REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERED EL ENSEIGNEMENTSUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : . . .

N° série : . . . .

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Thème

Etude d'' une classe de problèmes mal posés pour équations différentielles

Option

Analyse Mathématique Appliquée

Par:

Boussafsaf Issam

Devant le jury :

Président:	Marhoune A. L.	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur:	Denche M.	Prof. Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs:	Ayadi A.	Prof. Univ. Oum Bawaqi
	Saidouni C.	M. C. Univ. Mentouri Constantine

Soutenu le04.07.2010

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord Monsieur Denche M Professeur à l'Université de Constantine, Encadreur de ce mémoire, pour l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans il ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent vivement à Monsieur le Président Marhoune A. L et Monsieur et Ayadi A qui ont accepté de juger mon travail.

Merci à toute ma famille, qui m'a soutenu en toutes circonstances. J'espère qu'ils trouvent ici l'expression de mon éternelle reconnaissance.

Un remerciement très spécial à Mr Amiraoui Mohamed que je n'oublierai jamais, ce que vous avez fait pour moi, et j'espère de tout mon cœur que dieu vous le rendrez. Aussi j'aimerai bien qu'un jour je ferai la même chose pour d'autre. En effet je vous dis un grand merci.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

0.1 Introduction

Hadamard a introduit en 1902 [6, 7] la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.

- Elle est unique.

- Elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être bien précisées par le choix des espaces, ou des topologies, dans lesquelles les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre, Hadamard laissait entendre (et c'est une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

- Un modèle physique étant fixé, mais en réalité les données expérimentales sont en générale bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

- Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister, n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

- Si un problème a plusieurs solutions (non-unicité) c'est une chose plus sérieuse, il faut un moyen de choisir entre elles. Dans ce cas, il faut ajouter des informations supplémentaires pour minimiser le nombre des solutions (une information a priori).

- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier, en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il n'est pas possible (indépendamment de la méthode numérique choisie) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal posé, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches mais différentes des données "réelles".

Un problème qui n'est pas bien posé aux sens de la définition ci-dessus est dit "mal posé" (ill-posed en anglais). Nous allons en voir un exemple physique de tels problèmes.

Considérons un système physique évoluant avec le temps : Un problème essentiel consiste à atteindre au bout d'un certain temps T (ou voisinage de T) un objectif donné. Cela peut par exemple, être théoriquement obtenu en injectant certaines conditions initiales, malheureusement, les difficultés de réalisabilité parfaite de telles conditions entraînent des perturbations (donc des écarts par rapport aux conditions idéales).

Deux problèmes se posent, l'un apprécier l'influence de ces "écarts" sur la solution, si on laisse évoluer le système livré a lui-même, et l'autre corriger l'évolution du système, c'est-à-dire contrôler le processus physique, donc effectuer des actions entre les instants zéro et T, non seulement pour compenser les écarts initiaux, mais aussi d'autre perturbation, aléatoires ou non, pouvant intervenir en cours du processus, ces actions visent toutes à améliorer la qualité de l'objectif visé (ou les conditions pour l'atteindre).

Notre travail est consacré à l'étude d'un problème parabolique non homogène rétrograde mal posé, au sens des temps décroissants. Il est composé en trois chapitres.

Au premier chapitre on rappelle en bref les notions des problèmes mal posés en les illustrant par des exemples simples. Enfin dans ce chapitre en présente en bref certaines méthodes de régularisation et en particulier celles de Lavrentiev [13, 14] et de Tikhonov [20, 21, 22].

Au deuxième chapitre on aborde l'étude d'un problème parabolique non homogène rétrograde abstrait. On propose une régularisation du problème mal posé par une perturbation du second membre de l'équation et la donnée finale en même temps.

Au troisième chapitre on illustre les résultats obtenus précédemment par l'étude d'un problème inverse pour l'équation de la chaleur.

Soient A est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H tel que 0 appartient à l'ensemble résolvant de A, supposons de plus que A^{-1} est compact, soit $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$une base orthonormale dans H correspondant aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de A ; telles que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ......$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. Considérons le problème final suivant :

Trouver $u : [0,T] \longrightarrow H$, vérifiant l'équation

$$u'(t) + Au(t) = f(t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

et la condition finale

$$u(T) = g, \tag{2}$$

pour certaines valeurs de $f(t)$ et g dans l'espace de Hilbert H, Un tel problème est mal posé, même s'il existe une solution unique dans $[0,T]$, elle ne dépend pas continûment des données de problème $f(t)$ et g.

On note que le problème final pour l'équation homogène :

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$
$$u(T) = g \ , \tag{4}$$

a été étudié par plusieurs auteurs en utilisant différentes approches. Parmi ces auteurs Lavrentiev [11], Lattes et lions [12], Miller [14], payne [15] , showalter [16] , où l'approche d'étude d'un tel problème est faite par une perturbation de l'opérateur A.

Dans [1, 4, 17], un problème similaire est traité par une perturbation de la condition finale comme suit :

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$
$$u(T) + \alpha u(0) = g. \tag{6}$$

Une approche similaire dite méthode des conditions aux limites auxiliaires est donnée dans [9] . Aussi, nous devons mentionner que les conditions non standard de la forme (6) pour les équations paraboliques ont été considérées dans les travaux récents [2, 3] .

Dans [5] le problème est traité par une autre perturbation de la condition finale qui contient une dérivée du même ordre que celle de l'équation, comme suit :

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(T) - \alpha u'(0) &= g \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Dans [4] cette méthode sera appelée méthode des valeurs quasi-limites (Quasi boundary value method), et le problème approximant sera dit problème aux valeurs quasi-limites (Quasi boundary value problem) (QBVP). Il est montré que cette méthode donne une meilleure approximation que celle d'autres méthodes de quasi réversibilité [1, 4, 10] .

Dans [23] Trong et Tuan traitent le cas où l'opérateur A est engendré par l'opérateur différentiel du second ordre avec des conditions aux limites périodiques. Plus exactement ils étudient le problème non homogène suivant :

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t); \ \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0; \ \ t \in (0,T) \\ u(x,T) &= g(x); \quad x \in (0,\pi) \end{aligned} \tag{8}$$

qu'ils approximent par le problème

$$
\begin{aligned}
u_t^\alpha - u_{xx}^\alpha - \alpha u_{xxxx}^\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha n^4 (T-t)} f_n(t) \sin(nx);\ \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\
u^\alpha(0,t) &= u^\alpha(\pi,t) = u_{xx}^\alpha(0,t) = u_{xx}^\alpha(\pi,t) = 0;\ \ t \in (0,T) \\
u^\alpha(x,T) &= g(x); \quad x \in (0,\pi)
\end{aligned} \tag{9}
$$

où $0 < \varepsilon < 1$ et $f_n(t)$, g_n sont les coefficients de Fourier dans l'espace $L^2(0,\pi)$ munit de la base orthonormale $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

Dans [24] ils approximent le problème (8) par le problème

$$
\begin{aligned}
u_t^\alpha - u_{xx}^\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(t) \sin(nx);\ \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \\
u^\alpha(0,t) &= u^\alpha(\pi,t) = 0;\ \ t \in (0,T) \\
u^\alpha(x,T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_n \sin(nx); \quad x \in (0,\pi)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Dans ce travail, en approximant le problème (1)-(2) par une perturbation de la donnée de l'équation $f(t)$ et une perturbation de la donnée finale g en même temps, comme suite :

$$
\begin{cases}
u'^\alpha(t) + Au^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(t) \sin(nx)\,; \quad 0 \leq t \leq T \\
u^\alpha(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_n \sin(nx).
\end{cases} \tag{11}
$$

Nous montrons que le problème approximatif (11) est bien posé pour chaque $\alpha \in (0,T)$, et si $u^\alpha(t)$ est la solution du QBVP (11), alors $u^\alpha(T)$ converge vers g pour α tend vers 0. Et nous montrons que le problème final (1)-(2) admet une solution classique u si et seulement si la suite $(u^\alpha(0))_{\alpha \geq 0}$ converge. De plus, nous montrons la convergence de u^α vers u lorsque α tend vers 0 uniformément en t. Et on montre aussi que le problème (1)-(2) admet une solution classique u si et seulement si la suite $(u'^\alpha(0))_{\alpha \geq 0}$ converge. De plus, nous montrons la convergence de u^α vers u lorsque α tend vers 0 dans $C^1([0,T], H)$, ainsi que des résultats concernant l'ordre de convergence.

1 Chapitre1 : Notions préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle la notion de problème bien posé (dite aussi correctement posé) - au sens de Hadamard, et on donne certains exemples des problèmes mal posés, on rappelle aussi en bref la méthode de Lavrentiev et de Tikhonov de régularisation de problèmes mal posés.

D'après Jacques Hadamard [6, 7, 8], un problème est dit bien posé (correctement posé) si le problème admet une solution (Existence), si elle est unique (Unicité) et elle est stable (Stabilité). Le problème est dit mal posé si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée. Illustrons cela sur l'exemple suivant :

Soient E, F deux espaces métriques et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire (même pour un opérateur non linéaire). Considérons l'équation :

$$Ax = y \tag{1.1}$$

Notons que plusieurs problèmes physiques, se ramènent à une telle équation, le problème (1.1) est dit bien posé si ces trois conditions sont vérifiées simultanément :

1) Existence : Pour tout second membre l'équation (1.1) admet une solution

$\forall y \in F, \exists x \in E : Ax = y.$

2) Unicité : La solution est unique

$\forall x_1, x_2 \in E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$

3) Stabilité : Cette solution dépend continûment du second membre (une faible perturbation de y donne une faible perturbation de la solution x)

Pour $Ax = y$ et $A\widetilde{x} = \widetilde{y}$, on a $\lim\limits_{\widetilde{y} \longrightarrow y} \widetilde{x} = x$.

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, le problème est dit mal posé.

Plusieurs problèmes physiques ne vérifient pas forcément ces conditions simultanément.

Tikhonov A. a reformulé en 1943 [18] la définition d'un problème bien posé, élargissant ainsi la classe des problèmes mal posés. Selon Tikhonov le problème (1.1) est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1- La solution du problème (1.1) existe et appartient à un ensemble donné à priori M inclus dans E pour une classe de données dans F.

$\forall y \in N \subset F, \exists\, x \in M \subset E : Ax = y$

2- Cette solution est unique dans la classe M.

$$\forall x_1, x_2 \in M \subset E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

3- A une perturbation infiniment petite du second membre telle que la solution reste dans M correspond une variation infiniment petite de cette solution.

$$\lim_{\widetilde{y} \longrightarrow y} \widetilde{x} = x, \text{ tel que } Ax = y,\ A\widetilde{x} = \widetilde{y} \text{ et } x, \tilde{x} \in M$$

1.2 ***Exemples des problèmes mal posés***

On donne quelques exemples des problèmes mal posés

Exemple 1 : Dans $D^- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2/0 < x < 1, -\infty < t < 0\}$, on considère $u(x,t)$ solution du problème suivant :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ dans } D^-, \tag{1.2}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t < 0 \quad , \tag{1.3}$$
$$u(x,0) = g(x),\ x \in]0,1[\quad . \tag{1.4}$$

En utilisant le changement de variable $t = -t$, ce problème devient

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ dans } D^+, \tag{1.5}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0 \quad , \tag{1.6}$$
$$u(x,0) = g(x),\ x \in]0,1[\quad , \tag{1.7}$$

où

$$D^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2/0 < x < 1, 0 < t < +\infty\}.$$

Par la méthode de séparation des variables, les valeurs propres de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$sont $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, correspondant aux fonctions propres $\phi_n = \sin(n\pi x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc on peut voir facilement que la solution du problème (1.5)-(1.7) peut être donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n e^{n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \tag{1.8}$$

où g_n sont les coefficients de Fourier de g.

L'existence de la solution est équivalente à la condition très restrictive sur la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2 e^{2n^2\pi^2 t}$, si la solution existe elle est unique, et même si la solution du problème (1.5)-(1.7) existe et unique ne dépend pas continûment de la donnée initiale g. Donc on a la proposition suivante :

Proposition 1 : Pour tout $T > 0$, $M > 0$, $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g telle que

$$\|g\|_{C[0,1]} = \varepsilon.$$

Et pour laquelle le problème (1.5)-(1.7) admet une solution $u(x,t)$ définit par (1.8), et satisfait

$$\|u(.,T)\|_{C[0,1]} > M.$$

Démonstration : Soit $M > 0$, $\varepsilon > 0$, et soit n suffisamment grand pour lequel

$$n^2\pi^2 T \geq \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right). \tag{1.9}$$

Pour $g(x) = \varepsilon \sin(n\pi x)$, donc $g_m = (\varepsilon \sin(n\pi x), \sin(m\pi x))_{C[0,1]}$, $m \geq 1$, alors

$$\begin{cases} g_m = \varepsilon, \text{ pour } m = n \ , \\ g_m = 0, \text{ pour } m \neq n \ , \end{cases}$$

d'où la solution du problème (1.5)-(1.7) et donnée par

$$u(x,t) = \varepsilon e^{n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Soit $T > 0$, on a

$$\|u(.,T)\|_{C[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} \left\{\varepsilon e^{n^2\pi^2 T} \sin(n\pi x)\right\} = \varepsilon e^{n^2\pi^2 T}.$$

De (1.9), on obtient

$$\|u(.,T)\|_{C[0,1]} > M.$$

Ainsi la solution du problème (1.5)-(1.7) qui donné par (1.8) existe et unique mais ne dépend pas continûment de la donnée initiale g, donc ce problème est mal posé au sens d'Hadamard. ■

Exemple 2 : [8]

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 \ , \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.10}$$

où $f(x)$, $\varphi(x)$ sont des fonctions données. Si on pose :

$$f_1(x) = 0,$$
$$\varphi_1(x) = \frac{1}{a}\sin(ax),$$

alors la solution du problème de Cauchy (1.10) est donnée par

$$u_1(x,t) = \frac{1}{a^2}\sin(ax)\sinh(ay), \ \ a > 0. \tag{1.11}$$

Si on pose :

$$f_2(x) = \varphi_2(x) = 0,$$

alors la solution du problème de Cauchy (1.10) sera :

$$u_2(x,t) = 0. \tag{1.12}$$

On va estimer au sens de la métrique de $C\,[a,b]$ les différences entre les données initiales et les solutions (1.11)-(1.12).

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| = 0$$

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\tfrac{1}{a}\sin(ax)\right| = \tfrac{1}{a}.$$

Cette dernière, pour des valeurs assez grandes de a, peut être rendue assez petite que l'on veut.

Pour les solutions (1.11)-(1.12) on a :

$$d(u_1, u_2) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_1(x,y) - u_2(x,y)|\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} d(u_1, u_2) = & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\tfrac{1}{a^2}\sin(ax)\sinh(ay)\right| \\ & = \tfrac{1}{a^2}\sinh(ay). \end{aligned}$$

Pour chaque $y > 0$ fixé, elle peut être rendue assez grande que l'on veut pour des valeurs assez grandes de a. D'où la condition 3 n'est pas vérifiée. Ainsi le problème (1.10) est mal posé.

Exemple 3 :

Un exemple classique d'un problème mal posé est le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x), \ (x,t) \in \Pi = (0,\pi)\times(0,\pi), \\ u|_{\partial\Pi} = 0 \quad , \end{cases} \tag{1.13}$$

qui peut être écrit dans $L_2(\Pi)$ sous la forme opérationnelle

$$A_\alpha u = f \quad , \tag{1.14}$$

puisque A_α admet un système complet orthonormale dans $L_2(\Pi)$ des fonctions propres

$$\phi^\alpha_{k,j} = \frac{2}{\pi}\sin(kt)\sin(jx), \ k, j \in \mathbb{N},$$

où les valeurs propres correspondantes sont :

$$\lambda^\alpha_{k,j} = j^2 - \alpha^2 k^2, \ k, j \in \mathbb{N}.$$

Alors la solution du problème (1.13) est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{j,k=1; j\neq\alpha k}^{+\infty} \frac{\left(f, \phi^\alpha_{k,j}\right)_{L_2(\Pi)}}{j^2 - \alpha^2 k^2} + \sum_{j,k=1; j=\alpha k}^{+\infty} u_{k,j}(x,t)\phi^\alpha_{k,j} \quad , \tag{1.15}$$

on trouve que

1- Si α est nombre rational alors (1.13) est solvable si et seulement si

$$\left(f, \phi^\alpha_{k,j}\right)_{L_2(\Pi)} = 0, \ \forall k, j \in \mathbb{N} : j = \alpha k \quad ,$$

si la solution existe elle n'est pas unique.

2- Si α est nombre irrationnel et satisfait pour certaines constantes $c > 0$, $p > 0$

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{c}{n^{p+2}};\ n, m \in \mathbb{N}\ ,$$

alors (1.13) a une solution unique dans $L_2(\Pi)$, si

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} k^{2p+2} \frac{\left|\left(f, \phi_{k,j}^{\alpha}\right)_{L_2(\Pi)}\right|^2}{(j + \alpha k)^2} < \infty,$$

qui est satisfait si, par exemple $f \in W_2^p(\Pi)$.

Donc le problème (1.13) n'est pas stable à de petites variations du paramètre α, D'où le problème (1.13) est mal posé au sens de Hadamard.

Exemple 4 :

Notons par $D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, $\Omega = D \times (0, T)$ et $\Gamma_d = \Gamma_B \cup \Gamma_F$, où $\Gamma_B = \partial D \times [0, T]$, $\Gamma_F = D \times \{T\}$.

Aussi on note par $x' = (x_1, x_2)$ et $x = (x_1, x_2, t)$, pour $l \in \mathbb{N}^*$, la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ \mathrm{x} \in \Omega, \\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma_B, \\ u(x) = e^{-2l^2 T} \sin(lx_1) \sin(lx_2),\ x \in \Gamma_F, \end{cases} \tag{1.16}$$

est donnée par

$$u^{(l)}(x) = e^{-2l^2 t} \sin(lx_1) \sin(lx_2).$$

On choisit dans L_2 les deux normes suivantes :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_F)} = \left(\int_{D} u^2(x', T) dx'\right)^{\frac{1}{2}},$$

alors on obtient que

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(e^{-2l^2 t} \sin(lx_1) \sin(lx_2)\right)^2 dx.$$

D'où

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^T e^{4l^2(T-t)}dt \times \int_D \left(e^{-2l^2T}\sin(lx_1)\sin(lx_2)\right)^2 dx'$$

$$= \tfrac{1}{4l^2}\left(e^{4l^2T}-1\right)\|u\|_{L^2(\Gamma_F)}^2$$

puisque pour tout $C>0$, il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{2l}\sqrt{\left(e^{4l^2T}-1\right)} > C \ ,$$

alors, on trouve que l'inégalité

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 > C\,\|u_F\|_{L^2(\Gamma_F)}^2 \ ,$$

est vérifiée pour chaque $C>0$. Cela veut dire que la solution ne dépend pas continûment de la donnée finale, d'où le problème (1.16) est mal posé.

Exemple 5 : (Le problème inverse pour l'équation de la chaleur)

Nous considérons le problème de trouver la température $u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, tel que :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \quad , \\ u(x,T) = u_T(x), \text{ sur } \Omega \quad , \end{cases}$$

où $\Omega = (0,1)$, et $u_T(x)$ est une fonction donnée, par séparation des variables on peut voir que les fonctions $u_n(x,t) = e^{-\pi^2n^2t}\sin(\pi nx)$ satisfissent le problème inverse de la chaleur. Les données initiales sont $u_{n0}(x) = u_n(x,0) = \sin(\pi nx)$, leurs normes égales à 1 dans l'espace $C^0(\Omega)$ et à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ dans l'espace $L^2(\Omega)$, et les données finales $u_{nT}(x) = u_n(x,T) = e^{-\pi^2n^2T}\sin(\pi nx)$ prennent la valeur $e^{-\pi^2n^2T}$ dans l'espace $C^0(\Omega)$ et la valeur $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi^2n^2T}$ dans l'espace $L^2(\Omega)$. Si on définit l'opérateur $Au_0 = u_T$, Alors l'estimation $\|u_0\|_X \leq C\|u_T\|_Y$ est impossible si X et Y sont l'espace classique $C^0(\Omega)$, ou $L^2(\Omega)$ (même pour un autre espace classique) car $\|u_0\|_X$ est supérieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ mais $\|u_T\|_Y$ tend vers 0 exponentiellement, donc le problème est instable dans les espaces classiques. Ce phénomène est tout à fait typique pour beaucoup de problèmes inverses des équations différentielles aux dérivées partielles.

les valeurs propres de l'opérateur $-\partial_x^2$ sont $\{\pi^2n^2\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ correspondantes aux fonctions propres $\{\sin(\pi nx)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui forment une base orthonormale complète de l'espace $L^2(\Omega)$, ainsi on peut écrire

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_{nT}e^{\pi^2n^2(T-t)}\sin(\pi n x),$$

tel que u_{nT} sont les coefficients de Fourier de la condition finale, il est clair que l'existence de la solution de donnée finale $u_T(x)$ est équivalant à ce condition très restrictives qui est la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{nT}^2 e^{2\pi^2n^2T}$, même si cette condition est satisfaite, le problème reste mal posé, car :

$$\begin{aligned}\|u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{nT}^2 e^{2\pi^2n^2t}\\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_{nT}^2 e^{2\pi^2n^2T},\end{aligned}$$

et la série ci-dessus est exponentiellement croissante, donc la solution ne dépend pas continûment de la donnée finale $u_T(x)$, par conséquent le problème est mal posé.

Exemple 6 :

Considérons l'espace de Hilbert ℓ^2 de dimension infinie tel que

$$x=(x_1,x_2,...,x_n,...)\in\ell^2 \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty} x_n^2<+\infty, \text{ et } \|x\|_{\ell^2}=\left(\sum_{n\geq 1}^{+\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $A:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ un opérateur diagonale dans ℓ^2 tel que

$$Ax=(c_1x_1,c_2x_2,...,c_nx_n,...), \text{ tel que } c_i\neq 0, \ \forall i\geq 1.$$

Considérons le problème

$$Ax=y,$$

l'inverse A^{-1} de A est donné par :

$$A^{-1}y=(c_1^{-1}y_1,c_2^{-1}y_2,...,c_n^{-1}y_n,...),$$

donc on a l'existence de la solution de ce problème pour un certaines $y\in\ell^2$, et on peut encore montrer facilement l'unicité de la solution, prenons maintenant

$$y_n=(0,0,...,\frac{1}{n},0,...),$$

donc

$$A^{-1}y_n = (0, 0, ..., n, 0, ...),$$

$\|y_n\|_{\ell^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, mais $\|A^{-1}y_n\|_{\ell^2} = n \longrightarrow +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc on n'a pas la stabilité de la solution d'où le problème est mal posé.

1.3 ***Méthodes de régularisation***

Nous citons quelques méthodes de régularisation pour les problèmes linéaires mal posés. Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité.

Soient E, F deux espaces de Hilbert et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur compact, considérons l'équation :

$$Ax = y. \tag{1.17}$$

Supposons que $\ker(A) = \{0\}$, si E est de dimension infinie, alors l'opérateur A admet un inverse A^{-1} sur $\mathrm{Im}(A)$ qui n'est pas borné [22], d'où le problème (1.17) est mal posé, dans le sens que la solution existe et unique mais elle ne dépend pas continûment du second membre.

Nous devons chercher des solutions approximatives mais stables, en modifiant l'équation (1.17). On appelle régularisation de (1.17) tout famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : F \longrightarrow E$ tel que pour tout $x \in E$ on a :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} R_\alpha(Ax) = x,$$

le paramètre α est appelé paramètre de régularisation.

soient $\tilde{A}$ et $\tilde{y}$ des $\varepsilon-$approximations de A et de y respectivement, ie

$$\left\|A - \tilde{A}\right\| \leq \varepsilon \text{ et } \|y - \tilde{y}\| \leq \varepsilon.$$

Considérons l'équation approchée

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}. \tag{1.18}$$

Remarque : Si par exemple $\tilde{A} = A$ et $\tilde{y} \notin \mathrm{Im}(A)$, l'équation (1.18) n'a pas de solution. Même si elle admet une solution $\tilde{x}$, alors en générale $\tilde{x} \nrightarrow x$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, où x est la solution de (1.16).

1-**Méthode de M.Lavrentiev :**

Nous présentons cette méthode de régularisation pour le problème (1.16). Introduisons une équation auxiliaire

$$\left(\tilde{A} + \alpha I\right) x_\alpha = \tilde{y}, \tag{1.19}$$

en choisissant le paramètre de régularisation α en fonction de ε de telle sorte que x_α tend vers x pour ε tend vers 0, Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires, plus exactement on a la théorème suivante :

Théorème : Supposons que l'opérateur A vérifie pour tout $\alpha > 0$, la condition

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{c}{\alpha}, \tag{1.20}$$

supposons aussi que $y \in D(A^2)$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi en fonction de ε de telle sorte que pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a $\alpha \rightarrow 0$ et $\varepsilon\alpha^{-2} \longrightarrow 0$, alors $x_\alpha \longrightarrow 0$, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Si $\alpha = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors

$$\|x_\alpha - x\| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$$

2-**Méthode de A.Tikhonov :** L'autre méthode proposée par A.Tikhonov pour le problème (1.16) est la suivante :

En supposant que $\mathrm{Im}\, A$ est dense dans F, nous introduisons l'équation auxiliaire suivante :

$$(\alpha I + A^* A)\, x_\alpha = A^* \tilde{y}$$

Si $\tilde{y} \in D(A^{-1})$ alors la solution x_α est donnée par :

$$x_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* \tilde{y}$$

qui converge vers x quand $\alpha \longrightarrow 0$, si le paramètre de régularisation α est choisi convenablement en fonction de ε, de telle sorte que pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a aussi $\alpha \longrightarrow 0$ et $\varepsilon^2\alpha^{-1} \longrightarrow 0$.

2 Chapitre 2 : Modification de la méthode de régularisation pour les problèmes mal posés

Dans ce chapitre, on développe une méthode de régularisation d'un problème final pour une équation parabolique non homogène par une perturbation du second membre de l'équation $f(t)$ *et la donnée finale* g *en même temps.*

Soient A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H et 0 appartient à l'ensemble résolvant de A, supposons que A^{-1} est compact, soit $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$une base orthonormale dans H correspondant aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de A ; telles que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 <$ ...... et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. Considérons le problème final suivant :

Trouver $u : [0,T] \longrightarrow H$, vérifiant

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \quad ; \quad 0 \leq t < T, \\ u(T) = g \quad . \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition : Une fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$, est appelée solution classique du problème (2.1) si et seulement si $u \in C^1([0,T], H)$, $u(t) \in D(A); \forall t \in [0,T]$, vérifie l'équation et la condition finale.

Remarque : Le problème (2.1) est mal posé car si la solution existe elle ne dépend pas continûment des données du problème.

Démonstration : Il est facile de voir que la solution du problème (2.1) si elle existe elle est donnée par :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \ \Phi_n \ .$$

On a :

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2 \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{2(T-t)\lambda_n} g_n^2 + (T-t) \int_t^T e^{2(s-t)\lambda_n} f_n^2(s) ds \right), \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right), \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right).$$

Et d'autre part on a :

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n + \lambda_n \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds + f_n(t) \right) \ \Phi_n \ ,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u'(t)\|_H^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n + \lambda_n \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds + f_n(t) \right)^2 \\
&\leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda_n^2 e^{2(T-t)\lambda_n} g_n^2 + (T-t)\lambda_n^2 \int_t^T e^{2(s-t)\lambda_n} f_n^2(s) ds + f_n^2(t) \right) \\
&\leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T\lambda_n^2 \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) + 4 \|f(t)\|_H^2 \\
&\leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T\lambda_n^2 \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) + 4 \|f\|_{C([0,T],H)}^2 \ ,
\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) + 4 \|f\|_{C([0,T],H)}^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{C^1([0,T],H)} \leq & \left\{ 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) \right\}^{\frac{1}{2}} + \\
& \left\{ 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) + 4 \|f\|_{C([0,T],H)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$Au(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \ \Phi_n \ ,$$

alors

$$\|Au(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2 ,$$

donc

$$\|Au(t)\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right).$$

Donc pour le problème (2.1) admet une solution classique il faut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{2T\lambda_n} g_n^2 + T \int_0^T e^{2s\lambda_n} f_n^2(s) ds \right) < +\infty. \tag{2.2}$$

L'ensemble des fonctions vérifiant la condition (2.2) n'est pas vide. Car par exemple les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que : $g_n = O\left(\frac{e^{-T\lambda_n}}{\lambda_n n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right)$, et $f_n(t) = O\left(\frac{e^{-T\lambda_n}}{\lambda_n n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right); \varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1$, $\forall t \in [0,T]$ vérifient cette condition .

En plus même si la solution existe sous certaines conditions très restrictives elle ne dépend pas continûment des données du problème.

Supposons que la solution u existe. Et soient u, v deux solutions du problème (2.1) correspondants aux second membres $f_1(t)$ et $f_2(t)$ et aux données finales g_1, g_2.

On a

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_{1n} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_{1n}(s) ds \right) \Phi_n ,$$

et

$$v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_{2n} - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_{2n}(s) ds \right) \Phi_n ,$$

où $g_{in} = (g_i, \Phi_n)$; $i = 1,2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(t)_{in} = (f(t)_i, \Phi_n)$; $i = 1,2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,T]$.

Alors

$$u(t) - v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} (g_{1n} - g_{2n}) - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} (f_{1n}(s) - f_{2n}(s)) ds \right) \Phi_n.$$

D'où

$$\|u(t)- \ v(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} \left(g_{1n} - g_{2n}\right) \ - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} \left(f_{1n}(s) - f_{2n}(s)\right) ds \right)^2$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{2T\lambda_n} \left(g_{1n} - g_{2n}\right)^2 \ + \left(\int_0^T e^{(s-t)\lambda_n} \left(f_{1n}(s) - f_{2n}(s)\right) ds \ \right)^2 \right],$$

alors

$$\|u(t)- \ v(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2T\lambda_n} \Big(\left(g_{1n} - g_{2n}\right)^2$$

$$+ T \int_0^T \left(f_{1n}(s) - f_{2n}(s)\right)^2 ds \Big) \ ,$$

et cette série est exponentiellement croissante, d'où le problème (2.1) est ne dépend pas continûment des données du problème, alors le problème (2.1) est mal posé aux sens de Hadamard.

Clark-oppenheimer [4] rapprochent le problème homogène (3)-(4) par le problème

$$\begin{array}{l} u^{\alpha\prime}(t) + Au^{\alpha}(t) = 0 \ \ , \quad 0 \leq t < T, \\ u^{\alpha}(T) + \alpha u^{\alpha}(0) = g \ \ . \end{array}$$

Denech-Bessila [5] rapprochent le problème homogène (3)-(4) par le problème

$$\begin{array}{l} u^{\alpha\prime}(t) + Au^{\alpha}(t) = 0 \ \ , \quad 0 \leq t < T, \\ u^{\alpha}(T) - \alpha u^{\alpha\prime}(0) = g \ \ . \end{array}$$

Nous rapprochons le problème final (2.1) par le problème suivant :

2.2 ***Position de problème***

le problème suivant

$$\begin{cases} u'^{\alpha}(t) + Au^{\alpha}(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t)\Phi_n \ \ , \ \ 0 \leq t < T, \\ u^{\alpha}(T) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n \ \Phi_n \ \ , \end{cases} \tag{2.3}$$

est appelé Quasi boundary value problem (QBVP).

On montre que le problème (2.3) est bien posé pour chaque $\alpha \in (0, T)$, et si $u^\alpha(t)$ la solution du QBVP (2.3), alors $u^\alpha(T)$ converge vers g pour α tend vers 0. Nons montrons que le problème final (2.1) admet une solution classique u si et seulement si la suite $(u^\alpha(0))_{\alpha \geq 0}$ converge. De plus, nous montrons la convergence de u^α vers u lorsque α tend vers 0 uniformément en t. Et nons montrons aussi que le problème (2.1) admet une solution classique u si et seulement si la suite $(u'^\alpha(0))_{\alpha \geq 0}$ converge. De plus, nous montrons la convergence de u^α vers u lorsque α tend vers 0 dans $C^1([0, T], H)$, ainsi que des résultats concernant l'ordre de convergence.

Remarque :

Si on trouve $f \equiv 0$ dans l'équation du QBVP (2.3), le problème (2.3) coïncide avec le problème approché de Denche-Bissila

Démonstration :

En effet, la solution du problème

$$\begin{cases} u^{\alpha\prime}(t) + Au^\alpha(t) = 0 \quad , \quad 0 \leq t < T, \\ u^\alpha(T) - \alpha u^{\alpha\prime}(0) = g \quad , \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n \ \Phi_n \ ,$$

alors

$$u(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n \ \Phi_n \ . \ \blacksquare$$

2.3 ***Représentation de la solution du QBVP (2.3)***

Puisque $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$est une base orthonormale dans H.

Par analogie avec la méthode de Fourier, on va chercher une solution non triviale de (2.3) sous la forme

$$u^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^\alpha(t)\Phi_n. \tag{2.4}$$

Supposons que formellement on peut changer entre la dérivée première par rapport à t et le signe somme $(\sum)$, et même pour le signe de l'opérateur A.

En remplaçant (2.4) dans le problème (2.3), et en tenant en compte le fait que $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$est une base orthonormale dans H, et que

$$A\Phi_n = \lambda_n \Phi_n \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

on obtient

$$u_n'^{\alpha}(t) + \lambda_n u_n^{\alpha}(t) = \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.5}$$

$$u_n^{\alpha}(T) = \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} \ g_n \ . \tag{2.6}$$

La solution de l'équation homogène (2.5) est donnée par $u_n^{\alpha}(t) = c_1 e^{-t\lambda_n}$

donc la solution particulière de (2.5) est $u_n^{\alpha}(t) = C(t)e^{-t\lambda_n}$, tel que

$$C'(t)e^{-t\lambda_n} = \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t),$$

donc

$$C(t) = C(T) - \int_t^T \frac{e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds,$$

alors

$$u_n^{\alpha}(t) = ce^{-t\lambda_n} - \int_t^T \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds \quad ,$$

où $c = c_1 + C(T)$,

de la condition finale(2.6) , on obtient $c = \frac{g_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}}$,

donc $u_n^{\alpha}(t)$ est donnée par :

$$u_n^{\alpha}(t) = \frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_t^T \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds \ .$$

Ainsi

$$u^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)\ \Phi_n. \tag{2.7}$$

2.4 ***Existence de la solution du QBVP (2.3)***

Théorème 1 : soient $f\in L^2\left([0,T],H\right),\ g\in H,\ \alpha\geq 0$, le problème (2.3) admet une seule solution classique $u^{\alpha}(t)$.

de plus on a

$$\left\|u^{\alpha}(t)\right\|_H^2\leq\frac{2c}{\alpha^2}\ \left(\left\|g\right\|_H^2+T\left\|f\right\|_{L^2([0,T],H)}^2\right). \tag{2.8}$$

Démonstration : Soient $f\in L^2\left([0,T],H\right),g\in H,\alpha\geq 0$. Notons par $\left(u_k^{\alpha}(t)\right)_{k\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série (2.7) :

$$u_k^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)\ \Phi_n. \tag{2.9}$$

Il facile de voir que $u_k^{\alpha}(t)\in C^1\left([0,T],H\right);\forall k\geq 1.$ et que :

$$u^{\alpha}(t)-u_k^{\alpha}(t)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)\ \Phi_n,$$

ainsi

$$\left\|u^{\alpha}(t)-u_k^{\alpha}(t)\right\|_H^2=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(t)-u_k^{\alpha}(t)\right\|_H^2\leq 2\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left[\tfrac{e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}g_n^2+\left(\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2\right],$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette inégalité on obtient

$$\left(\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2\leq\left(\int_t^T ds\right)\int_t^T\left(\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)\right)^2ds,$$

alors

$$\|u^\alpha(t)-u_k^\alpha(t)\|_H^2 \le 2\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left\{\frac{e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}g_n^2+(T-t)\int_t^T\frac{e^{2(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(s)ds\right\}.$$

En utilisant les inégalités : $\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}\le \alpha^{-2}\lambda_n^{-2}, e^{-2t\lambda_n}\le 1; \forall t\in[0,T]$,

$e^{2(s-t-T)\lambda_n}\le 1; \forall t\in[0,T]$, (car $s\in[t,T]$).

Et faite que $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$, donc $\exists c\ge 0$, $\forall n\ge 1 : \lambda_n^{-2}\le c$, on obtient

$$\|u^\alpha(t)-u_k^\alpha(t)\|_H^2 \le \frac{2c}{\alpha^2}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}g_n^2+T\sum_{n=k+1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds\right).$$

Alors

$$\sup_{0\le t\le T}\|u^\alpha(t)-u_k^\alpha(t)\|_H^2 \le \frac{2c}{\alpha^2}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}g_n^2+T\sum_{n=k+1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds\right),$$

et comme $f\in L^2([0,T],H)$, et $g\in H$, donc

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{0\le t\le T}\|u^\alpha(t)-u_k^\alpha(t)\|_H^2=0$$

D'où $(u_k^\alpha(t))_{k\ge1}$ converge uniformément vers $u^\alpha(t)$ sur $[0,T]$.

D'autre part on a :

$$u_k^{\alpha\prime}(t)=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n+\int_t^T\frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds+\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)\right)\Phi_n.$$

En posant

$$\begin{aligned}v^\alpha(t)&=\lim_{k\to+\infty}u_k^{\alpha\prime}(t)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n+\int_t^T\frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds+\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)\right)\Phi_n,\end{aligned}$$

on obtient

$$\|v^\alpha(t)-u_k^{\alpha\prime}(t)\|_H^2=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left(\frac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n+\int_t^T\frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds+\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)\right)^2,$$

en utilisant l'inégalité élémentaire $(a+b+c)^2 \leq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$, on obtient

$$\|v^\alpha(t)-u_k^{\alpha\prime}(t)\|_H^2 \leq 4\sum_{n=k+1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda_n^2 e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}g_n^2+\left(\int_t^T \frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-2T\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(t)\right],$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette inégalité on obtient

$$\|v^\alpha(t)-u_k^{\alpha\prime}(t)\|_H^2 \leq 4\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{\lambda_n^2 e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}g_n^2+(T-t)\int_t^T \frac{\lambda_n^2 e^{2(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(s)ds$$

$$+\frac{e^{-2T\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(t)\ ,$$

en utilisant les majorations : $\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^{-2} \leq \alpha^{-2}\lambda_n^{-2}, e^{-2t\lambda_n} \leq 1; \forall t \in [0,T]$,

$e^{-2T\lambda_n} \leq 1$, $e^{2(s-t-T)\lambda_n} \leq 1; \forall t \in [0,T]$, $(s \in [t,T])$, on obtient

$$\|v^\alpha(t)-u_k^{\alpha\prime}(t)\|_H^2 \leq 4\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{\lambda_n^2}{\alpha^2\lambda_n^2}g_n^2+T\int_t^T\frac{\lambda_n^2}{\alpha^2\lambda_n^2}f_n^2(s)ds+\frac{1}{\alpha^2\lambda_n^2}f_n^2(t)$$

$$\leq \frac{4}{\alpha^2}\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}g_n^2+T\sum_{n=k+1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds+c\sum_{n=k+1}^{+\infty}f_n^2(t)\right),$$

et comme $f \in L^2([0,T],H)$, et $g \in H$, $f(t) \in H, \forall t \in [0,T]$ donc

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\|v^\alpha(t)-u_k^{\alpha\prime}(t)\|_H^2 = 0.$$

D'où $(u_k^{\alpha\prime}(t))_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $v^\alpha(t)$ sur $[0,T]$.

Et comme

$$u_k^\alpha(t) \in C^1([0,T],H); \forall k \geq 1.$$

En utilisant le critère de Weierstrass, on obtient $u^\alpha(t) \in C^1([0,T],H)$, et que

$$u^{\alpha\prime}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n^{\alpha\prime}(t)\ \Phi_n \quad \text{où} \tag{2.10}$$

$$u_n^{\alpha\prime}(t) = \left(\frac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n+\int_t^T\frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds+\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)\right).$$

Puisque

$$\frac{\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\leq\frac{1}{\alpha^2},$$

alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2\left(\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{\lambda_n^2e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}g_n^2+T\int_t^T\tfrac{\lambda_n^2e^{2(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(s)ds\right)$$

$$\leq\tfrac{2}{\alpha^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}g_n^2+T\sum_{n=1}^{+\infty}\int_t^Tf_n^2(s)ds\right)$$

$$\leq\tfrac{2}{\alpha^2}\left(\|g\|_H^2+T\,\|f\|_{L^2([0,T],H)}^2\right).$$

D'où $u^\alpha(t)\in D(A)$ et

$$Au^\alpha(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_ne^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_n-\int_t^T\frac{\lambda_ne^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)\ \Phi_n. \tag{2.11}$$

De (2.10) et (2.11), on conclut que

$$u'^\alpha(t)+Au^\alpha(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t),$$

et

$$u^\alpha(T)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\ g_n.$$

Ainsi u^α est une solution classique du problème (2.3).

Démontrons maintenant l'unicité de la solution

Soient u_1^α, u_2^α deux solutions du problème (2.3) donc

$u^\alpha=u_1^\alpha-u_2^\alpha$ solution du problème homogène (2.3) de la valeur finale nulle, donc u^α est une solution du problème

$$\begin{cases} u^{\alpha\prime}(t) + Au^\alpha(t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ u^\alpha(T) = 0 \ , \end{cases}$$

mais la solution de ce problème est la solution triviale, ainsi $u_1^\alpha = u_2^\alpha$

Donc le problème (2.3) admet une solution classique u^α unique.

Et de plus on a :

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_t^T \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right)^2 .$$

Et d'après l'inégalité élémentaire $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$, on obtient

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} g_n^2 + \left(\int_t^T \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right)^2 ,$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette inégalité on obtient

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} g_n^2 + (T-t) \int_t^T \frac{e^{2(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s) ds.$$

En utilisant les majorations : $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2} \leq \alpha^{-2}\lambda_n^{-2}, e^{-2t\lambda_n} \leq 1;$

$\forall t \in [0,T]\,, e^{2(s-t-T)\lambda_n} \leq 1; (s \in [t,T])\,, \forall t \in [0,T]\,,$ on obtient

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2\lambda_n^2} \left(g_n^2 + T \int_t^T f_n^2(s) ds \right) .$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, donc $\exists c \geq 0$, $\forall n \geq 1 : \quad \lambda_n^{-2} \leq c$, alors

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 \leq \frac{2c}{\alpha^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2 + T \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T f_n^2(s) ds \right),$$

par conséquence

$$\|u^\alpha(t)\|_H^2 \leq \frac{2c}{\alpha^2} \left(\|g\|_H^2 + T\, \|f\|_{L^2([0,T],H)}^2 \right) .$$

Ainsi l'inégalité (2.8) est démontrée.

Lemme 2 :

$$\frac{1}{\alpha\lambda + e^{-T\lambda}} \leq \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}, \forall\lambda > 0 \tag{2.12}$$

Démonstration :

On pose

$$h(\lambda) = \frac{1}{\alpha\lambda + e^{-T\lambda}}, \forall\lambda > 0 \tag{2.13}$$

on a :

$$h'(\lambda) = \frac{-\alpha + Te^{-T\lambda}}{\left(\alpha\lambda + e^{-T\lambda}\right)^2}$$

Ainsi $h'(\lambda) = 0$ pour $\lambda = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$, puisque $h'(\lambda) \leq 0$ pour $\lambda \leq \frac{1}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$ et $h'(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \geq \frac{1}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$, alors $\frac{1}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)$ est la valeur pour laquelle h atteint son maximum, d'où l'inégalité :

$$h(\lambda) \leq h(\frac{1}{T}\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)) = \frac{T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \tag{2.14}$$

pour $\alpha < T$. ■

Théorème 3 : soient $f \in L^2([0,T], H)$, $g \in H$, la solution $u^\alpha(t)$ du problème (2.3) est dépend continûment des données du problème dans $C([0,T], H)$.

Et on a

$$\|u^\alpha(t) - v^\alpha(t)\|_{C([0,T],H)} \leq \frac{\sqrt{2}T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\left(\|g_1 - g_2\|_H^2 + T\|f_1 - f_2\|_{L^2([0,T],H)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.15}$$

où $u^\alpha(t)$, $v^\alpha(t)$ sont deux solutions du problème (2.3) correspondantes aux seconds membres $f_1(t)$, $f_2(t)$, et aux données finales g_1, g_2.

Démonstration :

Soient $u^\alpha(t)$, $v^\alpha(t)$ deux solutions du QBVP (2.3) correspondantes aux seconds membres $f_1(t)$, $f_2(t)$, et aux données finales g_1 et g_2 , donc on a

$$u^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_{1n}-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_{1n}(s)ds\right)\ \Phi_n\ ,$$
$$v^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}g_{2n}-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_{2n}(s)ds\right)\ \Phi_n\ ,$$

tel que $g_{in}=(g_i,\Phi_n)\,;i=1,2,\forall n\geq 1$, et $f_{in}(t)=(f_i(t),\Phi_n)\,;i=1,2,\ \forall n\geq 1,\forall t\in[0,T]$ ainsi

$$u^{\alpha}(t)-v^{\alpha}(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(g_{1n}-g_{2n}\right)\ -\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(f_{1n}(s)-f_{2n}(s)\right)ds\right]\Phi_n\ ,$$

alors

$$\left\|u^{\alpha}(t)-v^{\alpha}(t)\right\|_H^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(g_{1n}-g_{2n}\right)\ -\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(f_{1n}(s)-f_{2n}(s)\right)ds\right]^2.$$

Et d'après l'inégalité élémentaire $(a+b)^2\ \leq\ 2\left(a^2+b^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(t)-v^{\alpha}(t)\right\|_H^2\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\tfrac{e^{-2t\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(g_{1n}-g_{2n}\right)^2+\right.$$
$$\left.(T-t)\int_t^T\tfrac{e^{2(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_{1n}(s)-f_{2n}(s)\right)^2ds\right].$$

En utilisant les majorations : $e^{-2t\lambda_n}\leq 1;\ \forall t\in[0,T]\,,\ e^{2(s-t-T)\lambda_n}\leq 1;\ (s\in[t,T])\,,$ on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(t)-v^{\alpha}(t)\right\|_H^2\leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(\left(g_{1n}-g_{2n}\right)^2+\ \ T\int_0^T\left(f_{1n}(s)-f_{2n}(s)\right)^2ds\right).$$

En utilisant l'inégalité (2.12) du lemme 2, on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(t)-v^{\alpha}(t)\right\|_H^2\leq\tfrac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(g_{1n}-g_{2n}\right)^2+\ \ T\int_0^T\left(f_{1n}(s)-f_{2n}(s)\right)^2ds\right)$$
$$\leq\tfrac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\ \left(\left\|g_1-g_2\right\|_H^2+T\left\|f_1-f_2\right\|_{L^2([0,T],H)}^2\right).$$

Donc

$$\|u^\alpha(t)-v^\alpha(t)\|^2_{C([0,T],H)} \leq \frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \left(\|g_1-g_2\|^2_H + T\,\|f_1-f_2\|^2_{L^2([0,T],H)}\right).$$

Ainsi on a l'estimation (2.15). ■

2.6 Convergence de la solution du QBVP (2.3)

Théorème 4 : Pour chaque $g \in H$, l'approximation $u^\alpha(T)$ converge vers g dans H quand α tend vers zéro.

Démonstration : Soit $g \in H$, donc $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n\ \Phi_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2$ converge, alors on choisit N pour lequel

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi

$$u^\alpha(T) - g = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} g_n - g_n\right)\Phi_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} g_n\Phi_n \quad ,$$

donc

$$\|u^\alpha(T)-g\|^2_H = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} g_n^2. \tag{2.16}$$

Alors

$$\|u^\alpha(T)-g\|^2_H = \sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} g_n^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} g_n^2.$$

En majorant $\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$\|u^\alpha(T)-g\|^2_H \leq \sum_{n=1}^{N}\alpha^2\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} g_n^2 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n^2$$

$$\leq \alpha^2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} g_n^2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

maintenant en choisissant α tel que $\alpha \leq \sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{n=1}^{N} 2\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} g_n^2\right)^{-\frac{1}{2}}$,

D'où on obtient

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \varepsilon,$$

ainsi $u^\alpha(T)$ converge vers g dans H . ■

Remarque 5 : si $g \in D(A)$, alors on a l'estimation

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H \leq \frac{T}{\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \|Ag\|_H . \tag{2.17}$$

Démonstration : De (2.16), on a

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 = \alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} h^2(\lambda_n)\lambda_n^2 g_n^2 ,$$

où la fonction $h(\lambda)$ est donnée par (2.13).

En utilisant (2.14) et comme $h(\lambda) > 0; \forall\lambda > 0$ on obtient

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \frac{\alpha^2 T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 g_n^2.$$

Ainsi on a l'estimation (2.17). ■

Théorème 6 : Soient $f \in L^2([0,T], H), g \in H$, le problème (2.1) admet une solution classique *si, et seulement si* la suite $(u^\alpha(0))_{\alpha \geq 0}$ converge dans H. De plus, on trouve que u^αconverge vers u lorsque α tend vers, 0 uniformément en t.

Démonstration : Montrons que si la suite $(u^\alpha(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H, alors le problème (2.1) admet une solution classique u^α, et on montre de plus que u^αconverge vers u lorsque α tend vers 0, uniformément en t.

Supposons que $\lim\limits_{\alpha\to 0} u^\alpha(0) = v$ existe, et puisque $v \in H$ on a :

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \Phi_n \text{ , tel que } v_n = (v, \Phi_n)\,; \forall n \geq 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in L^2([0,T], H)$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^T f_n^2(s)ds$ converge, alors on choisit N pour lequel $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_0^T f_n^2(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{4T}$.

Il est facile de voir que u définie par

$$u(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t\lambda_n}v_n+\int_0^t e^{(s-t)\lambda_n}f_n(s)ds\right)\Phi_n \quad , \tag{2.18}$$

est une solution classique du problème

$$\begin{cases} \quad u'(t)+Au(t)=f(t), \qquad 0\le t\le T, \\ u(0)=v \quad . \end{cases} \tag{2.19}$$

Et $u^\alpha(t)$ qui donnée par :

$$u^\alpha(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t\lambda_n}u_{0n}^\alpha+\int_0^t \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)}f_n(s)ds\right)\Phi_n \ ,$$

où $\quad u_{0n}^\alpha=\left(\ u^\alpha\left(0\right),\Phi_n\right);\forall n\ge 1.$

est solution du problème

$$\begin{cases} \quad u^{\alpha\prime}(t)+Au^\alpha(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)\Phi_n \qquad 0\le t\le T\ , \\ u^\alpha(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^\alpha(0)\Phi_n\ . \end{cases}$$

Donc

$$u^\alpha(t)-u(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t\lambda_n}\left(u_{0n}^\alpha-v_n\right)+\int_0^t\left(\frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}-1\right)e^{(s-t)\lambda_n}f_n(s)ds\right)\Phi_n,$$

ainsi

$$\left\|u^\alpha(t)-u(t)\right\|_H^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t\lambda_n}\left(u_{0n}^\alpha-v_n\right)-\int_0^t\frac{\alpha\lambda_n e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2.$$

En utilisant que $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\left\|u^\alpha(t)-u(t)\right\|_H^2\le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-2t\lambda_n}\left(u_{0n}^\alpha-v_n\right)^2+T\int_0^t\frac{\alpha^2\lambda_n^2e^{2(s-t)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(s)ds\right)\ ,$$

comme on a $e^{-2t\lambda_n} \leq 1, e^{2(s-t)\lambda_n} \leq 1, \forall t \in [0,T]$, donc

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_{0n}^\alpha - v_n\right)^2 + 2T \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T \frac{\alpha^2 \lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s) ds \quad . \tag{2.20}$$

Et d'autre part on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds = \sum_{n=1}^{N} \int_0^T \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_0^T \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds.$$

En majorant $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds &\leq \sum_{n=1}^{N} \int_0^T \alpha^2\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} f_n^2(s)ds + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_0^T f_n^2(s)ds \\ &\leq \alpha^2 \sum_{n=1}^{N} \int_0^T \lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} f_n^2(s)ds + \tfrac{\varepsilon}{4T} \ , \end{aligned}$$

maintenant en choisissant α tel que $\alpha \leq \sqrt{\varepsilon} \left(\sum_{n=1}^{N} \int_0^T 4T\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} f_n^2(s)ds \right)^{-\frac{1}{2}}$,

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds \leq \tfrac{\varepsilon}{2T}.$$

Et de (2.20), on obtient

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 \leq 2\|u^\alpha(0) - v\|_H^2 + \varepsilon.$$

Donc

$$\|u^\alpha(T) - u(T)\|_H^2 \leq 2\|u^\alpha(0) - v\|_H^2 + \varepsilon,$$

et

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 \leq 2\|u^\alpha(0) - v\|_H^2 + \varepsilon. \tag{2.21}$$

Comme $\lim\limits_{\alpha\to 0} u^{\alpha}(0) = v$ alors $\lim\limits_{\alpha\to 0} u^{\alpha}(T) = u(T)$, et comme du théorème 4 on a $\lim\limits_{\alpha\to 0} u^{\alpha}(T) = g$, alors $u(T) = g$. Ainsi la fonction u vérifie la condition finale. Comme la fonction u est une solution classique du problème (2.19), alors elle vérifie l'équation aux sens classique ainsi la fonction u est une solution classique du problème (2.1), et l'inégalité (2.21) résulte que u^{α}converge vers u lorsque α tend vers 0, uniformément en t.

Réciproquement

Montrons que si le problème (2.1) admet une solution classique u, alors la suite $(u^{\alpha}(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H.

Soit $\alpha \geq 0$ et supposons que u est une solution classique du problème (2.1), donc elle est donnée par :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \Phi_n,$$

et on a

$$u(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right) \Phi_n.$$

Puisque $u(t) \in D(A)\ \forall t \in [0,T]$, alors $u(0) \in D(A)$, ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int\limits_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2$, de plus on a

$$\|Au(0)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2.$$

De (2.7) on a

$$u^{\alpha}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{g_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} - \int_0^T \tfrac{e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right) \Phi_n,$$

d'où

$$u^{\alpha}(0) - u(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{-\alpha\lambda_n e^{T\lambda_n} g_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} + \int_0^T \tfrac{\alpha\lambda_n e^{s\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right) \Phi_n.$$

Alors

$$\|u^\alpha(0)-u(0)\|_H^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-\alpha\lambda_n e^{T\lambda_n}g_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}+\int_0^T\frac{\alpha\lambda_n e^{s\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)^2$$

$$\leq \alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(e^{T\lambda_n}g_n-\int_0^T e^{s\lambda_n}f_n(s)ds\right)^2 .$$

Et en utilisant le lemme 2, on obtient

$$\|u^\alpha(0)-u(0)\|_H^2\leq\frac{T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2\left(e^{T\lambda_n}g_n-\int_0^T e^{s\lambda_n}f_n(s)ds\right)^2 .$$

Donc

$$\|u^\alpha(0)-u(0)\|_H\leq\frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\|Au(0)\|_H .$$

D'où

$$\lim_{\alpha\to 0}u^\alpha(0)=u(0) .$$

c'est-à-dire la suite $(u^\alpha(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H. ■

Remarque 7 : Si $f(t)\in D(A);\forall t\in[0,T]$. Alors on a l'estimation :

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H^2\leq 2\|u^\alpha(0)-v\|_H^2+\frac{2T^3}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\|Af\|_{L^2([0,T],H)}^2 .$$

Démonstration :

De (2.20) et en utilisant (2.12) du lemme 2 on obtient

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H^2\leq 2\|u^\alpha(0)-v\|_H^2+\frac{2T^3}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T\lambda_n^2 f_n^2(s)ds$$

$$\leq 2\|u^\alpha(0)-v\|_H^2+\frac{2T^3}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\|Af\|_{L^2([0,T],H)}^2 . \blacksquare$$

Théorème 8 : Soients $f\in L^2([0,T],H)$, $g\in H$, le problème (2.1) admet une solution classique *si, et seulement si* la suite $(u^{\alpha\prime}(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H. De plus, u^αconverge vers u lorsque α tend vers 0 dans $C^1([0,T],H)$.

Démonstration :

Montrons que si la suite $(u^{\alpha\prime}(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H, alors le problème (2.1) admet une solution classique, et de plus on montre la convergence de u^α vers u lorsque α tend vers 0 dans $C^1([0,T],H)$.

Supposons que $\lim\limits_{\alpha\to 0} u^{\alpha\prime}(0) = v$ existe, et puisque $v \in H$ on a :

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \Phi_n \text{ , où } v_n = (v, \Phi_n)\,; \forall n \geq 1.$$

Notons par

$$w_n = \frac{f_n(0) - v_n}{\lambda_n}; \forall n \geq 1, \text{ et } w = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n \Phi_n. \tag{2.22}$$

Il est facile de voir que la fonction u définie par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \Phi_n,$$

$$\text{où} \quad u_n(t) = e^{-t\lambda_n} w_n + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds, \ \forall n \geq 1,$$

est une solution classique du problème

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \ , \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = w \ . \end{cases}$$

Comme (2.7) on a

$$u^\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^\alpha(t) \ \Phi_n.$$

où

$$u_n^\alpha(t) = \tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_t^T \tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds, \ \forall n \geq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} u^{\alpha\prime}(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n + \int_t^T \tfrac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds + \tfrac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right) \ \Phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\lambda_n \left(\tfrac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_t^T \tfrac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right) + \tfrac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right] \ \Phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n u_n^\alpha(t) + \tfrac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right) \ \Phi_n. \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n e^{-t\lambda_n} w_n - \int_0^t \lambda_n e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds + f_n(t) \right) \Phi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\lambda_n \left(e^{-t\lambda_n} w_n + \int_0^t \lambda_n e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) + f_n(t) \right] \Phi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n u_n(t) + f_n(t) \right) \Phi_n \ .$$

Donc on a

$$\begin{cases} u_n^{\alpha\prime}(t) = -\lambda_n u_n^{\alpha}(t) + \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t), \\ u_n'(t) = -\lambda_n u_n(t) + f_n(t) \ . \end{cases} \tag{2.23}$$

D'où :

$$u_n^{\alpha}(t) - u_n(t) = -\lambda_n^{-1} \left(u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) \right) - \frac{\alpha}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t).$$

Donc

$$\|u^{\alpha}(t) - u(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n^{\alpha}(t) - u_n(t) \right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n^{-1} \left(u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) \right) - \frac{\alpha}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right)^2$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda_n^{-2} \left(u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) \right)^2 + \frac{\alpha^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n} \right)^2} f_n^2(t) \right).$$

Et vu le faite que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$, donc $\exists c \geq 0$, $\forall n \geq 1 : \lambda_n^{-2} \leq c$, ainsi on obtient

$$\|u^{\alpha}(t) - u(t)\|_H^2 \leq 2c \left\| u^{\alpha\prime}(t) - u'(t) \right\|_H^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n} \right)^2} f_n^2(t)$$

$$\leq 2c \left\| u^{\alpha\prime}(t) - u'(t) \right\|_H^2 + \frac{2T^2}{\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha} \right) \right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^2(t).$$

Alors

$$\|u^{\alpha}(t) - u(t)\|_H^2 \leq 2c \left\| u^{\alpha\prime}(t) - u'(t) \right\|_H^2 + \frac{2T^2}{\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha} \right) \right)^2} \|f(t)\|_H^2 \, .$$

Ainsi

$$\|u^{\alpha}(0)-u(0)\|_H^2 \leq \; 2c\,\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\|_H^2 + \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\,\|f(0)\|_H^2\,, \tag{2.24}$$

et

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\|u^{\alpha}(t)-u(t)\|_H^2 \leq 2c\sup_{0\leq t\leq T}\|u^{\alpha\prime}(t)-u'(t)\|_H^2 \\ +\frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sup_{0\leq t\leq T}\|f(t)\|_H^2\,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

De (2.23) on a

$$u'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\; u_n'(t)\;\Phi_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\;(-\lambda_n u_n(t)+f_n(t))\quad \Phi_n,$$

donc

$$u'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\;(-\lambda_n u_n(0)+f_n(0))\quad \Phi_n.$$

Et comme $u(0)=w$, donc $u_n(0)=w_n;\forall n\geq 1$,

d'où

$$u'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\;(-\lambda_n w_n+f_n(0))\quad \Phi_n.$$

Et comme (2.22) on a $(-\lambda_n w_n+f_n(0))=v_n;\forall n\geq 1.$

Alors

$$u'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\;v_n\quad \Phi_n=v.$$

Et comme $\lim\limits_{\alpha\to 0}u^{\alpha\prime}(0)=v$, alors $\lim\limits_{\alpha\to 0}u^{\alpha\prime}(0)=u'(0)$, et de (2.24) on obtient

$\lim\limits_{\alpha\to 0}u^{\alpha}(0)=u(0)$. Ainsi d'après le théorème 6 u est une solution classique du problème (2.1).

Montrons maintenant la convergence de u^α vers u dans $C^1([0,T],H)$ lorsque α tend vers 0.
De (2.23) on a :

$$\begin{cases} u_n^{\alpha\prime}(0) = -\lambda_n u_n^\alpha(0) + \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(0), \\ u_n'(0) = -\lambda_n u_n(0) + f_n(0) \ , \end{cases}$$

donc $$u_n^{\alpha\prime}(0) - u_n'(0) = -\lambda_n\left(u_n^\alpha(0) - u_n(0)\right) - \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(0).$$

Et comme $u_n(0) = w_n$, et

$$u_n^\alpha(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{g_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} - \int_0^T \frac{e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds\right)\Phi_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha\prime}(0) - u_n'(0) = &-\lambda_n\left(\frac{g_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} - w_n - \int_0^T \frac{e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds\right) \\ &-\frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(0). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Et d'autre part comme :

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) &= -\lambda_n\left(u_n^\alpha(t) - u_n(t)\right) - \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \\ &= -\frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(t) - \lambda_n\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} g_n - e^{-t\lambda_n} w_n\right) \\ &\quad +\lambda_n\left(\int_t^T \frac{e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds + \int_0^t e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds\right) \\ &= -\frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(t) - \lambda_n\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} g_n - e^{-t\lambda_n} w_n\right) \\ &+\int_t^T \frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds + \int_0^t \frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds + \int_0^t \frac{\alpha\lambda_n^2 e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds\ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) = &-\frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(t) - \lambda_n\left(\frac{e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} g_n - e^{-t\lambda_n} w_n\right) \\ &+\int_0^T \frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds + \int_0^t \frac{\alpha\lambda_n^2 e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}} f_n(s)ds, \end{aligned}$$

alors

$$u_n^{\alpha\prime}(t)-u_n'(t)=-\lambda_n e^{-t\lambda_n}\left(\tfrac{g_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}-w_n-\int_0^T \tfrac{e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right)$$

$$-\tfrac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(0)+\int_0^t \tfrac{\alpha\lambda_n^2 e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\ -\tfrac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(t)+\tfrac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(0).$$

D'ici en utilisant (2.26) on obtient

$$u_n^{\alpha\prime}(t)-u_n'(t)=e^{-t\lambda_n}\left(u_n^{\alpha\prime}(0)-u_n'(0)\right)+\int_0^t \tfrac{\alpha\lambda_n^2 e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds$$

$$+\tfrac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(f_n(0)-f_n(t)\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\left\|u^{\alpha\prime}(t)-u'(t)\right\|_H^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(u_n^{\alpha\prime}(t)-u_n'(t)\right)^2\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t\lambda_n}\left(u_n^{\alpha\prime}(0)-u_n'(0)\right)+\int_0^t \tfrac{\alpha\lambda_n^2 e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}f_n(s)ds\right.\\ &\qquad \left.+\tfrac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)\right)^2\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $(a+b+c)^2 \leq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient :

$$\begin{aligned}\left\|u^{\alpha\prime}(t)-u'(t)\right\|_H^2 \leq\, & 4\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2t\lambda_n}\left(u_n^{\alpha\prime}(0)-u_n'(0)\right)^2\\ &+4T\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^t \frac{\alpha^2\lambda_n^4 e^{2(s-t)\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}f_n^2(s)ds\\ &+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Et comme $f_n(t)\in H;\ \forall t\in(0,T)$, donc : $\forall\varepsilon>0$, on peut choisir N pour lequel

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{8}, \tag{2.28}$$

donc on obtient :

$$4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 = 4\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2$$

$$+4\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 .$$

En majorant $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 \leq 4\alpha^2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 e^{2T\lambda_n}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2$$

$$+4\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 . \tag{2.29}$$

Maintenant en choisissant α tel que

$$\alpha \leq \sqrt{\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{N} 8\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} . \tag{2.30}$$

De (2.29) et en utilisant (2.28) et (2.30) on obtient

$$4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(f_n(0)-f_n(t)\right)^2 \leq \varepsilon. \tag{2.31}$$

D'autre part comme : $\lambda_n^4 e^{2(s-t)\lambda_n} \leq C_1$ $(s\in(0,t))$ et $e^{-2t\lambda_n} \leq 1$; $\forall t\in[0,T]$, alors de (2.27) et (2.31) on obtient

$$\left\|u^{\alpha\prime}(t)-u'(t)\right\|_H^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(u_n^{\alpha\prime}(0)-u_n'(0)\right)^2$$

$$+4T\alpha^2C_1\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^t \frac{1}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(s)ds+\varepsilon.$$

D'ici en utilisant le lemme 2 on obtient

$$\left\|u^{\alpha\prime}(t)-u'(t)\right\|_H^2 \leq 4\left\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\right\|^2 + \frac{4T^3C_1}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^t f_n^2(s)ds+\varepsilon$$

$$\leq 4\left\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\right\|^2 + \frac{4T^3C_1}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\left\|f(t)\right\|_H^2+\varepsilon,$$

et comme $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} u^{\alpha\prime}(0) = u'(0)$, alors

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \sup_{t\in[0,T]} \|u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H = 0. \tag{2.32}$$

D'ici en utilisant l'inégalité (2.25) on obtient

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \sup_{0\leq t\leq T} \|u^{\alpha}(t) - u(t)\|_H = 0. \tag{2.33}$$

De (2.32)-(2.33) on obtient

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \|u^{\alpha}(t) - u(t)\|_{C^1([0,T],H)} = 0.$$

Ainsi $u^{\alpha}(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T], H)$ lorsque α tend vers 0.

Donc le problème (2.1) admet une solution classique $u(t)$ et l'approximation $u^{\alpha}(t)$ converge vers $u(t)$ dans $C^1([0,T], H)$ quand α tend vers 0.

Réciproquement

Montrons maintenant si le problème (2.1) admet une solution classique, alors la suite $(u^{\alpha\prime}(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H **.**

Soit $\alpha \geq 0$, supposons que u est une solution classique du problème (2.1), elle est alors donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \Phi_n,$$

et on a

$$u(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right) \Phi_n.$$

Puisque $u(t) \in D(A)$ $\forall t \in [0,T]$, donc $u(0) \in D(A)$, ce qui assure la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2, \text{ de plus on a}$$

$$\|Au(0)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N pour lequel

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On a

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n + \int_t^T \lambda_n e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds + f_n(t) \right) \Phi_n.$$

et

$$u'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\lambda_n e^{T\lambda_n} g_n + \int_0^T \lambda_n e^{s\lambda_n} f_n(s) ds + f_n(0) \right) \Phi_n.$$

De (2.7) on a

$$u^{\alpha\prime}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\lambda_n e^{-t\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n + \int_t^T \frac{\lambda_n e^{(s-t-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds + \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right) \Phi_n .$$

et

$$u^{\alpha\prime}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\lambda_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n + \int_0^T \frac{\lambda_n e^{(s-T)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds + \frac{e^{-T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(0) \right) \Phi_n .$$

Alors

$$u^{\alpha\prime}(0) - u'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha\lambda_n^2 e^{T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_0^T \frac{\alpha\lambda_n^2 e^{s\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds - \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(0) \right) \Phi_n.$$

D'où

$$\|u^{\alpha\prime}(0) - u'(0)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha\lambda_n^2 e^{T\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} g_n - \int_0^T \frac{\alpha\lambda_n^2 e^{s\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds - \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(0) \right)^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha\prime}(0) - u'(0)\|_H^2 \leq & \, 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_n^2}{(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n})^2} f_n^2(0) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_n^4}{(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n})^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2 . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Et d'autre part comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2 .$$

En majorant $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2 \leq$$

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha^2\lambda_n^4 e^{2T\lambda_n} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2$$

$$\leq \alpha^2 \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^4 e^{2T\lambda_n} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2 + \frac{\varepsilon}{4},$$

maintenant en choisissant α tel que

$$\alpha \leq \sqrt{\varepsilon} \left[\sum_{n=1}^{N} 4\lambda_n^4 e^{2T\lambda_n} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} .$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{T\lambda_n} g_n - \int_0^T e^{s\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n+e^{-T\lambda_n}\right)^2} f_n^2(0) \leq \frac{T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2(0) \leq \frac{T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \left\|Af(0)\right\|_H^2 ,$$

Alors

$$\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\|_H^2 \le \varepsilon + \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\|Af(0)\|_H^2 .$$

Ainsi la suite $(u^{\alpha\prime}(0))_{\alpha\geq 0}$ converge dans H. D'où le théorème est démontré. ■

Remarque 9 : Si $u(t)\in D(A^2), \forall t\in[0,T]$ on a :

$$\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\|_H \le \frac{\sqrt{2}T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\left\{\left\|A^2u(0)\right\|_H^2+\|Af(0)\|_H^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : Supposons que $u(t)\in D(A^2)$, $\forall t\in[0,T]$, alors $u(0)\in D(A^2)$ c-à-d $\|Au(0)\|_H^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^4\left(e^{T\lambda_n}g_n-\int\limits_0^T e^{s\lambda_n}f_n(s)ds\right)^2<+\infty$

De (2.34) et (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\|_H^2 \le &\frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^2\lambda_n^4\left(e^{T\lambda_n}g_n-\int_0^T e^{s\lambda_n}f_n(s)ds\right)\\ &+\frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^2\lambda_n^2f_n^2(0)^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\|u^{\alpha\prime}(0)-u'(0)\|_H^2 \le \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\left\{\left\|A^2u(0)\right\|_H^2+\|Af(0)\|_H^2\right\}$$

Fin de la démonstration. ■

Théorème 10 : Soient $f\in L^2([0,T],H)$, $g\in H$, s'il existe $m\in(0,2)$ tel que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^m e^{mT\lambda_n}g_n^2$ converge, alors

$$\|u^\alpha(T)-g\|_H \le \frac{\sqrt{C_1\alpha^m}}{m}, \tag{2.35}$$

où $C_1=4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^m e^{mT\lambda_n}g_n^2$.

Démonstration : Soit $m\in(0,2)$ tel que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^m e^{mT\lambda_n}g_n^2$ converge, et soit $k\in(0,2)$.

Fixons le naturel n, et définissons

$$g_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2}.$$

On a

$$g'_n(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha\lambda_n + ke^{-T\lambda_n}}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^3}.$$

Anisi $g'_n(\alpha) = 0$ pour $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = \frac{ke^{-T\lambda_n}}{(2-k)\lambda_n}$, puisque $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} g_n(\alpha) = 0$ et $g_n(\alpha) > 0$, alors α_1 est la valeur pour laquelle g_n atteint son maximum, d'où l'inégalité :

$$g_n(\alpha) \leq \frac{\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-kT\lambda_n}}{\lambda_n^k \left(\alpha_1\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.36}$$

D'autre part de (2.16), on a

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 = \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 g_n(\alpha)\, g_n^2 \; .$$

Alors d'ici en utilisant (2.36), on obtient

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2-k} \left(\alpha_1\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2} e^{-kT\lambda_n} g_n^2.$$

En majorant $\left(\alpha_1\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$, on a

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \left(\tfrac{k}{2-k}\right)^k \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2-k} e^{(2-k)T\lambda_n} g_n^2.$$

Si on choisit $k = 2 - m$, on obtient

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \left(\tfrac{2-m}{m}\right)^{2-m} \alpha^m \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^m e^{mT\lambda_n} g_n^2.$$

Et comme $\left(\frac{2-m}{m}\right)^{2-m} \leq \left(\frac{2-m}{m}\right)^2 \leq \frac{4}{m^2}$ $\quad \left\{\text{car } \frac{2-m}{m} > 0\right\}$.

Alors

$$\|u^\alpha(T) - g\|_H^2 \leq \tfrac{4}{m^2} \alpha^m \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^m e^{mT\lambda_n} g_n^2.$$

Ainsi (2.35) est démontrée. ■

Théorème 11 : Soient $f \in L^2([0,T],H), g \in H$. Supposons que le problème (2.1) admet une solution unique $u \in C^1([0,T],H)$, alors $u^\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t.

Démonstration :

Supposons que le problème (2.1) admet une solution unique $u \in C^1([0,T],H)$, donc elle est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right) \Phi_n. \tag{2.37}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N pour lequel

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme (2.7) et (2.37), on a

$$u^\alpha(t) - u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\alpha\lambda_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} + \int_t^T \frac{\alpha\lambda_n e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right) \Phi_n,$$

alors

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\alpha\lambda_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} + \int_t^T \frac{\alpha\lambda_n e^{(s-t)\lambda_n}}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(s) ds \right)^2,$$

donc

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2, \tag{2.38}$$

ainsi

$$\|u^\alpha(t) - u(t)\|_H^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2$$
$$+ \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds \right)^2.$$

En majorant $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$\left\|u^\alpha(t) - u(t)\right\|_H^2 \leq \alpha^2 \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds\right)^2 + \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Maintenant en choisissant α tel que

$$\alpha \leq \sqrt{\varepsilon} \left[\sum_{n=1}^{N} 2\lambda_n^2 e^{2T\lambda_n} \sup_{t\in[0,T]} \left\{\left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds\right)^2\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|u^\alpha(t) - u(t)\right\|_H \leq \varepsilon, \tag{2.39}$$

ainsi $u^\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t. ■

Remarque 12 : Si le problème (2.1) admet une solution classique u. Alors on a l'estimation :

$$\left\|u^\alpha(t) - u(t)\right\|_H \leq \frac{C}{1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}, \tag{2.40}$$

où $C = T \sup_{t\in[0,T]} \left\|Au(t)\right\|_H$

Démonstration : Supposons que le problème (2.1) admet une solution classique u. Donc $u(t) \in D(A); \forall t \in [0,T]$, de (2.38) et (2.12) on a

$$\left\|u^\alpha(t) - u(t)\right\|_H^2 \leq \tfrac{T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s) ds\right)^2,$$

alors

$$\left\|u^\alpha(t) - u(t)\right\|_H^2 \leq \frac{T^2}{\left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \left\|Au(t)\right\|_H^2 .$$

Ainsi on obtient (2.40) pour $C = T \sup_{t\in[0,T]} \left\|Au(t)\right\|_H$. ■

Théorème 13 : Soients $f \in L^2([0,T], H), g \in H$, supposons que le problème (2.1) admet une solution classique u, alors $u^{\alpha\prime}(t)$ converge vers $u'(t)$ uniformément en t.

Démonstration : Supposons que le problème (2.1) admet une solution classique u, donc $u \in C^1([0,T], H)$ et $u(t) \in D(A); \forall t \in [0,T]$.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N pour lequel

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^2 \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De (2.23), on a

$$u_n^{\alpha\prime}(t) - u_n'(t) = -\lambda_n \left(u_n^\alpha(t) - u_n(t)\right) + \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t),$$

donc

$$u^{\alpha\prime}(t) - u'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\alpha\lambda_n^2}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right) + \frac{\alpha\lambda_n}{\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}} f_n(t) \right] \Phi_n,$$

alors

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Bigg[& \frac{\alpha^2\lambda_n^2}{(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n})^2} f_n^2(t) \\ & + \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n})^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Et d'autre part comme

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 = \\ & \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 \\ & \qquad + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2, \end{aligned}$$

Alors en majorant $\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^{-2}$ par $e^{2T\lambda_n}$ dans la première série et par $\alpha^{-2}\lambda_n^{-2}$ dans la deuxième on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 \leq \\ & \qquad \alpha^2 \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^4 e^{2T\lambda_n} \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds \right)^2 + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Maintenant en choisissant α tel que

$$\alpha \;\leq\; \sqrt{\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{N} 4\lambda_n^4 e^{2T\lambda_n} \sup_{t\in[0,T]}\left\{\left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2\lambda_n^4}{\left(\alpha\lambda_n + e^{-T\lambda_n}\right)^2}\left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \| u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H^2 \leq \varepsilon + \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sup_{t\in[0,T]} \|Af(t)\|^2 .$$

Ainsi $u^{\alpha\prime}(t)$ converge vers $u'(t)$ uniformément en t. ■

Remarque 14 :

Si la solution du problème (2.1) vérifie de plus $u(t) \in D(A^2); \forall t \in [0,T]$. Alors on a l'estimation

$$\|u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H \leq \frac{D}{1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)} \;, \tag{2.42}$$

où $D = \sqrt{2}T \sup_{t\in[0,T]} \left\{\|A^2u(t)\|_H^2 + \|Af(t)\|_H^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration :

Supposons que $u(t) \in D(A^2); \forall t \in [0,T]$, de (2.41) et (2.12) on a

$$\|u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H^2 \leq \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^4 \left(e^{(T-t)\lambda_n} g_n + \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} f_n(s)ds\right)^2$$
$$+\frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 f_n^2(t).$$

D'où

$$\|u^{\alpha\prime}(t) - u'(t)\|_H^2 \leq \frac{2T^2}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \left\{\|A^2u(t)\|_H^2 + \|Af(t)\|_H^2\right\}.$$

Ainsi on a (2.42) pour $D = \sqrt{2}T \sup_{t\in[0,T]} \left\{\|A^2u(t)\|_H^2 + \|Af(t)\|_H^2\right\}^{\frac{1}{2}}$. ■

Théorème 15 : Soient $f \in L^2([0,T],H)$, $g \in H$, supposons que le problème (2.1) admet une solution unique u correspondante aux second membre de l'équation f, et la donnée finale g, tel que $u \in C^1([0,T],H)$, et soient $f^\alpha \in L^2([0,T],H)$, et $g^\alpha \in H$ tel que $\|f-f^\alpha\|_{L^2([0,T],H)} \leq \frac{\alpha}{2T\sqrt{2}}$, $\|g-g^\alpha\|_H \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}$.

Alors, il existe une fonction u^α de telle sorte que $u^\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t.

Démonstration : Soient v^α, u^α deux solutions du problème (2.3) correspondants aux seconds membres de l'équation f, f^α et aux données finales g, g^α.

On a

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H \leq \|u^\alpha(t)-v^\alpha(t)\|_H + \|v^\alpha(t)-u(t)\|_H . \tag{2.43}$$

De (2.15) on a

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\alpha(t)-u(t)\|_H \leq \frac{\sqrt{2}T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \left(\|g^\alpha-g\|_H^2 + T\|f^\alpha-f\|_{L^2([0,T],H)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} \|v^\alpha(t)-u(t)\|_H ,$$

et de (2.39) on obtient

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H \leq \frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} + \varepsilon.$$

Ainsi $u^\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t. ■

Remarque 16 : Dans le théorème 15, si la solution du problème (2.1) admet une solution classique $u(t)$, Alors il existe une fonction u^α tel que

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H \leq \frac{C+T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)},$$

tel que $C = T \sup_{t\in[0,T]} \|Au(t)\|_H$.

Démonstration : Supposons que le problème (2.1) admet une solution classique u , c'est-à-dire $u(t) \in D(A); \forall t \in [0,T]$. De (2.15) et (2.40) et (2.43) on obtient

$$\|u^\alpha(t)-u(t)\|_H \leq \frac{\sqrt{2}T}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \left(\|g^\alpha-g\|_H^2 + T\|f^\alpha-f\|_{L^2([0,T],H)}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}$$

$$\leq \frac{C+T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)},$$

tel que $C = T \sup_{t\in[0,T]} \|Au(t)\|_H$, la remarque est démontrée.

3 Chapitre 3 : Application

Dans le présent chapitre on va appliquer les résultats obtenus précédemment à l'étude d'un problème inverse pour l'équation de la chaleur.

Pour tout nombre positif T, on considère le problème suivant : trouver $u(x,t)$ où $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,T)$, vérifiant

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t \in [0,T]\,, \\ u(x,T) = g(x),\ \ x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f(x,t)$, $g(x)$ sont deux fonctions données. Ce problème est bien connu comme problème inverse de la chaleur.

Ramenons le problème (3.1) à un problème final pour équation différentielle opérationnelle qui a été étudié précédemment, sous la forme

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \quad ; \quad 0 \le t < T, \\ u(T) = g\ , \end{cases}$$

où A est l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ admettant comme valeurs propres $\{\pi^2 n^2\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ correspondants aux fonctions propres $\{\sin \pi n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui forment une base orthonormale dans l'espace $L^2(0,\pi)$.

Il est bien connu que ce problème est mal posé aux sens de Hadamard. Utilisons le problème (2.3) pour approcher le problème (3.1), ainsi on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t^\alpha(x,t) - u_{xx}^\alpha(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(t) \sin nx,\ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T), \\ u^\alpha(0,t) = u^\alpha(\pi,t) = 0,\ \ t \in [0,T]\,, \\ u^\alpha(x,T) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_n \sin nx,\ \ x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\alpha \in (0,T)$, $f_n(t)$ et g_n sont les coefficients de Fourier dans l'espace $L^2(0,\pi)$, données par :

$$f_n(t) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x,t) \sin n\pi dx,\ \forall n \ge 1,\ \forall t \in [0,T]\,,\ g_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x) \sin n\pi dx,\ \forall n \ge 1.$$

Théorème 17 : Soient $f(x,t) \in L^2\left((0,T), L^2(0,\pi)\right)$, $g(x) \in L^2(0,\pi)$, alors le problème (3.2) admet une solution unique $u^\alpha(x,t)$ tel que

$u^{\alpha}(x,t) \in \left\{C^1\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)\cap L^2\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)\right\}$, et elle est dépend continûment des données du problème dans $C\left((0,T),L^2(0,\pi)\right)$. De plus on a :

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \quad &\leq \frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\left(\|g_1-g_2\|^2_{L^2(0,\pi)}\right. \\ &\qquad \left.+T\,\|f_1-f_2\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

où $u^{\alpha}(x,t)$ et $v^{\alpha}(x,t)$ deux solutions du problème (3.2) correspondants aux seconds membres de l'équation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_{n1}(t)\sin nx \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_{n2}(t)\sin nx,$$

et aux données aux finales :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_{n1}\sin nx \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_{n2}\sin nx.$$

Démonstration :

Montrons premièrement l'existence de la solution $u^{\alpha}(x,t)$ dans l'espace

$\left\{C^1\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)\cap L^2\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)\right\}$.

Par la méthode de séparation des variables, il est facile de voir que la solution du problème (3.2) est donnée par :

$$u^{\alpha}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds\right)\sin nx. \qquad (3.4)$$

On a :

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\tfrac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds\right)\sin nx\right]^2dx \\ &= \tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds\right)^2\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\|u^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)}\leq \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^{-2tn^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}g_n^2+(T-t)\int_t^T\tfrac{e^{2(s-t-T)n^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}f_n^2(s)ds\right).$$

En majorant $\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^{-2}$ par $\left(\alpha n^2\right)^{-2}$, e^{-2tn^2} et $e^{2(s-t-T)n^2}$ par 1

{car $s\in[t,T]$} on obtient

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{\alpha^2n^4}g_n^2+(T-t)\int_t^T\tfrac{1}{\alpha^2n^4}f_n^2(s)ds\right)\\ &\leq \tfrac{2}{\alpha^2}\left(\tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}g_n^2+\tfrac{T\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds\right),\end{aligned}$$

alors

$$\|u^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)}\leq\frac{2}{\alpha^2}\left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)}+T\,\|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right). \tag{3.5}$$

Et d'autre part de (3.4) on a

$$u_x^{\alpha}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\tfrac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds\right)\cos nx.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u_x^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n\left(\tfrac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n-\int_t^T\tfrac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds\right)\cos nx\right]^2dx\\ &= \tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\tfrac{n}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\left(e^{-tn^2}g_n-\int_t^T e^{(s-t-T)n^2}f_n(s)ds\right)\right]^2.\end{aligned}$$

En utilisant que $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\|u_x^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)}\leq\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{n}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\right)^2\left(e^{-2tn^2}g_n^2+(T-t)\int_t^T e^{2(s-t-T)n^2}f_n^2(s)ds\right).$$

En majorant $\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^{-2}$ par $\left(\alpha n^2\right)^{-2}$, e^{-2tn^2} et $e^{2(s-t-T)n^2}$ par 1

{car $s\in[t,T]$} on obtient

$$\begin{aligned}\|u_x^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^2}{\alpha^2n^4}\left(g_n^2+T\int_0^T f_n^2(s)ds\right)\\ &\leq \tfrac{2}{\alpha^2}\left(\tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}g_n^2+\tfrac{T\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds\right),\end{aligned}$$

alors

$$\|u_x^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{2}{\alpha^2}\left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)} + T\,\|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right). \tag{3.6}$$

De (3.5) et (3.6) on a

$$\|u^\alpha(x,t)\|^2_{H^1(0,\pi)} \leq \frac{4}{\alpha^2}\left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)} + T\,\|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right). \tag{3.7}$$

De (3.7), et comme $u^\alpha(0,t) = u^\alpha(\pi,t) = 0$, on a

$$\|u^\alpha(x,t)\|^2_{L^2\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)} \leq \frac{4T}{\alpha^2}\left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)} + T\,\|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right), \tag{3.8}$$

Par conséquence $u^\alpha(x,t) \in L^2\left((0,T), H_0^1(0,\pi)\right)$.

Montrons maintenant l'existence de $u^\alpha(x,t)$ dans l'espace $C^1\left((0,T), H_0^1(0,\pi)\right)$.

De (3.7) on obtient

$$\|u^\alpha(x,t)\|_{C((0,T),H^1(0,\pi))} \leq \frac{4}{\alpha}\left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)} + T\,\|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Et d'autre part de (3.4) on obtient

$$u_t^\alpha(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{-n^2e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n + \int_t^T \tfrac{n^2e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds + \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(t)\right)\sin nx,$$

Donc

$$\|u_t^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{-n^2e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_n \right.$$
$$\left. + \int_t^T \tfrac{n^2e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(s)ds + \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_n(t)\right)^2.$$

En utilisant l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\|u_t^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{n^4e^{-2tn^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}g_n^2 + (T-t)\int_t^T \tfrac{n^4e^{2(s-t-T)n^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}f_n^2(s)ds\right)$$
$$+2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{e^{-2Tn^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}f_n^2(t).$$

En majorant $\left(\alpha n^2 + e^{-Tn^2}\right)^{-2}$ par $\left(\alpha n^2\right)^{-2}$, e^{-2tn^2} et $e^{2(s-t-T)n^2}$ et e^{-2Tn^2} par 1

$\{$car $s \in [t, T]\}$ on obtient

$$\|u_t^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{n^4}{\alpha^2 n^4} g_n^2 + \tfrac{n^4}{\alpha^2 n^4} T \int_0^T f_n^2(s) ds + \tfrac{1}{\alpha^2 n^4} f_n^2(t) \right)$$

$$\leq \tfrac{4}{\alpha^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2 + \tfrac{T\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T f_n^2(s) ds + \tfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^2(t) \right),$$

alors

$$\|u_t^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{4}{\alpha^2} \left(\|g\|^2_{L^2(0,\pi)} + T \|f\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))} + \|f\|^2_{C([0,T],L^2(0,\pi))} \right). \tag{3.10}$$

Et de (3.4) on obtient

$$u_{tx}^\alpha(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\tfrac{-n^2 e^{-tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_n + \int_t^T \tfrac{n^2 e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(s) ds + \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(t) \right) \cos nx,$$

donc

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \tfrac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{-n^3 e^{-tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_n \right.$$

$$\left. + \int_t^T \tfrac{n^3 e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(s) ds + \tfrac{n e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_n(t) \right)^2.$$

En utilisant l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{n^6 e^{-2tn^2}}{\left(\alpha n^2 + e^{-Tn^2}\right)^2} g_n^2 + (T-t) \int_t^T \tfrac{n^6 e^{2(s-t-T)n^2}}{\left(\alpha n^2 + e^{-Tn^2}\right)^2} f_n^2(s) ds \right)$$

$$+ 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n^2 e^{-2Tn^2}}{\left(\alpha n^2 + e^{-Tn^2}\right)^2} f_n^2(t).$$

En majorant $\left(\alpha n^2 + e^{-Tn^2}\right)^{-2}$ par $\left(\alpha n^2\right)^{-2}$, on obtient

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{n^2 e^{-2tn^2}}{\alpha^2} g_n^2 + T \int_0^T \tfrac{n^2 e^{2(s-t-T)n^2}}{\alpha^2} f_n^2(s) ds + \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha^2 n^2} f_n^2(t) \right).$$

En utilisant les majorations $n^2e^{-2tn^2} \leq c_1$, $n^2e^{2(s-t-T)n^2} \leq c_2$ {car $s \in [t,T]$} et $e^{-Tn^2} \leq 1$, et soit $c = \sup\{c_1, c_2, 1\}$, on obtient

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|_{L^2(0,\pi)}^2 \leq \tfrac{4c}{\alpha^2}\left(\tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} g_n^2 + T\tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T f_n^2(s)ds + \tfrac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^2(t)\right),$$

alors

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|_{L^2(0,\pi)}^2 \leq \frac{4c}{\alpha^2}\left(\|g\|_{L^2(0,\pi)}^2 + T\|f\|_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}^2 + \|f(t)\|_{L^2(0,\pi)}^2\right). \tag{3.11}$$

De (3.10) et (3.11) on obtient

$$\|u_{tx}^\alpha(x,t)\|_{H^1(0,\pi)}^2 \leq \frac{8c}{\alpha^2}\left(\|g\|_{L^2(0,\pi)}^2 + T\|f\|_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}^2 + \|f\|_{C((0,T),L^2(0,\pi))}^2\right). \tag{3.12}$$

De (3.9) et (3.12), et comme $u_t^\alpha(0,t) = u_t^\alpha(\pi,t) = 0$, on a

$$\begin{aligned}\|u^\alpha(x,t)\|_{C^1\left((0,T),H_0^1(0,\pi)\right)}^2 \leq \frac{16c}{\alpha^2}\Big[&\|g\|_{L^2(0,\pi)}^2 + T\|f\|_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}^2 \\ &+ \|f\|_{C((0,T),L^2(0,\pi))}^2\Big].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Finalement de (3.8) et (3.13) on a

$$u^\alpha(x,t) \in \left\{C^1\left((0,T), H_0^1(0,\pi)\right) \cap L^2\left((0,T), H_0^1(0,\pi)\right)\right\}.$$

Facilement on déduit l'unicité.

Montrons maintenant que la solution du problème (3.2) est dépend continûment des données du problème.

soient $u^\alpha(x,t)$ et $v^\alpha(x,t)$ deux solutions du problème (3.2) correspondants aux seconds membres de l'équation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_{n1}(t)\sin nx \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} f_{n2}(t)\sin nx,$$

et aux données aux finales

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_{n1}\sin nx \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{e^{-Tn^2}}{\alpha n^2 + e^{-Tn^2}} g_{n2}\sin nx.$$

De (3.4) on a

$$u^{\alpha}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_{n1}-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_{n1}(s)ds\right)\sin nx,$$

et

$$v^{\alpha}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}g_{n2}-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}f_{n2}(s)ds\right)\sin nx.$$

Alors

$$u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\left(g_{n1}-g_{n2}\right)\right.$$

$$\left.-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\left(f_{n1}(s)-f_{n2}(s)\right)ds\right)\sin nx.$$

Donc

$$\left\|u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)\right\|^2_{L^2(0,\pi)}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-tn^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\left(g_{n1}-g_{n2}\right)\right.$$

$$\left.-\int_t^T\frac{e^{(s-t-T)n^2}}{\alpha n^2+e^{-Tn^2}}\left(f_{n1}(s)-f_{n2}(s)\right)ds^2\right)^2.$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le second terme de cette égalité on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)\right\|^2_{L^2(0,\pi)}\leq\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-2tn^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}\left(g_{n1}-g_{n2}\right)^2\right.$$

$$\left.+(T-t)\int_t^T\frac{e^{2(s-t-T)n^2}}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}\left(f_{n1}(s)-f_{n2}(s)\right)^2ds\right)$$

$$\leq\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}\left(\left(g_{n1}-g_{n2}\right)^2+T\int_0^T\left(f_{n1}(s)-f_{n2}(s)\right)^2ds\right).$$

En utilisant l'expression (2.12) du lemme 2 pour $\lambda=n^2$; $\forall n\geq 1$, on obtient

$$\left\|u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)\right\|^2_{L^2(0,\pi)}\leq\frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\left(\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(g_{n1}-g_{n2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{T\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T\left(f_{n1}(s)-f_{n2}(s)\right)^2ds\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,t)-v^{\alpha}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \quad &\leq \frac{2T^2}{\alpha^2\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2}\left(\|g_1-g_2\|^2_{L^2(0,\pi)}\right.\\ &\left.+T\,\|f_1-f_2\|^2_{L^2((0,T),L^2(0,\pi))}\right).\end{aligned}$$

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème 18 : Pour tout $g \in L^2(0,\pi)$, l'approximation $u^{\alpha}(x,T)$ converge vers g en $L^2(0,\pi)$ quand α tend vers 0, de plus si $g_{xx} \in L^2(0,\pi)$ on a

$$\|u^{\alpha}(x,T)-g(x)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}\|g_{xx}(x)\|_{L^2(0,\pi)}. \tag{3.14}$$

Démonstration : Soit $g \in L^2(0,\pi)$, donc $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n \sin nx$.

Soit $\varepsilon > 0$, en choisissant N pour lequel

$$\tfrac{\pi}{2}\sum_{N=n+1}^{+\infty} g_n^2 \leq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

L'expression (2.16) pour ce problème donne

$$\|u^{\alpha}(x,T)-g(x)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^2 n^4}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}g_n^2. \tag{3.15}$$

Alors

$$\|u^{\alpha}(x,T)-g(x)\|^2_{L^2(0,\pi)} = \tfrac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\tfrac{\alpha^2 n^4}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}g_n^2 + \sum_{N=n+1}^{+\infty}\tfrac{\alpha^2 n^4}{\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^2}g_n^2\right).$$

En majorant $\left(\alpha n^2+e^{-Tn^2}\right)^{-2}$ par e^{2Tn^2} dans la première série et par $\alpha^{-2}n^{-4}$ dans la deuxième on obtient

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,T)-g(x)\|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq \tfrac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha^2 n^4 e^{2Tn^2}g_n^2 \;+\sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n^2\right)\\ &\leq \tfrac{\pi\alpha^2}{2}\sum_{n=1}^{N} n^4 e^{2Tn^2}g_n^2 \;+\tfrac{\varepsilon}{2} \quad ,\end{aligned}$$

maintenant en choisissant α tel que $\alpha \leq \sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{n=1}^{N} \pi n^4 e^{2Tn^2} g_n^2\right)^{-\frac{1}{2}}$,

on obtient
$$\|u^{\alpha}(x,T) - g(x)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \varepsilon.$$

Et d'autre part si $g_{xx} \in L^2(0,\pi)$, de (2.17) et de la remarque 5 on obtient :

$\|u^{\alpha}(x,T) - g(x)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \|g_{xx}(x)\|_{L^2(0,\pi)}$. ■

Théorème 19 : Soient $f \in L^2\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$, $g \in L^2(0,\pi)$, le problème (3.1) admet une solution classique *si, et seulement si* la suite $\left(u^{\alpha}(x,0)\right)_{\alpha \geq 0}$ converge dans $L^2(0,\pi)$. De plus, on trouve que u^{α}converge vers u, lorsque α tend vers 0, uniformément en t.

Démonstration : Résulte directement du théorème 6.

Remarque : Si $f_{xx}(x,t) \in L^2(0,\pi); \forall t \in [0,T]$, Alors on a l'estimation :

$$\begin{aligned}\|u^{\alpha}(x,t) - u(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq & \, 2\,\|u^{\alpha}(x,0) - v(x)\|^2_{L^2(0,\pi)} \\ & + \frac{2T^3}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^2} \|f_{xx}\|^2_{L^2([0,T],L^2(0,\pi))} .\end{aligned} \tag{3.16}$$

Démonstration :

Si $f_{xx}(x,t) \in L^2(0,\pi); \forall t \in [0,T]$, la remarque 7 donne directement l'estimation (3.16).

Théorème 20 : Soient $f \in L^2\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$, $g \in L^2(0,\pi)$, le problème (3.1) admet une solution classique *si, et seulement si* la suite $\left(u_t^{\alpha}(x,0)\right)_{\alpha \geq 0}$ converge dans $L^2(0,\pi)$. De plus, u^{α}converge vers u lorsque α tend vers 0 dans $C^1\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$.

Démonstration : Résulte du théorème 8.

Remarque : Si $u_{xxxx}(x,t) \in L^2(0,\pi), \forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}\|u_t^{\alpha}(x,0) - u_t(x,0)\|_{L^2(0,\pi)} \leq & \frac{\sqrt{2}T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)} \left\{\|u_{xxxx}(x,0)\|^2_{L^2(0,\pi)}\right. \\ & \left. + \|f_{xx}(x,0)\|^2_{L^2(0,\pi)}\right\}^{\frac{1}{2}} .\end{aligned} \tag{3.17}$$

Démonstration : la démonstration se déduit directement de la remarque 9.

Théorème 21 : Soient $f(x,t) \in L^2([0,T], L^2(0,\pi))$, $g(x) \in L^2(0,\pi)$, s'il existe $m \in (0,2)$ tel que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2m} e^{mTn^2} g_n^2$ converge, alors

$$\|u^\alpha(x,T) - g(x)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{\sqrt{\pi C_1 \alpha^m}}{m}, \tag{3.18}$$

où $\quad C_1 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2m} e^{mTn^2} g_n^2$.

Démonstration : Résulte du théorème 10.

Théorème 22 : Soient $f \in L^2([0,T], L^2(0,\pi))$, $g \in L^2(0,\pi)$. Supposons que le problème (3.1) admet une solution unique $u \in C^1([0,T], L^2(0,\pi))$, alors $u^\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t.

Démonstration : Résulte directement du théorème 11.

Remarque : Si le problème (3.1) admet une solution classique u. Alors on a l'estimation :

$$\|u^\alpha(x,t) - u(x,t)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{C}{1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}, \tag{3.19}$$

où $C = T \sup_{t\in[0,T]} \|u_{xx}(t)\|_{L^2(0,\pi)}$.

Démonstration : Résulte directement de la remarque 12.

Théorème 23 : Soient $f \in L^2([0,T], L^2(0,\pi))$, $g \in L^2(0,\pi)$, $\alpha \in (0,T)$, supposons que le problème (3.1) admet une solution classique u, alors $u_t^\alpha(x,t)$ converge vers $u_t(x,t)$ uniformément en t.

Démonstration : Résulte directement du théorème 13.

Remarque :

Si la solution du problème (3.1) vérifie de plus $u_{xxxx}(x,t) \in L^2(0,\pi); \forall t \in [0,T]$. Alors on a l'estimation

$$\|u_t^\alpha(x,t) - u_t(x,t)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{D}{1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)} \quad , \tag{3.20}$$

où $D = \sqrt{2}T \sup_{t\in[0,T]} \left\{\|u_{xxxx}(x,t)\|^2_{L^2(0,\pi)} + \|f_{xx}(t)\|^2_{L^2(0,\pi)}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration : Supposons que $u_{xxxx}(x,t) \in L^2(0,\pi); \forall t \in [0,T]$, en utilisant (2.42) de la remarque 14 on obtient l'estimation (3.20). ■

Théorème 24 : Soient $f \in L^2\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$, $g \in L^2(0,\pi)$, supposons que le problème (3.1) admet une solution unique u correspondante aux second membre de l'équation f, et la donnée finale g, tel que $u \in C^1\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$, et soient $f^\alpha \in L^2\left([0,T], L^2(0,\pi)\right)$, et $g^\alpha \in L^2(0,\pi)$ tel que $\|f - f^\alpha\|_{L^2([0,T],L^2(0,\pi))} \leq \frac{\alpha}{2T\sqrt{2}}$, et $\|g - g^\alpha\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}$.

Alors, il existe une fonction u^α de sorte que $u^\alpha(x,t)$ converge vers $u(x,t)$ uniformément en t.

Démonstration : Se déduit directement du théorème 15**.**

Remarque : Dans le théorème 24, si le problème (3.1) admet une solution classique $u(x,t)$, Alors il existe une fonction u^α tel que

$$\|u^\alpha(x,t) - u(x,t)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{C+T}{\left(1+\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)}, \tag{3.21}$$

où $C = T \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u_{xx}(x,t)\|_{L^2(0,\pi)}$.

Démonstration : Résulte de la remarque 16.

4 Bibliographie

[1] Abana, M., *Regularization by non local boundary conditions for a control problem by initial condition of evolution operator differential equation*, (in Russian), Vestnik Belarus Gos. Univ., Seria 1, Physique-Mathematique et informatique, No. 2, 60-63, 1998.

[2] Ames, K. A., Payne, L. E., Schaefer, P. W., *Energy and pointwise bounds in some non-standard parabolic problem,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 134**, No. 1, 1-9, 2004.

[3] Ames, K. A., Payne, L. E., *Asymptotic for to regularization of the Cauchy problem for the backward heat equation, Math. Models Meth. Appl. Sci.* ***8**, 187-202, 1998.*

[4] *Clark, G.W, Oppenheimer, S. F., Quasireversibility Method for Non-well-posed problem,* Electronic Journal of Differential Equation, No. 8, 1-9, 1994.

[5] Denche, M. Bessila, K., *A modified quasi-boundary value method for ill-Posed Problèm,* J. Math. Anal. Appl. **301**, 419-426, 2005.

[6] Hadamard, J., *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique,* Bull. Un. V. Princeton, V.B. 1902.

[7] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in linear Partial Differential Equations.* Yale University Press. 1923.

[8] Hadamard, J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaire hyperbolique,* Paris. Hermann. 1932.

[9] Ivanov, V.K., Melnikova, I.V., Filinkov, A.I., *Differential-operator equations and ill-posed problem* (in Russian), Moscou, Naouka-Fizmatlit. 1995.

[10] Lattes, R. and Lions, J.L., *Méthode* de *Quasi-réversibilité et Applications,* Dunod, Paris. 1967.

[11] Lavrentiev, M. M., *Sur quelque problèmes mal posés de physique mathématique,* Edition de la Filiale Sibérienne de L'Académie des Sciences de l'URSS. 1962.

[12] Lavrentiev, M. M., *Some improperly posed problems of mathematical physics,* Springer Tracts Nat. Philos., **II,** Springer-Verlag, New York, 1967.

[13] Lavrentiev, M. M. Romanov, V. G., Sisatskii, S. P., *Problemi non ben Posti in Fisica,* Matematica e Analisi. Pubbl. dell'**I**st. Analisi Globale e Appl., **12.** Firenze. 1983.

[14] Miller, K., *Stabilized Quasireversibility and other nearly best possible methods*

for non-well-posed problems, "Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity", Lecture Notesin Mathematics, **316,** Springer-Verlag, Berlin, 161-176, 1973.

[15] Payne, L. E., *Some general remarks in improperly posed problems for partial differential equations,* "Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity" , Lecture Notesin Mathematics, **316,** Springer-Verlag, Berlin, 1-30, 1973.

[16] Showalter, R. E., *The final value problem for evolution equations,* J. Math. Anal. Appl. **47,** 563-572, 1974.

[17] Showalter, R. E., *Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations,* "Trends in the theory and practice of Non-linear Analisis " , Elsevier. 1983.

[18] Tikhonov, A. N., *Sur la Stability de Problems inverses,* Rapports de l'Académie des sciences de l'URSS, **5**, No. 39, 1943.

[19] Tikhonov, A. N., *On the solution of ill-posed problems and the method of regularization,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **151**, 501-504, 1963.

[20] Tikhonov, A. N., Arsenine, V. V., *Méthodes de régularisation de problèmes mal posé,* Mir, 1976.

[21] Tikhonov, A. N., *Solution of Ill Posed Problems,* V.H. Winston-Wiley, New York. 1977.

[22] Trenogunine, V. A., *Analyse fonctionnelle,* Mir, 1985.

[23] Trong, D. D. and Tuan, N. H., *A Nonhomogeneous Backward Heat Problem : Regularization and Error Estimates,* Electronic. J. Diff. Eqns, Vol. 2008, No .33, 1-14, 2008.

[24] Trong, D. D. and Tuan, N. H., *Regularization and Error Estimates for Nonhomogeneous Backward Heat Problem,* Electronic. J. Diff. Eqns, Vol. 2006, No .04, 1-10, 2006.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème parabolique rétrograde abstrait non homogène. On développe une méthode de régularisation, puis on montre la convergence de cette méthode proposée. On établit des résultats de convergence et d'estimation d'erreur.

Enfin, on illustre les résultats obtenus par l'étude d'un problème inverse pour l'équation de la chaleur.

Abstract:

This present work is devoted to the study a parabolic problem retrograde abstract non-homogeneous. We develop regularization method, and then we show the convergence of the proposed method. We establish convergence results and error estimate.

Finally, we illustrate the results obtained by studying an inverse problem for the heat equation.

ملخص

يختص هذا العمل في المسائل المطروحة بشكل غير جيد.
ندرس مسألة مكافئة تنازلية مجردة غير المتجانسة . نطور طريقة لتعديل ثم نبين طريقة التعديل المقترحة، و نقدم نتائج تقاربية وتقرير الخطأ.

أخيرا، علينا توضيح النتائج التي تم الحصول عليها من خلال دراسة مشكلة عكسية لمعادلة الحرارة.