REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI- CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre: ………………..

Série: ………………………..

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister

En: **Mathématiques**

THEME

Sur la linéarité des applications multivoques

Option:

Systèmes dynamiques et topologie algébrique

Présenté par:

Mr: MEHAMDI Mohamed Lamine

Devant le jury:

Président:	RAHMANI Fouad Lazhar	M.C: UMC
Rapporteur:	BENKAFADER N.M.	Pr..:UMC
Examinateur:	ZITOUNI Mohamed	Pr..:USTHB
Examinateur:	BOUGHABA S.	M.C: UMC

Soutenue Le:…………………………….

REMERCIEMENTS

Je remercie mon encadreur le Professeur Benkafadar N. M. pour le thème qu'il m'a proposé et les conseils prodigués lors de la rédaction de mon mémoire.

Je remercie également les membres de mon jury.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Ce travail est une généralisation de la notion de linéarité aux applications multivoques, il consiste en trois parties:

La première partie regroupe des résultats fondamentaux, il s' agit de définir, de caractériser et de construire des morphismes m− linéaires et d' explorer les structures associées a ces morphismes. On y étudie aussi les applications linéaires multivoques injectives .Les démonstrations données sont élémentaires et n' utilisent que la définition d 'une application linéaire multivoque.

La deuxième partie expose la construction de la catégorie m−DLS ainsi que la correspondance entre la catégorie m−VectK et cette dernière.

En fin la dernière partie contient un certain nombre de résultats concernant la recherche des solutions des équations à morphismes m−linéaires.

Chapter 1

Catégorie m-$\mathbf{Vect}_K$

On considère X et Y deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K.

Definition 1 *Une application multivoque $F : X \to Y$ est dîte linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *$F(x)+F(x') \subseteq F(x+x')$, pour tout couple de vecteurs $(x, x') \in X \times X$,*
2. *$\alpha \cdot F(x) \subseteq F(\alpha \cdot x)$, pour tout couple $(\alpha, x) \in K \times X$.*

Proposition *Une application multivoque $F : X \to Y$ où X et Y sont deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K est linéaire multivoque si et seulement si son graphe*

$$\Gamma_F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

est un sous espace vectoriel du K-espace vectoriel produit $X \times Y$.

Preuve:

▶ Soit $F : X \to Y$ une application linéaire multivoque et Γ_F son graphe. Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de Γ_F alors $y \in F(x)$ et

$y' \in F(x')$ donc $y + y' \in F(x) + F(x') \subseteq F(x + x')$ ainsi $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in \Gamma_F$.

D'autre part, si $y \in F(x)$ et $\alpha \in K$ alors $\alpha \cdot y \in \alpha \cdot F(x) \subseteq F(\alpha \cdot x)$ donc $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) \in \Gamma_F$.

On conclut ainsi que si F est linéaire multivoque son graphe Γ_F est un sous espace vectoriel de $X \times Y$.

◀ Supposons maintenant que $F : X \to Y$ est une application multivoque dont le graphe s'avère être un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $X \times Y$. Considérons x et x' deux vecteurs de X. et $y \in F(x) + F(x')$ alors il existe $(a, b) \in F(x) \times F(x')$ avec $y = a + b$. Or, (x, a) et (x', b) sont deux éléments du sous espace vectoriel Γ_F donc $(x+x', a+b) = (x, a)+(x', b) \in \Gamma_F$ ce qui exprime le fait que $y = a + b \in F(x + x')$.

D'autre part, si $z \in \alpha \cdot F(x)$ donc il existe $y \in F(x)$ tel que $z = \alpha \cdot y$. Ainsi, il exite $(x, y) \in \Gamma_F$ tel que $z = \alpha \cdot y$. Du fait que Γ_F

est un sous espace vectoriel de $X \times Y$ on déduit que $\alpha \cdot (x, y) \in \Gamma_F$ donc $\alpha \cdot y \in F(\alpha \cdot x)$ autrement dit $z \in F(\alpha \cdot x)$.

■

Si $F : X \to Y$ est une application linéaire multivoque alors $\theta \in F(\theta)$, où θ est le vecteur nul.

Preuve:

En effet, pour tout vecteur $x \in X$ et 0 le neutre de la loi additif du corps K on a $\{\theta\} = 0 \cdot F(x) \subseteq F(0 \cdot x) = F(\theta)$. Autrement dit $\{\theta\} \subseteq F(\theta)$.

■

Proposition 4 *Une application linéaire multivoque est linéaire univoque si et seulement si $\{\theta\} = F(\theta)$.*

Preuve:

▶ Il est évident que si $F : X \to Y$ est une application linéaire univoque alors $F(\theta) = \{F(\theta)\} = \{\theta\}$.

▶ Inversement supposons que $F(\theta) = \{\theta\}$ et soit y et y' deux vecteurs de $F(x)$ où x est un vecteur de l'esp ce vectoriel source X. Alors l'opposé du vecteur y' est un élément de $-F(x) = (-1) \cdot F(x) \subseteq F((-1) \cdot x) = F(-x)$. Ainsi, le vecteur $y - y' = y + (-y') \in F(x) + F((-1) \cdot x) \subseteq F(x + (-1) \cdot x) = F(\theta)$, d'où l'on déduit que $y = y'$. Donc $F(x)$ est réduit à un singleton donc est une application univoque linéaire.

■

Proposition 5 *Si $f : X \to Y$ est une application linéaire univoque alors l'application multivoque $f^{-1} : Y \to X$ est une application multivoque linéaire.*

Preuve:

En effet, si y et y' sont deux vecteurs de Y et x un vecteur de $f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$, alors ils existe $(x_1, x_2) \in X^2$ avec $x = x_1 + x_2$ où $f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y'$. Ainsi, $f(x_1) + f(x_2) = y + y'$ donc

$f(x_1+x_2) = y+y'$ et par conséquent, $x_1+x_2 \in f^{-1}(y+y')$, ainsi, $x \in f^{-1}(y+y')$.

D'autre part, si α est un scalaire de K et $x \in \alpha \cdot f^{-1}(y)$ pour un certain vecteur $y \in Y$, alors il existe $x' \in f^{-1}(y)$ avec $x = \alpha \cdot x'$. Or, $f(x') = y$ donc $\alpha \cdot f(x') = \alpha \cdot y$ et puisque f est une application linéaire univoque on déduit que $f(\alpha \cdot x') = \alpha \cdot y$ donc $x = \alpha \cdot x' \in f^{-1}(\alpha \cdot y)$.

Conclusion, si $f : X \to Y$ est une application linéaire univoque $f^{-1}(x) + f^{-1}(x') \subseteq f^{-1}(x+x')$, pour tout couple de vecteurs $(x,x)' \in X \times X$, et $\alpha \cdot f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(\alpha \cdot x)$, pour tout couple $(\alpha, x) \in K \times X$ que $f^{-1} : Y \to X$ est une application linéaire.multivoque.

■

Proposition 6 *Si $F : X \to Y$ est une application linéaire multivoque alors l'application $(t_F)^{-1} : X \to \Gamma_F$ donnée par*

$$(t_F)^{-1}(x) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

est une application linéaire multivoque.

Preuve:

Notons que le graphe de F est un sous espace vectoriel de $X \times Y$ car F est linéaire multivoque donc l'étude de la linéarité de l'application multivoque t_F^{-1} a un sens. Considèrons l'application $t_F : \Gamma_F \to X$ donnée par $t_F(x,y) = x$ pour tout couples de vecteurs $(x,y) \in \Gamma_F$. Il est alors simple de vérifier que t_F est une application linéaire univoque. En effet, pour s'en convaincre on les égalités $t_F((x,y)+(x',y')) = t_F(x+x', y+y') = x+x' = t_F(x,y)+t_F(x';y')$ et $t_F(\alpha \cdot (x,y)) = t_F(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot t_F(x,y)$, égalités vraies pour tout (x,y), $(x',y') \in \Gamma_F$ et $\alpha \in K$. On conclut alors que $(t_F)^{-1} : X \to \Gamma_F$ est linéaire multivoque.

■

Proposition 7 *La composition d'applications linéaires multivoques est une application linéaire multivoque.*

Preuve:

En effet, soient $G : X \to Y$ et $F : Y \to Z$ deux applications linéaires mulitivoques où X, Y et Z sont trois espaces vectoriels sur un corps commutatif K.

Considérons x et x' deux vecteurs de X alors $G(x) + G(x') \subseteq G(x+x')$. donc $F(G(x)+G(x')) = \bigcup_{y \in G(x)+G(x')} F(y) \subseteq \bigcup_{y \in G(x+x')} F(y) = F(G(x + x') = F \circ G(x + x')$.

Si α est un scalire de K et x un vecteur de X alors $\alpha \cdot G(x) \subseteq G(\alpha \cdot x)$ par conséquent si $z \in \alpha \cdot F(G(x)) = \alpha \cdot \bigcup_{y \in G(x)} F(y)$ il existe donc $y \in G(x)$ avec $z \in \alpha \cdot F(y) \subseteq F(\alpha \cdot y)$. Or, $\alpha \cdot y \in \alpha \cdot G(x) \subseteq G(\alpha \cdot x)$. Donc $z \in F(G(\alpha \cdot x)) = \bigcup_{y' \in G(\alpha \cdot x)} F(y')$.

■

Proposition 8 *Si X et Y sont deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K alors les application $Id_X : X \to X$ donnée par $Id_X(x) = \{x\}$ pour tout $x \in X$, et $Id_Y : Y \to Y$ où $Id_Y(y) = \{y\}$ pour tout $y \in Y$ sont des applications linéaires multivoques qui vérifient les propriétés suivantes:*

1. *$Id_Y \circ F = F$ pour toute application linécire multivoque $F : X \to Y$,*

2. *$G \circ Id_Y = G$ pour toute application linéaire multivoque $G : Y \to X$.*

Preuve:

Ils est simple de constater que Id_X et Id_Y sont linéaires. De plus si x est un vecteur de X on a

$$Id_Y \circ F(x) = Id_Y(F(x) = \bigcup_{y \in F(x)} Id_Y(y) = \bigcup_{y \in F(x)} \{y\} = F(x).$$

D'autre aprt, si y est un vecteur de l'espace vectoriel Y on a $G \circ Id_Y(y) = G(Id_Y(y)) = G(\{y\}) = G(y)$.

■

Proposition 9 *La composition d'applications linéaires multivoques est associative.*

Preuve:

Si $T : X \to Y$, $G : Y \to Z$ et $F : Z \to L$ sont trois applications linéaires multivoques alors $F \circ (G \circ T)$ ainsi que $(F \circ G) \circ T$ sont des applications linéaires multivoques. De plus, pour si x est un vecteur de l'espace vectoriel X on a les égalités suivantes:

$(F \circ G) \circ T(x) = (F \circ G)(T(x)) = \bigcup_{y \in T(x)} (F \circ G)(y) = \bigcup_{y \in T(x)} F(G(y)) = \bigcup_{y \in T(x)} \left(\bigcup_{z \in G(y)} F(z) \right) = \bigcup_{y \in T(x)} F(G(y)) = F(\bigcup_{y \in T(x)} G(y)) = F\left(G(T(x))\right) = F\left((G \circ T)(x)\right) = F \circ (G \circ T)(x).$

■

Proposition 10 *La collection des espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif K et la collection des applications linéaires multivoques constituent une catégorie notée $m\text{-}Vect_K$ où la composition est la composition des applications multivoques.*

Preuve:

Cette proposition est une conséquence immédiate des proposition antérieures.

■

Definition 11 *Un morphisme linéaire multivoque est un morphisme de la catégorie $m\text{-}Vect_K$ on les appelle m-linéaire.morphisme ou plus simplement m-linéaire.*

Proposition 12 *Tout morphisme m-linéaire est la composée d'une application linéaire univoque et d'un autre m-linéaire morphisme.*

Preuve:

En effet, si $F : X \to Y$ est un morphisme m-linéaire alors $F = r_F \circ (t_F)^{-1}$ où $r_F : \Gamma_F \to Y$ est l'application linéaire univoque donnée par $r_F(x, y) = y$ pour tout $(x, y) \in \Gamma_F$.

■

Chapter 2

Sur quelques morphismes m-linéaires

2.1 L' endomorphisme m linéaire de projection canonique

Definition 13 *Un endomorphisme m linéaire est un morphisme m linéaire F qui admet pour source et pour but le même K espace vectoriel:*

$$F : X \to X$$

Soit X un K espace vectorile et X' un sous espace vectoriel de X.

Proposition 14 *La correspondance $F : X \to X$ donnée par $F(x) = x + X'$ pour tout vecteur $x \in X$ est un morphisme m linéaire.*

Preuve:

En effet, soient a et b duex vecteurs de X alors $F(a) + F(b) = (a + X') + (b + X') = (a + b) + X' = F(a + b)$.
D'autre part, si k est un scalaire et x un vecteur de X on a $F(k \cdot x) = k \cdot x + X' = k \cdot (x + X') = k \cdot F(x)$.
■

Proposition 15 *Si X' est un sous espace vectoriel d'un K espace vectoriel X alors la surjection canonique $s : X \to X/X'$ où $s(x) = \overline{x}$ pour tout vecteur $x \in X$ est une application linéaire univoque.*

Preuve:

. En effet, pour $x \in X$, on a $s(x) = \overline{x} = x + X' = F(x)$.
■

2.2 Inverses de morphismes m linéaires

Si $F : X \to Y$ est un m-linéaire morphisme on peut définir pour deux applications multivoques que l'on peut appeler les inverse de F. En effet, on peut considérer:

$$F_-^+ : Y \to X$$

où $F_-^+(y) = \{x \in X \mid F(x) = \{y\}\}$ pour tout $y \in Y$,

et

$$F_-^- : Y \to X$$

où $F_-^-(y) = \{x \in X \mid y \in F(x)\}$ pour tout $y \in Y$.

Notons que l'application multivoque F_-^+ peut être trivial autrement dit $F_-^+(y) = \varnothing$ pour tout $y \in Y$.

En général F_-^+ n'est pas un morphisme m-linéaire néanmoins on a le résultat suivant:

Proposition 16 *Si $F : X \to Y$ est un m-linéaire morphisme alors l'application multivoque $F_-^- : Y \to X$, où*

$$F_-^-(y) = \{x \in X \mid y \in F(x)\}$$

pour tout $y \in Y$, et un morphisme m-linéaire.

Preuve:

Si $x \in F_-^-(y') + F_-^-(y'')$ où y' et y'' sont deux vecteurs de Y. Alors, Il existe $(x', x'') \in F_-^-(y') \times F_-^-(y'')$ tel que $x = (x' + x'')$. Ainsi, $y' \in F(x')$ et $y'' \in F(x'')$ donc $(y' + y'') \in F(x') + F(x'') \subseteq F(x' + x'')$, d'où l'on déduit que $x = (x' + x'') \in F_-^-(y' + y'')$.

D'autre part, si $x \in \alpha \cdot F_-^-(y)$ alors il existe $x' \in F_-^-(y)$ avec $x = \alpha \cdot x'$. Or, $y \in F(x')$ donc $\alpha \cdot y \in \alpha \cdot F(x') \subseteq F(\alpha \cdot x') = F(x)$ ce qui justifie que $x \in F_-^-(\alpha \cdot y)$.

■

Remarque: Si F est une application univoque $F_-^+ = F_-^-$ on note alors $F^{-1} = F_-^+ = F_-^-$ est donc si F est univoque linéaire F^{-1} est un m-linéaire morphisme. Ce qui justifie encore une fois la proposition

2.3 Opérations algébriques sur les morphismes m linéaires

$$Mor_{m\text{-}Vect_K}(X, Y)$$

la collection des m-linéaires morphismes de source X et de but Y deux espaces vectoriel sur un corps commutatif K.

Si F, $G \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X,Y)$ et $\alpha \in K$ alors on peut définir:

1. La somme de F et G où

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x)$$

pour tout vect~ur $x \in X$,

2. Le produit

$$(\alpha \cdot F)(x) = \alpha \cdot F(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$.

Proposition 17 *La somme de deux morphismes m-linéaire est un morphisme m-linéaire, le produit par un scalaire d'un morphisme m-linéaire est m-linéaire.*

Preuve:

En effet, si x et x' sont deux vecteurs de l'esapce vectoriel X alors $(F+G)(x)+(F+G)(x') = (F(x)+G(x))+(F(x')+G(x')) = (F(x)+F(x'))+(G(x)+G(x')) \subseteq F(x+x')+G(x+x') = (F+G)(x+x')$. D'autre part, $\alpha \cdot (F+G)(x) = \alpha \cdot (F(x)+G(x)) = \alpha \cdot F(x) + \alpha \cdot G(x) \subseteq F(\alpha \cdot x) + G(\alpha \cdot x) = (F+G)(\alpha \cdot x)$.

De la même façon on a $(\alpha \cdot F)(x) + (\alpha \cdot F)(x') = \alpha \cdot F(x) + \alpha \cdot F(x') \subseteq F(\alpha \cdot x) + F(\alpha \cdot x') = F(\alpha \cdot x + \alpha \cdot x') = F(\alpha \cdot (x+x')) = (\alpha \cdot F)(x+x')$ et $\lambda \cdot (\alpha \cdot F)(x) = \lambda \cdot (\alpha \cdot F)(x)) = \lambda \cdot (\alpha \cdot F(x)) = (\lambda \cdot \alpha) \cdot F(x)) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot F(x)) = \alpha \cdot (\lambda \cdot F(x)) \subseteq \alpha \cdot F(\lambda \cdot x) = (\alpha \cdot F)(\lambda \cdot x)$.
■

Proposition 18 *Soient $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire et α un scalaire alors $Conv_\alpha F : X \to Y$ donnée par*

$$Conv_\alpha F(x) = \{(1-\alpha) \cdot y + \alpha \cdot y' \mid (y,y') \in F(x) \times F(x)\}$$

est un morphisme m linéaire.

Preuve:

Soient $z \in Conv_\alpha F(x) + Conv_\alpha F(x')$ donc $z = a + b$ où $a = (1-\alpha)\cdot y_a + \alpha \cdot y'_a$ et $b = (1-\alpha)\cdot y_b + \alpha \cdot y'_b$ avec y_a, $y'_a \in F(x)$ et y_b, $y'_b \in F(x')$ ainsi, $z = (1-\alpha)\cdot(y_a + y_b) + \alpha \cdot (y'_a + y'_b)$. Or, $(y_a + y_b), (y'_a + y'_b) \in F(x) + F(x') \subseteq F(x + x')$ donc $z \in Conv_\alpha F(x + x')$.

D'autre part, si $z \in \lambda \cdot Conv_\alpha F(x)$ donc $z = \lambda \cdot ((1-\alpha)\cdot y + \alpha \cdot y')$ où $(y, y') \in F(x) \times F(x)$ par conséquent, $z = (1-\alpha)\cdot(\lambda \cdot y) + \alpha \cdot (\lambda \cdot y')$ où $\lambda \cdot y \in \lambda \cdot F(x) \subseteq F(\lambda \cdot x)$ et $\lambda \cdot y' \in \lambda \cdot F(x') \subseteq F(\lambda \cdot x')$ donc $z \in Conv_\alpha F(\lambda \cdot x)$.

■

2.4 Opérations ensemblistes sur les morphismes m linéaires

$$Mor_{m\text{-}Vect_K}(X, Y)$$

la collection des m-linéaires morphismes de source X et de but Y deux espaces vectoriel sur un corps commutatif K.

Si

$$F, G \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X, Y)$$

on peut définir:

1. La réunion de F et G où

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$,

2. L'intersection de F et G où

$$(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$,

3. la différence de F et G où

$$(F \setminus G)(x) = F(x) \setminus G(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$,

4. la différence symétrique de F et G où

$$(F \triangle G)(x) = F(x) \triangle G(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$

5. le produit cartésien de F et G où

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x)$$

pour tout vecteur $x \in X$

Proposition 19 *L'intersection de morphismes m linéaires est un morphisme m linéaire.*

Preuve:

En effet le graphe de $F \cap G$ est $\Gamma_{F \cap G} = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in (F \cap G)(x)\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in (F \cap G)(x)\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x) \cap G(x)\} =$
$\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)$ et $y \in G(x)\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid (x,y) \in \Gamma_F$ et $(x,y) \in \Gamma_G\} = \Gamma_F \cap \Gamma_G$ qui est un sous espace vectoriel si Γ_F

■

Par contre le graphe de la réunion $\Gamma_{F \cup G} = \Gamma_F \cup \Gamma_G$ qui n'est pas en général un sous espace vectoriel même si Γ_F et Γ_G le sont.

Il en est de même pour la différnece et la différence symétrique où $\Gamma_{F \setminus G} = \Gamma_F \setminus \Gamma_G$ et $\Gamma_{F \triangle G} = \Gamma_F \triangle \Gamma_G$.

Proposition 20 *Le produit cartésien de deux morphismes m linéaire est un morphisme m linéaire.*

Preuve:

Soit $y \in (F \times G)(x) + (F \times G)(x')$ donc $y \in (F(x) \times G(x)) + (F(x') \times G(x'))$ ainsi il existe $(f, f') \in F(x) \times F(x')$ et $(g, g') \in G(x) \times G(x')$ avec $y = (f, g) + (f', g') = (f + f', g + g')$, où $(f + f') \in (F(x) + F(x'))$ et $(g + g') \in (G(x) \times G(x'))$ par conséquent $(f + f') \in F(x + x')$ et $(g + g') \in G(x + x')$ et ainsi $y \in F(x + x') \times G(x + x') = (F \times G)\,(x + x')$.

D'autre part, si $\alpha \in K$ alors $\alpha \cdot (F \times G)\,(x) = \alpha \cdot (F(x) \times G(x)) = \alpha \cdot F(x) \times \alpha \cdot G(x) \subseteq F(\alpha \cdot x) \times G(\alpha \cdot x) = (F \times G)(\alpha \cdot x)$.
■

Chapter 3

Structures associés aux morphismes$m$-linéaires

Proposition 21 *L'image de tout sous espace vectoriel par un morphisme m linéaire est un sous espace vectoriel.*

Preuve:

Soit $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire et X' un sous espace vectoriel de X alors $F(X') = \bigcup_{x' \in X'} F(x')$ contient $F(\theta)$ qui est non vide. Ainsi, $\theta \in F(X')$. Soient y et y' deux éléments de $F(X')$ donc il existe x et x' deux éléments de X' avec $y \in F(x)$ et $y' \in F(x')$ par conséquent $y+y' \in F(x)+F(x') \subseteq F(x+x')$ où $x+x' \in X'$, qui est un sous espace vectoriel de X. Autrement dit, $y+y' \in F(X')$. Si $\alpha \in K$ est un scalaire et $y \in F(X')$ alors $\alpha \cdot y \in \alpha \cdot F(x)$ pour un certain élément $x \in X'$. Donc $\alpha \cdot y \in F(\alpha \cdot x) \subseteq F(X')$.
■

Proposition 22 *Si $F : X \to Y$ est um morphisme m linéaire alors*

$$l(F(A)) \subseteq F(l(A))$$

pour toute partie non vide A de Xet où $l : P(X) \to P(X)$ est l'opérateur enveloppe linéaire.

Preuve:

En effet, soit A une partie de X alors $A \subseteq l(A)$ donc $F(A) \subseteq F(l(A))$. En vertu de la proposition 21, $F(l(A))$ est un sous espace vectoriel de Y celui ci contient $F(A)$ donc $l(F(A)) \subseteq F(l(A))$.
■

Definition 23 *On appelle image d'une application multivoque $F : A \to B$ le sous ensembe de B noté*

$$\operatorname{Im} F = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Proposition 24 *L'image de tout morphisme m linéaire est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel but.*

Preuve:

Ceci est une conséquence de la proposition 21.

■

Soit $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire, et B une partie de Y on peut alors définir deux pré image de B :

$$F_-^+(B) = \{x \in X \mid F(x) \subseteq B\}$$

qu'on appellle la pré image inférieure de B,

$$F_-^-(B) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \varnothing\}$$

qu'on appelle pré image supérieure de B.

La pré image inférieure ou supérieure d'une partie B donnée peuvent être vide.

Proposition 25 *La pré image supérieure de tout sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.*

Preuve:

Notons préalablement, que si Y' est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel but Y d'un morphisme m linéaire $F : X \to Y$ alors évidement le vecteur nul θ de Y lui apprtient et donc $F(\theta) \cap Y'$ est non vde car contient au moins θ. Ainsi, $F_-^-(Y')$ est non vide si Y' est un sous espace vectoriel de Y.
D'autre part, si x et x' sont deux éléments de $F_-^-(Y')$ donc $F(x) \cap Y'$ ainsi que $F(x') \cap Y'$ sont non vide et donc leur somme $(F(x) \cap Y') + (F(x') \cap Y')$ est non vide. Puisque Y' est un sous espace vectoriel de Y alors $(F(x) \cap Y') + (F(x') \cap Y') \subseteq (F(x) + F(x')) \cap Y'$ et donc $F(x' + x) \cap Y'$ est non vide, exprimant ainsi l'appartenance de $x + x'$ à $F_-^-(Y')$.
Pour α un scalaire donné du corps commutatif K qui agit sur l'epace vectoriel Y et $x \in F_-^-(Y')$ on a donc $F(x) \cap Y' \neq \varnothing$ donc $\alpha \cdot F(x) \cap Y' \neq \varnothing$. En effet, si $F(x) \cap Y' \neq \varnothing$ alors si $y \in F(x) \cap Y'$ le vecteur $\alpha \cdot y \in \alpha \cdot F(x) \cap Y' \subseteq F(\alpha \cdot x) \cap Y'$ donc $F(\alpha \cdot x) \cap Y' \neq \varnothing$ ainsi donc $\alpha \cdot x \in F_-^-(Y')$.

■

Soit $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire, alors pour θ le vecteur nul de l'espace vectoriel Y on peut définir comme cela a été déjà évoqué deux pré image: $F_-^+(\theta)$ et $F_-^{\mp}(\theta)$ ce qui conduit à considérer la définition suivante

Definition 26 *On appelle noyau inférieur d'un morphisme m linéaire le sous ensemble noté* $\ker_+ F = F_-^+(\theta)$ *on appelle noyau supérieur le sous ensemble noté* $\ker_- F = F_-^-(\theta)$.

Ainsi:

$$\ker_+ F = \{x \in X \mid F(x) = \{\theta\}\}$$

alors que

$$\ker_- F = \{x \in X \mid \theta \in F(x)\}$$

il est évident que $\ker_+ F \subseteq \ker_- F$.

Notons aussi, que si F est linéaire univoque $\ker_+ F = \ker_- F = \ker F$. d'autre part, $\ker_+ F$ peut être vide alors que $\ker_- F$ n'est jamais vide car $\theta \in \ker_- F$. De plus $\ker_+ F$ n'est pas forcément un sous espace vectoriel de X. Cependant:

Proposition 27 *Le noyau supérieur d'un morphisme m linéaire est un sous espace vectoriel de l'espace source X.*

Preuve:

Soient x et x' deux éléments de $\ker_- F$ alors $\theta \in F(x)$ et $\theta \in F(x')$ donc $\theta \in F(x) + F(x') \subseteq F(x + x')$ donc la somme est stable dans $\ker_- F$.
Pour $\alpha \in K$ et $x \in \ker_- F$ on a également $\theta = \alpha \cdot \theta \in \alpha \cdot F(x) \subseteq F(\alpha \cdot x)$ donc la loi externe est égalemnet stable dans $\ker_- F$.

Notons également que ce résultat peut être intérprété comme une conséquence de la proposition 25.

■

Pour cela on donne la définition suivante:

Definition 28 *On appelle noyau d'un morphisme m linéaire le sous espace vectoriel* $\ker_- F$ *qu'on notera simplement* $\ker F$.

Notons que si F est univoque on retrouve la définition du noyau d'une application linéaire en vertu de l'équivalence $F(\theta) = \{\theta\}$ si et seulement si F est univoque.

Remarquons que la composition d'une application univoque et multivoque linéaire est une application linéaire multivoque. Cependant:

Proposition 29 *Si $F : X \to Y$, $f : Y \to Z$ représentent une application linéaire multivoque et univoque respectivement alors $f \circ F : X \to Z$ est univoque si et seulement si $F(\theta) \subseteq \ker f$.*

Preuve:

▶ Supposons que $f \circ F$ soit univoque donc $f \circ F(\theta) = \{\theta\}$ donc $f(F(\theta)) = \{\theta\}$ donc $f(x) = \theta$ pour tout $x \in F(\theta)$ donc $x \in \ker f$ pour tout $x \in F(\theta)$ par conséquent $F(\theta) \subseteq \ker f$.

◀ Si $f(F(\theta)) = \{\theta\}$ donc $f \circ F(\theta) = \{\theta\}$, et en vertu de la proposition ??, on déduit que $f \circ F$ est linéaire univoque.

■

Proposition 30 *Si : $f : X \to Y$, $F : Y \to Z$ représentent une application linéaire univoque et multivoque respectivement alors $F \circ f : X \to Z$ est univoque si et seulement si $f(\theta) \in \ker_+ F$.*

Preuve:

▶Si $F \circ f$ est linéaire multivoque alors $F \circ f(\theta) = \{\theta\}$ donc $F(f(\theta)) = \{\theta\}$ donc $f(\theta) \in F_-^+(\theta) = \ker_+ F$.

▶ Si $f(\theta) \in \ker_+ F$ donc $f(\theta) \in F_-^+(\theta)$ donc $F(f(\theta)) \subseteq \{\theta\}$ ou encore $F(f(\theta)) = \{\theta\}$, grâce à la proposition ??, on déduit que $F \circ f$ est univoque linéaire.

■

Definition 31 *Une application multivoque $F : A \to B$ est dîte injective si tout couple $(x, x') \in A^2$ tel que $x \neq x'$ on a alors $F(x) \cap F(x') = \varnothing$*

Proposition 32 *Une application multivoque $F : A \to B$ est injective si et seulement si tout couple $(x, x') \in A^2$ tel que $x \neq x'$ on a alors $\theta \notin F(x) - F(x')$.*

Preuve:

Ceci est une conséquence de l'équivalence $F(x) \cap F(x') \neq \varnothing$ si et seulement si $\theta \in F(x) - F(x')$.

■

Proposition 33 *Un morphisme m linéaire $F : X \to Y$ est injectif si et seulement si* $\ker F = \{\theta\}$.

Preuve:

▶ considérons un morphisme m linéaire injectif $F : X \to Y$ et soit $x \in \ker F$, alors $\theta \in F(x)$ or $\theta \in F(\theta)$ et ainsi donc $\theta \in F(x) \cap F(\theta)$ ce qui exprime le fait que $F(x) \cap F(\theta) \neq \varnothing$ donc $x = \theta$.

D'autre part si on suppose que le noyau d'un morphisme m linéaire $F : X \to Y$ est réduit au vecteur nul alors si x et x' sont deux vecteurs différents de X on a $x - x' \neq \theta$ par conséquent $\theta \notin F(x-x')$ donc forcément $\theta \notin F(x) - F(x')$ donc $F(x) \cap F(x') = \varnothing$.

■

Proposition 34 *Un morphisme m linéaire $F : X \to Y$ est injectif si et seulement si $\theta \notin F(x)$ pour tout $x \neq \theta$.*

Preuve:

▶ Soit $x \neq \theta$ donc $F(x) \cap F(\theta) = \varnothing$ donc $\theta \notin F(x)$

◀ Soit $x \in \ker F$ donc $\theta \in F(x)$ donc $x = \theta$.

■

Proposition 35 *Un morphisme m linéaire $F : X \to Y$ est injectif si et seulement si $(x_i)_{i \in [1,n]}$ est un système libre de vecteurs de X alors tout système $(y_i)_{i \in [1,n]}$ de vecteurs de Y où $y_i \in F(x_i), i \in [1, n]$*

Preuve:

▶Supposons que $F : X \to Y$ soit un morphisme m linéaire injectf et considèrons $x_1, x_2, ..., x_n$ un système de n vecteurs libres de X et soient $y_1, y_2, ..., y_n$ un système de n vecteurs de Y où $y_i \in F(x_i)$ pour tout $i \in [1, n]$. Soient alors $(\alpha_i)_{i \in [1,n]}$ une famille de scalaire telle que $\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + ... + \alpha_n \cdot y_n = \theta$ donc $\theta \in \alpha_1 \cdot F(x_1) + \alpha_2 \cdot F(x_2) + ... + \alpha_3 \cdot F(x_n) \subseteq F(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n)$. Ainsi donc, $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n \in \ker F$. Or, celui ci est réduit au vecteur nul de X car supposé être un morphisme m linéaire injectif donc $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n = \theta$ et puisque $x_1, x_2, ..., x_n$ est un système de n vecteurs libres de X on déduit que tous les scalaires sont nuls concluant ainsi que le système $y_1, y_2, ..., y_n$ de n vecteurs de Y où $y_i \in F(x_i)$ pour tout $i \in [1, n]$ est libre.

◀ Soit x un élément de $\ker F$ et supposons qu'il n'est pas nul.donc c'est un vecteur libre de X. Grâce aux hypotèse, tout vecteur $y \in F(x)$ est donc un vecteur libre de Y donc non nul. Par conséquent, $\theta \notin F(x)$ et donc $x \notin \ker F$. On conclut alors que si $x \in \ker F$ alors $x = \theta$ ou encore que $\ker F = \{\theta\}$. Ce qui exprime le fait que F est un morphisme m linéaire injectif.

■

Proposition 36 *Si $F : X \to Y$ est un morphisme m linéaire injectif alors l'image de tout système libre de vecteurs ~~libres~~ de X constitue une famille disjointe de parties de Y.*

Preuve:

En effet, soient $x_1, x_2, ..., x_n$ un système de n vecteurs libres de X et soit $F(x_1)$, $F(x_2)$, $F(x_n)$ la famille de parties de Y associées à $x_1, x_2, ..., x_n$. si on suppose qu'ils existent $i, j \in [1, n]$,$i \neq j$ $(i < j)$ tels que $F(x_i) \cap F(x_j) \neq \varnothing$. alors la famille $y_1, y_2, ..y_{i-1}, y, y_{i+1}, ..., y_{j-1}, y, y_{i+1}, ..., y_n$ où $y_i \in F(x_i)$ pour tout $i \in [1, n] \setminus \{j\}$ et $y_i = y_j = y \in F(x_i) \cap F(x_j)$, est une famille liée ce qui est impossible.

■

Proposition 37 *Soit $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire injecti ~~où~~ $\dim X = \dim Y = n$. Alors si $e_1, e_2, ..., e_n$ est une base de X tout système de vecteurs $f_1, f_2, ..., f_n$ de Y où $f_i \in F(e_i)$, $i \in [1, n]$ est une base de Y.*

Preuve:

En effet, puisque F est linéaire multivoque injectf et $e_1, e_2, ..., e_n$ est une base de X donc un système de vecteurs libres de X en vertu de la proposition 35, on déduit que si $f_1, f_2, ..., f_n$ de Y est un système de vecteurs où $f_i \in F(e_i)$, $i \in [1, n]$ est un système libre de Y or $\dim Y = n$ donc $f_1, f_2, ..., f_n$ constitue une base de Y.

■

Definition 38 *Une application multivoque $F : A \to B$ est dîte surjective si $F(A) = \underset{a\in A}{\cup} F(a) = B$.*

Proposition 39 *Une application multivoque $F : A \to B$ est dîte surjective si et seulement si $F^{-}_{-}(b) \neq \varnothing$, pour tout $b \in B$.*

Preuve:

►En effet, soit $b \in F(A) = \underset{a\in A}{\cup} F(a)$donc il existe $a \in A$ tel que $b \in F(a)$ donc $a \in F^{-}_{-}(b)$ autrement dit $F^{-}_{-}(b) \neq \varnothing$.

◄ Considérons $b \in B$ alors par hypothèse il existe $a \in A$ avec $a \in F^{-}_{-}(b)$ et par conséquent, $b \in F(a) \subseteq F(A)$ donc $B \subseteq F(A) \subseteq B$.

■

Chapter 4

Catégorie m-DLS

4.1 Spectres directes de K espaces vectoriels

Definition 40 *On appelle spectre direct ou système inductif de K espaces vectoriels indicés sur un sur Δ, toute famille du type*

$$(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

indicée sur un ensemble dirigé à droite $(\Delta, \leq)$ où:

1. *X_α sont des espaces vectoriels définis sur le corps commutatif K,*

2. $$\pi_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta,$$

   est une famille d'applications linéaires univoques définis pour tout $\alpha \leq \beta$, où $\alpha, \beta \in \Delta$,

3. $$\pi_{\alpha\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha,$$

   est l'automorphisme identité de X_α, pour tout $\alpha \in \Delta$,

4. $$\pi_{\beta\gamma} \circ \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\gamma} : X_\alpha \to X_\beta \to X_\gamma,$$

   pout tout α, β, γ éléments de Δ

Si $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ est un système inductif de K espaces vectoriels indicés sur un sur Δ, les K espaces vectoriels X_α, $\alpha \in K$ s'appellent les éléments du spectre direct et les applications linéaires $\pi_{\alpha\beta}$, $\alpha\beta \in \Delta$, $\alpha \geq \beta$, s'appellent les projecteurs du système inductif.

Proposition 41 *Dans la réunion disjointe (la somme directe) $X = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ de la famille d'ensembles $(X_\alpha)\alpha \in \Delta$ la relation binaire notée " $\sim$"et donnée par: $x_\alpha \sim x_\beta$ si et seulement si il existe un indice $\gamma \in \Delta$ tel que $\gamma \geq \alpha$ et $\gamma \geq \beta$ avec $\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$, est une relation d'équivalence.*

Preuve:

En effet, si x_α est un élément X alors $\pi_{\alpha\gamma}x_\alpha = \pi_{\alpha\gamma}x_\alpha$ pour tout $\gamma \geq \alpha$ qui exprime que $x_\alpha \sim x_\alpha$. Il est évident que $\sim$ est une relation symétrique.

Soient x_α, x_β et x_γ trois éléments de X tels que $x_\alpha \sim x_\beta$ et $x_\beta \sim x_\gamma$ ainsi, il existe donc $\lambda_1 \in \Delta$, $\lambda_1 \geq \alpha, \lambda_1 \geq \beta$ et $\lambda_2 \in \Delta$ $\lambda_2 \geq \beta$, $\gamma_2 \geq \gamma$ avec $\pi_{\alpha\lambda_1}(x_\alpha) = \pi_{\beta\lambda_1}(x_\beta)$ et $\pi_{\beta\lambda_2}(x_\beta) = \pi_{\gamma\lambda_2}(x_\gamma)$. Considérons $\lambda \in \Delta$ où $\lambda \geq \lambda_1$ et $\lambda \geq \lambda_2$, alors $\pi_{\lambda\lambda_1} \circ \pi_{\alpha\lambda_1}(x_\alpha) = \pi_{\lambda\lambda_1} \circ \pi_{\beta\lambda_1}(x_\beta)$ et $\pi_{\lambda\lambda_2} \circ \pi_{\beta\lambda_2}(x_\beta) = \pi_{\lambda\lambda_2} \circ \pi_{\gamma\lambda_2}(x_\gamma)$, d'où l'on déduit que $\pi_{\alpha\lambda}(x_\alpha) = \pi_{\beta\lambda}(x_\beta) = \pi_{\gamma\lambda}(x_\gamma)$ qui confirme que $x_\alpha \sim x_\gamma$.
■

Proposition 42 *L'ensemble quotient* $X/\sim$ *noté* $\varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha = \underrightarrow{X}$ *muni des deux opérations:*

1.
$$+ : \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$$
où $\overline{x_\alpha} + \overline{x_\beta} = \overline{\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)}$, pour tout $(\overline{x_\alpha}, \overline{x_\beta}) \in \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, et où $\gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$,

2.
$$\cdot : K \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$$
où $k \cdot \overline{x_\alpha} = \overline{k \cdot x_\alpha}$ pour tout $\overline{x_\alpha} \in \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, $k \in K$,

est un espace vectoriel sur K on l'appelle la limite inductive du spectre direct $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)$,on le note X_∞.

$$\varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha = \underrightarrow{X} = X_\infty.$$

Preuve:

Prouvons préalablement que les relations:

$$+ : \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$$

et

$$\cdot : K \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$$

sont des applications.

En effet, considérons $(\overline{x_\alpha}, \overline{x_\beta}) \in \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \times \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$,soient $\gamma' \in \Delta$, $\gamma' \geq \alpha, \gamma' \geq \beta$, et $\gamma'' \in \Delta$, et où $\gamma'' \geq \alpha, \gamma'' \geq \beta$, alors $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \gamma'$, $\gamma \geq \gamma''$ on a $\pi_{\gamma'\gamma}(\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)) \sim \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$ et $\pi_{\gamma''\gamma}(\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)) \sim \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$ donc $\pi_{\alpha\gamma'}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma'}(x_\beta) \sim \pi_{\alpha\gamma''}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma''}(x_\beta)$, d'où l'on déduit que la classe $\overline{\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)}$ est indépendante de l'élément $\gamma \in \Delta$ tel que $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$. D'autre part, si $x_\mu \in \overline{x_\alpha}$ et $x_\lambda \in \overline{x_\beta}$ autremant dit $x_\mu \sim x_\alpha$ et $x_\lambda \sim x_\beta$, alors puisque Δ est dirigé à droite, il existe $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \mu$, $\gamma \geq \lambda$, $\gamma \geq \beta$ avec $\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \pi_{\mu\gamma}(x_\mu)$ et $\pi_{\beta\gamma}(x_\beta) = \pi_{\lambda\gamma}(x_\lambda)$ par conséquent $\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta) \overline{= \pi_{\mu\gamma}(x_\mu) + \pi_{\lambda\gamma}(x_\lambda)}$, justifiant ainsi l'indépendance de la classe $\overline{\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) + \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)}$ par rapport aux représentants des classes $\overline{x_\alpha}$ et $\overline{x_\beta}$.

Soit k un scalaire du corps commutatif K et $\overline{x_\alpha} \in X_\infty$ alors si $x_\beta \sim x_\alpha$ il existe $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ avec $\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$ et donc $k \cdot \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = k \cdot \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$ et par linéarité on a $\pi_{\alpha\gamma}(k \cdot x_\alpha) = \pi_{\beta\gamma}(k \cdot x_\beta)$ qui traduit que $k \cdot x_\alpha \sim k \cdot x_\beta$, d'où l'indépendance de la classe $\overline{k \cdot x_\alpha}$ par rapport au représentant de la classe $\overline{x_\alpha} \in X_\infty$.

On conclut que l'opération somme confère à X_∞ une structure de magma alors que le produit par un scalaire est une loi de composition externe du corps commutaif K sur X_∞.

La commutativité et l'associativité dans X_∞ sont une conséquence imnédiate de la commutativité et de l'associativité des sommes dans les éléments du spectre.

L'élément neutre qu'on notera θ_∞ ou $\underrightarrow{\theta}$ est égal à la classe d'un des vecteurs nuls des éléments du système inductif $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$. Notons que tous les vecteurs nuls sont équivalent, car si $\theta_\alpha \in X_\alpha$ et $\theta_\beta \in X_\beta$ alors pout tout $\gamma \in \Delta$, $\lambda \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$, on a $\pi_{\alpha\gamma}(\theta_\alpha) = \theta_\gamma = \pi_{\beta\gamma}(\theta_\beta)$. Ainsi si $\overline{x_\mu} \in X_\infty$ on a $\overline{x_\mu} + \theta_\infty = \overline{x_\mu} + \overline{\theta_\mu} = \overline{x_\mu + \theta_\mu} = \overline{x_\mu}$

Enfin, si $\overline{x_\mu} \in X_\infty$ alors $\overline{(-x_\mu)}$ est le symétrique de $\overline{x_\mu}$. dans X_∞. Notons que si $x_\mu \sim x_\alpha$ alors évidement $(-x_\mu) \sim (-x_\alpha)$.

■

Proposition 43 *L'élément neutre qu'on notera* θ_∞ *ou* $\underset{\longrightarrow}{\theta} = \sum\limits_{\alpha \leq \beta} \ker \pi_{\alpha\beta}$.

Preuve:

Soit $x_\alpha \in \sum\limits_{\alpha \leq \beta} \ker \pi_{\alpha\beta}$ donc $x_\alpha \in \ker \pi_{\alpha\beta}$ où $\alpha \leq \beta$ alors $\pi_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \theta_\beta$ et puisque $x_\alpha \sim \pi_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ on déduit que $x_\alpha \sim \theta_\beta$. Ce qui exprime le fait,$x_\alpha \in \theta_\infty$ ou encore que $\sum\limits_{\alpha \leq \beta} \ker \pi_{\alpha\beta} \subseteq \theta_\infty = \overline{\theta_\alpha}$.

De plus, si $x_\alpha \in \theta_\infty$ alors $x_\alpha \in \overline{\theta_\alpha}$ donc il existe $\beta \in \Delta$, $\beta \geq \alpha$ avec $\pi_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \pi_{\alpha\beta}(\theta_\alpha) = \theta_\beta$ autrement dit, $x_\alpha \in \ker \pi_{\alpha\beta}$,où $\alpha \leq \beta$ et par conséquent, $\theta_\infty \subseteq \sum\limits_{\alpha \leq \beta} \ker \pi_{\alpha\beta}$.

■

Proposition 44 *Pour tout* $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $\alpha \leq \beta$ *les vecteurs nuls* $\theta_\alpha \in X_\alpha$ *et* $\theta_\beta \in X_\beta$ *sont équivalents.*

Preuve:

Soient $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $\alpha \leq \beta$ et les vecteurs nuls $\theta_\alpha \in X_\alpha$ et $\theta_\beta \in X_\beta$ alors $\pi_{\alpha\beta}\theta_\alpha = \theta_\beta = \pi_{\beta\beta}\theta_\beta$ donc $\theta_\alpha \sim \theta_\beta$.

■

Proposition 45 *Le vecteur nul de la limite inductive directe* $\varinjlim\limits_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ *sera noté* $\underset{\longrightarrow}{\theta}$ *il est la réunion disjointes des noyaux des projecteurs autrement dit:* $\underset{\longrightarrow}{\theta}$ *est la réunion disjointes de la famille* $\{\ker \pi_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \leq \beta\}$.

Preuve:

En effet, soit θ_α le vecteur nul de X_α alors $\overline{\theta_\alpha} = \underset{\longrightarrow}{\theta}$, car si $x_\beta \in \overline{\theta_\alpha}$ donc $x_\beta \sim \theta_\alpha$ donc il existe $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \alpha$ et $\gamma \geq \beta$ avec $\pi_{\beta\gamma}x_\beta = \pi_{\alpha\gamma}\theta_\alpha = \theta_\gamma$. Autrement dit, $x_\beta \in \ker \pi_{\beta\gamma} \subseteq \underset{\longrightarrow}{\theta}$. D'autre part, si $x_\alpha \in \underset{\longrightarrow}{\theta}$ il existe $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \leq \beta$ avec $x_\alpha \in \ker \pi_{\alpha\beta}$ donc $\pi_{\alpha\beta}x_\alpha = \theta_\beta$ donc $x_\alpha \sim \pi_{\alpha\beta}x_\alpha \sim \theta_\beta$ ce qui exprime le fait que $\overline{x_\alpha} = \overline{\theta_\beta}$.

■

Proposition 46 *Si* $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ *est un système inductif de* K *espaces vectoriels indicés sur un sur* Δ *où tous les projecteurs sont des monomorphismes alors l'élément neutre de la limite inductive* X_∞ *coïncide avec l'ensemble* $\{\theta_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$.

Preuve:

En effet, si tous les projecteurs sont de monomorphismes alors $\ker \pi_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha\}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $\alpha \leq \beta$ ainsi $\sum\limits_{\alpha\leq\beta} \ker \pi_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \alpha \in \Delta\}$.

■

4.2 Morphismes m linéaires de spectre directs

Definition 47 *On appelle application canonique du spectre direct les applications linéaires notées* $s_\alpha : X_\alpha \to X_\infty$ *qui représente les restrictions de la surjection canonique* $s : X \to X_\infty$ *à* X_α, $\alpha \in \Delta$.

On appelle morphisme m linéaire de spectre direct de K *espaces vectoriels la donnée d'une famille de morphismes* m *linéaires* $F = \{F_\alpha\}_\alpha : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ *où*

1.
$$F_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$$
pour tout $\alpha \in \Delta$,

2. *les digrammes du types:*
$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \overset{\pi_{\alpha\beta}}{\rightarrow} & X_\beta \\ F_\alpha \downarrow & & \downarrow F_\beta \\ Y_\alpha & \underset{\omega_{\alpha\beta}}{\rightarrow} & Y_\beta \end{array}$$
sont commutatifs pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \leq \beta$,

Proposition 49 *Si* $F = \{F_\alpha\}_\alpha : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ *est un morphisme m linéaire de spectres direts de* K *espaces vectoriels alors il exite un unique morphisme m linéaire noté* $\underset{\to}{F}$ *ou* F_∞*:*

$$\underset{\to}{F} : \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in\Delta} Y_\alpha$$

donnée par:

$$\underset{\to}{F}(\overline{x_\alpha}) = \bigcup_{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)} \{\overline{y_\alpha}\}$$

pour tout élément $\overline{x_\alpha} \in \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$.

Celui ci est l'unique morphisme m linéaire vérifiant la commutativité des diagrammes suivants, pour tout $\alpha \in \Delta$ *:*

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \overset{s_\alpha^X}{\to} & \varinjlim_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \\ F_\alpha \downarrow & & \downarrow F_\infty \\ Y_\alpha & \underset{s_\alpha^Y}{\to} & \varinjlim_{\alpha\in\Delta} Y_\alpha \end{array}$$

où s_α^X *et* s_α^Y *sont les applications canoniques des spectres direct respectifs. On l'appelle la limite de* $F = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$.

Preuve:

Soit $x_\beta \in \overline{x_\alpha}$ alors il existe $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ avec $\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$ par conséquent $F_\gamma(\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)) = F_\gamma(\pi_{\beta\gamma}(x_\beta))$ ou encore $F_\gamma \circ \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = F_\gamma \circ \pi_{\beta\gamma}(x_\beta)$. De la commutativité des diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \overset{\pi_{\alpha\gamma}}{\to} & X_\gamma \\ F_\alpha \downarrow & & \downarrow F_\gamma \\ Y_\alpha & \underset{\omega_{\alpha\gamma}}{\to} & Y_\gamma \end{array}$$

pour $\gamma \geq \alpha$,

et

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \overset{\pi_{\beta\gamma}}{\to} & X_\gamma \\ F_\beta \downarrow & & \downarrow F_\gamma \\ Y_\beta & \underset{\omega_{\beta\gamma}}{\to} & Y_\gamma \end{array}$$

pour $\gamma \geq \beta$,

on déduit l'égalité $\omega_{\alpha\gamma}(F_\alpha(x_\alpha)) = \omega_{\beta\gamma}(F_\beta(x_\beta))$ qui exprime que $\underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{\overline{y_\alpha}\} = \underset{y_\beta \in F_\beta(x_\beta)}{\cup}\{\overline{y_\beta}\}$ autrement dit $F_\infty(\overline{x_\alpha})$ est indépendant du chois du représentant dans la classe d'équivalence $\overline{x_\alpha} \in X_\infty$.

Soient $\overline{x_\alpha}$ et $\overline{x_\beta}$ deux éléments de la limite inductive directe X_∞ alors $F_\infty(\overline{x_\alpha})+F_\infty(\overline{x_\beta}) = \underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{\overline{y_\alpha}\}+ \underset{y_\beta \in F_\beta(x_\beta)}{\cup}\{\overline{y_\beta}\} = \underset{\substack{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)\\ y_\beta \in F_\beta(x_\beta)}}{\cup}\{\overline{y_\alpha}\}+\{\overline{y_\beta}\} = \underset{\substack{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)\\ y_\beta \in F_\beta(x_\beta)}}{\cup}\{\overline{y_\alpha}+\overline{y_\beta}\} = \underset{\substack{\omega_{\alpha\gamma}(y_\alpha) \in \omega_{\alpha\gamma}\circ F_\alpha(x_\alpha)\\ \omega_{\beta\gamma}(y_\beta) \in \omega_{\beta\gamma}\circ F_\beta(x_\beta)}}{\cup}\{\overline{\omega_{\alpha\gamma}(y_\alpha)+\omega_{\beta\gamma}(y_\beta)}\} =$
$= \underset{z_\gamma \in \omega_{\alpha\gamma}\circ F_\alpha(x_\alpha)+\omega_{\beta\gamma}\circ F_\beta(x_\beta)}{\cup}\{\overline{z_\gamma}\} \subseteq \underset{z_\gamma \in F_\gamma \circ \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)+F_\gamma\circ\pi_{\beta\gamma}(x_\beta)}{\cup}\{\overline{y_\gamma}\} \subseteq \underset{z_\gamma \in F_\gamma(\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)+\pi_{\beta\gamma}(x_\beta))}{\cup}\{\overline{y_\gamma}\} =$
$F_\infty(\overline{\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)+\pi_{\beta\gamma}(x_\beta)}) = F_\infty(\overline{x_\alpha + x_\beta}) = .F_\infty(\overline{x_\alpha}+\overline{x_\beta})$.

Enfin, si k est un scalaire de K et $\overline{x_\alpha}$ un éléments de la limite inductive directe X_∞, alors $k \cdot F_\infty(\overline{x_\alpha}) = k \cdot \underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{\overline{y_\alpha}\} = \underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup} k\cdot\{\overline{y_\alpha}\} = \underset{k\cdot y_\alpha \in k\cdot F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{k\cdot\overline{y_\alpha}\} \subseteq \underset{k\cdot y_\alpha \in F_\alpha(k\cdot x_\alpha)}{\cup}\{\overline{k\cdot y_\alpha}\} \subseteq \underset{z_\alpha \in F_\alpha(k\cdot x_\alpha)}{\cup}\{\overline{z_\alpha}\} = F_\infty(\overline{k\cdot x_\alpha}) = F_\infty(k\cdot\overline{x_\alpha})$.

Soient ,s_α^X et s_α^Y les applications canoniques des spectres direct respectifs. alors $F_\infty \circ s_\alpha^X = s_\alpha^Y \circ F_\alpha$, pour tout $\alpha \in \Delta$. en effet, $F_\infty \circ s_\alpha^X\ (x_\alpha) = F_\infty(\overline{x_\alpha}) = \underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{\overline{y_\alpha}\} = \underset{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)}{\cup}\{s_\alpha(y_\alpha)\} = s_\alpha(F_\alpha(x_\alpha)) = s_\alpha \circ F_\alpha(x_\alpha)$.

L'unicité du F_∞ provient de la commutativité des diagrammes où les applications canoniques sont des épimorphismes: $F_\infty \circ s_\alpha^X = s_\alpha^Y \circ F_\alpha = G \circ s_\alpha^X$, si G est un autre morphisme linéaire vérifaint la commutativité, pour tout $\alpha \in \Delta$. on déduit alors que $G = F_\infty$, car s_α^X sont des épimorphismes.

■

Proposition 50 *Soient*

$$F = (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \rightarrow (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

et

$$G = (G_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \rightarrow (Z_\alpha, \tau_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

deux morphismes m linéaires de spectres directs de K espaces vectoriels alors

$$G \circ F = (G_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \circ (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} = (G_\alpha \circ F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (Z_\alpha, \tau_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

est un morphisme m linéaire de plus

$$(G \circ F)_\infty = G_\infty \circ F_\infty$$

D'autre part,

$$Id_X = (Id_{X_\alpha})_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

où $Id_{X_\alpha}(x_\alpha) = \{x_\alpha\}$ est un morphsime m linéaire appelé morphisme m linéaire identité du spectre direct $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ et on a

$$\underrightarrow{Id_X} = Id_{\underrightarrow{X}}.$$

Preuve:

Considérons les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \overset{\pi_{\alpha\beta}}{\to} & X_\beta \\ F_\alpha \downarrow & & \downarrow F_\beta \\ Y_\alpha & \overset{\omega_{\alpha\beta}}{\to} & Y_\beta \\ G_\alpha \downarrow & & \downarrow G_\beta \\ Z_\alpha & \underset{\tau_{\alpha\beta}}{\to} & Z_\beta \end{array}$$

pour $\alpha, \beta \in \Delta$ et $\alpha \leq \beta$.

De la commutativités des quadrans des diagrammes on déduit la commuativité des diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \overset{\pi_{\alpha\beta}}{\to} & X_\beta \\ G_\alpha \circ F_\alpha \downarrow & & \downarrow G_\beta \circ F_\beta \\ Z_\alpha & \underset{\tau_{\alpha\beta}}{\to} & Z_\beta \end{array}$$

pour $\alpha, \beta \in \Delta$ et $\alpha \leq \beta$.

On conclut que $G \circ F = (G_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \circ (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} = (G_\alpha \circ F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (Z_\alpha, \tau_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$, est un morphisme m linéaire.

D'autre aprt, pour $\overline{x_\alpha} \in X_\infty$ on a $(G \circ F)_\infty(\overline{x_\alpha}) = \bigcup_{z_\alpha \in G_\alpha \circ F_\alpha(x_\alpha)} \{\overline{z_\alpha}\} = \bigcup_{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)} \left(\bigcup_{z_\alpha \in G_\alpha(y_\alpha)} \{\overline{z_\alpha}\}\right) = \bigcup_{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)} G_\infty(\overline{y_\alpha}) = G_\infty\left(\bigcup_{y_\alpha \in F_\alpha(x_\alpha)} \{\overline{y_\alpha}\}\right) = G_\infty \circ F_\infty(\overline{x_\alpha})$.

Enfin, $(Id_X)_\infty(\overline{x_\alpha}) = \bigcup_{y_\alpha \in Id_{X_\alpha}(x_\alpha)} \{\overline{y_\alpha}\} = \{\overline{x_\alpha}\} = Id_{X_\infty}(\overline{x_\alpha})$.

■

Proposition 51 *Les spectres directs de K espaces vectoriels indicés sur un ensemble dirigé à droite et des morphismes m linéaires de spectres directs de K espaces vectoriels indicés sur un ensemble dirigé à droite constituent une catégorie appelée catégorie des spectres directs de k espaces vectoriels indicé sur un même ensemble dirigé et des morphismes m linéaires de spectres directs de K espaces vectoriels indicés sur un ensemble dirigé à droite. On notera cette catégorie m-DLS.*

Proposition 52 *La relation qui associe à un spectre direct de K espaces vectoriels indicés sur un même ensemble dirigé sa limite inductive et qui fait correspondre à tout morphisme m linéaire $F = (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : X = (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to Y = (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ de spectres directs de K espaces vectoriels indicés sur un même ensemble dirigé sa limite $F_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ est un foncteur co variant de la catégorie m-DLS dans la catégorie m-$Vect_K$ des K espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif K et des applications linéaires multivoques.*

$$\underset{(X_\alpha,\pi_{\alpha\beta},\Delta)_{\alpha\leq\beta}}{Obj(m\text{-}DLS)} \underset{\rightsquigarrow}{\overset{\infty}{\rightarrow}} \underset{X_\infty}{Obj(m\text{-}Vect_K)}$$

et

$$\underset{F=(F_\alpha)_{\alpha\in\Delta}}{Mor_{(m\text{-}DLS)}((X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}, (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta})} \underset{\rightsquigarrow}{\overset{\infty}{\rightarrow}} \underset{F_\infty}{Mor_{(m\text{-}Vect_K)}(X_\infty, Y_\infty)}$$

Soient θ_α^X le vecteur nul de l'élément X_α du spectre $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ et θ_α^Y le vecteur nul de l'élément Y_α du spectre $(Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$, où $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ et $(Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ sont deux objet de la catégorie m-$Vect_K$.des K espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif K et des applications linéaires multivoques.

Proposition 53 *Soit* $F_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ *l'image par le foncteur co variant* $\infty : m\text{-}DLS \to m\text{-}Vect_K$ *où*

$$F = (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in Mor_{(m\text{-}DLS)}((X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}, (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta})$$

alors le morphisme m linéaire F_∞ *est un monomorphisme si et seulement si si pour tout* $\alpha \in \Delta$ *et tout vecteur* $x_\alpha \in X_\alpha$ *tel que* $\overline{\theta_\alpha^Y} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$ *on alors* $x_\alpha \sim \theta_\alpha^X$.

Preuve:

▶ Soit $\alpha \in \Delta$ et $x_\alpha \in X_\alpha$ et supposons que $\overline{\theta_\alpha^Y} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$ alors $\overline{x_\alpha} \in \ker F_\infty$. Or, $F_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ est supposé être un monomorphisme donc $\ker F_\infty = \{\theta_\infty\}$ on déduit alors $x_\alpha \sim \theta_\alpha^X$.

◀ Soit $\overline{x_\alpha} \in X_\infty$ tel que $F_\infty(\overline{x_\alpha}) = \theta_\infty$. par conséquent, $\overline{\theta_\alpha^Y} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$ et donc selon les hypothèses on déduit que $x_\alpha \sim \theta_\alpha^X$ ou encore que $\overline{x_\alpha} = \theta_\infty$.

■

4.3 Sur une limite particulière d'un morphisme m linéaire de spectres directes

Considèrons $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ et $(Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ deux objet de la catégorie $m\text{-}DSL$ et

$$F = (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

un morphisme m linéaire alors

$$F_\infty = \varinjlim F_\alpha : X_\infty \to Y_\infty$$

est un morphisme linéaire univoque de K espaces vectoriels.

Ainsi

$$(F_\infty)^-_- : Y_\infty \to X_\infty$$

est morphisme de la catégorie $m\text{-}Vect_K$.

Le morphisme

$$F_-^- = (F_\alpha)_{-\alpha\in\Delta}^- : (Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$$

est un morphisme m linéaire de spectres directs de K espaces vectoriels. On a alors

$$\left(F_-^-\right)_\infty = \varinjlim (F_\alpha)_-^- : Y_\infty \to X_\infty$$

qui est un morphisme m linéaire de K espaces vectoriel.

Proposition 54 *Si $F = (F_\alpha)_{\alpha\in\Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta} \to Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha\leq\beta}$ un morphisme m linéaire de spectres directs de K espaces vectoriels alors on a l'égalité suivante:*

$$(F_\infty)_-^- = \left(F_-^-\right)_\infty : Y_\infty \to X_\infty$$

Preuve:

Soit $\overline{y_\alpha} \in Y_\infty$ alors $\left(\varinjlim (F_\alpha)_-^-\right)(\overline{y_\alpha}) = \bigcup_{\substack{x_\lambda \in (F_\lambda)_-^-(y_\lambda) \\ y_\lambda \in \overline{y_\alpha}}} \{\overline{x_\lambda}\} = \{\overline{x_\lambda} \in X_\infty \mid y_\lambda \in (F_\lambda)(x_\lambda),\, y_\lambda \in \overline{y_\alpha}\} = (F_\infty)_-^-(\overline{y_\alpha})$.

■

Chapter 5

Equations à morphismes m linéaires

Considérons $F \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X,Y)$ un morphisme de la catégorie m-$Vect_K$ des K espaces vectoriel et des morphismes m linéaires.

Proposition 55 *L'espace quotient~~s~~ $X/\ker F$ est un objet de la catégorie m-$Vect_K$ des K espaces vectoriel et des morphismes m linéaires ~~cette~~ objet est isomorphe à l'objet* $\operatorname{Im} F$.

Preuve:

Considérons l'application multivoque $\widetilde{F} : X/\ker F \to \operatorname{Im} F$ où $\widetilde{F}(\overline{x}) = F(\overline{x}) = \bigcup_{x'\in\overline{x}} F(x')$ pour tout vecteur $\overline{x} \in X/\ker F$.

Soient, $\overline{x}$ et $\overline{a}$ deux vecteurs de $X/\ker F$ alors, $\widetilde{F}(\overline{x}) + \widetilde{F}(\overline{a}) = \bigcup_{x'\in\overline{x}} F(x') + \bigcup_{a'\in\overline{a}} F(a') = \bigcup_{(x',a')\in\overline{x}\times\overline{a}} F(x') + F(a') \subseteq \bigcup_{x'+a'\in\overline{x}+\overline{a}} F(x' + a') \subseteq \bigcup_{z\in\overline{x+a}} F(z) = \widetilde{F}(\overline{x+a}) = \widetilde{F}(\overline{x}+\overline{a})$.

Si k est un scalaire $k \cdot \widetilde{F}(\overline{x}) = k \cdot F(\overline{x}) = k \cdot \left(\bigcup_{x'\in\overline{x}} F(x')\right) = \bigcup_{x'\in\overline{x}} (k \cdot F(x')) \subseteq \bigcup_{k\cdot x'\in k\cdot\overline{x}} (F(k\cdot x')) \subseteq \bigcup_{z'\in\overline{k\cdot x}} F(z) = F(\overline{k\cdot x}) = \widetilde{F}(\overline{k\cdot x}) = \widetilde{F}(k \cdot \overline{x})$. Ceci finit par justifié que $\widetilde{F} : X/\ker F \to \operatorname{Im} F$ est un morphisme m linéaire.

Soit $\overline{x} \in X/\ker F$ et supposons que $\overline{x} \in \ker \widetilde{F}$ ce qui signifie que $\theta \in \widetilde{F}(\overline{x})$, où θ est le vecteur nul de l'espace vectoriel Y. Donc, il existe un élément $x' \in \overline{x}$ tel que $\theta \in F(x')$ ce qui induit que $x' \in \ker F$, ce qui conduit aux égalités suivantes $\ker F = \overline{x'} = \overline{x}$ par conséquent $\ker \widetilde{F} = \{\ker F\}$.

Soit y un vecteur de l'espace but $\operatorname{Im} F$ donc il existe $x \in X$ tel que $y \in F(x)$ donc $y \in F(\overline{x}) = \widetilde{F}(\overline{x}) \subseteq \widetilde{F}(X/\ker F)$.

■

Definition 56 *On appelle co-noyau d'un morphisme $F \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X,Y)$ de la catégorie m-$Vect_K$ des K espaces vectoriel et des morphismes m linéaires l'espace vectoriel quotient $Y/\operatorname{Im} F$ qu'on note* $co\ker F$.

Definition 57 *Un morphisme $F \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X,Y)$ de la catégorie m-$Vect_K$ des K espaces vectoriel et des morphismes m est dit ~~de~~ m Fredholm si le noyau $\ker F$ et le co noyau $co\ker F$ sont de dimension finis.*

Definition 58 *On appelle indice d'un m Fredholm* $F \in Mor_{m\text{-}Vect_K}(X,Y)$ *l'entier relatif* ~~*noté*~~

$$indF = \dim \ker F - \dim co\ker F$$

.

Proposition 59 *Si* $F : X \to Y$ *est un m Fredholm d'indice nul alors*

$$\dim \ker F = \dim Y - \dim \operatorname{Im} F$$

Considérons $F : X \to Y$ un morphisme m linéaire et soit l'équation suivante:

$$y_0 \in F(x) \tag{1}$$

où y_0 est un vecteur donné de Y.

Proposition 60 *Si l'équation* $y_0 \in F(x)$ *admet une solution* x_0 *dans* X *alors la classe de* x_0 *modulo* $\ker F$ *est l'ensemble des solution de cette équation.*

Preuve:

Soit $x_0 \in X$ tel que $y_0 \in F(x_0)$ alors si $x \in \overline{x_0}$ il existe $x' \in \ker F$ avec $x = x_0+x'$, on a alors $y_0 \in F(x_0) \subseteq F(x_0)+F(x') \subseteq F(x_0+x')$ ainsi, x est une solution de l'équation.[1] ce qui exprime le fait que $\overline{x_0} \subseteq S$ où S est l'ensemble des solutions.

D'autre part, si x est une solution de l'équation [1], alors $y_0 \in F(x)$ et $y_0 \in F(x_0)$ donc $\theta \in F(x - x_0)$ et par conséquent $x - x_0 \in \ker F$ donc $x \in \overline{x_0}$.

■

Proposition 61 *Si* $F : X \to Y$ *est un monomorphisme m linéaire alors si l'équation* $y_0 \in F(x)$ *admet une solution elle est unique.*

Preuve:

En effet, si $x_0 \in X$ est une solution de l'équation alors l'ensemble des solutions est $S = x_0 + \ker F' = \{x_0\}$.

■

Proposition 62 *Si F est un m Frdholm d'indice nul alors on a les alternatives suivantes:*

1. Si F est un monomorphisme alors l'équation $y \in F(x)$, admet une solution unique pour tout vecteur $y \in Y$,

2. Si F n'est pas un monomorphisme l'équation $y \in F(x)$ n'admet toujours de solution, cependant s'il admet ~~$x_0 \in X$~~ cette solution n'est pas unique, l'ensemble des solution est $x_0 + \ker F$.

Preuve:

Si $indF = 0$ donc $\dim \ker F = \dim Y - \dim \operatorname{Im} F$ de plus si F est un monomorphisme alors $\dim Y = \dim F$ et donc F est surjectif par conséquent l'équation $y \in F(x)$ admet des solution mpour tout vecteur $y \in Y$ et cette solution est unique car F esr supposé être injectif.

Si $ind(F) = 0$ et si $\dim \ker F \neq 0$ alors $\dim Y \diagup \operatorname{Im} F \neq 0$ ce qui exprime que $\operatorname{Im} F$ est un sous espace vectoriel propre de Y donc F n'est pas une surjection par conséquent l'équation $y \in F(x)$ n'admet pas des solution pour tout vecteur $y \in Y$. Cependant si pour un vecteur y_0 donné de Y il existe une solutuion $x_0 \in X$ alors en existent plusieurs elles représentenet l'ensemble $x_0 + \ker F$.

Considèrons

$$F = (F_\alpha)_{\alpha \in \Delta} : (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha \leq \beta} \to Y_\alpha, \omega_{\alpha\beta}, \Delta)_{\alpha \leq \beta}$$

un morphisme m linéaire de la catégorie m-DSL et

$$F_\infty = \varinjlim F_\alpha : X_\infty \to Y_\infty$$

sa limite inductive.

Proposition 63 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $\overline{y_\lambda} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$,

2. $\gamma \in \Delta$, $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$, $x_\gamma \in \overline{x_\alpha}$ *tels que* $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma)$.

Preuve:

1. ▶ Supposons que $\overline{y_\lambda} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$, donc il existe $\mu \in \Delta$ tel que $x_\mu \sim x_\alpha$, $y_\mu \in F_\mu(x_\mu)$ et $y_\mu \sim y_\lambda$. Il existe alors $\gamma \in \Delta$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \mu$ avec:

2. $x_\mu \sim \pi_{\mu\gamma}(x_\mu) = \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha) \sim x_\alpha$,

3. $y_\mu \sim \omega_{\mu\gamma}(y_\mu) = \omega_{\lambda\gamma}(y_\lambda) \sim y_\lambda$,

4. $\omega_{\mu\gamma}(y_\mu) \in \omega_{\mu\gamma}(F_\mu(x_\mu))$.
   Considérons $y_\gamma = \omega_{\mu\gamma}(y_\mu)$ et $x_\gamma = \pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)$ alors $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$, $x_\gamma \in \overline{x_\alpha}$ et $y_\gamma \in \omega_{\mu\gamma}(F_\mu(x_\mu)) = F_\gamma(\pi_{\mu\gamma}(x_\mu)) = F_\gamma(\pi_{\alpha\gamma}(x_\alpha)) = F_\gamma(x_\gamma)$.

   ▶ Supposons quils existent $\gamma \in \Delta$, $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$, $x_\gamma \in \overline{x_\alpha}$ tels que $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma)$, alors évidement $\overline{y_\gamma} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$ on conclut en remarquant que $\overline{y}\ = \overline{y_\lambda}$

   ■

Proposition 64 *L'équation* $\overline{y_\lambda} \in F_\infty(\overline{x_\alpha})$ *admet une solution dans* X_∞ *si et seulement si il existe* $\gamma \in \Delta$, $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$ *tel que l'équation* $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma)$ *admette une soultion* $x_\gamma \in \overline{x_\alpha}$.

Preuve:

▶ Supposons que $\overline{x_\alpha^0} \in X_\infty$ soit une solution de l'équation alors $\overline{y_\lambda} \in F_\infty(\overline{x_\alpha^0})$ par conséquent ils existent $\gamma \in \Delta$, $x_\gamma^0 \in \overline{x_\alpha^0}$, et $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$tels que $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma^0)$, exprimanr ainsi que l'équation $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma)$ admette une soultion $x_\gamma^0 \in \overline{x_\alpha^0}$.

▶ S ils existent $\gamma \in \Delta$, $y_\gamma \in \overline{y_\lambda}$ tel que l'équation $y_\gamma \in F_\gamma(x_\gamma)$ admette une soultion $x_\gamma^0 \in \overline{x_\alpha}$ alors $\overline{y_\gamma} \in F_\infty(\overline{x_\gamma^0})$.

■

CONCLUSION

Mise à part l 'étude des morphismes m– linéaires dans le cas des systèmes projectifs, ce travail ouvre la voie à une étude systématique de la continuité des applications linéaires multivoques.

Il pourra également éclairer d' avantage les recherches liées aux questions d' existence et d'unicité dans la résolution des équations différentielles à opérateurs multivoques.

Bibliographie

_E.H Spanier, Algebraique Topology, McGraw_Hill, 1966

_K.Deimling, Multivalued differential equations, Walter Greyter, 1992

_N.Bourbaki, Théorie des ensembles, Herman, 1970

_R.Cross, Multivalued linear operators, Marcel Dekker, 1998

_R.P.Agarwal et D.Oregan, Set valued mappings in non linear analysis, Taylor and Francis, 2002

_S.Eilenberg et N.Steenrod, Foundations Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952

_S.Mac Lane, Homology, Springer-Verlag, 1975

_S Lang, Algebra, Addison Wesley, 1970

ملخص: ينقسم هذا العمل إلى ثلاثة أجزاء. في الجزء الأول عرفنا التطبيقات متعددة الأشكال و بعض خواصها الأساسية، في الجزء الثاني عممنا مفهوم الخطية على هذه التطبيقات وأخيرا تطرقنا إلى حل المعادلات الخطية متعددة الأشكال باستعمال متناوبة فرادهولم.

المفتاح: التطبيقات الخطية متعددة الأشكال،المعادلات الخطية متعددة الأشكال، متناوبة فرادهولم.

Résumé:

Ce travail consiste en trois parties .Dans la première partie on s'intéressera a la notion d' applications multivoques ainsi qu'aux propriétés principales de telles applications ,la deuxième partie est consacrée a l'étude des applications multivoques linéaires ,et dans la troisième partie on abordera la résolution des équations multivoques linéaires par ce qu'on appelle l'alternative de Fredholm.

Mots clé: applications multivoques linéaires, équations multivoques linéaires, alternative de Fredholm

Abstract:

In this work we have defined the notion of multivalued maps, linear multivalued maps and their main properties. We have also shown how to solve multivalued linear equations by Fredholm's alternative.

Key words: multivalued linear maps, multivalued linear equations, Fredholm's alternative.