REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
================

UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE –
FACULTE **DES SCIENCES EXACTES**
===============

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ……………………………
N° de série : …………………………

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME DE MAGISTERE
EN
MATHEMATIQUES

« *RESOLUBILITE COERCITIVE D'UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES* »

Par
KENEF ESMA

OPTION
ANALYSE

Devant le jury :

Marhoune A L.	Prof.	Université Mentouri	Président
Denche M.	Prof.	Université Mentouri	Rapporteur
Saidouni C.	M.C.	Université Mentouri	Examinateur
Rahmani F.	M.C.	Université Mentouri	Examinateur

Soutenu le ,

Table des matières

Introduction

Le présent travail est consacré à l'étude de la régularité maximale L^P pour une classe d'équations différentielles opérationnelles du premier ordre sur l'axe réel dans les espaces de Banach du type UMD.

Il est composé en trois chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par une présentation des notions utiles tout le long de ce travail, à savoir l'espérence conditionnelle, les martingales et leurs principales propriétés, l'inégalité de Khinchine-Kahane, enfin on termine ce chapitre par la présentation de la décomposition Schauder.

Le second chapitre est consacré à l'étude des espaces de Banach du type UMD. On présente une étude des transformées de Hilbert. Enfin on présente différentes approches équivalentes des espaces UMD.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude de la régularité maximale d'une classe d'équations différentielles opérationnelles du premier ordre sur tout l'axe réel dans les espaces UMD. On montre que si l'opérateur est R-bissectoriel alors le problème en question possède la propriété de la régularité maximale L_P. L'etude est basée sur la notion de R-bornitude.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle en bref certaines notions connues sur les martingales, la décomposition de Schauder et sur la r-bornitude.

Soit X un espace de Banach.

1.1 L'éspérance conditionnelle

Soit Ω un ensemble.

Definition 1 *: On dit que $F \subset \Omega$ est une algèbre sur Ω, si*

1- $\Omega, \Phi \in F$;

2- $\forall E \in F, \complement_{\Omega}^{E} \in F$;

3- $\forall E_1, E_2 \in F, E_1 \cup E_2 \in F$.

Definition 2 *: On dit que $F \subset \Omega$ est une σ-algèbre sur Ω, si*

1- $\Omega, \Phi \in F$;

2- $\forall E \in F, \complement_{\Omega}^{E} \in F$;

3- $\forall (E_i)_{i \in I} \in F, \underset{i \in I}{\cup} E_i \in F$. Où I est quelconque.

Le couple (Ω, F) est apelé espace mesurable.

Definition 3 *: Soit (Ω, F) un espace mesurable, on dit que la fonction $\mu : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ est une mesure positive si : $\forall (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$, avec $E_i \cap E_j = \Phi$, pour $i \neq j$, on a*

$$\mu\left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Le triplet (Ω, F, μ) est dit espace mesuré. Si $\mu(\Omega) = 1$, le triplet (Ω, F, μ) est apelé espace de probabilité, et dans ce cas on le note par $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

1.1.1 Mesure de Lebegue

Definition 4 *Soit* Ω *un ensemble,* F *une algèbre sur* Ω *et* μ *une mesure sur* F*. On définit* $\mu^* : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ *par :*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) / (A_n) \text{ suite dans } F \text{ avec } A \subset \cup A_n\right\}.$$

Definition 5 *: Un ensemble* E *est dit mesurable au sens de Carathéodory si*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap \complement_{\Omega}^{E}\right), \forall A \in \Omega$$

L'ensemble de tous les ensembles mesurables au sens de Carathéodory notés par F^*.

Theoreme 1 (*L'extension de Carathéodory*) *: Soient* F *une algèbre sur* Ω*, et* μ *une mesure sur* F*. La famille* F^* (*définie précédement*) *est une* σ*-algèbre sur* Ω *contenant* F*, et la fonction* μ^* *définit une mesure sur* F^*.

Maintenant en utilisant le théorème d'extension de Carathéodory on va définir la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$. Posons

$$F_1 = \{]a,b],]-\infty, a],]b, +\infty[,]-\infty, +\infty[, \ a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \ ,$$

et

$$F = \left\{E \subset \mathbb{R}, E = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} I_i, \text{ où } I_i \in F_1\right\} \ .$$

Alors F est une algèbre sur $\mathbb{R}$. Et soit la fonction $m : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

1- $m(]a,b]) = b - a$;

2- $m(]-\infty, a]) = m(]b, +\infty[) = m(]-\infty, +\infty[) = +\infty$;

3- $m\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} I_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} m(I_k)$, où les I_k sont deux à deux disjoints.

Definition 6 *: L'extension* m^* *de* m *au sens de Carathéodory est appelée la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

Definition 7 *: Soient* (Ω_1, F_1) *et* (Ω_2, F_2) *deux espaces mesurables, on dit que l'application* $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *est une fonction mesurable si*

$$\forall E_2 \in F_2, f^{-1}(E_2) \in F_1.$$

Si $(\Omega_1, F_1, \mathbb{P}_1)$ *et* $(\Omega_2, F_2, \mathbb{P}_2)$ *sont deux espaces de probabilités, on dit que* f *est une varriable aléatoire, et si* $\Omega_2 = \mathbb{R}$*, on dit que* f *est une variable aléatoire réelle.*

Exemple 1 *: Soit (Ω, F) un espace mesurable, et $E \in F$. On définit $\chi_E : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in E \\ 0, & si\ x \notin E \end{cases},$$

c'est une fonction mesurable car on a :

$$\left\{ \chi_E^{-1}(A), A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \right\} = \{\Phi, \Omega, \mathbb{R}\}$$

Où $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Boréliens.

Definition 8 *: Soient $f \in L^1(\mathcal{F}; X)$, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre de l'algèbre $\mathcal{F}$. L'éspérence conditionnelle de f par rapport à $\mathfrak{B}$ notée par $E(f \mid \mathfrak{B})$ est une fonction $g \in L^1(\mathfrak{B}; X)$ qui satisfait*

$$\int_G g d\mathbb{P} = \int_G f d\mathbb{P},$$

pour tout $G \subset \mathfrak{B}$.

Exemple 2 *: Soient $f \in L^1(\mathcal{F}; X)$, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre. Si f est une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable alors*

$$E(f \mid \mathfrak{B}) = f.$$

1.1.2 propriétés

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $f \in L^1(\mathcal{F}; X)$, et soit $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{F}$. Alors on a :

1- L'opérateur

$$E(. \mid \mathfrak{B}) : L^1(\mathcal{F}, X) \longrightarrow L^1(\mathfrak{B}, X),$$

est linéaire.

2- Si $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} E(E(f \mid \mathfrak{B}_1) \mid \mathfrak{B}_2) &= E(E(f \mid \mathfrak{B}_2) \mid \mathfrak{B}_1) \\ &= E(f \mid \mathfrak{B}_1)\,(p.p.). \end{aligned}$$

Lemme 1 *: Pour $f \in L^1(\mathcal{F}; X)$, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous–σ-algèbre de $\mathcal{F}$. L'éspérance conditionnelle de f par rapport à $\mathfrak{B}$ qui est $E(f \mid \mathfrak{B})$ existe et de plus on a :*

$$|E(f \mid \mathfrak{B})|_X \leq E(|f|_X \mid \mathfrak{B})\,(p.p.).$$

L'opérateur $E(. \mid \mathfrak{B})$ est une projection contractive de $L^1(\mathcal{F}, X)$ dans $L^1(\mathfrak{B}, X)$.

Lemme 2 *: Soient $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in L^1(\mathcal{F})$, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous– $\sigma-$algèbre de $\mathcal{F}$ alors on a :*

1- Si $0 \leq f_n \uparrow f$ (p.p.) alors $0 \leq E(f_n \mid \mathfrak{B}) \uparrow E(f \mid \mathfrak{B})$ (p.p.) (La convergence monotone) ;

2- Si $0 \leq f_n$ *(p.p.) alors* $E\left(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \mid \mathfrak{B}\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} E\left(f \mid \mathfrak{B}\right)$ *(p.p.) (Le lemme deFatou) ;*

3- Si $|f_n| \leq g \in L^1(\mathcal{F})$*, et* $f_n \longrightarrow f$ *(p.p) lorsque* $n \longrightarrow \infty$*, alors on a* $E\left(|f_n - f| \mid \mathfrak{B}\right)$ $\longrightarrow 0$ *(p.p.), de plus il resulte que* $E\left(f_n \mid \mathfrak{B}\right) \longrightarrow E\left(f \mid \mathfrak{B}\right)$ *(p.p.) (La convergence dominée).*

Remarque 1 *: La troisième assersion du lemme précédent peut être prolongèe à un espace de Banach quelconque, c'est-à-dire si* $|f_n|_X \leq g \in L^1(\mathcal{F})$*, et* $f_n \longrightarrow f$ *p.p lorsque* $n \longrightarrow \infty$ *(i.e)* $|f_n - f|_X \longrightarrow 0\,(p.p.)$ *alors on a* $E\left(|f_n - f|_X \mid \mathfrak{B}\right) \longrightarrow 0$ *(p.p.), de plus il résulte que* $E\left(f_n \mid \mathfrak{B}\right) \longrightarrow E\left(f \mid \mathfrak{B}\right)$ *(p.p.).*

Lemme 3 *(L'inégalité de Jensen) : Pour une variable alétoire* $f \in L^1(\mathcal{F}; X)$*, une* σ*-algèbre* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$*, et une application continue et convexe* $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, tel que* $\Phi \circ f \in L^1(\mathcal{F})$ *on a :*

$$\Phi \circ E\left(f \mid \mathfrak{B}\right) \leq E\left(\Phi \circ f \mid \mathfrak{B}\right)(p.p.).$$

Corollaire 1 *: Pour une sous-*$\sigma-$*algèbre* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$*, L'éspérance conditionnelle est une projection contractive de* $L^p(\mathcal{F}, X)$ *dans* $L^p(\mathfrak{B}, X)$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Lemme 4 *: Si* $g \in L^1\left(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}(X, Y)\right)$, $p \in [1, \infty)$, $f \in L^{\bar{p}}(\mathcal{F}; X)$*, et* $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$*, alors*

$$E\left(gf \mid \mathfrak{B}\right) = gE\left(f \mid \mathfrak{B}\right).$$

1.2 Martingale

Soit X un espace de Banach.

Definition 9 *: Une martingale est une suite* $f = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ *de variables alétoires sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *qui sont adaptées par une suite croissante* $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^{\infty}$ *de sous* σ*-algébres de* $\mathcal{F}$*, et tel que la différence définit par* $\delta f_k = f_k - f_{k-1}$ *(avec* $f_0 = 0$*) satisfait la condition*

$$E\left(\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = 0 \tag{1.1}$$

tel que chaque f_k *est* $\mathcal{F}_k-$*mesurable.*

Remarque 2 *: on a*

1- La condition (1.1) est équivalent à :

$$f_{k-1} = E\left(f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right). \tag{1.2}$$

2- Si dans le cas réel au lieu de l'égalité dans(1.2) on à les inégalités "$\leq$*" ou"*$\geq$*" pour chaque* $k = \overline{1, \infty}$*, alors dans ce cas* f *est dite une sous-martingale ou supermartingale respectivement.*

Exemple 3 *: Soient $f \in L^1(\mathcal{F}, X)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite coissante de sous σ-algébres de $\mathcal{F}$, alors la suite $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ définit par*

$$f_k = \begin{cases} 0, \ si\ k = 0 \\ E(f \mid \mathcal{F}_k), \ si\ k \geq 1 \end{cases}$$

est une martingale.

1.2.1 Propriétés

Corollaire 2 *: Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue convexe, tel que $\Phi \circ f_k$ est intégrable pour $k \in \mathbb{Z}_+$, alors $(\Phi \circ f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega,)^{\mathbb{Z}_+}$ est une sous-martingale.*

Remarque 3 *: Soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une martingale. Dans le cas où $\Phi = |.|_X$, alors $(|f_k|_X)_{k=1}^{\infty}$ est une sous-martingale non négative.*

Corollaire 3 *: Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale sur X, et $\Lambda \in \mathfrak{B}(X, Y)$, alors $\Lambda f = (\Lambda f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega, Y)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale sur Y.*

Lemme 5 *: Si H est un espace de Hilbert, $f \in L^2(\mathcal{F}, H)$, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-$\sigma-$algèbre de $\mathcal{F}$, alors $E(f \mid \mathfrak{B})$ est la projection orthogonale de f dans $L^2(\mathfrak{B}, H)$, ie $f - E(f \mid \mathfrak{B}) \perp L^2(\mathfrak{B}, H)$.*

Corollaire 4 *: Si H est un espace de Hilbert, et $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^2(\Omega, H)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^{\infty}$, alors les differences δf_k sont orthogonales.*

1.2.2 L'opérateur maximale et les inégalitées de Doob

Definition 10 *: Soit $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$ une martingale verifiant*

$$|f|_{l^{\infty}(\mathbb{Z}_+; L^p(\Omega, X))} = \sup_{k \to \infty} |f_k|_{L^p(\Omega, X)} < \infty,$$

alors f est dite bornée dans L^p.

Definition 11 *: L'opérateur maximal $(.)^*$ définit pour la martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ par*

$$f^*(\omega) = \sup_{k \to \infty} |f_k(\omega)|_X .$$

Ainsi la fonction f^* est dite fonction maximale de la martingale f.

Remarque 4 *: On remarque que L'opérateur maximal $(.)^*$ applique surjectivement $L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ dans $[0, \infty]^{\Omega}$.*

Lemme 6 *(L'inégalité de Doob dans L^1) : On a*

1- Si $g = (g_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega)^{\mathbb{Z}_+}$ *est une sous-martingale non négative adaptée à* $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^{\infty}$. *Alors*

$$t\mathbb{P}\left(\max_{k\leq n} g_k \geq t\right) \leq \int\limits_{\max\limits_{k\leq n} g_k \geq t} g_n(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \leq |g_n|_{L^1(\Omega)} \quad , \tag{1.3}$$

pour chaque $t > 0$.

2- Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ *est une martingale, alors l'inegalité (1.3) est satisfaite avec* $|f_k(\omega)|_X$ *au lieu de* $g_k(\omega)$.

3- Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ *est une martingale, alors*

$$tP(f^* \geq 0) \leq |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}.$$

Lemme 7 *: Si les variables aléatoires* $f, g \geq 0$ *verifient :*

$$t\mathbb{P}(f \geq t) \leq \int\limits_{f\geq t} g d\mathbb{P},$$

pour chaque $t > 0$, *alors on a*

$$|f|_{L^p(\Omega)} \leq \overline{p}\, |g|_{L^p(\Omega)},$$

pour chaque $p \in (1, \infty]$.

Lemme 8 *(L'inégalitée de Doob dans L^p) : Si* $f \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega; X)), 1 < p < \infty$ *est une martingale ou sous-martingale non négative avec* $X = \mathbb{R}$, *alors :*

$$|f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;X))} \leq |f^*|_{L^p(\Omega)} \leq \overline{p}\, |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;X))}.$$

On note que la premiere inégalité est satisfaite aussi pour $p = 1$.

1.3 L'inégalité de Khintchine-Kahane

Definition 12 *: Soit* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, on dit que les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *définies de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *sont indépendantes si :*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) ... \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Definition 13 *: Soit* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, les fonctions de Rademacher* $\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}_+$ *sont des variables aléatoires independantes, identiquement distribués définies sur* Ω *à valeurs dans* $\{-1, 1\}$, *c'est à dire*

$$\varepsilon_k : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\},$$

et verifiant :

1- $\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}_+$, *sont des variables aleatoires réelles ;*

2- $\mathbb{P}(\varepsilon_k(\omega) = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k(\omega) = +1) = \frac{1}{2}$;

3- $\mathbb{P}(\varepsilon_1(\omega), ..., \varepsilon_n(\omega)) = \mathbb{P}(\varepsilon_1(\omega)) ... \mathbb{P}(\varepsilon_n(\omega))$.

Exemple 4 *Les fonctions*

$$\varepsilon_k(\omega) = sign\left(\sin\left(2^k \pi \omega\right)\right), \quad \omega \in [0,1], k \in \mathbb{Z}_+.$$

sont des fonctions de Rademacher.

Definition 14 *: Soient $x_1, ..., x_n \in X$, où X est un espace normé, la norme aléatoire de $x_1, ..., x_n \in X$ est définit par :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)}$$

où $(\Omega, F, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, $\varepsilon_k, k = \overline{1,n}$ sont des fonctions de Rademacher.

Remarque 5 *: On remarque que*

1- Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|\varepsilon x|_{L^p(\Omega;X)} &= \left(\int_{\Omega} |\varepsilon x|_X^p \, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|x|_X^p \, \mathbb{P}(\varepsilon(\omega) = +1) + |-x|_X^p \, \mathbb{P}(\varepsilon(\omega) = -1)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}|x|_X^p + \frac{1}{2}|x|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|x|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |x|_X .
\end{aligned}$$

Alors on remarque que la norme aléatoire d'un seul élément de X est égale à la norme de cet élément dans X.

2- Pour $n = 2$, on a

$$\left|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2\right|_{L^p(\Omega;X)} = \left(\int\limits_\Omega \left|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2\right|_X^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int\limits_\Omega \left(|x_1 + x_2|_X^p + |-x_1 + x_2|_X^p + |x_1 - x_2|_X^p + |-x_1 - x_2|_X^p\right) d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(|x_1 + x_2|_X^p \, \mathbb{P}\left(\varepsilon_1(\omega) = 1, \varepsilon_2(\omega) = 1\right) + |-x_1 + x_2|_X^p \, \mathbb{P}\left(\varepsilon_1(\omega) = -1, \varepsilon_2(\omega) = 1\right)\right.$$
$$\left. + |x_1 - x_2|_X^p \, \mathbb{P}\left(\varepsilon_1(\omega) = 1, \varepsilon_2(\omega) = -1\right) + |-x_1 - x_2|_X^p \, \mathbb{P}\left(\varepsilon_1(\omega) = -1, \varepsilon_2(\omega) = -1\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2^2}|x_1 + x_2|_X^p + \frac{1}{2^2}|-x_1 + x_2|_X^p + \frac{1}{2^2}|x_1 - x_2|_X^p + \frac{1}{2^2}|-x_1 - x_2|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2^2}\left(|x_1 + x_2|_X^p + |-x_1 + x_2|_X^p + |x_1 - x_2|_X^p + |-x_1 - x_2|_X^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2^2}\left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \sum_{\varepsilon_2 \in \{-1,1\}} |\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2|_X^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc pour $n \in \mathbb{Z}_+$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left(\int\limits_\Omega \left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_X^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \dots \sum_{\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_X^p\right) d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \dots \sum_{\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_X^p \mathbb{P}\left(\varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1,1\}} \dots \sum_{\varepsilon_n \in \{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_X^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\eta \in \{-1,1\}^n} \left|\sum_{k=1}^n \eta_k x_k\right|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

De plus si $\epsilon \in \{-1,1\}^n$, on observe que

$$\left|\sum_{k=1}^n \epsilon_k \varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)} = \left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.$$

Corollaire 5 ***(Inégalité de Khintchine-Kahane)*** *: Pour $0 < p, q < \infty$, il existe une constante finie $K_{p,q}$, tel que dans chaque espace vectoriel normé on a :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \leq K_{p,q}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right|_{L^q(\Omega;X)}$$

pour tout $x_k \in X$, et toutes fonctions de Rademacher $\varepsilon_k, k = \overline{1,n}$.

Si X est complet (Espace de Banach), et la série $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k x_k$ converge dans l'un des espaces $L^p(\Omega;X)$, alors elle est convergente dans chacun de ces espaces, et l'inégalité précédente est vraie pour $n = +\infty$.

Remarque 6 *: De l'inégalité de Khintchine-Kahane resulte que si on prend pour X' l'ensemble des familles finies de X munit de la norme aléatoire olors on obtient un espace normé dont les normes aléatoires sont équivalentes pour tout p, $0 < p < \infty$. De plus sont équivalentes à $\left(X', \|.\|_{L^2(\Omega;X)}\right)$.*

1.4 La décomposition de Schauder

Definition 15 *Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ une suite dans l'espace normé X. On dit que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ est*

1- Convergente vers x, si $\lim_{N\longrightarrow\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}x_n - x\right|_X = 0$, et on note $\sum_{n=1}^{\infty}x_n = x$.

2- Inconditionnellement convergente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}$ converge pour chaque permutation des entiers naturel $\sigma \in S_{\mathbb{Z}_+}$.

3- Sommable vers $x, x \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $F_0 \subset \mathbb{Z}_+, cardF_0 < \infty$, tel que pour tout $F_0 \subset F$, $cardF < \infty$ on a :

$$\left|\sum_{k\in F}x_k - x\right|_X < \varepsilon.$$

4- Satisfait aux conditions de Cauchy "Schrinking", si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $F_0 \subset \mathbb{Z}_+$, $cardF_0 < \infty$, tel que pour tout $F \subset \mathbb{Z}_+ \setminus F_0$, $cardF < \infty$ on a :

$$\left|\sum_{k\in F}x_k\right|_X < \varepsilon$$

5- Absolument convergente, si la serie numerique $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|_X$ est convergente.

Dans le cas général, c'est-à-dire dans un espace normé quelconque il n'existe aucune relation d'equivalence entre ces types de convergences, mais il'ya uniquement quelques implications. Si X est un espace de Banach on résume les relations entre ces types de convergences dans le lemme suivant :

Lemme 9 *Soit* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ *une suite dans l'espace de Banach* X. *Les assertions suivantes sont equivalentes :*

1- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *est inconditionnellement convergente ;*

2- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *est sommable ;*

3- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *satisfait les conditions de Cauchy "Schrinking" ;*

4- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+)$ *;*

5- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ *;*

6- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k x_k$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ *.*

Definition 16 *Une décomposition de Schauder est une suite de projecteurs* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X)$, *tel que :*

1-$D_k D_l = 0, \quad k \neq l$;

2-$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} D_k x, \ $ *pour tout* $x \in X$.

Les opérateurs $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k$ *sont dits sommes partielles des projecteurs correspondants à* D.
L'image d'une décomposition de Schauder $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$ *est l'ensemble* $ran(D) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} ran(P_n)$.

Exemple 5 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,* X *un espace de Banach, et* $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *une suite croissante de sous-*σ*-algèbres de* $\mathcal{F}$ *tels que* $\mathcal{F}_k \uparrow \mathcal{F}$. *Alors* $f = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ *définie par* $(f_k)_{k=1}^{\infty} = (\delta E(. \mid \mathcal{F}_k))_{k=1}^{\infty}$, *et* $f_0 = 0$ *est une décomposition de Schauder de* $L^p(\mathcal{F}; X), p \in [1, \infty[$.

Definition 17 *Une décomposition de Schauder est dite inconditionnelle si la serie dans la définition correspondante est inconditionnellement convergente pour chaque* $x \in X$.

Lemme 10 *Une famille d'operateurs* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X)$ *vérifiant* $D_k D_l = \delta_{k,l} D_l$ *est une décomposition de Schauder si et seulement si* $\overline{ran(D)} = X$ *et les sommes partielles des projecteurs sont uniformément bornées. Dans ce cas chaque projecteur* D_k *les aussi.*

Lemme 11 *Si* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une famille de sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach* X. *Si chaque* $x \in X$ *admet une unique représentation* $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k, X_k \in X$ *(i.e,* $X = \oplus X_k$ *est la somme directe de* X_k*). Alors* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$ *définie par* $D_k x = x_k$ *est une décomposition de Schauder de* X.

Inversement, si $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une décomposition de Schauder, alors* $X_k = ran(D_k)$ *définit une suite de sous-espaces verifiant les conditions de la première assertion du lemme.*

Lemme 12 *Soit* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$ *une décomposition de Schauder d'un espace de Banach* X*, alors la nouvelle norme :*

$$\|x\|_X = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{k=1}^{n} D_k x \right|_X ,$$

est equivalente à $|.|_X$*..*

Maintenant soient les opérateurs $T_\lambda, \lambda \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ définis par :

$$T_\lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_k x \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D_k x$$

où $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ une décomposition de Schauder .

Lemme 13 *Soit* $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ *une décomposition de Schauder d'un espace de Banach* X*. Alors les propositions suivantes sont equivalentes :*

1- D *est inconditionnelle ;*

2- La famille d'opérateurs $(T_\varepsilon)_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}_+}}$ *dans* $ran(D)$ *est uniformément bornée ;*

2- La famille d'opérateurs $(T_\delta)_{\delta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}}$ *dans* $ran(D)$ *est uniformément bornée ;*

3-La famille d'opérateurs $(T_\lambda)_{\lambda \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)}$ *dans* $ran(D)$ *est uniformément bornée.*

Remarque 7 *On a*

1-Du le lemme précédent on déduit que les propriétés de 2 à 4 sont equivalentes à l' existence d'un $c > 0$ *tel que :*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right|_X \leq c \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|_X , \tag{1.4}$$

pour $x_k \in ran(D), k = \overline{1, n}$*, pour tout* $n \in \mathbb{Z}_+$ *et* $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ *. Respectivement pour* $\delta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ *et* $\lambda \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ *au lieu de* $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ *. Dans ce cas la plus petite constante* c *dans l'inégalité précédente est dite la constante inconditionnelle et elle est notée par* c_D*.*
2-D'aprés le lemme 13, l'inégalité (1.4) reste vraie même si $n = \infty$ *mais pour* $x_k = D_k x$*. Et si on remplaçe* x_k *par* $\epsilon_k x_k$ *dans l'inégalité précédent on obtient :*

$$c^{-1} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|_X \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right|_X \leq c \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|_X$$

avec $\epsilon_k = \pm 1, x_k \in ran(D_k)$*.*

Corollaire 6 *Si* $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ *est une décomposition de Schauder d'un espace de Banach* X*. Alors l'opérateur* T_λ *définit précédément est borné si et seulement si* $\lambda \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$ *.*

1.5 R-Bornitude

Definition 18 *Une famille d'opérateurs $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$, où X et Y sont deux espaces normés est dite bornée aléatoirement "Randomized bounded" (R-bornée) si pour un certain $p \in [1,\infty)$, il existe une constante c finie tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$, et tout $T_k \in \Im$, $x_k \in X$, et ε_k des fonctions de Rademacher, $k = \overline{1,n}$, on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T_k x_k\right|_{L^p(\Omega;Y)} \leq c\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)}. \tag{1.5}$$

La plus petite constante c notée par $R_p(\Im)$ est appelée le "R-bound" de $\Im$ d'ordre p.

Remarque 8 *Soient X, Y deux espaces normés, alors on a :*

1- La définition de la R-bornitude est indépendante de l'ordre p, d'aprés l'inégalité de Khintchine-Kahane, mais $R_p(\Im)$ dépend de cet ordre p, c'est-à-dire, si $\Im$ est non R-bornée pour un seul $p \in [1,\infty)$, donc elle est non R-bornée pour tous les $p \in [1,\infty)$.

2- $R_p(\Im)$ est verifie les conditions de la norme, en effet, soient $\Im_1$, $\Im_2 \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ deux familles R-bornées, soient $T_k^1 \in \Im_1$, et $T_k^2 \in \Im_2$, alors on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(T_k^1+T_k^2\right)x_k\right|_{L^p(\Omega;Y)} &\leq \left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T_k^1 x_k\right|_{L^p(\Omega;Y)} + \left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T_k^2 x_k\right|_{L^p(\Omega;Y)} \\ &\leq \left(R_p(\Im_1)+R_p(\Im_2)\right)\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.\end{aligned}$$

D'où

$$R_p(\Im_1+\Im_2) \leq R_p(\Im_1)+R_p(\Im_2).$$

De la même manière on peut facilement verifier que

$$R_p(\lambda\Im) = |\lambda|\, R_p(\Im),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

où $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ est une famille R-bornée.

3- La composition des familles R-bornées est une famille R-bornée, de plus on a pour $\Im_1 \subset \mathfrak{B}(Z;Y)$, et $\Im_2 \subset \mathfrak{B}(X;Z)$ l'inégalité suivante

$$R_p(\Im_1\Im_2) \leq R_p(\Im_1)\, R_p(\Im_2).$$

ou Z est un espace normé.

4- Chaque ensemble contenant un seul opérateur linéaire borné $T \in \mathfrak{B}(X;Y)$ est R-bornée et de plus on a :

$$R_p(\{T\}) = |T|_{\mathfrak{B}(X;Y)}.$$

5- Chaque sous-famille d'une famille R-bornée est R-bornée.

6- Soient $\Im, S \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ deux familles R-bornées. Si $0 \in \Im \cap S$, alors $\Im \cup S$ est une famille R-bornée.

7- Toute famille finie d'opérateurs liéaires bornés est R-bornée.

Lemme 14 *Soient X, Y deux espaces normés. Alors pour chaque famille R-bornée $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ on a*

$$R_p(\Im \cup \{0\}) = R_p(\Im).$$

Corollaire 7 *Soient X et Y deux espaces normés, et $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ on a :*

1-Si $\Im$ est R-bornée, alors elle est uniformément bornée, avec

$$\sup_{T\in\Im} |T|_{\mathfrak{B}(X;Y)} \leq \inf_{P\in[1,\infty)} R_p(\Im)$$

2-La réciproque de (1) est vraie si X et Y sont des espaces munis d'un produit scalaire, et dans ce cas on a

$$R_2(\Im) = \sup_{T\in\Im} |T|_{\mathfrak{B}(X;Y)}.$$

Exemple 6 *Si $X = L^p(\Gamma_1; H_1)$, $Y = L^q(\Gamma_2; H_2)$, où Γ_1, Γ_2 sont des espaces mesurées associes aux mesures σ-finis μ_1, μ_2 respectivement, et H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert. Alors $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ est R-bornée si et seulement si*

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{n} |T_k f_k(.)|_{H_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|_{L^q(\Gamma_2)} \leq M \left| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k(.)|_{H_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|_{L^p(\Gamma_1)}$$

pour un certain M fini, et pour tous $n \in \mathbb{Z}_+$ et $f_k \in X$, $k = 1, ..., n$.

Maintenant on va donner des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'une famille soit R-bornée.

Lemme 15 *Pour montrer la R-bornitude d'une famille $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$, il suffit de montrer l'inégalité (1.5) pour toutes suites d'elements distincts $T_k \in \Im$. Les bonnes constantes sont les mêmes.*

Corollaire 8 *Pour demontrer la R-bornitude d'une famille dénombrable d'opérateurs $\Im = (T_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{B}(X;Y)$, il suffit de montrer l'inégalité (1.5) pour toutes suites de troncatures $\left(T^k\right)_{k=1}^{n}$.*

Lemme 16 *(Principe de contraction de Kahane) : Pour $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, $|\alpha_k| \leq |\beta_k|$, $x_k \in X$, ε_k des fonctions de Rademacher, $k = 1, ..., n$ on a*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k x_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \leq 2 \left| \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varepsilon_k x_k \right|_{L^p(\Omega;X)}.$$

Le coefficient 2 n'apparait pas dans cette inegalité si $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Definition 19 *Une suite* $(\Im_k)_{k=1}^{\infty}$ *de familles d'opérateurs* $\Im_k \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ *est dite relativement R-bornée par rapport à une suite d'espaces fermés* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ *de* X *si*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T_k x_k\right|_{L^p(\Omega;Y)} \leq c\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.$$

pour toute $n \in \mathbb{Z}_+$, ε_k *des fonctions de Rademacher,* $T_k \in \Im_k$*,et* $x_k \in X_k$*,et* $k = 1, ..., n$.

Remarque 9 *On remarque qu'une famille* $\Im$ *est R-bornée si et seulement si toutes les suites* $(\Im_k)_{k=1}^{\infty}$, $\Im_k \subset \Im$, *sont relativement R-bornées pour tous les sous espaces* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k \subset X$.

Corollaire 9 *Si* $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ *est R-bornée et* $\overline{B}(0,r) \subset \mathbb{C}$, *alors*

$$R_p\left(\overline{B}(0,r)\,\Im\right) \leq 2rR_p(\Im).$$

Le coefficient 2 *n'apparait pas dans cette inegalite dans le cas ou on prend* $[-r,r]$ *au lieu de* $\overline{B}(0,r)$.

Exemple 7 *Soit* $\Phi \subset L^{\infty}(\Gamma)$ *une famille uniformément bornée. Alors*

$$R_p\left(\{m_\phi : L^p(\Gamma;X) \to L^p(\Gamma;X);\ f \longmapsto \phi f\}_{\phi\in\Phi}\right) \leq 2\sup_{\phi\in\Phi}|\phi|_{L^{\infty}(\Gamma)}.$$

Lemme 17 *Si* $\Im \subset \mathfrak{B}(X;Y)$ *est R-bornée, et si* $(\Im_k)_{k=1}^{\infty}$*est relativement R-bornée par rapport à* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$*,alors pour les familles suivantes on a :*

1- $\overline{\Im}$ *est R-bornée et* $\left(\overline{\Im_k}\right)_{k=1}^{\infty}$*est relativement R-bornée par rapport à* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ *; ou par* $\overline{\Im}$ *et par* $\left(\overline{\Im_k}\right)_{k=1}^{\infty}$*on designe les fermetures fortes respectivement.*

2- pour les enveloppes convexes $conv\Im$ *et* $\left(\overline{conv\Im_k}\right)_{k=1}^{\infty}$, *on a :* $conv\Im$ *est R-bornée et* $\left(\overline{conv\Im_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ *est relativement R-bornée par rapport à* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$.

3-l'ensemble

$$abco(\Im) = \left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j T_j : n \in \mathbb{Z}_+; \lambda_j \in \mathbb{C}; T_j \in \Im; j = 1, ..., n;\ \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j| = 1\right\}$$

est R-borné, de meme que l'ensemble $(abco(\Im_k))_{k=1}^{\infty}$ *est relativement R-bornée par rapport à* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$*.On a le meme resultat dans le cas réel.*

Chapitre 2

Espace UMD

Ce chapitre est consacré à une étude détaillée des espaces UMD. On donne les différentes définitions équivalentes de ces espaces ainsi que leurs principales propriétés. Pour le plus de détails on peut consulter également [13].

Soient X un espace de Banach, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de pribabilité.

Definition 20 *: On dit que l'espace de Banach X admet la propriété des martingales différences inconditionnelles dans L^p , $p \in (1, \infty)$ ou bien $UMD - p$, si l'inégalité*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta f_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \leq M_p \left| \sum_{k=1}^{n} \delta f_k \right|_{L^p(\Omega;X)} = |f_n|_{L^p(\Omega;X)} \tag{2.1}$$

est satisfaite pour un certain M_p, par chaque martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega; X)^{\mathbb{Z}_+}$, et chaque $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

Remarque 10 *: On remarque que*

1- si on remplace dans l'inégalité (2.1) "δf_k" par "$\varepsilon_k \delta f_k$"on obtient l'inégalité dans l'autre sens.

2- La condition (2.1) est équivalente à la condition

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \leq M_p \left| \widetilde{g} \right|_{L^p(\Omega;X)}, \text{ pour } g_k = E\left(\widetilde{g} \mid \mathcal{F}_k\right). \tag{2.2}$$

Démonstration. En effet, (2.1) implique 2.2. comme (2.1) est satisfaite pour chaque martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega; X)^{\mathbb{Z}_+}$, et or $g = (g_k)_{k=1}^{\infty} = (E(\widetilde{g} \mid \mathcal{F}_k))_{k=1}^{\infty}$ est une martingale alors (2.1) est satisfaite pour $g = (g_k)_{k=1}^{\infty}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} &\leq M_p \left| \sum_{k=1}^{n} \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &= M_p \left| g_n \right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &= M_p E\left(\widetilde{g} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &\leq M_p \left| \widetilde{g} \right|_{L^p(\Omega;X)}, \end{aligned}$$

où la derniere inégalité resulte d'aprés la propriete de contractivité de l'éspérence conditionnelle.
Montrons maintenant que (2.2) implique (2.1). Dans ce but prenons $\widetilde{g} = f_n$, et on le subtituant dans (2.2), on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \left(E\left(f_n \mid \mathcal{F}_k\right) - E\left(f_n \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right)\right|_{L^p(\Omega;X)} \leq M_p \left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)} \tag{2.3}$$

or $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$, est une martingale, alors

$$f_k = E\left(f_n \mid \mathcal{F}_k\right),$$

pour chaque $k \leq n$. Ainsi l'inégalitée(2.1) est démontrée. ■

Le plus petite constante M_p dans (2.1) pour un p donné, et un espace de Banach X donné est notée par $M_p\left(X\right)$. Si X ne possède pas la propriétée $UMD - p$, alors $M_p\left(X\right) = \infty$. $M_p\left(X\right)$ est indépendante de n, c'est-à-dire la propriété $UMD - p$ est vraie si l'inégalité (2.1) est satisfaite pour tout n. La plus petite constante pour que (2.1) soit vraie pour un n fixé est notée par $M_p^n\left(X\right)$, alors il est evident que $M_p^n\left(X\right) \uparrow M_p\left(X\right)$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Lemme 18 *Les constantes $M_p^n\left(X\right)$ sont finies, de plus on a :*

$$M_p^n\left(X\right) \leq 2n.$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \left(f_k - f_{k-1}\right)\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|f_{k-1}\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|E\left(f_n \mid \mathcal{F}_k\right)\right|_{L^p(\Omega;X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|E\left(f_n \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&= 2n\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)},
\end{aligned}$$

d'où

$$M_p^n\left(X\right) \leq 2n.$$

■

Remarque 11 *Si X possède la propriétée UMD, et comme les fonctions de Rademacher sont des elements de $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$, alors d'aprés le lemme 13 il résulte que la propriété UMD est equivalente à la R-bornitude de toutes les martingales différences de l'espace X.*

Exemple 8 *Chaque espace de Hilbert admet la propriété $UMD - p$, pour $p = 2$.*

Démonstration. En effet, soit H un espace de Hilbert, alors d'aprés le corollaire 4, toutes les martingales différences sont orthogonales, donc d'aprés le théorème de phythagore on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta f_k \right|_{L^2(\Omega;H)} &= \sum_{k=1}^{n} |\delta f_k|_H^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n} \delta f_k \right|_{L^2(\Omega;H)}, \end{aligned}$$

d'où H possède la propriétée $UMD - 2$, de plus on a :

$$M_2(X) = 1.$$

■

2.1 Transformation martingale

Definition 21 *Soit $f = (f_k)_{k=1}^\infty \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^\infty$. Une suite $v = (v_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^\infty(\Omega))$, est dite $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^\infty$-prédictable si chaque v_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable (et v_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable). Pour de tels f et v, on définit la transformation martingale $(f * v)_{k=1}^\infty \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ par :*

$$(f * v)_k = \sum_{j=1}^{k} v_j \delta f_j.$$

Remarque 12 *: La transformation martingale $f * v = (f * v)_{k=1}^\infty \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ définit aussi une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^\infty$, en effet*

$$\begin{aligned} E\left(\delta(f * v)_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) &= E\left(\left(\sum_{j=1}^{k} v_j \delta f_j - \sum_{j=1}^{k-1} v_j \delta f_j\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ &= E\left(v_k \delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ &= v_k E\left(\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il est aussi facile d'observer que $v *$. prendre L^p-martingale à une L^p-martingale.

Par analogie avec La propriété $UMD-p$, si l'opérateur ou bien la transformation martingale est uniformément bornée, c'est-à-dire si on a :

$$\left|(v*f)_n\right|_{L^p(\Omega,X)} \leq \widetilde{M}\,|v|_{l^\infty(\mathbb{Z}_+;L^p(\Omega))}\,|f_n|_{L^p(\Omega,X)}$$

Pour tout $v \in \ell^\infty\left(\mathbb{Z}_+, L^\infty(\Omega)\right)$, cette condition est appelée la propriétée $MT-p$, ou bien la transformation martingale d'ordre p.

Remarque 13 *: La propriétée $UMD-p$ est une cas spécial de la propriétée $MT-p$, avec $v=\varepsilon=(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}_+}$.*

Les conditions dans les definitions de base $UMD-p$, et $MT-p$ sont satisfaites pour des martingales quelconques sur des espaces de probabilités arbitraires.

Maintenant on va donner une condition suffisante sur l'espace de probabilité c'est-à-dire on va donner des conditions faibles que celles des conditions originales, plus précésement, au lieu de vérifier la condition $UMD-p$ où $MT-p$ pour des espaces de probabilités arbitraires, il suffit de vérifier ces conditions pour des espaces de probabilités trés connus et trés appliquables, et pour cela on va commençer par introduire la notion de l'espace de probabilités "nicely divisible".

Definition 22 *: On dit qu'un espace de probabilité est "nicely divisible" si chaque ensemble A de probabilité strictement positive $\mathbb{P}(A)$ admet un sous-ensemble de probabilité $cP(A)$ pour chaque $c \in (0,1)$.*

Lemme 19 *: Si un espace de Banach X satisfait la proprieté $UMD-p$ ou $MT-p$ pour toute martingale définie sur un espace de probabilité "nicely divisible", alors il satisfait la même condition pour toute martingale sur un espace de probabilités, avec le même constante.*

Démonstration. Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité arbitraire, et soit $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^\infty$ une suite de sous-σ-algèbres croissantes de $\mathcal{F}$. Considérons l'espace produit $(\Omega\times[0,1], \mathcal{F}\times\Re, \mathbb{P}\times m) \subset \mathcal{F}\times\Re$,où m est la mesure de Lebesgue, et $\Re$ est la tribu des boréliens de $[0,1]$, et posons aussi la σ-algèbre

$$\mathfrak{B}_k = \{F\times[0,1],\ F\in\mathcal{F}_k\} \subset \mathcal{F}\times\Re.$$

Le but de cette construction est que l'espace produit soit "nicely divisible" si $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est "nicely divisible" ou non.

En effet, pour $A\in\mathcal{F}\times\Re$, on a d'aprés Radon-Nikodyme

$$\mathbb{P}\times m(A) = \int_0^1 \mathbb{P}\left(\{\omega, (\omega,t)\in A\}\right) dm(t).$$

Posons

$$g(x) = \int_0^x \mathbb{P}(\omega, (\omega, t) \in A)\, dm(t).$$

g est une fonction continue croissante avec $g(0) = 0, g(1) = \mathbb{P} \times m(A)$. Ainsi g atteind chaque constante positive $r < \mathbb{P} \times m(A)$, pour un certain $x \in (0,1)$.
Maintenant soit $A_x = A \cap \{(\omega, t), t < x\} \in \mathcal{F} \times \Re$, et $m(A_x) = g(x) = r$, pour un certain r positif, tel que $r < \mathbb{P} \times m(A)$. alors on a $\mathbb{P} \times m(A_x) < \mathbb{P} \times m(A)$, comme $A_x \subset A \in \mathcal{F} \times \Re$, et A est arbtraire, donc $(\Omega \times [0,1], \mathcal{F} \times \Re, \mathbb{P} \times m)$ est "nicely divisible".
Maintenant, si $f = (f_k)_{k=1}^n$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$, on définit $g = (g_k)_{k=1}^n$ par :

$$g_k(\omega, t) = f_k(\omega), \omega \in \Omega, t \in [0,1].$$

On observe que $(g_k)_{k=1}^n$ définit aussi une martingale adaptée à $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$.
En effet, soit $G = F \times [0,1] \in \mathfrak{B}_k, (F \in \mathcal{F})$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{F \times [0,1]} g_k(\omega, t)\, d(\mathbb{P} \times m)(\omega, t) &= \int_F \int_0^1 g_k(\omega, t)\, dm(t)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F \int_0^1 f_k(\omega)\, dm(t)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F f_k(\omega)\, m([0,1])\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F f_k(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F E(f_n \mid \mathcal{F}_k)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F f_n(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F \int_0^1 f_n(\omega)\, dm(t)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F \int_0^1 g_n(\omega, t)\, dm(t)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_F \int_0^1 E(g_n \mid \mathfrak{B}_k)\, dm(t)\, d\mathbb{P}(\omega),
\end{aligned}$$

d'où

$$g_k = E(g_n \mid \mathfrak{B}_k).$$

De la même manière, si $v=(v_k)_{k=1}^n\in L^\infty(\Omega)^n$ est $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$-prédictable, on définit $w=(w_k)_{k=1}^n$ par :

$$w_k(\omega,t)=v_k(\omega).$$

alors il est clair que $w=(w_k)_{k=1}^n$ est $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$-prédictable.
Si on note par $\widetilde{m_p^n}(X)$ le constante définie comme $\widetilde{M_p^n}(X)$, mais pour un espace de probabilité "nicely divisible". Alors

$$\int_\Omega\left|\sum_{k=1}^n v_k\delta f_k\right|_X^p d\mathbb{P}=\int_\Omega\int_{[1,0]}\left|\sum_{k=1}^n w_k\delta g_k\right|_X^p d(\mathbb{P}\times m),$$

Or la propriétée $MT-p$ est vraie pour l'espace "nicely divisible", donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left|\sum_{k=1}^n v_k\delta f_k\right|_X^p d\mathbb{P} &\le \left(\widetilde{m_p^n}(X)\right)^p\int_{\Omega\times[1,0]}\left|\sum_{k=1}^n\delta g_k\right|_X^p d(\mathbb{P}\times m)\\ &= \left(\widetilde{m_p^n}(X)\right)^p\int_\Omega\left|\sum_{k=1}^n\delta f_k\right|_X^p d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

D'où la propriétée $MT-p$ est vraie pour Ω quelconque, de plus $\widetilde{M_p^n}(X)\le\widetilde{m_p^n}(X)$. Or on a toujours $\widetilde{m_p^n}(X)\le\widetilde{M_p^n}(X)$ .D'où le résultat.

Pour la proprieté $UMD-p$, on observe que cette proprieté est un cas spécial de $MT-p$ en prenant $v=w=\varepsilon\in\{-1,1\}^n$. ■

Le but du resultat suivant est d'étudier la relation entre la proprieté $UMD-p$ ou $MT-p$ et la suite de sous-σ-algèbre qui est adaptée à la martingale, pour cela on rappelle qu'une algèbre finie est une σ-algèbre.

Lemme 20 *: la proprieté $UMD-p$ ou $MT-p$ est satisfaite si elle vraie pour toute martingale adaptée à une sous algèbre finie.*

Démonstration. Soient $f=(f_k)_{k=1}^n\in L^p(\Omega;X)$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$. Pour chaque k, nous choisissons une fonction simple $s_k\in L^p(\mathcal{F}_k;X)$, telque

$$|s_k-\delta f_k|_{L^p(\Omega;X)}<\varepsilon$$

cela est possible d'aprés la densité de l'espace de fonctions simples dans $L^p(\mathcal{F}_k;X)$, et soit la suite de fonctions simples $t_k\in L^\infty(\mathcal{F}_k)$, tel que $|t_k-\delta v_k|_{L^\infty(\Omega)}<\varepsilon$, et $|t_k|_{L^\infty(\Omega)}<|v_k|_{L^\infty(\Omega)}$, avec $(v_k)_{k=1}^\infty$ une suite prédictable donnée (cela est possible car on peut prendre $t_k=\sum_i x_i 1_{v_k^{-1}(x_i,x_i+1)}$, où x_i se situe entre $|t_k|_{L^\infty(\Omega)}$ et $|v_k|_{L^\infty(\Omega)}$), et soit $\mathfrak{B}_k$ l'algèbre engendrée par $s_1,...,s_k,t_1,...,t_{k+1}$, (ie) ,par les E_i qui sont dans la représentation canonique $\sum_{i=1}^m x_i 1_{E_i}$ des s_k et t_k. Alors il est clair que $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$ est une suite croissante d'algèbres finies,

et que $(t_k)_{k=1}^n$ est $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$-prédictable(car t_k est $\mathfrak{B}_k$-mesurable).
D'autre part on a s_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable, $\mathfrak{B}_k \subset \mathcal{F}_k$, donc

$$\begin{aligned} E(\delta f_{k+1} \mid \mathfrak{B}_k) &= E(E(\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \mid \mathfrak{B}_k) \\ &= E((E(f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) - E(f_k \mid \mathcal{F}_k)) \mid \mathfrak{B}_k) \\ &= E(f_k - f_k \mid \mathfrak{B}_k) = 0. \end{aligned}$$

Maintenant on définit g par :

$$\delta g_k = E(\delta f_k \mid \mathfrak{B}_k).$$

Comme

$$E(\delta g_k \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = E(E(\delta f_k \mid \mathfrak{B}_k) \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = E(\delta f_k \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = 0.$$

D'où g est une martingale adaptée à $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$.
Pour achever la démonstration, il suffit de demontrer la proprieté $MT-p$ pour f, pour cela on a :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^n v_k \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left|\sum_{k=1}^n (v_k\delta f_k + t_k\delta g_k - t_k\delta g_k + t_k s_k - t_k s_k + t_k\delta f_k - t_k\delta f_k)\right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &= \left|\sum_{k=1}^n (t_k\delta g_k + t_k(\delta f_k - s_k) + t_k(s_k - \delta g_k) + (v_k - t_k)\delta f_k)\right|_{L^p(\Omega;X)} \\ \leq \left|\sum_{k=1}^n t_k\delta g_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &+ \sum_{k=1}^n \Big(|t_k(\delta f_k - s_k)|_{L^p(\Omega;X)} + |t_k(s_k - \delta g_k)|_{L^p(\Omega;X)} + |(v_k - t_k)\delta f_k|_{L^p(\Omega;X)}\Big). \end{aligned}$$

Or d'aprés le choix de s_k et t_k on a :

$$|(\delta f_k - s_k)|_{L^p(\Omega;X)} < \varepsilon$$

et

$$|(v_k - t_k)|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} |s_k - \delta g_k|_{L^p(\Omega;X)} &= |E(s_k \mid B_k) - E(\delta f_k \mid B_k)|_{L^p(\Omega;X)} \\ &= |E(s_k - \delta f_k \mid B_k)|_{L^p(\Omega;X)} \\ &\leq |s_k - \delta f_k|_{L^p(\Omega;X)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Si on note par $\widetilde{m_p^n}$ la constante qui realise la condition $MT-p$ pour les martingales adaptées à des algèbres finies, alors :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} v_k \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &\leq \widetilde{m_p^n}\left|\sum_{k=1}^{n} \delta g_k\right|_{L^p(\Omega;X)} + \varepsilon n + \varepsilon n + \varepsilon \left|\sum_{k=1}^{n} \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &\leq \widetilde{m_p^n}\left|\sum_{k=1}^{n} \delta g_k + s_k - s_k + \delta f_k - \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} + \varepsilon\left(2n + |f_n|_{L^p(\Omega;X)}\right) \\ \leq \widetilde{m_p^n}\left|\sum_{k=1}^{n}\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &+ \sum_{k=1}^{n}\left(|\delta g_k - s_k|_{L^p(\Omega;X)} + |s_k - \delta f_k|_{L^p(\Omega;X)}\right) + \varepsilon\left(2n + |f_n|_{L^p(\Omega;X)}\right) \\ &\leq \widetilde{m_p^n}\left|\sum_{k=1}^{n}\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} + \varepsilon\left(2n + \widetilde{m_p^n}2n + |f_n|_{L^p(\Omega;X)}\right).\end{aligned}$$

Or ε est tend vers zéro, ainsi on obtient :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \leq \widetilde{m_p^n}\left|\sum_{k=1}^{n}\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.$$

D'où le resultat. ■

Pour continuer l'étude on a besoin de quelques notions concernant les algèbres finies.

Definition 23 *: Une base d'une algèbre finie $\mathcal{F} \subset \Omega$ sur Ω est une partition de Ω en des ensembles disjoints $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, ..., m$, tel que chaque $F \in \mathcal{F}$ est de la forme $\underset{i\in I}{\cup}\mathcal{F}_i$, pour certain $I \subset \{1, ..., n\}$, et on la note par $bs\mathcal{F}$. Les éléments de la base $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$ sont dits les atomes de $\mathcal{F}$*

Il est facile de voir que la base d'une algère finie est unique.

Definition 24 *: Une suite croissante d'algèbres finies $(\eta_k)_{k=1}^{n}$est dite système de Haar si η_k admet une base constitué de $(k+1)$ ensembles de probabilité strictement positive.*

Exemple 9 *: Dans un espace de probabilité "nicely divisible" on peut construire un système de Haar comme suit : $\eta_0 = \{\Phi, \Omega\}$, avec la base $\{\Omega\}$. Supposons que la base de η_k est déja construite, alors la base de η_{k+1} est obtenue en prenant un certain $H \in bs\eta_k$ qui est dévisée en deux parties H_1 et H_2 qui ont des probabilités strictement positives, donc*

$$bs\eta_{k+1} = \{H_1, H_2\} \cup bs\eta_k \setminus \{H\}$$

Lemme 21 *: Dans la définition des espaces $UMD-p$ ou $MT-p$ il suffit de considérer chaque martingale adaptée à un système Haar.*

Démonstration. En effet D'aprés les resultats précédents il suffit de demontrer le lemme pour les martingales adaptées à des algèbres finies $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^{n}$.

Pour une suite $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$ d'algèbres finies, on peut construire un système de Haar auxiliére $(\eta_k)_{k=1}^n$, tel que,

$$\eta_0 \subset ... \subset \eta_{n_i} = \mathcal{F}_i \subset ...\eta_r \subsetneq \mathcal{F}_{i+1} \tag{2.4}$$

En effet, supposons que (2.4) est vraie pour un certain i, et on montre qu'elle est vraie pour $i = n$.Pour cela posons $\eta_0 = \mathcal{F}_0 = \{\Phi, \Omega\} \subset \mathcal{F}_{1,}$. Et on commence par construire η_{r+1} et montrer que (2.4) est satisfaite pour $r + 1$ au lieu de r, pour cela , choisissons $F \in bs\mathcal{F}_{i+1} \setminus bs\eta_r$ (Cela est possible car $\eta_r \subsetneq \mathcal{F}_{i+1}$) ,Or chaque elément de $\mathcal{F}_{i+1} \supset \eta_r$, et en particulier chaque $H \in bs\eta_r$ est union de certains atomes de $\mathcal{F}_{i+1}$. D'autre part $bs\eta_r$ recouvre Ω, alors $F \subsetneq H$, pour un certain $H \in bs\eta_r$ (Par exemple $H = \Omega$) . Maintenant on définit $bs\eta_{r+1}$ par $bs\eta_{r+1} = bs\eta_r \cup \{F, H \setminus F\} \setminus \{H\}$, tel que $H \setminus F \neq \Phi$, est une union de certains atomes de $\mathcal{F}_{i+1}$ de probabilité positive, alors $(\eta_k)_{k=1}^{r+1}$ est un système de Haar, de plus (2.4) est satisfaite soit pour $r + 1$ au lieu de r, soit $\eta_{r+1} = \mathcal{F}_{i+1}$, de la même manière, par reccurence on obtient le système de Haar pour $i + 1 = n$.
Maintenant revenons à la demonstration du lemme.
Soit la suite $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$ d'algèbres finies, d'aprés la construction précédente on a un système de Haar auxiliére $(\eta_k)_{k=1}^{N_n}$, tel que

$$\eta_0 \subset \eta_1 \subset ... \subset \eta_{n_1} = \mathcal{F}_1 \subset \eta_{N_1+1} \subset ... \subset \eta_{N_n} = \mathcal{F}_n.$$

Si $f = (f_k)_{k=1}^n \in L^p(\Omega; X)$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$, on définit une nouvelle martingale h par :

$$h_r = E(f_n \mid \eta_r).$$

Alors on a :

$$h_{N_k} = f_k,$$

et

$$\delta f_k = f_k - f_{k-1} = \sum_{N_{k-1} < r \leq N_k} \delta h_r.$$

Aussi, si $v = (v_k)_{k=1}^n \in L^\infty(\mathcal{F}_{k-1})^n$ est $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$-prédictable, on définit $w = (w_k)_{k=1}^n$ par : $w_{N_{k-1}+1} = ... = w_{N_k} = v_k \in L^\infty(\mathcal{F}_{k-1}) = L^\infty\left(\eta_{N_{k-1}}\right)$, alors w est $(\eta_k)_{k=1}^{N_n}$-prédictable.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} v_k \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left|\sum_{k=1}^{N_n} w_k \delta h_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \widetilde{m_p}(X) \left|\sum_{k=1}^{N_n} \delta h_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&= \widetilde{m_p}(X) \left|\sum_{k=1}^{N_n} \delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.
\end{aligned}$$

D'où le resultat. ■

Les resultats obtenus précedement ont établits les relations entre la proprieté $UMD-p$ ou $MT-p$, l'espace de probabilité et aussi entre la suite des sous-σ-algèbres adaptées aux martingales. Maintenant on s'intéresse à la relation entre la proprieté $UMD-p$ et $MT-p$, plus précisement on va démontrer l'equivalence entre les proprietées $UMD-p$ et $MT-p$.

Proposition 1 *: Les proprietés $UMD-p$ et $MT-p$ sont equivalentes avec le même constante.*

Démonstration. En effet d'aprés le lemme précédent il suffit de demontrer le lemme pour les martingales adaptées par des systèmes de Haar, et comme la proprieté $UMD-p$ est un cas spécial de la proprieté $MT-p$, donc il suffit de demontrer que la proprietée $UMD-p$ implique la proprietée $MT-p$.
Soit $f=(f_k)_{k=1}^n \in L^p(\Omega;X)$ une martingale adaptée à un système de Haar $(\eta_k)_{k=1}^n$, et soit $v=(v_k)_{k=1}^n$ une suite prédictable , alors $v_k\delta f_k=\lambda_k\delta f_k$, pour un certain $\lambda_k\in\mathbb{R}$, tel que $|\lambda_k|\leq |v_k|_{L^\infty(\Omega)}\leq 1$, alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^n v_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left|\sum_{k=1}^n \lambda_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &\leq \max_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\left|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\ &\leq M_p(X)\left|\sum_{k=1}^n v_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.\end{aligned}$$

D'où les conditions $UMD-p$ et $MT-p$ sont equivalentes. ■

2.2 La propriétée $UMD-p$ ou $MT-p$ pour les martingales de Paley-Walsh

Dans ce paragraphe on se restreind à l'étude d'une classe spéciale de martingales, dans ce but introduisons certaines notions utiles par la suite.

Definition 25 *: Soit $\mathfrak{D}_k, k\in\mathbb{Z}_+$ des algèbres finies engendrées par les partitions de $[0,1]$ à 2^k intervalles de longueures égales. La suite $(\mathfrak{D}_k)_{k=1}^\infty$est dite système de Paley-Walsh, et la martingale $f=(f_k)_{k=1}^n\in L^1(\Omega;X)$ adaptée à $(\mathfrak{D}_k)_{k=1}^\infty$ est dite la martingale de Paley-Walsh.*

Remarque 14 *: D'aprés la définition précédente $\mathfrak{D}_k, k\in\mathbb{Z}_+$, sont engendrées par :*

$$\left\{\left[0,2^{-k}\right),\left[2^{-k},2\cdot 2^{-k}\right),...,\left[1-2^{-k},1\right]\right\}.$$

Definition 26 *: La suite $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ d'algèbres finies est dite système de Haar dyadic si le rapport $\frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(H)}$ de probabilité de l'element $H_1 \in \eta_{r+1}$a la probabilité de $H \in \eta_r$, $H \supset H_1$, est toujours de la forme $r2^{-m}, m \in \mathbb{Z}_+, r \in \{1, ..., 2^m - 1\}$.*

Lemme 22 *: L'inégalité (2.1) est vraie pour toute martingale f adaptée à un système de Haar si elle est vraie pour toute martingale f adaptée à un système Haar dyadic, avec les mêmes constantes $M_p(X)$.*

Démonstration. En effet, pour un système de Haar $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$, soit $bs\eta_k = (H_j)_{j=0}^{n}$. Dans un espace de probabilité "nicely divisible" on peut construire une partition $(G_j)_{j=0}^{n}$ de Ω tel que la probabilité de G_j soit une intégrale multiple de 2^{-m}, pour certain $m \in \mathbb{Z}_+$, et $\mathbb{P}(H_j \Delta G_j) < \varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$ donné. Alors on définit $\mathfrak{B}_k, k = \overline{1, n}$, en posant

$$\mathfrak{B}_k = \left\{ \underset{i \in I}{\cup} G_i, I \subset \{0, ..., n\} \setminus \underset{i \in I}{\cup} H_i \in \eta_k \right\}.$$

D'autre part soit $h = (h_k)_{k=1}^{n}$ la martingale originale adaptée au système de Haar $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ $(h_k = E(h_n \mid \eta_k))$, et soit $g = (g_k)_{k=1}^{n}$ définie par :

$$g_k = E(h_n \mid \mathfrak{B}_k)$$

une martingale adaptée au système de Haar dyadic $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^{n}$. Donc

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta h_k + \varepsilon_k \delta g_k - \varepsilon_k \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} + \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta h_k - \varepsilon_k \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq m_p^n(x) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta g_k \right|_{L^p(\Omega;X)} + 2n \max_k |h_k - g_k|_{L^p(\Omega;X)} \\
&= m_p^n(x) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta g_k - \delta h_k + \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} + 2n \max_k |h_k - g_k|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq m_p^n(x) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} + 2n \left(m_p^n(x) + 1 \right) \max_k |h_k - g_k|_{L^p(\Omega;X)}.
\end{aligned}$$

Pour compléter la demonstration, il suffit de demontrer que la difference de h_k et g_k dans L^p est controlée par le paramètre ε qui est introduit précédement. Pour cela posons $h_n = f$, or l'éspérence conditionnelle par rapport à une algèbre finie peut être formulée comme suit :

$$\begin{aligned}
h_k &= E(f \mid \eta_k) = \sum_{j=0}^{k} f_{H_j^k} 1_{h_j^k} \\
g_k &= E(f \mid \mathfrak{B}_k) = \sum_{j=0}^{k} f_{G_j^k} 1_{G_j^k},
\end{aligned}$$

ou $bs\eta_k = \left(H_j^k\right)_{j=0}^k, bs\mathfrak{B}_k = \left(G_j^k\right)_{j=0}^k$, et $f_A = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_A f d\mathbb{P}$, où A est un ensemble de probabilité strictement positive.

Maintenant on commençe la demonstration par estimer $f_A - f_B$, si A et B vérifient $\mathbb{P}(A\Delta B) < \varepsilon$, donc

$$\begin{aligned}
f_A - f_B &= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_A f d\mathbb{P} - \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\int\limits_B f d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_A f d\mathbb{P} - \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_B f d\mathbb{P} + \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int\limits_A f d\mathbb{P} - \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\int\limits_B f d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\left(\int\limits_A f d\mathbb{P} - \int\limits_B f d\mathbb{P}\right) + \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)} - \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\right)\int\limits_B f d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\left(\int\limits_A f d\mathbb{P} - \int\limits_B f d\mathbb{P}\right) + \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)}\int\limits_B f d\mathbb{P},
\end{aligned}$$

Pour le premier terme on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_A f d\mathbb{P} - \int\limits_B f d\mathbb{P}\right|_X &\leq \int\limits_{A\Delta B} f d\mathbb{P} \\
&\leq |f|_{L^p(\Omega;X)}\,\mathbb{P}(A\Delta B)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq |f|_{L^p(\Omega;X)}\,\varepsilon^{\frac{1}{q}}, q > 1.
\end{aligned}$$

Or

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A\Delta B).$$

Alors

$$\begin{aligned}
|f_A - f_B|_X &\leq (\mathbb{P}(A))^{-1}|f|_{L^p(\Omega;X)}\,\varepsilon^{\frac{1}{q}} + (\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))^{-1}|f|_{L^p(\Omega;X)}\,\mathbb{P}(\Omega)^{\frac{1}{q}}\,\varepsilon \\
&\leq (\mathbb{P}(A))^{-1}|f|_{L^p(\Omega;X)}\,\varepsilon^{\frac{1}{q}} + (\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))^{-1}|f|_{L^p(\Omega;X)}\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}(A))^{-1} &= (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A))^{-1} \\
&= (\mathbb{P}(A) - (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)))^{-1} \\
&\leq (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\Delta B))^{-1} \\
&\leq (\mathbb{P}(A) - \varepsilon)^{-1}.
\end{aligned}$$

Si on fixe f et A, alors lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient que $|f_A - f_B|_X \longrightarrow 0$.D'autre part on a :

$$|f_A 1_A - f_B 1_B|_X \leq |f_A - f_B|_X\, 1_{A\cap B} + |f_A|_X \vee |f_B|_X\, 1_{A\cap B}.$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|f_A 1_A - f_B 1_B|_{L^p(\Omega;X)} &= \left(\int_\Omega |f_A 1_A - f_B 1_B|_X^p \, d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon \mathbb{P}(A \cap B)^{\frac{1}{q}} + |f|_{L^p(\Omega;X)} \left(\mathbb{P}(A)^{-1} \vee \mathbb{P}(B)^{-1} \right) \mathbb{P}(A \Delta B) \\
&\leq \varepsilon \mathbb{P}(\Omega)^{\frac{1}{q}} + |f|_{L^p(\Omega;X)} \left(\mathbb{P}(A)^{-1} \vee (\mathbb{P}(A) - \varepsilon)^{-1} \right) \varepsilon \leq \varepsilon + |f|_{L^p(\Omega;X)} \mathbb{P}(A)^{-1} \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
|f_A 1_A - f_B 1_B|_{L^p(\Omega;X)} \longrightarrow 0, \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.
$$

Et finalement comme

$$
\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \leq m_p^n(x) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} + 2n \left(m_p^n(x) + 1 \right) \max_k |h_k - g_k|_{L^p(\Omega;X)}.
$$

D'ici résulte que

$$
\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)} \leq m_p^n(x) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta h_k \right|_{L^p(\Omega;X)}.
$$

D'où le résultat. ■

Pour poursuivre l'étude, et pour aussi faciliter la présentation du lemme suivant, on a besoin de certaines notions concernant les fonctions mesurables f définies sur une algèbre finie $\mathcal{F}$ qui est definie sur un ensemble Ω_1, et comme f atteind une valeur constante sur chaque $F \in bs\mathcal{F}$, alors elle peut etre identifiée à une fonction à domaine $bs\mathcal{F}$. Nous allons considérer une probabilitée préservant l'isomorphisme Boolién $b : \mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{B}$, où $\mathfrak{B}$ est une autre algèbre finie sur un autre espace de probabilité $(\Omega_2, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_2)$ .Dans le cas où on a un tel b, et une $\mathcal{F}$-mesurable $f : \Omega_1 \longrightarrow X$, identifiée avec une fonction de domaine $bs\mathcal{F}$ dans X, alors on peut définir g dans $bs\mathfrak{B}$, par : $g = f \circ b^{-1}$, de plus cette fonction peut être identifiée avec une fonction $\mathfrak{B}$-mesurable sur Ω_2.

Il est clair que g définie précédement possède la même distribution que f. La distribution jointe d'ensembles de variables aléatoires est invariante par rapport à l'application $f \longrightarrow f \circ b^{-1}$. Alors $g = f \circ b^{-1}$, où $f : \Omega_1 \longrightarrow X$, et $b : \mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{B}$ peut être définie d'aprés l'identification précédente comme suit :
$g(\omega_2) = f(\omega_1)$, tels que, $\omega_2 \in b(F)$,et $F \in bs\mathcal{F}$.

Lemme 23 *: Si $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ est un système de Haar dyadic sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(\mathfrak{D}_k)_{k=1}^{\infty}$ est le système de Paley-Walsh. Alors il existe un système de Haar dyadic $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^{\infty}$ sur $([0,1], \mathbb{R}, m)$, tels que :*
1- Il existe une probabilité préservant l'isomorphisme Boolién $b : \eta_n \longrightarrow \mathfrak{B}_n$,
2- Ils existent des nombres $N_k, k = 1, ..., n$, tels que $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{D}_{N_k}$ et

$$
E(f \mid \eta_k) = E\left(f \circ b^{-1} \mid \mathfrak{B}_k\right) = E\left(f \circ b^{-1} \mid \mathfrak{D}_{N_k}\right),
$$

pour tout $f \in L^1(\eta_k; X)$.

Démonstration. D'aprés la construction déja faite précédement, plus précisement la construction d'un système de Haar d'un système d'algèbres finies (Lemme 21). On peut toujours poser $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{B}_0 = \{\Phi, [0,1]\}$. Supposons ainsi que $\mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_k$ sont construits tels que les conditions du lemme soient satisfaites, alors les atomes de $\mathfrak{B}_k$ sont unions d'intervalles dont les côtés sont des intégrales multipliées par 2^{-N_k}.
D'autre part si $bs\eta_{k+1}$ est obtenue d'aprés $bs\eta_k$ en divisant un élement $H \in bs\eta_k$ en H_1 et H_2, tel que $\frac{\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(H)} = r2^{-m}$. Alors on va construire $\mathfrak{B}_{k+1}$ comme suit :
Premièrement posons $N_{k+1} = N_k + m$.
Or $b(H) \in \mathfrak{B}_k$ est une union d'intervalles dont les extrémités sont $i2^{-N_k}$ et $(i+1)\,2^{-N_k}$, dont i est une intégrale. Pour chaque tel intervalle, soit G_1 l'ensemble de r premiers sous-intervalles de longueur $2^{-N_{k+1}}$, et soit G_2 l'ensemble de l'autre $2^m - r$ sous-intervalle de longueur $2^{-N_{k+1}}$. Alors posons

$$bs\mathfrak{B}_{k+1} = bs\mathfrak{B}_k \cup \{G_1, G_2\} \setminus \{b(H)\}$$

Où b est prolongée à une probabilité préservant l'isomorphisme Boolién de η_{k+1} à $\mathfrak{B}_{k+1}$ par :

$$b(H_i) = G_i, \quad i = 1, 2$$

De cette construction de b, résulte par réccurence que

$$b : \eta_n \longrightarrow \mathfrak{B}_n$$

est une probabilité préservant l'isomorphisme Boolién.
Maintenant nous allons démontrer la deuxième condition. On observe premièrement que d'aprés la construction de $\mathfrak{B}_k = b(\eta_k)$, et $f \circ b^{-1}$ que la première egalité est immédiate. Alors il reste la seconde egalité, pour cela notons par $g = f \circ b^{-1} \in L^1(\mathfrak{B}_k; X)$, et on commence la démonstration par montrer l'egalité suivante :

$$E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = E(g \mid \mathfrak{D}_{k-1}),$$

Pour $g \in L^1(\mathfrak{B}_k; X)$. En effet, comme $(\mathfrak{B}_k)_{k=1}^n$ est un système de Haar, alors g admet la decomposition suivante :

$$\begin{array}{rcl} g & = & g_0 + x_1 1_{G_1} + x_2 1_{G_2} \\ g_0 & \in & L^1(\mathfrak{B}_{k-1}; X) \\ G_1, G_2 & \in & bs\mathfrak{B}_k \setminus \mathfrak{B}_{k-1}, G_1 \cup G_2 \in bs\mathfrak{B}_{k-1} \\ g_0 & = & 0, \quad sur G_1 \cup G_2. \end{array}$$

Or

$$E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = \sum_{G_i \in bs\mathfrak{B}_{k-1}} 1_{G_i} \frac{1}{\mathbb{P}(G_i)} \int_{G_i} g d\mathbb{P}.$$

Et comme g_0 est $\mathfrak{B}_{k-1}$-mesurable, alors $E(g_0 \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = g_0$. Ainsi, on obtient

$$E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = g_0 + \frac{m(G_1)\,x_1 + m(G_2)\,x_2}{m(G_1 \cup G_2)} 1_{G_1 \cup G_2}.$$

D'autre part comme $\mathfrak{B}_{k-1} \subset \mathfrak{D}_{k-1}$,alors $E(g_0 \mid \mathfrak{D}_{k-1}) = g_0$. De plus, d'aprés la construction de $\mathfrak{B}_k$, il résulte que chaque intervalle $\Delta \in bs\mathfrak{D}_{k-1}$ est dans $G_1 \cup G_2$, alors

$$E\left(x_1 1_{G_1} + x_2 1_{G_2} \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right) = \frac{m(G_1)\,x_1 + m(G_2)\,x_2}{m(G_1 \cup G_2)}.$$

Donc

$$E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = E\left(g \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right).$$

Alors la deuxième propriété résulte par réccurence. Premièrement on observe que

$$E(g \mid \mathfrak{B}_n) = E(g \mid \mathfrak{D}_n),$$

Pour $g \in L^1(\mathfrak{B}_n; X) \subset L^1(\mathfrak{D}_n; X)$.
Maintenant supposons que la deuxième propriété est satisfaite pour un certain $k \leq n$, et on montre qu'elle est vraie pour tous les $k \leq n$, alors

$$\begin{aligned} E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) &= E(E(g \mid \mathfrak{B}_k) \mid \mathfrak{B}_{k-1}) \\ &= E\left(E(g \mid \mathfrak{B}_k) \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right) \\ &= E\left(E(g \mid \mathfrak{D}_{N_k}) \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right) \\ &= E\left(g \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right), \end{aligned}$$

où la deuxième egalité résulte de : $E(g \mid \mathfrak{B}_k) \in L^1(\mathfrak{B}_k; X)$, et $E(g \mid \mathfrak{B}_{k-1}) = E\left(g \mid \mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right)$.
La troisième egalité est déduite d'aprés l'hypothèse, enfin la dernière egalité résulte de l'inclusion $\mathfrak{D}_{N_{k-1}} \subset \mathfrak{D}_{N_k}$.
Ainsi la démonstration est terminée. ■

Remarque 15 *On remarque que cette derniére condition implique que b est une probabilité préservant l'homomorphisme Boolién de η_n dans $\mathfrak{D}_{N_n}$.*

Lemme 24 *: Un espace de Banach X satisfait la propriété $UMD - p$ si et seulement si il satisfait cette propriété pour toute Paley-Walsh martingale. Les bonnes constantes $M_p(X)$ sont les mêmes.*

Démonstration. En effet d'aprés le lemme 22, il suffit de démontrer la propriété $UMD - p$ pour les systèmes de Haar. Alors si $f = (f_k)_{k=1}^n \in L^p(\Omega; X)^{\ n}$ est l'une des martingales adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k=1}^n$, alors $f = (f_k)_{k=1}^n \in L^1(\Omega; X)^{\ n}$, ainsi d'aprés le lemme

23, on a :

$$\int_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(E\left(f_n\mid\mathcal{F}_k\right)-E\left(f_n\mid\mathcal{F}_{k-1}\right)\right)\right|_X^p d\mathbb{P}=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_{N_k}\right)-E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right)\right)\right|_X^p dm$$

$$\leq\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{N_n}\varepsilon_{N_j}\left(E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_j\right)-E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_j\right)\right)\right|_X^p dm$$

$$\leq m_p\left(X\right)\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{N_n}\left(E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_j\right)-E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_j\right)\right)\right|_X^p dm$$

$$=m_p\left(X\right)\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\left(E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_{N_k}\right)-E\left(f_n\circ b^{-1}\mid\mathfrak{D}_{N_{k-1}}\right)\right)\right|_X^p dm$$

$$=m_p\left(X\right)\int_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(E\left(f_n\mid\mathcal{F}_k\right)-E\left(f_n\mid\mathcal{F}_{k-1}\right)\right)\right|_X^p d\mathbb{P}.$$

Ainsi la propriété $UMD-p$ est satisfaite pour les martingales de Paley-Walsh, et de plus $M_p\left(X\right)\leq m_p\left(X\right)$. Comme on a toujours l'inégalité inverse, ainsi la démonstration est achevée. ■

Remarque 16 *: Un système de Paley-Walsh n'est pas un système de Haar.*

2.3 La décomposition de Gundy et la propriété faible-$UMD-p$

Pour démontrer la propriétée UMD pour des martingales dans L^p, $p>1$, on peut utiliser la notion de transformée martingale qui peut être donnée par la formule suivante :

$$\left|\left(\varepsilon * f\right)_n\right|_{L^p(\Omega;X)}\leq M_p\left(X\right)\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)},$$

ce qui est implique que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left|\left(\varepsilon * f\right)_n\right|_{L^p(\Omega;X)}\leq M_p\left(X\right)\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)},$$

d'où

$$\left|\varepsilon * f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^p(\Omega;X))}\leq M_p\left(X\right)\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^p(\Omega;X))}.$$

Inversement, si cette derniere inégalité est vraie pour chaque martingale $\left(f_k\right)_{k=1}^{\infty}$, alors elle est vraie en particulier pour $\left(f_k\right)_{k=1}^{n}$, et comme $\left|f_k\right|_{L^p(\Omega;X)}=\left|E\left(f_n\mid\mathcal{F}_k\right)\right|_{L^p(\Omega;X)}\leq\left|f_n\right|_{L^p(\Omega;X)}$, $k\leq n$. Alors d'ici résulte la premiére inégalité.

Maintenant on va donner une formulation du type faible dans L^1.

Definition 27 *: On dit qu'un espace de Banach X possède la propriété faible-UMD si l'inégalité suivante :*

$$\lambda \mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > \lambda\right) \leq M_w \left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}$$

est satifaite pour une certaine constante M_w , pour toute martingale $f \in L^1(\Omega; X)^{\mathbb{Z}_+}$, et toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

La propriétée faible-MT se définie d'une maniére similaire c'est-à-dire au lieu de ε on prend la suite prédictable $v = (v_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Lemme 25 *: Si $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, et τ est un temp d'arrêt, alors*

$$\int\limits_{\tau\prec\infty} |f_\tau|_X \, d\mathbb{P} \leq |f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))} .$$

Démonstration. On a d'une part en utilisant l'hypohtèse

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{\tau<\infty\}} |f_\tau|_X \, d\mathbb{P} &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} |f_k|_X \, d\mathbb{P} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} E\left(|f_k|_X \mid \mathcal{F}_k\right) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} |f_n|_X \, d\mathbb{P} \\
&\leq \int\limits_{\{\tau<\infty\}} |f_n|_X \, d\mathbb{P} \\
&= |f_n|_{L^1(\Omega;X)} \\
&\leq |f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))} .
\end{aligned}$$

Où d'autre part, la premiere inégalité résulte du faite que $(|f_k|_X)_{k=1}^\infty$ est une sous-martingale non négative lorsque $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ est une martingale, la seconde égalité résulte de la définition de l'éspérance conditionnelle et que $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, la derniere étape resulte du faite que $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\tau = k\} = \{\tau < \infty\}$. Pour achever la démonstration, il suffit de faire un passage à la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$. ■

Lemme 26 *: Soit $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $\lambda > 0$, et τ un temps d'arrêt définit par :*

$$\tau(\omega) = \inf\left\{n \geq 1 : |f_n(\omega)|_X > \lambda\right\}$$

et soit σ un autre temps d'arrêt. Alors on a

$$\left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_{L^1(\Omega;X)} \leq 2\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))} ,$$

et
$$\left|\sum_{k=1}^{n\wedge\sigma-1} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)\right|_{L^1(\Omega;X)} \leq 2\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.$$

Démonstration. En effet, pour la première assertion on a, d'aprés la définition $\left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X \leq \lambda < \left|f_\tau\right|_X$, dans $\{\tau<\infty\}$, et pour $\{\tau=\infty\}$ on a $\left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X = \left|f_{n\wedge\sigma}\right|_X$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_{L^1(\Omega;X)} &= \int_\Omega \left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{\tau\leq\infty\}} \left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{\tau<\infty\}} \left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X d\mathbb{P} + \int_{\{\tau=\infty\}} \left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_X d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{\tau<\infty\}} \left|f_\tau\right|_X d\mathbb{P} + \int_{\{\tau=\infty\}} \left|f_{n\wedge\sigma}\right|_X d\mathbb{P} \\
&\leq \left|f_\tau\right|_{L^1(\Omega;X)} + \left|f_{n\wedge\sigma}\right|_{L^1(\Omega;X)} \\
&\leq \left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} + \left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} \\
&= 2\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième assertion on a :
$$\left|\sum_{k=1}^{n\wedge\sigma-1} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)\right|_X \leq \sum_{k=1}^{n\wedge\sigma-1} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\left|\delta f_{k+1}\right|_X \mid \mathcal{F}_k\right).$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n\wedge\sigma-1} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)\right|_{L^1(\Omega;X)} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\{\tau=k+1\}} |\delta f_{k+1}|_X \, d\mathbb{P} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} 2 \int\limits_{\{\tau=k+1\}} |f_{k+1}|_X \, d\mathbb{P} \\
&= 2\sum_{k=2}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} |f_k|_X \, d\mathbb{P} \\
&\leq 2\sum_{k=2}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} E\left(|f_n|_X \mid \mathcal{F}_k\right) d\mathbb{P} \\
&\leq 2\sum_{k=2}^{n} \int\limits_{\{\tau=k\}} |f_n|_X \, d\mathbb{P} \\
&\leq 2 \int\limits_{\{\tau\leq\infty\}} |f_n|_X \, d\mathbb{P} \\
&= 2\int\limits_{\Omega} |f_n|_X \, d\mathbb{P} \\
&= 2\,|f_n|_{L^1(\Omega;X)} \\
&\leq 2\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} .
\end{aligned}$$

■

Lemme 27 *:(Décomposition de Gundy) Soit $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, et $\lambda > 0$. Alors, il existe une décomposition $f = g + h + b$, où $g, h, b \in L^1(\Omega; X)^{\mathbb{Z}_+}$ sont des martingales verifiants :*

1- $|g|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} \leq 4\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}$, et $|g|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^\infty(\Omega;X))} \leq 2\lambda$;

2- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} \leq 4\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}$ et;

3- $\lambda\mathbb{P}(b^* > 0) \leq 3\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}$.

Démonstration. En effet, Premièrement nous définissons les temps τ, σ auxilliaires. Le temps τ est définie comme dans le lemme précédent, et σ est donnée par :

$$\sigma(\omega) = \inf\left\{ n \geq 1 : \sum_{k=1}^{n} E\left(1_{\{\tau=k+1\}} |\delta f_{k+1}|_X \mid \mathcal{F}_k\right) > \lambda \right\}.$$

On remarque que $\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(1_{\{\tau=k+1\}} |\delta f_{k+1}|_X \mid \mathcal{F}_k\right)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable lorsque $\{\sigma \leq n\}$. Or $\{\sigma \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, car $\{\sigma \geq n\} = \{\sigma \leq n-1\}^{\complement}$, et $\{\sigma \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Maintenant nous allons définir les martingales $g, h, et\ b$ par :

$$\begin{aligned}
\delta g_1 &= 1_{\{\tau>1\}}\delta f_1, \\
\delta g_k &= 1_{\{\sigma\geq k\}}\left(1_{\{\tau>k\}}\delta f_k - E\left(1_{\{\tau>k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right), k>1.
\end{aligned}$$

D'aprés la définition de g on peut facilement vérifier que $E\left(\delta g_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = 0$, c'est-à-dire qu'on peut facilement démontrer que g définit une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, de plus on a :

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{k=1}^{n}\delta g_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}1_{\{\sigma\geq k\}}1_{\{\tau>k\}}\delta f_k - \sum_{k=2}^{n}1_{\{\sigma\geq k\}}E\left(1_{\{\tau>k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\delta f_k - \sum_{k=2}^{n}1_{\{\sigma\geq k\}}E\left(1_{\{\tau>k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) - \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau>k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) + \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) &= \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau\geq k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}1_{\{\tau\geq k\}}E\left(\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Comme $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$,donc

$$\sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}1_{\{\tau\geq k\}}E\left(\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = 0.$$

D'où

$$g_n = \sum_{k=1}^{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\delta f_k + \sum_{k=2}^{n\wedge\sigma}E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right).$$

Alors

$$g_n = f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)} + \sum_{k=2-1}^{n\wedge\sigma-1}E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right).$$

Et d'aprés le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned}
\left|g_n\right|_{L^1(\Omega;X)} &= \left|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\right|_{L^1(\Omega;X)} + \left|\sum_{k=1}^{n\wedge\sigma-1}E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\delta f_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)\right|_{L^1(\Omega;X)} \\
&\leq 2\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} + 2\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} \\
&= 4\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.
\end{aligned}$$

Alors

$$|g|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} \leq 4\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.$$

De plus d'aprés les définition de τ et σ on a :

$$|g|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^\infty(\Omega;X))} \leq 2\lambda.$$

Maintenant nous allons définir h et b

$$\begin{aligned} \delta h_1 &= 1_{\{\tau=1\}}\delta f_1, \\ \delta h_k &= 1_{\{\sigma\geq k\}}\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k - E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right), k>1. \end{aligned}$$

D'aprés les calculs précédents et les définitions de g et h on a :

$$\begin{aligned} \delta g_k + \delta h_k &= 1_{\{\sigma\geq k\}}1_{\{\tau\geq k\}}\delta f_k \\ &= 1_{\{\sigma\wedge\tau\geq k\}}\delta f_k. \end{aligned}$$

Et finalement on définit b par :

$$\begin{aligned} \delta b_k &= \delta f_k - \delta g_k - \delta h_k \\ &= 1_{\{\sigma\wedge\tau< k\}}\delta f_k. \end{aligned}$$

On observe que $b_1 = 0$.
D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega} |\delta h_k|_X \, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{\sigma\geq k\}} \left|1_{\{\tau=k\}}\delta f_k - E\left(1_{\{\tau=k\}}\delta f_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right|_X d\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left(1_{\{\tau=k\}}|\delta f_k|_X + E\left(1_{\{\tau=k\}}|\delta f_k|_X \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)\right) d\mathbb{P} \\ &\leq 4\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{\tau=k\}} |f_k|_X \, d\mathbb{P} \\ &\leq 4\int_{\{\tau<\infty\}} |f_k|_X \, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Et comme sur $\{\tau = k\}$ on a :

$$|f_{k-1}|_X \leq \lambda < |f_k|_X.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} &\leq 4\int_{\{\tau<\infty\}} |f_\tau|_X \, d\mathbb{P} \\ &= 4\,|f_\tau|_{L^1(\Omega;X)}. \end{aligned}$$

D'où
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} \leq 4\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}\,.$$
Finalement on termine la démonstration par estimer la probabilité de $\{b^* > 0\}$ .Pour cela on a
$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n} \delta b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1_{\{\sigma\wedge\tau<k\}}\delta f_k \\ &= \sum_{k=\sigma\wedge\tau+1}^{n} \delta f_k \\ &= 0, \end{aligned}$$
pour $n \leq \sigma\wedge\tau$.On a aussi
$$\mathbb{P}\left(\{b^* > 0\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\tau < \infty\right) + \mathbb{P}\left(\sigma < \infty\right),$$
or $\mathbb{P}\left(\tau<\infty\right)$ est égale à $\mathbb{P}\left(\{f^* > 0\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}$.
De plus d'aprés la définition de σ on a :
$$\{\sigma < \infty\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\,|\delta f_{k+1}|_X \mid \mathcal{F}_k\right) > \lambda \right\},$$
Alors
$$\begin{aligned} \lambda\mathbb{P}\left(\sigma<\infty\right) &= \lambda \int_{\{\sigma<\infty\}} d\mathbb{P} \\ &< \int_{\{\sigma<\infty\}} \sum_{k=1}^{\infty} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\,|\delta f_{k+1}|_X \mid \mathcal{F}_k\right) d\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} E\left(1_{\{\tau=k+1\}}\,|\delta f_{k+1}|_X \mid \mathcal{F}_k\right) d\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\tau=k+1\}} |\delta f_{k+1}|_X \, d\mathbb{P} \\ &\leq 2 \int_{\{\tau<\infty\}} |f_\tau|_X \, d\mathbb{P} \\ &= 2\,|f_\tau|_{L^1(\Omega;X)} \\ &\leq 2\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}\,. \end{aligned}$$
Donc
$$\lambda\mathbb{P}\left(b^* > 0\right) \leq 3\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}\,.$$
■

Proposition 2 *: Pour tout $p \in (1, \infty)$ la propriété $MT - p$ implique la propriété faible-MT.*

Démonstration. En effet soit X un espace de Banach satisfaisant la condition $MT-p$ pour un certain p, et soit aussi $\lambda > 0$ fixée. Soit $f \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))$ une martingale, et v une suite prédictable avec $|v|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))} \leq 1$; pour démontrer la proposition il suffit de montrer que :

$$\lambda \mathbb{P}\left((v * f)^* > \lambda\right) \leq M_w |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))},$$

pour une certaine constante M_w independante de f, λ et v. Pour cela on utilise le lemme précédent, c'est-à-dire on décompose f en trois martingales comme suit :

$$f = g + h + b,$$

alors

$$v * f = v * g + v * h + v * b,$$

et

$$\mathbb{P}\left((v * f)^* > \lambda\right) \leq \mathbb{P}\left((v * g)^* > \frac{\lambda}{3}\right) + \mathbb{P}\left((v * h)^* > \frac{\lambda}{3}\right) + \mathbb{P}\left((v * b)^* > \frac{\lambda}{3}\right).$$

D'aprés la décomposition de Gundy on a :

$$\mathbb{P}\left((v * b)^* > \frac{\lambda}{3}\right) \leq \mathbb{P}\left(b^* > 0\right) \leq \frac{3}{\lambda} |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}.$$

Et d'aprés l'inégalité de Doob on a :

$$\mathbb{P}\left((v * h)^* > \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{3}{\lambda} |v * h|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}.$$

Et comme

$$\begin{aligned} |(v * h)_n|_{L^1(\Omega;X)} &\leq \sum_{k=1}^{n} |v_k|_{L^{\infty}(\Omega;X)} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\delta h_k|_{L^1(\Omega;X)} \\ &\leq 4 |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{P}\left((v * h)^* > \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{12}{\lambda} |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega;X))}.$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'éstimer $\mathbb{P}\left((v * g)^* > \frac{\lambda}{3}\right)$. On a d'aprés le lemme de décomposition de Gundy, g est L^1-bornée et L^{∞}-bornée donc par interpolation il résulte sa bornitude dans $L^p, 1 < p < \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((v*g)^* > \frac{\lambda}{3}\right) &\leq \frac{3^p}{\lambda^p}\left|(v*g)^*\right|^p_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \frac{3^p}{\lambda^p}\overline{p}^p\left|v*g\right|^p_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^p(\Omega;X))} \\
&\leq \frac{3^p}{\lambda^p}\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p\left|g\right|^p_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^p(\Omega;X))} \\
&\leq \frac{3^p}{\lambda^p}\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p\left|g\right|^{p-1}_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^\infty(\Omega;X))}\left|g\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))} \\
&\leq \frac{3^p}{\lambda^p}\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p\left(4^{p-1}\lambda^{p-1}\right)\left(4\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}\right) \\
&\leq \frac{12^p}{\lambda}\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left((v*f)^* > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left[12^p\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p + 15\right]\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))}.$$

D'où

$$\lambda\mathbb{P}\left((v*f)^* > \lambda\right) \leq M_w\left|f\right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+,L^1(\Omega;X))},$$

où

$$M_w = 12^p\overline{p}^p\left(M_p(X)\right)^p + 15.$$

Ainsi la démonstration est achevée. ■

Theoreme 2 :(*Burkholder 1981*) *Dans un espace de Banach X les propriétés suivantes sont equivalentes :*

1- X possède la propriété $UMD-p$ pour tout $p \in (1,\infty)$.

2- X possède la propriété $MT-p$ pour tout $p \in (1,\infty)$.

3- X possède la propriété $UMD-p$ pour certain $p \in (1,\infty)$.

4- X possède la propriété $MT-p$ pour certain $p \in (1,\infty)$.

5- X possède la propriété faible-UMD.

6- X possède la propriété faible- MT.

Démonstration. En effet d'aprés la proposition 1, les propriétés (1) et (2), respectivement (3) et (4) sont equivalentes.

$(1) \Rightarrow (3)$ est triviale.

$(2) \Rightarrow (4)$ est triviale.

$(4) \Rightarrow (6)$ (voir la proposition 2).

$(5) \Rightarrow (1)$ la démonstration sera faite par la suite. ■

Definition 28 : *Un espace X possèdant une ou toutes les propriétés du théorème 2 précédent est appelé espace UMD.*

Lemme 28 *: Soient $\beta, p > 1$, et $\gamma, \delta > 0$, tels que $\beta^p \gamma < 1$. Si les fonctions mesurables f et g verifient*

$$\mathbb{P}(g > \beta t, f < \delta t) \leq \delta \mathbb{P}(g > t),$$

pour tout $t > 0$. Alors

$$|g|_{L^p(\Omega)} \leq (1 - \beta^p \gamma)^{-\frac{1}{p}} \frac{\beta}{\delta} |f|_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme 29 *: Soit X un espace de Banach possèdant la propriété faible-UMD et $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$ une martingale. S'il existe une suite prédictable $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$ qui domine les différences de f c'est-à-dire*

$$|\delta f_k|_X \leq w_k \ \ (p.p).$$

Alors

$$\mathbb{P}((\varepsilon * f)^* > 2\lambda, f^* \vee w^* \leq \delta\lambda) \leq \frac{3\delta}{1-\delta} M_w(X) \mathbb{P}((\varepsilon * f)^* > \lambda),$$

Pour tout $\lambda > 0$, $\delta \in (0,1)$, et toute suite de signes $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

Démonstration. Fixons $\lambda > 0$, et $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, et définissons les temps auxilliaires

$$\tau_j(\omega) = \inf\left\{k, |(\varepsilon * f)_k(\omega)|_X > j\lambda\right\}, \quad j = 1, 2.$$

$$\Delta(\omega) = \inf\{k, |f_k(\omega)|_X \vee w_{k+1}(\omega) > \delta\lambda\}$$

Et notons par :

$$\begin{aligned} T_k &= \{\tau_1 < k \leq \tau_2 \wedge \Delta\} = \Big\{\omega : \lambda < \max_{j \leq k-1} \left|(\varepsilon * f)_j(\omega)\right|_X \leq 2\lambda, \\ &\max_{j \leq k-1} \left(|f_j(\omega)|_X \vee w_{j+1}(\omega)\right) \leq \delta\lambda\Big\} \end{aligned}$$

Alors $T_k \in \mathcal{F}_{k-1}$, et $u = (u_k)_{k=1}^{\infty} = (1_{T_k})_{k=1}^{\infty}$ est une suite prédictable.
Premièrement on montre que

$$\{(\varepsilon * f)^* > 2\lambda, f^* \vee w^* \leq \delta\lambda\} \subset \{(u * \varepsilon * f)^* > (1-\delta)\lambda\} \tag{2.5}$$

Comme X possède la propriété faible-UMD, alors

$$\mathbb{P}((u * \varepsilon * f)^* > (1-\delta)\lambda) \leq \frac{M_w(X)}{(1-\delta)\lambda} |u * f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))}$$

D'autre part prouvons que (2.5) est satisfaite. On a

$$(u * (\varepsilon * f))_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \delta(\varepsilon * f)_k = \sum_{k=1}^{n} u_k \varepsilon_k \delta f_k \tag{2.6}$$

On remaque d'aprés (2.6) que $u * (\varepsilon * f) = \varepsilon * (u * f)$. De plus on remarque que si $(\varepsilon * f)^* > 2\lambda$ cela implique $\tau_2 < \infty$, et si $f^* \vee w^* \leq \delta\lambda$ cela implique que $\Delta = \infty$, et on a

aussi toujours $\tau_1 \leq \tau_2$.
De plus dans le membre gauche de (2.5) on remarque que $\tau_1 < \tau_2$, en effet, d'aprés $(\varepsilon * f)_{\tau_2} = (\varepsilon * f)_{\tau_2 - 1} + \varepsilon_{\tau_2}\delta f_{\tau_2}$, on a

$$\begin{aligned} \left|(\varepsilon * f)_{\tau_2-1}\right|_X &\geq \left|(\varepsilon * f)_{\tau_2}\right|_X - |\delta f_{\tau_2}|_X \\ &\geq 2\lambda - |w_{\tau_2}|_X \\ &\geq (2-\delta)\,\lambda \\ &\geq \lambda. \end{aligned}$$

Alors d'ici résulte que $\tau_1 \leq \tau_2 - 1$. Donc en calculant le terme :

$$\begin{aligned} (u * \varepsilon * f)_{\tau_2} &= \sum_{k=1}^{\tau_2} 1_{\{\tau_1 < k \leq \tau_2 \wedge \Delta\}} \delta\,(\varepsilon * f)_k \\ &= \sum_{\tau_1 < k \leq \tau_2} \delta\,(\varepsilon * f)_k \\ &= (\varepsilon * f)_{\tau_2} - (\varepsilon * f)_{\tau_1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|(u * \varepsilon * f)_{\tau_2}\right|_X &\geq \left|(\varepsilon * f)_{\tau_2}\right|_X - \left|(\varepsilon * f)_{\tau_1}\right|_X \\ &> 2\lambda - \left|(\varepsilon * f)_{\tau_1 - 1}\right|_X - |\delta f_{\tau_1}|_X \\ &\geq 2\lambda - \lambda - w_{\tau_1} \geq \lambda - \delta\lambda. \end{aligned}$$

Alors (2.5) est vraie.
Et d'aprés les définitions de $u, \tau_j, j = 1, 2$, et Δ il résulte que

$$|(u * f)^*|_X \leq 3\delta\lambda 1_{\{(\varepsilon * f)^* > \lambda\}}.$$

Et d'aprés l'inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned} |u * f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^1(\Omega; X))} &\leq |(u * f)^*|_{L^1(\Omega; X)} \\ &\leq 3\delta\lambda \mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > \lambda\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > 2\lambda, f^* \vee w^* \leq \delta\lambda\right) \leq \frac{3\delta}{1-\delta} M_w(X)\,\mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > \lambda\right).$$

■

Proposition 3 *: Si un espace X possède la propriété faible-UMD, alors il possède la propriété $UMD - p$ pour tout $p \in (1, \infty)$.*

Démonstration. D'aprés les résultats précédents il suffit de démontrer la propriété pour les martingales adaptées à des systèmes de Haar standards.

Si f est une martingale, alors δf_k est différent de zéro au moins sur un intervale $I_k = I_k^1 \cup I_k^2$, $m(I_k^1) = m(I_k^2)$, I_k^1, $I_k^2 \in bs\eta_k$, et $I_k \in bs\eta_{k-1}$. De plus, il résulte que $\delta f_k = x_k 1_{I_k^1} - x_k 1_{I_k^2}$, pour un certain $x_k \in X$. Définissons $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$ par $w_k = |\delta f_k|_X = |x_k 1_{I_k}|_X \in L^{\infty}(\eta_{k-1})$, alors $|\delta f_k|_X \leq w_k$ et $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$est prédictable. De plus $w_k \leq |f_k|_X + |f_{k-1}|_X \leq 2f^*$, donc $w^* \leq 2f^*$.
D'aprés les lemmes 28 et 29 on a :

$$\mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > 2t, f^* \vee w^* \leq \delta t\right) \leq \frac{3\delta}{1-\delta} M_w(X)\, \mathbb{P}\left((\varepsilon * f)^* > t\right),$$

pour tout $\delta \in (0,1)$ et $t > 0$.
Pour un $p > 1$ fixé, choisissons $\delta = \delta(p)$ plus petit, tel que $2^p \frac{3\delta}{1-\delta} M_w(X) < 1$. En appliquant le lemme 28 aux fonctions mesurables $(\varepsilon * f)^*$ et $f^* \vee w^*$, on obtient

$$\begin{aligned} |(\varepsilon * f)^*|_{L^p(\Omega)} &\leq \left(1 - 2^p \frac{3\delta}{1-\delta} M_w(X)\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{2}{\delta} |f^* \vee w^*|_{L^p(\Omega)} \\ &= M'_p |f^* \vee w^*|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

or $w^* \leq 2f^*$, alors

$$\begin{aligned} |(\varepsilon * f)^*|_{L^p(\Omega)} &\leq M'_p \left(|f^*|_{L^p(\Omega)} + |w^*|_{L^p(\Omega)}\right) \\ &\leq 3M'_p |f^*|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

et finalement d'aprés l'inégalité de Doob, on obtient :

$$|\varepsilon * f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;X))} \leq |(\varepsilon * f)^*|_{L^p(\Omega)} \leq 3M'_p \overline{p}\, |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;X))}$$

Ainsi la démonstration est terminée. ■

Exemple 10 *Chaque espace de Hilbert est un espace UMD ; en particulier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sont des espaces UMD.*

Exemple 11 *: Pour une martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega; H))$, $p \in (1, \infty)$, et H un espace de Hilbert, la fonction carrée Sf définie par :*

$$Sf(\omega) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\delta f_k(\omega)|_H^2},$$

satisfait

$$s_p |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;H))} \leq |Sf|_{L^p(\Omega)} \leq S_p |f|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;H))}.$$

Démonstration. En effet, comme tout espace de Hilbert est un espace UMD, alors on a

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \delta f_k(\omega) \right|_H^2} \right|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \delta f_k(\omega) \right|_H^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k' \delta f_k(\omega) \right|_{L^2(\Omega';H)}^p d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq A_p^p \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k' \delta f_k(\omega) \right|_{L^p(\Omega';H)}^p d\mathbb{P}(\omega) \\
&= A_p^p \int_{\Omega'} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k'(\omega') \delta f_k \right|_{L^p(\Omega;H)}^p d\mathbb{P}'(\omega') \\
&= A_p^p M_p^p(H) \int_{\Omega'} \left| \sum_{k=1}^{n} \delta f_k \right|_{L^p(\Omega;H)}^p d\mathbb{P}'(\omega') \\
&= A_p^p M_p^p(H) \left| \sum_{k=1}^{n} \delta f_k \right|_{L^p(\Omega;H)}^p ,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}_+$ sont des fonctions de Rademacher, la première égalité résulte du théorème de Fubini, et la première inégalité de l'inégalité de Khintchine-Kahan.
Pour le reste de la démonstration, c'est-à-dire l'inégalité inverse et la forme finale de la double inégalité elle résulte de l'inégalité de Khintchine-Kahan et de la formule siuvante :

$$|\varepsilon * f|_{L^p(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} ,$$

ainsi on a alors :

$$a_p M_p^{-1}(H) \left| f_n \right|_{L^p(\Omega;H)} \leq \left| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| \delta f_k(.) \right|_H^2} \right|_{L^p(\Omega)}^p \leq A_p M_p(H) \left| f_n \right|_{L^p(\Omega;H)} ,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$, et finalement on a :

$$s_p \left| f \right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;H))} \leq \left| Sf \right|_{L^p(\Omega)} \leq S_p \left| f \right|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, L^p(\Omega;H))} ,$$

avec $s_p = a_p M_p^{-1}$, et $S_p = A_p M_p(H)$. Ainsi la démonstration est achevée. ■

2.4 Transformation de Hilbert et Espaces UMD

Soit E un espace de Banach.

2.4.1 Rappels

Soit X est un ensemblle ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note par $C^k(X,E)$; $k=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, l'espace de toutes les fonctions définies sur X à valeurs dans E dont les dérivées d'ordres inferieurs ou égales à k sont continues, et en particulier on pose $C^k(X)=C^k(X,\mathbb{K})$. Et aussi on pose $\varepsilon(X,E)=C^\infty(X,E)$, et $\varepsilon(X)=C^\infty(X,\mathbb{K})$. De plus on a :

$$\varepsilon'(X,E)=\mathcal{L}(\varepsilon(X);E)$$

et

$$\varepsilon'(X)=\mathcal{L}(\varepsilon(X);\mathbb{K})$$

Soient X et Y deux espaces topologiques, on écrit $X\hookrightarrow Y$ ou $i:X\longrightarrow Y$, si X s'injecte continuement dans$Y$, c'est-à-dire $X\subset Y$ et l'injection canonique $i:X\longrightarrow Y, i:$ $x\longmapsto x$ est continue.
Si X est une sous-ensemble dense de Y ; en écrit $X\overset{d}{\subset}Y$. Ainsi $X\overset{d}{\hookrightarrow}Y$ exprime que X est s'injecte continuement et densement dans Y.

L'espace $\mathfrak{D}'(X,E)=\mathcal{L}(\mathfrak{D}(X);E)$ est l'espace des distributions. Pour $u\in\mathfrak{D}'(X,E)$ le support de u est définit par :

$$\begin{aligned} Supp(u) &= X\setminus\{x\in X;\ \text{il existe une voisinage } U \text{ de } x\in X,\\ &\quad \text{telque } u(\varphi)=0, pourtout \varphi\in\mathfrak{D}(U)\}. \end{aligned}$$

On note par $S(\mathbb{R}^n,E)$ l'espace de Schwartz, c'est à dire l'espace de toutes les fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans E qui sont à decroissances rapides. Ainsi $u\in S(\mathbb{R}^n,E)$ si et seuleument si $u\in\varepsilon(\mathbb{R}^n,E)$ et

$$q_{k,m}=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\alpha|\le m}}\left(1+|x|^2\right)^k|\partial^\alpha u(x)|<\infty,\ \ k,m\in\mathbb{N}.$$

En particulier, on écrit $S(\mathbb{R}^n)=S(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$;

Il est facile de voire que

$$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n,E)\overset{d}{\hookrightarrow}S(\mathbb{R}^n,E)\overset{d}{\hookrightarrow}\varepsilon(\mathbb{R}^n,E)$$

On définit l'espace des distrubutions tempérées à valeurs dans E par :

$$S'(\mathbb{R}^n,E)=\mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n);E),$$

et

$$S'(\mathbb{R}^n)=S'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),$$

de plus on a :

$$\varepsilon'(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, E)$$

L'espace $O_M(\mathbb{R}^n, E)$ de toutes les fonctions à valeurs dans E définis par : $u \in O_M(\mathbb{R}^n, E)$ si et seleument si $u \in \varepsilon(\mathbb{R}^n, E)$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $m_\alpha \in \mathbb{N}$ et $c_\alpha > 0$, tel que

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq c_\alpha \left(1 + |x|^2\right)^{m_\alpha}, x \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier on a

$$O_M(\mathbb{R}^n) = O_M(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}).$$

Il est facile de voire que

$$S(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow O_M(\mathbb{R}^n, E) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n, E)$$

D'aprés les définition de $O_M(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ et $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, il est facile de voire que l'application

$$\begin{array}{rcl} O_M(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n, E) & \longrightarrow & S(\mathbb{R}^n, E) \\ (m, u) & \longmapsto & mu \end{array}$$

est bien définie, et bilinéaire. De plus si $m \in \varepsilon(\mathbb{R}^n)$, alors $m \in O_M(\mathbb{R}^n)$ si et seleument si

$$\varphi \longmapsto m\varphi \in \mathcal{L}S(\mathbb{R}^n, E)$$

De même on peut remplaçer $O_M(\mathbb{R}^n)$ par $O_M(\mathbb{R}^n, E)$, si $S(\mathbb{R}^n, E)$ est remplacé par $S(\mathbb{R}^n)$.

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n; E)$ donnée alors

$$\mathcal{F}u(\zeta) = \widehat{u}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \zeta, x\rangle} u(x)\, dx, \zeta \in \mathbb{R}^n$$

est la tansformée de Fourier de u, où

$$\langle \zeta, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \zeta^j x^j$$

Du lemme de Lebegue-Riemann résulte que

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}\left(L^1(\mathbb{R}^n; E), C_0(\mathbb{R}^n, E)\right)$$

et d'aprés le théorème de la transformée inverse de Fourier on a

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}aut\left(S'(\mathbb{R}^n, E)\right)$$

c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est une application continuement inversible de $S'(\mathbb{R}^n, E)$ dans $\mathbb{K}$. Et de plus on a :

$$\mathcal{F}^{-1}u = (2\pi)^{-n} \overset{\curlyvee}{\widehat{u}}(\zeta) = \overset{\curlywedge}{\check{u}}(\zeta), u \in S(\mathbb{R}^n, E)$$

où $\check{u}(x) = u(-x)\,; x \in \mathbb{R}^n$, et $u \in E^{\mathbb{R}^n}$ ie $(u : \mathbb{R}^n \longrightarrow E)$.
La transformée de Fourier $\widehat{u} = \mathcal{F}u$ d'une distribution tempérée $u \in S'(\mathbb{R}^n, E)$ est définie par :

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi})\,; \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

De plus on a la propriété fondamentale de la transformée de Fourier :

$$(\boldsymbol{D}^\alpha u)^\curlywedge = \widehat{\boldsymbol{D}^\alpha u} = \zeta^\alpha \widehat{u}, u \in S'(\mathbb{R}^n, E), \alpha \in \mathbb{N}^n$$

où $D_j = -i\partial_j$, pour $j = 1, ..., n$.

2.4.2 La transformée de Hilbert

Soit $\varepsilon > 0$ donnée, définissons $\left(\frac{1}{t}\right)_\varepsilon \in L_{1,Loc}$ par :

$$\left(\frac{1}{t}\right)_\varepsilon (\tau) = \tau^{-1}\chi_{\{|\tau| \geq \varepsilon\}}(\tau), \tau \in \mathbb{R},$$

alors

$$\left\langle \left(\frac{1}{t}\right)_\varepsilon, \varphi \right\rangle = \int\limits_{|\tau| \geq \varepsilon} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad \varphi \in S(\mathbb{R})$$

Il est facile de voir qu'il existe une unique distribution tempérée $VP\left(\frac{1}{t}\right)$, qui est la valeur principale de $\frac{1}{t}$, définie par

$$\left\langle VP\left(\frac{1}{t}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left\langle \left(\frac{1}{t}\right)_\varepsilon, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|\tau| \geq \varepsilon} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

Soit $u \in S(\mathbb{R}, E)$, on définit la transformée de Hilbert Hu de u par :

$$Hu = H_E u = \pi^{-1} VP\left(\frac{1}{t}\right) * u$$

et la transformée de Hilbert tronquée $H_\varepsilon, \varepsilon > 0$ par :

$$H_\varepsilon u = H_{E,\varepsilon} u = \pi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)_\varepsilon * u, \quad \varepsilon > 0$$

où

$$H_\varepsilon u(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\tau| \geq \varepsilon} \varphi(t - \tau) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t-\tau| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $u \in S(\mathbb{R}, E)$.

Quelques propriétés de la transformée de Hilbert

Proposition 4 *: Si $u \in S(\mathbb{R}, E)$, alors on a $H_\varepsilon u \longrightarrow Hu$ dans $O_M(\mathbb{R}, E)$, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Lemme 30 *: On a*

$$\widehat{\left(VP\left(\frac{1}{t}\right)\right)} = -i\pi sign.$$

Remarque 17 *pour $p \in [1, \infty)$ donné on a*

$$\|Hu\|_{L^p(\mathbb{R};E)} \leq c \|u\|_{L^p(\mathbb{R};E)}, \; u \in S(\mathbb{R}, E).$$

Alors, comme $S(\mathbb{R}, E)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}; E)$, il existe un unique $\overline{H} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; E))$ qui prolonge H,d'abord noté par H qui est appelée la transformée de Hilbert dans $L^p(\mathbb{R}; E)$.

Theoreme 3 *: Soit E un espace de Hilbert. Alors la transformée de Hilbert est un opérateur auto-adjoint unitaire sur $L^2(\mathbb{R}; E)$.*

Démonstration. La démonstration résulte comme conséquence directe du lemme 30 et du thérème de Plancherel. ■

Lemme 31 *: Soit E un espace de Banach, alors $Hw \in L^1([|t > 2T|]; E)$,et de plus on a :*

$$\int\limits_{|t| \geq 2T} |Hw|\, dt \leq 2\pi \|w\|_1$$

pour $T > 0, w \in L^1(\mathbb{R}; E)$ qui satisfait $\int wdt = 0$, et $Supp(w) \subset [-T, T]$.

Démonstration. En effet soit $T > 0$, supposons que $v \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}; E)$, avec $\int wdt = 0$, et $Supp(v) \subset [-T - \delta, T + \delta]$; pour un certain $\delta \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$. Soit $\varepsilon \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$ donné, alors

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|t| \geq 2T} |H_\varepsilon v|\, dt &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 2T} \left| \int\limits_{|t-\tau| \geq \varepsilon} \frac{v(\tau)}{t - \tau} d\tau \right| dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 2T} \left| \int\limits_{-T-\delta}^{T+\delta} v(\tau) \left[(t-\tau)^{-1} - t^{-1}\right] d\tau \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 2T} \frac{T + \delta}{(|t| - T - \delta)\, |t|} dt \, \|v\|_1 \\
&\leq \frac{2T + \delta}{\pi T - \delta} \|v\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors de la proposition 4 résulte facilement que $H_\varepsilon v(\varphi) \longrightarrow Hv(\varphi)$, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0, \varphi \in S(\mathbb{R})$.

Si $Supp(\varphi) \subset [|t| \geq 2T]$, on a

$$H_\varepsilon v(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 2T} \varphi(t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(\tau) \left[(t-\tau)^{-1} - t^{-1}\right] d\tau dt$$

pour $0 < \varepsilon < T$, alors $H_\varepsilon v(\varphi)$ est indépendant de $\varepsilon \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$, pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ à support dans l'ensemble $[|t > 2T|]$. Ainsi, on a

$$H_\varepsilon v([|t > 2T|]) = Hv([|t > 2T|]),$$

d'où $Hv \in L^1([|t > 2T|]; E)$ et

$$\int\limits_{|t| \succ 2T} |Hv|\, dt \leq \frac{2T + \delta}{\pi T - \delta} \|v\|_1 .$$

■

Theoreme 4 *: Soient E un espace de Banach, et supposons que la transformée de Hilbert est bornée sur $L^p(\mathbb{R}; E)$, pour certain $p \in (1, \infty)$. Alors H est bornée dans $L^q(\mathbb{R}; E)$ et dans $L^q(\mathbb{R}; E')$ pour chaque $q \in (1, \infty)$.*

La démonstration de théorème est basée sur le lemme suivant

Lemme 32 *: Soient E un espace de Banach, et soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n; E)$, $\alpha < 0$ donné. Alors il existe $v, w_k \in L^1(\mathbb{R}^n; E)$ pour $k \in \mathbb{N}$, tel que*

$$u = v + \sum w_k,$$

avec

$$\|v\|_\infty \leq 2^n \alpha, \quad \int w_k dt = 0,$$

et

$$\|v\|_1 + \sum \|w_k\|_1 \leq 3 \|v\|_1 .$$

De plus, il existe une suite de cubes Q_k, avec

$$Supp(w_k) \subset \overline{Q_k},$$

et

$$\alpha \sum \lambda_n(Q_k) \leq \|u\|_{1,}$$

où $\lambda_n(.)$ sont les mesures de Lebegues n-dimensionnelles.

La transformée de Hilbert en générale est non bornée sur $L^p(\mathbb{R}; E)$ pour tous les $p \in (1, \infty)$ où E est un espace de Banach quelconque.

Theoreme 5 *:[11] Il existe une constante $c > 0$, tel que pour chaque n, $\|H\| > c \log(n)$ où*

$$H : L^2(\mathbb{R}; \ell_1(n)) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \ell_s(n)).$$

$$\text{où, } \|\alpha\|_s = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right|, \text{ et } \|\beta\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|, \text{ pour toutes } \alpha \in \ell_s(n), \text{ et } \beta \in \ell_1(n).$$

D'aprés ce théorème il résulte que la transformée de Hilbert est non bornée dans $L^2(\mathbb{R}; \ell_s(n))$.

Theoreme 6 *: L'espace E est un espace UMD alors la transformée de Hilbert est bornée pour un certain $p \in (1, \infty)$.*

Theoreme 7 *: Supposons que E est un espace UMD, $1 < p < \infty$, et $u \in L^p(\mathbb{R}; E)$. Alors $H_\varepsilon u \longrightarrow Hu$ dans $L^p(\mathbb{R}; E)$ presque partout lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Chapitre 3

Régularité Maximale

3.1 Multiplicateur de Fourier et Espace UMD

Dans ce chapitre on reprend l'étude faite dans [2] d'une equation differentielle opérationnelle sur tout l'axe réel à coefficient opératoriel non borné, dans un espace de Banach du type UMD. On montre que la solution du probléme a la régularité maximale L^p. La méthode d'étude est basé sur le théoréme de Weiss sur les multiplicateurs.

Soit A un opérateur fermé définit dans un espace de Banach X, considèrons le problème suivant :

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

3.1.1 Rapels, notations et remarques

Definition 29 *Soit* $1 < p < \infty$, *on dit que le problème (3.1) posséde la propriété de la régularité maximale* L^p *si pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, *il existe un unique* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p(\mathbb{R}; D(A))$ *vérifiant (3.1).*

Rappellons que l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}; X)$ est constitué des fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}; X)$, tel que $u' \in L^p(\mathbb{R}; X)$ et vérifiant

$$-\int_{\mathbb{R}} u(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} u'(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Ainsi, $u \in L^p(\mathbb{R}; D(A))$ est une solution faible de (3.1) si

$$-\int_{\mathbb{R}} u(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (Au(t) + f(t))\,\varphi(t)\,dt,$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

on a $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}; D(A))$ est une solution faible de (3.1) si et seleument si (3.1) posséde la propriété de la régularité maximale.

Le problème (3.1) posséde la propriété de la régularité maximale si et selement s'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R};X)} + \|u\|_{L^p(\mathbb{R};D(A))} \leq c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}\,,$$

où $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ et u est une solution de (3.1).

Definition 30 *Un opérateur A est dit bissectoriel si*

$$i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \varrho(A) \text{ et } \sup_{s \in \Bbbk \setminus \{0\}} \|sR(is, A)\| < \infty$$

Definition 31 *Si l'ensemble $\{sR(is, A);\quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ est R-borné, alors l'opérateur A est dit R-bisectoriel.*

Theoreme 8 *Supposons que X est un espace UMD. Soit $1 < p < \infty$ les assertions suivantes sont equivalentes :*
- Le problème (3.1) posséde la propriété de la régularité maximale L^p
- L'opérateur A est R-bisectoriel et inversible.

La démonstration de ce théorème est basée sur les notions, et les résultats suivants :

Posons $\mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X) = \left\{ f \in S(\mathbb{R}; X),\ \widehat{f} \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}; X) \right\}$, où $\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$ est l'espace de toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ indéfiniements différentiables et à supports compacts.

Proposition 5 *: Supposons que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, soient $1 < p < \infty$, $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$, et $u \in L^p(\mathbb{R}; D(A))$. Alors les assertions suivants sont equivalents :*
- $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}; X)$ et u est solution de (3.1).
- $u \in S(\mathbb{R}; D(A))$, et $\widehat{u}(s) = R(is, A)\,\widehat{f}(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Definition 32 *Soient X et Y deux espaces de Banach, $1 < p < \infty$. Une fonction $M \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X; Y))$ est un multiplicateur de Fourier $L^p(\mathbb{R}; X) - L^p(\mathbb{R}; Y)$ s'il existe un opérateur $T : L^p(\mathbb{R}; X) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}; Y)$, tel que pour tout $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$ on a :*

$$Tf \in S(\mathbb{R}; Y) \text{ et } \widehat{(Tf)}(s) = M(s)\,\widehat{f}(s)\,, s \in \mathbb{R}.$$

Theoreme 9 *: Soient X et Y deux espaces de Banach, soit $M \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X; Y))$ tel que : $\{M(s), s \in \mathbb{R}\}$ et $\{sM'(s), s \in \mathbb{R}\}$ sont R-bornées dans $\mathcal{L}(X; Y)$. Alors M est un multiplicateur $L^p(\mathbb{R}; X) - L^p(\mathbb{R}; Y)$ pour $1 < p < \infty$.*

Démonstration. du théorème 8

$2 \Longrightarrow 1$ Supposons que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ et que les ensembles $\{M(s), s \in \mathbb{R}\}$ et $\{sM'(s), s \in \mathbb{R}\}$ sont R-bornés dans $\mathcal{L}(X;Y)$. Considérons l'application $M \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathcal{L}(X;Y))$ donnée par :

$$M(s) = R(is, A)$$

et on va montrer que M satisfait les hypothèses du théorème, pour cela il suffit de montrer que les deux ensembles $\{N(s), s \in \mathbb{R}\}$ et $\{sN'(s), s \in \mathbb{R}\}$ sont R-bornés dans $\mathcal{L}(X)$, où $N(s) = R(is, A)$. Comme on a $N(s) = isR(is, A) - I$ et $sN'(s) = isR(is, A) + s^2 R(is, A)^2$ sont R-bornés d'aprés les hypothèses. Alors d'aprés le théorème 9, il existe un opérateur borné

$$T : L^p(\mathbb{R}; X) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}; Y),$$

tel que pour $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$ on a

$$u = Tf \in S(\mathbb{R}; D(A)),$$

et

$$\widehat{u}(s) = R(is, A)\widehat{f}(s),$$

et d'aprés la proposition 5 u est la solution du problème (3.1) de plus elle vérifie l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R};D(A))} \leq \|T\| \|f\|_{L^p(\mathbb{R};X)}$$

Maintenant soit $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$ arbitraire. Alors il existe $f_n \in \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$ tel que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}; X)$. Soit $u_n = Tf_n$. Alors $u_n \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}; D(A))$. Pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\varphi'(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (Au_n(t) + f_n(t))\varphi(t)\,dt,$$

En faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, on obtient que u est une solution faible de (3.1). Et en utilisant les résultats précédents on obtient que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}; X)$. D'où le problème (3.1) admet une solution.

Maintenant montrons l'unicité de la solution du problème (3.1), pour cela soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}; X) \cap L^p(\mathbb{R}; D(A))$ tel que

$$u'(t) = Au(t) \qquad (p.p),$$

on remarque que $u \in C_0(\mathbb{R}; X)$. Considérons la transformation de Carleman $\widetilde{u}$ de u donnée par :

$$\widetilde{u}(\lambda) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(t)\,dt & (\operatorname{Re}\lambda > 0) \\ -\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} u(t)\,dt & (\operatorname{Re}\lambda < 0) \end{cases}.$$

Alors $\widetilde{u} : \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \longrightarrow X$ est holomorphe. Soit $x = u(0)$. Alors $\int_0^t u(s)\,ds \in D(A)$ et $u(t) = x + A\int_0^t u(s)\,ds$ pour tout $t \geq 0$ et comme $u'(t) = Au(t) \quad (p.p)$. Alors d'ici résulte que $\lambda \in \varrho(A) \setminus i\mathbb{R}, \widetilde{u}(\lambda) \in D(A)$ et $\widetilde{u}(\lambda) = R(\lambda, A)x$. Or $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, alors $\widetilde{u}$ admet un prolongement analytique, ce qui implique que $u = 0$. D'où l'unicité de la solution du problème (3.1).

$1 \Longrightarrow 2$ Supposons que (3.1) posséde la propriété de la régularité maximale L^p. Alors, d'aprés le résultat de Mielk on a $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$. D'aprés les rappels et les remarques de ce chapitre, il résulte qu'il existe un opérateur borné $T : L^p(\mathbb{R}; X) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}; D(A))$ tel que pour $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, la fonction $u = Tf$ est la solution de (3.1). Si $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{D}(\mathbb{R}; X)$, alors d'aprés la proposition 5 on a $Tf \in S(\mathbb{R}; D(A))$ et $\widehat{Tf}(s) = R(is, A)\widehat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R})$. Ainsi la fonction M à valeurs dans $\mathcal{L}(X; D(A))$ définie par $M(s) = R(is, A)$ est un multiplicateur de Fourier de $L^p(\mathbb{R}; X) - L^p(\mathbb{R}; Y)$ Alors d'aprés un résultat de Clément-Prüss [CP01], et aussi de [KW04,3.13] il résulte que l'ensemble $\{M(s) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X)$ est R-borné. Sachant que $A : D(A) \longrightarrow X$ est un isomorphisme, l'ensemle $\{AM(s) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X, D(A))$ est R-borné, et que $AM(s) = isR(is, A) - I$, d'où le résultat. ■

Bibliographie

[1] **Albrecht Pietsch** : *History Of Banach Spaces And Linear Operators.* Birkhäuser Boston (2007).

[2] **Arendt W. and Duelli M.**, *Maximal L^p-regularity for parabolic and elliptic equations on line.* J.evol.equ. (62006), 773-790.

[3] **Arendt, W. and BU, S**, *The operator-valued Marcinnkiewicz multiplier theorem and maximal regularity.* Math. Z. 240(2002), 311-343.

[4] **Arendt, W** ; *Semigroups and Evolution Equations : Functional Calculus, Regularity and Kernel Estimates.* Handbook of Differential Equations, Evolutionnary Equations, volume 1, Elsevier B.V., 2004.

[5] **Claude Gasquet et Patrik Witamski** : *Analyse de Fourier et Applications.* Dunod, Paris (2000), Masson, Paris (1996).

[6] **Clement, Ph. and Guerre-Delabriere, S.**, *on the regulrity of abstract Cauchy problems and boundary value problems*, Atti Accad. Naz. Lincei CI. Sci.nFis. Mat. Natur. Rend. Lincei 9(4) (1998), 245-266.

[7] **Clement, Ph. and Pruss, J.**, *An operator-valued transference principle and maximal regularity an vector-valued L_P-spaces.* In : Evolution Equ. and their Appl. Physical and Life Sciences, G. Lumer, L. Weis (eds.), Lect. Notes in Pure Appl. Math. Vol. 215, Marcel Dekker, New York, 2001, 67-87.

[8] **Clement, Ph., De Pagter, B., Sukochev, F. A. and Witvliet, M.**, *Schauder decomposition and multiplier theorems*, Studia Math., 138 (2000), 135-163.

[9] **Daniel Revug** : *Mesure et Intégration.* Hermann (1997).

[10] **Denk, R., Hieber, M. and Pruss, J.**, *R-boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 788 AMS, Providence, RI (2003).

[11] **Gutierrez, J.A. and Lacey, H.E.** : *On the Hilbert transform for Banach space valued functions*, dans Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics 939, Springer (1981).

[12] **El Haj Laamri** : *Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions.* Dunod, Paris (2001).

[13] **Herbert Aman** : *Linear and Quasilinear Parabolic Problems.* Birkhäuser Verlag Basel (1995).

[14] **Joram Lindenstrauss et Lior Tzafriri** : *Classical Banach Spaces I and II.* Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York (1977).

[15] **Kôsaku Yosida** : *Functional Anlysis.* Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).

[16] **Kunstmann, P. C. and Weis, L.**, *Maximal L_P-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus* in : Functional Analytic Methods for Evolution Equations, M. Iannelli, R. Nagel and S. Piazzera, eds., Lecture Notes for Mathematics, Springer, 2004, 65-311.

[17] **Tosio Kato** : *Perturbation theory for linear operator.* Springer-verlag, Berlin Heidelberg New York (1980).

[18] **Weis, L.**, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_P-regularity.* Math. Ann. 319 (2001), 735-758.

[19] **Weis, L.**, *A new approach to maximal L_P-regularity.* Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998). Dekker, New York, 2001, 195-214.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de la régularité maximale L^P pour une classe d'équations différentielles opérationnelles du premier ordre sur l'axe réel dans les espaces de Banach du type UMD. On montre que le problème étudié posséde la propriété de la régularité maximale L_P si et seulement si le coefficient opératoriel est R-bissectoriel et inversible. L'etude est basée sur la notion de R-bornitude.

Abstract

The present work is devoted to the study of L^P-maximal regularity for a on class of first order operator differential equations on the real line in the UMD Banach spaces. We proove that the considered problem is maximal L^P-regular if and only if the operator coefficient is R-bissectorial and invertible. The study is based on the notion of R-boundedness.

ملخص

هــــذا العمــــل يتــــضمن دراســــة التعــــديل الأعظمــــى L^P لــــصنف معــــين مــــن المعــــادلات التفاضــــلية المؤثريــــة مــــن الدرجــــة الأولــــى علــــى المــــستقيم الحقيقــــى فــــى الفــــضاءات البناخيــــة مــــن الــــنمط UMD. نبــــين ان المــــسالة المدروســــة تملــــك خاصــــية التعــــديل الأعظمــــى L^P اذا وفقــــط اذا كــــان المــــؤثر الأعظمــــى R–ثنــــائى القطــــاع و قابــــل للعكــــس. الدراسة تعتمد على R-محدودية.