REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°d'ordre:…..

série:……….

MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Magistère

En Mathématiques

THEME

Sur la régularité optimale des solutions d'une classe D'équations Différentielles Opérationnelles

Option:

Analyse

PAR:

Mr : BENHIOUNA Salah

Devant le jury:

Président:	**M.Denche**	**Prof.**	**Univ.Mentouri Constantine**
Rapporteur:	**M.Reghioua**	**M.C.**	**E.N. S de Constantine**
Examinateur:	**M.Abdelli**	**M.C.**	**Univ.Mentouri Constantine**
	C.Saidouni	**M.C.**	**Univ.Mentouri Constantine**

Soutenu le :

Remerciements

Je tiens d'abord à remercie vivement le docteur Mr REGHIOUA Mohamed, Directeur de L'Ecole Normale Supérieure de Constantine d'une part pour le choix passionnant de ce mémoire et pour son aïd Inestimable et le conseil précieux qu'il m'a prodigués et pour son soutien indéfectible d'autre part.

Je remercie Mr DENCHE Mohamed, Professeur à l'Université de Constantine qui me fait l'honneur de présider ce jury, et pour m'avoir guidé tout au long de ce travail.

Je remercie Mr M.ABDELLI, Maitre de conférences à l'Université de Constantine et Mr C. SAIDOUNI, Maitre de conférences à l'université de Constantine d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce jury.

J'aimerais notamment remercier Mr BOUZIT Mohamed Maitre de conférence à l'université d'Oum El Bouaghi et Mr MANAA Hacéne, mon collègue, Pour avoir bien voulu corrige le travail ainsi que tous les collègues du lycée BOURFAA Ahcéne.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude aux deux êtres les plus chers qui ont tant attendu cet évènement et qui ont tout fait pour que je sois aujourd'hui ce que je suis: mon père et ma mère. Le fait de penser à vous me redonne la confiance et me rassure.

Je remercie tous les membres de ma famille, surtout mes frères. Je remercie tous ceux qui comptent pour moi.

Je me permets aussi, ici, de saluer tous mes amis et de les remercie pour leur présence et leur soutien continus qui m'ont permis de réaliser mon rêve le plus cher. Leur amitié me restera à jamais un trésor inépuisable.

Je tiens également à remercie toutes les personnes qui m'ont aidé de loin au de prés à la finalisation ou mieux de ce modeste travail, je cite, mes professeurs et mes camarades.

Table des matières

0.1 Introduction

Le Présent travail est consacré à l'étude d'une certaine classe d'équations différentielles Opérationnelles à coefficient opératoriel bissectoriel, La méthode d'étude est basée sur le théorème de Weiss sur les multiplicateurs qui constituent une extension du théorème de Mikhlin au cas des espaces de Banach du type UMD.

Le travail est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par présenter en bref certaines notions utiles tout le long de ce travail, à savoir les décompositions de Schauder, la notion de R-bornitude d'une famille d'opérateurs, les espaces UMD, et le théorème de base sur les multiplicateurs de Weiss qui ont été étudiés dans les bibliographies [3, 4, 5, 6,8,10,16,17,18,19, 16,17, 21,24,25,26].

Le second chapitre est consacré à l'étude des opérateurs sectoriels, et la génération de Semi groupes analytiques par ces derniers. On présente le calcul fonctionnel H^{∞}des opérateurs sectoriels générant des Semi groupes analytiques [1,3,7,9,13,16,17,20,22,24].

Au chapitre trois, on aborde l'étude des opérateurs bissectoriels.Pour une étude des Semi groupes analytiques générés par ces opérateurs, ainsi que le calcul fonctionnel H^{∞}d'opérateurs bissectoriels,voir par exemple[1, 2, 3,7,10,11,12,13,14,16,17,18,24].

Au chapitre quatre, on étudie la régularité maximale L^p des solutions d'une classe d'équations différentielles du premier ordre, à coefficient opératoriel bissectoriel,sur tout l'axe réel [3,8,9,11,13,15,16,18,20,21, 22, 23,24,25].

Chapitre I

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Décomposition de Schauder

Définition 1 *Une décomposition de Schauder d'un espace de Banach E est une suite de projections $D = (D_k)_{k=1}^{\infty} \subset B(E)$ telle que*

$$\begin{aligned} 1)\ D_k D_l &= 0 \text{ pour } k \neq l \\ 2) \qquad x &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k x \ \ \forall x \in E \end{aligned}$$

Remarque 1

1) L'opérateur $P_n = \sum_{k=1}^{n} D_k$ est la somme partielle du projecteur correspondant à D.

2) E est décomposé comme somme directe

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$$

Définition 2 *Une base de Schauder est une suite $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que tout $x \in E$ admet la représentation unique*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

1.2 R-Norme

Définition 3 *Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, c'est -à-dire F est une $\delta-$Agèbre sur Ω et P est une mesure définie de F dans l'intervalle $[0,1]$. La fonction de Rademacher $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\{-1,1\}$ indépendantes, symétriques et identiquement distributs, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} P(\xi_k(\omega)=1) &= P\ \ (\xi_k(\omega)=-1) = \frac{1}{2} \\ P(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega)) &= P\ \ (\xi_1(\omega)) P(\xi_2(\omega)) ... P(\xi_k(\omega)) \end{aligned}$$

Définition 4 *La norme aléatoire* $\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_{L^P(\Omega,E)}$ *est définie par*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_{L^p(\Omega,E)} = \left[\int_{\Omega} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_E^p dp(\omega) \right]^{\frac{1}{p}}$$

où E *est un espace normé,*(ξ_k) *est une suite de variables aléatoires appelée fonction de Rademacher,*$x_k \in E$*,* $\omega \in \Omega$*,la norme aléatoire est definie par*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_{L^p(\Omega,E)} = \left[\int_{\Omega} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_E^p dp(\omega) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{\xi_{1(\omega)\in\{-1,1\}}} \sum_{\xi_{2(\omega)\in\{-1,1\}}} .... \sum_{\xi_{n(\omega)\in\{-1,1\}}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right\|_E^p p(\xi_1)\, p(\xi_2) \qquad p(\xi_n) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{\eta_{1\in}\{-1,1\}} \sum_{\eta_{2\in\{-1,1\}}} .... \sum_{\eta_{n\in\{-1,1\}}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_k \right\|_E^p \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2^n} \sum_{\eta\in\{-1,1\}^n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k x_k \right\|_E^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \textbf{avec } \eta \in \left(\eta_{1,} \eta_2 \quad \eta_n \right)$$

Exemple1

La norme d'un elémentde E

$$\|\xi x\|_{L^p(\Omega,E)} = \left[\int_{\Omega} \|\xi x\|_{L^p(\Omega,E)} \quad dp(\omega) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\|x\|_E^p \;\; p(\Omega) \right]^{\frac{1}{p}} = \|x\|_E \;\; , p(\Omega) = 1$$

La normede la somme de deux éléments de E est

$$\|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2\|_{L^p(\Omega,E)} = \left[\frac{1}{2^2} \sum_{\xi_{1(\omega)\in\{-1,1\}}} \sum_{\xi_{2(\omega)\in\{-1,1\}}} \|\xi_1 x_1 + \ \xi_2 x_2\|_E^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

où

$$\|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2\|_{L^p(\Omega,E)} = \left[\frac{1}{2^2} \sum_{\xi_{1(\omega)\in\{-1,1\}}} \|\xi_1 x_1 + x_2\|_E^p + \|\xi_1 x_1 - x_2\|_E^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

où encore

$$\begin{aligned} \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2\|_{L^p(\Omega,E)} &= \left[\frac{1}{2^2}\left[\|x_1 + x_2\|_E^p + \|x_1 - x_2\|_E^p\right] + \|-x_1 + x_2\|_E^p + \|-x_1 - x_2\|_E^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left[\|x_1 + x_2\|_E^p + \|x_1 - x_2\|_E^p\right]\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Remarque2

La notion de R-norme concerne une famille d'éléments contrairement à la notion de norme habituelle qui dèfinit la norme d'un seul élément.

Définition 5 (*L' inégalité de khintchin-kahane*)*Pour* p, q *tels que* $0<p, q <\infty$*, il existe une constante* $k_{p,q}<\infty$ *telle que dans chaque espace linéaire normé,on a :*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right\|_{L^p(\Omega,E)} \leq K_{p,q} \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right\|_{L^p(\Omega,E)}$$

Cette inégalité est dite inégalité de khintchin-kahane.

Remarque3

Pour les conditions suivantes

1) x_1,x_2,.., x_n.$\in E$

2)ξ_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$si E est une fonction de Rademacher

3)E est un éspace de Banach

4)$\sum_{k=1}^{n}$ $\xi_k x$ convergente dans$_{L^p(\Omega,E)}$

la série$\sum_{k=1}^{n}$ $\xi_k x$ convergente dans chaque L^pet l'inégalité est vraie pour $n = \infty$

1.3 R-Bornitude d'une famille d'opérateurs linaires bornés

Définition 6 *La famille des opérateurs linéaires bornes* $M \subset B(X, Y)$*où* $X etY$ *sont des espaces véctoriels normés,est appelé* R-bornitude.

Si pour tout $p \in [1, \infty)$ *il existe une constante* C *telle que pour* $n \in \mathbb{N}$,$T_K \in M$

1$\leq K \leq n$ et pour tout fonction de Rademacher $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$,on a l'inégalité

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k T_K x_k\right\|_{L^p(\Omega,Y)} \leq C\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right\|_{L^p(\Omega,X)} \qquad (*)$$

Remarques 4

1) R-bornitude concerne une famille de opérateurs linaires bornée contrairement à la notion de bornée qui concerne un seul operateur.

2) Pour $X = Y = E$ et $p = 1$,l'inégalité$(*)$est équvalent à l'inégalité

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\ T_K\ x_k\right\|_{L^1(\Omega,E)} \leq C\left\|\sum_{k=1}^{n}\ \xi_k x_k\right\|_{L^1(\Omega,E)} \qquad (**)$$

3) Le minorant des constantes C noté $R_p(M)$ et dit R-bornitude de M d'order p

4) Pour l inégalité $(**)$,on a

$$R_p(M) = Inf\{C \geq 0 \text{ tel que } (*.*) \text{ est verifié}\}$$

et pour $S, T \in M$,on a

$$\begin{aligned} R_p(S+T) &\leq R_p(S) + R_p(T) \\ R_p(S\times T) &\leq R_p(T)\times R_p(S) \end{aligned}$$

1.4 Les martingales

Définition 7 *La martingale est une suite $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$ de variables aliatoires dans l'espace de probabilité (Ω, F, P) associée à une suite croissante $(F_k)_{k=1}^{\infty}$des sous-$\delta-$algèbre incluses dans F.On appelle suite de différence martingale la suite définie par*

$$\delta f_k = f_k - f_{k-1}$$

et qui vérifie la condition $E(\delta f_k / F_{k-1}) = 0$,ou $f_0 = 0$, $(F_k)_{k=1}^{\infty}$est une suite croissante et f_k est F_k-mesurable.

1.5 Espaces U.M.D

Définition 8 *Soit E un espace de Banach,on dit que E est un espace U.M.D si :*

i) E possède les propriétés de différence Martingale inconditionnel (Unconditionality of Martingale Difference)dans $L^p(\Omega, E)\,, p \in (1, \infty)$.

ii) Il existe une constante C_p tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait l'inégalité

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \delta f_k \right\|_{L^p(\Omega,E)} \leq C_p \left\| \sum_{k=1}^{n} \delta f_k \right\|_{L^p(\Omega,E)} = C_p \left\| f_n \right\|_{L^p(\Omega,E)}$$

Où

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \delta f_k$$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \delta f_k &= \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) \\ &= (f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + ... + (f_n - f_{n-1}) \\ &= f_n \qquad (f_0 = 0) \end{aligned}$$

Où $f \in L^p(\Omega, E)^{\mathbb{N}}$ et $\xi_k \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ est une fonction de Rademacher.

1.6 Transformation de Fourier

Définition 9*Soit E un espace U.M.D et $u \in L^1(\Omega, E)$,la transformation*

$$F[u(\lambda)] = \widehat{u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} u(t) \exp(-i\lambda t)\, dt \qquad ,\lambda \in \mathbb{R}$$

est dite transformation de Fourier

Définition 10*L'inverse de la transformation de Fourier est défini par*

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\lambda) \exp(i\lambda t)\, d\lambda$$

Remarque 5 Si $u \in S'$ on a

$$D^{\alpha} F(u(\lambda)) = F[(i\lambda)^{\alpha} u].$$

Et on a

$$F[D^{\alpha} u(\lambda)] = (-i\lambda)^{\alpha} F[u]$$

1.7 Rappels de quelques espaces fonctionnels

1)Soit E un espace de Banach,note par $D(\mathbb{R},E)$ l'espace de fonctions de base tel que

$$D(\mathbb{R},E)=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R},E):\text{supp}(f)\ \text{ est compact}\}$$

Remarque 6 Le support d'une fonction f est défini par

$$\text{supp}(f)=\overline{\{x:f(x)\neq 0\}}$$

2) On note par

$$D^{'}(\mathbb{R},E)=L(D(\mathbb{R},E),E)$$

l'espace des distributions.$L(D(\mathbb{R},E),E)$ est donc l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur $D(\mathbb{R},E)$ et à valeurs dans E

3) On définit l'espace de Shwartz $S(\mathbb{R},E)$ par

$$S(\mathbb{R},E)=\left\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R},E):t^{\alpha}D^{\beta}f\in L^{\infty}(\mathbb{R},E)\ \text{ pour tout } \alpha,\beta\in\mathbb{N}\right\}$$

$S'(\mathbb{R},E)=L(S(\mathbb{R},E),E)$ est l'espace des distributions tempérées tel que l'espace C^{∞}des fonctions infiniment dérivables.

4) $L^{1}_{loc}(\mathbb{R},E)$ est l'espace des fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Définition 11*Soit la fonction $M\in L^{1}_{loc}(\mathbb{R},L(E))$ on définit l'opérateur $M(D)$ par*

$$\begin{aligned} M(D) \quad &: \quad \digamma^{-1}D(\mathbb{R},E)\rightarrow S'(\mathbb{R},E) \\ \phi \quad &\rightarrow \quad \digamma^{-1}M\digamma\phi \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$M(D)\phi=\digamma^{-1}[M\digamma\phi]\ \text{ pour tout } \digamma\phi\in D(\mathbb{R},E),\phi\in S(\mathbb{R},E)$$

Remarque 7

Comme $\digamma^{-1}D(\mathbb{R},E)$ est dense dans $L^{p}(\mathbb{R},E)$,alors $M(D)$ est défini sur un sous ensemble dense de $L^{p}(\mathbb{R},E)$

Théorème1 (de Weis)*Soit E un espace U.M.D et $1 < p < \infty$,si considèreé la fonction différentiable M*

$$M : \mathbb{R} - \{0\} \to L(E) \ \text{ c'est-à-dire :} M \in C^1(\mathbb{R} - \{0\}, L(E))$$

vérifiant

1) $\{M(s) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ *est R-bornitude*

2) $\{sM'(s) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ *est R-bornitude*

alors l'opérateur $M(D)$est borné.

Chapitre II

LES SEMI-GROUPES ANALYTIQUES

2.1 Opérateurs sectoriels

Définition 12*Soit* $\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ *et considérons l'ensemble*

$$\Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \delta\} \cup \{0\}.$$

la famille des opérateurs $(T_z)_{z\in\Sigma_\delta}$*est dite semi-groupe analytique (d'angle* δ*) si*

1) $T(0) = I$ *et* $T\left(z + z'\right) = T(z)\,T\left(z'\right)$ *pour* $z, z \in \Sigma_\delta$*.*

2) L'application $z \longmapsto T(z)$ *est analytique sur* Σ_δ*.*

3) $\underset{z\to 0}{Lim} T(z)\,x = x$ *pour tout* $x \in X$*,* $0 < \delta' < \delta$ *et* $z \in \Sigma_\delta$

Remarque 8

Si l'ensemble $\left\{\|T(z)\| \;\; z \in \Sigma_{\delta'}\right\}$est borné pour tout $0 < \delta' < \delta$,alors $(T_z)_{z\in\Sigma_{\delta'}}$ est dit semi-groups analytique borné.

Définition 13*Soit* $(A, D(A))$ un *opérateur linéaire fermé dont le domaine est dense dans un espace de Banach* E $\left(\overline{D(A)} = E\right)$*est dit sectoriel (d'angle* δ*)si*

1)Ilexiste δ*,*$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ *tel que* $\Sigma_{\delta+\frac{\pi}{2}} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$

2)Pour $\epsilon \in (0, \delta)$*,il existe* $M > 0$ *tel que* $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ *pour* $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\delta+\frac{\pi}{2}-\epsilon}$ *et* $\lambda \neq 0$*.*

Définition 14*Soit* $(A, D(A))$ *opérateur linéaire fermé avec domaine dense* $\left(E = \overline{D(A)}\right)$ *dans un espace de Banach* E *et dit sectoriel (d'angle* δ*)si*

1)Existe δ*,*$0 <_\delta < \frac{\pi}{2}$ *tel que* $\Sigma_{\delta-\frac{\pi}{2}} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2} - \delta\right\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$

2).Pour $\epsilon \in (0, \delta)$ *il existe*$M > 0$ *tel que* $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ *pour* $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\delta-\frac{\pi}{2}+\epsilon}$ *et* $\lambda \neq 0$*.*

Nous avans donc deux cas

1^{er}cas on definit $T(z)$ par $\mathbf{T}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda}$ pour $z \in \Sigma_{\delta+\frac{\pi}{2}}$

$2^{\text{ème}}$cas on definit $T(z)$ par $\mathbf{T}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathbf{e}^{-\lambda z}\mathbf{R}(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda}$ pour $z \in \Sigma_{\delta-\frac{\pi}{2}}$

tel que $T(z)$ est un semi-groupe analytique et γ le contour d'integral.

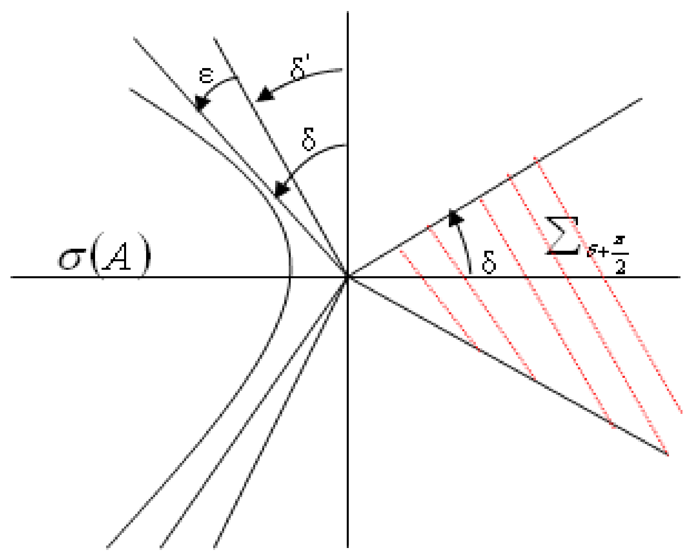
Question

Quelles sont les conditions sur A pour que $\mathbf{e}^{\lambda z}$ et $\mathbf{T}(z)$ soient définis dans les deux cas **?**

Pour un opérateur sectoriel on a le calcul fonctionnel suivant

Pour le $\mathbf{1}^{er}$cas

on a $\mathbf{T}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}(\lambda, A)\, \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}, z \in \Sigma_{\delta+\frac{\pi}{2}}$ (fig1)

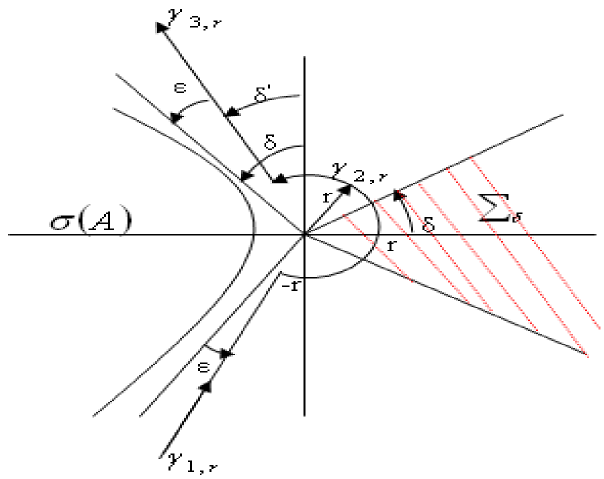


(fig1)

Chercher l'existence de $\mathbf{T}(z)$ revient à étudier la convergete de l'integral $\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}(\lambda, A)\, \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}$.

le contour γ déformé d'apré leThéorème de Cauchy,donc pour $\mathbf{T}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}(\lambda, A)\, \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}$

on a(fig2)



(fig2)

tel que $\gamma = \gamma_r = \gamma_{r,1} \cup \gamma_{r,2} \cup \gamma_{r,3}$ et

$$\gamma_{r,1} = \left\{ -\rho e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}; -\infty < \rho < -r \right\}$$

$$\gamma_{r,2} = \left\{ re^{i\alpha}; -\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right) \leq \alpha \leq \left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right) \right\}$$

$$\gamma_{r,3} = \left\{ \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}; r < \rho < \infty \right\}$$

1) pour $\lambda \in \gamma_{r,3}$ et $z \in \Sigma_{\delta'}$ tel que $0 \ < \delta' < \delta$ et,$\delta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ posons$\left(r = \frac{1}{|z|}, \frac{\delta-\delta'}{2} = \epsilon \right)$ on a

$$\lambda z = |\lambda z| \, e^{i \arg(\lambda z)} = |\lambda z| \, e^{i(\arg(\lambda)+\arg(z))}$$

et comme

$$\begin{aligned} -\delta' &< \arg(z) < \delta' ....(1) \\ \arg(\lambda) &= \frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon .... \qquad .(2) \end{aligned}$$

en sommant (1) et (2) on trouve

$$\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon - \delta' < \arg(z) + \arg(\lambda) < \frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon + \delta'$$

d'où

$$\frac{\pi}{2}+\epsilon<\arg(z)+\arg(\lambda)<\frac{3\pi}{2}-\epsilon...(3)$$

tel que

$$0<\delta'<\delta<\frac{\pi}{2}$$

Les complexes λz ont des parties réelles négatives car

$$\operatorname{Re}(\lambda z)=|\lambda z|\cos(\arg(z)+\arg(\lambda)).$$

d'aprés (3)

$$\cos(\arg(z)+\arg(\lambda))\leq\cos\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon\right).$$

(car la fonction cosinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$),

d'où

$$\operatorname{Re}(\lambda z)=|\lambda z|\cos(\arg(z)+\arg(\lambda))\leq|\lambda z|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon\right)$$
$$=-|\lambda z|\sin(\epsilon)$$

et

$$\operatorname{Re}(\lambda z)\leq-|\lambda z|\sin(\epsilon)$$

donc

$$\left|e^{\lambda z}\right|=e^{\operatorname{Re}(\lambda z)}\leq e^{-|\lambda z|\sin(\epsilon)},$$

d'où

$$\left\|\mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}(\lambda,A)\right\|=\left|\mathbf{e}^{\lambda z}\right|\|\mathbf{R}(\lambda,A)\|\leq e^{-|\lambda z|\sin(\epsilon)}\frac{M}{|\lambda|}... \qquad (4)$$

pour $\lambda\in\gamma_{r,3}$ et $z\in\Sigma_{\delta'}$

2) Pour $\lambda\in\gamma_{r,1}$ et $z\in\Sigma_{\delta'}$.

$$\begin{cases}-\delta'<\arg(z)<\delta'....... & (5)\\ \arg(\lambda)=-\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right).....(6)\end{cases}$$

en sommant (5) et (6)

$$-\delta'-\frac{\pi}{2}-\delta+\epsilon<\arg(z)+\arg(\lambda)<\delta'-\frac{\pi}{2}-\delta+\epsilon$$

d'où

$$-\frac{3\pi}{2}+\epsilon<\arg(z)+\arg(\lambda)<-\frac{\pi}{2}-\epsilon$$

Les complexes λz ont des parties réelles négatives car

$$\mathrm{Re}\left(\lambda z\right) = \left|\lambda z\right| \cos\left(\arg\left(z\right) + \arg\left(\lambda\right)\right) \leq \left|\lambda z\right| \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$$

et on a

$$\begin{aligned} \left|\lambda z\right| \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) &= \left|\lambda z\right| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \\ &= -\left|\lambda z\right| \sin\left(\epsilon\right) \end{aligned}$$

(car la fonction cosinus est croissante sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$).

donc

$$\left|e^{\lambda z}\right| = e^{\mathrm{Re}(\lambda z)} \leq e^{-|\lambda z| \sin(\epsilon)}.$$

$$\left\|\mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| = \left|\mathbf{e}^{\lambda z}\right| \left\|\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| \leq e^{-|\lambda z| \sin(\epsilon)} \frac{M}{|\lambda|} ... (7)$$

pour $\lambda \in \gamma_{r,1}$ et $z \in \Sigma_{\delta'}$.

3)Pour $\lambda \in \gamma_{r,2}$ et $z \in \Sigma_{\delta'}$on a

$$\lambda = re^{i\alpha} \text{ tel que } -\left(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon\right) \leq \alpha \leq \left(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon\right),$$

d'où

$$\left\|\mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| = \left|\mathbf{e}^{\lambda z}\right| \left\|\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| \leq e^{|\lambda z|} \frac{M}{|\lambda|}.$$

comme

$$\lambda = re^{i\alpha}, et\ r = \frac{1}{|z|}$$

on a

$$\left\|\mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| \leq e^{\left|re^{i\alpha}z\right|} \frac{M}{|re^{i\alpha}|}$$

comme

$$e^{\left|re^{i\alpha}z\right|} \frac{M}{|re^{i\alpha}|} = e^{r|z|} \frac{M}{r} = e^{r\frac{1}{r}} \left|z\right| M = e \ \left|z\right| \ M$$

d'ou'

$$\left\|\mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)\right\| \leq e \ \left|z\right| \ M \qquad (8)$$

Pour $\lambda \in \gamma_{r,2}$ et $z \in \Sigma_{\delta'}$on a

$$\left\|\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| = \left\|\int_{\gamma r} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\|,$$

tel que $\gamma = \gamma_r = \gamma_{r,1} \cup \gamma_{r,2} \cup \gamma_{r,3}$

d'où

$$\left\|\int_{\gamma r} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| = \left\|\int_{\gamma_{r,1}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda + \int_{\gamma_{r,2}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda + \int_{\gamma_{r,3}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| \leq$$

$$\left\|\int_{\gamma_{r,1}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| + \left\|\int_{\gamma_{r,2}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| + \left\|\int_{\gamma_{r,3}} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\|.$$

en sommant. $(6), (7)\, et\ (8)$d'où

$$\left\|\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| \leq \int_{\gamma_{r,1}} e^{-|\lambda z|\sin(\epsilon)} \frac{M}{|\lambda|} d\lambda + \int_{\gamma_{r,2}} e\,|z|\, M d\lambda + \int_{\gamma_{r,3}} e^{-|\lambda z|\sin(\epsilon)} \frac{M}{|\lambda|} d\lambda \tag{9}$$

ce qui implique

$$\left\|\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| \leq \int_{-\infty}^{-r} e^{-\left|-\rho e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)z}\right|\sin\epsilon} \frac{M}{\left|-\rho e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}\right|} d\rho + 2\pi r e M\,|z| +$$

$$\int_{r}^{+\infty} e^{-\left|\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)z}\right|\sin\epsilon} \frac{M}{\left|\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}\right|} d\rho \tag{10}$$

comme

$$\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}\right| = \left|e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon\right)}\right| = 1 et\,|-\rho| = -\rho si\ \rho < 0,$$

on a

$$\left\|\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| \leq \int_{-\infty}^{-r} e^{-(-\rho)|z|\sin\epsilon} \frac{M}{|-\rho|} d\rho + 2\pi r e M\,|z| + \int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon} \frac{M}{\rho} d\rho,$$

c'est -à-dire :

$$\left\|\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right) d\lambda\right\| \leq \int_{-\infty}^{-r} e^{\rho|z|\sin\epsilon} \frac{M}{-\rho} d\rho + 2\pi r e M\,|z| + \int_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon} \frac{M}{\rho} d\rho. \tag{11}$$

posons dans l'integral $\int\limits_{-\infty}^{-r} e^{\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{-\rho}d\rho$ $\rho = -\rho$ *et* comme,$r = \frac{1}{|z|}$

on a encore

$$\left\|\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)d\lambda\right\| \leq 2\int\limits_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{\rho}d\rho + 2\pi reM\frac{1}{r} = 2\int\limits_{r}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{\rho}d\rho + 2\pi eM \tag{12}$$

En prenant $r = 1$ dans (12)

$$\left\|\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)d\lambda\right\| \leq 2\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{\rho}d\rho + 2\pi eM \tag{13}$$

On montre maintenant que l'integral $2\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{\rho}d\rho$ est convergente

En effet on a

$$e^{\rho|z|\sin\epsilon} \geq \rho\left|z\right|\sin\epsilon \Longrightarrow \frac{1}{e^{\rho|z|\sin\epsilon}} \leq \frac{1}{\rho\left|z\right|\sin\epsilon},$$

d'où

$$e^{-\rho|z|\sin\epsilon} \leq \frac{1}{\rho\left|z\right|\sin\epsilon} \Longrightarrow \frac{1}{\rho}e^{-\rho|z|\sin\epsilon} \leq \frac{1}{\rho^2\left|z\right|\sin\epsilon}$$

donc

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\rho|z|\sin\epsilon}}{\rho}d\rho \leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2\left|z\right|\sin\epsilon}d\rho = \frac{1}{|z|}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}d\rho = \frac{1}{|z|\sin\epsilon}.$$

d'où

$$2\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\rho|z|\sin\epsilon}\frac{M}{\rho}d\rho \leq 2M\frac{1}{|z|\sin\epsilon}.$$

De (13) on a

$$\left\|\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)d\lambda\right\| \leq 2M\frac{1}{|z|\sin\epsilon} + 2\pi eM,$$

Posons

$$C = 2M\frac{1}{|z|\sin\epsilon} + 2\pi eM$$

d'où

$$\left\|\int\limits_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\left(\lambda, A\right)d\lambda\right\| \leq C,$$

donc

$$\mathbf{T}\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\,(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda} \;\; defini\ pour\ \lambda \in \gamma et\ z \in \Sigma_{\delta'}$$

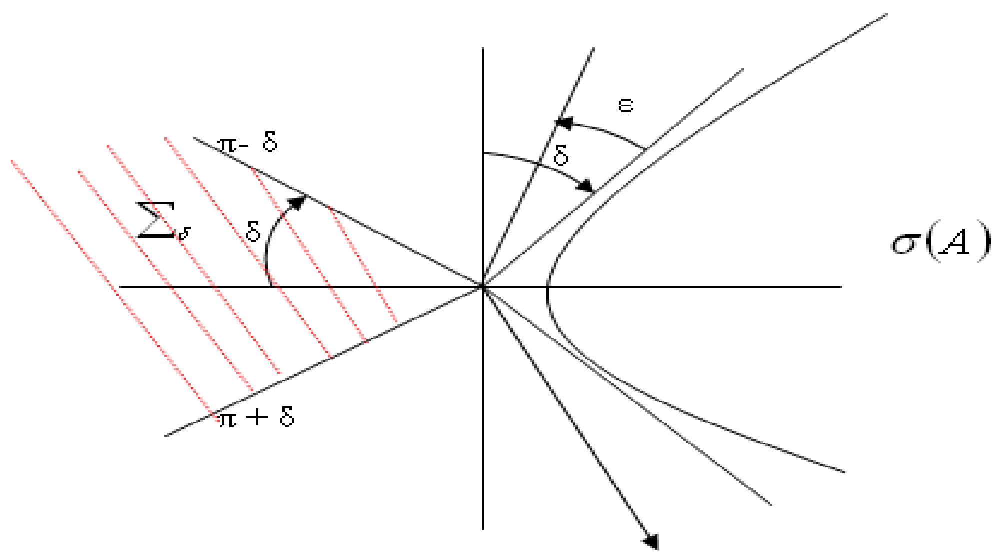
c′est -à-dire

$$\|\mathbf{T}\,(z)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mathbf{e}^{\lambda z}\mathbf{R}\,(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda} \right\| \leq K \;\; \text{tel que } K \text{ est constante.}$$

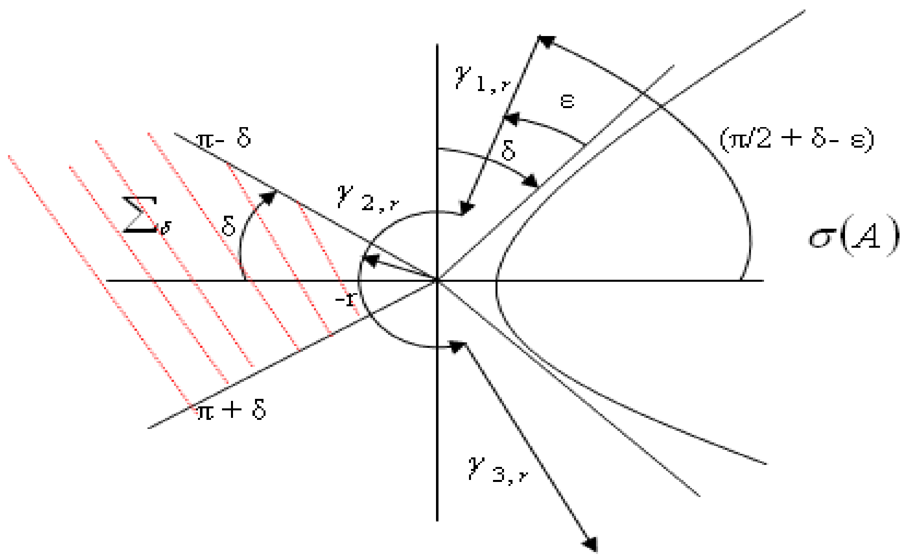
$2^{ème}$cas on definit

$$\mathbf{T}\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \mathbf{e}^{-\lambda z}\mathbf{R}\,(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda} \;\; \text{pour } \lambda \in \gamma\ et\ z \in \Sigma_{\delta - \frac{\pi}{2}}$$

En suivant les mêmes étapes de démonstration on trouve que ; pour que T(z) soit définie sur le contours (γ) comme le montré ces fig(3) et(4)



(fig 3)



(fig4)

2.2 Calcul fonctionnel d'opérateurs sectoriels dans H^∞

Introduction

Cette partie montre le calcul fonctionnel d'opérateur sectorial dans H^∞et pour cela nous définissons quelques espaces fonctionnels et en plus nous cherchons l'existence de la résolvante d'opérateurs sectoriels et la caractérisation du problème posé.

Définition 15*Soit A* un *opérateur linéaire fermé avec domaine dense* $\left(E = \overline{D(A)}\right)$ *dans un espace de Banach E On dit que A est sectoriel si*

1) Il *existe* $\theta \in [0, \pi]$ *tel que* $\sigma(A) \subseteq \Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \theta\} \cup \{0\}$

2) $\forall\ \mu > \theta$ *ona* $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M_\mu \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \Sigma_\mu$

L' angle spectral $\omega(A)$ *d'opérateur sectorial definit par*

$$\omega(A) = Inf \ \{\theta \in [0,\pi] \ \text{tel que } \mathbf{1)},\mathbf{2)} \text{ sont verifieés}\}$$

Définition 16 *Pour A un opérateur sectoriel avec l'angle spectral* $\omega(A)$ *dans le cas* $0 \in \rho(A)$ *et pour* $\omega(A) < \theta < \mu < \pi$ *on pose*

$$\Sigma_{\mu,0} = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : |\arg(\lambda)| < \mu\}$$

on a les espaces fonctionnels

$$H(\Sigma_{\mu,0}) = \{f : \Sigma_{\mu,0} \to \mathbb{C}, f \text{ holomorphe}\},$$

$$H^{\infty}(\Sigma_{\mu,0}) = \{f \in H(\Sigma_{\mu,0}) : \|f\|_{\infty} < \infty\}$$

L'espace des fonctions holomorphe,bornées

$$H_0^{\infty}(\Sigma_{\mu,0}) = \left\{f \in H(\Sigma_{\mu,0}) : \exists \ s > 0 : f \ \psi^{-s} \in H^{\infty}(\Sigma_{\mu,0})\right\}$$

et

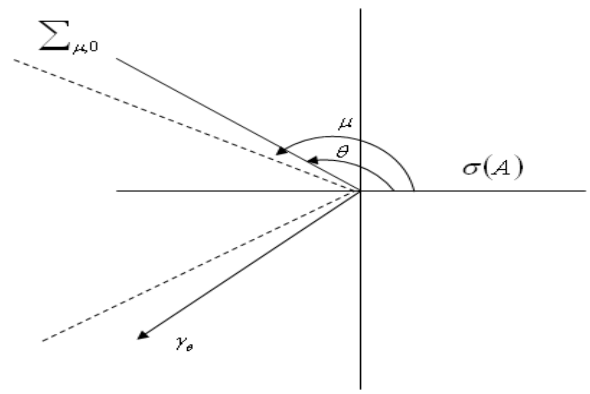
$$F \ (\Sigma_{\mu,0}) = \{f \in H(\Sigma_{\mu,0}) : \exists \ s > 0 : f \ \psi^{s} \in H^{\infty}(\Sigma_{\mu,0})\},$$

tels que

$$\psi(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\zeta^2} et \, \|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty,\Sigma_{\mu,0}} = Sup\{f(\lambda) : \lambda \in \Sigma_{\mu,0}\}$$

On défini le contour γ_θ*par(fig5)*

$$\gamma_\theta = \begin{cases} -te^{i\theta} & si \quad t \ \leq \ 0 \\ te^{-i\theta} & si \quad t \ \geq \ 0 \end{cases}$$



(fig 5)

Définition 17*Soit A un opérateur avec sectorial l' angle spectral* $\omega(A)$ *tel que* $\omega(A) < \theta < \mu < \pi$ *,et* γ_θ *le contour d'intégral ,alors on définit l opérateur* $f(A)$ *comme suit*

1) *Pour* $f \in H(\Sigma_{\mu,0})$

$$\mathbf{f}(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\theta} f(\lambda)\,\mathbf{R}(\lambda, A)\,\mathbf{d\lambda}$$

2) *Pour :*$f \in F(\Sigma_{\mu,0})$on *choisi* $k \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$f\psi^k \in H_0^\infty(\|f\|_\infty)$$

on pose $\quad f(A) = \psi^{-k}(A)\left(f\psi^k\right)(A)$

où

$$D(f(A)) = \left\{x \in E : f\psi^k(A)\,x \in D\left(\psi^{-k}(A)\right)\right\}$$

Remarques 9

1) Pour les définitions $(1), (2)$ et (3)on peut utiliser le calcul fonctionnel précédent.

2) Dans le cas où A *est un opérateur sectoriel avec l'angle spectral* $\omega(A)$ tel que $\omega(A) < \frac{\pi}{2}$,$A$ est dit bis*sectoriel et* $\omega(A) = \varpi(A)$.

Ce qui nous mène aux opérateurs bissectoriels.que l'on va développer au chapitre suivant

Chapitre III

OPÉRATEURS BISSECTORIELS

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions une classe spéciale d'opérateurs linéaires fermés appelés opérateurs bissectoriels,Le nom bissectoriel vient du fait que le spectre de ces opérateurs est contenu dans un secteur double Nous verrons plus tard que ces opérateurs sont trés importants pour l'étude des équations différentielles du premier ordre.

Définition *18* *Soit A un opérateur linéaire fermé.On dit que A est bissectoriel s'il existe $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $c > 0$ tel que*

1) $\sigma(A) \subseteq S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(\pm z)| \leq \theta\} \cup \{0\}$

2) $\|R(z, A)\| \leq \frac{c}{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \diagup S_\theta$.

L'angle spécral $\varpi(A) = \inf\left\{\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ telle que ces conditions 1)et 2) sont vérifiées}\right\}$.

Si $0 \in \rho(A)$ on peut défini les deux spectres suivants

$$\sigma^-(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$$

$$\sigma^+(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$$

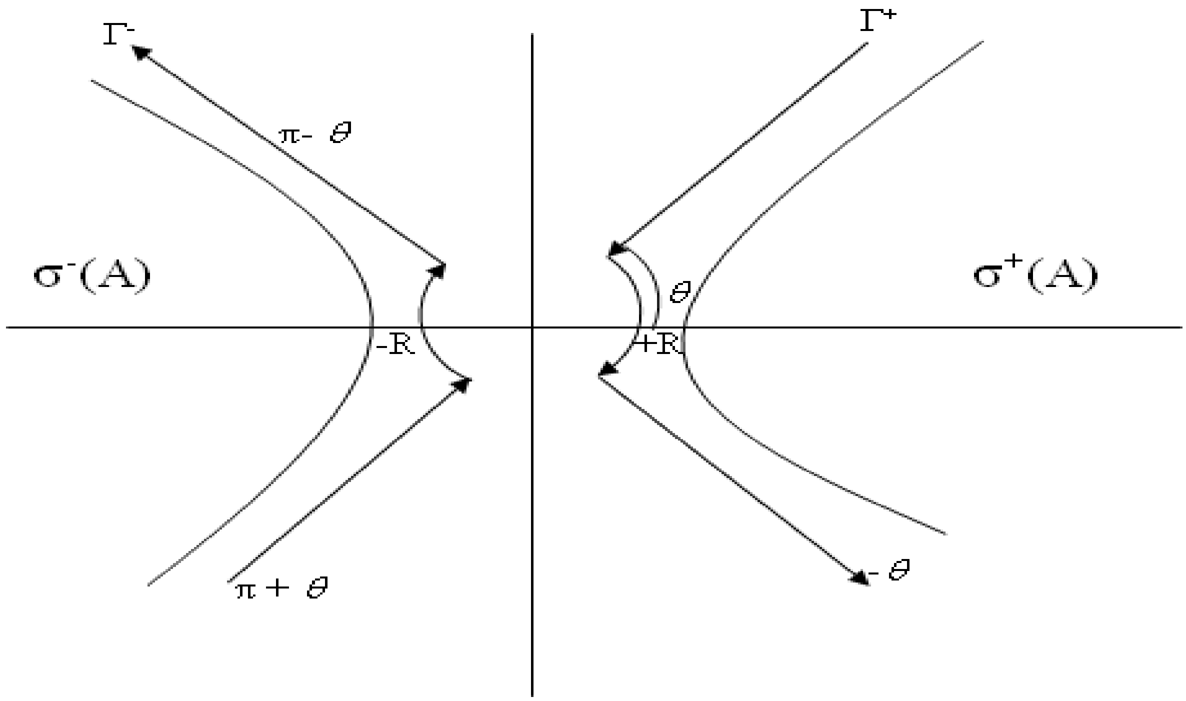
et on défini les secteurs $\Gamma^+_{\theta,R}, \Gamma^-_{\theta,R}$

$$\Gamma^-_{\theta,R} = \begin{cases} t\,\mathrm{R}e^{i\theta} & \text{si } t \leq -1 \\ -\mathrm{R}e^{-i\theta t} & \text{si } -1 < t < 1 \\ -t\,\mathrm{R}e^{-i\theta} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}, \quad \Gamma^+_{\theta,R} = \begin{cases} -t\,\mathrm{R}e^{i\theta} & \text{si } t \leq -1 \\ \mathrm{R}e^{-i\theta t} & \text{si } -1 < t < 1 \\ t\,\mathrm{R}e^{-i\theta} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

tel que

$$\varpi(A) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } R > 0, t \in \mathbb{R} \text{ et } B(R, 0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\} \subset \rho(A)$$

voir *fig (6)*



$(fig \quad 6)$

Remarque 10

pour justifier l'écriture $\Gamma^{+}_{\theta,R}$,et $\Gamma^{-}_{\theta,R}$, on pose

$$\rho = Rt$$

1-Pour

$$\Gamma^{-}_{\theta,R} = \Gamma^{-}_{1} \cup \Gamma^{-}_{2} \cup \Gamma^{-}_{3} ett \leq -1$$

on a

$$Rt \leq -R$$

d'où

$$-\infty < \rho \leq -R$$

Pour$z \in \Gamma^{-}_{1}$,on a

$$z = -\rho e^{i(\pi+\theta)} = -\rho e^{i\pi} e^{i\theta} = -\left(-\rho e^{i\theta}\right) = Rte^{i\theta}$$

d'où

$$z = \rho e^{i\theta} \text{ si } t \leq -1$$

Pour$z \in \Gamma_2^-$,on a

$$z = -Re^{i\alpha} \text{ tel que } -\theta < \alpha < \theta,$$

Posons $-\theta < \alpha < \theta$ on trouve

$$-\theta < -\alpha < \theta$$

on a encore

$$\frac{-\theta}{\theta} < \frac{-\alpha}{\theta} < \frac{\theta}{\theta}$$

En poant $t = \frac{-\alpha}{\theta}$et pour$z \in \Gamma_2^-$,on troouve

$$z = -Re^{i\alpha t} \text{ tel que } -1 < t < 1.$$

$$\text{Si } t \geq 1 \implies Rt \geq R \text{ donc} R < \rho \leq +\infty$$

Pour$z \in \Gamma_3^-$,on a

$$z = \rho e^{i(\pi-\theta)} = \rho e^{i\pi} e^{-i\theta} = -\rho e^{-i\theta}$$

d'où

$$z \in \Gamma_3^- \implies z = -Rte^{-i\theta}$$

2-Pour la décomposition $\Gamma_{\theta,R}^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3^+$

Si $t \leq -1$on a

$$Rt \leq -R$$

d'où

$$-Rt \geq R$$

on a encore

$$-\rho \geq R$$

d'où

$$R \leq -\rho \leq +\infty$$

donc pour $z \in \Gamma_1^+$on a

$$z = -\rho e^{i\theta} = -Rte^{i\theta},$$

d'où

$$z = -Rte^{i\theta} \qquad \text{si } t \leq -1$$

pour $z \in \Gamma_2^+$on a

$$z = Re^{i\alpha} \text{ tel que } -\theta < \alpha < \theta$$

En posant $-\theta < \alpha < \theta$,on a

$$-\theta < -\alpha < \theta$$

d'où

$$\frac{-\theta}{\theta} < \frac{-\alpha}{\theta} < \frac{\theta}{\theta}$$

En posant $t = \frac{-\alpha}{\theta}$on trouve

d'ou'

$$z = Re^{i\alpha t} \text{ tel que } -1 < t < 1$$

Si $t \geq 1$,on a

$$Rt \geq R$$

donc

$$-Rt \leq -R$$

d'où

$$-\infty < -Rt \leq -R$$

d'où si $z \in \Gamma_3^+$ on a

$$z = Rte^{-i\theta} \text{ tel que } t \geq 1$$

Remarque11

Puisque $\sigma(A) = \sigma^-(A) \cup \sigma^+(A)$ on a

$$S(\theta) = S^-(\theta) \cup S^+(\theta)$$

tel que

$$\begin{aligned} S^+(\theta) &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta\} \\ S^-(\theta) &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| < \theta\} \end{aligned}$$

Lemme1

Si A un est opérateur linéaire fermé alors les propriétés suivantes sont équvalentes

i) L'*opérateur A est bissectoriel avec* $0 \in \rho(A)$

ii) Il existe une constante $b \geq 0$ telle que

$$V_b = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{b}(1 + |\mathrm{Im}(z)|) \right\} \subset \rho(A),$$

et

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{b}{1 + |z|} \quad \text{pour tout} \qquad z \in V_b$$

Démonstration :

ii) $\Longrightarrow$ *i*) est évidente car

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{b}{1 + |z|} \leq \frac{b}{|z|} (b \geq 0)$$

c'est-à-dire

$$\|R(z, A)\| \leq \frac{b}{|z|}, z \in V_b \subset \rho(A)$$

alors

$$V_b \subset \rho(A) et \sigma(A) \subset S_\theta \cup \{0\},$$

d'où A est bissectoriel .

$i) \implies ii)$

Supposons que A est bissectoriel,et montrons que $V_b \subset \rho(A)$ et $\|R(z,A)\| \leq \frac{b}{1+|z|}$

on a

$$\|R(z,A)\| = \left\|AR(z,A)\,A^{-1}\right\| = \left\|(zR(z,A)+1)\,A^{-1}\right\|,$$

car

$$[(A-z)\,R(z,A)=1] \implies [AR(z,A) - zR(z,A) = 1],$$

d'où

$$AR(z,A) = zR(z,A)+1,$$

donc

$$\|R(z,A)\| = \left\|(zR(z,A)+1)\,A^{-1}\right\| \leq \|(zR(z,A)+1)\| \left\|A^{-1}\right\|$$

doù

$$\|R(z,A)\| \leq (c+1)\left\|A^{-1}\right\|$$

car$A$ est bissectoriel on a

$$|z|\,\|R(z,A)\| \leq c,$$

d'où

$$\|R(z,A)\| \leq (c+1)\left\|A^{-1}\right\|$$

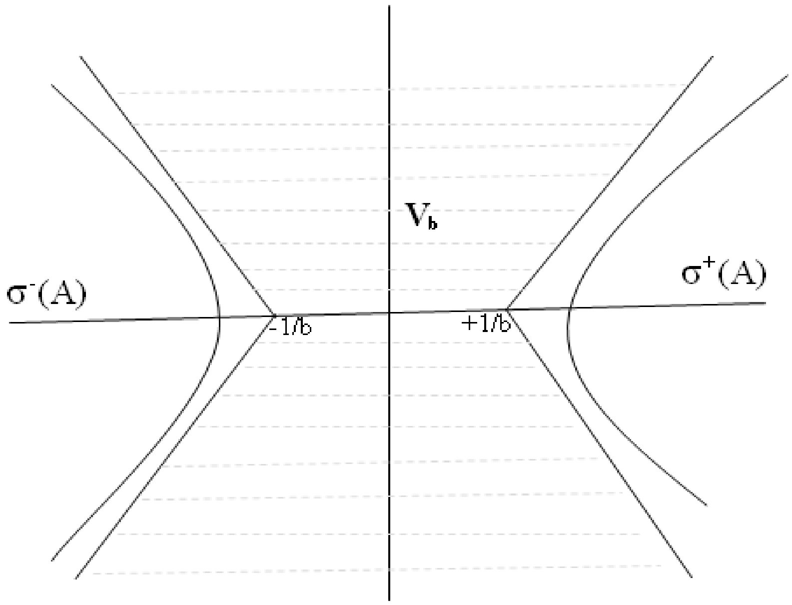
et

$$(1+|z|)\,\|R(z,A)\| = \|R(z,A)\| + |z|\,\|R(z,A)\| \leq (c+1)\left\|A^{-1}\right\| + \frac{c}{|z|}\,|z| = b$$

donc

$$(1+|z|)\,\|R(z,A)\| \leq b \implies \|R(z,A)\| \leq \frac{b}{(1+|z|)}$$

(*fig 7*)



(fig 7)

Remarque12

L'ensemble V_b tel que V_b=$\left\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| \leq \frac{1}{b}\,(1 + |\mathrm{Im}\,(z)|)\right\} \subset \rho\,(A)$ est géométriquement la solution de système

$$\left\{\begin{array}{c} y - bx + 1 \geq 0 \\ -y - bx + 1 \geq 0 \\ -y + bx + 1 \geq 0 \\ y + bx + 1 \geq 0 \end{array}\right. : (0,0) \in V_b$$

3.2 Semi-groupes analytiques liés à un opérateur bissectoriel

Soit A un opérateur bissectoriel tel que $0 \in \rho\,(A)$ et soient les courbes $\Gamma^{-}_{\theta,R}$ et ,$\Gamma^{+}_{\theta,R}$.On défini sur E les opérateurs suivants

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{-}(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}} \mathbf{e}^{\lambda t}\mathbf{R}(\lambda,A)\,\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\ t>0 \text{ et} \\ \mathbf{T}^{+}(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^{+}_{\theta,R}} \mathbf{e}^{-\lambda t}\mathbf{R}(\lambda,A)\,\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\ t>0\end{aligned}$$

Comme A est bissectoriel,ces intégrales convergentes

c'est-à-dire

$$\|R(z,A)\| \leq c \ \text{ dans } L(E).$$

D'apres le théorème de Cauchy $(\mathbf{T}^{-}(t))_{t>0}$ et $(\mathbf{T}^{+}(t))_{t>0}$ sont des semi-groupes analytiques

Lemme2

Pour tout $x \in D(A)$ les applications $t \longrightarrow \overset{+}{T^{-}}(t)\,x$ sont differentiables pour tout $t>0$ et on a

$$\frac{d\overset{+}{T^{-}}(t)}{dt}x = \pm A(t)\,x$$

Démonstration :

soit $x \in D(A)$ et $t>0$ pour tout $(T^{-}(t))_{t>0}$

$$\begin{aligned}\underset{s\longrightarrow 0}{Lim}\frac{T^{-}(t+s)\,x-T^{-}(t)\,x}{s} &= \underset{s\longrightarrow 0}{Lim}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}}\frac{\left(\mathbf{e}^{\lambda(t+s)}-\mathbf{e}^{\lambda t}\right)\mathbf{R}(\lambda,A)}{s}x\ \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}}\lambda\mathbf{e}^{\lambda t}\mathbf{R}(\lambda,A)\,x\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}}\mathbf{e}^{\lambda t}x\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{2\pi i}A\int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}}\lambda\mathbf{e}^{\lambda t}\mathbf{R}(\lambda,A)\,x\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

car

$$\lambda\mathbf{R}(\lambda,A) = I + A\mathbf{R}(\lambda,A)$$

En fermant la courbe $\Gamma^{-}_{\theta,R}$ par des cercles de diamètre,croissant ,sur la gauche,et on utilisant le théorème de Cauchy, on a

$$\int\limits_{\Gamma^-_{\theta,R}} \mathbf{e}^{\lambda t} x \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0},$$

d'où

$$\underset{s\to 0}{Lim} \frac{T^-(t+s)x - T^-(t)x}{s} = AT^-(t)x$$

De la même façon, nous obtenons

$$\underset{s\to 0}{Lim} \frac{T^+(t+s)x - T^+(t)x}{s} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+_{\theta,R}} \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t} \mathbf{R}(\lambda, A) x \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda} = -AT^+(t)x$$

Lemme3 *Soit$A$ un opérateur bissectoriel et* $(\mathbf{T}^-(t))_{t>0}$,$(\mathbf{T}^+(t))_{t>0}$ *des semi-groupes correspondants alors*$(\mathbf{T}^-(t))_{t>0}$,$(\mathbf{T}^+(t))_{t>0}$ *commutants et on a*

$$\mathbf{T}^-(t).\mathbf{T}^+(s) = 0 \quad \forall t, \qquad s > 0.$$

En plus ,on a $\mathbf{T}^-(t)$ et $\mathbf{T}^+(t)$ *est exponentiellements stables pour* $t \longmapsto \infty$.

Définition 19 *Soit A un bissectoriel nous définissons les opérateurs* Q^-, Q^+*sur l'espace de Banach E tels que*

$$\begin{aligned} D(Q^-) &= \left\{x \in X : \underset{t\to 0}{Lim} \mathbf{T}^-(t)x \text{ existe}\right\} \text{et} Q^- x = \underset{t\to 0}{Lim} \mathbf{T}^-(t)x \forall x \in D(Q^-) \\ D(Q^+) &= \left\{x \in X : \underset{t\to 0}{Lim} \mathbf{T}^+(t)x \text{ existe}\right\} \text{et} Q^+ x = \underset{t\to 0}{Lim} \mathbf{T}^+(t)x \forall x \in D(Q^+) \end{aligned}$$

Définition 20 *Soit$A$ un opérateur linéaire dans l'espace de Banach E de domaine $D(P)$.On dit que P est une projection si*

$$\begin{aligned} D(P) &= D(P^2) = \{x \in D(P) \diagup Px \in D(P)\}, \\ Px &= P^2 x \quad \text{pour tout} \quad x \in D(P) \end{aligned}$$

Proposition 1 *Les opérateurs* Q^-etQ^+ sont deux *projecetion dans E telle que*

$$Q^- Q^+ = 0 = Q^+ Q^-$$

Démonstration

on a

$$\begin{aligned}\left(Q^{-}\right)^{2} x &= \underset{t\to 0}{Lim}\mathbf{T}^{-}(t)\underset{s\to 0}{Lim}\mathbf{T}^{-}(t)\,x \\ &= \underset{t\to 0 s\to 0}{Lim}\mathbf{T}^{-}(t+s)\,x \\ &= \underset{t\to 0}{Lim}\mathbf{T}^{-}(t)\,x = Q^{-}(x),\end{aligned}$$

d'où

$$\left(Q^{-}\right)^{2} x = Q^{-}(x) \;\; et \;\; D\left(\left(Q^{-}\right)^{2}\right) x = D\left(Q^{-}\right)$$

De la même façon on obtient

$$\left(Q^{+}\right)^{2} x = Q^{+}(x) \; et \; D\left(\left(Q^{+}\right)^{2}\right) x = D\left(Q^{+}\right)$$

D'apres le lemme (3) on a

$$Q^{-}Q^{+}x = \underset{t\to 0 s\to 0}{Lim}\mathbf{T}^{-}(t)\,T^{+}(s)\,x = 0 = Q^{+}Q^{-}x$$

3.3 Calcul fonctionnel d'opérateurs bissectoriels dans H^{∞}

3.3.1 Projection spectrale

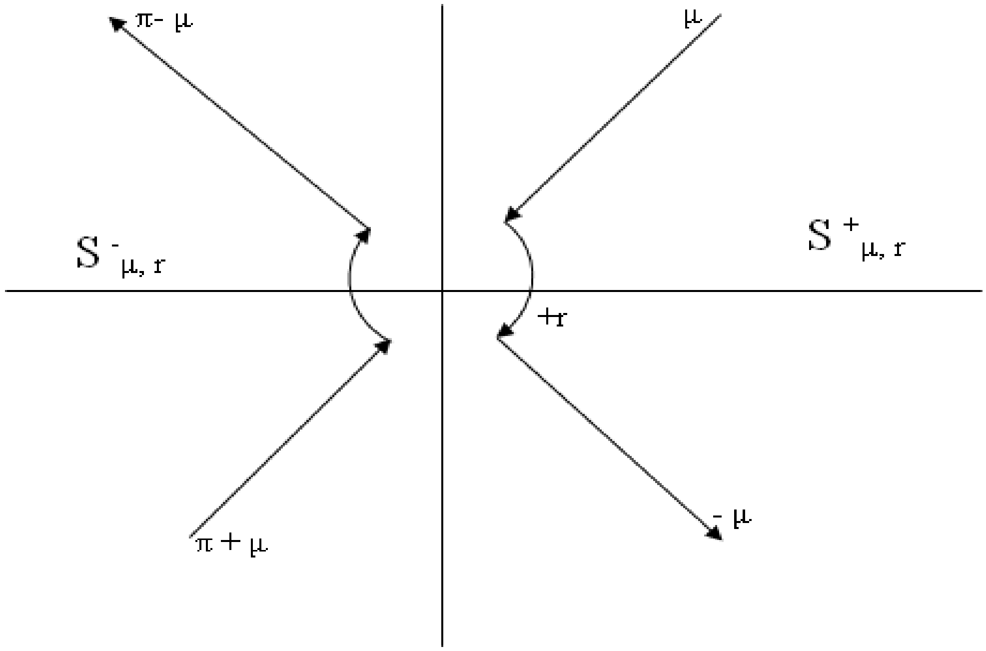
Dans cette section,nous considérons deux genres de projections, Le premier est la projection spectrale du calcul fonctionnel d'opérateurs bissectoriels, et le deuxième est la projection initiale qui survient des semi -goupes analytiques qui sont définis plus haut.Pareillement aux opérateurs sectoriels,On a les espaces fonctionnels suivants :

-Pour $\mu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $r > 0$,nous definissons les deux ensembles $S_{\mu,r}^{-}$ et $S_{\mu,r}^{+}$ par

$$S_{\mu,r} = S_{\mu,r}^{-} \cup S_{\mu,r}^{+} \qquad \text{(fig 8)}$$

tel que

$$\begin{aligned} S_{\mu,r}^{+} &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \mu, |z| > r\} \\ S_{\mu,r}^{-} &= \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z)| < \mu, |z| > r\} \end{aligned}$$



(fig 8)

On definit l'espace des fonctions holomorphes,sur $S_{\mu,r}$ par

$$H\ \ (S_{\mu,r})\ = \{f : S_{\mu,r} \longmapsto \mathbb{C}, f \ \text{ est holomorphe}\}$$

Remarques 13

1) f est une fonction holomorphe qui signifie que f est analytique ou f verifie les conditions de Cauchy-Rimman.

2) On définit la norme

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,S_{\mu,r}} = Sup\{f(\lambda) : \lambda \in S_{\mu,r}\}$$

telle que

$$f \in H\ \ (S_{\mu,r})$$

3) On définit l'espace des fonctions holomorphes bornées comme suit

$$H^\infty\ \ (S_{\mu,r})\ \ = \{f \in H(S_{\mu,r})\ : \|f\|_\infty < \infty\}$$

4)On définit l'espace

$$H_0^{\infty}\ (S_{\mu,r})\ =\left\{f\in H\left(S_{\mu,r}\right):\exists s>0,f\varphi^{-s}\in H^{\infty}\ \left(S_{\mu,r}\right)\right\}$$

et l'espace

$$F\ \left(S_{\mu,r}\right)=\left\{f\in H\left(S_{\mu,r}\right):\exists s>0,f\varphi^{s}\in H^{\infty}\ \left(S_{\mu,r}\right)\right\}$$

tel que

$$\varphi\left(\zeta\right)=\frac{1}{\zeta}\text{et }\varpi\left(A\right)<\mu<\frac{\pi}{2},r>0$$

En plus, on a

$$H_0^{\infty}\ \left(S_{\mu,r}\right)\subset H^{\infty}\ \left(S_{\mu,r}\right)\subset F\ \ \left(S_{\mu,r}\right)\subset H\left(S_{\mu,r}\right)$$

Démonstration

-Soit $f\in H_0^{\infty}$,c-à-d $f\in H$ et on a $\exists s>0 f\varphi^{-s}\in H^{\infty}$

d'où

$$\left\|f\varphi^{-s}\right\|_{\infty}<\infty,$$

on a encore

$$\left\|f\right\|_{\infty}\left\|\varphi^{-s}\right\|_{\infty}<\infty,$$

d'où

$$\left\|f\right\|_{\infty}<\infty\implies f\in H^{\infty},$$

et par suite, on a

$$H_0^{\infty}\subset H^{\infty}.$$

-Si $f\in H^{\infty}$on a $f\in H$ par définition

Donc

$$H_0^{\infty}\subset H^{\infty}\subset H\ .$$

-Si $f\in F\ \left(S_{\mu,r}\right)$, on a$f\in H$ par définition,

donc

$$F\subset H$$

Si $f\in H^{\infty}$ on a $\left\|f\right\|_{\infty}<\infty$.

Comme

$$\varphi^{s}(\zeta)=\frac{1}{\zeta^{s}}$$

on a

$$\|\ \varphi^{s}(\zeta)\|_{\infty}=\left\|\ \frac{1}{\zeta^{s}}\ \right\|_{\infty}<\infty : s>0,$$

donc

$$\|f\ \varphi^{s}(\zeta)\|_{\infty}<\infty \implies f\varphi^{s}(\zeta)\in H^{\infty},$$

d′où

$$H^{\infty}(S_{\mu,r})\subset F\ \ (S_{\mu,r})$$

Enfin, on a

$$H_{0}^{\infty}(S_{\mu,r})\subset H^{\infty}(S_{\mu,r})\subset F(S_{\mu,r})\subset H(S_{\mu,r})$$

Définition 21 *Soit A un opérateur bissectoriel dense tel que $0\in\rho(A)$, $\varpi(A)<\theta<\mu<\frac{\pi}{2}$ et $0<r<R$,tel que $B(R,0)\subseteq\rho(A)$,alors on difini l'opérateur linéaire borné $f(A)$* pour tout $f\in H_{0}^{\infty}(S_{\mu,r})$ *par*

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} f\ \ (\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} f\ \ (\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}^{+}} f\ \ (\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda \end{aligned}$$

Cette intégral est absolument convergente dans $L(E)$ car

$$\begin{aligned} \|f\ \ (\lambda)\,R(\lambda,A)\| &\leq \frac{c}{|\lambda|^{s}(1+|\lambda|)} \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|^{s+1}} \qquad\qquad s>0 \end{aligned}$$

Remarque14

La définition de $f(A)$ est indépendante du choix de $\theta\in(\varpi(A),\mu)$ et $R>r$. Pour tout

$A \in L(E)$,on a

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

Lemme 4 *Soit A un opérateur lineaire bissectoriel avec* $0 \in \rho(A)$ *et* $(f_\alpha)_\alpha$ *une fonction uniforeme bornée dans* $H_0^\infty(S_{\mu,r})$ *telle que* $\|f_\alpha\|_\infty \longrightarrow 0$, *alors*

i) S'il existe c et $s > 0$ *tel que* $|f_\alpha(\zeta)| \leq \frac{c}{\zeta}$ *pour tout* $\zeta \in S_{\mu,r}$ *et tout* α, *alors*

$$\|f_\alpha(A)\| \longrightarrow 0$$

ii) S'il existe $M \geq 0$ *tel que* $\|f_\alpha(A)\|_\infty \leq M$ *pour tout* α, alors

$$f_\alpha(A)\,u \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout} \qquad u \in E$$

Démonstration

i) Comme l'intégral

$$\left\| \int_{\Gamma_{\theta,R}} f\ (\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda \right\| \leq \int_{\Gamma_{\theta,R}} \frac{c}{|\lambda|^s} \frac{c'}{1+|\lambda|}$$

est convergente uniformément, alors,pour tout α,il existe $\epsilon > 0$et $r > 0$ tels que

$$\int_{\Gamma^r} \|f_\alpha(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda\| \leq \epsilon,$$

où

$$\Gamma^r = \{z \in \Gamma_{\theta,R} : |z| > 0\}.$$

En plus on a

$$\left\| \int_{\Gamma_{\theta,R}/\ \Gamma^r} f_\alpha(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda \right\|_\infty \leq \|f_\alpha\|_\infty \int_{\Gamma_{\theta,R}/\ \Gamma^r} \|R(\lambda, A)\|_\infty\, d\lambda \to 0$$

comme

$$\|f_\alpha\|_\infty \to 0$$

d'où

$$\|f_\alpha(A)\|_\infty \to 0.$$

ii) *Soit* $g_\alpha(\zeta)=\frac{f_\alpha(\zeta)}{\zeta}$ telle que $c=Sup_\alpha\|f_\alpha(\lambda)\|_\infty>0$, on a

$|g_\alpha(\zeta)|\leq\frac{c}{r|\zeta|}$ *pour* $\zeta\in S_{\mu,r}$ et tout α.D'après i),on a

$$\begin{aligned}
\|g_\alpha(A)\|_\infty &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} g_\alpha(\lambda)R(\lambda,A)\,d\lambda\right\|_\infty \\
&= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} \frac{f_\alpha(\lambda)}{\lambda}R(\lambda,A)\,d\lambda\right\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{2\pi i}\|f_\alpha(\lambda)\|_\infty\left\|\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} R(\lambda,A)\,d\lambda\right\|_\infty \to 0 donc\ \|g_\alpha(A)\|_\infty\to 0.
\end{aligned}$$

Supposons $x\in D(A)$,alors il existe $y\in E$ tel que $x=R(0,A)y$ et ce ,d'aprés la définition de la resolvente et du théorème de Cauchy on a

$$\begin{aligned}
f_\alpha(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} f_\alpha(\lambda)R(\lambda,A)R(0,A)y\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} \frac{f_\alpha(\lambda)}{\lambda}d\lambda R(0,A)y-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}} g_\alpha(\lambda)R(\lambda,A)y\,d\lambda \\
&= -g_\alpha(A)y \text{ donc } f_\alpha(A)u\to 0 \text{ pour tout } u\in E
\end{aligned}$$

Définition 22 *Pour tout* $f\in F\ (S_{\mu,r})$ et pour un *choix de* $k\in\mathbb{N}$ tel que

$$f\varphi^k\in H_0^\infty(S_{\mu,r}),$$

On définit $f(A)$ par

$$f(A)=\varphi(A)^{-k}\left(f\varphi^k\right)(A),$$

où

$$D(f(A))=\left\{x\in E:\left(f\varphi^k\right)(A)x\in\ D\left(\varphi(A)^{-k}\right)\right\}$$

tel que $f(A)$ vérifie

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(A) &= \overline{\alpha f(A)+\beta g(A)}\\ (f\ g)(A) &= \overline{f(A)\,g(A)}\end{aligned}$$

si

$$\varphi(A)=A^{-1}$$

$$D(f(A))=\left\{x\in E:\left(f\varphi^{k}\right)(A)\,x\in\ D\left(\varphi(A)^{k}\right)\right\}\ et\ \ x\in\ D\left(A^{k}\right)$$

on a

$$f(A)\,x=A^{k}\left(f\varphi^{k}\right)(A)\,x=\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{k}}R(\lambda,A)\,A^{k}xd\lambda$$

Théorème2 *Soit A un opérateur bissectoriel dense avec* $0\in\rho(A)$ et soit $(f_{\alpha})_{\alpha}$ une *fonction uniforme bornée dans* $H^{\infty}\ (S_{\mu,r})$.

S'il existe M tel que $\|f_{\alpha}(A)\|\leq M$ pour tout $\alpha, f\in H^{\infty}\ (S_{\mu,r})$ tel que

$$Sup\left\{f_{\alpha}(\zeta)-f(\zeta):\ \zeta\in H^{\infty}\ (S_{\mu,r}),|\zeta|\leq r'\right\}\rightarrow 0\quad pour\ tout\ \ r'>0,$$

alors

$$f_{\alpha}(A)\,u\longmapsto f(A)\,u\quad pour\ tout\ \ \mathrm{u}\in E, f(A)\in L(E)\ et\ \|f(A)\|\leq M.$$

Définition 23 *Si A est un opérateur bissectoriel alors,nous définissons les projections spectrales correspondant à A avec*

$$P^{-}=\varkappa^{-}(A)\ et\ P^{+}=\varkappa^{+}(A)$$

tel que

$$\varkappa^{-}(\zeta)=\begin{cases}0\ ,\mathrm{Re}(\zeta)>0\\ 1\ ,\mathrm{Re}(\zeta)<0\end{cases}\quad et\quad \varkappa^{+}(\zeta)=\begin{cases}1\ ,\mathrm{Re}(\zeta)>0\\ 0\ ,\mathrm{Re}(\zeta)<0\end{cases}$$

Il est clair que

$$\varkappa^{-}(\zeta),\ \varkappa^{+}(\zeta)\ \ \in H^{\infty}\ (S_{\mu,r})\ \ pour\ tout\ \ \mu\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \ \text{et } r>0.$$

Proposition 2 *Soit A un opérateur bissectoriel dense avec $0 \in \rho(A)$ et $P^{\pm}$ les projections spectrales correspondantes à A,alors $P^{\pm}$sont des opérateurs lineaires denses dans l'espacede Banach E et on a*

$* \ D(A) \subseteq D(P^{-}) = D(P^{+}) = D$

$* \ P^{-} + P^{+} = I/D$

$* \ (P^{-})^2 = P^{-}$ *et*$(P^{+})^2 = P^{+}$c'est -à-dire $P^{\pm}$ *sont des projections*

$* \ P^{-}P^{+} = P^{+}P^{-} = 0/D$

tel que

$$D = \left\{ x \in E : \int\limits_{\Gamma^{-}_{\theta,R}} \frac{R(\lambda, A)\,x}{\lambda} d\lambda \in D(A) \right\} = \left\{ x \in E \ : \int\limits_{\Gamma^{+}_{\theta,R}} \frac{R(\lambda, A)\,x}{\lambda} d\lambda \in D(A) \right\}$$

Théorème3 *Soit A* et $Q^{\pm}, P^{\pm}$ *les projections spectres correspondantes à A alors*

$$D(A) \subset D\left(Q^{\pm}\right) \subset D\left(P^{\pm}\right) = D,$$

et

$$\begin{aligned} Q^{-}x &= P^{-}x \ \ \textit{pour tout} \ \ x \in D\left(Q^{-}\right), \\ Q^{+}x &= P^{+}x \ \ \textit{pour tout} \ x \in D\left(Q^{+}\right) \end{aligned}$$

d'où$Q^{\pm}$ est fermable,en plus , on a

$$\overline{Q^{-}x} = P^{-}x \ \ et \ \overline{Q^{+}x} = P^{+}x$$

3.3.2 Exemples d'opérateurs bissectoriels avec projection spectrale bornée et non bornée

Exemple 2 *Si A le générateur d'un C0-semi-groupe analytique,.*$(T(t))_{t\geq 0}$*dans l'espace de Banach E tel que* $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ alors *les projections spectrales $P^{\pm}$sont bornées,et on a*

$$P^{+} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} R(\lambda, A)\, d\lambda = P$$

tel que $\gamma \subseteq \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$est *le tour de courbe convenable à* $\sigma^+(A)$.*En plus l'espace de Banach* E *est une somme directe,c'est-a'-dire*

$$E = E_1 \oplus E_2 \ \textit{ou'} \ E_1 = PE \ , \quad E_2 = (I - P)\, E.$$

La somme directe de E *donne une décomposition de l'opérateur* A *telle que*

$$\begin{cases} A_1 : E_1 \to E_{1:} & A_1 x = Ax \qquad \forall x \in E_1 \\ A_2 : D(A_2) = D(A) \cap E_2 : A_2 x = Ax & \forall x \in D(A_2) \end{cases}$$

donc A_1*est un opérateur borné dans* E_1*où* $\sigma(A_1) = \sigma^+(A)$ et $\sigma(A_2) = \sigma^-(A)$,*et on a*

$$R(\lambda, A_i) = R(\lambda, A) / X_i \qquad \textit{pour tout } \lambda \in \rho(A) \, \text{et} i = \overline{1,2}.$$

En plus,on a

$$\begin{aligned} T^+(t) &= e^{-tA_1}/E_1 = e^{-tA_1} P/E_1 \\ T^-(t) &= T(t)/E_2 = T(t)(I-P)/E_2 \end{aligned}$$

Démonstration Si $\omega(A) \leq 0$ ona $P^+ = P^- = 0$.pour $\omega(A) > 0$ et comme $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$, alors A un opérateur bissectoriel pour un angle spectral convenable $\varpi(A)$ avec $\sigma^+(A)$borné soit $x \in D(A)$ et choisir $\varpi(A) < \theta < \mu < \frac{\pi}{2}$et $0 < r < R$ voir la définition (18),soit la courbe

$$\gamma_s = \left\{ Se^{it} : -\theta < t \leq \theta \right\},$$

alors on a

$$\begin{aligned} P^+ x &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+_{\theta,R}} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda} A x d\lambda \\ &= \underset{s\to\infty}{Lim} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+_{\theta,R} \cap B(s,0)} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda} A x d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\underset{s\to\infty}{Lim} \int\limits_{\Gamma^+_{\theta,R} \cap B(s,0) \cup \gamma_s} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda} A x d\lambda - \underset{s\to\infty}{Lim} \int\limits_{\gamma_s} \frac{R(\lambda, A)}{\lambda} A x d\lambda \right) \end{aligned}$$

Comme si $s \to \infty$,on a

$$\Gamma^{+}_{\theta,R} \cap B(s,0) \cup \gamma_s = \gamma \subseteq \mathbb{C}^{+}$$

d'où

$$\begin{aligned} P^{+}x &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{R(\lambda,A)}{\lambda}(A-\lambda+\lambda)\,xd\lambda \; - \frac{1}{2\pi i}\underset{s\to\infty}{Lim}\int\limits_{-\theta}^{+\theta} R\left(Se^{it},A\right)xdt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R(\lambda,A)\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\lambda}xd\lambda - 0 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R(\lambda,A)\,d\lambda = Px \end{aligned}$$

où $\Gamma^{+}_{\theta,R}$ est défini précedemment.Comme P est borné sur E ,nous obtenons $P^{+} = P \in L(E)$.D'apres la proposition (2) on a $P^{-} \in L(E)$ et E est une somme directe

$$E = E_1 \oplus E_2 \;\; ou' \;\; E_1 = PE \;,\;\; E_2 = (I-P)\,E$$

telle que E_1et E_2 sont deux sous- espaces férmés de E .Pour A_i soient $\sigma(A_i)$et $R(\lambda, A_i)$où $\left(i = \overline{1,2}\right)$ .Comme

$$\underset{s\to\infty}{Lim}\int\limits_{\gamma_s} e^{-\lambda t}R(\lambda,A)\,d\lambda = 0,$$

nous obtenons pour $x \in E_1$ et $t > 0$

$$\begin{aligned} e^{-tA_1}x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-\lambda t}R(\lambda,A_1)\,Pxd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-\lambda t}R(\lambda,A)\,Pxd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma^{+}_{\theta,R}} e^{-\lambda t}R(\lambda,A)\,xd\lambda - \int\limits_{\gamma_s} e^{-\lambda t}R(\lambda,A)\,d\lambda\right) = T^{+}(t)\,x \end{aligned}$$

d'où

$$e^{-tA_1}x = T^{+}(t) \implies T^{+}(t) = e^{-tA_1}/E_1 = e^{-tA_1}P/E_1$$

pareillement pour $x \in E_2$.

$$
\begin{aligned}
T(t)/E_2 x &= T(t)(I-P)x \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} e^{\lambda t} R(\lambda, A_2)(I-P)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda = T^{-}(t)x
\end{aligned}
$$

Exemple 3 *Si $-A$ est le générateur d'un C0-semi-groupe analytique.* $(S(t))_{t\geq 0}$*dans l'espace de Banach E tel que $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}=\varnothing$,*alors *les projections spectrales $P^{\pm}$*sont bornées.

On a

$$
P^{-} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R(\lambda, A) d\lambda = Q
$$

tel que $\gamma \subseteq \mathbb{C}^{-} = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ est *le tour de courbe convenable à $\sigma^{-}(A)$.En plus* l'*espace de Banach E est un somme directe c'est-à-dire*

$$
E = E_1 \oplus E_2 \quad ou' \ E_1 = QE \ , \quad E_2 = (I-Q)E
$$

La somme directe de E donne une décomposition de l'opérateur A telle que

$$
\begin{cases}
A_1 : \quad E_1 \longrightarrow E_1 \quad : \qquad A_1 x = Ax \ \forall x \in E_1 \\
A_2 : D(A_2) = D(A)\cap E_2 : A_2 x = Ax \ \forall x \in D(A_2)
\end{cases}
$$

donc A_1 est un opérateur borné dans E_1,où $\sigma(A_1) = \sigma^{-}(A), \sigma(A_2) = \sigma^{+}(A)$ et $R(\lambda, A_i) = R(\lambda, A)/X_i$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et $i = \overline{1,2}$.

En plus,on a

$$
\begin{aligned}
T^{-}(t) &= e^{tA_1}/E_1 = e^{tA_1}Q/E_1 \\
T^{+}(t) &= S(t)/E_2 = S(t)(I-Q)/E_2
\end{aligned}
$$

3.3.3 Décomposition spectrale d'opérateurs bissectoriels

1) Cas borné

Théorème 4 *Soit A un opérateur bissectoriel dans l 'espace de Banach E avec $0 \in \rho(A)$.Posons les projections spectrales correspondantes P^{+}et P^{-}* bornées, *alors E est une somme directe c'est-à-dire*

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad avec\ E_1 = P^{-}E\ , \quad E_2 = P^{+}E.$$

La division de E en somme directe induit une décomposition spectrale de l'opérateur A comme :

$$\begin{cases} A_1 : D(A_1) = D(A) \cap E_1 \to E_1 : A_1 x = Ax\ \forall x \in D(A_1) \\ A_2 : D(A_2) = D(A) \cap E_2 \to E_2 : A_2 x = Ax\ \forall x \in D(A_2) \end{cases}$$

tel que $\sigma(A_1) = \sigma^{-}(A)$ et $\sigma(A_2) = \sigma^{+}(A)$ et en plus les opérateurs A_1et $-A_2$ sont des générateurs des C0-semi-groupes analytiques.$(T^{-}(t)/E_1)_{t>0}$et $(T^{+}(t)/E_2)_{t>0}$ sur E_1,(respectivement E_2) *qui sont fortomant continus si $t \to 0$,Finalement $T^{-}(t)/E_2 = 0$ et $T^{+}(t)/E_1 = 0$ pour tout $t > 0$.*

Démonstration *D'après la bornétude de P^{+}et P^{-},nous obtenons une* décomposition de *l 'espace de Banach E* en *somme directe.*On définit maintenant :

$D(A_i) = D(A) \cap E_i$ *et* $A_i x = Ax \quad \forall\ x \in D(A_i)\ \left(i = \overline{1,2}\right)$,on a pour tout $x \in D(A)$

$$P^{-}x \in D(A)\, et AP^{-}x = P^{-}Ax,\ \text{d'où}\ A_i(D(A_i)) \subseteq E_i \quad \left(i = \overline{1,2}\right)$$

et on a

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$$

En plus ,il est clair que $\sigma(A_1) \subseteq \mathbb{C}^{-}$ car si $z \subseteq \overline{\mathbb{C}^{+}}$ et $\varpi(A) < \theta < \mu < \frac{\pi}{2}$ et $0 < r < R$ *tel que* $B(R,0) \subseteq \rho(A)$.

Nous définissons $g \in H_0^{\infty}\ (S_{\mu,r})$ par

$$g\ \ (\lambda)\ \ = \begin{cases} \frac{1}{z-\lambda},\ \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \\ 0\ \ ,\ \ \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \end{cases}$$

donc $g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-_{\theta,R}} \frac{R(\lambda,A)}{\lambda} d\lambda \in L(E)$ *pour tout* $x \in D(A)$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
(z-A)\, g(A)\, x - P^- x &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-_{\theta,R}} \left(\frac{(z-A)\, R(\lambda,A)\, x}{z-\lambda} - \frac{AR(\lambda,A)\, x}{\lambda} \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-_{\theta,R}} \frac{z(\lambda - A)}{\lambda (z-\lambda)} R(\lambda,A)\, x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-_{\theta,R}} \frac{z}{\lambda(z-\lambda)} x d\lambda \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $g(A) \in L(E)$ *et* $P^- \in L(E)$,*on a* $g(A)\, E \subseteq D(A)$ *et* $(z-A)\, g(A) = P^-$.

En plus comme P^- *Commute avec* A *et* $g(A)$,*et comme* $g(A)\, E_1 \subseteq E_{\ 1}$

alors $g(A) \ / \ E_{\ 1} (z - A_1) = I_{\ D(A_1)}$ *et* $(z - A_1)\ g(A) \ / \ E_{\ 1} = I_{\ E_{\ 1}}$ *donc* $z \in \rho(A_1)$.

De la même façon, on montre que $\sigma(A_2) \subseteq \mathbb{C}^+$ *d'où pour tout* $x \in E_1 = P^- \ E$,

nous obtenons :

$$T^-(t)\, x = T^-(t)\, P^- x = P^- T^-(t)\, x \in E_1$$

donc $T^-(t)\, E_1 \subseteq E_1$.

Soit $x \in E_2 \cap\ D(Q^+)$ *alors d'après le lemme* (3) *on a :*

$$T^-(t)\, x = T^-(t)\, P^+ x = T^-(t)\, Q^+ x = T^-(t) \quad \underset{s \to 0}{Lim} T^+(s) x = \underset{s \to 0}{Lim} T^-(t)\ T^+(s) = 0,$$

comme $E_2 \cap\ D(Q^+)$ *est dense dans* E_2 *nous obtenons* $T^-(t) \,/\, E_2 = 0$.*On a les mêmes résultas pour*$(T^+(t))_{t>0}$ *donc* $(T^-(t))_{t>0}, (T^+(t))_{t>0}$*est une famille d'opérateurs sur* E_1 (*respectivement* E_2).

Estimons maintenant, la résolvente $R(\lambda, A_i)$ *sur* E_i *pour tout*

$$\lambda \in \ \rho(A_i) \ \ \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\pm\lambda)| \leq \ \varpi(A)\} \quad \left(i = \overline{1,2}\ \right)$$

tel que $R(\lambda, A_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T^-(t)\, dt$ *pour tout*

$$\lambda \in \sum_{\theta} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \quad \theta\} \quad \cup \{0\} \; pour \;\; \varpi(A) < \theta < \; \mu < \; \frac{\pi}{2} \; , R > 0.$$

D'après la définition de $T^{-}(t)$ et le théorème de Fibini,nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T^{-}(t)\, dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \mathbf{e}^{\mu t} \mathbf{R}(\mu, A)\, \mathbf{x} \mathbf{d} \mu dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \int_0^{\infty} e^{(-\lambda+\mu)t} dt \; \mathbf{R}(\mu, A)\, \mathbf{x} \mathbf{d} \mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)\, \mathbf{x}}{(\lambda - \mu)} \mathbf{d} \mu \quad .
\end{aligned}$$

Notons que l'intégrale pré-citée est convergente d'aprés le lemme(1).

Soit $x \in D(A)$,alors

$$\int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)}{(\lambda - \mu)\, \mu} A \mathbf{x} \mathbf{d} \mu = \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{1}}{(\lambda - \mu)\, \mu} \mathbf{x} \mathbf{d} \mu + \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)}{(\lambda - \mu)} \mathbf{x} \mathbf{d} \mu = \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)\, \mathbf{x}}{(\lambda - \mu)} \mathbf{d} \mu$$

Pour $x \in D(A_1)$,d'où

$$\begin{aligned}
(\lambda - A) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T^{-}(t)\, x dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T^{-}(t)\, (\lambda - A)\, x dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)\, (\lambda - A)}{(\lambda - \mu)\, \mu} A \mathbf{x} \mathbf{d} \mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{\mathbf{R}(\mu, A)}{\mu} A \mathbf{x} \mathbf{d} \mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta,R}^{-}} \frac{1}{(\lambda - \mu)\, \mu} A \mathbf{x} \mathbf{d} \mu \\
&= P^{-} x + 0 \\
&= x \quad .
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \in \rho(A_1)$ et $D(A_1)$ est *dense dans A_1alors $R(\lambda, A_1)\, x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T^{-}(t)\, x dt$.*

Pour tout $x \in E_1$on obtient de la même façon le résultat correspondant pour $R(\lambda, A_2)$,

car $(T^{-}(t))_{t>0}$est exponentiellement stable pour $t \longmapsto \infty$ et intégrable autour de 0

Lemme (3) *d'où pour tout constante* $c \geq 0$*,*

$$\|R(\lambda, A_1)\| \leq \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T^-(t)\, dt \right\| \leq c \leq \infty,$$

donc est $R(\lambda, A_1)$ *est bornée dans* $\sum_\theta$ *et comme* A *est bissectoriel ,*$\lambda R(\lambda, A_1)$*est borné sur les rayons* $\left\{re^{\pm i\theta} : r \geq 0\right\}$*,si* $\lambda R(\lambda, A_1)$ *est borné pour tout* $\lambda \in \sum_\theta$ *d'où* A_1 *est le générateur d'un semi-groupe analytique,donc* $(T^-(t))_{t>0}$ *génère* A_1 *qui est aussi fortement continu pour* $t \to 0$.

Les résultats correspondants à A_2 *et* $(T^+(t))_{t>0}$ *sur*E_2 *sont obtenus de la même façon.*

Corollaire 1*Soit* A *un opérateur bissectoriel ,dense dans l'espace de Banach*E *tel que les projections spectrales correspondantes* P^+*et* P^-*sont bornées,alors on a :*

$$\begin{aligned} D(Q^-) &= D(Q^+) = E \\ Q^- x &= P^- x \\ Q^+ x &= P^+ x \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in E \end{aligned}$$

2)Cas non borné

Pour les projections spectrales correspondantes à un opérateur bissectoriel non borné , nous définissons un espace de Banach D tel que la partie d'opérateur A dans D est un opérateur bissectoriel et les projections spectrales correspondantesP^+et P^-sont borné. Dans ce cas, $Q^\pm$ et $P^\pm$ sont identique.

En pluse, nous définissons un espace de Banach F tel que les projections spectrales correspondantes sont bornées d'ou'les espaces de Banach F et D peuvent t être des sommes directes de E qui est l'espace intermédiaire entre D et F.

comme $P + P^+ = I_D$, la norme du graphe de P^+et P^- sur $D = D(P^-) = D(P^+)$ est équivalent à n'importe quelle norme de graphe considérée.

Nous notons par D l'éspace de Banach muni de la norme du graphe notée par $\|..\|_D$ qui est définie comme suit :

$$\|x\|_D = \|x\| + \left\|P^- x\right\|$$

pour tout $x \in D = D(P^-)$ nous considérons la partieA_D de l'opérateur A dans D défini par

$$D(A_D) = \{x \in D : Ax \in D\}, A_D x = Ax \qquad \forall x \in D(A_D)$$

lemme 5 *Pour tout* A_D et A *ona*

$$\sigma(A_D) = \sigma(A)$$

En plus A_D *est bissectoriel c'est -a'-d ire :*

$$\|\lambda R(\lambda, A_D)\|_D < c \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in i\mathbb{R}$$

Démonstration

Comme

$$\sigma(A_D) = \sigma(A)$$

d'apres un théorème(3) on a

$$D(A) \subseteq D \text{ si } y \in D \text{ et } \lambda \in \rho(A_D),$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A_D) y\|_D &= \left\|\lambda P^- R(\lambda, A_D) y\right\| + \|\lambda R(\lambda, A_D) y\| \\ &= \|\lambda R(\lambda, A_D)\| \left(\left\|P^- y\right\| + \|y\|\right) \\ &\leq c\|y\|_D \end{aligned}$$

donc A_D est bissectoriel .

Théorème 5 *Soit A un opérateur bissectoriel dense dans l 'espace de Banach E avec 0$\in \rho(A)$ et A_D la partie d'opérateur A dans D,précedemment défini, alors l 'espace de Banach D* est une somme *directe c'est-à-dire :*

$$D = D_1 \oplus D_2 \quad \textit{tel que} \quad D_1 = P^- D \quad \text{et} \quad D_2 = P^+ D$$

Cette somme directe donne la décomposition de l'opérateurA_D comme suit :

$$\begin{cases} A_{D_1} : D\left(A_{D_1}\right) = D\left(A_D\right) \cap D_1 \to D_1 : A_{D_1}x \ = A_D x \ \forall x \in D\left(A_{D_1}\right) \\ A_{D_2} : D\left(A_{D_2}\right) = D\left(A_D\right) \cap D_2 \to D_2 : A_{D_2}x \ = A_D x \ \forall x \in D\left(A_{D_2}\right) \end{cases}$$

tel que

$$\sigma\left(A_{D_1}\right) = \sigma^-\left(A\right) \ ,\sigma\left(A_{D_2}\right) = \sigma^+\left(A\right)$$

En plus

A_{D_1} *et* $-A_{D_2}$ *sont les générateurs des C0-semi-groupes* $\left(T^-\left(t\right)/D_1\right)_{t>0}$ et $\left(T^+\left(t\right)/D_2\right)_{t>0}$ dans D_1, D_2.

Finalement,on a

$$\left(T^-\left(t\right)/D_2\right)_{t>0} = 0 \text{ et } \left(T^+\left(t\right)/D_1\right)_{t>0} = 0 \textit{ pour tout } \qquad t > 0$$

Démonstration

On a

$$P_D^- = \kappa^-\left(A_D\right) \quad \text{et} \quad P_D^+ = \kappa^+\left(A_D\right) \quad \text{si} \quad y \in D,$$

alors

$$\begin{aligned} P_D^- y &= P^- y \\ P_D^+ y &= P^+ y, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\|P_D^- y\right\|_D &= \left\|P^- y\right\| + \left\|\left(P^-\right)^2 y\right\| = 2\left\|P^- y\right\| \leq 2\left\|y\right\|_D \\ \left\|P_D^+ y\right\|_D &= \left\|P^+ y\right\| + \left\|P^- P^+ y\right\| \leq 2\left\|y\right\|_D, \end{aligned}$$

donc les projections spectrales correspondantes à l'opérateur bissectoriel A_D sont bornées sur D.

Chapitre IV

RÉGULARITÉ MAXIMALE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE SUR LP(R,E)

Soit l'équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad (\mathrm{I})$$

tel que A est un opérateur linéaire fermé dans l 'espace de Banach E et $f \in Lp(R,E)$ pour tout $1 < p < \infty$.

4.1 *Solution exacte sur Lp(R,E)*

4.1.1 L'*existence et l'unicité*

Définition 24 *Pour $f \in Lp(R,E)$, on dit que $u \in Lp(R,E)$ est la solution exacte de* (I) si $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ *et s'il existe $x \in E$ tel que*

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds + \int_0^t f(s)ds \quad (t \in \mathbb{R})$$

et on dit que u est la solution forte de (I) *si* $u \in W^{1,p}(R,E) \cap Lp(R,D(A))$ *et u* vérifie(I) .

Remarque15

On a $u'(t) - Au(t) = f(t)$ et comme $f \in Lp(R,E)$,*on a* $u'(t) \in Lp(R,E)$ et $u(t) \in D(A)$ *En plus* $u(t) \in Lp(R,D(A))$,*alors* $u \in W^{1,p}(R,E)$ avec

$$W^{1,p}(R,E) = \left\{ u \in Lp(R,E) \quad s\text{'il} \quad existe \quad g \in Lp(R,E) \quad tel\ que \quad u' = g \quad dans \quad D'(R,E) \right\}$$

Définition 24 *On défini la transformation de Carleman pour $u \in Lp(R,E)$ par*

$$\overset{\Lambda}{u}(\lambda) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda t}u(t)dt \ , \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t}u(t)dt, \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \end{cases}$$

proposition 2 *Soit* A un *opérateur linéaire fermé sur l 'espace de Banach* E *telle que* $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ *Si* $u \in Lp(R,E)$ *est la solution exacte de l'*equation *homogéine* (I_0), *alors* $u = 0$.

Démonstration :

Soit la transformation de Carleman de la solution exacte pour $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ d'où

$$\overset{\Lambda}{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}A\overset{\Lambda}{u}(\lambda).$$

Comme $\lambda \in \rho(A)$ pour $\lambda \in i\mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overset{\Lambda}{u}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}A\overset{\Lambda}{u}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}x \implies \overset{\Lambda}{u}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}A\overset{\Lambda}{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}x \implies \\
\overset{\Lambda}{u}(\lambda)\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)x &= \frac{1}{\lambda}x \implies \lambda\overset{\Lambda}{u}(\lambda)\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)x = x \implies \\
\overset{\Lambda}{u}(\lambda)(\lambda - A) &= x \implies \overset{\Lambda}{u}(\lambda) = R(\lambda, A)x.
\end{aligned}$$

Comme $R(\lambda, A)x$ est holomorphe, d'où, pour $\lambda \in i\mathbb{R}$ $sp(u) = \varnothing$ et $u = 0$

Ensuite, nous considérons l'opérateur M_p de la solution pour l'equation (I)dans $Lp(R,E)$ qui est défini par :

$$\begin{aligned}
D(M_p) &= \left\{f \in Lp(R,E) : \exists u_f \in Lp(R,E) \text{ tel que } \mathrm{u}_f \text{ est la solution exacte de } I_f\right\} \\
M_p f &= u_f
\end{aligned}$$

M_p *vérifie, pour* x_f *donné* $\widetilde{M}_p f = (M_p f, x_f)$ *telle que* $M_p = p_1 \bigcirc \widetilde{M}_p$ où est p_1 la premierè projection borné et $\widetilde{M}_p$ est borné d'aprés le théorème du graphe fermé.

Pour $\alpha > 0$, nous définissons :

$$L^p_\alpha(R,E) = \left\{f : R \to E \quad measurable \quad \|f\|_{p,\alpha} < \infty\right\}$$

tel que

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|e^{-\alpha|t|}f(t)\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque16

pour $f \in L^p_\alpha(R,E)$, la fonction $u \in L^p_\alpha(R,E)$ est la solution exacte de l'equation (I).

En plus nous définisons l'application

$$\begin{array}{rcl} L^p_\alpha(R,E) & \rightarrow & L^p_\alpha(R,E) \\ u & \rightarrow & \widetilde{u} = e^{-\alpha|t|}u\,(t) \end{array}$$

$\widetilde{u}$ est un isomorphiseme entre $L^p_\alpha(R,E)$ et $Lp(R,E)$.

Lemme 7 *Soit* $1 < p < \infty$,$\alpha > 0$ et $f \in L^p_\alpha(R,E)$,alors $u \in L^p_\alpha(R,E)$est *la solution exacte de* (I_f) si et seulement si $\widetilde{u}$ est *la solution exacte de*

$$\widetilde{u}^{'}(t) = A\widetilde{u}(t) + \widetilde{f}(t) - \alpha \ \mathrm{sgn}\,(t) \ \ \widetilde{u}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad (\widetilde{\mathrm{I}}_f)$$

Démonstration *Soit* $u \in L^p_\alpha(R,E)$la solution exacte de (I_f),donc il existe $x \in E$ tel que

$$u(t) = x + A\int_0^t u(s)ds + \int_0^t f(s)ds$$

Pour $\widetilde{u}\,(t) = e^{-\alpha|t|}u\,(t)$,en faisant une integration.par parties ,on truove

$$\begin{array}{rcl} A\displaystyle\int_0^t \widetilde{u}(s)ds + \int_0^t \widetilde{f}(s)ds & = & A\displaystyle\int_0^t e^{-\alpha|s|}u\,(s)\,ds + \int_0^t \widetilde{f}(s)ds \\ & \overset{p.p}{=} & A\left(e^{-\alpha|t|}\displaystyle\int_0^t u\,(s)\,ds + \alpha\int_0^t \left(\mathrm{sgn}\,(s)\,e^{-\alpha|s|}\int_0^s u\,(r)\,dr\right)ds\right) \\ & & +e^{-\alpha|t|}\displaystyle\int_0^t f\,(s)\,ds + \alpha\int_0^t\left(\mathrm{sgn}\,(s)\,e^{-\alpha|s|}\int_0^s f\,(r)\,dr\right)ds \\ & = & e^{-\alpha|t|}\left(A\displaystyle\int_0^t u\,(s)\,ds + \int_0^t f\,(s)\,ds\right) + \\ & & \alpha\mathrm{sgn}\,(t)\displaystyle\int_0^t e^{-\alpha|s|}\left(A\int_0^s u\,(r)\,dr + \int_0^s f\,(r)\,dr\right)ds \\ & = & e^{-\alpha|t|}\,(u\,(t) - x) + \alpha\mathrm{sgn}\,(t)\displaystyle\int_0^t e^{-\alpha|s|}\,(u\,(s) - x)\,ds \\ & = & \widetilde{u}\,(t) + \alpha\mathrm{sgn}\,(t)\displaystyle\int_0^t \widetilde{u}\,(s)\,ds + x \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} A\displaystyle\int_0^t \widetilde{u}(s)ds + \int_0^t \widetilde{f}(s)ds & = & \widetilde{u}\,(t) + \alpha\mathrm{sgn}\,(t)\displaystyle\int_0^t \widetilde{u}\,(s)\,ds + x \Longrightarrow \\ \widetilde{u}\,(t) & = & A\displaystyle\int_0^t \widetilde{u}(s)ds + \int_0^t \widetilde{f}(s)ds - \alpha\mathrm{sgn}\,(t)\int_0^t \widetilde{u}\,(s)\,ds + x \end{array}$$

donc $\widetilde{u}$ estune solution de $(\widetilde{I}_f)$.

si $\widetilde{u}$ est une solution de $(\widetilde{I}_f)$ on montre que $u \in L^p_\alpha(R,E)$ est la solution exacte de (I_f) en suivant les mêmes étapes.

Théorème 6 *Soit* $1 < p < \infty$ et A est un *opérateur linéaire fermé dans l 'espace de Banach E tel que pour tout $f \in Lp(R,E)$ il existe une solution exacte unique, $u \in Lp(R,E)$de l'équation différentielle (I_f), donc $i\mathbb{R} \in \rho(A)$ et il existe une canstante $C \geq 0$ telle que $\|R(i\,\zeta, A)\| \leq C$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$*

Théorème 7 *SoitA un opérateur bissectoriel dense avec 0$\in \rho(A)$,alors pour tout $f \in Lp(R,E)$, il existe une solution unique $u_f \in Lp(R,E)$ de l'equation (I_f) telle que*

$$u_f(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t-s)\, f(s)\, ds$$

où

$$K(s) = \begin{cases} T^-(s), s > 0 \\ -T^+(-s), s < 0 \end{cases}$$

4.2 Régularité maximale

Définition 25 *L'opérateur A vérifie la régularité maximale-Lp de l'équation*(I) *si pour tout $f \in Lp(R,E)$ il existe une solution unique $u_f \in W^{1,p}(R,E) \cap Lp(R,D(A))$* de *l'equation*$(\mathrm{I})_f$.

D'après le théorème du graphe fermé,l'opérateur de la solution

$$\begin{aligned} M_p \quad &: \quad Lp(R,E) \to W^{1,p}(R,E) \\ f \quad &\longmapsto \quad u_f \end{aligned}$$

est borné.

Théorème 8 *SoitA un opérateur linéaire fermé et dense dans l 'espace de Banach E et soit l'équation*(I)*qui vérifie la régularité maximale-Lp pour tout $p \in (1,\infty)$,alors $i\mathbb{R} \in \rho(A)$et il existe une constante $C \geq 0$ telle que :*

$$\|R(i\zeta, A)\| \leq \frac{C}{1+|\zeta|} \qquad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mathbb{R}$$

Proposition 4 *Soit A un opérateur linéaire fermé et dense dans l 'espace de Banach E. Pour $i\mathbb{R}\in\rho(A)$, s'il existe une constante $C\geq 0$ telle que*

$$\|R(i\zeta,A)\|\leq\frac{C}{1+|\zeta|}$$

pour tout $\zeta\in\mathbb{R}$,alors il existe une constante $b\geq 0$ telle que

$$V_b=\left\{z\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}(z)|\leq\frac{1}{b}(i+|\mathrm{Im}(z)|)\right\}\subset\rho(A)$$

et

$$\|R(z,A)\|\leq\frac{b}{1+|z|}\quad\text{pourtout}\quad z\in V_b$$

Démonstration

Pour $i\zeta\in i\mathbb{R}\in\rho(A)$, on pose l'équation

$$\begin{aligned}R(z,A)&=(z-A)^{-1}R(i\zeta,A)^{-1}R(i\zeta,A)\\&=(z-i\zeta+i\zeta-A)^{-1}R(i\zeta,A)^{-1}R(i\zeta,A)\\&=[(z-i\zeta+i\zeta-A)R(i\zeta,A)]^{-1}R(i\zeta,A)\\&=[I+(z-i\zeta)R(i\zeta,A)]^{-1}R(i\zeta,A)\end{aligned}$$

pour $z=\eta+i\zeta\in\mathbb{C}$ avec $\eta=\mathrm{Re}(z)$ et $\zeta=\mathrm{Im}(z)$.

Ona par hypothèse

$$\|R(i\zeta,A)\|\leq\frac{C}{1+|\zeta|}$$

et comme $z-i\zeta=\eta$,on a

$$\|(z-i\zeta)R(i\zeta,A)\|\leq\frac{|\eta|C}{1+|\zeta|}.$$

Nous obtenons $z\in\rho(A)$ si $\frac{|\eta|C}{1+|\zeta|}<1$,donc $V_b\in\rho(A)$ pour tout $b\geq 0$.

Soit

$$b=\frac{C+1}{2}+\sqrt{\frac{(C+1)^2}{4}+1}$$

la solution positive de l'equation

$$b = \frac{1}{1-\frac{C}{b}} + \sqrt{\frac{1}{b}+1}.$$

avec ce choix de b,on a l'estimation

$$\begin{aligned}
\|R(z,A)\| &\leq \left\|[I+(z-i\zeta)R(i\zeta,A)]^{-1}\right\| \|R(i\zeta,A)\| \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{|\eta|C}{1+|\zeta|}} \times \frac{1}{1+|\zeta|} \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{C}{b}} \times \frac{1+|\zeta|+|\eta|}{1+|\zeta|} \times \frac{1}{1+|\zeta|} \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{C}{b}} \left(\frac{1}{b}+1\right) \times \frac{1}{1+|\zeta|} \\
&= \frac{b}{1+|\zeta|}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|R(z,A)\| \leq \frac{b}{1+|\zeta|} z \in V_b.$$

Théorème 9 *Si l'opérateur A verifier la régularité maximale-Lp pour tout $p \in (1,\infty)$, alors A est un opérateur bissectoriel avec* $0 \in \rho(A)$.

Remarque17

Par comparaison des résulats précédent pour une équation différentielle du premier ordre avec une condition de Cauchy.

$$\begin{cases} u^{'}(t) = Au(t) + f(t) \quad (\ t \geq 0) \\ u(0) = x_0 \end{cases} \qquad (CP)$$

tel que A est un opérateur linéaire fermé et $f \in Lp(R,E)$, $x_0 \in E$ .En pluse A vérifie la régularité maximale-Lp de (CP), si A est le générateur d'un C_0-semi-groupe analytique.

Théorème 10 *Soit$A$ un opérateur linéaire fermé et dense dans l 'espace de Banach E vérifiant la régularité maximale-Lp de l'equation* (I) (*respectivement* (CP)), *alors A vérifie la régularité maximale-Lq pour $q \in (1,\infty)$, c'est -à-dire la régularité* *maximale-Lp est indépendante de* p.

Théorème 11 *Soit E un espace U.M.D et A un opérateur bissectoriel tel que* l'ensemble $\{isR(is,A) : s \in \mathbb{R}s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ *est R-bornitude,alors A vérifie la régularité maximale de l'équation* (I)

Démonstration

Soit $f \in \digamma^{-1}D(\mathbb{R},E)$,si nous calculons la transformation de Fourier de (I) ,

on obtient

$$\begin{aligned} \digamma\left[u'(s)\right] &= \digamma\left[Au(t)+f(t)\right] \Longrightarrow is\digamma u(s) = A\digamma u(s) + \digamma\left(f(s)\right) \\ &\Longrightarrow \digamma u(s)\left(is - A\right) = \digamma f(s) \\ &\Longrightarrow \digamma u(s) = R\left(is,A\right)\digamma f(s) \end{aligned}$$

Donc pour $M(s) = R(is,A)$,on a $\digamma u(s) = M(s)\digamma f(s)$ tel que $M(s)$ (defini dans le chapitr 1) donc

$$M(s)f = \digamma^{-1}M\digamma f \qquad (*)$$

D'aprés $(*)$,on a $\digamma u(s) = R(is,A)\digamma f(s)$,et on a $u(s) = \digamma^{-1}\left(R(is,A)\digamma f(s)\right)$ donc $u(s) = M(s)f$ et on note $u_f = M(s)f$.

D'où

$$M(s) = R(is,A) \in C^1(\mathbb{R}, L(E))$$

car

$$M : \mathbb{R} \to L(E), s \to M(s) = R(is,A)$$

tel que A un est opérateur linéaire borné,et $M(s) = R(is,A)$ est le multiplicateur de la fonction d'opérateur $f \to u = M(D)f$.

Si on considère le multiplicateur $\widetilde{M}(s) = AR(is,A) \in C^1(\mathbb{R}, L(E))$,il vérifie les conditions de théorème de Weis.

Comme $Au \in L^p(\mathbb{R},E)$ .où $u \in L^p(\mathbb{R}, D(A))$ de la même façon on a $u' \in L^p(\mathbb{R},E)$ c'est-à-dire $u \in W^{1,p}(R,E)$,d'où $u = M(D)f$ est la solution forte de l'equation (I) d'après le théorème de Weis $M(D)$ etendu à un opérateur borné tel que :

$$M\left(D\right):L^{p}\left(\mathbb{R},E\right)\rightarrow L^{p}\left(\mathbb{R},D\left(A\right)\right)\cap W^{1,p}(R,E)$$

pour tout $f\in L^{p}\left(\mathbb{R},E\right)$ cette solution et unique voir la proposition (2)

d'où A vérifie la régularité maximale de l'équation $\left(\mathrm{I}\right).$

Corollair 3 *soit* A un *opérateur bissectoriel sur l 'espace de Hilbert* H avec $0\in\rho\left(A\right)$ alors A vérifie la régularité maximale de l'équation$\left(\mathrm{I}\right).$

proposition5

i)*Il existe un espace de Banach* E *et un opérateur bissectoriel* A *avec projection spectrale bornée ne vérifiant pas la régularité maximale de l'equation* (I)

ii)*Il existe un opérateur bissectoriel* A *sur l 'espace de Hilbert* H *verifiant la régularité maximale de l'equation* (I) tel que les *projections spectrales non bornées.*

Bibliographie

[1] Albrecht, D. Duongm X. and McIntosh, A. Operator theory and harmonic analysis Proc.j Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ. 34 (1996), 77-136.

[2] Auscher, P., McIntosh, A. and Nahmod, A. : Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation. Indiana Univ. Math. J. 46, No. 2 (1997),375-403.

[3] Asymptotic, Regularity and Well-Posedness of First –and Second-Order] Differential Equations on the Line von Sibylle Schweiker Aus Stuttgart – Bad Constant

[4] Bourgain, J. Vector-valued singular integrals and the H^1duality. In D. Burkholder (ed.) : Probability Theory and Harmonic Analysis, New York (1986), 1-19.

[5] Bourgain, J. : Some remarks on Banach spaces in which martingale differences Are unconditional. Arkiv Mat. 21 (1983), 163-168.

[6] Burkholder, D. L : A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued function. In W. Becker P. Calder_on, R. Feuerman, P. W. Jones(ed.) : Conference on Harmonic Analysis in Honour of Antoni Zygmund, Chicago (1981), 270-286.

[7] Cowling, M., Doust, I., McIntosh, A. and Yagi, A. : Banach space Operators with bounded H1 functional calculus. J. Austral. Math. Soc. 60 (1996), 51-89.

[8] Clement, P. and Pruss, J. An operator-valued transference principle and Maximal regularity on vector-valued -spaces. Preprint (1999).

[9] Dunford, N. and Schwartz, J. T. : Linear Operators Part I : General Theory. Interscience Publishers, Inc. New York, 1957.

[10] Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle A. Kolmogorov, S.Fomine edition Mir .Moscou

[11] Functional Analytic Methods for Evolution Equations Editors : M. Iannelli R. Nagel S. Pizzerias Springer.

[12] Hille, E. and Phillips, R. S. : Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1957.

[13] Lunardi, A. : Analytic Semi groups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, vol. 16 of Progress in Nonlinear Deferential Equations and their Applications. Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 1995.

[14] Le Merdy, C. : H1-functional calculus and applications to maximal regularity. Lecture notes for the summer school on Semi groups of Operators and Functional Calculus" at Besan_con, France, 1998.

[15] Le Merdy, C. : Counterexamples on Lp-regularity. Math. Z. 230 (1999), 4762.

[16] McIntosh, A. : Operators which have an H1 Functional Calculus. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. 14 (1986), 210-231.

[17] McIntosh, A. and Yagi, A. : Operators of type without a bounded H^{∞} functional . calculus. Miniconference on Operators in Analysis 1989, Proceedings Of the Centre for Mathematical Analysis, ANU, Canberra 24 (1989), 159-172.

[18] Mielke, A Uber maximale -Regularitat fur Differential gleichungen in Banach- und Hilbert-Raumen. Math. Ann. 277 (1987), 121133.

[19] Mikhlin, S. G. : On the multipliers of Fourier integrals. Dokl. Akad. Nauk SSSR 109 (1956), 701-703 (Russian).

[20] Markaus Haase the Functional calculus for sectorial operators Editore : I. Gohberg.

[21] Pruss, J : Evolutionary Integral Equations and Applications. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.

[22] Pazy, A. : Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Deferential Equations. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983.

[23] P. Portal. Maximal regularity of evolution equation son discrete time scales, submitted.

[24] Strkalj, Z. and Weis, L. : On operator-valued Fourier multiplier theorems. Preprint (2000).

[25] Weis, L. : Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal regularity. Preprint (2000).

[26] Weis, L. : A new approach to maximal -regularity. Preprint (2000).

Résumé

Le présent travail est consacré à l'élude d'une classe d'équations différentiels Opérationnelles à coefficient opératoriel bissectoriel, sur tout l'axe réel. On établit la régularité maximale Lp.

La méthode d'étude est basée sur le Théorème de Weiss sur multiplicateurs dans les espaces de Banach type UMD.

Abstract

The present work is devoted to the study of one class of operator differential equations, with bissectorial operator coefficient, on the real axis. We establish the L p-maximal regularity.

The method of study is based on Weiss theorem of multiplications in the UMD Banach spaces.

ملخص

في هدا العمل سندرس نوع من المعادلات التفاضلية ذات عوامل من المؤثرات الخطية ’ على طول المستقيم الحقيقي. ونبرهن التنظيم الأعضمي L p.

هده الدراسة تعتمد على نظرية ويس للضروب في فضاءات بناخ من نوع UMD.