701 - 1.0510i, 0.28701 + 1.0510i, -0.67402$	0.83029
5.5	$0.27841 - 0.99409i, 0.27841 + 0.99409i, -0.65682$	0.82616
6	$0.26847 + 0.93270i, 0.26847 - 0.93270i, -0.63694$	0.82158
6.5	$0.25674 + 0.8655i, 0.25674 - 0.8655i, -0.61349$	0.81642
7	$0.24251 + 0.79053i, 0.24251 - 0.79053i, -0.58502$	0.81051
7.5	$0.22449 - 0.70433i, 0.22449 + 0.70433i, -0.54897$	0.80357
8	$0.2 - 0.6i, 0.2 + 0.6i, -0.5$	0.79517
8.5	$0.16141 + 0.45875i, 0.16141 - 0.45875i, -0.42283$	0.78462
8.9	$0.090719 - 0.25067i, 0.090719 + 0.25067i, -0.28144$	0.77894

On remarque qu'il y a toujours une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes conjugués avec la partie réelle positive, les valeurs critiques de  $q$  sont calculés en appliquant la relation  $q = \frac{2|\arg(\lambda_{2,3})|}{\pi}$ . La figure (3-3) représente l'évolution de la valeur critique de  $q$  suivant les variations du paramètre  $a$ .

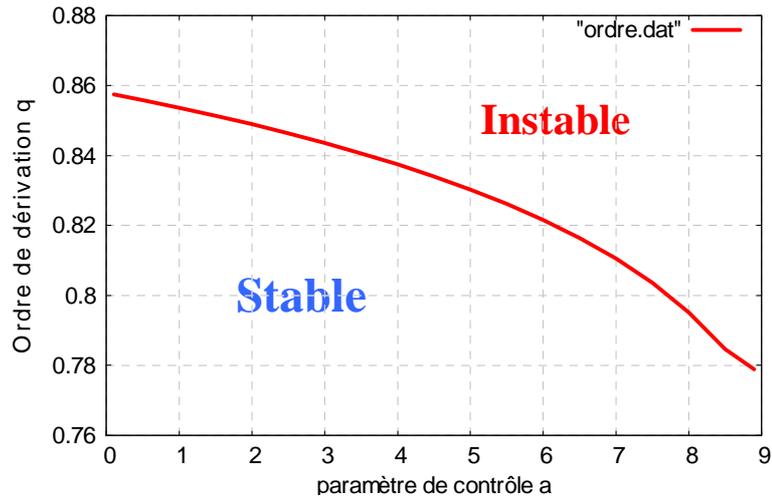


FIG. 3-3 – Evolution de la valeur critique de  $q$ .

### Etude numérique

La méthode de Adams-Bashforth-Moulton de prédiction-corréction (section (1-7-2)) est appliquée pour la résolution numérique du système (3.2)

Nous fixons les paramètres  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 1$ , et nous considérons l'ordre de dérivation  $q$  comme un paramètre de contrôle avec la condition initial  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 2)$ , quatre cas sont étudiés.

#### 1. $q_1 = q_2 = q_3 = q$

Afin d'identifier la dynamique du système le plus grand exposant de Lyapunov a été calculé pour les valeurs de  $q$  qui varient de 0.80 à 1.00 d'un pas égal à 0.01 les résultats sont représentés dans la figure (3-4)

Le plus grand exposant de Lyapunov est négatif pour  $q < 0.85$  dans ce cas la dynamique est stationnaire. Pour  $q > 0.85$  Le plus grand exposant de Lyapunov sera positif, alors on a un comportement chaotique, l'ordre total minimum pour que le système soit chaotique dans ce cas est 2.51. La figure (3-5) représente les différents états dynamiques pour quelques valeurs de  $q$ .

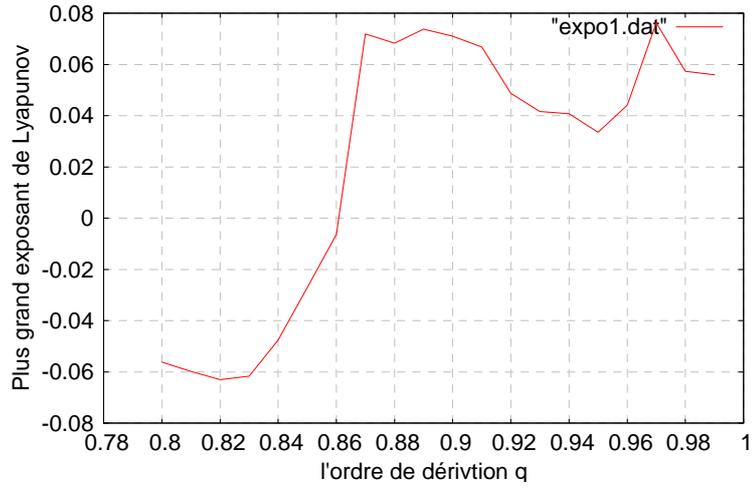


FIG. 3-4 – Evolution du plus grand exposant de Lyapunov  $\lambda$  suivant l'ordre de dérivation.

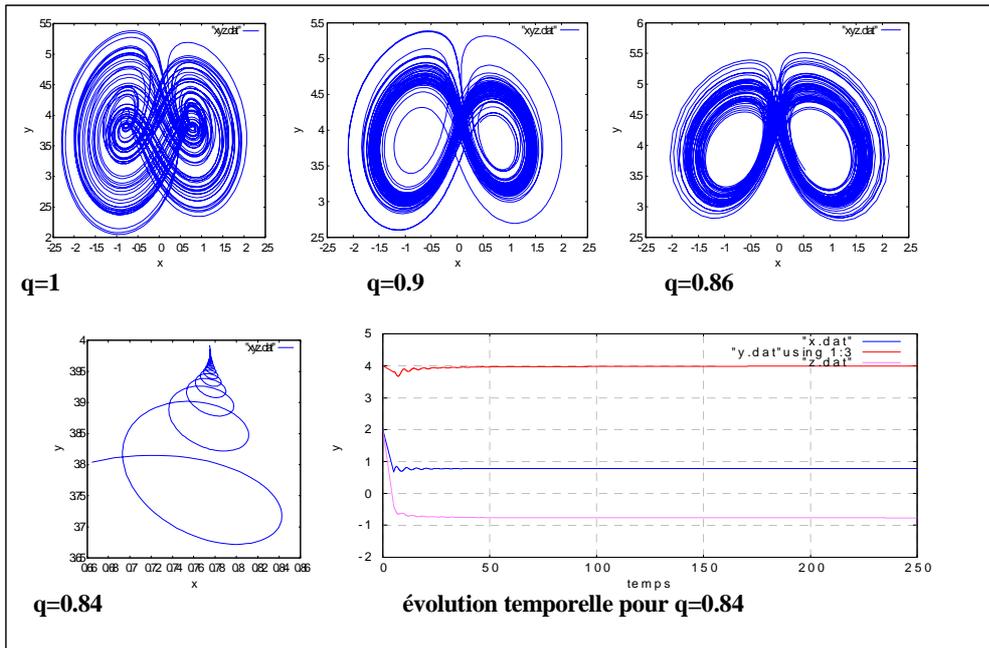


FIG. 3-5 – La dynamique du système pour différentes valeurs de  $q$

2.  $q_2 = q_3 = 1$  et  $q_1$  prend des valeurs inférieures à 1

La figure (3-6) représente l'évolution du plus grand exposant de Lyapunov. On observe le comportement chaotique dans l'intervalle  $[0.69; 1]$ , mais dans  $[0.5; 0.68[$  le comportement est stationnaire. Dans ce cas l'ordre total minimum pour que le système soit chaotique est 2.69.

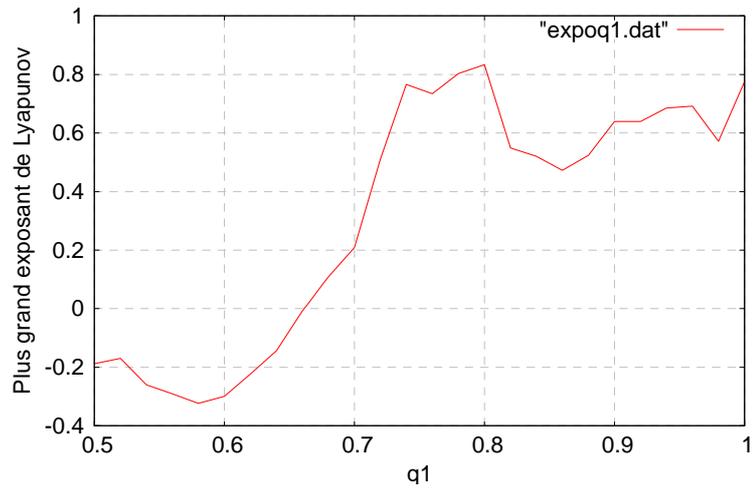


FIG. 3-6 – Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de  $q_1$

Le portrait de phase pour quelques valeurs de  $q_1$  est représenté dans la figure (3-7)

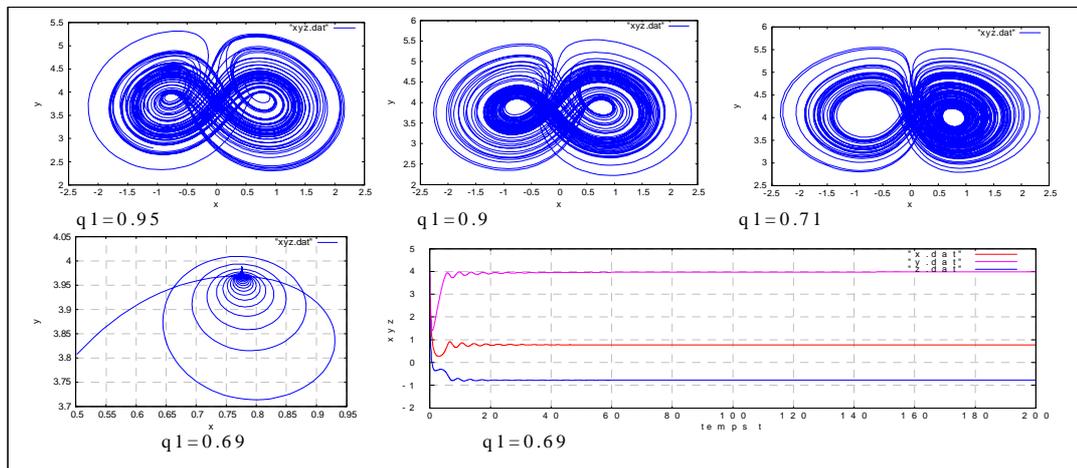


FIG. 3-7 – Portrait de phase pour quelques valeurs de  $q_1$ .

3.  $q_1 = q_3 = 1$  et  $q_2$  prend des valeurs inférieures à 1

Le plus grand exposant de Lyapunov est estimé numériquement pour  $q_2 \in [0.85; 1]$

L'analyse du figure (3-8) montre qu'il y a un comportement chaotique lorsque  $q_2$  franchira la valeur critique 0.91, on observe un régime périodique pour  $q_2 < 0.91$ .

La transition vers le chaos est via le scénario d'**intermittence** figure (3-9).

Dans ce cas le minimum ordre total pour lequel le système montre un comportement chaotique est 2.92.

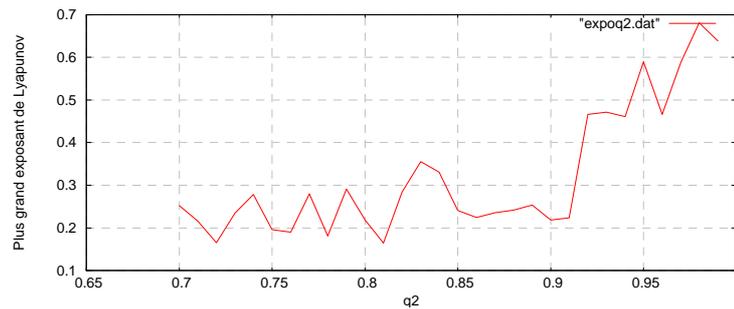


FIG. 3-8 – Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de  $q_2$ .

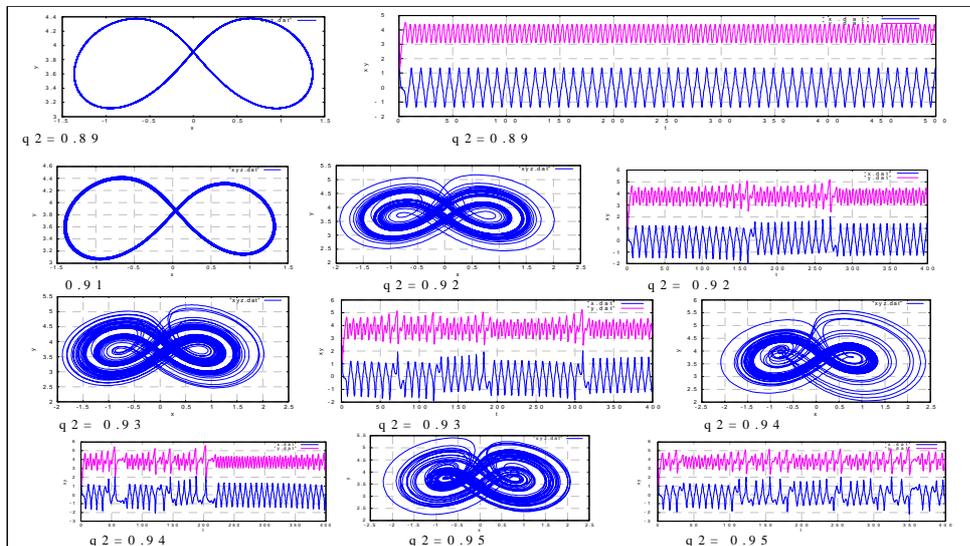


FIG. 3-9 – Le portrait de phase et l'évolution temporelle pour quelques valeurs de  $q_2$ .

4.  $q_1 = q_2 = 1$  et  $q_3$  prend des valeurs inférieures à 1

Nous calculons le plus grand exposant de Lyapunov pour  $q_3$  croit de 0.1 à 1 d'un pas égal à 0.01 figure (3-10).

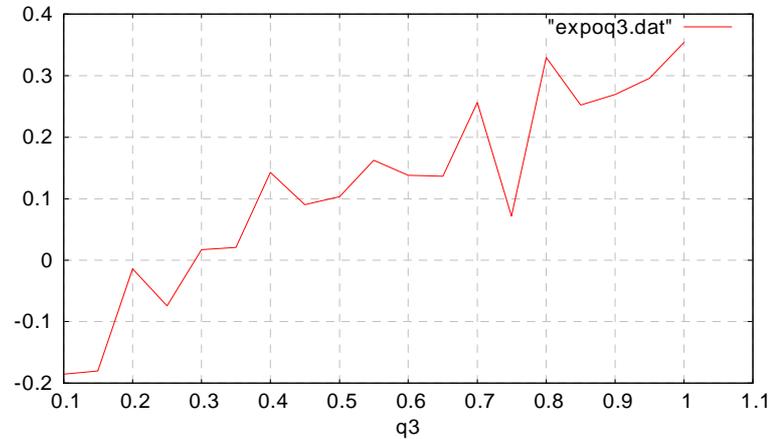


FIG. 3-10 – Evolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de  $q_3$ .

Nous observons alors le comportement chaotique dans les intervalles  $[0.27; 0.7]$  et  $[0.9; 1]$ , et un comportement périodique dans l'intervalle  $[0.78; 0.88]$ , un régime stationnaire pour  $q_3 < 0.25$ , figure (3-11).

La transition vers le chaos observé ici est via l'intermittence figure (3-12)

L'ordre total minimum pour aboutir au chaos dans ce cas est 2.27.

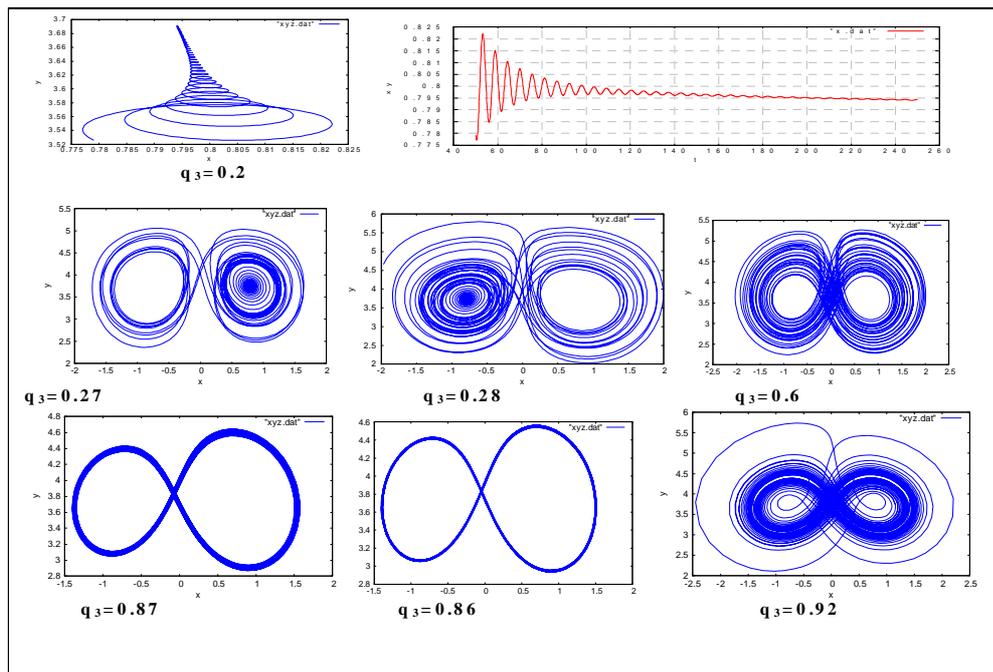


FIG. 3-11 – Portrait de phase pour quelques valeurs de  $q_3$ .

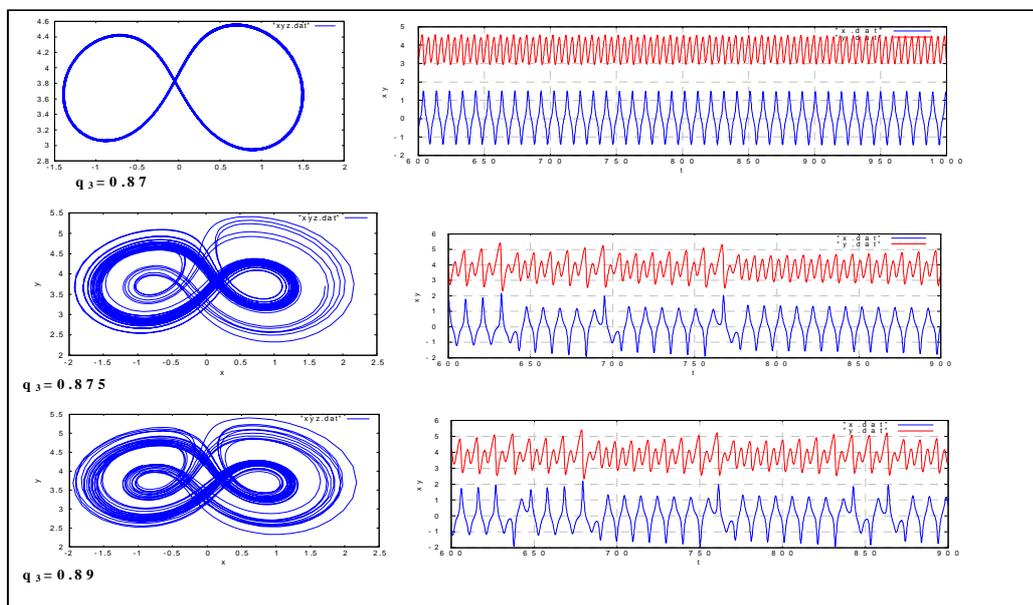


FIG. 3-12 – La transition vers le chaos via l'intermittence.

## 3.2 Système de Chua

### 3.2.1 Présentation du système

Le système de Chua a été beaucoup étudié et détaillé pour les principes de synchronisation des systèmes chaotiques.

A l'origine, il est réalisé par le circuit électronique montré à la figure (3-13).

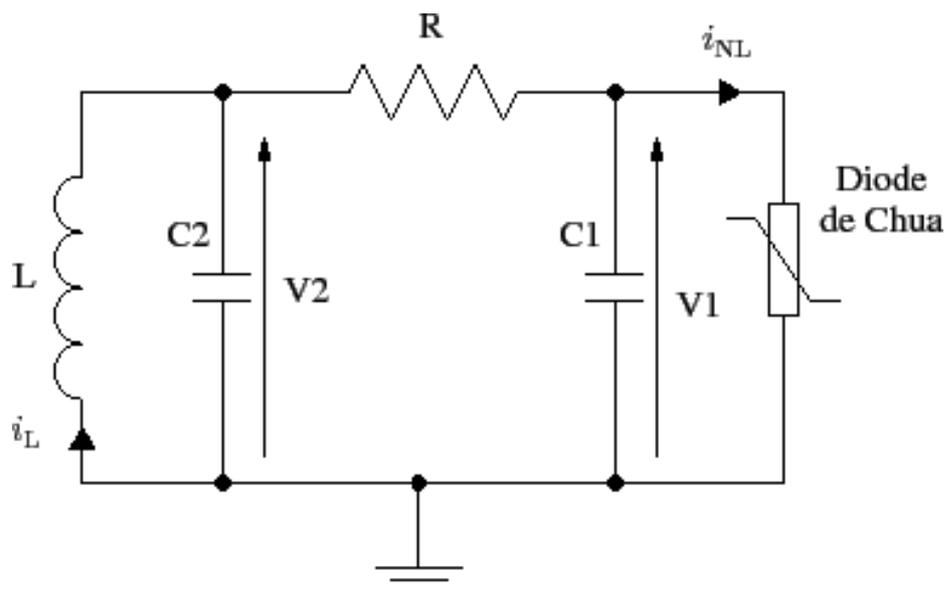


FIG. 3-13 – Le circuit de Chua.

Ce circuit est composé d'éléments passifs (deux capacités une résistance linéaire et une inductance (C1,C2,R,L)) et d'un élément actif non-linéaire (une résistance non linéaire appelée diode de Chua)

D'après la loi de Kirchhoff ce circuit est décrit par le système d'équations de variables d'état continus suivant [74] :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{c_1} \left[ \frac{1}{R} (v_2 - v_1) - i_{NL} \right] \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2} \left[ i_L - \frac{1}{R} (v_2 - v_1) \right] \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_2 \end{cases}$$

$$i_{NL} = h(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2}[G_a - G_b][|v_1 + E| - |v_1 - E|]$$

En faisant les changements  $\alpha = \frac{c_2}{c_1}, \beta = \frac{c_2}{L} R^2, m_0 = R G_a, m_1 = R G_b$  et en renommant les variables d'état  $x = \frac{v_1}{E}, y = \frac{v_2}{E}, z = \frac{R i_L}{E}, t = \frac{t}{c_2 R}$  le précédent système d'équations non-linéaires devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(-x + y - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (3.3)$$

avec la non-linéarité :

$$f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}[m_0 - m_1][|x + 1| - |x - 1|] = \begin{cases} m_0 x & \text{si } |x| \leq 1 \\ m_1 x + m_0 - m_1 & \text{si } x > 1 \\ m_1 x + m_1 - m_0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

On a la divergence  $\nabla X = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\alpha - (m + 1)$  avec  $m = \begin{cases} m_0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ m_1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

Si on fixe  $\beta = 14.87$  et  $m_0 = -0.68, m_1 = -1.27$  alors

$$\nabla X < 0 \iff \alpha > -(m + 1)$$

d'où pour  $\alpha > 0.27$  le système sera dissipatif

### 3.2.2 Les points fixes

La résolution du système

$$\begin{cases} \alpha(-x + y - f(x)) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y = 0 \end{cases}$$

donne les points fixes :

$$X_1 = (0, 0, 0), X_2 = (c, 0, -c), X_3 = (-c, 0, c)$$

avec  $c = \frac{m_1 - m_0}{m_1 + 1}$

La matrice jacobienne est donné par  $\begin{bmatrix} -\alpha(m+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$ , ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha(m+1) + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m)\lambda + \beta\alpha(m+1)$$

### Stabilité de l'origine

La matrice jacobienne correspondante est  $\begin{bmatrix} -\alpha(m_0+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$  sa polynôme caractéristique est :

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha(m_0+1) + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m_0)\lambda + \beta\alpha(m_0+1)$$

On pose  $A = \alpha(m_0+1) + 1, B = \beta + \alpha m_0, C = \beta\alpha(m_0+1)$  le polynôme devient :

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles des racines de ce polynôme soient négatifs si et seulement si

$$\begin{cases} A = \alpha(m_0+1) + 1 > 0 \\ C = \beta\alpha(m_0+1) > 0 \\ AB - C = m_0(1+m_0)\alpha^2 + \alpha m_0 + \beta > 0 \end{cases}$$

en substituant  $m_0$  et  $\beta$  on aura :

$$\begin{cases} \alpha > -3.125 \\ \alpha > 0 \\ -9.9755 < \alpha < 6.8505 \end{cases} \quad \text{d'ou } 0 < \alpha < 6.8505$$

Alors le point fixe  $X_1 = (0, 0, 0)$  est stable si et seulement si  $0 < \alpha < 6.8505$ .

### Stabilité des deux autres points fixes

La matrice jacobienne correspondante est  $\begin{bmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$  sa polynôme caractéristique est :

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha(m_1 + 1) + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m_1)\lambda + \beta\alpha(m_1 + 1)$$

On pose  $A = \alpha(m_1 + 1) + 1$ ,  $B = \beta + \alpha m_1$ ,  $C = \beta\alpha(m_1 + 1)$  le polynôme devient :

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles des racines de ce polynôme soient négatives si et seulement si

$$\begin{cases} A = \alpha(m_1 + 1) + 1 > 0 \\ C = \beta\alpha(m_1 + 1) > 0 \\ AB - C = m_1(1 + m_1)\alpha^2 + \alpha m_1 + \beta > 0 \end{cases}$$

En substituant  $m_0$  et  $\beta$  on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < 3.7037 \\ \alpha < 0 \quad \text{d'ou } \alpha < 0 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Alors les deux points fixes  $X_2, X_3$  sont stables si et seulement si  $\alpha < 0$ .

### 3.2.3 Extension au cas fractionnaire

Le système de Chua s'écrit en utilisant les dérivées fractionnaires de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{q_1}x = \alpha(-x + y - f(x)) \\ D^{q_2}y = x - y + z \\ D^{q_3}z = -\beta y \end{array} \right. \quad (3.4)$$

pour  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 14.87$  et  $m_0 = -0.68$ ,  $m_1 = -1.27$  on trouve les points fixes  $X_1 = (0, 0, 0)$ ,  $X_2 = (-1.8438, 0, 1.8438)$ ,  $X_3 = (1.8438, 0, -1.8438)$

La matrice jacobienne correspondante au point fixe  $X_1$  est  $j_1 = \begin{bmatrix} 2.7 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}$

ses valeurs propres sont :  $\lambda_1 = 3.8478$ ,  $\lambda_2 = -1.0739 + 3.0465i$ ,  $\lambda_3 = -1.0739 - 3.0465i$  comme  $\lambda_1 > 0$  ce point fixe est instable.

La matrice jacobienne correspondante au deux points fixes  $X_2, X_3$  est :

$$j_2 = \begin{bmatrix} -3.2 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}$$

Ses valeurs propres sont  $\lambda_1 = 0.22983 + 3.1873i$ ,  $\lambda_2 = 0.22983 - 3.1873i$ ,  $\lambda_3 = -4.6597$

on a  $\lambda_3 < 0$  et  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| \approx 1.4988$  d'ou  $\frac{2|\arg(\lambda_1)|}{\pi} \approx 0.95417$  par suite :

\* Si  $q > 0.95417$  les deux points fixes  $X_2, X_3$  sont instables.

\* Si  $q < 0.95417$  les deux points fixes  $X_2, X_3$  sont localement asymptotiquement stables.

### 3.2.4 Etude numérique

#### Stabilité des points fixes et bifurcation

1. **Pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  **et**  $q$  **varie entre** 0.85 **et** 1.1

On remarque que pour  $q < 0.95$  les deux points fixes sont stables, mais ils commencent à perdre cette stabilité au voisinage de 0.95 ensuite il y a apparition de plusieurs cycles limites (attracteur étrange), pour  $q > 1.05$  il y a une divergence, figure (3-14a).

2. **Pour**  $q_2 = q_3 = 1$  **et**  $q_1$  **varie entre** 0.7 **et** 1.25 les deux points fixes sont instables figure (3-14b).

3. **Pour**  $q_1 = q_3 = 1$  **et**  $q_2$  **varier entre** 0.7 **et** 1.25 les deux points fixes sont stables Si  $q_2 < 0.9$  mais ils commencent à perdre cette stabilité au voisinage de 0.9, figure (3-14c).

4. **Pour**  $q_1 = q_2 = 1$  **et**  $q_3$  **varier entre** 0.75 **et** 1.15 les deux points fixes sont stables Si  $q_2 < 0.95$  mais ils commencent à perdre cette stabilité au voisinage de 0.95, il y a une divergence pour  $q_2 > 1.05$  pour  $q_1 = q_3 = 1$  et  $q_2$  varie de 0.7 à 1.25 les deux points fixes sont stables Si  $q_2 < 0.9$  mais ils commencent à perdre cette stabilité au voisinage de 0.9, figure (3-14d).

Numériquement **pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.94$  **et**  $X_0 = (0.5, 0.2, -0.5)$  le système converge vers le point fixe  $X_3 = (1.8438, 0, -1.8438)$  qui est stable, figure (3-15a).

Et **pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.955$  **et**  $X_0 = (0.5, 0.2, -0.5)$  on remarque la naissance d'une cycle limite stable, figure (3-15b). **Pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.96$  **et**  $X_0 = (0.5, 0.2, -0.5)$  on remarque plusieurs cycles limites instables, figure (3-15c). **Pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.97$  **et**  $X_0 = (0.5, 0.2, -0.5)$  on remarque l'apparition d'un attracteur étrange, figure (3-15d).

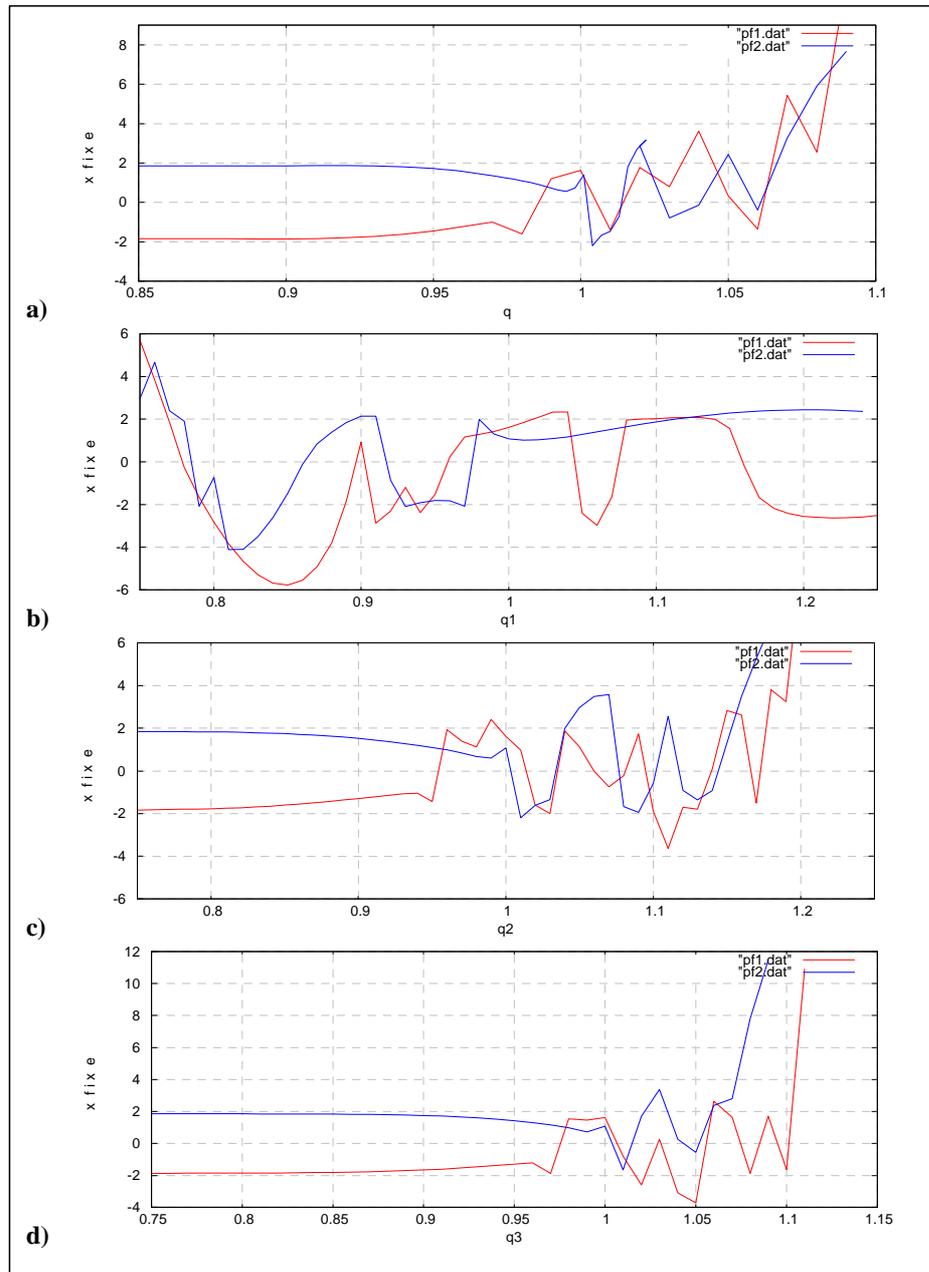


FIG. 3-14 – Diagrammes de bifurcation en fonction de :a)  $q$ , b)  $q_1$ , c)  $q_2$ ,d)  $q_3$ .

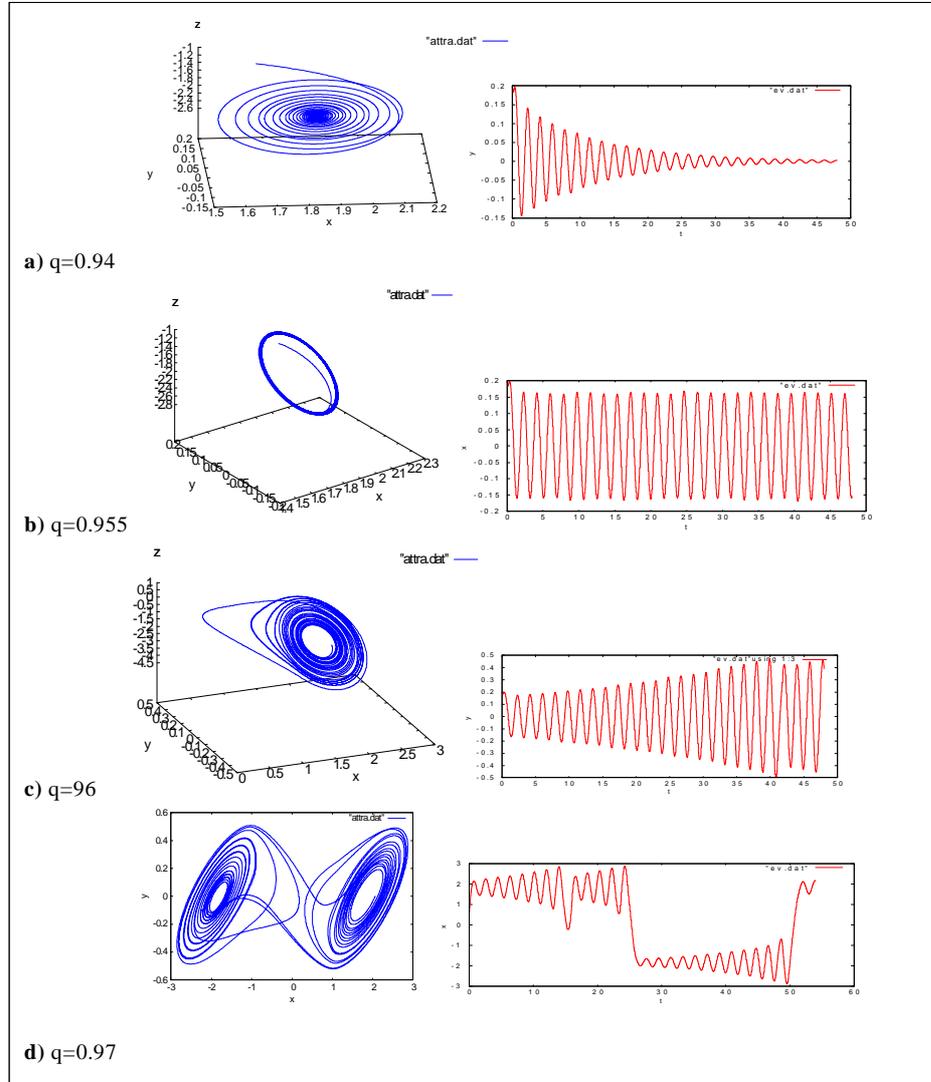


FIG. 3-15 – Portraits de phase et evolutions temporelle du circuit de Chua pour quelques valeurs de  $q$ .

L'attracteur étrange existe pour  $0.97 \leq q \leq 1.015$

Dans le cas entier ( $q = 1$ ) on a l'attracteur représenté dans la figure (3-16) :

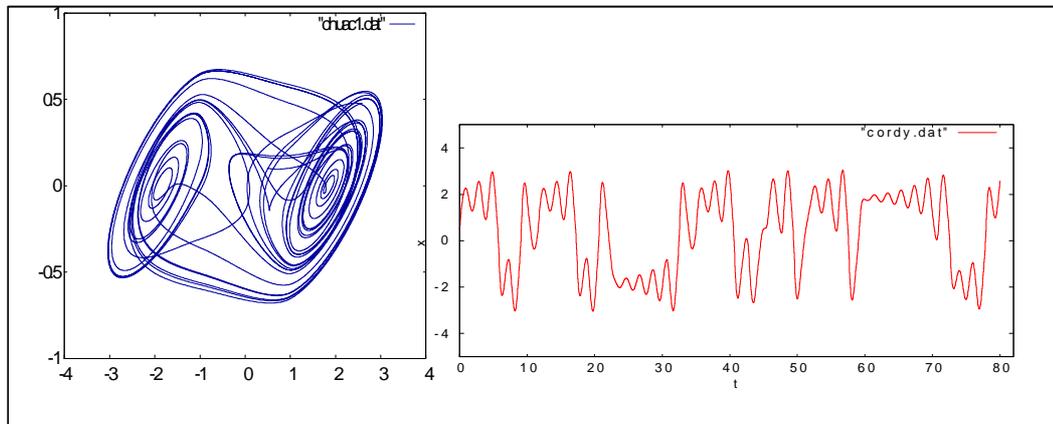


FIG. 3-16 – Portrait de phase et evolution temporelle pour  $q = 1$ .

**Pour**  $q_1 = q_2 = q_3 = 1.015$ ,  $X_0 = (0.5, 0.2, -0.5)$  et  $\dot{X}_0 = (0, 0, 0)$  on a l'attracteur représenté dans la figure (3-17).

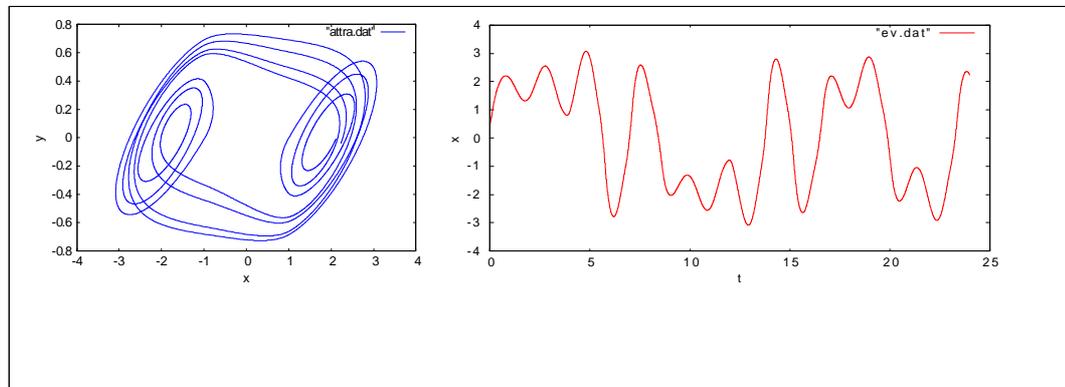


FIG. 3-17 – Portrait de phase et evolution temporelle pour  $q = 1.015$ .

**Si**  $q > 1.015$  on remarque qu'il y a une divergence (chaos indéterministe).

### 3.3 Conclusion

*Dans ce chapitre nous avons étudié deux systèmes d'ordre fractionnaire pour examiner les deux caractéristiques les plus attrayantes, la mémoire et le chaos.*

*Le premier est un système de la finance qui est motivé par le fait que les variables financières possèdent des longues mémoires, par conséquent les systèmes fractionnaires sont plus convenables pour la modélisation financière. On a considéré l'ordre de dérivation comme un paramètre de contrôle, Les résultats montrent que le chaos existe dans ce système avec des ordres inférieurs à 3. Plus précisément on a trouvé le chaos avec un ordre total égal à 2.27. Le scénarios de transition vers le chaos observé est un scénario d'intermittence. Il est à espérer que l'idée des systèmes fractionnaires non linéaires, qui, à la fois possèdent la mémoire et le chaos, pourrait offrir un aperçu vers la compréhension des comportements complexes des systèmes financiers.*

*Le deuxième système est une généralisation du système célèbre de Chua. On a montré que le chaos existe dans ce système avec un ordre total égale à 2.91.*

# Chapitre 4

## Le contrôle du chaos

Pour contrôler un système chaotique il y a plusieurs formes, selon le but recherché. On peut souhaiter qu'un système chaotique reste dans un domaine chaotique. En effet il est possible que naturellement, le système évolue jusqu'à perdre les caractéristiques chaotiques (sensibilités aux conditions initiales, ...). On peut vouloir le forcer à rester chaotique, auquel cas on procède à des opérations de contrôle convergeant vers ce but. De même on peut vouloir amener un système à l'origine non chaotique, vers un domaine chaotique. Réciproquement, on peut souhaiter voir un système chaotique évoluer de façon à perdre son caractère chaotique.

Beaucoup de travaux théoriques et expérimentaux ont été faits dans le contrôle et la synchronisation chaotique depuis 1990 Jusqu'à aujourd'hui.

On peut classer ces méthodes en deux grandes catégories :

\* La première consiste à stabiliser l'orbite désirée en appliquant des perturbations de paramètres en fonction du temps, et rendre le système proche de l'orbite cible. Cette classe est généralement représentée par la méthode OGY, proposée par Ott, Grebogi et Yorke [5].

\* La deuxième consiste à stabiliser l'orbite visée par l'ajout de perturbations sur les variables de système, qui est représentée par la méthode occasionnelle proportionnelle, proposée par Guemez, la méthode feedback autocontrôle proposée par Pyragas, la mé-

thode feedback retardée, et la méthode de force extérieure.

## 4.1 La méthode OGY

Cette méthode a été proposée par Ott, Grebogi et Yorke [5] au début des années 1990,

Elle consiste à imposer de petites perturbations sur des paramètres importants (paramètres de contrôle) du système.

La méthode est basée sur l'idée qu'un attracteur chaotique contient un nombre infini d'orbites périodiques instables alors on détermine quelques orbites instables on les examine puis on choisit une qui représente la performance du système on ajuste les paramètres de petites perturbations afin de stabiliser l'orbite instable.

### 4.1.1 Présentation de la méthode

Considérons le système dynamique discret suivant :

$$X_{n+1} = F(X_n, p) \quad X_n \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}$$

et supposons que pour une certaine valeur  $p^*$  de  $p$  le système admet un attracteur chaotique.

Si le système est continu alors on le discrétise en utilisant la section de Poincaré.

Soit  $\bar{x}(p^*)$  un point fixe dans l'attracteur, pour  $p$  suffisamment proche de  $p^*$  et dans un voisinage de  $\bar{x}(p^*)$  on a l'approximation suivante

$$X_{n+1} - \bar{x}(p^*) = A[X_n - \bar{x}(p^*)] + B(p - p^*)$$

ou  $A = \frac{\partial F}{\partial x}$  et  $B = \frac{\partial F}{\partial p}$

La matrice  $A$  se décompose comme suit :

$$A = \lambda_u e_u f_u^T + \lambda_s e_s f_s^T$$

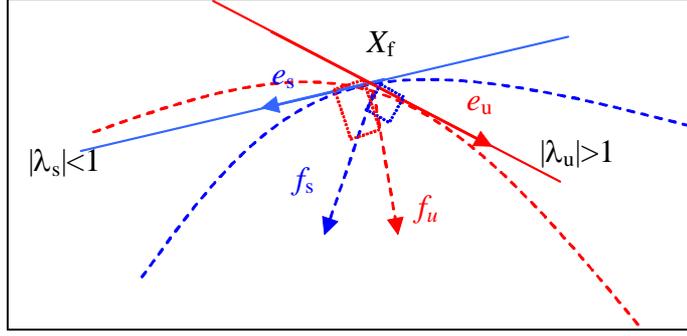


FIG. 4-1 – Les directions propres stables et instables au voisinage du point fixe.

$\{e_u, e_s\}$  sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres instables et stables  $\{\lambda_u, \lambda_s\}$ .

$\{f_u, f_s\}$  sont les vecteurs de covariance telle que :

$$f_u^T e_u = f_s^T e_s = 1 \text{ et } f_u^T e_s = f_s^T e_u = 0$$

Afin de contrôler le système on ajuste le paramètre  $p$  pour pousser le point  $X_{n+1}$  à entrer dans la variété stable de  $\bar{x}(p^*)$  pour ce faire on doit avoir  $f_u^T(X_{n+1} - \bar{x}(p^*)) = 0$ .

En utilisant la linéarisation autour du point fixe et la décomposition de  $A$  on aura

$$p - p^* = -K^T[X_n - \bar{x}(p^*)]$$

avec  $K^T = \frac{\lambda_u}{f_u^T B} f_u$  et  $f_u^T B \neq 0$ .

Si on désire que les valeurs de  $p$  vérifient  $|p - p^*| < \delta$  alors le contrôle sera activé seulement si  $X_n$  vérifie  $|K^T[X_n - \bar{x}(p^*)]| < \delta$  par suite le contrôle est déterminé par :

$$\partial p = \begin{cases} -K^T[X_n - \bar{x}(p^*)], & \text{si } |K^T[X_n - \bar{x}(p^*)]| < \delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

### 4.1.2 Application dans le cas discret

On considère le système de Hénon suivant [75] :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Ce système à l'avantage d'être connu explicitement et d'offrir la possibilité d'effectuer analytiquement tous les calculs.

Il possède deux points fixes

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left( \frac{1}{2}(b + \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1), \frac{1}{2}(b + \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1) \right) \\ (x_2, y_2) &= \left( \frac{1}{2}(b - \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1), \frac{1}{2}(b - \sqrt{4a - 2b + b^2 + 1} - 1) \right) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} -2x_i & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

Les valeurs propres sont :  $\lambda_{i1} = -x_i - \sqrt{b + x_i^2}$  et  $\lambda_{i2} = -x_i + \sqrt{b + x_i^2}$   $-0.88390 - \sqrt{0.3 + 0.88390^2} = -1.9237$

Si  $b = 0.3$  le système représente un attracteur chaotique pour la valeur  $a^* = 1.4$  du paramètre  $a$ , l'attracteur est représenté dans la figure( 4-2 ) avec l'évolution des coordonnées en temps.

Les points fixes pour ces valeurs des paramètres sont :

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (0.88390, 0.88390) \\ (x_2, y_2) &= (-1.5839, -1.5839) \end{aligned}$$

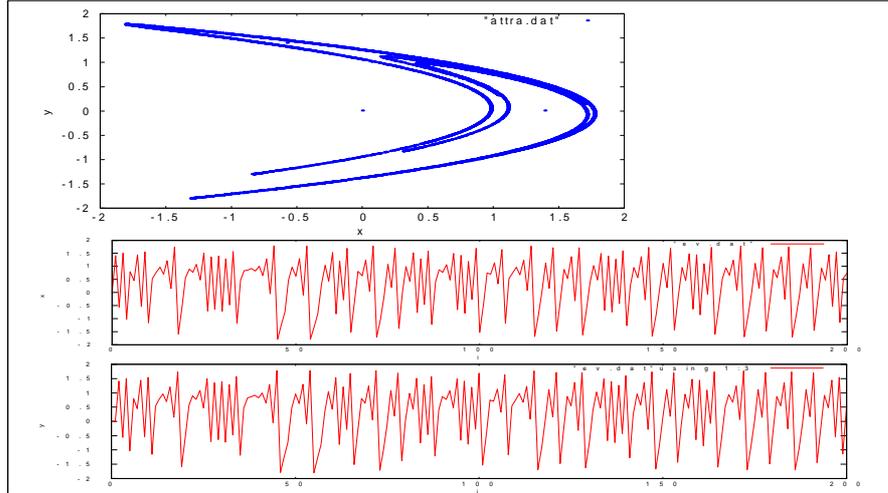


FIG. 4-2 – Attracteur de Hénon et l'évolution temporelle pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  ( $x_0, y_0$ ) = (0.01, 0.01)

Nous allons appliquer le contrôle pour stabiliser le point fixe :  $(x_1, y_1) = (0.88390, 0.88390)$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres sont :  $\lambda_u = -1.9237$  et  $\lambda_s = 0.15595$

les vecteurs propres sont donnés par la relation  $(A - \lambda I)e = 0$  d'ou :

$$[e_u, e_s] = \begin{bmatrix} 0.88728 & 0.15408 \\ -0.46123 & 0.98806 \end{bmatrix}$$

Et comme  $f_u^T e_u = f_s^T e_s = 1$  et  $f_u^T e_s = f_s^T e_u = 0$  on obtiens :

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0425 & -0.16257 \\ 0.48666 & 0.93619 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors : } K = \frac{-1.9237}{1.0425} \begin{bmatrix} 1.0425 & -0.16257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.9237 & 0.29999 \end{bmatrix}$$

Donc  $\delta a = \begin{bmatrix} 1.9237 & -0.29999 \end{bmatrix} \delta X_n$  avec  $\delta X_n = \begin{bmatrix} x_n - x^* \\ y_n - y^* \end{bmatrix}$

La région de contrôle est définie par :

$$(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2 < 0.01$$

Les résultats de contrôle sont représentés dans la figure (4-3)

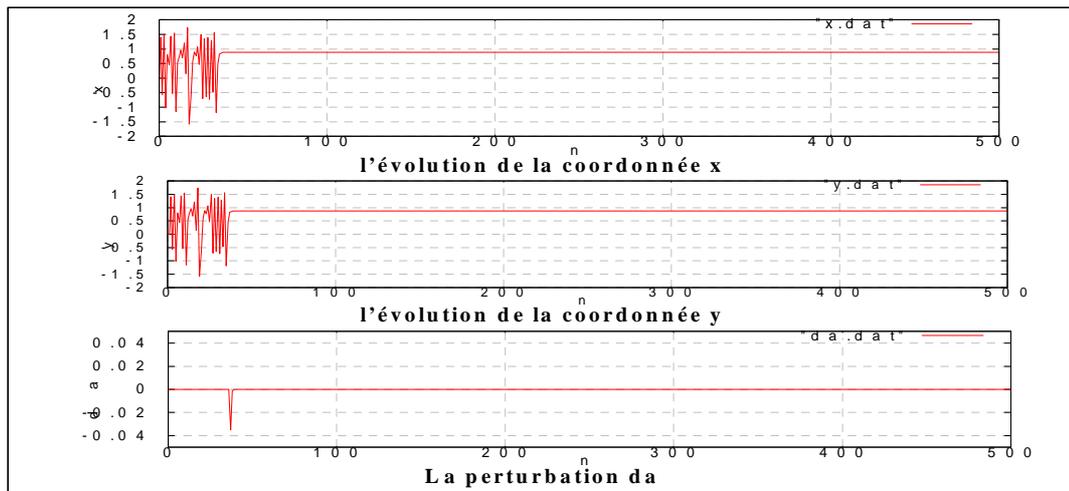


FIG. 4-3 – Résultat de contrôle pour l'application de Hénon en appliquant la méthode OGY.

### 4.1.3 Application dans le cas continu

Pour contrôler les systèmes continus d'ordre supérieur à deux on utilise la section de Poincaré et l'application de premier retour.

On considère le système financier (3.2) défini dans la section (3-1) :

#### Détermination d'un contrôle

On suppose que  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ ,  $c = 1$ ,  $b = 0.1$  et  $a$  paramètre de contrôle.

Pour  $a = 3$  ce système est chaotique.

La section de Poincaré considérée ici est l'ensemble des points de l'attracteur tels que  $y = y_{min}$  comme il est montré dans la figure (4-4)

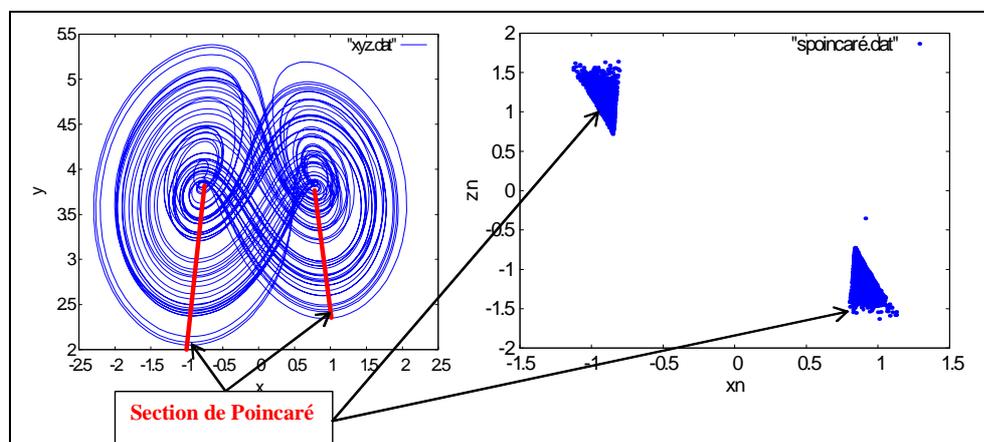


FIG. 4-4 – Section de Poincaré pour le système financier à  $y = y_{min}$ .

On s'intéresse à l'application de premier retour par rapport à la deuxième coordonnée  $y$  pour déterminer le point fixe dans la section de Poincaré autour du quelle le système sera contrôlé. La figure (4-5) illustre l'application de premier retour pour les trois valeurs  $\{2, 3, 4\}$  du paramètre  $a$  et les points fixes correspondant.

Le point fixe correspondant à  $a = 3$  est déterminé numériquement par :

$$X_f = (0.837, 3.082, -0.955)$$

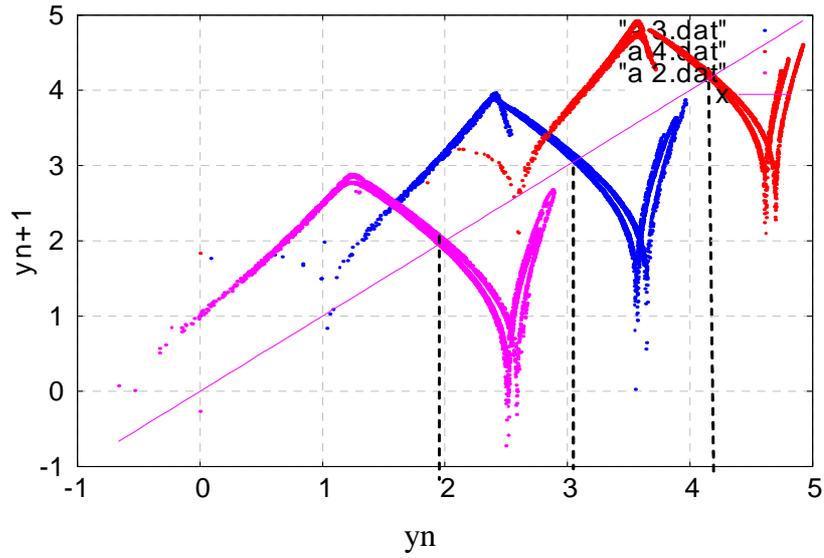


FIG. 4-5 – Application de premier retour pour  $a = 2, 3, 4$

La méthode OGY nécessite la détermination des directions et des valeurs propres de la matrice jacobienne  $A$  mais comme on s'intéresse qu'à une seule coordonnée on aura qu'une seule direction propre et on obtient la correction nécessaire.

Donc on observe l'influence du paramètre de contrôle  $a$  sur le point fixe, figure (4-5).

Pour  $a = 2$  on a  $\dot{X}_f = (0.850, 1.987, -1.030)$

Pour  $a = 4$  on a  $\ddot{X}_f = (0.753, 4.161, -0.900)$

Alors la loi de contrôle est donnée par :

$$\delta a = -\frac{\partial a}{\partial y_f}(y(i) - y_f) = -\frac{1}{1.087}(y(i) - 3.082)$$

Le contrôle sera activé dans la région définit par :

$$\sqrt{(x(i) - 0.837)^2 + (y(i) - 3.082)^2} < d$$

Nous avons utilisé le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $d$  dans la section de

Poincaré à  $z = 0$  pour déterminer la valeur de  $d$  qui donne des bon résultats de contrôle.  
figure (4-6).

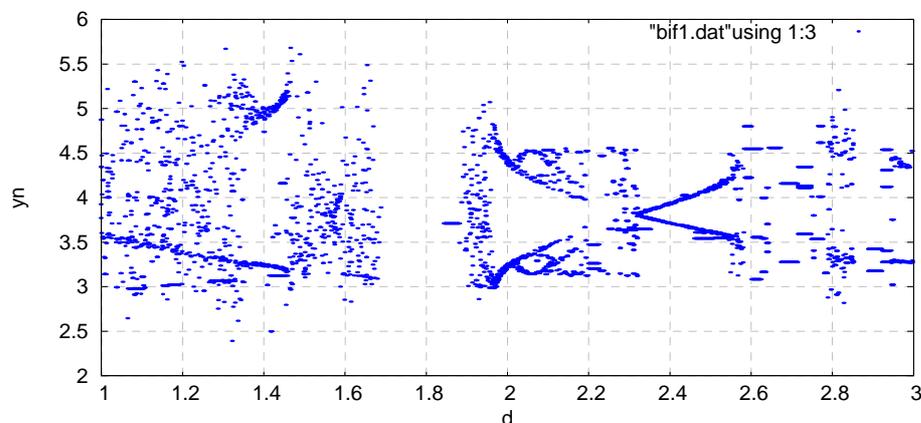


FIG. 4-6 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $d$ .

On observe trois fenêtres de périodicité  $(1.35; 1.45)$ ,  $(1.98; 2.15)$  et  $(2.34; 2.5)$ .

La figure (4-7) représente les résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $d$ .

Alors on prend  $d = 2.06$  qui correspond à une orbite périodique de période doublée.

Pour améliorer le résultat de contrôle on trace une autre fois le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $K = \frac{\partial a}{\partial y_f}$  et on choisit les meilleurs valeurs de  $K$  figure (4-8).

On observe le comportement périodique pour  $K \in (0.75; 2)$  ensuite on a un comportement quasi périodique comme le montre la figure (4-9), en plus pour  $K \in (0.75; 1.3)$  l'orbite périodique obtenue est de période doublée mais pour  $K \in (1.3; 2)$ , elle a une simple période.

Alors on prend  $K = 1.3$  et le contrôle sera donné dans ce qui suit par :

$$\begin{cases} \delta a = -1.3(y(i) - 3.082) & \text{si } \sqrt{(x(i) - 0.837)^2 + (y(i) - 3.082)^2} < 2.06 \\ 0 & \text{si } \sqrt{(x(i) - 0.837)^2 + (y(i) - 3.082)^2} \geq 2.06 \end{cases}$$

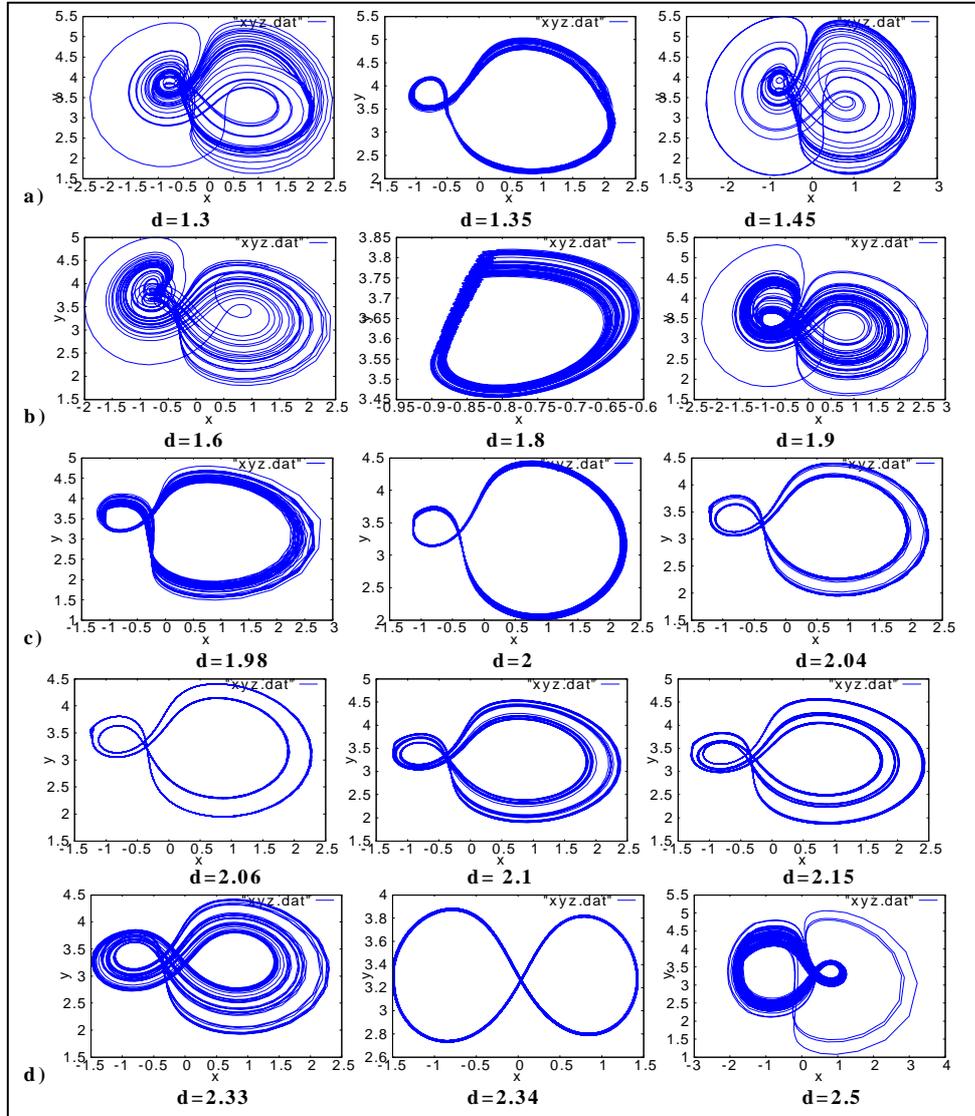


FIG. 4-7 – Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $d$ .

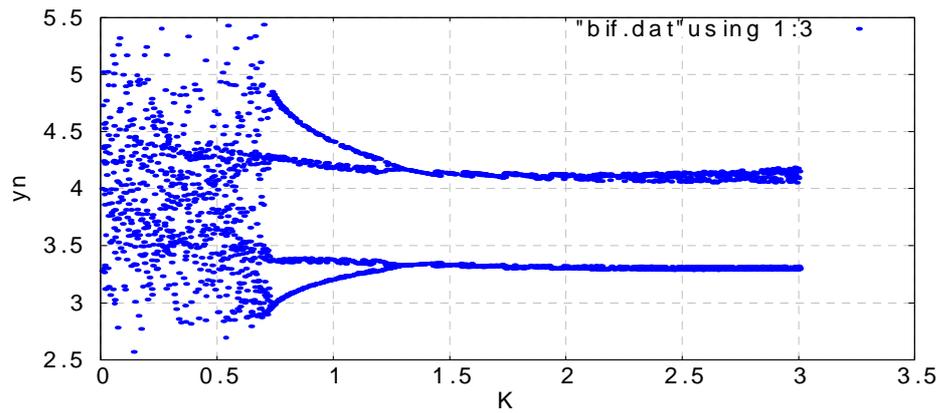


FIG. 4-8 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $K = \frac{\partial a}{\partial y_f}$

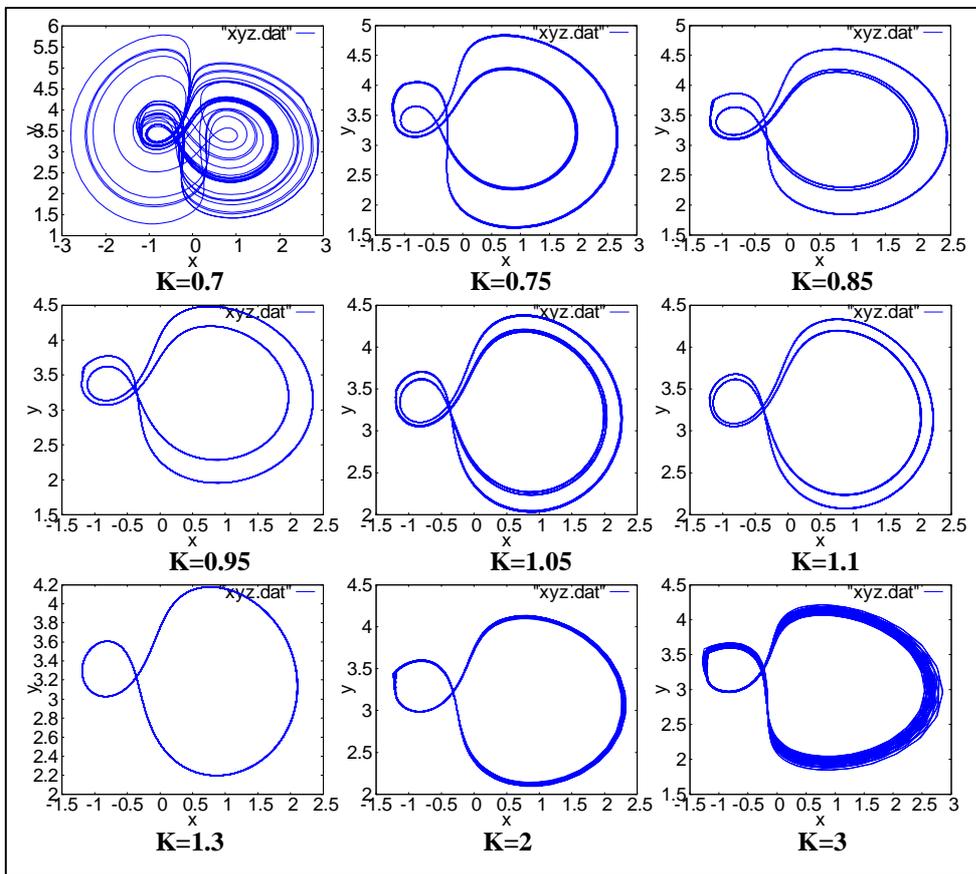


FIG. 4-9 – Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $k$ .

## Variation de l'ordre de dérivation

Afin d'examiner l'effet de variation de l'ordre de dérivation sur le contrôle déterminé précédemment nous traçons le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q$  avec  $q_1 = q_1 = q_1 = q$  figure (4-10).

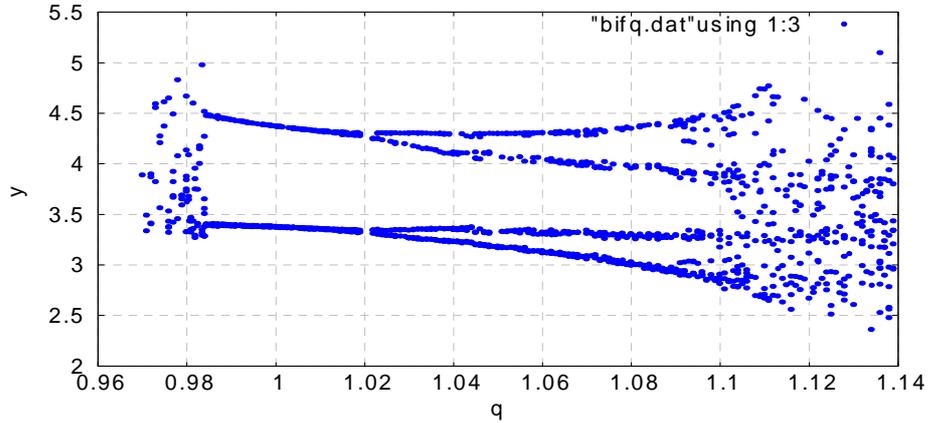


FIG. 4-10 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q$

Dans l'intervalle  $(0.985; 1.02)$  le résultat du contrôle est une orbite périodique d'une simple période mais dans l'intervalle  $(1.03; 1.1)$  la période sera doublée, le contrôle relâche et le comportement chaotique domine pour  $q \geq 1.1$  et pour  $0.97 < q < 0.985$ , Dans l'intervalle  $(0.85; 0.97)$  on obtient un tore mais la section de Poincaré choisie ne coupe pas cet tore, pour  $q \leq 0.85$  le système sera dégénéré vers un point fixe figure (4-11).

On déduit alors que la variation de l'ordre de dérivation a un grand effet sur le contrôle que ce soit pour la qualité ou bien l'efficacité.

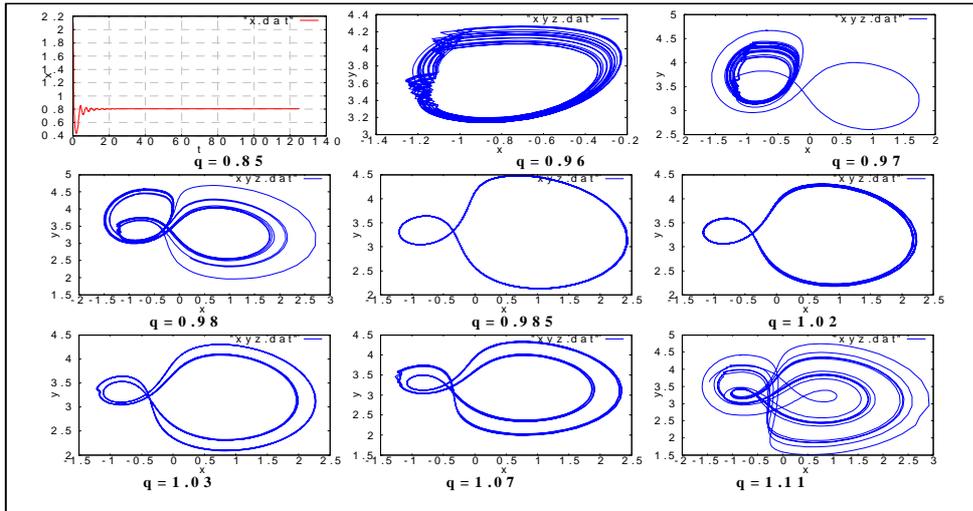


FIG. 4-11 – Les résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $q$ .

## 4.2 La méthode feedback

Cette méthode consiste à perturber les variables d'état de système pour atteindre l'orbite cible, elle a l'avantage de garantir la stabilité robuste [74].

Généralement elle est formulée comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

Où  $x(t)$  est le vecteur d'état de système et  $u(t)$  le vecteur de contrôle.

Le problème est de déterminer le contrôle  $u(t) = g(x, t)$ ,  $g$  est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que le système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = f(x, g(x, t), t)$$

peut se conduire par le contrôle feedback  $g(x, t)$  pour atteindre l'orbite cible  $x^*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$$

Généralement on détermine le contrôle  $u(t)$  qui guide le vecteur d'état  $x(t)$  correspondant au système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + u(t)$$

vers l'orbite cible  $x^*(t)$  de la manière suivante

$$u(t) = \dot{x}^*(t) - f(x(t), t) + K(x(t) - x^*(t))$$

Où  $K$  est une matrice dont les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes négatives.

Si on pose  $e(t) = x(t) - x^*(t)$  alors  $\dot{e}(t) = Ke(t)$  et on a  $e(t) \rightarrow 0$  par suite  $x(t) \rightarrow x^*(t)$  pour  $t \rightarrow \infty$

### 4.2.1 La méthode feedback avec force externe

On considère un système dynamique gouverné par des équations différentielles mais ces équations ne sont pas connues et quelques variables scalaires d'état peuvent être mesurés de la sortie et supposons que le système a une entrée valable pour une force externe, le modèle suivant répond à cette hypothèse, voir [70] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = q(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = p(x, y) + u(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

$y$  dénote la variable qui est valable pour la perturbation et  $x$  dénote les variables non valables.

Supposons que le système est chaotique pour  $u = 0$ . C'est démontré qu'avec une seule variable on peut détecter plusieurs orbites périodiques instables dans l'attracteur chaotique, alors on examine les mesures expérimentales de  $y(t)$ , pour sélectionner des orbites périodiques régis par des équations de la forme  $y = y_i(t)$  et  $y_i(t - T_i) = y_i(t)$  ou  $T_i$  est la période de la  $i^{eme}$  orbite instable, parmi ces orbites on choisit une orbite pour

la stabiliser, ensuite on désigne un oscillateur spécial qui génère le signal proportionnel à  $y_i(t)$ .

La différence  $D(t) = y(t) - y_i(t)$  est employée comme un contrôle [70], on pose alors

$$u(t) = -K(y(t) - y_i(t)) = -KD(t) \quad (4.2)$$

$K > 0$  est un ajustement expérimental, l'importance de la perturbation (4.2) est qu'elle ne change pas la solution de (4.1) correspondante à l'orbite périodique instable  $y = y_i(t)$  lorsque on aura la stabilité la perturbation devient très petite.

Quelques valeurs de  $K$  donnent un contrôle optimal mais pas tous  $K > 0$ , ( les exposants de Lyapunov ou le diagramme de bifurcation dans la section de Poincaré peuvent être utilisés pour déterminer ces valeurs de  $K$  ), généralement les valeurs assez grandes de  $K$  détruisant le contrôle puisque la perturbation touche une seule variable et si le changement de cette variable est très grand les autres variables n'auront pas le temps de suivre cet échange, pour éviter ce problème on applique la perturbation à plusieurs variables .

La multistabilité est un problème pour cette méthode, il est possible de reconstruire le contrôle  $u(t)$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} u(t) = -u_0 \text{ si } -KD(t) \leq -u_0 \\ u(t) = -KD(t) \text{ si } -u_0 < KD(t) < u_0 \\ u(t) = u_0 \text{ si } -KD(t) \geq u_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $u_0 > 0$  est la valeur de saturation du contrôle.

## 4.2.2 Exemple d'application

On considère le système de Chua ?? présenté dans la section (3.2.1)

Soit  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  une orbite périodique instable dans le circuit de Chua alors la trajectoire  $(x, y, z)$  peut être pilotée à partir de n'importe quel état courant pour parvenir à cette

orbite périodique par un simple contrôleur feedback linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \\ z - \tilde{z} \end{bmatrix}$$

avec  $k_{11} \geq -\alpha m_1$ ,  $k_{22} \geq 0$ ,  $k_{33} \geq 0$  le contrôle peut être appliqué dans n'importe quel temps.

**Preuve.**

*Le système contrôlé est le suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(-x + y - f(x)) - k_{11}(x - \tilde{x}) \\ \dot{y} = x - y + z - k_{22}(y - \tilde{y}) \\ \dot{z} = -\beta y - k_{33}(z - \tilde{z}) \end{cases}$$

*Et comme l'orbite instable  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  est lui même solution du système ( 3.3) on a :*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \alpha(-\tilde{x} + \tilde{y} - f(\tilde{x})) \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} - \tilde{y} + \tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} = -\beta \tilde{y} \end{cases}$$

*On fait la soustraction des deux derniers systèmes en utilisant la notation  $X = x - \tilde{x}$ ,  $Y = y - \tilde{y}$  et  $Z = z - \tilde{z}$  on obtient :*

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha(-X + Y - \tilde{f}(x, \tilde{x})) - k_{11}X \\ \dot{Y} = X - Y + Z - k_{22}Y \\ \dot{Z} = -\beta Y - k_{33}Z \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec  $\tilde{f}(x, \tilde{x}) = f(x) - f(\tilde{x})$  alors :

$$\tilde{f}(x, \tilde{x}) = \begin{cases} m_0(x - \tilde{x}) & \text{pour } x \geq 1, \tilde{x} \geq 1 \text{ ou } x \leq -1, \tilde{x} \leq -1 \\ m_0(x - 1) - m_1(\tilde{x} - 1) & \text{pour } x \geq 1, -1 \leq \tilde{x} \leq 1 \\ m_0(x - \tilde{x}) + 2(m_1 - m_0) & \text{pour } x \geq 1, \tilde{x} \leq -1 \\ m_1(x - 1) - m_0(\tilde{x} - 1) & \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \tilde{x} \geq 1 \\ m_1(x - \tilde{x}) & \text{pour } , -1 \leq \tilde{x} \leq 1 \\ m_1(x + 1) - m_0(\tilde{x} + 1) & \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \tilde{x} \leq -1 \\ m_0(x - \tilde{x}) - 2(m_1 - m_0) & \text{pour } x \leq -1, \tilde{x} \geq 1 \\ m_0(x + 1) - m_1(\tilde{x} + 1) & \text{pour } x \leq -1, -1 \leq \tilde{x} \leq 1 \end{cases},$$

On définit la fonction de Lyapunov pour le système (4.4) comme suite :

$$\begin{aligned} V(X, Y, Z) &= \frac{\beta}{2}X^2 + \frac{\alpha\beta}{2}Y^2 + \frac{\alpha}{2}Z^2 \quad \text{alors sa dérivée est :} \\ \dot{V}(X, Y, Z) &= \beta X\dot{X} + \alpha\beta Y\dot{Y} + \alpha Z\dot{Z} \\ &= -\alpha[\beta(X - Y)^2 + \beta k_{22}Y^2 + k_{33}Z^2] - \beta(\alpha X \tilde{f}(x, \tilde{x}) + k_{11}X^2) \end{aligned}$$

On a  $V(0, 0, 0) = 0$  et pour  $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$  on a  $V(X, Y, Z) > 0$ .

D'autre part comme  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $k_{22} \geq 0$ ,  $k_{33} \geq 0$  alors

Si  $\alpha X \tilde{f}(x, \tilde{x}) + k_{11}X^2 \geq 0$  on aura  $\dot{V}(X, Y, Z) \leq 0$ .

La condition  $\alpha X \tilde{f}(x, \tilde{x}) + k_{11}X^2 \geq 0$  est vérifiée pour tout  $x, \tilde{x}$  si :

$$k_{11} \geq \max\{-\alpha m_0, -\alpha m_1\} = -\alpha m_1$$

Si cette condition est vérifiée le point fixe  $(0, 0, 0)$  du système (4.4) est globalement asymptotiquement stable et on aura  $(X, Y, Z) \rightarrow (0, 0, 0)$  pour  $t \rightarrow +\infty$  par suite  $(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  ■

## 1. Stabilisation d'un point fixe

En utilisant ce contrôle feedback linéaire avec  $k_{11} = -\alpha m_1$ ,  $k_{22} = k_{33} = 0$ ,

$(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.2, -0.5)$  et  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  le point fixe instable  $(0, 0, 0)$  a été stabilisé figure (4-12).

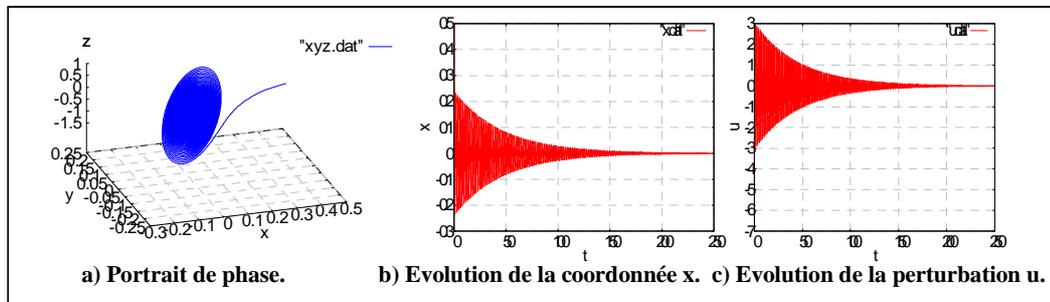


FIG. 4-12 – Stabilisation du point fixe instable  $(0, 0, 0)$  dans le circuit de Chua.

### L'influence de l'ordre de dérivation

Concédons maintenant le système, afin d'examiner l'influence de l'ordre de dérivation  $q$  sur le contrôle on fait varier ce dernier en quatre étapes :

**Etape 1**  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  et  $q$  varie dans l'intervalle  $[0.8; 1.2]$

En calculant les écarts  $ex = |x - 0|$ ,  $ey = |y - 0|$ ,  $ez = |z - 0|$  nous remarquons que le contrôle est efficace pour  $q \leq 1.01$  mais il relâche pour  $q > 1.01$  figure (4-13).

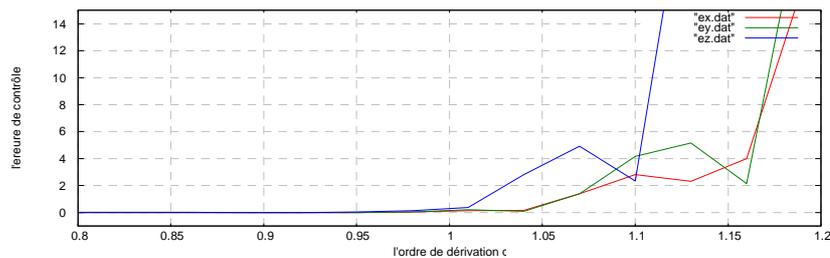


FIG. 4-13 – L'influence de l'ordre de dérivation  $q$  sur la stabilisation du point fixe 0 .

**Etape 2**  $q_2 = q_3 = 1$  et  $q_1$  varier dans l'intervalle  $[0.8; 1.9]$

On remarque que pour  $q_1 > 1.2$  le système est incontrôlable mais il sera contrôlable pour  $q_1 < 1.2$  figure (4-14). **Etape 3**  $q_1 = q_1 = 1$  et  $q_2$  varier dans l'intervalle

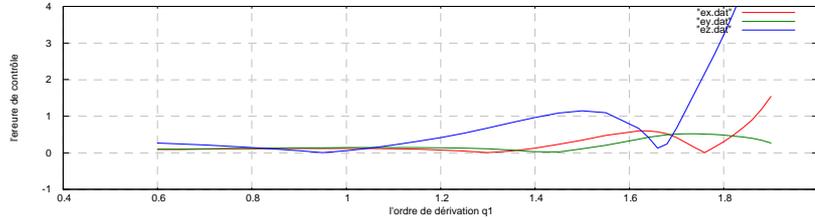


FIG. 4-14 – L'influence de l'ordre de dérivation  $q_1$  sur la stabilisation du point fixe 0

$[0.6; 1.35]$

On remarque que pour  $q_2 > 1.05$  le système est incontrôlable mais il sera contrôlable pour  $q_2 < 1.05$  figure (4-15). **Etape 4**  $q_1 = q_2 = 1$  et  $q_3$  varier dans l'intervalle

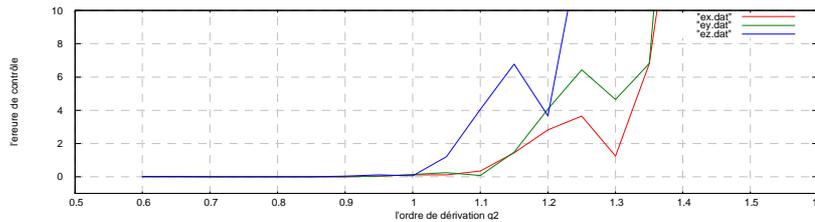


FIG. 4-15 – L'influence de l'ordre de dérivation  $q_2$  sur la stabilisation du point fixe 0.

$[0.6; 1.25]$

On remarque que pour  $q_3 > 1.02$  le système est incontrôlable mais il sera contrôlable pour  $q_3 \leq 1.02$  figure (4-16).

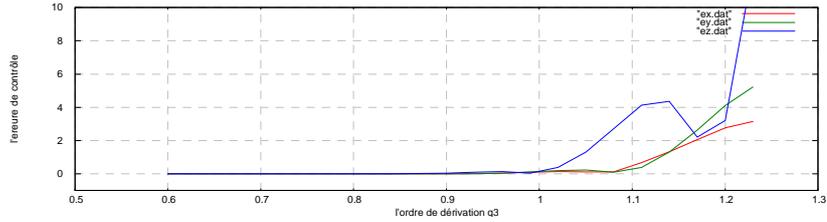


FIG. 4-16 – L'influence de l'ordre de dérivation  $q_3$  sur la stabilisation du point fixe 0.

### Remarque 4.1

*Ce qui est commun dans ces étapes est que l'écart  $e_z = |z - 0|$  augmente plus rapidement que les autres écarts lorsque l'ordre de dérivation est supérieur à 1. Généralement pour  $q < 1$  le système est contrôlable mais si  $q > 1$  la contrôlabilité n'est pas sûr.*

## 2. Stabilisation d'un cycle limite instable

On a localisé dans l'attracteur étrange un cycle limite périodique de période 2 instable ensuite on a choisis un oscillateur qui a la même période 2 comme force externe ( $x(t) = -2 - \cos \pi t$ )

En activant le contrôle à  $t = 9$  avec  $k_{11} = -\alpha m_1$  et  $k_{22} = k_{33} = 0$  ce cycle limite a été stabilisé pour  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ , le résultat est illustré dans la figure (4-17)

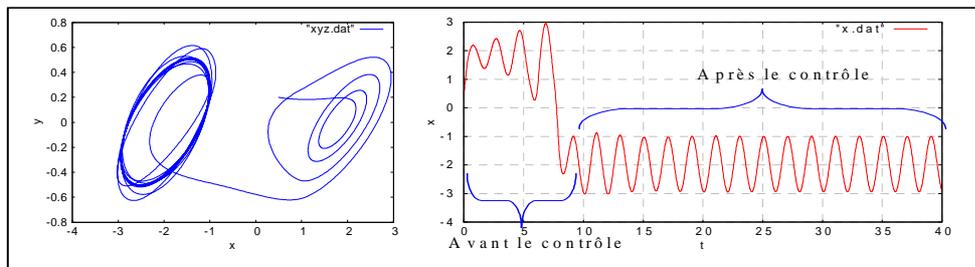


FIG. 4-17 – Résultat de la stabilisation d'un cycle limite dans le circuit de Chua

Afin d'examiner l'influence de l'ordre de dérivation  $q$  sur le contrôle nous allons utiliser la section de Poincaré à  $y = y_{max}$  et nous traçons les diagrammes de bifurcation de  $x$  et  $z$  en fonction de  $q$ , quatre cas sont observés, figure (4-18).

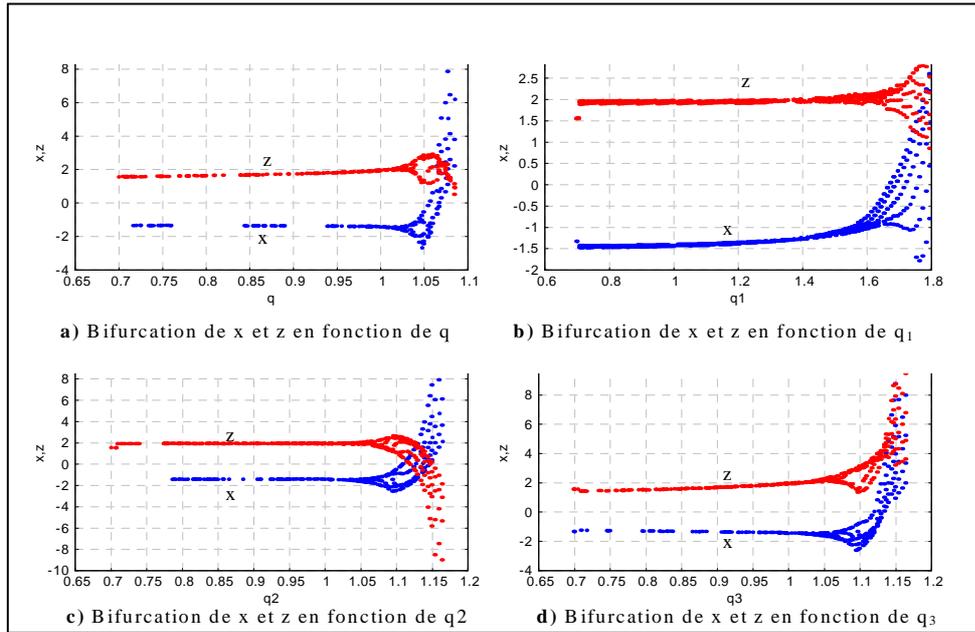


FIG. 4-18 – Bifurcations de  $x$  et  $z$  en fonction de l'ordre de dérivation.

1.  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  et  $q$  varier dans l'intervalle  $[0.7; 1.08]$

Le contrôle est efficace si  $q < 1.03$  mais il perd son efficacité si  $q \geq 1.03$  alors  $q = 1.03$  est une valeur de bifurcation, une tore remplace le cycle limite figure (4-19) ensuite le comportement chaotique domine.

2.  $q_2 = q_3 = 1$  et  $q_1$  varier dans l'intervalle  $[0.7; 1.8]$

On remarque que pour  $q_1 < 1.5$  le système est contrôlable mais il sera incontrôlable pour  $q \geq 1.5$

3.  $q_1 = q_3 = 1$  et  $q_2$  varier dans l'intervalle  $[0.7; 1.17]$

Le système est contrôlable pour  $q_1 < 1.06$  mais il sera incontrôlable pour  $q \geq 1.06$ .

4.  $q_1 = q_2 = 1$  et  $q_3$  varier dans l'intervalle  $[0.7; 1.17]$

Même résultat comme le cas précédent.

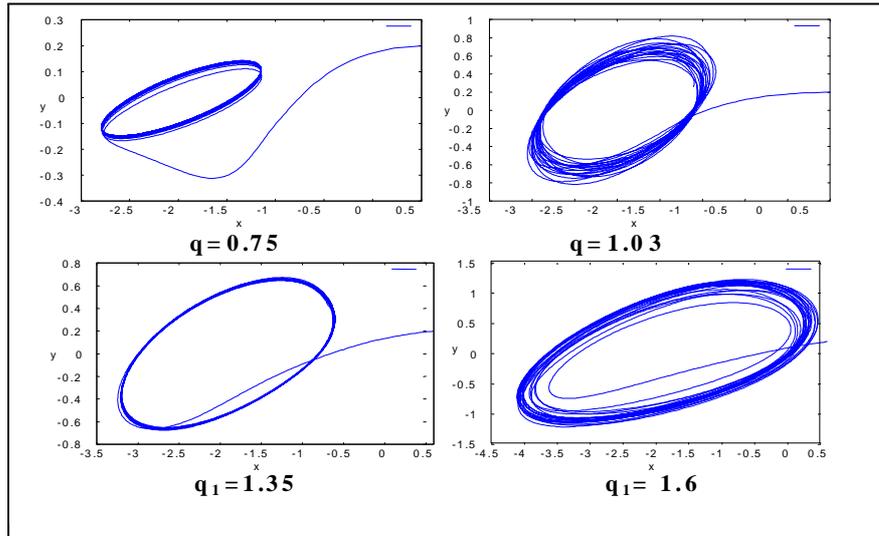


FIG. 4-19 – Résultats de contrôle pour quelques valeurs de l'ordre de dérivation.

#### Remarque 4.2

*Dans ces quatre cas on remarque que le diamètre du cycle limite est proportionnel avec l'ordre de dérivation.*

*Au deuxième cas le contrôle reste valable dans un intervalle plus grand que les autres cas.*

### 4.2.3 La méthode feedback retardé

La complexité de réaliser expérimentalement la méthode précédente est dans la détermination de l'oscillateur périodique spécial, la méthode feedback retardé a évité ce problème.

L'idée de cette méthode consiste à substituer le signal externe  $y_i(t)$  dans l'équation (4.2) par le signal de sortie retardé  $y(t - T)$ , alors on aura :

$$u(t) = -K(y(t) - y(t - T)) = -KD(t) \quad (4.5)$$

Pour déterminer la période  $T$  on donne plusieurs valeurs pour  $T$  et on mesure  $(D(t))^2$

ensuite on choisit une valeur de  $T$  qui minimise  $(D(t))^2$ , on procède de la même manière pour déterminer  $K$ , on peut aussi utiliser la section de Poincaré ou les exposants de Lyapunov pour déterminer les intervalles de  $K$  et de  $T$  dans lesquelles le comportement sera périodique.

Le problème de la multistabilité est encore présent dans cette méthode et pour l'éviter on utilise la restriction (4.3) de la perturbation.

#### 4.2.4 Exemples d'application

Comme nous avons vu dans la section (3.1) le système financier (3.2) est chaotique pour  $q \in [0.85; 1]$ ,  $a = 3$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 1$  et la condition initial  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 2)$ .

Nous allons analyser l'effet du contrôle feedback retardé sur le comportement de ce système en appliquant le retard sur les intérêts  $x$  dans un premier temps puis sur la demande d'investissement  $y$  ensuite sur l'indice des prix  $z$ , et dans la quatrième étape sur les trois variables  $x, y, z$  en même temps, finalement nous appliquons le retard sur les intérêts  $x$  et l'indice des prix  $z$  en même temps (puisque en générale la demande d'investissement  $y$  n'est pas valable pour le contrôle) et nous observons l'effet du changement de l'ordre de dérivation sur le contrôle.

Le système contrôlé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = z(t) + (y(t) - a)x(t) - K_1(x(t) - x(t - T_1)) \\ \dot{y} = 1 - by(t) - (x(t))^2 - K_2(y(t) - y(t - T_2)) \\ \dot{z} = -x(t) - cz(t) - K_3(y(t) - y(t - T)) \end{cases}$$

##### 1. Le contrôle par le retard dans les intérêts $x$ .

Nous choisissons  $K_1 = 0.1$ ,  $K_2 = K_3 = 0$ , et pour choisir  $T_1$  on utilise la section de Poincaré à  $z = 0$  et le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $T_1$ , figure (4-20). On remarque qu'il y a un comportement périodique dans l'intervalle  $[1.8.; 2.9]$ , alors pour contrôler le système on choisit  $T_1$  dans cet intervalle.

La transition vers le chaos est via le doublement de période, figure (4-22).

Pour choisir les meilleurs valeurs de  $K_1$  correspondantes à  $T_1 = 2$  nous avons tracé le diagramme de bifurcation de  $y(nT)$  figure (4-21a) et l'évolution des écarts  $dx = |x(t) - x(t - T_1)|$ ,  $dy = |y(t) - y(t - T_2)|$ ,  $dz = |z(t) - z(t - T_3)|$ , en fonction de  $K_1$ , figure (4-21b).

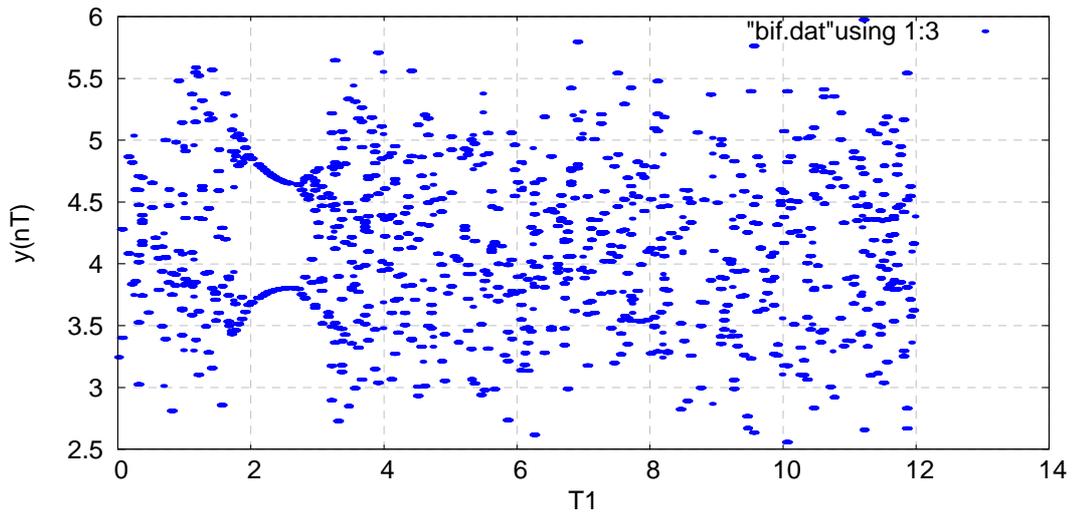


FIG. 4-20 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $T_1$

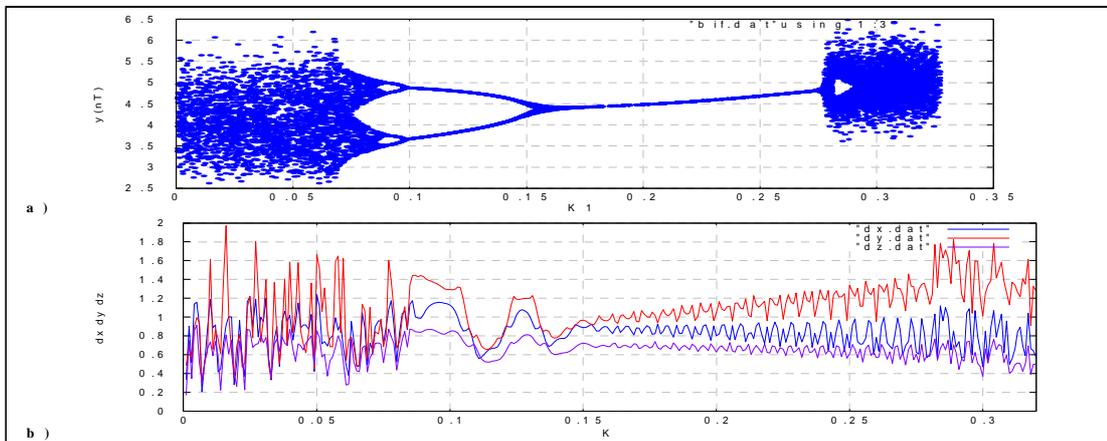


FIG. 4-21 – Diagramme de bifurcation et évolution de  $dx, dy, dz$  en fonction de  $K_1$ .

On observe un comportement périodique pour  $K_1 \in [0.09; 0.28[$  figure (4-22b), et

l'écart sera minimisé pour les valeurs  $K_1 = 0.11, 0.139$ . La transition vers le chaos observée ici est via la quasi périodicité lorsque  $K_1 \geq 0.28$ , et le doublement de période pour  $K_1 \leq 0.16$ .

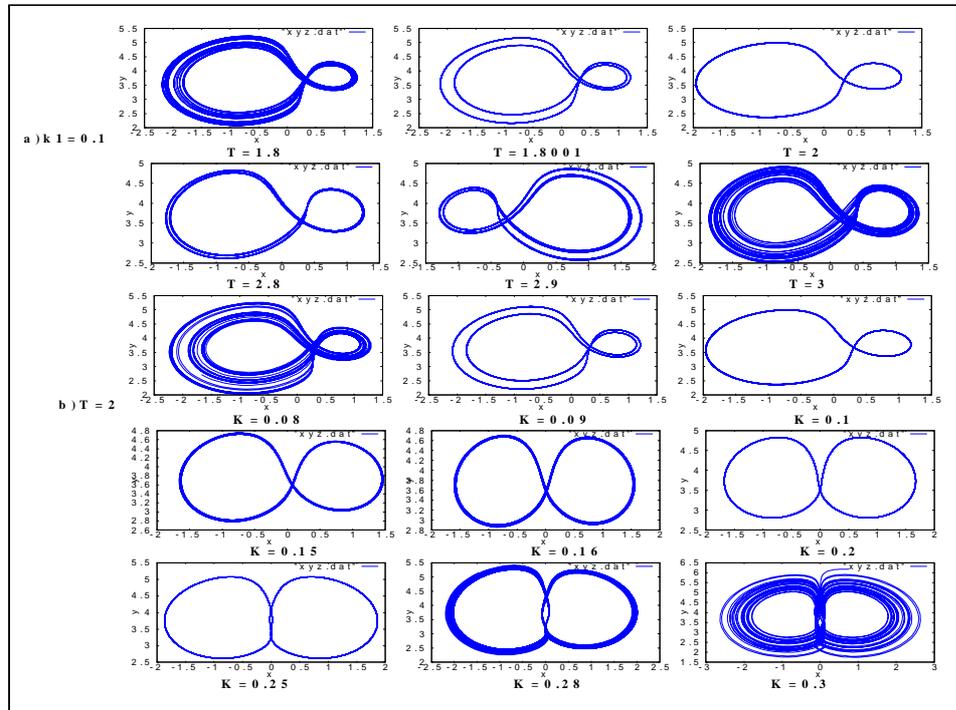


FIG. 4-22 – Résultats de contrôle par le retard dans les intérêts  $x$ .

## 2. Le contrôle par le retard dans la demande d'investissement $y$ .

Cette fois nous choisissons  $K_2 = 0.1$  et  $K_1 = K_3 = 0$  et pour choisir la période  $T_2$  on trace le diagramme de bifurcation de  $y$  figure (4-23a) et l'évolution des écarts  $dx, dy, dz$  figure (4-23b) en fonction de  $T_2$ . Les valeurs de  $T_2$  qui minimisent l'écart  $dy$  sont  $T_2 = 4.3, 13.1$ .

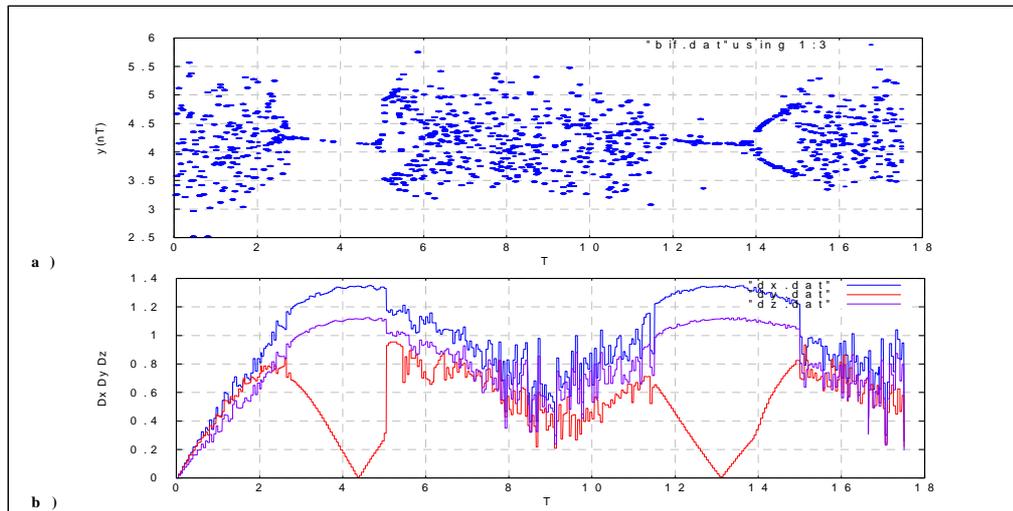


FIG. 4-23 – Diagramme de bifurcation de  $y$  et évolution de  $dx, dy, dz$  en fonction de  $T_2$ .

On remarque qu'il y a un comportement périodique sur les intervalles  $]2.75; 5[$   $]5.15; 5.27[$  figure (4-24a) et  $]11.8; 14[$  figure (4-24b), il y a aussi un comportement quasi périodique sur les intervalles  $[5; 5.1]$ ,  $[11.8; 12[$  et  $]14.5; 15[$ .

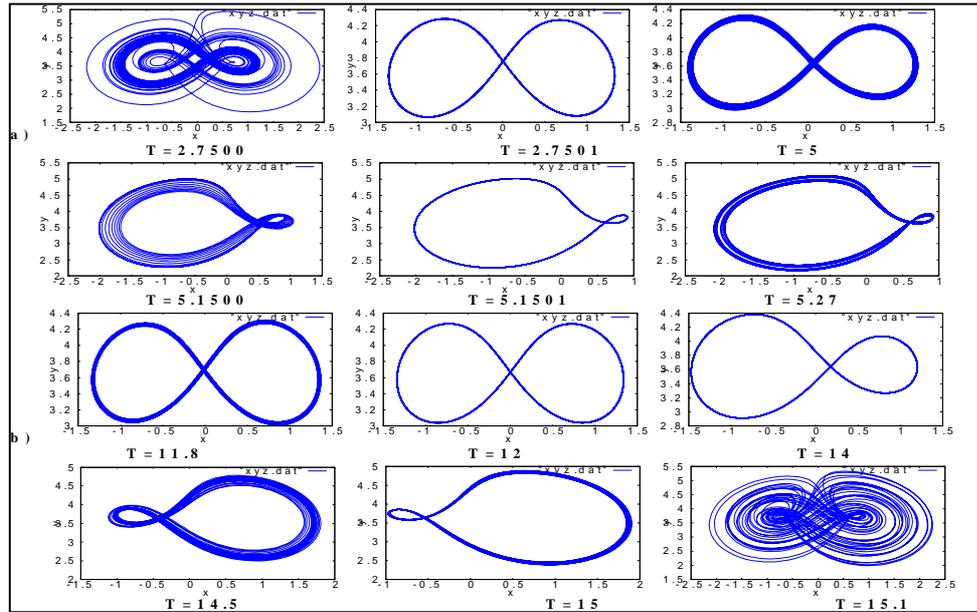


FIG. 4-24 – Résultats de contrôle par le retard dans la demande d'investissement  $y$ .

### 3. Le contrôle par le retard dans l'indice des prix $z$ .

Nous choisissons  $K_3 = 0.1$  et  $K_1 = K_2 = 0$ .

L'analyse du diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $T_3$  figure (4-25a) montre qu'il y a un comportement périodique sur les intervalles  $[2.75; 6.1]$  figure (4-26a),  $[13.9; 16.4]$  figure (4-26b).

Les valeurs de  $T_3$  qui minimisant l'écart  $dy$  sont  $T_3 = 5.5, 16.2$  figure (4-25b), alors pour contrôler le système on peut choisir une de ces deux valeurs.

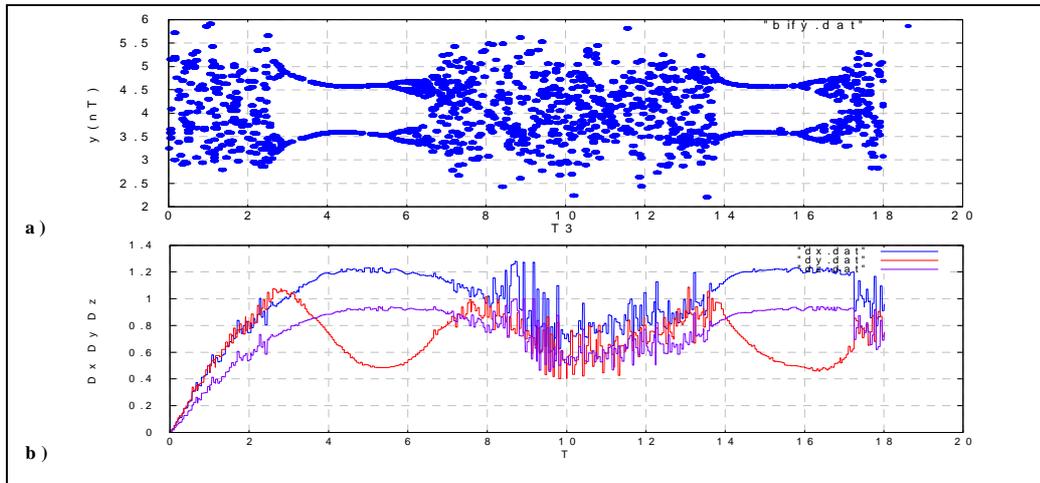


FIG. 4-25 – Diagramme de bifurcation de  $y$  et évolution de  $dx, dy, dz$  en fonction de  $T_3$ .

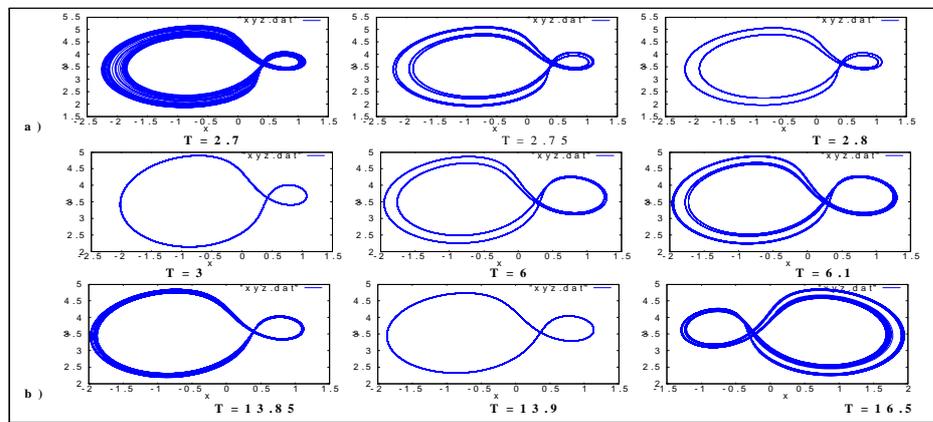


FIG. 4-26 – Résultats de contrôle par le retard dans l'indice des prix  $z$ .

#### 4. Le contrôle par le retard sur les trois variables $x$ , $y$ et $z$ .

Pour  $K_1 = K_2 = K_3 = 0.1$  On a pas de comportement périodique alors On pose  $T_1 = T_2 = T_3 = 4$  et  $K_1 = K_2 = K_3 = K$ , en traçant le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $K$  figure (4-27) nous observons un comportement périodique sur  $[0.14; 0.2]$  et  $[0.221; 0.25]$  alors on choisit  $K = 0.15$ .

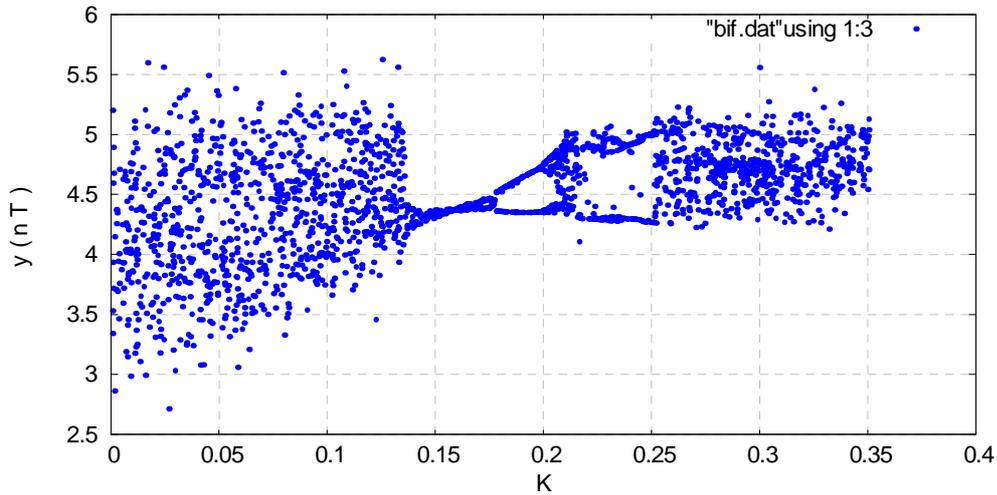


FIG. 4-27 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $K$  pour  $T_1 = T_2 = T_3 = 4$ .

Pour examiner l'effet de la période on pose  $T_1 = T_2 = T_3 = T$  nous traçons le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $T$  (sur la section de Poincaré) figure (4-28a).

L'écart  $dy$  sera minimisé pour  $T = 5.7$  figure (4-28b).

On remarque qu'il y a un comportement périodique sur les intervalles  $[3.51; 4.4]$  figure (4-29a),  $[5.5; 7.1]$  figure (4-29b), et qu'il y a plusieurs formes d'orbites périodiques alors pour contrôler le système on choisit  $T$  dans un de ces intervalles selon la forme désirée.

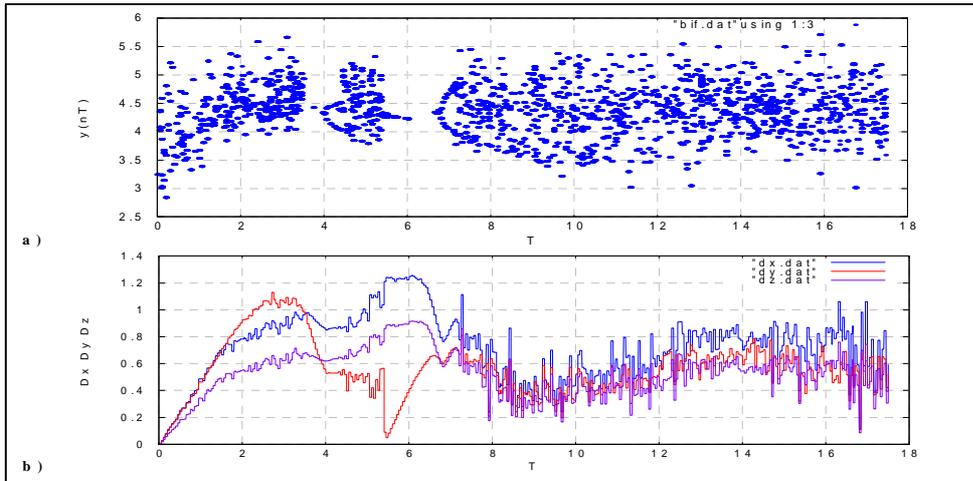


FIG. 4-28 – Diagramme de bifurcation de  $y$  et évolution de  $dx, dy, dz$  en fonction de  $T$ .

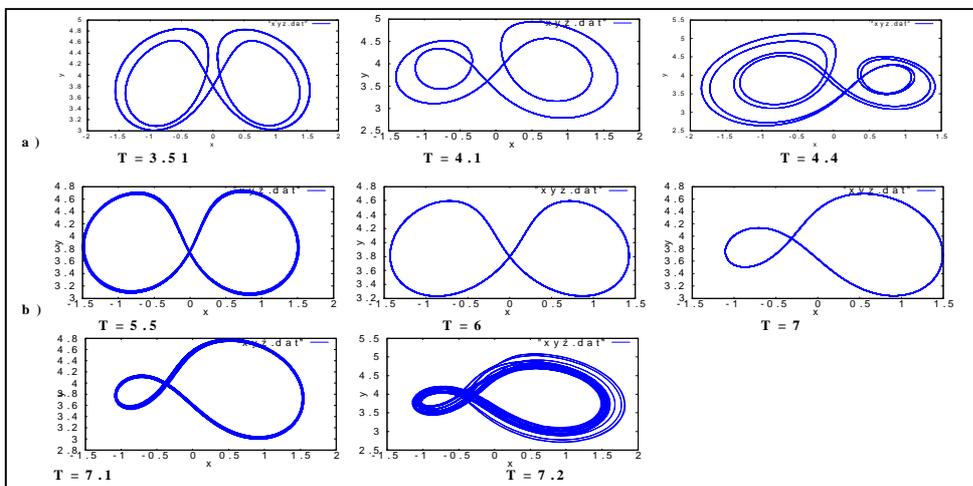


FIG. 4-29 – Résultats de contrôle par le retard dans les trois variables  $x, y$  et  $z$ .

## 5. Le contrôle par le retard sur les deux variables $x$ et $z$

On suppose que les intérêts  $x$  et l'indice des prix  $z$  sont valables pour le contrôle mais la demande d'investissement  $y$  ne l'est pas, alors on pose  $K_1 = K_3 = 0.1$ ,  $K_2 = 0$  et  $T_1 = T_3 = T$ , pour choisir la période  $T$  on procède de la même manière comme précédemment figure (4-30).

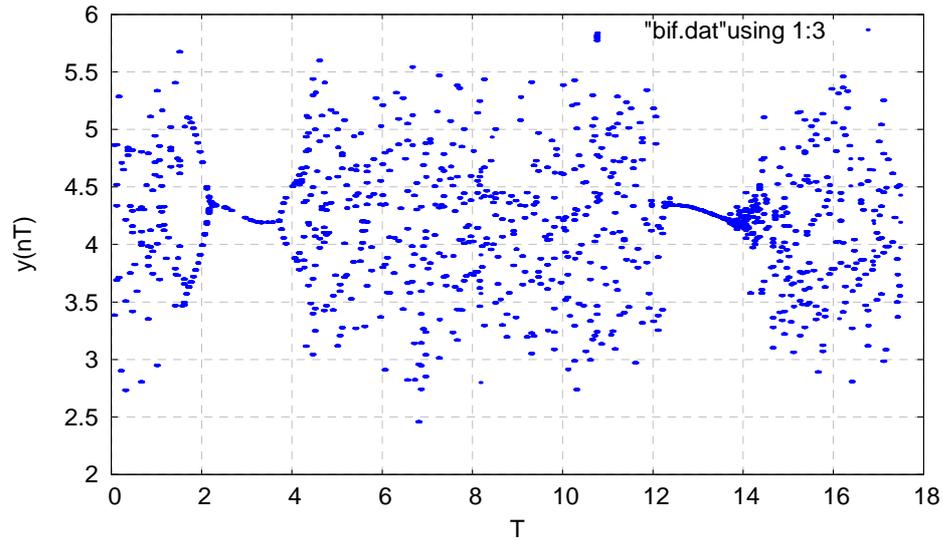


FIG. 4-30 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $T$ , ( $T_1 = T_3 = T$ ).

On remarque qu'il y a un comportement périodique sur les intervalles  $]1.6; 2.1[$ ,  $[2.4; 3.8]$  figure (4-31a))  $[4; 4.2]$  figure (4-31b)),  $[12.25; 13.6]$  figure (4-31c)), et un comportement quasi périodique dans les intervalles  $[2.2; 2.3]$ ,  $[3.9; 4[$  et  $[13.7; 14.5[$  alors pour contrôler le système on choisit  $T$  dans un de ces intervalles selon le but recherché.

Afin d'observer l'influence de l'ordre de dérivation sur le contrôle nous avons choisit la période  $T = 4$ , ensuite nous avons tracé le diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de l'ordre de dérivation en utilisant toujours la section de Poincaré à  $z = 0$

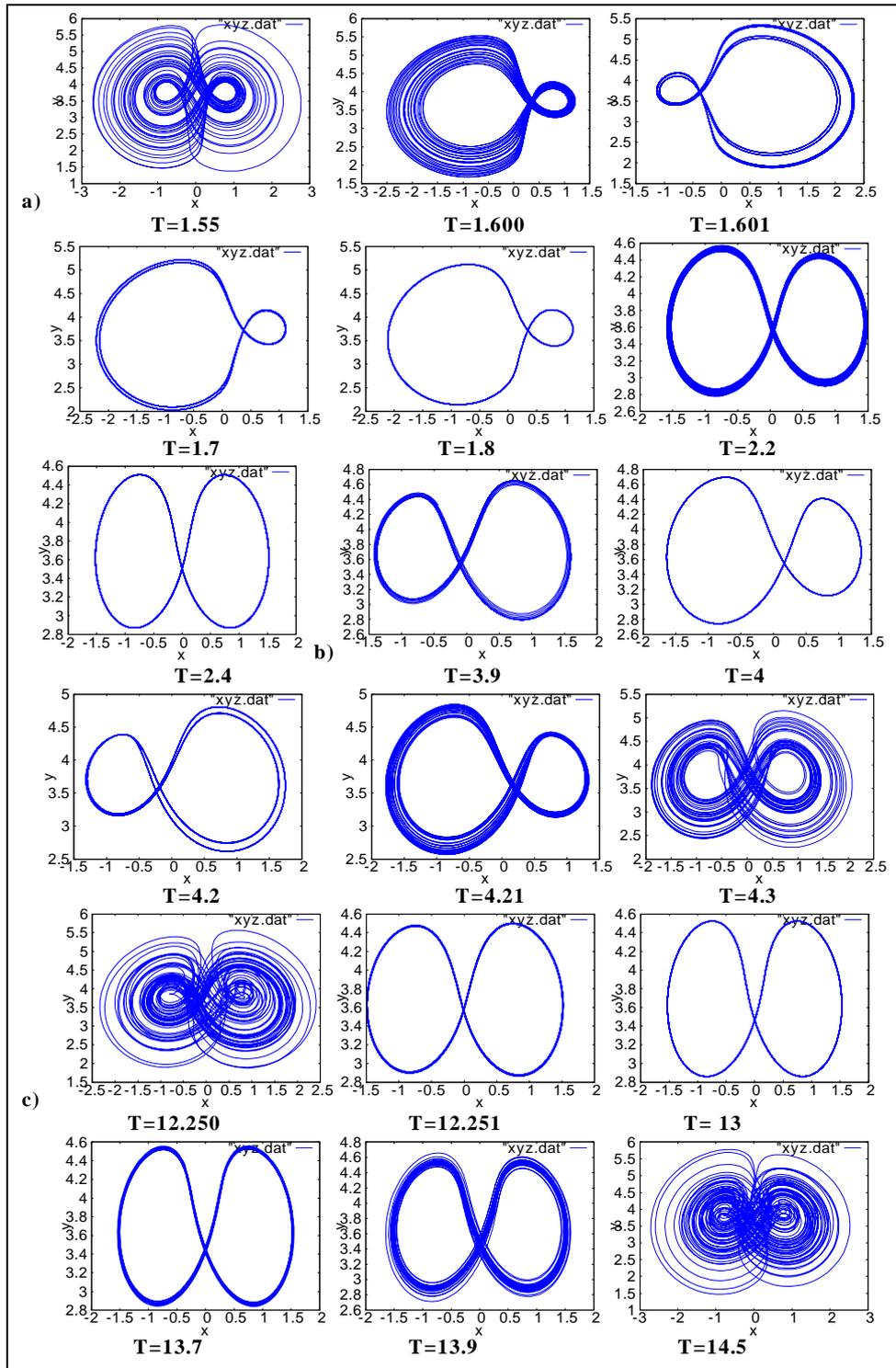


FIG. 4-31 – Résultats de contrôle par le retard dans les deux variables  $x$  et  $z$ ..

a)  $q_1 = q$  et  $q_2 = q_3 = 1$

La figure (4-32) représente Le diagrammes de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q$ .

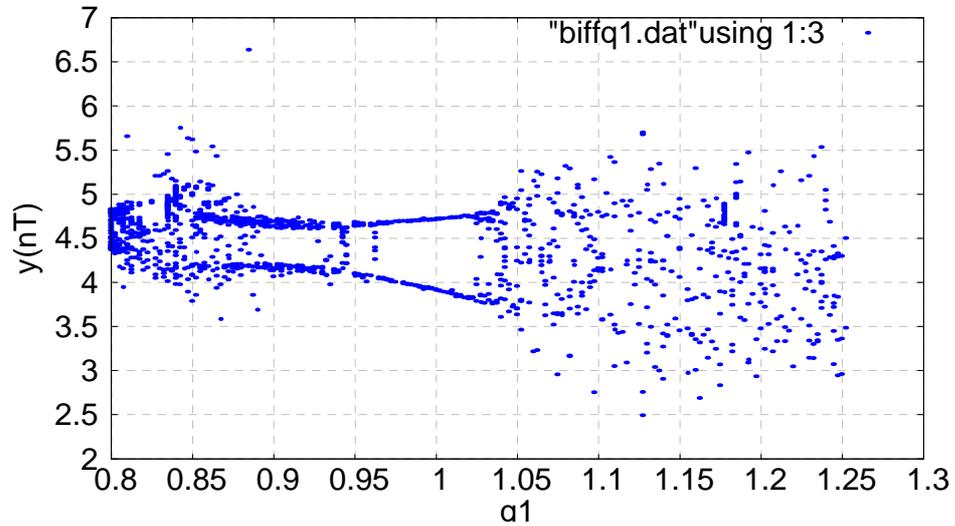


FIG. 4-32 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q_1$ .

On remarque qu'il y a un comportement périodique pour  $q \in ]0.95; 1.04]$ , et un comportement quasi périodique pour  $q \in [0.75; 0.95]$  figure (4-33), on remarque aussi qu'il y a plusieurs formes d'orbite périodique, on déduit alors que l'ordre de dérivation  $q_1$  a une influence sur l'efficacité du contrôle et sur la forme de l'orbite périodique obtenu après le contrôle.

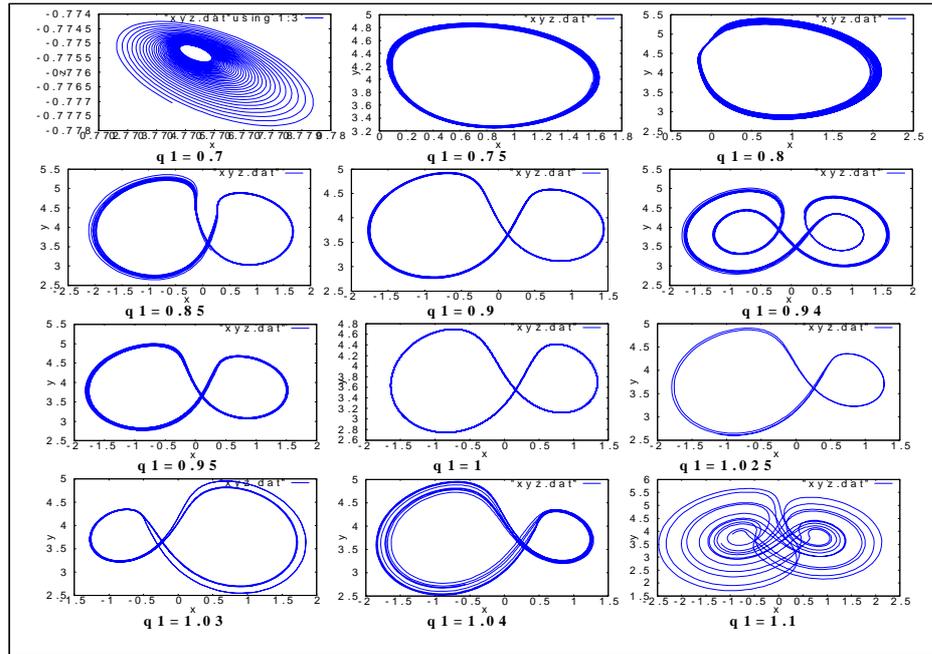


FIG. 4-33 – Résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $q_1$ .

b)  $q_1 = q_3 = 1$  et  $q_2 = q$

L'analyse du diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q_2$  qui est représenté dans la figure(4-34) montre qu'il y a un comportement périodique pour  $q_2 \in [0.98; 1.14]$  et un comportement quasi périodique pour  $q_2 \in [1.16; 1.2]$  figure(4-35)

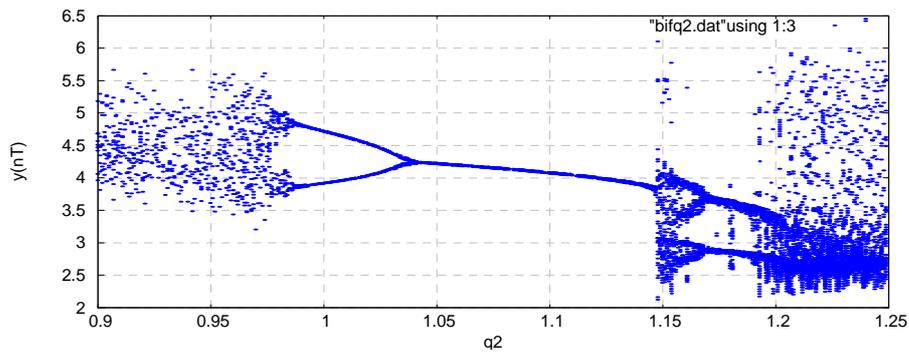


FIG. 4-34 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q_2$ .

Deux scénarios de routes vers le chaos sont détectés ici, le scénario de doublement

de période pour  $q_2 \leq 98$  et le scénario de la quasi périodicité pour  $q_2 \geq 1.15$ .

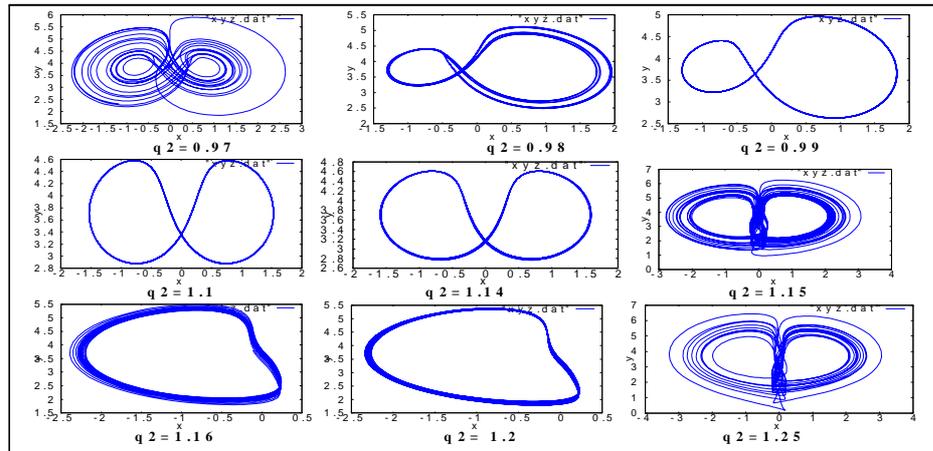


FIG. 4-35 – Résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $q_2$ .

c)  $q_1 = q_2 = 1$  et  $q_3 = q$

Le diagramme de bifurcation basé sur la section de Poincaré à  $z = 0$  de  $y$  en fonction de  $q_3$  est représenté dans la figure (4-36)

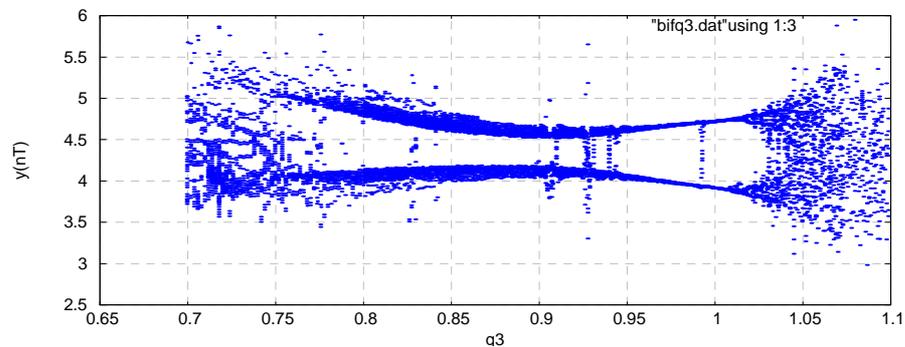


FIG. 4-36 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q_3$ .

On observe une courte fenêtre de périodicité  $q_3 \in [0.96; 1.02[$  et une large fenêtre de quasi périodicité  $q_3 \in [0.80; 0.95]$  figure (4-37).

Deux scénarios de routes vers le chaos sont détectés ici, le scénario de doublement de période pour  $q_3 \geq 1.02$  et la quasi périodicité pour  $q_2 \leq 0.95$ .

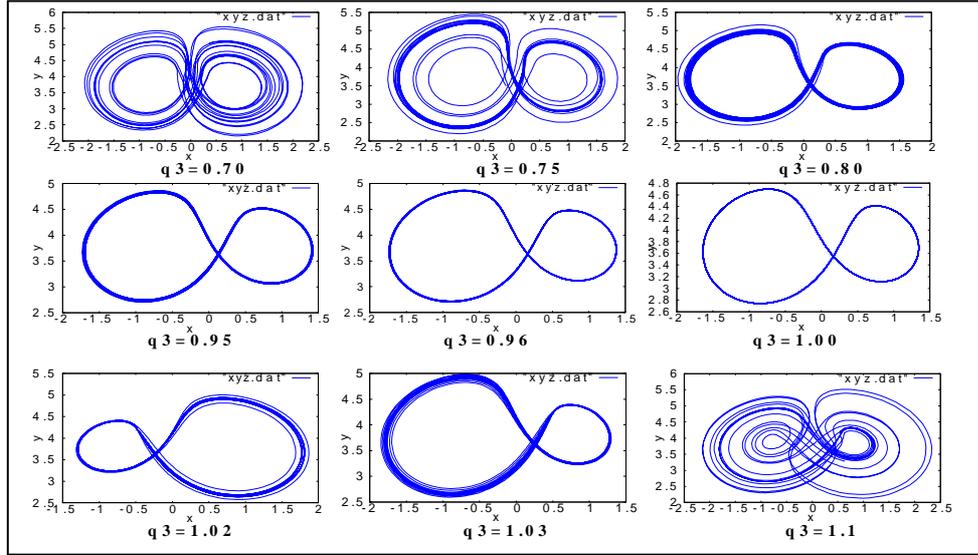


FIG. 4-37 – Résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $q_3$ .

d)  $q_1 = q_2 = q_3 = q$

La figure (4-38) représente Le diagramme de bifurcation basé sur la section de Poincaré à  $z = 0$  de  $y$  en fonction de  $q$ .

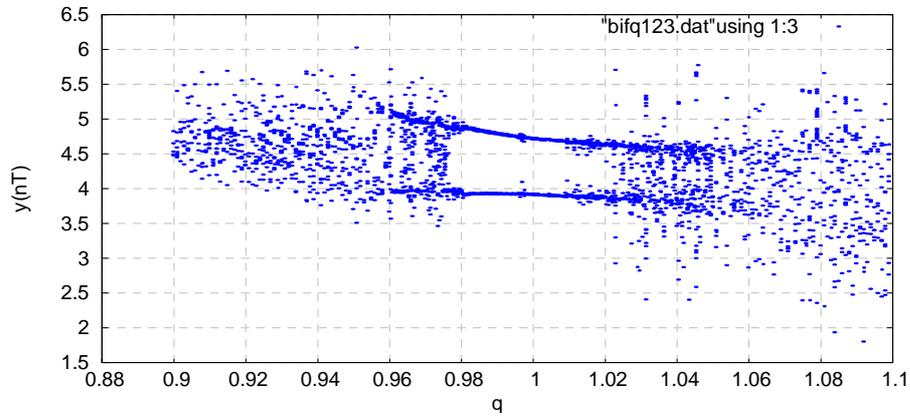


FIG. 4-38 – Diagramme de bifurcation de  $y$  en fonction de  $q$ .

On observe une courte fenêtre de périodicité  $q \in [0.971; 1.03]$  figure (4-39) dans ce cas une très petite perturbation sur l'ordre de dérivation ne détruit pas le contrôle mais une perturbation de  $dq > 0.03$  peut détruire le contrôle.

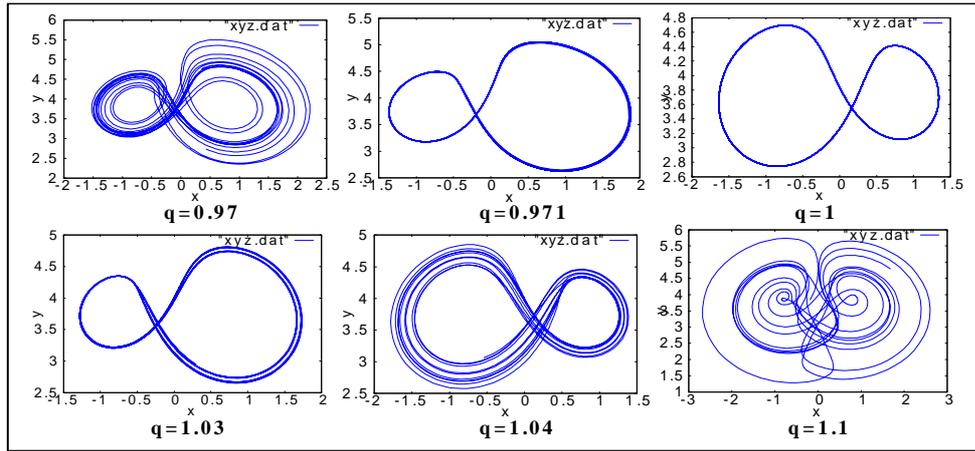


FIG. 4-39 – Résultats de contrôle pour quelques valeurs de  $q$ .

### 4.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux méthodes pour contrôler le chaos

1. La méthode OGY qui consiste à donner au paramètre de contrôle une petite perturbation afin de stabiliser l'orbite périodique instable et son application sur le système financier.
2. La méthode Feedback qui est basée sur l'ajout des perturbations sur les variables de système afin de stabiliser l'orbite périodique ou le point fixe instable, cette méthode a été présentée sous deux formes :
  - a) Feedback avec force externe et son application sur le circuit de Chua.
  - b) Feedback retardé et son application sur le système financier.

La comparaison entre ces deux méthodes nous amène à dire que la méthode feedback est plus simple et efficace que la méthode OGY dans le cas des systèmes continus. Dans ces applications nous avons examiné l'influence de l'ordre de dérivation sur le contrôle, on a remarqué que certains valeurs donnent un contrôle plus efficace et d'autre détruisent le contrôle. On peut obtenir plusieurs formes et tailles de cycles limites selon l'ordre choisi, alors l'ordre de dérivation est un paramètre très intéressant pour le contrôle du chaos.

## 4.4 Conclusion générale

*Ce mémoire a pour but l'étude des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (la dérivation fractionnaire, système dynamique et chaos) et dans les deux derniers chapitres nous avons appliqué ces outils :*

*Dans le troisième chapitre pour étudier deux systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires (système Chua, système financier), on a remarqué que le chaos existe avec un ordre totale inférieure à 3 et qu'on peut remplacer le régime chaotique par un régime stationnaire ou périodique en variant l'ordre de dérivation sans modifier les points fixes et la région d'attraction du système, on a remarqué aussi que l'effet mémoire a rendu les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire plus convenables pour la modélisation des phénomènes qui possèdent la mémoire mais numériquement ils sont plus coûteux à cause de cet effet.*

*Dans le quatrième chapitre pour contrôler les deux systèmes étudiés au troisième chapitre avec deux méthodes différentes (la méthode OGY et la méthode Feedback), le chaos a été éliminé et remplacé par des comportements stationnaires et périodiques, plusieurs facteurs ont des effet sur l'efficacité du contrôle et sur les formes des orbites périodiques obtenus. Un de ces facteurs est l'ordre de dérivation, dans son article [79] M.Tavazoei et M.Haeri ont utilisés le théorème (2.6) pour donner une méthode de contrôle simple et efficace qui consiste à stabiliser des points fixes ou des orbites périodiques instables dans les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire en variant l'ordre de dérivation sans modifier les points fixes et la région d'attraction du système original.*

*Arman Kiani-B et d'autre ont montré [80] que le masquage des informations dans la communication en utilisant les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire et plus sécurisé.*

*Nos futurs travaux seront concentrés sur la recherche de nouveaux algorithmes de résolutions des systèmes fractionnaires, qui sont moins coûteux. La recherche de nouveaux systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires sera aussi prise en considération.*

## 4.5 Annexe

### Programme en fortran 90

**! Résolution du système financier d'ordre fractionnaire avec la méthode prediction-correction.**

**! Déclaration des variables.**

implicit none

double precision aa,q,q1,q2,q3,h,a,b,ax,ay,az,smx1,smx2,smy1,smy2,smz1,smz2

double precision xh(100000),yh(100000),zh(100000),f1(100000),f2(100000),f3(100000),xp,yp,zp

double precision fx, fy ,fz,gamma,g1,g2,g3,gg1,gg2,gg3

integer i,j,n

**! Lecture des donnés.**

write(\*,\*) 'donner l ordre de dérivation q et le paramètre a'

read(\*,\*) q,aa

write(\*,\*) 'donner le nombre du points n'

read(\*,\*) n

q1=q; q2=q; q3=q; h=0.05

**! Les conditions initiales.**

xh(1)=2; yh(1)=aa; zh(1)=2

**! Ouverture des fichiers contenant les résultats.**

open(99,file='xyz.dat'); open(100,file='x.dat'); open(101,file='y.dat'); open(102,file='z.dat')

**! Démarrage des calculs.**

g1=gamma(q1);g2=gamma(q2);g3=gamma(q3)

gg1=gamma(q1+2);gg2=gamma(q2+2);gg3=gamma(q3+2)

do 2 i=0,n-2

ax=i\*\*(q1+1)-(i-q1)\*(i+1)\*\*q1

ay=i\*\*(q2+1)-(i-q2)\*(i+1)\*\*q2

az=i\*\*(q3+1)-(i-q3)\*(i+1)\*\*q3

```

f1(i+1)=fx(aa,xh(i+1),yh(i+1),zh(i+1));f2(i+1)=fy(xh(i+1),yh(i+1),zh(i+1))
f3(i+1)=fz(xh(i+1),yh(i+1),zh(i+1))
smx1=b(i,0,q1,h)*f1(i+1);smy1=b(i,0,q2,h)*f2(i+1);smz1=b(i,0,q3,h)*f3(i+1)
smx2=ax*f1(i+1);smy2=ay*f2(i+1);smz2=az*f3(i+1)
do 1 j=1,i
smx1=smx1+b(i,j,q1,h)*f1(j+1);smy1=smy1+b(i,j,q2,h)*f2(j+1);smz1=smz1+b(i,j,q3,h)*f3(j+1)
smx2=smx2+a(i,j,q1)*f1(j+1);smy2=smy2+a(i,j,q2)*f2(j+1);smz2=smz2+a(i,j,q3)*f3(j+1)
1 continue
xp=xh(1)+smx1/g1;yp=yh(1)+smy1/g2;zp=zh(1)+smz1/g3
xh(i+2)=(fx(aa,xp,yp,zp)+smx2)*h**q1
xh(i+2)=xh(1)+xh(i+2)/gg1
yh(i+2)=(fy(xp,yp,zp)+smy2)*h**q2
yh(i+2)=yh(1)+yh(i+2)/gg2
zh(i+2)=(fz(xp,yp,zp)+smz2)*h**q3
zh(i+2)=zh(1)+zh(i+2)/gg3
! Ecriture des résultats.
if(i.ge.500)then
write(99,*) xh(i+2),yh(i+2),zh(i+2)
endif
write(100,*) (i+1)*h ,xh(i+2); write(101,*) (i+1)*h ,yh(i+2); write(102,*) (i+1)*h
,zh(i+2)
2 continue
end
! Les fonctions fi.
doubleprecision function fx(aa,x,y,z)
implicit none
doubleprecision aa,x,y,z
fx=z+(y-aa)*x

```

```

end function
doubleprecision function fy(x,y,z)
implicit none
doubleprecision x,y,z
fy=1-0.1*y-x**2+0*z

```

```

end function
doubleprecision function fz(x,y,z)
implicit none
doubleprecision x,y,z
fz=-x-z+0*y

```

**! Calcul des composant de la matrice A.**

```

doubleprecision function a(i,j,q)
implicit none
integer i,j
doubleprecision q
a=(i-j+2)**(q+1)-2*(i-j+1)**(q+1)+(i-j)**(q+1)
end function

```

**! Calcul des composant de la matrice B.**

```

doubleprecision function b(i,j,q,h)
implicit none
integer i,j
doubleprecision q,h
b=(((i-j+1)**q-(i-j)**q)*h**q); b=b/q
end function

```

**! Estimation de la fonction gamma.**

```

double precision function gamma(x)
double precision x,y,w

```

```

real n
doubleprecision p0,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,p9,p10,p11,p12,p13
  p0 = 0.9999999999999999d+00 ; p1 = -0.422784335098466784d+00
  p2 = -0.233093736421782878d+00 ; p3 = 0.191091101387638410d+00
  p4 = -0.024552490005641278d+00 ; p5 = -0.017645244547851414d+00
  p6 = 0.008023273027855346d+00 ; p7 = -0.000804329819255744d+00
  p8 = -0.000360837876648255d+00 ; p9 = 0.000145596568617526d+00
  p10 = -0.000017545539395205d+00 ; p11 = -0.000002591225267689d+00
  p12 = 0.000001337767384067d+00 ; p13 = -0.000000199542863674d+00
n = nint(x - 2)
w = x - (n + 2)
y = (((((((((((((p13 * w + p12)*w+ p11)*w+ p10)*w+p9)*w+p8)*w+p7)*w+p6)*w+p5)*w+p4)
  if (n .gt. 0) then
w = x - 1
do k = 2, n
w = w * (x - k)
end do
else
w = 1
do k = 0, -n - 1
y = y * (x + k)
end do
end if
gamma = w / y
end

```

# Bibliographie

- [1] Ross B. (1977) The Development of Fractional Calculus 1695-1900. *Historia Math* 4 :75-89.
- [2] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1993.
- [3] Keith B. Oldham, Jerome Spanier "The fractional calculus theory and application of differentiation and integretion to arbitrary order" acadimic press, INC.
- [4] T.Y.Li,J.A. Yorke, Period three implies chaos ,*Am. Math. Monthly*, Vol.82,1975, pp.985-992.
- [5] E.Ott,C.Grebogi and J.A.Yorke,«Controlling Chaos», *phys. Rev.Lett.*, Vol.64, no.11, pp.1196-1199,1990.
- [6] Artin E. (1931) *Einfuhrung in die Theorie der Gammafunktion*. Teubner, Leipzig (English translation : *The Gamma Function*. Published 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York).
- [7] Kai Diethelm *Fractional Differential Equations Theory and Numerical Treatment* February 13, 2003.
- [8] Kamel Haouam "Existence et non existence de solutions des équations différentielles fractionnaires", Thèse de Doctorat Univ.Mentouri. Constantine 2008.
- [9] Marcia Kleinz and Thomas J. Osler "A Child's Garden of Fractional Derivatives" *The College Mathematics Journal*, March 2000, Volume 31, Number 2, pp. 82–88.

- [10] Igor Podlubny "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation" arXiv :math/0110241v1 [math.CA] 22 Oct 2001.
- [11] F. Ben Adda. Interprétation géométrique de la différentiabilité et du gradient d'ordre réel. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, 1998, pp. 931–934.
- [12] R. Bagley and P. J Torvik. Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. AIAA Journal, 21(5) :741-748, 1983.
- [13] Patricia Saad "Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc" Thèse de Doctorat. L'école centrale de Lyon Spécialité : Mécanique Numéro d'ordre : 2003 - 09 Année 2003.
- [14] Huynh Kim Long, Alex "Analyse du comportement dynamique d'un élastomère : modélisation et identification. Thèse Janvier 2005.
- [15] Nicole Heymans, Igor Podlubny "Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives" arXiv :math-ph/0512028v1 9 Dec 2005.
- [16] M.Soula Y. Chevalier "La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères - applications aux comportements élastiques et viscoélastiques linéaires et non linéaires des élastomères" URL : <http://www.emath.fr/proc/Vol.5/>.
- [17] Kai Diethelm, Neville J. Ford "Analysis of fractional Differential equations" March 15, 1999.
- [18] A. M. A.El-sayed, A. E. M. El-mesiry and H. A. El-saka "Numerical solution for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations" Computational and Applied Mathematics Vol. 23, N. 1, pp. 33–54, 2004.
- [19] Kai Diethelm and Alan D. Freed "The FracPECE Subroutine for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order" Göttingen, 1999, pp. 57-71.
- [20] Manuel Duarte Ortigueira "Introduction to Fractional Linear Systems Continuous-Time" IEEE Proceedings Vision, Image and Signal Processing, vol.147, No. 1, February 2000.

- [21] Frank C. Hoppensteadt "Analysis and Simulation of Chaotic Systems", Second Edition Springer Applied Mathematical Sciences Volume 94.
- [22] R. Kobes, S. Peles "A Relationship Between Parametric Resonance and Chaos" arXiv :nlin/0005005v1 [nlin.CD] 2 May 2000.
- [23] D.Kugiumtzis, B.Lilekjendliey, N.Christopherseny "Chaotic time series Part I : Estimation of invariant properties in state space" 14 January 94.
- [24] Mihai Bogdan Luca "Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information" thèse, Université de Bretagne Occidentale 2006.
- [25] Edward N. Lorenz "Deterministic Nonperiodic Flow" Journal of the Atmospheric sciences, March 1963.
- [26] Paul Manneville "Dynamique non lin eaire et chaos" Laboratoire d'Hydrodynamique, Ecole Polytechnique 2005.
- [27] Nicholas Geard, Kai Willadsen and Janet Wiles "Perturbation Analysis" Vol. 3 of Advances in Natural Computation, pp. 69-84. World Scientific (2005).
- [28] J. C. Sprott "Numerical Calculation of Largest Lyapunov Exponent" University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA (2004).
- [29] A.Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A.Vastano, "determining Lyapunov Exponents from a time Series" Physica 16D,17D, 285-317 (1985).
- [30] J. C. Sprott, Chaos and Time-Series Analysis (Oxford University Press, 2003), pp.116-117.
- [31] Sheren A. Abd El-Salam Ahmed M. A. El-Sayed "On the stability of some fractional-order non-autonomous systems" Faculty of Science, Alexandria University, Alexandria, Egypt (2007).
- [32] D. Matignon, Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, in : IMACS-SMC Proceedings, Lille, France, 1996, pp. 963–968.
- [33] D. Matignon "Stability properties for generalized fractionl differential systems" Vol. 5, 1998, 145-158.

- [34] Malti R, Cois O, Aoun M, Levron F, Oustaloup A (July 21–26 2002) Computing impulse response energy of fractional transfer function, in the 15th IFAC World Congress 2002, Barcelona, Spain.
- [35] Hyosung Ahn Yang Quan Chen , Igor Podlubny "Robust stability cheking of a class of linear interval fractional order system using Lypunov inequality" Proceedings of the 2nd IFAC Porto, Portugal, July 19-21, 2006.
- [36] Guoyuan Qi, Guanrong Chen, Shengzhi Du, Zengqiang Chen, Zhuzhi Yuan "Analysis of a new chaotic system" *Physica A* 352 (2005) 295–308.
- [37] H.Nagashima, R. Baba "Introduction to chaos, physics and Mathematics of chaotic phenomena ", Institute of physics publishing, London, 1999.
- [38] J.G guittard "Techniques d’analyse d’oscillateurs chaotiques :application au télécommunications par synchronisation du chaos". Thèse de doctorat, université de limoges, novembre 2000.
- [39] Mohamed Aoun, Rachid Malti, François Levron, and Alain Oustaloup "Numerical Simulations of Fractional Systems :An Overview of Existing Methods and Improvements" *Nonlinear Dynamics* 38 : 117–131, 2004.
- [40] Long-Jye Sheu, Hsien-Keng Chen, Juhn-Horng Chen, Lap-Mou Tam "Chaos in a new system with fractional order" *Chaos, Solitons and Fractals* 31 (2007) 1203–1212.
- [41] Wei Lin "Global existence theory and chaos control of fractional differential equations " *J. Math. Anal. Appl.* 332 (2007) 709–726.
- [42] Wei-Ching chen "Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order financial system" *Chaos, Solitons and Fractals* 36 (2008) 1305–1314.
- [43] Serletic A "Is there chaos in economic series?" *Can J econ* 1996 ;29 :S210-2
- [44] Chen P "Emperical and theoretical evidence of economic chaos" *Syst Dyn Rev* 1988 ;4(1-2) :1-38.
- [45] Chian Ac-L "Non linear dynamics and chaos in macroeconomics" *Int Theor Appl Finan* 2000 ;3 :601.

- [46] Chian Ac-L, Borotto FA, Rempel EL, Rogers C. "Attractor merging Crisis in chaotic business cycles " *Chaos, Solitons and Fractals* 2005 ;24 :869-75.
- [47] Chian Ac-L, Rempel EL, Rogers C. "Complex economic dynamics :chaotic saddle crisis and intermittency" *Chaos, Solitons and Fractals* 2006 ;29 :1194-218.
- [48] Shinasi GJ "Nonlinear dynamic model of short run fluctuations" *Rev Econ Stud* 1981 ;48(4) :649-56.
- [49] Lorenz HW "Non linear economic dynamics and chaotic motion " New York :springer 1993.
- [50] Sasakura K. on the dynamic behavior of Schinasi's business cycle model.*J Macroecon* 1994 ;16(3) :423-44.
- [51] Cesare LD, Sportelli M. A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues. *Coas, Solutions &Fractals* 2005 ; 25 :233-44.
- [52] Fanti L, Manfredi P. Chaotic business cycles and fiscalpolicy : an IS-LM model with distributed tax collection lags. *Choas, Solutions & Fractals*, 2006, doi : 10.1016/j.choas 2005.11.024.
- [53] Huang DS, Li HQ. "Theory and method of the nonlinear economics publishing". Chengdu, China : House of Sichuan university ; 1993[in Chinese].
- [54] Ma JH, Chen YS. "Study for the bifurcation topological structure and the global complicated charactor of a kind of nonlinear finanace system(I)". *Appl Math Mech (English Ed )* 2001 ; 22 :1240-51.
- [55] Ma JH, Chen YS."Study for the bifurcation topological structure and the global complicated charactor of a kind of nonlinear finanace system(II)". *Appl Math Mech (English Ed )* 2001 ; 22 :1375-82.
- [56] Arena P. Caponetto R, Fortuna L , Porto D. "nonlinear non-integer order circuits and systems- and introduction" world scientific ; 2000.
- [57] I podlubny. " Fractional differential equations " New York : academic press ; 1999.

- [58] West BJ, Picozzi S. " Fractional langevin model of memory in financial time series ".Phys Rev E 2002 ; 65 :037106.
- [59] Panas E. " Long memory and chaotic models of prices on the London metal exchange ".resor Policy 2001 ;27 :235-46.
- [60] Hartley TT, Lorenzo CF, Qammer HK. Chaos in a fractional order Chua's system. IEEE Trans CAS-I 1995 ;42 :485–90
- [61] Ahmad WM, Sprott JC. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. Chaos, Solitons & Fractals 2003 ;16 :339–51.
- [62] Grigorenko I, Grigirenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. Phys Rev Lett 2003 ;91 :034101.
- [63] Arena P, Fortuna L, Porto D. Chaotic behavior in noninteger-order cellular neural networks. Phys Rev E 2000 ;61 :776–81.
- [64] Li C, Chen G. Chaos and hyperchaos in fractional order Rossler equation. Physica A 2004 ;341 :55–61.
- [65] Gao X, Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's equation. Chaos, Solitons & Fractals 2005 ;24 :1097–104.
- [66] Sheu LJ, Chen HK, Chen JH, Tam LM. Chaos in a new system with fractional order. Chaos, Solitons & Fractals, doi :10.1016/j.chaos.2005.10.073.
- [67] Li C, Peng G. Chaos in Chen's system with a fractional order. Chaos, Solitons & Fractals 2004 ;22 :443–50.
- [68] Sheu LJ, Chen HK, Chen JH, Tam LM. Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation. Chaos, Solitons & Fractals, doi :10.1016/j.chaos.2005.11.066.
- [69] Ge ZM, Zhang AR. Chaos in a modified van der Pol system and in its fractional order systems. Chaos, Solitons & Fractals, doi :10.1016/j.chaos.2006.01.098.
- [70] K Pyragas "Continuous controle of chaos by self-controlling feedback, Paper 7" university Berlin ,1000 Berlin Germany. 1992.

- [71] Jose Manuel Gutierrez and Andres Iglesias "Mathematica package for analysis and control of chaos in nonlinear systems" University of Cantabria, Santander 39005, Spain 1998.
- [72] Wei-Ching Chen "Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks" *Chaos, Solitons and Fractals* 37 (2008) 1198–1207.
- [73] Tzuyin Wu, Min-Shin Chen "Chaos control of the modified Chua's circuit system" *Physica D* 164 (2002) 53–58
- [74] Guanrong Chen, Jin-Qing Fang, Yiguang Hong, Hua-Shu Qin " Introduction to Chaos Control and AntiControl Chapter 6"
- [75] Jeanine Smallwood "Chaos Control of the Henon map and an Impact Oscillator by the Ott-Grebogi-Yorke Method" *The Nonlinear Journal* Vol.2, 2000 pp 37-44
- [76] Alexander L. Fradkov a, , Robin J. Evans "Control of chaos : Methods and applications in engineering" *Annual Reviews in Control* 29 (2005) 33–56.
- [77] Wajdi M. Ahmad , Ahmad M. Harb "On nonlinear control design for autonomous chaotic systems of integer and fractional orders" *Chaos, Solitons and Fractals* 18 (2003) 693–701.
- [78] Wajdi M. Ahmad , Reyad El-Khazali, Yousef Al-Assaf "Stabilization of generalized fractional order chaotic systems using state feedback control" *Chaos, Solitons and Fractals* 22 (2004) 141–150
- [79] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri "Chaos control via a simple fractional-order controller" *Physics Letters A* 372 (2008) 798–807
- [80] Arman Kiani-B , Kia Fallahi, Naser Pariz, Henry Leung "A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (2007).

# Résumé

Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires possèdent à la fois l'effet mémoire et le chaos, cela a rendu ces systèmes très utiles pour la modélisation et la compréhension des phénomènes qui possèdent la mémoire (les élastomères, les matériaux viscoélastiques, la finance ...)

Nous avons étudié dans ce mémoire deux systèmes d'ordre fractionnaire (le système de Chua et un système financier). En variant l'ordre de dérivation d'une manière continue plusieurs comportements non connus dans le cas entier apparaissent dans le cas fractionnaire, de plus nous avons observé le chaos avec des ordres de dérivation inférieurs à 3, cela montre l'utilité de l'ordre fractionnaire.

Pour éliminer le comportement chaotique dans ces systèmes, nous avons appliqué deux méthodes de contrôle (la méthode feedback et la méthode dite OGY), l'ordre fractionnaire est utilisé encore une fois pour enrichir le contrôle.

L'inconvénient des systèmes fractionnaires se situe pour les algorithmes de résolution qui ont le désavantage d'être coûteux (le temps d'exécution est très grand) à cause de l'effet mémoire.

# Mots clés

Dérivées fractionnaires, systèmes dynamiques chaotiques, système financier, contrôle du chaos

# Abstract

The chaotic systems with fractional derivatives possess both the chaos and memory effect, that has made these systems very useful for modeling and understanding of phenomena which possess memory (elastomers, materials visco-elastic, the finance...)

We consider in this brief, two fractional order chaotic systems (Chua system and financial system). When we vary the derivative order, several behaviors not seen in the integer case are fully apparent in the fractional case, the more you find chaos with orders less than 3, so the fractional order is very useful.

To eliminate the chaotic behavior in these systems, we have implemented two methods of control (the feedback method and the OGY method), fractional order is used another time to enrich the control. A disadvantage of fractional systems is that the resolution algorithms are very slow (execution time is very large) because of the memory effect.

# Key words

Fractional derivatives, chaotic dynamical systems, financial system  
Control of chaos.

# خلاصة

الجمل الديناميكية الفوضوية ذات مشتقات كسرية تمتلك كل من الفوضى والذاكرة في آن واحد وهذا ما جعلها مفيدة جدا لنمذجة وفهم الظواهر التي تمتلك الذاكرة (مثل المواد اللزجة والمرنة معا ، المالية...)

لقد درسنا في هذه الرسالة جملتين ذات رتب كسرية (جملة شوا والجملة المالية). عند تغيير رتبة الاشتقاق بشكل مستمر ظهرت العديد من السلوكيات في حالة الرتب الكسرية و التي لم تظهر في حالة الرتبة الصحيحة ، زيادة على ذلك فقد ظهر السلوك الفوضوي مع رتب كسرية اقل من 3 وهذا غير ممكن كما نعلم في حالة الرتبة الصحيحة، لذلك فان الرتب الكسرية مفيدة جدا .  
للقضاء على الفوضى في سلوك هذه الجمل ، تم تطبيق طريقتين للمراقبة (طريقة التغذية المرتدة وطريقة أجي)، ومرة أخرى استخدمت الرتب الكسرية لإثراء المراقبة.  
أحد سلبيات الجمل ذات الرتب الكسرية هو أن تكلفت خوارزميات الحل عالية جدا (التنفيذ يتطلب وقت كبير جدا) وذلك نظرا لميزة الذاكرة .

# كلمات مفتاحية

مشتقات من رتب كسرية ، جمل ديناميكية فوضوية ، جملة مالية ، مراقبة الفوضى.