REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITE MENTOURI

FACULTE DES SCIENCES EXACTES DEPARTEMENT

DES MATEMATIQUES

N° d'ordre:

N° de Serie:

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER EN MTHEMATIQUES

OPTION

Processus stochastique

THEME

ESTIMATION DE LA FIABILITE D'UN SYSTEME ET DE SES COMPOSANTS

Présenté par :

MOUY MOUNIA

Setennue le: 02/11/2009

Devant le jury composé de:

Président	:	A. Ayadi	Professeur	**Université Constantine**
Rapporteur	:	M. Boushaba	M.C	**Université Constantine**
Examinateur	:	M. Dakhmouche	M.C	**Université Constantine**
Examinateur	:	A. Benchetteh	Professeur	**Université Annaba**

REMERCIEMENTS

Il m’est très pénible en cette mémorable occasion de trouver les mots justes et plus pénible encore de ne me voir dans l'incapacité de vous remercier à votre juste valeur d'avoir sacrifier toute votre vie pour le savoir et la recherche ; partageant avec ;nos joies et parfois nos peines au cours de votre long voyage de combattant; je ne saurais me départir et non sans grande émotion, des innombrables souvenirs qui ont marqué ma vie auprès de vous .je ne pus oublier votre humanisme ;ni votre modestie ,et plus encore votre abnégation et d'autres qualités, que j'ai pu découvrir en vous côtoyant.

En tout premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Mahmoud Boushaba Qui m’a guidé et soutenu tout au long de ce travail de recherche aussi bien par ses précieux conseils que par sa rigueur et sa disponibilité à mon égard. Qu’il trouve ici L’expression de toute ma gratitude.

Je remercie vivement, Le professeur Abdelhamid Ayadi d’avoir accepté de présider mon jury.

Je suis très sensible à la valeur du jugement porté par les professeurs Azzeddine Benchetteh et Meghlaoui Dakhmouche à ce travail.

Je tiens également à remercier mes chers parents qui ont donné le meilleur d’eux même afin que je puisse atteindre mon objectif. Sans oublier l’amour de ma vie (mon mari) pour sa patience et son soutien moral.

Enfin, sans omettre mes amies, Hadjer, Nour et Fatima, pour lesquelles j’exprime mes sincères remerciements, pour l’esprit d'équipe et de solidarité qui a régné entre nous tout le long de ce parcours.

Que dire de plus ,sinon vous souhaiter une longue vie paisible pleine de bonheur et prospérité

MOUY MOUNIA

Table des matières

Résumé

Le but de notre travail est de revoir deux méthodes d'estimation, la première est relative à l'estimation des fiabilités d'un système et de ses composants à partir des résultats d'essais sur ceux-ci, la deuxième étant relative à l'estimation des paramètres des lois exponentielles dans le cas de données censurées, en supposant que les durées de vie des composants du système suivent ces dernières et pour conforter notre résultat on a réaliser des simulations.

Mots Clés : Fiabilité, Estimation, Vraisemblance, Loi exponentielle, méthode du gradient

Abstract

The purpose of our work is to present two methods of estimation, the first one is relative to the estimation of the reliabilities of a system and its components from the test results on these, the second is relative to the estimation of the parameters of the exponential distribution in the case of censored data, supposing that the lifetimes of the components of the system follow the exponential laws and to consolidate our result we use simulations.

Keywords : Reliability, Estimation, Exponential law, Method of the gradient.

Introduction

La connaissance des caractéristiques de la fiabilité d'un système simple ou complexe est essentielle, elle conditionne la maintenance. L'usure et le renouvellement des équipements engendrent des coûts qu'on espère gérer de manière optimale. C'est pour ces raisons qu'un nouveau champ d'investigation s'est dévelloppé afin de réduire le coût. Celui-ci est basé principalement sur la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps et sur l'estimation statistique des paramètres des modèles à partir des résultats des essai.

Les premiers travaux ont consisté à étudier les essais réalisés en conditions normales d'utilisation du produit (système), provoquant des temps d'essai importants, et avec des tailles d'échantillon élevées. Plus tard, et afin de réduire le coût des essais, les tailles des échantillons et le temps imparti à la réalisation de ces essais ont été revu à la baisse. Ces deux aspects à savoir la réduction de la taille de l'échantillon et du temps d'essai ont suscité beaucoup d'intérêt généré par le volume de publication et travaux de recherche qui ont été élaboré dans ce sens. pour la réduction de la taille on cite [27] ,[19], [29] . Pour la réduction du temps, il y a les travaux de [30], [5] , et [9] . Le but de notre travail est de revoir deux méthodes d'estimation, la première est relative à l'estimation des fiabilités du système et de ses composants à partir des résultats des essais sur ceux-ci, la deuxième etant relative à l'estimation des paramètres des lois exponentielles, en supposant que les durées de vie de composants du système suivent ces dernières.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous nous limitons à un rappel bref sur des notions et définitions de base de la théorie de la fiabilité que nous voyons utiles pour la suite de notre exposé. Nous commençons par définir les différents types des systèmes, la fonction de structure, la fonction de structure cohérent, les coupes et les liens. Ensuite nous introduisons la fonction de fiabilité dans le temps discret et le temps continu et enfin nous donnons ses propriétés (l'importance en fiabilité et l'importance en structure)

Dans le deuxième chapitre nous nous intéressons essentiellement à l'estimation de la fonction de fiabilité à partir d'essais sur le système et ses composants, nous commençons par un rappel sur l'estimation. Ensuite nous nous intéressons à l'estimation de la fonction de fiabilité par la méthode de maximum de vraisemblance et trouvons l'estimateur de maximum de vraisemblance par la méthode du gradient et la méthode de bissection, Enfin nous donnons trois théorèmes très importants.

Dans le troisième chapitre et après avoir donné un aperçu sur la censure et le calcul de la vraisemblance dans le cas celle-ci, on a estimé les paramètres de la loi exponentielle pour des données censurées. En effet, on a calculé la fonction de vraisemblance pour trois structures différentes, qui sont système en série, système en parallèle, et système 2-sur-3, dans le cas où les durées de vie des composants des systèmes sont des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles

le quatrième chapitre est consacré à l'application des méthodes numériques d'approximation (la méthode de gradient) pour l'obtention du maximum des vraisemblances obtenues dans le chapitre trois. Enfin, on termine par une conclusion.

Chapitre 1

Introduction a la théorie de la fiabilité

L'objectif de la théorie de la fiabilité est l'analyse de probabilité de panne d'un système. Le terme est à prendre au sens large, il peut être une structure composée de plusieurs éléments comme il peut être un seul élément.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.1 Rappel

Système en série

Un système est dit en série si son fonctionnement est assujetti au fonctionnement simultané de tous ses composants. Si un seul de ses composants est en panne, alors le système sera en panne.

Système en parallèle

Le fonctionnement de ce système est assuré si au moins un de ses composants est en bon état, le système sera en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne simultanément.

Système k-sur-n

Un système de n composants qui fonctionne si et seulement si au moins k composants parmi n fonctionnent s'appelle $k - sur - n : G$.
Un système de n composants qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi n tombent en panne s'appelle $k - sur - n : F$.

Cela nous permet de dire que le système $k - sur - n : G$ est équivalent à $(n - k + 1) - sur - n : F$

Les systèmes en série et en parallèle sont des cas particuliers d'un système $k - sur - n$.

Un système en série est équivalent à un système $n - sur - n : G$ et $1 - sur - n : F$.

Un système en parallèle est équivalent à un système $n - sur - n : F$ et $1 - sur - n : G$.

Système en série-parallèle

Il est formé de r blocs montés en parallèle, et chaque bloc i constitue un système en série de i_j composants j = 1,...r, ce système fonctionne si au moins un bloc fonctionne et chaque bloc fonctionne si tous ses composants fonctionnent.

Système en parallèle-série

Il est formé de r blocs montés en série, et chaque bloc i constitue un système en paralléle de i_j composants j=1,....r, ce système fonctionne si tous les blocs fonctionnent et chaque bloc fonctionne si au moins un composant fonctionne.

Système réparable

le composant, mis en service à l'instant $t = 0$, fonctionne pendant un certain temps X_1(aléatoire) au bout duquel il tombe en panne. il y reste pendant un temps Y_1 (aléatoire) durant son remplacement (ou réparation) et, au bout de ce temps, le composant est remis à nouveau en fonctionnement, et ainsi de suite. dans ce cas nous disons que le système est réparable, Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque le composant tombe en panne et Y reste définitivement, le système est appelé non réparable.

1.2 Fonction de structure

Définition 1.2.1 *La fonction de structure traduit les relations fonctionnelles entre les composants du système et son état de panne / fonctionnement.*

Considérons un système binaire à n composants : $c = \{1, ...n\}$, pour chaque composant i, on désigne une variable X_i à valeur dans $\{0, 1\}$, avec la convention suivante :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le composant i est en bon état.} \\ 0 \text{ si le composant i est en panne.} \end{cases}$$

Définition 1.2.2 *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n) \in \{0, 1\}^n$ le vecteur décrivant conjointement les états des composants. On définit une fonction $\Phi(X)$ décrivant l'état du système à valeurs dans $\{0, 1\}$, avec la convention suivante :*

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 \text{ si le système est en bon état.} \\ 0 \text{ si le système est en panne.} \end{cases}$$

exemple 1.2.1 *La fonction de structure d'un système en série est donnée par :*

$$\Phi(X) = \min(x_{1,X_2}, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

La fonction de structure d'un système en parallèle est donnée par :

$$\Phi(X) = \max(x_1, ..x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

Notation :

$(1_i, X) = (X_1, ..., X_{i-1}, 1, X_{i+1}, ..., X_n)$
$(0_i, X) = (X_1, ..., X_{i-1}, 0, X_{i+1}, ..., X_n)$

1.3 Fonction de structure cohérente

Définition 1.3.1 *Le composant X_i est dit utile s'il existe un vecteur X tel que $\Phi(1_i, X) \neq \Phi(0_i, X)$, dans le cas contraire le composant X_i sera dite non utile.*

Définition 1.3.2 *Soient X et Y deux vecteurs, on dira que Y est supérieur ou égale à X ce que l'on notera $Y \geq X$ si et seulement si $y_j \geq x_j$,$\forall j = 1, ..., n$ et $Y > X$ si et seulement si $Y \geq X$ et $\exists j$ tel que $y_j > x_j$, $\forall j = 1, ..., n$*

Définition 1.3.3 *la fonction de structure Φ est non décroissante ssi : $Y \geq X \Rightarrow \Phi(Y) \geq \Phi(X)$*

Définition 1.3.4 ***Fonction de structure cohérente :*** *Si la fonction Φ est non décroissante et en plus toutes ses variables (composants) sont utiles, alors Φ sera dite cohérente*

Théorème 1.3.1 *Si Φ représente un système cohérent, alors $\Phi(1) = 1$*

Preuve. Soient $\Phi(1_i, X)$ et $\Phi(0_i, X)$ notées les fonctions de structure d'un système de n composants où x_i=1 ou x_i=0 respectivement (c-a-d le $i^{\text{iéme}}$ composant est utile) et comme Φ est une fonction non décroissante , si $\Phi(1_i, X) = 0$ alors $\Phi(1_i, \grave{X}) = 1$ pour tout $\acute{X} \geq X$ donc $\Phi(1_i, 1) = 1$ ■

Théorème 1.3.2 *Si Φ représente un système cohérent, alors $\Phi(0) = 0$*
Preuve. *le même principe que le théorème 1.3.1* ■

1.4 Les coupes et les liens

Définition 1.4.1 *Un lien est tout vecteur X_l pour lequel $\Phi(X_l) = 1$*

Définition 1.4.2 *une coupe est tout vecteur X_c pour lequel $\Phi(X_c) = 0$*

Un lien est donc un ensemble de composants dont le bon fonctionnement assure le bon fonctionnement du système. De façon duale, un ensemble suffisant de composants, qui, lorsqu'ils sont en panne mettent en panne le système est une coupe.

Dans les coupes et les liens, seuls sont intéressants les composants qui, en changeant d'état modifie l'état du système. Cela conduit à la notion de coupe et lien minimal.

Définition 1.4.3 *Si* $\Phi(Y) = 1$ *et pour chaque vecteur* $X < Y$, $\Phi(X) = 0$, *alors le vecteur Y est un lien minimal de* Φ.

Définition 1.4.4 *Si* $\Phi(Z) = 0$ *et pour chaque vecteur* $X > Z$, $\Phi(X) = 1$, *alors* Z *est une coupe minimale de* Φ.

Définition 1.4.5 *F**onction duale :**Etant donnée la fonction* Φ, *on définit sa fonction duale, notée* $\Phi^D(X)$, *comme suit :* $\Phi^D(X) = 1 - \Phi(1 - X)$

exemple 1.4.1 *Le dual d'un système en série est un système en parallèle.*

exemple 1.4.2 *Le dual d'un système en parallèle est un système en série*

1.5 Fonction de fiabilité

Le terme "fiabilité" est un néologisme introduit dans les années soixante pour traduire le terme anglo-saxon "Reliability". La Commission Electronique Internationale donne à la fiabilité la définition suivante : *"Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée."*

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés qui nous seront utiles dans la suite.

1.6 Fonction de fiabilité en temps continu

Définition 1.6.1 *Soit X une variable aléatoire désignant la durée de vie d'un système, sa fonction de répartition* $F(t) = \Pr(X \leq t)$

Si F est absolument continue, la variable aléatoire X possède une fonction de densité de probabilité f *alors :*

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\Pr(t < x < t + \triangle t)}{\triangle t}$$

Définition 1.6.2 *La fonction complémentaire de* F , *notée* $\bar{F}$, *est appelée fonction de survie ou fiabilité du système notée* $R(t)$, *soit :*

$$R(t) = \bar{F}(t) = 1 - F(t) = \Pr(X > t) = \int_t^{+\infty} f(u)du$$

ainsi nous avons $R(0) = 1,\ R(+\infty) = 0.$

Remarque 1.6.1 *La fonction de fiabilité d'un système de n composants indépendants en série est donnée par :*

$$R_{sys}(t) = R_1(t) \times R_2(t) \times .... \times R_n(t)$$

La fonction de fiabilité d'un système de n composants indépendants en parallèle est donnée par :

$$R_{sys}(t) = 1 - (1 - R_1(t)) \times (1 - R_2(t)) \times .... \times (1 - R_n(t))$$

1.6.1 Taux de panne

Définition 1.6.3 *La fonction de panne (défaillance) d'un dispositif est la fonction, notée F, qui, à tout instant t* $(t \geq t_0)$*, associe la probabilité que la première panne apparaisse avant (ou à) l'instant t*

$$F : t \to F(t) = \Pr(T \leq t) = \Pr(T < t)$$

$$F(t_0) = 0 \ et \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$

F est la fonction de répartition de la variable aléatoire T et on a pour tout $t \geq t_0$

$$F(t) = 1 - R(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)dx$$

où f est la densité de probabilité de T

$$F'(t) = -R'(t) = f(t)$$

Définition 1.6.4 *Le taux de panne (le nombre de pannes par unité de temps) est définit comme suit :*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

Remarque 1.6.2 *Le taux de panne d'un système en série :*

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$$

Le taux de panne d'un système en parallèle :

$$\lambda(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k \prod_{k} (1 - R_i)}{(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i))}$$

Tel que :$\prod_{k}$ le produit de termes sauf k, f_k : la densité du composant numéro k.

1.6.2 Quelques lois des probabilités usuelles en fiabilité des systèmes :

Loi Exponentielle :

La loi exponentielle est de loin la plus utilisée en fiabilité des systèmes Un système dont le comportement stochastique est modélisé par une loi exponentielle est un système sans mémoire ou markovien, c'est à dire pour $t > 0$, $x > 0$, on a $\Pr(X > t + x \setminus X > t) = \Pr(X > x)$

Pour la loi exponentielle, nous avons, pour $x \geq 0$:
$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
$R(t) = e^{-\lambda t}$
$\lambda(t) = \lambda$

Cette loi modélise bien les composants électroniques, néanmoins, son utilisation dans d'autres domaines, par exemple pour modéliser les composants mécaniques ou les temps de répartition, n'est pas toujours justifiés.

Loi de Weibull :

Grâce aux formes très variées qu'elle peut prendre suivant les valeurs de ses paramètres, elle est utilisée dans plusieurs domaines en fiabilité des composants mécaniques.
$f(t) = \frac{\beta}{\eta^{\beta}}(t - \gamma)^{\beta - 1} \exp(-\frac{(t - \gamma)^{\beta}}{\eta})$

$R(t) = \exp\left\{-\frac{(t-\gamma)^{\beta}}{\eta}\right\}$

$\lambda(t) = \frac{\beta(t-\gamma)^{\beta}}{\eta^{\beta}}$

Où β, est le paramètre de forme, η le paramètre d'échelle et γ le paramètre de localisation, pour $\beta = 1$ et $\gamma = 0$ nous obtenons la loi exponentielle.

1.7 Fonction de fiabilité en temps discret

Il est intéressant de pouvoir calculer la fiabilité d'un système dans le temps discret car les calculs sont beaucoup plus simple à faire. Dans ce qui suit, nous allons donner d'abord la définition de la fiabilité dans le cas où le temps discret, et en suite les lois de quelques variables aléatoires discrètes.

Définition 1.7.1 *Rappelons que :*

$$\Phi(X) = \begin{cases} \textit{1 si le système fonctionne} \\ \textit{0 sinon.} \end{cases}$$

Soit Φ *une structure cohérente d'ordre n et*

$$X_i = \begin{cases} 1 \; si\ le\ i^{iéme}\ composant\ fonctionne \\ 0 \; sinon. \end{cases}$$

$$\Pr[X_i = 1] = p_i$$

où p_i est la fiabilité du $i^{ième}$ composant c'est à dire : la probabilité de bon fonctionnement du $i^{ième}$ composant

$$h(p) = \Pr[\Phi(X) = 1] = \Pr[la\ structure\ fonctionne] = E[\Phi(X)]$$

donc pour t fixé $R(t) = p$

1.7.1 Lois discrètes

Loi de Bernoulli

C'est la loi de la variable aléatoire X à valeurs $\{0, 1\}$ donnée par la relation suivante :

$\Pr(x) = p^{x}(1-p)^{1-x} \qquad , \quad x = 0, ..., 1$

Loi de Binomiale

C'est la loi de la variable aléatoire à valeur $A = \{0, 1, ..., n\}$ donnée par la relation suivante :

$\Pr(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad , x \in A$

1.8 Propriétés pratiques concernant la fonction de fiabilité

1.8.1 L'importance en fiabilité

Définition 1.8.1 *L'importance en fiabilité du composant i notée $I(i)$ est donnée par*

$$I(i) = \frac{\partial h}{\partial p_i} \text{ où } h = h(p_1, p_2, ..., p_n)$$

On remarque que l'importance en fiabilité du composant i mesure l'influence que provoquerait une variation de la fiabilité de ce dernier sur la fiabilité globale du système.

On voit alors qu'un composant est d'autant plus important dans le système que son importance I est grande c'est à dire qu'on retrouve bien la notion intuitive de départ.

A noter également que I, l'importance en fiabilité est une notion stochastique, prenant pleinement son sens lorsque l'on observe le système et sa fiabilité dans le temps.

Propriétés

a- $I(i) = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, p) - h(0_i, p)$

b- $h(p) = p_i I(i) - h(0_i, p)$

c- $h(p_i + \triangle, p) = \triangle I(i) + h(p)$

Preuve. (a) on utilise la décomposition pivotal $h(p_1, ..., p_n) = p_i h(1_i, p) + (1 - p_i) h(0_i, p)$

$h(p) = E(\Phi(X)) = \Pr(\Phi(X) = 1) = \Pr(\Phi(X) = 1, X_i = 1) + \Pr(\Phi(X) = 1, X_i = 0) = \Pr(\Phi(X) = 1/X_i = 1) \Pr(X_i = 1) + \Pr(\Phi(X) = 1/X_i = 1) \Pr(X_i = 0) = \Pr(\Phi(1_i, X) = 1) p_i + \Pr(\Phi(0_i, X) = 1)(1 - p_i)$

donc $\quad I(i) = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} = h(1_i, p) - h(0_i, p)$

(b) : devient évident en utilisant (a)
(c) : d'après (b) : $h(p_i + \triangle, p) = (p_i + \triangle)I(i) - h(0_i, p) = \triangle I(i) + h(p)$ ■

1.8.2 L'importance de structure

Comme son nom l'indique cette dernière, et contrairement à l'importance en fiabilité sera une notion purement déterministe ne faisant intervenir que la structure du système (taille, disposition des éléments et type de fonctionnement)

Nous verrons toutefois que dans un cadre très particulier les notions d'importance en structure et d'importance en fiabilité vont coincider.

Définition 1.8.2 *L'importance en structure d'un composant i notée $I_\Phi(i)$ est donnée par :*

$$I_\Phi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{X, x_i = 1\}} [\Phi(1_i, X) - \Phi(0_i, X)] = \frac{1}{2^{n-1}} \eta_\Phi(i)$$

2^{n-1} étant bien sur le nombre total de toutes les situations possibles pour $n-1$ composants restants d'être soit à l'état 0 soit à l'état 1.

Notons alors que $\eta_\Phi(i)$ comptabilise le nombre de situation où le composant i est déterminant pour le fonctionnement du système .

Caractérisation :

$I_\Phi(i)$ est la proportion qui mesure le nombre de fois où la panne (respectivement le fonctionnement) du système est due exclusivement à la panne (respectivement le fonctionnement) du composant i.

Chapitre 2

Estimation

2.1 Rappel

Introduction :

La procédure d'utilisation des informations obtenues à partir de l'échantillon qui permet de déduire des résultats concernant l'ensemble de la population est appelée estimation, l'échantillonnage est le passage de la population à l'échantillon, et l'estimation est le passage inverse de l'échantillon à la population, le graphique suivant montre, ainsi, cette relation

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow \text{ Echantillonnage } \searrow & \\ \text{Population} & & \text{Echantillon} \\ & \nwarrow \text{ Estimation } \swarrow & \end{array}$$

La valeur inconnue d'une population, à estimer à partir d'un échantillon est appelée un paramètre qui peut être une moyenne, un total, un pourcentage, un écart-type ou une variance.

Définition 2.1.1 *Estimer un paramètre, c'est chercher une valeur approcher en se basent sur les résultats obtenus d'un échantillon.*

2.1.1 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

L'estimation d'un paramètre quelconque θ est ponctuelle si l'on associe une seule valeur à l'estimateur $\hat{\theta}$ à partir des données observables sur un échantillon aléatoire. L'estimation par intervalle associe à un échantillon aléatoire, un intervalle $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ qui recouvre θ avec une certaine probabilité.

Estimation ponctuelle

Si la distribution de la variable aléatoire Xest connue, on utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi de probabilité. En revanche si la distribution n'est pas connue, on utilise la méthode des moindres carrés.

La méthode des moindres carrés Le principe de cette méthode consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et les estimations obtenus de l'estimateur, appliquons cette méthode pour construire un estimateur de μ, la moyenne de la population.

A partir d'un échantillon aléatoire de taille n prélevé d'une population de moyenne μ inconnue, on veut construire à l'aide de la méthode des moindres carrés un estimateur pour μ, notons l'estimation de μ par $\hat{\mu}$.

L'écart entre chaque observation x_i et l'estimation $\hat{\mu}$ est

$$Ecart = x_i - \hat{\mu}$$

Le carré des écarts est $(x_i - \hat{\mu})^2$ et pour l'ensemble des observations la somme des carrés des écarts que nous notons Q

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2$$

Nous cherchons la valeur de $\hat{\mu}$ qui permet de minimiser cette expression, on veut donc minimiser Q par rapport à $\hat{\mu}$. Les critères pour minimiser cette fonction sont : $\frac{dQ}{d\hat{\mu}} = 0, \frac{d^2Q}{d\hat{\mu}^2} > 0$

La dérivée de Q par rapport à $\hat{\mu}$ donne

$$\frac{dQ}{d\hat{\mu}} = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})$$

Egalant $\frac{dQ}{d\hat{\mu}}$ à 0, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu} = 0$ puis $\hat{\mu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X}$

La dérivée seconde, $\frac{d^2Q}{d\hat{\mu}^2} = \frac{d}{d\hat{\mu}}[-2\sum\limits^{n}(x_i - \hat{\mu})] = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(-1) = -2(-n) = 2n > 0$

Ce qui nous assure que $\hat{\mu} = \bar{X}$ minimise Q. L'estimateur $\bar{X}$ est l'estimateur des moindres carrés de μ.

La méthode du maximum de vraisemblance Estimer un paramètre par la méthode du maximum de vraisemblance, c'est proposer comme valeur de ce paramètre celle qui rend maximale la vraisemblance, à savoir la probabilité d'observer les données comme réalisation d'un échantillon de la loi.

Soit une population munie d'une distribution de probabilité quelconque $\Pr(x, \theta)$, qui dépend d'un paramètre, le vrai paramètre θ est inconnu

On tire un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ i i d de X, une observation de cet échantillon est notée $x_1, x_2, ..., x_n$.

La question qui se pose est comment estimer le vrai paramètre θ ?

L'idée générale de l'estimateur du maximum de vraisemblance consiste à choisir le paramètre qui maximise la vraisemblance de l'échantillon observé.

Qu'appelle-t-on une vraisemblance ?

La fonction vraisemblance notée $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$ est la distribution de probabilité d'une population de paramètre θ qui génère l'échantillon observé.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \Pr(x_1, x_2, ..., x_n / \theta)$$

Puisque les $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i i d, $\Pr(x_1, x_2, ..., x_n / \theta)$ est égale au produit de toutes les probabilités $\Pr(X_i = x_i) = \Pr(x_i, \theta)$ que X_i prend la valeur x_i

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \Pr(x_1, x_2, ..., x_n / \theta) = \Pr(x_1, \theta) \Pr(x_2, \theta) .... \Pr(x_n, \theta)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance noté EMV est la valeur du paramètre qui maximise cette fonction de vraisemblance.

$EMV\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ maximise $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$

$L(x_1, x_2, ..., x_n, \hat{\theta}_{MV}) = max_\theta L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$

$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = max_\theta \Pr(x_1, \theta) \Pr(x_2, \theta) .... \Pr(x_n, \theta)$

$L'EMV$ est donc la valeur du paramètre inconnu, dont il est le plus vraisemblable qu'il génère l'échantillon effectivement observé.

Remarque 2.1.1 *Si X est une variable aléatoire continue, la fonction de vraisemblance est déterminer à partir de la densité de probabilité* $f(x, \theta) = \Pr(x, \theta)$

Soit

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) .... f(x_n, \theta)$$

On notera que la valeur $\hat{\theta}$ obtenue dépend de l'échantillon elle en constitue une estimation particulière

Une condition nécessaire pour obtenue le maximum de $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$ est :

$$\frac{dL(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{d\theta} = 0, \frac{d^2L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{d\theta^2} < 0$$

ou

$$\frac{d\ \log L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{d\theta} = 0, \frac{d^2 \log L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{d\theta^2} < 0$$

$\log L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$ est une fonction croissante et aura sa valeur maximum pour la même valeur de θ qu'aurait la fonction vraisemblance.

Propriété des estimateurs du maximum de vraisemblance Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon aléatoire d'une distribution $f(x, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ soit $\hat{\theta}$ un estimateur du MV de θ, possède les propriétés suivantes :

-$\hat{\theta}$ est un estimateur convergent

-$\hat{\theta}$ est un estimateur M. A . N (Meilleur estimateur asymptotiquement Normal) c'est à dire : $\hat{\theta}$ converge en loi vers une distribution normal

$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \underset{n\to\infty}{\to} N(0, c^2)$ ou $c^2 = \frac{1}{x}$

-$\hat{\theta}$ est un estimateur efficace pour θ c'est à dire $\hat{\theta}'$ un autre estimateur de θ alors : $\text{var}(\hat{\theta}') \geq \text{var}(\theta)$

-$\hat{\theta}$ est fonction statistiques suffisante

-$\hat{\theta}$ est un estimateur invariant.

Estimation par intervalle de confiance

Contrairement à l'estimation ponctuelle, cette méthode consiste à construire un intervalle de confiance autour de l'estimateur $\hat{\theta}$ du paramètre θ, qui seuvent s'interprète comme une marge d'erreur.

Pour construire cet intervalle de confiance, nous procédons, en terme général, de la manière suivante :

A partir de la loi de distribution de l'estimateur $\hat{\theta}$, nous déterminons un intervalle calculé sur la base de l'échantillon tel que la probabilité soit importante qu'il englobe la vraie valeur du paramètre recherché.

Soit $\left[\hat{\theta} - l, \hat{\theta} + l\right]$ cet intrvalle et $(1-\alpha)$ la probabilité d'appartenance. Cette marge d'erreur l est donc liée au niveau α par la probabilité suivante :
Pr $\left[\hat{\theta} - l \leq \hat{\theta} \leq \hat{\theta} + l\right] = 1 - \alpha$
$(1-\alpha)$ est appelé niveau de confiance ou degré de confiance.

2.2 Estimation de la fonction de fiabilité à partir des résultats des essais

Ce chapitre fournit des différentes techniques mathématiques qui permettent de déterminer la valeur de la fiabilité du système et des ces composant. Pour t fixé les M composants suivent la loi binomiale de paramètre $R(t) = p$

2.2.1 La fonction de vraisemblance et l'estimateur du maximum de vraisemblance

Le but des essais est de trouver des estimations raisonnables de la fiabilité d'un système et de ces composants parce que dans la plus part des situations pratiques la vraie fiabilité n'est pas connue.

La fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est fondamentale pour déterminer la probabilité qu'un système fonctionne

On se donne les notations suivantes :

n_s : le nombre totale d'essai de système

x_s : le nombre des cas de fonctionnement de système.

$n_s - x_s$: le nombre des cas de défaillance.

$h(p)$: la fonction de fiabilité de la structure donnée, où $h(p)$ est calculée a un point fixe dans le temps, donc La fonction de vraisemblance pour un système est donnée par :

$$L_{sys}(p) = \binom{n_s}{x_s} [h(p)]^{x_s} [1 - h(p)]^{n_s - x_s}$$

- La fonction de vraisemblance pour k composants est :

$$L_{comp}(p) = \prod_{i=1}^{k} L_i(p_i) \quad \text{où } L_i(p_i) = \binom{n_i}{x_i} (p_i)^{x_i} (1-p_i)^{n_i- x_i}$$

- La fonction de vraisemblance totale est :

$$\begin{aligned} L(p) &= (L_{sys}(p))(L_{comp}(p)) \\ &= \binom{n_s}{x_s} [h(p)]^{x_s}[1-h(p)]^{n_s-x_s} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} (p_i)^{x_i}(1-p_i)^{n_i-x_i} \end{aligned}$$

exemple 2.2.1 *supposant un système de 3 composants, un composant en série avec les deux autres en parallèle*

La fonction de fiabilité correspondante est :

$$h(p) = p_1[1-(1-p_2)^2]$$

On fait des essais individuels pour les composants et le système
-Composant 1 : on fait 100 essais et on obtient 95 cas de fonctionnement
-Composant 2,3 : on fait 20 essais et on obtient 19 cas de fonctionnement
Finalement sur le système on fait 50 essais et on obtient 45 cas de fonctionnement.

Les fonctions de vraisemblance sont :
$L_1(p_1) = \binom{100}{95}(p_1)^{95}(1-p_1)^5$
$L_{2,3}(p_2) = \binom{20}{19}(1-(1-p_2)^2)^{19}(1-(1-(1-p_2)^2))^1$
$L_{sys}(p) = \binom{50}{45}(p_1(1-(1-p_2)^2))^{45}(1-(p_1(1-p_2)^2))^5$
La fonction de vraisemblance totale est :
$L(p) = (L_{sys}(p))(L_{comp}(p))$
$= \binom{100}{95}\binom{20}{19}\binom{50}{45}(p_1)^{95}(1-p_1)^5(1-(1-p_2)^2)^{19}(1-(1-(1-p_2)^2))^1(p_1(1-(1-p_2)^2))^{45}(1-(p_1(1-p_2)^2))^5$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Une méthode d'estimer les paramètres, est la méthode du maximum de vraisemblance, l'EMV est le vecteur $p^* = (p^*, p^*........p^*)$, ce vecteur maximise les valeurs de $L(p)$

exemple 2.2.2 *Considérons un système d'un seul composant, et on fait* 5 *essais, on obtient* 3 *cas de fonctionnement donc :*

$L(p) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = \binom{5}{3}(p^5 - 2p^4 + p^3)$
$\dfrac{\partial\ L(p)}{\partial\ p} = \binom{5}{3}(5p^4 - 8p^3 + 3p^2)$
$\dfrac{\partial\ L(p)}{\partial\ p} = 0 \Rightarrow p = 0,6$
Pour ($p = 0$ *et* $p = 1$) $L(p) = 0$ donc $p = 0,6$ maximise $L(p)$ alors l'EMV est $p = 0,6$

Remarque 2.2.1 *Si on a un système de k composants en série ou bien en parallèle donc on a k équations de k inconnus, pour trouver l'EMV on utilise la méthode du gradient.*

La méthode de gradient Si $L(p)$ est une fonction différentiable, alors pour chaque $p = \acute{p}$ il existe un gradient de $L(p)$ noté $\nabla L(\acute{p})$. Le vecteur $\nabla L(\acute{p})$ a pour composantes les dérivées partielles de $L(p_1, p_2, ...p_n)$, calculées au point $p = \acute{p}$

$$\nabla L(\acute{p}) = \left[\frac{\partial L}{\partial\ p_1}, \frac{\partial L}{\partial\ p_2}, ..., \frac{\partial L}{\partial\ p_n}\right]$$

Pour obtenir l'EMV par la méthode du gradient on utilise les étapes suivantes :
Sélectionner un point initial arbitraire $p^\circ = (p_1, p_2, ...p_n)$
Trouver $\nabla L(p)$ en ce point et exprimer chaque p_j en fonction de t par la formule $p_j(t) = p^\circ{}_j + t\nabla L(p^\circ{}_j)\quad j = 1...n$
Trouver $t = t^*$ qui maximise $L(p_j)$ pour $t \geq 0$
Mettre $p = p^\circ + \nabla L(p^\circ)$
Retour à l'étape 2 et réitérer cette procédure

exemple 2.2.3 *Supposant un système de 2 composants en série*
On fait 10 essais sur chaque composants, on obtient 8 cas de fonctionement pour le composant 2

$L(p) = \binom{8}{10}\binom{7}{10} p_1^8 (1-p_1)^2\ p_2^7 (1-p_2)^3$
$\log L(p) = \log\binom{8}{10} + \log\binom{7}{10} + 8\log p_1 + 2\log(1-p_1) + 7\log p_2 + 3\log(1-p_2)$
$\dfrac{\partial\ \log L(p)}{\partial\ p_1} = \dfrac{8}{p_1} - \dfrac{2}{1-p_1}$
$\dfrac{\partial \log L(p)}{\partial\ p_2} = \dfrac{7}{p_2} - \dfrac{3}{1-p_2}$

Maintenant on applique la procédure de l'étape 6 :

1–Le point arbitraire est $(0.5, 0.5)$

2-$\nabla L(0.5, 0.5) = (12, 8)$ *et* $p_1(t) = 0.5 + 12t \quad . \quad p_2(t) = 0.5 + 8t$

3-Trouver la valeur du $t = t^*$ tel que $L(p)$ est maximale en substituant $p_1(t)$ et $p_2(t)$ dans la fonction de vraisemblance

donc $\log L(p) = \log \binom{8}{10} + \log \binom{7}{10} + 8\log(0.5 + 12t) + 2\log(1 - (0.5 + 12t)) + 7\log(0.5 + 8t) + 3\log(1 - (0.5 + 8t))$

$$\frac{\partial\ LnL(t)}{\partial t} = \frac{8 \times 12}{(0.5 + 12t)} - \frac{2 \times 12}{(0.5 - 12t)} + \frac{7 \times 8}{(0.5 + 8t)} - \frac{3 \times 8}{(0.5 - 8t)}$$
$$= \frac{96}{(0.5 + 12t)} - \frac{24}{(0.5 - 12t)} + \frac{56}{(0.5 + 8t)} - \frac{24}{(0.5 - 8t)} = 0$$

donc $t = \{0.025, 0.053\}$

Substituant cette valeur dans la fonction de vraisemblance originale

$t = 0.025 \Longrightarrow p_1(t)$ *et* $p_2(t)$ à l'intérieure de $[0, 1]$

$t^* = t = 0.025 \Longrightarrow p_1(t^*) = 0.8$

$p_2(t^*) = 0.7$

$\Longrightarrow L(p_1(t^*), p_2(t^*)) = 0.0805$

Les points de frontière sont $(1, 0.7), (0, 0.7), (0.8, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ et $(1, 1)$ substituant ces valeurs dans la vraisemblance tous les points de frontière donnent une valeur de vraisemblance 0

Donc l'EMV est $p = (0.8, 0.7)$

La méthode de bissection La méthode de bissection est une autre manière commune de déterminer l'EMV.

Quelle est la méthode de bissection et elle basée sur quoi

Une des premières méthodes numériques pour trouver la racine de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ est la méthode de bissection, la méthode est basée sur le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Une équation $f(x) = 0$ ou $f(x)$ est une fonction réelle continue , elle a au moins une racine entre x_l et x_u si $f(x_l).f(x_u) < 0$*

-si $f(x_l).f(x_u) < 0$, donc il peut avoir plus qu'une racine entre $x_l$et x_u

-si $f(x_l).f(x_u) > 0$, donc il ne peut avoir aucune racine entre $x_l$et x_u

D'après que la racine est mise entre deux points x_l et x_u , on peut trouver le point médiane, x_m entre x_l et x_u cela nous donne deux nouveaux intervalles

1- x_l et x_m

2- x_m et x_u

Donc

Pour trouver la racine de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de bissection on utilise les étapes suivantes :

1-Choisir $x_l$et x_u comme estimation de la racine tel que $f(x_l).f(x_u) < 0$

2-Estimer la racine, x_m de l'équation $f(x) = 0$ tel que : $x_m = \dfrac{x_l + x_u}{2}$ le point médiane entre x_l et x_u

3-Maintenant vérifions :

a- si $f(x_l).f(x_m) < 0$, alors la racine est entre x_l et x_m donc $x_l = x_l$ et $x_u = x_m$

b- si $f(x_l).f(x_m) > 0$, alors la racine est entre x_m et x_u donc $x_l = x_m$ et $x_u = x_u$

c- si $f(x_l).f(x_m)$ =0 alors la racine est x_m et on arrête ici

4- Trouvez la nouvelle estimation de la racine $x_m = \dfrac{x_l + x_u}{2}$

Trouvez l'approximation relative absolue de l'erreur

$\left|\dfrac{x_m^{nouveau} - x_m^{ancien}}{x_m^{nouveau}}\right| \times 100$ où

$x_m^{nouveau}$: l'estimation de la racine pour l'itération présente

x_m^{ancien} : l'estimation de la racine pour l'itération passé

exemple 2.2.4 *Reprenons l'exemlpe 2.2.3 :*

$p_1(t) = 0,5 + 12t$

$p_2(t) = 0,5 + 8t$

On détermine la plus grande valeur de t pour laquelle p_1 et $p_2 \in [0,1]$

On prend $t_l = 0$ et $t_u = \frac{1}{24}$ c'est la valeur de t qui rend $p_1(t)$ et $p_2(t)$ entre $[0,1]$

$t = 1/24 \Longrightarrow p_1 = 1 \in [0,1]$ et $p_2 = 0,83 \in [0,1]$

On a $f(t) = \dfrac{\partial \ln L(t)}{\partial t} = \dfrac{96}{(0,5+12t)} - \dfrac{24}{(0,5-12t)} + \dfrac{56}{(0,5+8t)} - \dfrac{24}{(0,5-8t)}$

$f(0) = 208$ et $f(1/24) = -\infty \Longrightarrow f(0) \times f(1/24) < 0 \Longrightarrow \exists\ t_m \in [0, \frac{1}{24}]$ tel que $t_m = \frac{1}{48}$

$f(\frac{1}{48}) = 44 \Longrightarrow$ on prend l'intervalle $[\frac{1}{48}, \frac{1}{24}]$ et on réitère la même procédure

itération	*intervalle*	$f(t_l)$	$f(t_u)$	t_m	$f(t_m)$	L
1	$[0, 1/24]$	208	$-\infty$	$1/48$	44	$1/24$
2	$1/48, 1/24]$	44	$-\infty$	$1/32$	-104	$1/48$
3	$[1/48, 1/32]$	44	-104	$5/192$	-13	$1/96$
4	$[1/48, 5/192]$	44	-13	$3/128$	18	$1/192$
5	$[3/128, 5/192]$	18	-13	$19/768$	3	$1/384$
6	$[19/768, 5/192]$	3	-13	$13/512$	-5	$1/768$
7	$[19/768, 13/512]$	3	-5	$77/3072$	-1	$1/1536$
8	$[19/768, 77/3072]$	3	-1	$51/2048$	1	$1/3072$

Tableau 1 : méthode de bissection résultat et itération

où L : le longueur de l'intervalle

L'itération finale nous donne un intervalle de longueur $1/6144$ et $t^* \in [0.02490, 0.02507]$

2.3 Relation entre les essais du système et de ses composants

On a 3 théorèmes qui sont forts et applicables parce qu' ils donnent un encadrement exacte de l'EMV.

Supposant que notre système est formé de k composants en série, si les essais sont réalisés sur le systéme et sur tous les composants individuellement, donc la fonction de vraisemblance est :

$$L(p) = \binom{n_s}{x_s}[p_1.......p_k]^{x_s}[1-p_1.......p_k]^{n_s-x_s}\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i}{x_s}(p_i)^{x_i}(1-p_i)^{n_i-\ x_i} \quad \text{(a)}$$

Théorème 2.3.1 *Si la fonction de vraisemblance est sous la forme de (a) alors :*

$$l'EMV_{sys} = \prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i \text{ est entre } \underset{i=1}{\overset{k}{\pi}}\frac{x_i}{n_i} \ et \ \frac{x_s}{n_s}$$

$$EMV = \begin{cases} \dfrac{x_s}{n_s} \text{ si l'essai réalisé sur le système} \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} \text{ si les essais sont réalisés sur les k composants} \end{cases}$$

Preuve. On a deux cas : $\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} < \frac{x_s}{n_s}$ *et* $\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} > \frac{x_s}{n_s}$

1^ier^ cas :$\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} > \frac{x_s}{n_s}$

supposons que $\prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i$ est à l'extérieure de $[\frac{x_s}{n_s}, \prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i}]$ donc on a aussi deux cas :

a/$\frac{x_s}{n_s} < \prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} < \prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i$

b/ $\prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i < \frac{x_s}{n_s} < \prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i}$

1^ier^ cas a : $\frac{x_s}{n_s} < \prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{n_i} < \prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i$:

Alors $\exists\ i$ tel que : $\frac{x_i}{n_i} < \hat{p}_i$ et soit $\hat{p}_{inouveau} = max\{\frac{x_i}{n_i}, \frac{x_s}{n_s} \times \frac{\hat{p}_i}{\prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i}\}$

On a $\frac{x_s}{n_s} < \prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i \Longrightarrow \frac{x_s}{n_s} \times \frac{\hat{p}_i}{\prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i} < \prod_{i=1}^{k}\hat{p}_i \times \frac{\hat{p}_i}{\prod_{i=1}^{k}\hat{p}_\mathrm{i}}$

$\Longleftrightarrow \frac{x_s}{n_s} \times \frac{\hat{p}_i}{\overset{k}{\underset{i=1}{\pi}}\hat{p}_i} < \hat{p}$ donc $\hat{p}_{inouveau} = \hat{p}_i$

Donc$\frac{x_i}{n_i} < \hat{p}_{inouveau} < \hat{p}_i$

D'après les suppositions, on remarque que :

$1 - \forall i \neq j$ les $\hat{p}_j$ restent les mêmes

$2 - \frac{x_i}{n_i} < \hat{p}_1.........\hat{p}_{inouveau} < \hat{p}_1.......\hat{p}_k$

$3 - L_{tot} = L_{comp}.L_{sys}$ *ou*

$L_{comp} = \prod_{i=1}^{k}\binom{n_j}{x_j}(p_j)^{x_j}(1-p_j)^{n_j - x_j}$ est concave en p_j est atteint son maximum en $\hat{p}_j = \frac{x_j}{n_j}$

$L_{sys} = \binom{n_s}{x_s} [\prod_{i=1}^{k} \hat{p}_j]^{x_s} [1 - \prod_{i=1}^{k} \hat{p}_j]^{n_s - x_s}$ est concave en $\prod_{i=1}^{k} p_j$ est atteint son maximum en $\prod_{i=1}^{k} \hat{p}_j = \frac{x_s}{n_s}$

et on a $\dfrac{x_i}{n_i} < \hat{p}_{inouveau} < \hat{p}_i$ donc la valeur de L_{cmp} au $\hat{p}_1, ..., \hat{p}_{inouveau}, ..., \hat{p}_k$ est plus grande que sa valeur au $\hat{p}_1, ..., \hat{p}_i, ..., \hat{p}_k$

et comme $\dfrac{x_s}{n_s} < \hat{p}_{inouveau} \prod_{i \neq j}^{k} \hat{p}_j < \prod_{i=1}^{k} \hat{p}_j$ donc L_{sys} en $\hat{p}_{inouveau} \prod_{i \neq j}^{k} \hat{p}_j$ est plus grande que L_{sys} en $\prod_{i=j}^{k} \hat{p}_j$

Ces faits contredisent le fait que $L_{tot} = L_{comp}.L_{sys}$ atteint son maximum à $\hat{p}_1, ..., \hat{p}_i, ..., \hat{p}_k$ donc $\prod_{j=1}^{k} p_j < \prod_{j=1}^{k} \dfrac{x_j}{n_j}$

Le même principe pour le 1^{ier}cas b et le 2^{iem}cas ■

Théorème 2.3.2 *Si on fait les essais sur un système de k composants (en parallèle) et sur ses composants où les essais suivent des distribution binomiales*

alors :

$$1 - \hat{P} = (1 - \hat{p}_1) \times .... \times (1 - \hat{p}_k)$$

doit être entre $\prod_{i=1}^{k} (1 - \dfrac{x_i}{n_i})$ *et* $(1 - \dfrac{x_s}{n_s})$

Preuve. la fonction du vraisemblance générale pour un système en parallèle d'ordre k est :

$$L(p) = \binom{n_s}{x_s} [h(p)]^{x_s} [1 - h(p)]^{n_s - x_s} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} (p_i)^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}$$

$$= \binom{n_s}{x_s} [1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i)]^{x_s} [1 - (1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i))]^{n_s - x_s} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} (p_i)^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}$$

$$= \binom{n_s}{x_s} [1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - p_i)]^{x_s} [\prod_{i=1}^{k} (1 - p_i)]^{n_s - x_s} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} (p_i)^{x_i} (1 - p_i)^{n_i - x_i}$$

On a $\binom{n_s}{x_s} = \binom{n_s}{n_s - x_s}$ (propriété de combinaison) et soit $q_i = 1 - p_i$

$$L(p) = \binom{n_s}{n_s - x_s}[1 - \prod_{i=1}^{k} q_i]^{x_s}[\prod_{i=1}^{k} q_i]^{n_s - x_s} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{n_i - x_i}(1 - q_i)^{x_i}(q_i)^{n_i - x_i}$$

D'après théorème 2.3.1 : $\prod_{i=1}^{k} q_i$ est entre $\prod_{i=1}^{K} \frac{n_i - x_i}{n_i}$ et $\frac{n_s - x_s}{n_s}$

supposant $\frac{n_1 - x_1}{n_1} \times ...... \times \frac{n_k - x_k}{n_k} < \hat{q}_1 \times .... \times \hat{q}_k < \frac{n_s - x_s}{n_s}$

Maintenant on substituant $1 - \hat{q}_i$ par $\hat{p}_i$ pour tous i

$\frac{n_1 - x_1}{n_1} \times .... \times \frac{n_k - x_k}{n_k} < (1 - \hat{p}_1) \times .... \times (1 - \hat{p}_k) < \frac{n_s - x_s}{n_s} \Longleftrightarrow$

$(1 - \frac{x_1}{n_1}) \times ...... \times (1 - \frac{x_k}{n_k}) < (1 - \hat{p}_1) \times ..... \times (1 - \hat{p}_k) < (1 - \frac{x_s}{n_s})$

et si on prend $\frac{n_1 - x_1}{n_1} \times .... \times \frac{n_k - x_k}{n_k} > \hat{q}_1.....\hat{q}_k > \frac{n_s - x_s}{n_s}$

on obtient $(1 - \frac{x_1}{n_1}) \times .... \times (1 - \frac{x_k}{n_k}) > (1 - \hat{p}_1) \times ..... \times (1 - \hat{p}_k) > (1 - \frac{x_s}{n_s})$

alors $(1 - \hat{p}_1) \times ..... \times (1 - \hat{p}_k)$ est entre $\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{x_i}{n_i})$ et $(1 - \frac{x_s}{n_s})$ ∎

Corollaire 2.3.1 *Dans une structure de k composants en parallèle , le EMV de la fiabilité de ce système*

$$h(p) = 1 - (1 - p_1) \times ..... \times (1 - p_k)$$

est entre $\frac{x_s}{n_s}$ *et* $1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{x_i}{n_i})]$

Preuve. La fonction du fiabilité d'une structure en parallèle est : $h(p) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)$

On a d'après théorème 2.3.2 :

$\prod_{i=1}^{k}(1 - p_i)$ et entre $\prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{x_i}{n_i})$ *et* $(1 - \frac{x_s}{n_s})$

Supposant

$(1 - \frac{x_1}{n_1}) \times .... \times (1 - \frac{x_k}{n_k}) < (1 - \hat{p}_1) \times ..... \times (1 - \hat{p}_k) < (1 - \frac{x_s}{n_s})$ (I)

En multiplie (I) par (-1) on obtient :

$-(1 - \frac{x_1}{n_1}) \times .... \times (1 - \frac{x_k}{n_k}) > -(1 - \hat{p}_1) \times ..... \times (1 - \hat{p}_k) > -(1 - \frac{x_s}{n_s})$

On ajoute 1 à chaque terme :

$1-(1-\frac{x_1}{n_1})\times ....\times(1-\frac{x_k}{n_k}) > 1-(1-\hat{p}_1)\times .....\times(1-\hat{p}_k) > 1-(1-\frac{x_s}{n_s})$

$\Leftrightarrow 1-\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{x_i}{n_i}) > h(\hat{p}) > \frac{x_s}{n_s}$

et si on prend

$(1-\frac{x_1}{n_1})\times ....\times(1-\frac{x_k}{n_k}) > (1-\hat{p}_1)\times .....\times(1-\hat{p}_k) > (1-\frac{x_s}{n_s})$

on obtient :

$1-\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{x_i}{n_i}) < h(\hat{p}) < \frac{x_s}{n_s}$

donc $h(p) = 1-(1-p_1)\times .....\times(1-p_k)$ *est entre* $\frac{x_s}{n_s}$ *et* $1-\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{x_i}{n_i})]$

■

Lemme 2.3.1 *Si la fonction de vraisemblance est sous la forme suivante* $L_{tot}(p) = (L_{sys}(p))(L_{comp}(p))$ *alors* $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_i^2} \leq 0$ *pour tout* i *.*

Lemme 2.3.2 *Si* $L = \prod_{j=1}^{n} L_j$ *oú chaque* L_j *représente une fonction de vraisemblance (*L_{comp} *,* L_{sys}*) où* $\frac{\partial^2 \ln L_j}{\partial p_i^2} \leq 0\ \forall j$ *et si* $\Pr$ *est fixé pour* $r \neq i$ *, alors le* p_i *qui maximise* L *se trouve dans la rangée de* p_i *qui maximise le* L_j

Théorème 2.3.3 *Si on fait l'essai sur un système cohérent et sur ses composants tel que :*

$$L(p) = (L_{sys}(p))(L_{comp}(p)) = \binom{n_s}{x_s}\ [1-h(p)]^{x_s}[1-(1-h(p)]^{n_s-x_s}\prod_{i=1}^{k} L_i(p_i)$$

Alors : $h(p)$ *se trouve entre* $\frac{x_s}{n_s}$ *et* $h(x/n_1, ..., x_k/n_k)$

Preuve. On a deux cas $\frac{x_s}{n_s} < h(\frac{x_1}{n_1}, ..., \frac{x_k}{n_k})$ et $\frac{x_s}{n_s} > h(\frac{x_1}{n_1}, ..., \frac{x_k}{n_k})$

Pour démontrer que h se trouve entre ces deux termes on procéde par contradiction

Cas 1 : $\frac{x_s}{n_s} < h(\frac{x_1}{n_1}, ..., \frac{x_k}{n_k}) < h(\hat{p}_1, ..., \hat{p}_k)$

Comme que h est une fonction cohérente, $\exists j$ tell que $\frac{x_j}{n_j} < \hat{p}_j$

Soit $\hat{p}_r{}^* = \hat{p}_r$ pour $r \neq j$

Rappelons que $L_{tot} = (L_{comp})(L_{sys})$

Rappelez que les $\hat{p}_j^*$ qui maximise L_{sys} fait possible tel que $h(\hat{P}^*)$ prés de $\frac{x_s}{n_s}$

Cas 1-1 :

Supposant qu'il existe une valeur de $\hat{p}_j^*$ que $h(\hat{P}^*) = \frac{x_s}{n_s}$, alors par supposition que $\frac{x_s}{n_s} < h(\hat{p}_1, ..., \hat{p}_k)$, il suit que $h(\hat{P}^*) < h(\hat{p}_1, ..., \hat{p}_k)$, ce qui implique $\hat{p}_j^* = \hat{p}_j$, mais lemme 2.3.2 est une contradiction avec le choix de j, où $\frac{x_j}{n_j} < \hat{p}_j$, d'où la contradiction.

Cas 1-2 :

Maintenant supposant $h(\hat{P}^*) = \frac{x_s}{n_s}$ aucune solution pour $\hat{p}_j^*$ entre 0 et 1 (c'est à dire si la solution existe , il est sur la limite). Par supposition, $\frac{x_s}{n_s} < h(\hat{p}_1, ..., \hat{p}_k)$, et si $\hat{p}_j^* = \hat{p}_j$, alors $\frac{x_s}{n_s} < h(\hat{P}^*)$, par supposition, ces deux ne seront jamais égal, on peut inférer par la continuité de h, que $\frac{x_s}{n_s} < h(\hat{P}^*)$ pour tout $\hat{p}_j^*$, et d'aprés lemme 2.3.2 les $\hat{p}_j$ sont entre 0 et $\frac{x_j}{n_j}$, donc contradiction avec le choix de j, d'ici nous atteignons une contradiction basée sur ces suppositions aussi. ■

Chapitre 3

Estimation des paramètres de la loi exponentielle

Traitons dans ce chapitre l'estimation des paramètres de la loi exponentielle dans le cas des données censurées.

3.1 Rappel

3.1.1 La censure

On trouve principalement deux phénomènes dont les effets se traduisent par des données incomplètes ou observées partiellement dans les applications en fiabilité et en durée de vie. Elle correspondent effectivement à deux situations distinctes : la censure et la troncature. Afin d'expliquer brièvement ces notions reprenons l'exemple cité dans [3], en page 152. Soient des données représentant la durée de survie parmi un groupe constitué d'insulino-dépendants au Danemark. On peut y trouver, distingués par tranche. d'âges et par sexe, les effectifs des personnes diabétiques et vivantes au 1^{er} juillet 1973, ainsi que les effectifs des décès durant la période juillet 1973 et décembre 1981. Supposons que l'on souhaite étudier la mortalité comme fonction de la durée de l'insulino- dépendance. Il est alors impossible de savoir, pour un patient donné, la date exacte du début de la maladie. L'unique information apportée est son antériorité au début de l'étude. Les distributions qu'il est judicieux d'étudier ici sont données par la loi de X conditionnellement à X>V, où V représente le temps écoulé entre l'apparition de la maladie et le début du traitement, et X représente la durée de vie du patient. En effet, il se peut qu'il y ait des patients diabétiques non considérés dans l'étude puisque décédés à son début, mais pour lesquels le début de la maladie est postérieur à certaines personnes incluses dans l'étude. Le traitement des données sans tenir compte de ce fait sera biaisé puisqu'il favorise ici les temps de maladie longs. Ces données sont tronquées à gauche car les temps de maladie inférieurs à V ne sont pas observables. Pour la distinguer de la censure, prenons l'exemple d'une étude des babouins au Kenya issu de [5] , page 24. Ces animaux présentent la particularité de dormir dans les arbres et mettent pied à terre dans la journée (fait répertorié uniquement si au moins la moitié des membres du groupe est descendue), évenement duquel on souhaite répertorier la durée ainsi que les dates. Il se peut que l'observateur en charge de la mission arrive une fois que la communauté est déjà descendue, il ne peut alors qu'affirmer que la descente a eu lieu avant une certaine date. Il s'agit d'une censure à gauche.

Censure à droite

Supposons que l'on souhaite observer l'effet d'un traitement donnée sur une population donnée d'individus. Il se peut que certains abondonnent l'étude. Radier ces individus des données serait biaiser le traitement statistique, la censure dite à droite permet de modéliser l'information exacte apportée. Il s'agit d'attribuer une valeur c à la durée jusqu'à l'abandonce de l'étude par l'individu considéré, qui sera modélisée par la réalisation de la variable aléatoire C, dite de censure. La valeur alors observée par l'individu démissionnaire nous est simplement donnée par $x = c \wedge t$, où t représente la réalisation de la durée de vie. De surcoît, x n'est pas la seule information apportée. En effet, il est en général possible de savoir s'il y a eu censure ou non par la connaissance de la valeur de $\delta = \mathbf{1}_{\{x \leq c\}}$. Il existe cependant des études où l'information sur δ peut manquer.

Modèle statistique

Soit un n- échantillon d'individus soumis à une censure à droite. Les observations sont alors constituées de variables aléatoires $(X_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$, où δ_i est la fonction indicatrice de l'observatiion réelle de l'évenement d'intérêt,T_i et C_i sont respectivement les variables aléatoires de durée de vie et de censure, $X_i = C_i \wedge T_i$ est la durée effectivement observée.
Dans ce cas les observations sont $(X_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$, et l'on sait que

$X_i = T_i$ si $\delta_i = 1$
$X_i < T_i$ si $\delta_i = 0$

Il est impossible d'effectuer un traitement statistique sans hypothèse sur la censure. Prenons alors pour acquis le fait que pour tout instant t, l'expérience des données de survie n'est en aucun cas affectée par la censure, ou même les expériences passées.

Vraisemblance

Supposons que T et C sont deux variables aléatoires indépendantes et continues de fonction de survie $R(t)$ et $G(t)$ respectivement. Supposons en plus que $G(t)$ ne dépend pas des paramètres de $R(t)$.

Dans ce cas on a $X = \min(C,T)$, alors pour $\delta = 0$, $\Pr(X = t, \delta = 0) = \Pr(C = t, T > t) = g(t)R(t)$
Pour $\delta = 1$, $\Pr(X = t, \delta = 1) = \Pr(T = t, T \leq C) = f(t)G(t)$

$\Pr(t,\delta) = (f(t)G(t))^{\delta}(R(t)g(t))^{1-\delta}$.

Pour un échantillon $(T_i, \delta_i)_{i=1,2,\dots,n}$, la fonction de vraisemblance s'écrit comme suit :

$$L = \prod_{i=1}^{n} \Pr(t_i, \delta_i) = \prod_{i=1}^{n} (f(t_i)G(t_i))^{\delta_i}(R(t_i)g(t_i))^{1-\delta_i}$$

$$= \Psi \prod_{i=1}^{n} (f(t_i))^{\delta_i}(R(t_i))^{1-\delta_i} \text{ où } \Psi = \prod_{i=1}^{n} (G(t_i))^{\delta_i}(g(t_i))^{1-\delta_i}$$

3.2 Le cas exponentiel

on a $f(t) = \eta \exp(-\eta t)$

donc $L(\theta) = \Psi \prod_{i=1}^{n} (\lambda \exp(-\lambda t_i))^{\delta_i}(\exp(-\lambda t_i))^{(1-\delta_i)}$

3.2.1 Système série

On prend un système de M composants en série

$F(t) = 1 - R(t)$

$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(1 - R(t))$ avec $R(t) = \prod_{j=1}^{M} R_j(t)$

$$f(t) = \frac{d}{dt}(-\prod_{j=1}^{M} R_J(t)) = \frac{d}{dt}(-R_1(t)R_2(t).....R_M(t)) = f_1(t)R_2(t).....R_M(t)+$$

$$R_1(t)f_2(t)....R_M(t) + ... + f_M(t)R_1(t)....R_{m-1}(t) = \sum_{i=1}^{M} f_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} R_j(t)$$

La fonction de vraisemblance :

$$L(\theta) = \Psi \prod_{i=1}^{N} [f(t_i)]^{\delta_i} R[(t_i)]^{1-\delta_i}$$

On a $L(\theta) = \Psi \prod_{k=1}^{N} [f(t_k)]^{\delta_k} R[(t_k)]^{1-\delta_k} = \Psi \prod_{k=1}^{N} [\sum_{i=1}^{M} f_i(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} R_j(t_k)]^{\delta_k} [\prod_{j=1}^{M} R_j(t_k)]$

$$\log L(\theta) = \log \Psi + \sum_{k=1}^{N} \{[\delta_k \log(\sum_{i=1}^{M} f_i(t_k) \mathop{\pi}_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} R_j(t_k))] + (1-\delta_k) \sum_{j=1}^{M} \log R_j(t_k)\}$$

Si on suppose que les durées de vie suivent la loi exponentielle de paramètre $\theta = (\eta_1, \eta..........\eta_M)$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \{ \frac{\partial f_1(t_k)}{\partial \eta_1} \prod_{j=2}^{M} R_J(t_k) + \frac{\partial R_1(t_k)}{\partial \eta_1} \sum_{i=2}^{M} f_i(t) \prod_{\substack{j=2 \\ i\neq j}}^{M} R_j(t_k)\} / f(t_k) +$$

$$(1-\delta_k) \frac{\partial R_1(t_k)}{\partial \eta_1} / R(t_k)]$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_2} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \{ \frac{\partial f_2(t_k)}{\partial \eta_2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{M} R_J(t_k) + \frac{\partial R_2(t_k)}{\partial \eta_2} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{M} f_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j\neq 2}}^{M} R_j(t_k)\} / f(t_k) +$$

$$(1-\delta_k) \frac{\partial R_2(t_k)}{\partial \eta_2} / R(t_k)]$$

.

.

.

.

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_M} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \{ \frac{\partial f_M(t_k)}{\partial \eta_M} \prod_{j=1}^{M-1} R_j(t_k)$$

$$+ \frac{\partial R_M(t_k)}{\partial \eta_M} \sum_{i=1}^{M-1} f_i(t_K) \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M-1} R_j(t_k)\} / f(t_k) + (1-\delta_k) \frac{\partial R_M(t_k)}{\partial \eta_M} / R(t_k)]$$

Et comme $R(t) = \prod_{j=1}^{M} R_j(t) = \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)$

$f(t) = \sum_{i=1}^{M} f_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M} R_j(t) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)$

donc

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \eta_1 t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)$

$+(-t_k \sum_{j=2}^{M} \eta_j) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k)) + (1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_1 t_k)/R(t_k)]$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_2} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \eta_2 t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)$

$+(-t_k \sum_{\substack{j=1 \\ j=2}}^{M} \eta_j) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k)) + (1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_2 t_k)/R(t_k)]$

.
.
.
.

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_M} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \eta_M t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)+$

$(-t_k \sum_{j=1}^{M-1} \eta_j) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k)) + (1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_M t_k)/R(t_k)]$

$\Longleftrightarrow$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k))+$

$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_1 t_k)/R(t_k)]$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_2} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k))+$

$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_2 t_k)/R(t_k)]$

.
.
.
.

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_M} = \sum_{k=1}^{N} [(\delta_k \{(1 - \sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k) \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j t_k)\}/f(t_k))+$

$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta_M t_k)/R(t_k)]$

3.2.2 Système en parallèle

$R(t) = 1 - \prod_{j=1}^{M}(1 - R_j(t))$.

$F(t) = 1 - R(t)$.

$f(t) = \dfrac{\partial F(t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\prod_{j=1}^{M}(1 - R_j(t)))$

$= \dfrac{\partial}{\partial t}((1 - R_1(t))(1 - R_2(t))(1 - R_3(t))....(1 - R_M(t)))$

$= f_1(t)(1 - R_2(t))....(1 - R_M(t)) + f_2(t)(1 - R_1(t))(1 - R_3(t))....(1 - R_M(t))... + f_M(t)(1 - R_1(t))(1 - R_2(t))...(1 - R_{M-1}(t))$

$= \sum_{i=1}^{M} f_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M}(1 - R_j(t))$

$L(\theta) = \Psi \prod_{k=1}^{N} [f(t_k)]^{\delta_k} [R(t_k)]^{1-\delta_k}$

$= \Psi \prod_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} [f_i(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M} (1 - R_j(t))]^{\delta_k} [1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - R_j(t_k))]^{1-\delta_k}$

$\log L(\theta) = \log \Psi + \sum_{k=1}^{N} \{\delta_k \log[\sum_{i=1}^{M} f_i(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M} (1 - R_j(t_k))] + (1 - \delta_k) \log(1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - R_j(t_k)))\}$

Si on suppose que les durées de vie suivent la loi exponentielle de paramétre $\theta = (\eta_1, \eta_2...........\eta_M)$

$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_1} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \{ \dfrac{\partial f_1(t_k)}{\partial n_1} \prod_{j=2}^{M} (1 - R_j(t_k)) -$

$\dfrac{\partial R_1(t_k)}{\partial n_1} [\sum_{i=2}^{M} f_i(t_k) \underset{\substack{j=2 \\ i \neq j}}{\overset{M}{\pi}} (1 - R_j(t_k))]\} / f(t_k)] +$

$\sum_{k=1}^{N} [(1 - \delta_k) \dfrac{\partial R_1(t_k)}{\partial n_1} (\prod_{j=2}^{M} (1 - R_j(t_k)))] / R(t_k)$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_2} = \sum_{k=1}^{N} \delta_k [\{ \frac{\partial f_2(t_k)}{\partial n_2} \prod_{\substack{j=1 \\ J \neq 2}}^{M} (1 - R_j(t_k)) -$$

$$\frac{\partial R_2(t_k)}{\partial n_2} [\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq 2}}^{M} f_i(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j \neq 2}}^{M} (1 - R_j(t_k))]\} / f(t_k)] +$$

$$\sum_{k=1}^{N} [(1 - \delta_k) \frac{\partial R_2(t_k)}{\partial n_2} (\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq 2}}^{M} (1 - R_j(t_k)))] / R(t_k)$$

.
.
.
.

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_M} = \sum_{k=1}^{N} \delta_k [\{ \frac{\partial f_M(t_k)}{\partial n_M} \prod_{j=1}^{M-1} (1 - R_j(t_k)) -$$

$$\frac{\partial R_M(t_k)}{\partial n_M} [\sum_{i=1}^{M-1} f_i(t_k) \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M-1} (1 - R_j(t_k))]\} / f(t_k)] +$$

$$\sum_{k=1}^{N} [\, (1 - \delta_k) \frac{\partial R_M(t_k)}{\partial n_M} (\prod_{j=1}^{M-1} (1 - R_j(t_k)))] / R(t_k)$$

Système 1-sur-2

$$R(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$$
$$f(t_k) = -R'(t_k) = f_1(t_k)(1 - R_2(t_k)) + f_2(t_k)(1 - R_1(t_k))$$
$$L(\theta) = \Psi \prod_{k=1}^{N} [f(t_k)]^{\delta_k} [R(t_k)]^{1-\delta_k}$$

$$\log L(\theta) = \log \Psi + \sum_{k=1}^{N} \{ \delta_k \log [f_1(t_k)(1 - R_2(t_k)) + f_2(t_k)(1 - R_1(t_k))] + (1 - \delta_k) \log (1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))) \}$$

Si on suppose que les dureés de vie suivent la loi exponentielle de paramètre $\theta = (\eta_1, \eta_2)$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_1} = \sum_{k=1}^{N} \left[\delta_k \left\{ \frac{\partial f_1(t_k)}{\partial n_1} (1 - R_2(t_k)) - \frac{\partial R_1(t_k)}{\partial n_1} f_2(t_k) \right\} / f(t_k) \right] +$$

$\sum_{k=1}^{N}\left[(1-\delta_k)\frac{\partial R_1(t_k)}{\partial n_1}(1-R_2(t_k))/R(t_k)\right]$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_2}=\sum_{k=1}^{N}\left[\delta_k\left\{\frac{\partial f_2(t_k)}{\partial n_2}(1-R_1(t_k))-\frac{\partial R_2(t_k)}{\partial n_2}f_1(t_k)\right\}/f(t_k)\right]+$

$\sum_{k=1}^{N}\left[(1-\delta_k)\frac{\partial R_2(t_k)}{\partial n_2}(1-R_1(t_k))/R(t_k)\right]$

Alors

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_1}=\sum_{k=1}^{N}[\delta_k((1-\eta_1 t_k)\exp(-\eta_1 t_k)(1-\exp(-\eta_2 t_k))-$

$(-t_k\exp(-\eta_1 t_k))/f(t_k)]+$

$\sum_{k=1}^{N}[(1-\delta_k)(-t_k\exp(-\eta_1 t_k))(1-\exp(-\eta_2 t_k)/R(t_k)]$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial n_2}=\sum_{k=1}^{N}[\delta_k((1-\eta_2 t_k)\exp(-\eta_2 t_k)(1-\exp(-\eta_1 t_k))-$

$(-t_k\exp(-\eta_2 t_k))/f(t_k)]+$

$\sum_{k=1}^{N}[(1-\delta_k)(-t_k\exp(-\eta_2 t_k))(1-\exp(-\eta_1 t_k)/R(t_k)]$

où

$f(t_k)=(\eta_1\exp(-\eta_1 t_k)+\eta_2\exp(-\eta_2 t_k)-2(\eta_1+\eta_2)\exp(-(\eta_1+\eta_2)t_k))$

$R(t_k)=\exp(-\eta_1 t_k)+\exp(-\eta_2 t_k)-\exp(-(\eta_1+\eta_2)t_k))$

3.2.3 Système 2-sur-3

$R(t)=R_1(t)\times R_2(t)+R_1(t)\times R_3(t)+R_2(t)\times R_3(t)-2R_1(t)\times R_2(t)\times R_3(t)$

$f(t)=-R'(t)=f_1(t)(R_2(t)+R_3(t)-2R_2(t)\times R_3(t))+f_2(t)(R_1(t)+R_3(t)-2R_1(t)\times R_3(t))+f_3(t)(R_1(t)+R_2(t)-2R_1(t)\times R_2(t))$

$L(\theta)=\Psi\underset{k=1}{\overset{N}{\pi}}[f(t_k)]^{\delta_k}R[(t_k)]^{1-\delta_k}$

$\log L(\theta)=\log\Psi+\sum_{k=1}^{N}\{[\delta_k\log(\sum_{i=1}^{M}f_i(t_k)\underset{\substack{j=1\\ i\neq j}}{\overset{M}{\pi}}R_j(t_k))]+(1-\delta_k)\sum_{j=1}^{M}\log R_j(t_k)\}$

Si on suppose que les dureé de vie suivent la loi exponentielle de paramètre $\theta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1}=\sum_{k=1}^{N}[\delta_k\frac{\partial f(t_k)}{\partial \eta_1}/f(t_k)+(1-\delta_k)\frac{\partial R(t_k)}{\partial \eta_1}/R_1(t_k)]$

$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1}=\sum_{k=1}^{N}[\delta_k\{\frac{\partial f_1(t_k)}{\partial \eta_1}(R_2(t_k)+R_3(t_k)-2R_2(t)\times R_3(t_k))+$

$\dfrac{\partial R_1(t_k)}{\partial \eta_1}(f_2(t_k) + f_3(t_k) - 2f_2(t_k)R_3(t_k) - 2f_3(t_k)R_2(t_k))\}/f(t_k)+$
$(1-\delta_k)\{\dfrac{\partial R_1(t_k)}{\partial \eta_1}(R_2(t) + R_3(t) - 2R_2(t) \times R_3(t))\}/R(t_k)]$
$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_2} = \sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{\dfrac{\partial f_2(t_k)}{\partial \eta_2}(R_1(t_k) + R_3(t_k) - 2R_1(t) \times R_3(t_k))+$
$\dfrac{\partial R_2(t_k)}{\partial \eta_2}(f_1(t_k) + f_3(t_k) - 2f_1(t_k)R_3(t_k) - 2f_3(t_k)R_1(t_k))\}/f(t_k)+$
$(1-\delta_k)\{\dfrac{\partial R_2(t_k)}{\partial \eta_2}(R_1(t) + R_3(t) - 2R_1(t) \times R_3(t))\}/R(t_k)]$
$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_3} = \sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{\dfrac{\partial f_3(t_k)}{\partial \eta_3}(R_1(t_k) + R_2(t_k) - 2R_1(t) \times R_2(t_k))+$
$\dfrac{\partial R_3(t_k)}{\partial \eta_3}(f_1(t_k) + f_2(t_k) - 2f_1(t_k)R_2(t_k) - 2f_2(t_k)R_1(t_k))\}/f(t_k)+$
$(1-\delta_k)\{\dfrac{\partial R_3(t_k)}{\partial \eta_3}(R_2(t) + R_1(t) - 2R_1(t) \times R_2(t))\}/R(t_k)$
Donc
$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_1} = \sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{(1-\eta_1 t_k)\exp(-\eta_1 t_k)(\exp(-\eta_2 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) -$
$2\exp(-(\eta_2+\eta_3)t_k)) + (-t_k \exp(-\eta_1 t_k))(\eta_2 \exp(-\eta_2 t_k)+$
$\eta_3 \exp(-\eta_3 t_k) - 2\eta_3\eta_2 \exp-(\eta_2+\eta_3)t_k)\}/f(t_k)$
$+(1-\delta_k)\{(-t_k \exp(-\eta_1 t_k)(\exp(-\eta_2 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) -$
$2\exp(-(\eta_2+\eta_3)t_k))\}/R(t_k)$
$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_2} = \sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{(1-\eta_2 t_k)\exp(-\eta_2 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) -$
$2\exp(-(\eta_1+\eta_3)t_k)) + (-t_k \exp(-\eta_2 t_k))(\eta_1 \exp(-\eta_1 t_k)+$
$\eta_3 \exp(-\eta_3 t_k) - 2\eta_1\eta_3 \exp-(\eta_3+\eta_3)t_k)\}/f(t_k)$
$+(1-\delta_k)\{(-t_k \exp(-\eta_2 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) -$
$2\exp(-(\eta_1+\eta_3)t_k))\}/R(t_k)$
$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial \eta_3} = \sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{(1-\eta_3 t_k)\exp(-\eta_3 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_2 t_k) -$
$2\exp-((\eta_1+\eta_2)t_k)) + (-t_k \exp(-\eta_3 t_k))(\eta_1 \exp(-\eta_1 t_k)+$
$\eta_2 \exp(-\eta_2 t_k) - 2\eta_1\eta_2 \exp-(\eta_1+\eta_2)t_k)\}/f(t_k)$
$+(1-\delta_k)\{(-t_k \exp(-\eta_3 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_2 t_k) -$
$2\exp(-(\eta_1+\eta_2)t_k))\}/R(t_k)$
où
$R(t_k) = \exp(-(\eta_1+\eta_2)t_k) + \exp(-(\eta_1+\eta_3)t_k) + \exp(-(\eta_2+\eta_3)t_k) - 2\exp(-(\eta_1+\eta_2+\eta_3)t_k)$

$f(t_k) = \eta_1 \exp(-\eta_1 t_k)(\exp(-\eta_2 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) - 2\exp(-(\eta_2+\eta_3)t_k))+$
$\eta_2 \exp(-\eta_2 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_3 t_k) - 2\exp(-(\eta_1+\eta_3)t_k))+$
$\eta_3 \exp(-\eta_3 t_k)(\exp(-\eta_1 t_k) + \exp(-\eta_2 t_k) - 2\exp -((\eta_1+\eta_2)t_k$

Chapitre 4

Simulation

Dans ce chapitre, on estime les paramètres de la loi exponentielle par la méthode du gradient

Rappel :

On a $L(\theta)$ est une fonction différentiable , donc pour tout θ il existe un gradient de $L(\theta)$ notée $\nabla L(\theta)$

$\nabla L(\theta) = (\frac{\partial L(\theta)}{\partial \eta_1}, \frac{\partial L(\theta)}{\partial \eta_2}, ..., \frac{\partial L(\theta)}{\partial \eta_M})$

Pour trouver les EMV par cette méthode on utilise étapes suivantes :

1-On prend un point initial arbitraire $\overset{0}{\theta} = (\overset{0}{\eta}_1, \overset{0}{\eta}_2, ..., \overset{0}{\eta}_M)$

2-Trouvons $\nabla L(\theta)$ à ces points et exprime chaque η_j en fonction de t par la formule $\eta_j(t) = \overset{0}{\eta}_j + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_j) \quad j = \overline{1, M}$

3-Trouvons $t = t^*$ qui maximise $L(t)$

4-Méttre $\theta = \overset{0}{\theta} + \nabla L(\overset{0}{\theta}) = (\overset{0}{\eta}_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_1}(\overset{0}{\eta}_1), ..., \overset{0}{\eta}_M + \frac{\partial L}{\partial \eta_M}(\overset{0}{\eta}_M))$

5-Retour à l'étape 2 et réitérer cette procédure .

On applique cette méthode pour les système suivants :

4.1 Système 2-sur-3

1- On prend une valeur initial $\theta^\circ = (\eta^\circ{}_1, \eta^\circ{}_2, \eta^\circ{}_3)$, donc

$\frac{\partial \log L(\theta^\circ)}{\partial \eta_1} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k\{(1 - \eta^\circ{}_1 t_k) \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_2 t_k) + \exp(-\eta^\circ{}_3 t_k)$
$-2\exp(-(\eta^\circ{}_2 + \eta^\circ{}_3)t_k)) + (-t_k \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k))(\eta^\circ{}_2 \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k) +$
$\eta^\circ{}_3 \exp(-\eta^\circ{}_3 t_k) - 2\eta^\circ{}_3\eta^\circ{}_2 \exp -(\eta^\circ{}_2 + \eta^\circ{}_3)t_k)\}/f(t_k) +$

$(1-\delta_k)\{(-t_k\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)-$
$2\exp(-(\eta^\circ{}_2+\eta^\circ{}_3)t_k))\}/R(t_k)$

$\dfrac{\partial\log L(\theta^\circ)}{\partial\eta_2}=\sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{(1-\eta^\circ{}_2t_k)\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)$
$-2\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_3)t_k))+(-t_k\exp(-\eta^\circ{}_2t_k))(\eta^\circ{}_1\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+$
$\eta^\circ{}_3\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)-2\eta^\circ{}_1\eta^\circ{}_3\exp-(\eta^\circ{}_3+\eta^\circ{}_3)t_k)\}/f(t_k)+$
$(1-\delta_k)\{(-t_k\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)-$
$2\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_3)t_k))\}/R(t_k)$

$\dfrac{\partial\log L(\theta^\circ)}{\partial\eta_3}=\sum\limits_{k=1}^{N}[\delta_k\{(1-\eta^\circ{}_3t_k)\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)$
$-2\exp-((\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2)t_k))+(-t_k\exp(-\eta^\circ{}_3t_k))(\eta^\circ{}_1\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+$
$\eta^\circ{}_2\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)-2\eta^\circ{}_1\eta^\circ{}_2\exp-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2)t_k)\}/f(t_k)+$
$(1-\delta_k)\{(-t_k\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)-$
$2\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2)t_k))\}/R(t_k)$

où

$R(t_k)=\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2)t_k)+\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_3)t_k)+\exp(-(\eta^\circ{}_2+\eta^\circ{}_3)t_k)-2\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2+\eta^\circ{}_3)t_k)$

$f(t_k)=\eta_1\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)-2\exp(-(\eta^\circ{}_2+\eta^\circ{}_3)t_k))$
$+\eta^\circ{}_2\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)-2\exp(-(\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_3)t_k))+$
$\eta^\circ{}_3\exp(-\eta^\circ{}_3t_k)(\exp(-\eta^\circ{}_1t_k)+\exp(-\eta^\circ{}_2t_k)-2\exp-((\eta^\circ{}_1+\eta^\circ{}_2)t_k$

2-On exprime chaque η_j par une fonction de t par la formule suivante $\eta_j(t)=\overset{0}{\eta}_j+t\nabla L(\overset{0}{\eta}_j)\quad j=1,2,3$

$\eta_1(t)=\eta^\circ{}_1+t\nabla L(\eta^\circ{}_1)$

$\eta_2(t)=\eta^\circ{}_2+t\nabla L(\eta^\circ{}_2)$

$\eta_3(t)=\eta^\circ{}_3+t\nabla L(\eta^\circ{}_3)$

En substituant ces valeurs en $L(\theta)$ et Trouvons $t=t^*$ qui maximise $L(t)$

$\log L(t)=\log\Psi+\sum\limits_{k=1}^{N}\{[\delta_k\log(f(t_k))]+(1-\delta_k)\log R(t_k)\}$

$\dfrac{\partial\log L(t)}{\partial t}=\sum\limits_{k=1}^{N}\{[\delta_k\dfrac{\partial}{\partial t}\log(f(t_k))]+(1-\delta_k)\dfrac{\partial}{\partial t}\log R(t_k)\}$

où

$f(t_k)=\eta_1(t)\exp(-\eta_1(t)t_k)(\exp(-\eta_2(t)t_k)+\exp(-\eta_3(t)t_k)-2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))+\eta_2(t)\exp(-\eta_2(t)t_k)(\exp(-\eta_1(t)t_k)+\exp(-\eta_3(t)t_k)-2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))+\eta_3(t)\exp(-\eta_3(t)t_k)(\exp(-\eta_1(t)t_k)+\exp(-\eta_2(t)t_k)-2\exp-((\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))$

$\log f(t_k)=\log\eta_1(t)-\eta_1(t)t_k+\log(\exp(-\eta_2(t)t_k)+\exp(-\eta_3(t)t_k)-$
$2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))+\log\eta_2(t)-\eta_2(t)t_k+\log(\exp(-\eta_1(t)t_k)+$

$\exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k)) + \log\eta_3(t) - \eta_3(t)t_k +$
$\log(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp-((\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))$

$R(t_k) = \exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k) + \exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k) + \exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k)$

$\log R(t_k) = -\log 2 - ((\eta_1(t)+\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k)$

Donc

$$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}(\delta_k \frac{\partial}{\partial t}\{\log\eta_1(t) - \eta_1(t)t_k + \log(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k)) + \log\eta_2(t) - \eta_2(t)t_k + \log(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k)) + \log\eta_3(t) - \eta_3(t)t_k + \log(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp-((\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))\} + (1-\delta_k)\frac{\partial}{\partial t}\{-((\eta_1(t)+\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k)\} = 0$$

$$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}(\delta_k\{\frac{\eta_1(t)'}{\eta_1(t)} - \eta_1(t)'t_k +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))}$$
$$+\frac{\eta_2(t)'}{\eta_2(t)} - \eta_2(t)'t_k +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))}$$
$$+\frac{\eta_3(t)'}{\eta_3(t)} - \eta_3(t)'t_k +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))})\}$$
$$+(1-\delta_k)\{-((\eta_1(t)' + \eta_2(t)' + \eta_3(t)')t_k)\} = 0$$

$$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}(\delta_k\{\frac{\eta_1(t)'}{\eta_1(t)} +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))}$$
$$+\frac{\eta_2(t)'}{\eta_2(t)} +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))}$$
$$+\frac{\eta_3(t)'}{\eta_3(t)} +$$
$$\frac{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))'}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))})\}$$
$$-((\eta_1(t)' + \eta_2(t' + \eta_3(t)')t_k) = 0$$

$$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}[\frac{1}{\eta_1(t)\eta_2(t)\eta_3(t)}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))}\times$$
$\{\delta_k[(1-t_k)\eta_1(t)' + ((\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t) + \eta_3(t))t_k))' + (1-t_k)\eta_2(t)' + (\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_3(t))t_k))' + (1-t_k)\eta_3(t)' + (\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k))']\}-$

$[(\eta_1(t)'+\eta_2(t)'+\eta_3(t)')t_k(\eta_1(t)\eta_2(t)\eta_3(t))(\exp(-\eta_2(t)t_k)+\exp(-\eta_3(t)t_k)- 2\exp(-(\eta_2(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k))] = 0$

et comme

$$\delta_k = \begin{cases} 1 \text{ si le système en panne} \\ o \text{ si le système fonctionne} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}[\frac{1}{\eta_1(t)\eta_2(t)\eta_3(t)}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t)+\eta_3(t))t_k))}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_3(t))t_k))}\times$$
$$\frac{1}{(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))}\times$$
$-(\eta_1(t)' + \eta_2(t)' + \eta_3(t)')t_k(\eta_1(t)\eta_2(t)\eta_3(t))(\exp(-\eta_2(t)t_k)+$
$\exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_2(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k)+$
$\exp(-\eta_3(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k)+$
$\exp(-\eta_2(t)t_k) - 2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k))] = 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{N}[-\sum_{J=1}^{3}\nabla L(\eta_j{}^{\circ})t_k\sum_{J=1}^{3}\eta_j(t)(\exp(-\eta_2(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k)-$
$2\exp(-(\eta_2(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_3(t)t_k)-$
$2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_3(t))t_k))(\exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k)-$
$2\exp(-(\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k)) = 0$

exemple 4.1.1 *Si on prend* $N = 2 \qquad (t_1, t_2) = (1, 2) \quad \theta^{\circ} = (0.5, 0.25)$

$$\frac{\partial \log L(\theta^{\circ})}{\partial \eta_1} = -1.037788252$$

$\dfrac{\partial \log L(\theta^\circ)}{\partial \eta_2} = -3.936362864$
$\dfrac{\partial \log L(\theta^\circ)}{\partial \eta_3} = -2.547866687$
$t = 0.049060651$
$R(t_1) = 0.979995966$
$R(t_2) = 0.696863542$
$L(\theta) = 0.68292346$

4.2 Système 1-sur-2

1-On prend un point initial arbitraire $\theta^\circ = (\eta_1{}^\circ, \eta_2{}^\circ)$
$\dfrac{\partial \log L\,(\theta^\circ)}{\partial n_1} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k((1 - \eta^\circ{}_1 t_k) \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k)(1 - \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k))-$
$(-t_k \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k))/f\,(t_k)]+$
$\sum_{k=1}^{N} [(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k))(1 - \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k)/R\,(t_k)]$
$\dfrac{\partial \log L\,(\theta^\circ)}{\partial n_2} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k((1 - \eta^\circ{}_2 t_k) \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k)(1 - \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k))$
$-(-t_k \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k))/f\,(t_k)]+$
$\sum_{k=1}^{N} [(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\eta^\circ{}_2 t_k))(1 - \exp(-\eta^\circ{}_1 t_k)/R\,(t_k)]$

2-On exprime chaque η_j par une fonction de t par la formule suivante $\eta_j(t) = \overset{0}{\eta}_j + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_j) \quad j = 1, 2$
$\eta_1(t) = \eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1)$
$\eta_2(t) = \eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2)$
On substituant ces valeurs en $L(\theta)$ et Trouvons $t = t^*$ qui maximise $L(t)$
$\log L(t) = \log \Psi + \sum_{k=1}^{N} \{[\delta_k \log(f(t_k))] + (1 - \delta_k) \log R(t_k)\}$
$\dfrac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \{[\delta_k \dfrac{\partial}{\partial t} \log(f(t_k))] + (1 - \delta_k) \dfrac{\partial}{\partial t} \log R(t_k)\} = 0$
On a
$f(t_k) = (\eta_1(t) \exp(-\eta_1(t)t_k) + \eta_2(t) \exp(-\eta_2(t)t_k) - 2(\eta_1(t)+$
$\eta_2(t)) \exp(-(\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k))$
$\log f(t_k) = \log \eta_1(t) - \eta_1(t)t_k + \log \eta_2(t) - \eta_2(t)t_k + \log(-2) + \log(\eta_1(t) +$
$\eta_2(t)) - (\eta_1(t) + \eta_2(t))t_k)$

$\frac{\partial \log f(t_k)}{\partial t} = \frac{\partial \eta_1(t)}{\partial t}/\eta_1(t) - \frac{\partial \eta_1(t)}{\partial t}t_k + \frac{\partial \eta_2(t)}{\partial t}/\eta_2(t) - \frac{\partial \eta_2(t)}{\partial t}t_k +$
$\frac{\partial(\eta_1(t)+\eta_2(t))}{\partial t}/(\eta_1(t)+\eta_2(t)) - \frac{\partial(\eta_1(t)+\eta_2(t))}{\partial t}t_k$
$\frac{\partial \log f(t_k)}{\partial t} = \frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1)}{\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1)} - t_k\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \frac{\nabla L(\eta^\circ{}_2)}{\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2)} - t_k\nabla L(\eta^\circ{}_2) +$
$\frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)}{(\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) + t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))} - t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))$
Et
$R(t_k) = \exp(-\eta_1(t)t_k) + \exp(-\eta_2(t)t_k) - \exp(-(\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k))$
$\log R(t_k) = -\eta_1(t)t_k - \eta_2(t)t_k - (\eta_1(t)+\eta_2(t))t_k$
$\frac{\partial \log R(t_k)}{\partial t} = -\nabla L(\eta^\circ{}_1)t_k - \nabla L(\eta^\circ{}_2)t_k - t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))$
$\frac{\partial \log R(t_k)}{\partial t} = -2t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))$
Donc
$\frac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}[\delta_k\{\frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1)}{\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1)} + \frac{\nabla L(\eta^\circ{}_2)}{\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2)} - 2t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) +$
$\nabla L(\eta^\circ{}_2)) + \frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)}{(\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) + t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))}\} + (1-\delta_k)\{-2t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) +$
$\nabla L(\eta^\circ{}_2))\}] = 0$
$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N}[\delta_k\{\frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1)}{\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1)} + \frac{\nabla L(\eta^\circ{}_2)}{\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2)} +$
$\frac{\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)}{((\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) + t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)))}\} - 2t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))]$
$= 0$
$\Longleftrightarrow$
$\sum_{k=1}^{N}[\frac{1}{(\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1))(\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2))((\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) + t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)))} \times$
$\delta_k\{\nabla L(\eta^\circ{}_1)(\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2))((\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) +$
$t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)(\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1))((\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) + t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) +$
$\nabla L(\eta^\circ{}_2))) + (\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2))((\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1))(\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2))\} -$
$(2t_k(\nabla L(\eta^\circ{}_1) + \nabla L(\eta^\circ{}_2)))(\eta^\circ{}_1 + t\nabla L(\eta^\circ{}_1))(\eta^\circ{}_2 + t\nabla L(\eta^\circ{}_2))((\eta^\circ{}_1 + \eta^\circ{}_2) +$
$t(\nabla L(\eta^\circ{}_1) +$
$\nabla L(\eta^\circ{}_2))] = 0$
et comme
$\delta_k = \begin{cases} 1 \text{ si le système en panne} \\ o \text{ si le système fonctionne} \end{cases}$
Alors

$\dfrac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N}[-(2t_k(\nabla L(\eta^{\circ}{}_1) + \nabla L(\eta^{\circ}{}_2)))(\eta^{\circ}{}_1 + t\nabla L(\eta^{\circ}{}_1))(\eta^{\circ}{}_2 +$
$t\nabla L(\eta^{\circ}{}_2))((\eta^{\circ}{}_1 + \eta^{\circ}{}_2) + t(\nabla L(\eta^{\circ}{}_1) + \nabla L(\eta^{\circ}{}_2)))] = 0$

exemple 4.2.1 *Si on prend* $N = 2 \qquad (t_1, t_2) = (1, 2) \quad \theta^{\circ} = (0.5, 0.25)$
$\dfrac{\partial \log L(\theta^{\circ})}{\partial \eta_1} = -0.532294754$
$\dfrac{\partial \log L(\theta^{\circ})}{\partial \eta_2} = -1.35630682$
$t = 0.397119228$
$R(t_1) = 1.083878751$
$R(t_2) = 1.342550647$
$L(\theta) = 1.455162118$

4.3 Système en série

1-On prend un point initial arbitraire $\overset{0}{\theta} = (\overset{0}{\eta}_1, \overset{0}{\eta}_2, ..., \overset{0}{\eta}_M)$
$\dfrac{\partial \log L(\overset{0}{\theta})}{\partial \eta_1} = \sum_{k=1}^{N}[(\delta_k\{(1 - \sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\exp(-\sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\}/f(t_k)) +$
$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\overset{0}{\eta}_1 t_k)/R_1(t_k)]$
$\dfrac{\partial \log L(\overset{0}{\theta})}{\partial \eta_2} = \sum_{k=1}^{N}[(\delta_k\{(1 - \sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\exp(-\sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\}/f(t_k)) +$
$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\overset{0}{\eta}_2 t_k)/R_2(t_k)]$
.
.
.
.
$\dfrac{\partial \log L(\overset{0}{\theta})}{\partial \eta_M} = \sum_{k=1}^{N}[(\delta_k\{(1 - \sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\exp(-\sum_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k)\}/f(t_k)) +$
$(1 - \delta_k)(-t_k \exp(-\overset{0}{\eta}_M t_k)/R_M(t_k)]$
2- On exprime chaque $\eta_j$en fonction de j
$\eta_1(t) = \overset{0}{\eta}_1 + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_1)$
$\eta_2(t) = \overset{0}{\eta}_2 + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_2)$
$\eta_j(t) = \overset{0}{\eta}_j + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_j)$

$\eta_M(t) = \overset{0}{\eta}_M + t\nabla L(\overset{0}{\eta}_M)$

Et comme $\eta(t) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j(t) \Longrightarrow f(t_k) = \eta(t)\exp(-\eta(t)t_k)$

$= \sum_{j=1}^{M} \eta_j(t)\exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j(t)t_k)$et $R(t_k) = \exp(-\sum_{j=1}^{M} \eta_j(t)t_k)$

$\log L(\theta) = \log c + \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \log(\sum_{i=1}^{M} f(t_k)) + (1-\delta_k)\sum_{j=1}^{M} \log R(t_k)]$

3-ona $\log L(t) = \log c + \sum_{k=1}^{N} \{[\delta_k \log(f(t_k))] + (1-\delta_k)\log R(t_k)\}$

$\dfrac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \{[\delta_k \dfrac{\partial}{\partial t} \log(f(t_k))] + (1-\delta_k)\dfrac{\partial}{\partial t} \log R(t_k)\}$

$= \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \dfrac{\partial}{\partial t} \log(\eta(t)\exp(-\eta(t)t_k) + (1-\delta_k)\dfrac{\partial}{\partial t} \log(\exp(-\eta(t)t_k]$

$= \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \dfrac{\partial}{\partial t} (\log \eta(t) - \eta(t)t_k) + (1-\delta_k)\dfrac{\partial}{\partial t}(-\eta(t)t_k)]$

$= \sum_{k=1}^{N} [\delta_k (\dfrac{\partial}{\partial t}\eta(t))/\eta(t) - \dfrac{\partial}{\partial t}\eta(t)t_k) + (1-\delta_k)\dfrac{\partial}{\partial t}(-\eta(t)t_k)]$

Et comme $\eta(t) = \sum_{j=1}^{M} \eta_j(t) = \sum_{j=1}^{M} \overset{0}{\eta}_j + t\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)$

$\dfrac{\partial \log L(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} [\delta_k (\dfrac{\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)}{\sum_{j=1}^{M} \overset{0}{\eta}_j + t\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)} - t_k(\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)))$

$+(1-\delta_k)(-t_k)(\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j))]$

$= \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \dfrac{\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)}{\sum_{j=1}^{M} \overset{0}{\eta}_j + t\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)} - t_k(\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j))] = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} [\delta_k \sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j) - (t_k(\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j))(\sum_{j=1}^{M} \overset{0}{\eta}_j + t\sum_{j=1}^{M} \nabla L(\overset{0}{\eta}_j)) = 0$

aprés les calculs on trouve

$$\Longrightarrow t^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\delta_k - \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{M}\overset{0}{\eta}_j t_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} t_k \sum\limits_{j=1}^{M}\nabla L(\overset{0}{\eta}_j)}$$

avec

$$\delta_k = \begin{cases} 1 \text{ si le système en panne} \\ o \text{ si le système fonctionne} \end{cases}$$

on subtitue cette valeur danns les η_j et on trouve $\overset{*}{\theta} = (\overset{*}{\eta}_1, \overset{*}{\eta}_2, ..., \overset{*}{\eta}_M)$

où

$\overset{*}{\eta}_1 = \overset{0}{\eta}_1 + \overset{*}{t}\nabla L(\overset{0}{\eta}_1)$

$\overset{*}{\eta}_1 = \overset{0}{\eta}_M + \overset{*}{t}\nabla L(\overset{0}{\eta}_M)$

$N = 2, M = 2, \overset{0}{\theta} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

t_k	$(2, 9)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-390.1326, -55.67213)$
t	2.691762×10^{-3}
θ	$(-3.00144 \times 10^{-1}, 3.001439 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-8.940697×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000179, 1.000000805)$
$L(\theta)$	1.000000984

t_k	$(8, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-14.24361, -13.7546)$
t	1.366866×10^{-2}
θ	$(-6.199302 \times 10^{-2}, -6.199306 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	3.352761×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999731, 0.999999966)$
$L(\theta)$	0.999999939

t_k	$(6, 5)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-14.24361, -12.42013)$
t	2.812809×10^{-2}
θ	$(9.935451 \times 10^{-2}, -9.93548 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	2.235174×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999865, 0.999999888)$
$L(\theta)$	0.999999753

t_k	$(4, 2)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-9.436563, -7, 297442)$
t	$4, 481892 \times \times 10^{-2}$
θ	$(7.706343 \times 10^{-2}, -7.706343 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-5.960464×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000238, 1.000000119)$
$L(\theta)$	1.0000000357

$N = 3, M = 3, \theta^\circ = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

t_k	$(8, 3, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-77.66293, -24.22563, -16.003610)$
t	$7, 422036 \times 10^{-3}$
θ	$(-7.641709 \times 10^{-2}, 7.019650 \times 10^{-2}, 6.220611 \times 10^{-3})$
$\eta(t)$	2.468005×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999802, 0.999999926, 0.999999975)$
$L(\theta)$	0.999999703

t_k	$(3, 9, 2)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-135.4875, -33.95427, -20.14875)$
t	4.615209×10^{-3}
θ	$(-1.253032 \times 10^{-1}, 9.329393 \times 10^{-2}, 3.20093 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	7.450581×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999776, 0.999999329, 0.999999851)$
$L(\theta)$	0.999998956

t_k	$(1, 2, 5)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-21.35243, -11.95228, -9.558704)$
t	2.041368×10^{-2}
θ	$(6.41828 \times 10^{-2}, 6.009983 \times 10^{-3}, -7.012831 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-5.215406×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000052, 1.000000104, 1.000000261)$
$L(\theta)$	1.000000417

t_k	$(6, 3, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-31.6275, -15.84134, -12.23322)$
t	1.465609×10^{-2}
θ	$(3.646343 \times 10^{-2}, 1.782778 \times 10^{-2}, -5.429125 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-4.097819×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000246, 1.000000123, 1.000000041)$
$L(\theta)$	1.00000041

$N = 4, M = 3, \theta^{\circ} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

t_k	$(7, 3, 2, 1)$
$\nabla L(\theta^{\circ})$	$(-73.61769, -26.61722, -17.79966)$
t	7.413083×10^{-3}
θ	$(-4.573407 \times 10^{-2}, 5.268433 \times 10^{-2}, -6.95033 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-6.752089×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000473, 1.000000203, 1.000000135, 1.000000068)$
$L(\theta)$	1.000000879

t_k	$(9, 5, 2, 1)$
$\nabla L(\theta^{\circ})$	$(-166.7743, -41.48967, -24.75964)$
t	3.754984×10^{-3}
θ	$(-1.262349 \times 10^{-1}, 9.420695 \times 10^{-2}, 3.202796 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-1.117587×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000101, 1.000000056, 1.000000022, 1.000000011)$
$L(\theta)$	1.00000019

t_k	$(5, 3, 4, 2)$
$\nabla L(\theta^{\circ})$	$(-20.71311, -19.31627, -16.29465)$
t	1.3603×10^{-2}
θ	$(1.094155 \times 10^{-1}, -1.275923 \times 10^{-2}, -9.665623 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	3.72529×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999813, 0.999999888, 0.999999851, 0.999999925)$
$L(\theta)$	0.999999477

t_k	$(5, 3, 1, 1)$
$\nabla L(\theta^{\circ})$	$(-27.93296, -15.38273, -12.14952)$
t	1.577565×10^{-2}
θ	$(5.933927 \times 10^{-2}, 7.327419 \times 10^{-3}, -6.6666661 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	7.450581×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.999999627, 0.999999776, 0.999999925, 0.999999925)$
$L(\theta)$	0.999999253

$N = 2, M = 2, \overset{0}{\theta} = (0.75, 0.45)$

t_k	$(2,9)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-390.1326, -55.67213)$
t	2.691762×10^{-3}
θ	$(-3.00144 \times 10^{-1}, 3.001439 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-8.940697×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000179, 1.000000805)$
$L(\theta)$	1.000000984

t_k	$(8,1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-198.5663, -31.33606)$
t	5.219609×10^{-3}
θ	$(-2.864381 \times 10^{-1}, 2.864380 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-8.940697×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000715, 1.000000089)$
$L(\theta)$	1.000000804

t_k	$(6,5)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-16.585, -13.84156)$
t	3.943923×10^{-2}
θ	$(9.590037 \times 10^{-2}, -9.590046 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-8.940697×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000536, 1.000000447)$
$L(\theta)$	1.000000983

t_k	$(4,2)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-12.96338, -8.919207)$
t	5.483813×10^{-2}
θ	$(3.911256 \times 10^{-2}, -3.911261 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-4.470348×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000179, 1.00000089)$
$L(\theta)$	1.000001069

$N = 3, M = 3, \theta^\circ = (0.75, 0.45, 0.25)$

t_k	$(8,3,1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-326.1295, -59.79926, -24.225630)$
t	3.535255×10^{-3}
θ	$(-4.029508 \times 10^{-1}, 2.385944 \times 10^{-1}, 1.643562 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-1.639128×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000131, 1.000000049, 1.000000016)$
$L(\theta)$	1.000000196

t_k	$(3, 9, 2)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-660.184, -100.3113, -33.95427)$
t	1.825163×10^{-3}
θ	$(-4.549434 \times 10^{-1}, 2.669155 \times 10^{-1}, 1.880279 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	2.980232×10^{-8}
$R(t_k)$	$(0.99999991, 0.999999731, 0.99999994)$
$L(\theta)$	0.999999581

t_k	$(1, 2, 5)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-44.061, -18.7645, -11.95228)$
t	1.939079×10^{-2}
θ	$(1.043775 \times 10^{-1}, 8.614159 \times 10^{-2}, 1.82588 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-5.401671×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000054, 1.000000108, 1.00000027)$
$L(\theta)$	1.000000918

t_k	$(6, 3, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-76.98428, -27.06001, -15.841340)$
t	1.209486×10^{-2}
θ	$(-1.811142 \times 10^{-1}, 1.227129 \times 10^{-1}, 5.840116 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-1.415610×10^{-7}
$R(t_k)$	$(1.000000849, 1.000000425, 1.000000142)$
$L(\theta)$	1.000001416

$N = 4, M = 3, \theta^\circ = (0.75, 0.45, 0.25)$

t_k	$(7, 3, 2, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-242.3159, -59.00414, -26.61722)$
t	4.421578×10^{-3}
θ	$(-3.214186 \times 10^{-1}, 1.891086 \times 10^{-1}, 1.323099 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-7.450581×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000522, 1.000000224, 1.000000149, 1.000000075)$
$L(\theta)$	1.00000097

t_k	$(9, 5, 2, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-893.989, -122.5186, -41.48967)$
t	1.370514×10^{-3}
θ	$(-4.752244 \times 10^{-1}, 2.820866 \times 10^{-1}, 1.931378 \times 10^{-1})$
$\eta(t)$	-2.980232×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000268, 1.000000149, 1.00000006, 1.00000003)$
$L(\theta)$	1.000000507

t_k	$(5, 3, 4, 2)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-45.88854, -26.36691, -19.31627)$
t	1.583458×10^{-2}
θ	$(2.337405 \times 10^{-2}, 3.249093 \times 10^{-2}, -5.586504 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-5.960464×10^{-8}
$R(t_k)$	$(1.000000298, 1.000000179, 1.000000238, 1.0000000119)$
$L(\theta)$	1.000000834
t_k	$(5, 3, 1, 1)$
$\nabla L(\theta^\circ)$	$(-58.61613, -24.4781, -15.38273)$
t	1.472426×10^{-2}
θ	$(-1.130789 \times 10^{-1}, 8.957814 \times 10^{-2}, 2.35008 \times 10^{-2})$
$\eta(t)$	-5.587935×10^{-9}
$R(t_k)$	$(1.000000028, 1.000000017, 1.000000006, 1.000000006)$
$L(\theta)$	1.000000057

Chapitre 5

Conclusion

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire est une contribution à l'estimation des fiabilités d'un système cohérent et de ses composants. Nous avons exposé deux méthodes l'une basée sur les résultats d'essais sur le système et ses composants et l'autre, en supposant que les durées de vies de ces derniers sont des variables aléatoires de lois exponentielles. Dans les deux cas, on a utilisé la méthode du maximum de vraisemblance. Pour déterminer nos estimateurs, on a utilisé des méthodes numériques d'optimisation, comme la méthode du gradient. Par des exemples numériques, on a illustré que les méthodes d'optimisation que nous avons utilisé, ont donné de très bons résultats. Il nous paraît que dans le cas de la loi de Weibull qui est une généralisation de la loi exponentielle, les résultats publiés sont très limités, surtout dans le cas des systèmes de structure complexe, comme les systèmes k-sur-n, k-consécutifs-sur-n, etc...

Enfin, vu l'essor et le développement de la statistique ces dernières décennies, beaucoup de travail reste à faire dans ce domaine. Par ailleurs, la statistique trouve en la fiabilité un terrain de prédilection, surtout à l'ère du vingt et unième siècle où la technologie de pointe a atteint son paroxysme, avec le développement des systèmes électroniques dans les produits qu'on utilise tous les jours à commencer par la télévision, la voiture, les ordinateurs, etc. Tout cela, oblige les concepteurs à produire des systèmes de plus en plus fiables pour une population de plus en plus exigeante, et c'est la statistique (estimation, test,...) qui peut être un outil important pour satisfaire l'exigence de ce monde.

Bibliographie

[1] **A-Aissani** Modeles stochastique de la théorie de fiabilité,1992, Ed office des publication universitaire

[2] **A. Lannoy, H. Procaccia**, Méthodes avancées d'analyses des bases de données du retour d'espérience industriel, Ed Eyrolles, 2003

[3] **A. R. Kaylan, C.M Harris,** Efficient algorithms to derive maximum likelihood estimation for finite exponential and weibull mixtures computers and operations research,Vol. 1981, pp 97-104

[4] **Bernard ycart** Notions de fiabilité file d'attente, 2004, Ed centre de publication universitaire

[5] **B.R. Kriegler**, Estimation of component and system reliabilities using binomial and exponential data and various test methods, Senior Thesis, Claremont Mckenna College, 2001

[6] **Besma belhadj-kaabi** Statistique mathématique inférence statistique, 2002, Ed centre de publication universitaire

[7] **Christiane Cocozza-Thivent**, Processus stochastiques et fiabilité des systèmes, 1997, Ed Springer

[8] **D.Kececioglu**, Reliability life testing Handbook vol 1, 1993, Ed Prentice Hall

[9] **D.M Olsson,** Estimation for mixtures of distribution by direct maximation of the likelihood function, J.quality Technology, Vol. 11, num 3 ,1979, pp153-159

[10] **D.M Olsson, L.S Nelson,** The Nelder-Mead simplex procedure for future minimization, Technometrics, Vol.17,1975,pp 45-51

[11] **D.M. Titterington, A.F.M Smith, U.E Markov** Statistical Analysis of Finite Mixture Distribution, 1985, Johon Wiley & Sons

[12] **G. Arulmozhi**, Maximum likelihood estimation of exponential parameters of reliability system, AMO, volume 5, Number 2, 2003, pp 117-132

[13] **Gerald baillargeon** Méthode statistique de l'ingénieur, 1990, SMG,

[14] **G.W. Cran**, Graphical estimation methods for Weibull distributions, Microelectronics and Reliability, Vol. 15, 1976, pp 47-52

[15] **H.Caruso, A.Dasgupta**, A fundamental overview of accelerated testing analytical models, 1998, IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA

[16] **H.Procaccia, P.Morilhat**, Fiabilité des structuresdes installations industrielles,1996, Ed Eyrolles

[17] **Jean - louis bon** Fiabilité des systèmes - Méthodes mathématiques, 1995,Ed Masson, Paris

[18] **J. F. Lawless,** Statistical models and methods for lifetima data, Ed Wiley interscience, 2003

[19] **L.W. Falls**, Estimation of parameters in compound Weibull ditribution, technometrics, Vol. 12, 1970, pp 399-407

[20] **Mme azouz** Système k-consécutifs-sur-N dont les composants sont ponderes -cas unidimentionnel et cas bidimentionnel "Thèse de magistére soutennue le 06-09-1996

[21] **Nikolaos limnios** Arbres de défaillances, 2005, Lavoisier

[22] **P.Hoang**, Handbook of Reliability Engineering, 2003, Ed Springer

[23] **P. O'connor**, Testing for reliability, Quality and reliability engineering, vol. 19, 2003, pp. 73-84

[24] **P.Sander, R.Badoux,** Bayesian Methods in Reliability, 1991, Kluwer Academic Publisher

[25] **Singiresu S. Rao,** Engineering Optimization Theory and practice, Third Edition, New Age international (p) limited, Publishers, 1999

[26] **S.K Sinha,** Reliability and life Testing, 1986, Wiley Eastern Limited

[27] **S.W. Cheng, J.C Fu**, Estimation of mixed weibull parameters in life testing, IEEE Trans. Reliability, Vol R-31, 1982, pp 377-381

[28] **V.Badonavicius,M. Nikulin**, Accelerated life models, 2002, Chapman and Hall/ CRC

[29] **V. Hasselblad**, Estimation of mixiture of distributions from the exponential family, J. Amer. Statistical Assoc, Vol. 64, 1969, 1459-1471

[30] **W.Mendenhall, R.J.Hader,** Estimayion of parameters of mixed axponentially distributed failure distributions from censored life test data, Biometrica, Vol. 45, 1958, pp 504-520

[31] **W.Nelson,** Accelerated Testing : Statistical Methods, Test Plans and Data Analysis, 1990, Ed Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

مــلــخـــص

الهدف من عملنا هو استعراض طريقتين للتقدير , الأولى تتعلق بتقدير موثوقية النظام من خلال نتائج الاختبارات المجرات عليها . و الثانية بتقدير وسائط القانون ألأسي و هذا في حالة المعطيات غير تامة , مع فرض أن مدة عمل النظام وعناصره تابعة للقانون الأسي . و عززنا نتائجنا بأمثلة عددية و تطبيقات على الكمبيوتر.

الكلمات المفاتيح : الموثوقية , التقدير , الاحتمال , القانون ألأسي , طريقة التدرج .