

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université Mentouri – Constantine

Faculté des sciences

Département de mathématiques

N°d'ordre :

Série :

Mémoire

Pour l'optention du diplôme de

Magister

Spécialité Mathématique

Option Système dynamique et topologie algébrique

Présenté par : Berguella Nour Elhouda

Intitulé

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN
SYSTÈME DYNAMIQUE**

Soutenue le : .../.../...

Devant le jury

Mr. Ben Khafadar. M. Nessereddine	Prof	Univ. Mentouri. Constantine	Président
Mr. Bouzit Mohamed	M.C	Univ. Labri Ben M'hidi O.Bouaghi	Rapporteur
Mr. Hameida Ali	M.C	Univ. Mentouri. Constantine	Examineur
Mr. .Djazzar Salah	M.C	Univ. Mentouri. Constantine	Examineur

Remerciements

Au nom de Dieu le clément et le miséricordieux. Tout d'abord, je tiens à remercier infiniment Mr Bouzit Mohamed pour le choix passionnant et motivant du thème de ce mémoire, ainsi que pour son aide inestimable et les conseils précieux et utiles qu'il m'a apporté et je m'excuse si je l'ai dérangé avec mes questions.

En outre, je remercie Mr Benkafadar Nessereddine qui ma fait honneur en acceptait de présider ce jury, ainsi Mr Djazzar Salah et Mr Hameida Ali d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce travail, ainsi qu'à Melle Boughaba Sorya pour tout ses conseils et son orientation.

Il s'agit de mes parents qui ont tout fait que je sois ce que je suis, je remercie particulièrement ma mère dont le fait de penser à elle me redonne la confiance et me rassure, également à mon père pour ces plusieurs conseils et son soutien « merci maman, merci papa ». Ainsi mes frères Youcef, Walid, Abderrahim, et surtout Nessereddine.

Je me permets aussi de saluer tous mes amis Maya, Amina, Ibticem, Asma, Sana, Amel, Thoraya, Hanen, Amina, Mimi et Wahiba, et les remercie pour leur soutien et constant, sans oublier mes camarades de C. E. M de Oued Seguin.

Enfin je ne pas oublier toute ma famille, mes grandes mères Lkhamsa et Randa, mes tantes et mes oncles et leurs petites enfants chaque un par son nom, et surtout mon oncle Khalil et la petite Chaima.

Table des matières

Introduction	4
Chapitre I Notions préliminaires	6
1.1 Opérateurs linéaires et bilinéaires.	7
1.2 Espaces affines.	7
1.3 Espaces d’Hilbert.	8
1.4 Espaces des fonctions régulières.	9
1.5 Espaces de Sobolev.	10
1.6 Formulation variationnelle.	12
1.7 Théorie de Lax-Milgram.	15
Chapitre II La méthode des éléments finis	17
2.1 Aperçu sur la méthode des éléments finis.	18
2.2 La méthode des éléments finis unidimensionnel.	21
2.3 La méthode des éléments finis multidimensionnels.	39
Chapitre III Étude de problème de vibrations en élasticité linéaire	48
3.1 Élasticité linéaire isotrope ou élasticité classique.	49
3.2 Position du problème.	50
3.3 Formulation variationnelle.	52
3.4 Résolution du problème.	55
3.5 Estimations a priori.	57
3.6 Passage à la limite.	58
3.7 Un problème spectral associé.	60
Chapitre VI Étude numérique du problème de vibrations	63
4.1 Introduction.	64
4.2 Approximation de l’espace V .	64
4.3 Approximation du problème.	68
4.4 Discrétisation du problème par éléments finis de type \mathbb{P}_1 .	70
4.5 Calcule des différents termes.	73
4.6 Formation de système.	79
4.7 Prise en compte des conditions aux limites.	81
4.8 Résolution numérique.	82

Conclusion	85
Annexe	86
Bibliographie	95

Introduction

Ce mémoire est consacré à la résolution d'un système dynamique issu de la mécanique des milieux continus.

On étudie le problème de détermination de modes propres de vibrations d'une plaque. Les équations de départ sont des équations aux dérivées partielles linéaires qui se déduisent de la mécanique des milieux continus.

L'étude théorique de ces équations par les méthodes d'analyse fonctionnelle permet d'établir les propriétés d'existence et d'unicité de la solution. On y montre que le problème considéré conduit à un problème de valeurs propres non standard, que l'on réduit, pour la résolution numérique, à un problème standard de valeurs propres.

Pour l'aspect numérique, les équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis que l'on étudie en la rattachant aux méthodes générales des approximations d'espaces. Le calcul nécessite, d'une part une étude approfondie de quelques algorithmes adaptés au problème obtenu sous forme discrète, et d'autre part une mise en œuvre informatique importante.

Ce travail est une étape qui a permis la réalisation de codes de résolution exploitables pour traiter divers problèmes pratiques.

Les premières prémisses de la méthode des éléments finis ont été proposées par le mathématicien Richard Courant dans les années 1940. Cette méthode a été reconnue de nos jours comme un outil très performant dans l'analyse des structures. Elle est très utilisée par les ingénieurs surtout dans l'industrie. Presque tous les ouvrages traitant de cette méthode sont de haut niveau, d'où les problèmes rencontrés par les élèves ingénieurs de génie mécanique, génie civile, aérodynamique, etc.

Nous avons recours au calcul de modes propres d'une structure, cela conduit à une bonne manipulation des éléments de calcul matriciel.

L'utilisation de la méthode des éléments finis dépend, en grande partie d'une bonne utilisation de l'ordinateur. Un enseignant théorique ne donnera pas à l'étudiant une idée des détails de l'application de la méthode. Il n'est pas toujours facile de franchir la frontière entre la théorie et la programmation de la méthode. Dans cette méthode nous avons recours à un problème équivalent exprimé par des intégrales appelé problème variationnel.

L'idée de base de la méthode consiste à remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posé le problème variationnel par un sous espace V_h de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h se ramène à une simple résolution d'un système linéaire. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce qu'il soit une bonne approximation de

V et que la solution $u_h \in V_h$ de la formulation variationnelle soit proche de la solution $u \in V$.

Dans le cas d'une équation elliptique, le problème variationnel se pose, dans le cas général, de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V & \text{telle que} \\ J(u) \leq J(v) & v \in V \end{cases}$$

Où V est l'ensemble des fonctions admissibles, J est une fonction définie de V sur \mathbb{R} . En général, la fonction v représente des quantités variantes continûment telles que le déplacement d'un corps élastique, une température, etc, et $J(v)$ représente l'énergie totale qui accompagne v .

Cette approche variationnelle, qui admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle, est prise pour les problèmes d'évolutions en temps. Elle est cruciale pour la compréhension de la méthode des éléments finis.

Il est important de mentionner l'existence d'autres méthodes numériques de résolutions des équations aux dérivées partielles (méthodes des différences finies, de volumes finis, etc.), mais elles sont moins performantes.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier, on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle et utilisés dans les trois autres chapitres. Le deuxième comprend un aperçu sur la méthode des éléments finis illustré par des exemples. Dans le troisième chapitre on aborde le travail essentiel de ce mémoire à savoir l'étude fonctionnelle d'un problème de vibrations d'une plaque dans un milieu élastique avec un comportement isotrope. Cette étude conduit à un problème de valeurs propres non standard que l'on réduit à un problème standard. Quand au 4^{ème} chapitre, il est l'objet de l'approximation du problème, pris sur une plaque rectangulaire, et la mise en œuvre informatique. Le maillage a été réalisé par des triangles. La mise en œuvre informatique a nécessité d'une part une étude approfondie de quelques algorithmes adaptés au problème obtenu sous forme discrète et d'autre part, une mise en œuvre informatique importante.

Chapitre I

Notions préliminaires

Introduction

Cette partie contient quelques rappels sur les outils mathématiques utilisés dans la méthode des éléments finis.

1.1 Opérateurs linéaires et bilinéaires

1.1.1 Opérateurs linéaires continus

Soient V et W deux espaces vectoriels normés et soit $A : V \rightarrow W$ une application linéaire de V dans W . On dit que A est continue si

$$\sup_{v \in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} < +\infty \quad (1)$$

On note $\mathcal{L}(V, W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de V dans W . On munit $\mathcal{L}(V, W)$ d'une norme, en posant pour $A \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V, W)} = \sup_{v \in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \quad (2)$$

1.1.2 Formes bilinéaires continues

Soient V et W deux espaces vectoriels normés, on dit qu'une application $a : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times W$ ssi

1/ $\forall v \in V$, $a(v, \cdot)$ est une application linéaire de W dans \mathbb{R} .

2/ $\forall w \in W$, $a(\cdot, w)$ est une application linéaire de V dans \mathbb{R} .

3/ $\sup_{(v, w) \in V \times W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} < +\infty$.

On note $\mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires continues sur $V \times W$. En posant, pour $a \in \mathcal{L}(V \times W; \mathbb{R})$,

$$\|a\|_{V, W} = \sup_{(v, w) \in V \times W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \quad (3)$$

lorsque $V = W$, on dit que la forme bilinéaire $a \in \mathcal{L}(V \times W, \mathbb{R})$ est symétrique si pour tout $(v, w) \in V \times W$, $a(v, w) = a(w, v)$. On dit que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est positive si pour tout $v \in V$, $a(v, v) \geq 0$.

1.2 Espaces affines

Soit E un ensemble donné, et V est un k -espace vectoriel

Définition 01

E est un espace affine ssi

$$1/ \exists \text{ une application " + " : } E \times V \rightarrow E \\ (m, n) \mapsto m + n$$

$$2/ (m + u) + v = m + (u + v) \quad \forall m \in E, u, v \in V$$

$$3/ m + o_V = m \quad \forall m \in E$$

$$4/ \text{ Si } m, n \in E, \text{ alors } \exists! u \in V \text{ tel que } n = m + u$$

Remarque 01

Si V est un k -espace vectoriel et E est un V -espace affine on note parfois (E, V, k) et on dit que E est un espace affine associé au k -espace vectoriel V .

1.2.1 Application affine

Soit (E, V, k) et (F, W, k) deux espaces affines.

Définition 02

On dit que f est une application affine s'il existe une application linéaire notée $Df : V \rightarrow W$ telle que $f(m + v) = f(m) + Df(v) \quad \forall m \in E, v \in V$.

Df s'appelle la différentielle de f .

1.3 Espace de Hilbert

Les espaces d'Hilbert sont très importants du fait qu'ils sont à la base des théorèmes d'existence de la solution pour les problèmes issus de la mécanique, notamment en ce qui concerne les formulations variationnelles (ou principe des puissances virtuelles) qui rentrent dans le cadre de la théorie de Lax-Milgram.

Définition 03

Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire sur H est une forme bilinéaire définie positive symétrique $a(u, v)$ de $H \times H$ à valeur dans \mathbb{R} . Une telle forme bilinéaire induit une norme

$$\|u\|_a = \{a(u, u)\}^{\frac{1}{2}} \quad u \in H$$

Définition 04

Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on dit que H est un espace d'Hilbert s'il est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Théorème 01 (De Représentation de Riesz)

Soit V un espace d'Hilbert, pour tout $v' \in V'$, il existe un et un seul $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$

$$\langle v', v \rangle_{V', V} = (u, v)_V \quad (4)$$

l'application

$$\begin{aligned} V' &\rightarrow V \\ v' &\mapsto u \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique.

1.3.1 Opérateurs coercifs

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$, est monotone si

$$\forall v \in V, \quad \langle Av, v \rangle_{V', V} \geq 0 \quad (5)$$

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$ est coercif s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \langle Av, v \rangle_{V', V} \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (6)$$

La notion d'opérateur coercif n'est pertinente que dans un cadre hilbertien. En effet, en posant pour $(v, w) \in V \times V$ on a

$$(v, w)_V = \frac{1}{2} \left(\langle Av, w \rangle_{V', V} + \langle Aw, v \rangle_{V', V} \right)$$

On vérifie qu'on équipe V d'un produit scalaire dont la norme induite est équivalente à la norme $\|\cdot\|_V$; par conséquent, l'existence d'un opérateur coercif dans $\mathcal{L}(V, V')$ implique que V est un espace d'Hilbert.

On vérifie facilement qu'une condition suffisante pour qu'un opérateur soit bijectif est qu'il soit coercif.

1.4 Espaces des fonctions régulières

1.4.1 Espace \mathbb{C}^k

Soit un entier $k \geq 0$, soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , on désigne par $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans \mathbb{R}^d . Soit E un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$, les espaces $\mathbb{C}^k(E)$ sont définis de la manière suivante

Définition 05

Pour $k = 0$, $\mathbb{C}^0(E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur E à valeur dans \mathbb{R} .

Pour $k \geq 1$, $\mathbb{C}^k(E)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions k -fois continûment différentiable sur E à valeur dans \mathbb{R} .

On note (x_1, x_2, \dots, x_d) les coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^k , pour $i \in \{1, \dots, d\}$ où $d \in \mathbb{N}$ et pour $f \in \mathbb{C}^k(E)$, $\partial_i f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_i .

Pour un entier $\alpha_i \in \{0, \dots, k\}$, $\partial_i^{\alpha_i} f$ désigne la dérive partielle de f d'ordre α_i par rapport à x_i avec la convention que $\partial_i^0 f = f$, en posant pour $k \geq 0$ et pour $f \in \mathbb{C}^k(E)$,

$$\|f\|_{\mathbb{C}^k(E)} = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k}} \left(\sup_{x \in E} |\partial^\alpha f(x)| \right) \quad (7)$$

On munit $\mathbb{C}^k(E)$ d'une norme. Dans la définition ci-dessus, α est un multi-indices de \mathbb{N}^d , c'est-à-dire $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)^T$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $|\alpha| = \sum_{i=1, d} \alpha_i$ et $\partial f = (\partial_1^{\alpha_1} f, \partial_2^{\alpha_2} f, \dots, \partial_d^{\alpha_d} f)$. On introduit également la semi norme suivante

$$|f|_{\mathbb{C}^k(E)} = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| = k}} \left(\sup_{x \in E} |\partial^\alpha f(x)| \right) \quad (8)$$

Il s'agit d'une semi norme et non d'une norme car $|f|_{\mathbb{C}^k(E)} = 0$, si f est dans P_{k-1} .

1.5 Espace de Sobolev

Si U un ouvert de \mathbb{R}^n on note habituellement $W^{k,p}(U)$ l'espace des fonctions mesurables, k fois dérivables au sens des distributions, et telles que les dérivées successives soient dans $L^p(U)$.

Définition 06

Soit un entier $s \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ est défini comme suit

$$H^s(\Omega) = \{v \in D'(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega); |\alpha| \leq s\} \quad (9)$$

Pour $s = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

On montre que pour tout $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ est un espace d'Hilbert lorsqu'il est équipé du produit scalaire

$$(v, w)_{s, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} \partial^\alpha v \partial^\alpha w \, d\Omega. \quad (10)$$

La norme induite est notée

$$\|v\|_{s,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

On introduit également l'espace

$$H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)} \quad (12)$$

lorsque l'ouvert Ω est borné, cet espace est strictement inclus dans $H^s(\Omega)$.

Pour $s = 1$, on obtient l'espace d'Hilbert

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\}; \partial_i v \in L^2(\Omega)\}, \quad (13)$$

avec le produit scalaire

$$(v, w)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} vw + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w = \int_{\Omega} vw + \sum_{i=1,d} \int_{\Omega} \partial_i v \partial_i w, \quad (14)$$

et la norme induit

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla v)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Remarque 02

La norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{0,\Omega} + |\cdot|_{1,\Omega}$. Dans ce qui suit, on utilise indifféremment l'une ou l'autre de ces normes. Enfin, par définition, on a

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \quad (16)$$

Inégalité de Korn

Soit

$$|||v||| = \left(\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} v_i v_i dx \right)^{1/2}$$

où ε_{hk} sont définis par $\varepsilon_{hk}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_h}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_h} \right)$, alors il existe une constante C telle que

$$\|v\|^2 \succ C \|v\|_V^2$$

1.6 Formulation Variationnelle

1.6.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique.

L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle. Disons tout de suite que l'intérêt de cette approche dépasse, et de loin, le cadre des e.d.p elliptiques et même le cadre d'analyse mathématique «pure» auquel nous nous restreignons pour l'instant. En effet, nous reprendrons cette approche variationnelle pour les problèmes d'évolutions en temps (e.d.p de type parabolique ou hyperbolique), et elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis. Par ailleurs, cette approche admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle.

Exemple 01

Prenons l'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique à savoir le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Ω est un ouvert de l'espace \mathbb{R}^N , $\partial\Omega$ est son bord (ou frontière), f est un second membre (une donnée du problème), et u est l'inconnue.

1.6.2 Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation (17) par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multiplié par une fonction quelconque, dite fonction test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par partie dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

Formule de Green

Soit Ω un ouvert de l'espace \mathbb{R}^N dont le bord (ou la frontière) noté $\partial\Omega$. Nous supposons aussi que Ω est un ouvert régulier de classe C^1 .

Définition 07

On dit qu'un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est régulier de classe C^k (avec un entier $k \geq 1$) s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{0 \leq i \leq I}$ tel que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0, I} \omega_i, \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1, I} \omega_i$$

Définition 08

On définit la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ comme étant le vecteur unité $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ normal en tout point au plan tangent de Ω et pointant vers l'extérieure de Ω .

Dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on note dx la mesure volumique, ou mesure de Lebesgue de dimension n . Sur $\partial\Omega$, on note ds la mesure surfacique, ou mesure de Lebesgue de dimension $n - 1$.

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant

Théorème 02 (Formule de Green) [4]

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit ω une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$, alors elle vérifie la Formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \omega(x) n_i(x) ds \quad (18)$$

où n_i est la i ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

Ce théorème a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la Formule de Green.

Corollaire 01 (Formule d'intégration par partie)

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u et v deux fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$, alors elles vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds \quad (19)$$

En effet, Il suffit de prendre $w = uv$ dans la Formule de Green.

Corollaire 02

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 . Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$, alors elles vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds \quad (20)$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u , et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$

En effet, On applique le Corollaire précédent à v et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et on somme en i .

1.6.3 Formulation variationnelle

Pour simplifier la représentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de (17) est continu sur $\overline{\Omega}$. Le résultat principal de cette partie est la proposition suivante

Proposition 01

Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$, soit X l'espace défini par

$$X = \{ \varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \},$$

alors u est une solution du problème aux limites (17) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \text{pour toute fonction } v \in X. \quad (21)$$

L'égalité (21) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (17).

Remarques 03

1/ Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (21) est qu'elle a un sens si la solution u est seulement une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$, contrairement à la formulation "classique" (17) qui requiert que u appartienne à $C^2(\overline{\Omega})$. On pense déjà qu'il est plus simple de résoudre (21) que (17) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

2/ La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (17).

3/ Lorsqu'on prend $v = u$ dans (21), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une égalité d'énergie, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine Ω (le terme de gauche de (21)) et une énergie potentielle associée à f (le terme de droite de (21)).

4/ En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (21) sous la forme

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in X \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \end{cases} \quad \forall v \in X$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

5/ L'idée principale de l'approche variationnelle est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (21) ce qui entraîne le même résultat pour l'équation (17) à cause de la proposition 01.

1.7 Théorie de Lax-Milgram

1.7.1 Cadre abstrait

Nous rappelons rapidement une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace d'Hilbert. On note V l'espace d'Hilbert réel. Suivant la remarque précédente, nous considérons une formulation variationnelle de type

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telque} \\ a(u, v) = L(v) \end{cases} \quad \forall v \in V \quad (22)$$

Les hypothèses sur $a(.,.)$ et L sont

1/ $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \mapsto L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C \|v\| \quad \text{pour tout } v \in V$$

2/ $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $\omega \mapsto a(\omega, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$ et $v \mapsto a(\omega, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $\omega \in V$.

3/ $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M \succ 0$ tel que

$$|a(\omega, v)| \leq M \|\omega\| \|v\| \quad \text{pour tout } \omega, v \in V \quad (23)$$

4/ $a(.,.)$ est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu \succ 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \nu \|v\|^2 \quad \text{pour tout } v \in V \quad (24)$$

toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (22). En particulier, la coercivité de $a(.,.)$ est essentielle.

Théorème 03 (Lax-Milgram) [4]

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V , alors la formulation variationnelle (22) admet une solution unique. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire $L(.)$.

Remarque 04

L'espace d'Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du théorème de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité d'un opérateur A est équivalente à son inversibilité (d'après le théorème de représentation de Riesz). On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général), que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ est indispensable puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A . Remarquons, pour finir, que si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$.

Chapitre II

La Méthode des éléments finis

2.1 Aperçu sur la Méthode des éléments finis

2.1.1 Approximation interne générale

Nous considérons le cadre général de la formulation variationnelle. Étant donné un espace d'Hilbert V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(.,.)$ et une forme linéaire continue $L(.)$. On considère la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}, \quad (25)$$

dont on sait qu'elle admet une solution unique grâce au théorème de Lax Milgram. L'approximation interne de (17) consiste à remplacer l'espace d'Hilbert V par un sous espace de dimension fini V_h , c'est-à-dire à chercher la solution de

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (26)$$

La résolution de l'approximation interne (26) devient plus facile comme le montre le lemme suivant.

Lemme 01

Soit V un espace d'Hilbert réel, V_h un sous espace de dimension fini et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue sur V , et $L(.)$ une forme linéaire continue. Alors l'approximation interne (26) admet une solution unique. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(.,.)$ est symétrique).

Démonstration

L'existence et l'unicité de $u_h \in V_h$, solution de (26), découle du théorème de Lax-Milgram appliqué à V_h . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$ de V_h .

Si $u_h = \sum_{j=1, N_h} u_j \varphi_j$, on pose $U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})$ le vecteur dans \mathbb{R}^{N_h} des coordonnées de u_h . Le problème (26) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{trouver } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que} \\ a\left(\sum_{j=1, N_h} u_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N_h \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h \quad (27)$$

pour $1 \leq i, j \leq N_h$,

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (b_h)_i = L(\varphi_i).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice \mathcal{K}_h , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, on a

$$\mathcal{K}_h U_h \cdot U_h \geq \nu \left\| \sum_{j=1, N_h} u_j \varphi_j \right\|^2 \geq C |U_h|^2$$

où C et ν sont des constantes positives. Ceci découle du fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{N_h}). De même, la symétrie de $a(\cdot, \cdot)$ implique celle de \mathcal{K}_h . Dans les applications mécaniques, la matrice \mathcal{K}_h est appelée matrice de rigidité.

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace V par le sous-espace V_h . Plus précisément, nous allons majorer la différence $\|u - u_h\|$ où u est la solution dans V de (25) et u_h celle de (26) dans V_h . Précisons auparavant quelques notations, on note $\nu \succ 0$ la constante de coercivité et $M \succ 0$ la constante de la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ qui vérifient

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \nu \|u\|^2 \quad \forall u \in V \\ |a(u, v)| &\leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Le lemme suivant, dû à Jean Céa, montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous-espace V_h par la distance entre u et V_h .

Lemme 02 (de Céa)

On se place sous les hypothèses du lemme 1. Soit u la solution de (25) et u_h celle de (26). On a

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (28)$$

Lemme 03

On se place sous les hypothèses du Lemme 01 et on suppose qu'il existe un sous espace $\mathcal{V} \in V$ dense dans V et une application r_h de \mathcal{V} dans V (appelée opérateur d'interpolation) tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (29)$$

alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0 \quad (30)$$

2.1.2 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin a été un précurseur de la méthode des éléments finis. Bien qu'elle n'a pas d'intérêt numérique en général, elle est très utile d'un point de vue théorique (notamment pour l'étude des problèmes non-linéaires). Elle rentre dans le cadre de l'approximation variationnelle interne décrit ci-dessus.

On suppose que l'espace d'Hilbert V est séparable de dimension infinie, ce qui entraîne l'existence d'une base hilbertienne $(e_i)_{i \geq 1}$ de V . On choisit alors \mathcal{V} comme le sous espace engendré par cette base hilbertienne qui est évidemment dense dans V .

En posant $h = 1/n$, on définit V_h comme le sous espace de dimension finie engendré par (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Finalement, l'opérateur d'interpolation r_h est simplement la projection orthogonale sur V_h (qui est définie ici dans tout V et pas seulement dans \mathcal{V}).

Toutes les hypothèses des lemmes 1, 2 et 3 sont donc satisfaites et on en déduit que la solution approchée u_h converge vers la solution exacte u . Rappelons que u_h est calculé en résolvant le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h,$$

où U_h est le vecteur dans \mathbb{R}^n des coordonnées u_h dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) . Malgré son adéquation au cadre théorique développé ci-dessus, la méthode de Galerkin est peu commode d'un point de vue numérique. En effet, la matrice \mathcal{K}_h que l'on obtient ainsi est généralement « pleine » c'est-à-dire que tous les coefficients sont non nuls en général, et « mal conditionnée » c'est-à-dire la résolution numérique du système linéaire sera instable car il est très sensible aux erreurs d'arrondi du calcul sur ordinateur.

De ce point de vue la méthode des éléments finis est bien plus performante et de loin préférable à la méthode de Galerkin.

2.1.3 Méthode des éléments finis (principes généraux)

Le principe de la méthode des éléments finis est de construire des espaces d'approximation interne V_h , des espaces fonctionnels usuels $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$... dont la définition est basée sur la notion géométrique de maillage du domaine Ω . Un maillage est un pavage de l'espace en volumes élémentaires très simples : intervalle, triangles, tétraèdres, parallélépipèdes (figure 7).

Nous donnerons plus loin une définition précise d'un maillage dans le cadre de la méthode des éléments finis multidimensionnelle. Dans ce contexte, le paramètre h de V_h correspondant à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage.

Typiquement, une base de V_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes

1/ Pour la limite $h \rightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus «gros» et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier.

2/ La matrice de rigidité \mathcal{K}_h du système linéaire (27) sera creuse, c'est-à-dire que la plus part de ses coefficients seront nuls, symétrique et définie positive.

La méthode des éléments finis est une des méthodes les plus efficaces, ce qui limitera le coût de la résolution numérique, elle est la plus utilisée pour résoudre numériquement des problèmes aux limites et elle est à la base de beaucoup de logiciels de calculs industriels.

2.2 La méthode des éléments finis unidimensionnelle

Par souci de simplicité, nous commençons par présenter la méthode des éléments finis dans le cas unidimensionnel. Sans perte de généralité, nous choisissons le domaine $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1, un maillage est simplement constitué d'une collection des points $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ tels que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

Le maillage sera dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire

$$x_j = jh \text{ avec } : h = \frac{1}{n+1}, 0 \leq j \leq n+1$$

Les points x_j sont aussi appelés les sommets du maillage.

Exemple 02

Par souci de simplicité, nous considérons, pour l'instant, le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$. Dans tout ce qui suit on notera \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k .

2.2.1 La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \{v \in C([0, 1]), \quad v \mid [x_j, x_{j+1}] \in \mathbb{P}_1, \quad 0 \leq j \leq n\} \quad (32)$$

et sur son sous-espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h, \quad v(0) = v(1) = 0\} \quad (33)$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est alors simplement la méthode d'approximation variationnelle interne appliquée aux espaces V_h ou V_{0h} définis par (32) ou (33). On peut représenter les fonctions de V_h ou V_{0h} , affines par morceaux à l'aide des fonctions de bases très simples. Introduisons la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, pour $0 \leq j \leq n+1$, on définit les fonctions de base (figure 01)

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \quad (34)$$

Lemme 04

L'espace V_h défini par (32) est un sous-espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $n+2$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$

$$v_h(x) = \sum_{j=0, n+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

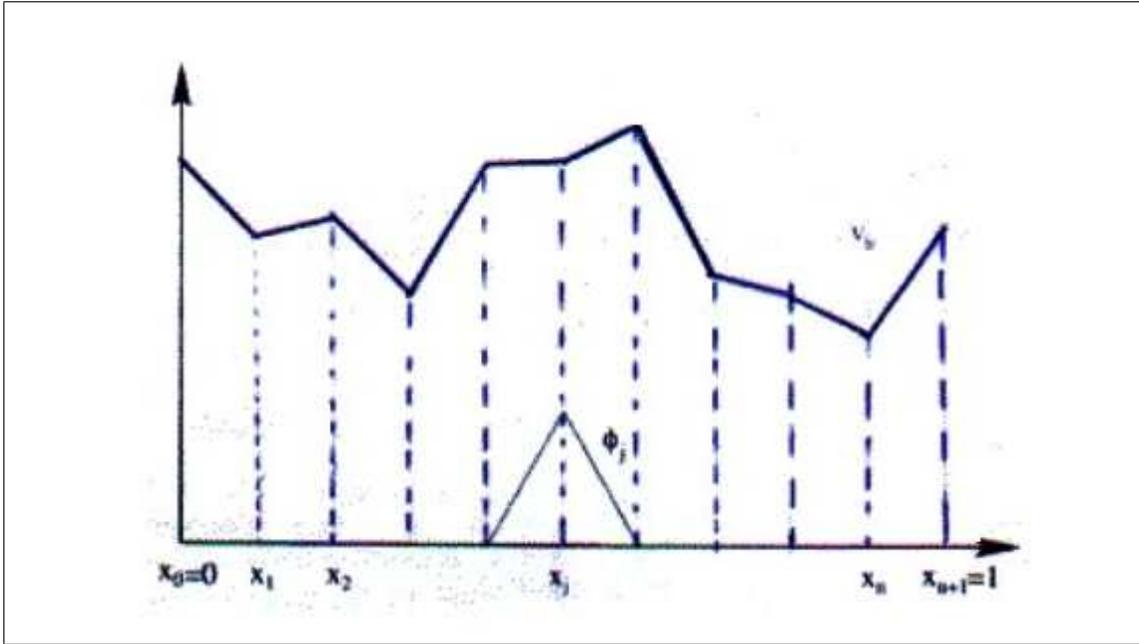


Figure 1: Maillage de $\Omega =]0, 1[$ et fonctions de base en éléments finis \mathbb{P}_1 .

de même V_{0h} , défini par (33) est un sous-espace $H_0^1(0, 1)$ de dimension n et toute fonction $v_h \in V_{0h}$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$.

$$v_h(x) = \sum_{j=1, n} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Remarque 05

La base (φ_j) , définie par (34) permet de caractériser une fonction de V_h par ses valeurs aux nœuds du maillage. Dans ce cas, on parle d'éléments finis de Lagrange. Nous verrons plus loin qu'on peut introduire d'autres espaces V_h pour lesquels une fonction sera caractérisée, non seulement par ses valeurs, mais aussi par les valeurs de sa dérivée, on parle alors d'éléments finis d'Hermite. Ici comme les fonctions sont localement \mathbb{P}_1 , on dit que l'espace V_h défini par (32) est l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre 1.

Cet exemple d'éléments finis \mathbb{P}_1 permet à nouveau de comprendre l'intérêt de la formulation variationnelle. En effet, les fonctions de V_h ne sont pas deux fois dérivables sur le segment $[0, 1]$ et cela n'a pas de sens de résoudre, même de manière approchée, l'équation (31) (en fait la dérivée seconde d'une fonction de V_h est une somme de masses de Dirac aux nœuds du maillage!).

Au contraire, il est parfaitement légitime d'utiliser des fonctions de V_h dans la formulation variationnelle (26) qui ne requiert qu'une seule dérivée.

Décrivons la résolution pratique du problème de Dirichlet (31) pour la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . La formulation variationnelle (26) de l'approximation interne devient ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ \int_{[0,1]} u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0h} \end{array} \right. \quad (35)$$

On décompose u_h sur la base des $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on prend $v_h = \varphi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1,n} u_h(x_j) \int_{[0,1]} \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

En notant

$$U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}, \quad b_h = \left(\int_{[0,1]} f(x) \varphi_i(x) dx \right)_{1 \leq i \leq n},$$

et en introduisant la matrice de rigidité

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{[0,1]} \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

la formulation variationnelle dans V_{0h} revient à résoudre, dans \mathbb{R}^n , le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

Comme les fonctions de base φ_j ont un « petit » support, l'intersection des supports de φ_i et φ_j est souvent vide et la plupart des coefficients de \mathcal{K}_h sont nuls. Un calcul simple montre que

$$\int_{[0,1]} \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \begin{cases} -h^{-1} & \text{si } j = i - 1 \\ 2h^{-1} & \text{si } j = i \\ -h^{-1} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la matrice \mathcal{K}_h est tridiagonale

$$\mathcal{K}_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Pour obtenir le second membre b_h il faut calculer les intégrales

$$(b_h)_i = \int_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} f(x) \varphi_i(x) dx \quad \text{si } 1 \leq i \leq n$$

L'évaluation exacte du second membre b_h , peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliquée. En pratique, on a recours à des formules de quadrature (ou formule d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant b_h .

La résolution du système linéaire $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ est la partie la plus coûteuse de la méthode en terme de temps de calcul. Rappelons que la matrice \mathcal{K}_h est nécessairement inversible.

Exemple 03 (Problème de Neumann)

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour le problème de Neumann suivant est très similaire

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f & \text{dans }]0, 1[\\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta \end{cases} \quad (37)$$

Rappelons que (37) admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et

$$a \in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } a(x) \geq a_0 \geq 0 \text{ pp dans } \Omega$$

La formulation variationnelle (26) de l'approximation interne devient ici

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \\ \int_{[0,1]} (u'_h(x) v'_h(x) + a(x) u_h(x) v_h(x)) dx = \int_{[0,1]} f(x) v_h(x) dx - \alpha v_h(0) + \beta v_h(1) \end{cases}$$

Pour tout $v_h \in V_h$. En décomposant u_h sur la base des $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$, la formulation variationnelle dans V_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^{n+2} le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

avec $U_h = (u_h(x_j))_{0 \leq j \leq n}$, et une nouvelle matrice de rigidité

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{[0,1]} \left(\varphi_j'(x) \varphi_i'(x) + a(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) \right) dx \right)_{0 \leq i, j \leq n+1}$$

et

$$(b_h)_i = \int_{[0,1]} f(x) \varphi_i(x) dx \quad \text{si } 1 \leq i \leq n$$

$$(b_h)_0 = \int_{[0,1]} f(x) \varphi_0(x) dx - \alpha$$

$$(b_h)_{n+1} = \int_{[0,1]} f(x) \varphi_{n+1}(x) dx + \beta.$$

Lorsque a n'est pas une fonction constante, il est aussi nécessaire, en pratique, d'utiliser des formules de quadrature pour évaluer les éléments de la matrice \mathcal{K}_h .

2.2.2 Convergence et estimation d'erreur

Pour démontrer la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 dans le cas unidimensionnel nous définissons tout d'abord un opérateur d'interpolation r_h .

Définition 09

On appelle opérateur d'interpolation \mathbb{P}_1 l'application linéaire r_h de $H^1(0, 1)$ dans V_h défini, pour tout $v \in H^1(0, 1)$, par

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0, n+1} v(x_j) \varphi_j(x)$$

Cette définition a bien un sens car, les fonctions de $H^1(0, 1)$ sont continues et leurs valeurs ponctuelles sont donc bien définies. L'interpolé $r_h v$ d'une fonction v est simplement la fonction affine par morceaux qui coïncide avec v sur les sommets des maillage x_j (figure 02).

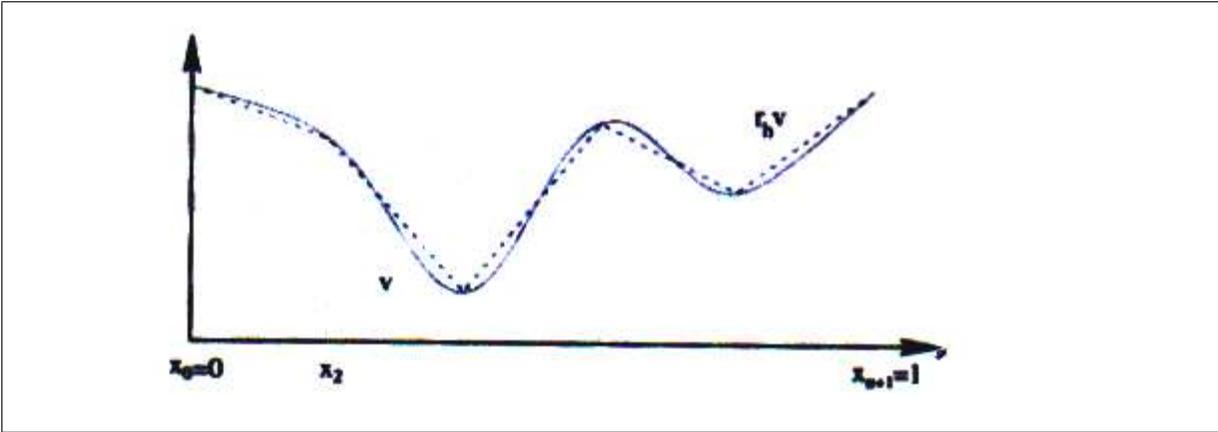


Figure 2: Interpolation \mathbb{P}_1 d'une fonction de $H^1(0,1)$

Rappelons qu'en dimension une d'espace l'interpolé est défini pour toute fonction de $H^1(0,1)$ et non pas seulement pour les fonctions régulières de $H^1(0,1)$ (ce qui sera le cas en dimension supérieure).

La convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 repose sur le lemme suivant

Lemme 05 (d'interpolation)

Soit r_h l'opérateur d'interpolation \mathbb{P}_1 . Pour tout $v \in H^1(0,1)$, il vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0$$

de plus si $v \in H^2(0,1)$, alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}$$

Théorème 04 [1]

Soit $u \in H_0^1(0,1)$ et $u_h \in V_{0h}$ les solutions de (31) et (35) respectivement, alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - r_h u\|_{H^1(0,1)} = 0 \tag{38}$$

De plus, si $u \in H^2(0,1)$ (ce qui est vrai si $f \in L^2(0,1)$), alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - r_h u\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)} \tag{39}$$

Démonstration

Nous démontrons ce théorème dans le cas d'un maillage uniforme, dans le segment $[0, 1]$ (autrement dit $x_{j+1} - x_j = h$). Le résultat peut néanmoins se généraliser à des maillages non uniformes mais réguliers, et dans ce cas h est la distance maximum entre deux points $h = \max_{0 \leq j \leq n} (x_{j+1} - x_j)$.

Pour obtenir (39), on majore l'estimation du lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - r_h u\|_{H^1(0,1)}$$

Ce qui permet de conclure grâce au lemme 05.

Démonstration du Lemme 05

Nous donnons maintenant la démonstration du lemme d'interpolation sous forme de deux autres lemmes techniques.

Lemme 06

Il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout $v \in H^2(0, 1)$

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|v''\|_{L^2(0,1)} \quad (40)$$

$$\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)} \quad (41)$$

Démonstration

Soit $v \in C^\infty([0, 1])$. Par définition, l'interpolée $r_h v$ est une fonction affine et pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$, on a

$$\begin{aligned} v(x) - r_h v(x) &= v(x) - \left(v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j) \right) \quad (42) \\ &= \int_{[x_j, x]} v'(t) dt - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \int_{[x_j, x_{j+1}]} v'(t) dt \\ &= (x - x_j) v'(x_j + \theta_x) - (x - x_j) v'(x_j + \theta_j) \\ &= (x - x_j) \int_{[x_j + \theta_j, x_j + \theta_x]} v''(t) dt \end{aligned}$$

Par application de la formule des accroissements finis avec $0 \leq \theta_x \leq x - x_j$ et $0 \leq \theta_j \leq h$. On en déduit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que

$$|v(x) - r_h v(x)|^2 \leq h^2 \left(\int_{[x_j, x_{j+1}]} |v''(t)| dt \right)^2 \leq h^3 \int_{[x_j, x_{j+1}]} |v''(t)|^2 dt \quad (43)$$

En intégrant (42) par rapport à x sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, on obtient

$$\int_{[x_j, x_{j+1}]} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{[x_j, x_{j+1}]} |v''(t)|^2 dt,$$

ce qui donne, par sommation en j , exactement (38). Par densité, ce résultat est encore vrai pour tout $v \in H^2(0, 1)$. La démonstration de (39) est tout à fait similaire

pour $v \in C^\infty([0, 1])$ et $x \in]x_j, x_{j+1}[$, on écrit

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_{[x_j, x_{j+1}]} (v'(x) - v'(t)) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{[x_j, x_{j+1}]} \int_{[t, x]} v''(y) dy. \end{aligned}$$

Élevons cette inégalité au carré, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz deux fois et sommant en j , on obtient (39), qui est aussi valide pour tout $v \in H^2(0, 1)$ par densité.

Lemme 7

Il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout $v \in H^1(0, 1)$

$$\|r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C \|v\|_{H^1(0,1)} \quad (44)$$

et

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|v'\|_{L^2(0,1)} \quad (45)$$

de plus, pour tout $v \in H^1(0, 1)$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} = 0 \quad (46)$$

Démonstration

Les preuves de (44) et (26) sont dans le même esprit que celle du lemme 06. Soit $v \in H^1(0, 1)$. Tout d'abord on a

$$\|r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq \max_{x \in [0,1]} |r_h v(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq C \|v\|_{H^1(0,1)}$$

Comme $r_h v$ est affine et puisque on a une propriété qui affirme que v est bien la primitive de v' , on a

$$\begin{aligned} \int_{[x_j, x_{j+1}]} |(r_h v)'(x)|^2 dx &= \frac{(v(x_{j+1}) - v(x_j))^2}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{[x_j, x_{j+1}]} v'(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_{[x_j, x_{j+1}]} |v'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et par sommation en j , on est conduit à (44). Pour obtenir (45), on reprend la deuxième égalité de (42), d'où

$$|v(x) - r_h v(x)| \leq 2 \int_{[x_j, x_{j+1}]} |v'(t)| dt$$

En élevant au carré, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en intégrant par rapport à x , puis en sommant en j , on obtient bien (45).

Passons à la démonstration de (46). Soit $\varepsilon > 0$, comme $C^\infty([0, 1])$ est dense dans $H^1(0, 1)$, pour tout $v \in H^1(0, 1)$ il existe $\phi \in C^\infty([0, 1])$ tel que

$$\|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$$

or $r_h v$ est une application linéaire qui vérifie (44), donc on en déduit

$$\|(r_h v)' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq C \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq C\varepsilon$$

Le choix de ϕ et de ε étant fixé, de (41) appliqué à ϕ que, pour h suffisamment petit, on déduit

$$\|\phi' - (r_h\phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$$

Par conséquence, en sommant ces trois dernières inégalités, on obtient

$$\|v' - (r_hv)'\|_{L^2(0,1)} \leq \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} + \|\phi' - (r_h\phi)'\|_{L^2(0,1)} + \|(r_hv)' - (r_h\phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq C\varepsilon,$$

ce qui donne (46).

Remarques 06

1/ L'estimation (39) indique la vitesse de convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . Comme cette majoration est proportionnelle à h , on dit que la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge linéairement.

2/ Remarquons que le théorème de convergence est valable lorsque la matrice de rigidité \mathcal{K}_h et le second membre b_h sont évalués exactement. Cependant, la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge aussi lorsqu'on utilise les formules quadrature adéquates pour calculer \mathcal{K}_h et b_h .

2.2.3 La méthode des éléments finis \mathbb{P}_2

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 repose sur l'espace discret

$$V_h = \{v \in C([0, 1]), v \mid [x_j, x_{j+1}] \in \mathbb{P}_2, \quad 0 \leq j \leq n\} \quad (47)$$

et sur son sous-espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h, \quad v(0) = v(1) = 0\} \quad (48)$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 est la méthode d'approximation variationnelle interne appliquée à ces espaces V_h et V_{0h} . Les deux espaces sont composés de fonctions continues, paraboliques par morceaux qu'on peut représenter à l'aide de fonctions de base très simples.

Introduisons tout d'abord les points milieux des segments $[x_j, x_{j+1}]$ définis par

$$x_{j+1/2} = x_j + h/2, \quad 0 \leq j \leq n$$

On définit aussi deux fonctions "mères"

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

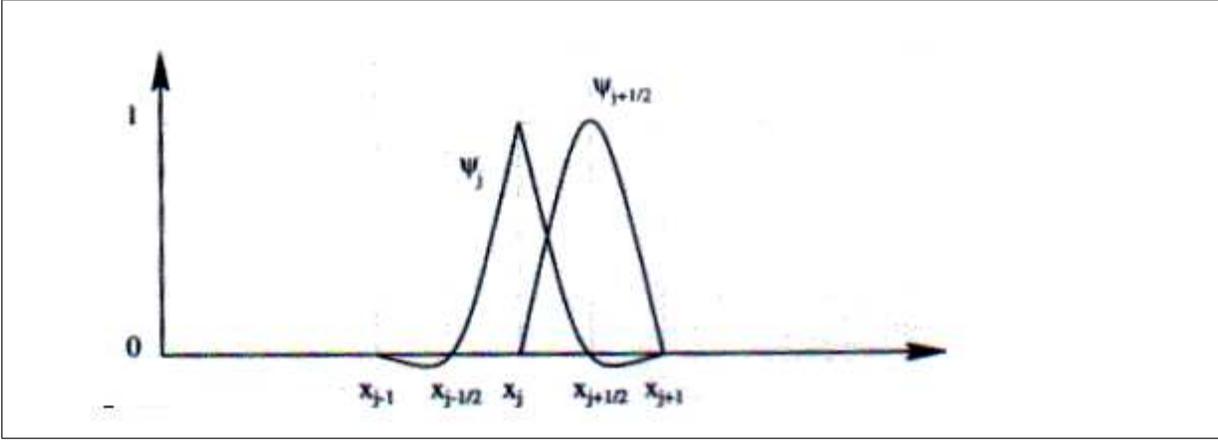


Figure 3: Les fonctions de base des éléments finis \mathbb{P}_2

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, pour $0 \leq j \leq n + 1$, on définit les fonctions de base (figure 03).

$$\psi_j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) \quad 0 \leq j \leq n + 1$$

$$\psi_{j+1/2}(x) = \psi\left(\frac{x - x_{j+1/2}}{h}\right) \quad 0 \leq j \leq n$$

Lemme 08

L'espace V_h défini par (47), est un sous espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $2n + 3$ et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ et aux milieux $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq n}$.

$$v_h(x) = \sum_{j=0, n+1} v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0, n} v_h(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

De même, V_{0h} défini par (48) est un sous espace de $H_0^1(0, 1)$ de dimension $2n + 1$ et toute fonction $v_h \in V_{0h}$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et aux milieux $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq n}$.

$$v_h(x) = \sum_{j=1, n} v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0, n} v_h(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Remarque 07

Ici encore, V_h est un espace d'éléments finis de Lagrange. Comme les fonctions sont localement \mathbb{P}_2 , on dit que l'espace V_h défini par (47) est l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre 2.

Théorème 05 [1]

Soit $u \in H_0^1(0, 1)$ et $u_h \in V_{0h}$ les solutions de (31) et (35) respectivement, alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 converge, c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0,$$

de plus, si $u \in H^3(0, 1)$ (ce qui est vrai si $f \in H^1(0, 1)$), alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^2 \|u'''\|_{L^2(0,1)}$$

Remarque 08

Le théorème 05 montre l'avantage principale des éléments finis \mathbb{P}_2 à savoir si la solution est régulière, alors la convergence de la méthode est quadratique (la vitesse de convergence est proportionnelle à h^2) alors que la convergence pour les éléments finis \mathbb{P}_1 est seulement linéaire (proportionnelle à h).

Cet avantage a évidemment un prix : il y a deux fois plus d'inconnues (exactement $2n + 1$ au lieu de n pour les éléments finis \mathbb{P}_1). Donc la matrice de rigidité est deux fois plus grande, et en plus la matrice a cinq diagonales non nulles au lieu de trois dans la cas \mathbb{P}_1 . Remarquons aussi que si la solution n'est pas régulière ($u \in H^3(0, 1)$) il n'y a aucun avantage théorique (en pratique aussi) à utiliser les éléments finis \mathbb{P}_2 plutôt que \mathbb{P}_1 .

Exemple 04

Considérons l'exemple suivant

$$\begin{cases} -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

avec $f(x) = -\pi \cos(\pi x) + \sin(\pi x)(1 + \cos(\pi x) + \pi^2(1+x))$.

Dont la solution exacte est $u(x) = \sin(\pi x)$. L'idéal serait de calculer l'erreur exacte $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)}$, mais cela nécessite des calculs précis d'intégrales, ce qui n'est pas commode si la solution est compliquée. En pratique (et c'est ce que nous faisons ici) on se contente de calculer l'erreur projetée dans V_h , c'est-à-dire qu'on calcule $\|r_h(u - u_h)\|_{H^1(0,1)}$ (on dit aussi qu'il

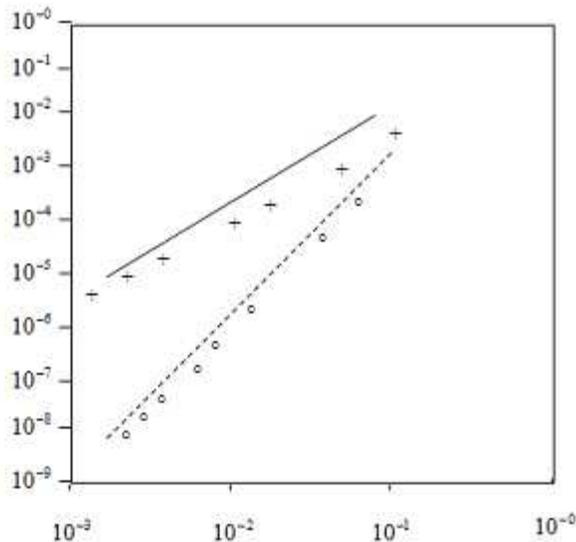


Figure 4: Cas d'une solution régulière : exemple (49). Norme discrète H^1 de l'erreur en fonction du pas h du maillage (les croix correspondent aux éléments finis \mathbb{P}_1 , les ronds aux éléments finis \mathbb{P}_2 , les droites sont les tracés de $h \rightarrow h^2$ et $h \rightarrow h^3$).

s'agit de la norme discrète dans V_h). L'intérêt de cette approche est que l'on peut calculer exactement les intégrales puisque $r_h(u - u_h) = r_h u - u_h \in V_h$ (cela revient à ne pas tenir compte des erreurs d'interpolation entre $H^1(0, 1)$ et V_h). On trace cette erreur discrète $\|r_h(u - u_h)\|_{H^1(0,1)}$ en fonction du pas du maillage h .

Lorsque la solution est régulière, le théorème de convergence prévoit une convergence linéaire (en h) de l'erreur par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 , tandis que le théorème 05 prévoit une convergence quadratique (en h^2) de l'erreur par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_2 . Dans le cas d'exemple (49) on trace cette erreur pour différentes valeurs de h sur la figure 04.

Les croix ou les ronds correspondent à des résultats de calcul, les lignes sont des droites de références correspondantes aux fonctions h^2 et h^3 respectivement.

On observe donc un phénomène de super-convergence, c'est-à-dire les éléments finis convergent plus rapidement que ce qui est prévu par la théorie: l'erreur est en h^2 pour la méthode \mathbb{P}_1 et h^3 pour celle \mathbb{P}_2 . Ce gain est dû à l'uniformité du maillage et au choix de la norme discrète dans V_h .

Si la solution n'est pas régulière, il y a toujours convergence mais avec une vitesse plus faible que ce qui est prédit dans le cas régulier par les théorèmes de convergences ci-dessus. Pour obtenir une solution non régulière, on prend un second membre dans $H^{-1}(0, 1)$ qui n'appartient pas à $L^2(0, 1)$. En une dimension d'espace on peut ainsi prendre une masse de Dirac.

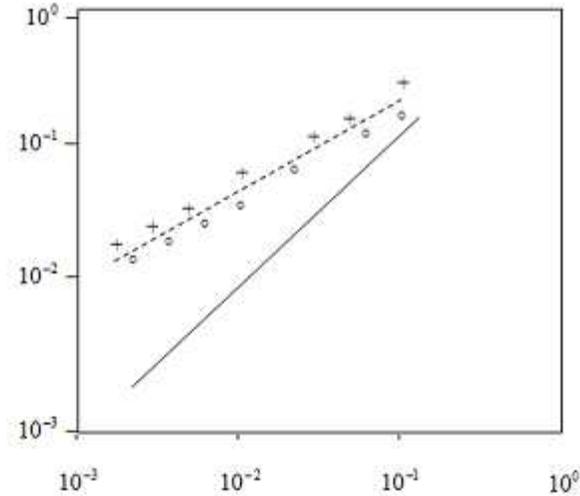


Figure 5: Cas d'une solution non régulière : exemple (50). Norme discrète H^1 de l'erreur en fonction du pas du maillage (les croix correspondent aux éléments finis \mathbb{P}_1 , les ronds aux éléments finis \mathbb{P}_2 , les droites sont les tracés de $h \rightarrow \sqrt{h}$ et $h \rightarrow h$)

Exemple 05

Considérons donc cet exemple

$$\begin{cases} -u'' = 6x - 2 + \delta_{1/2} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Avec $\delta^{1/2}$ la masse de Dirac au point $x = \frac{1}{2}$, dont la solution exacte est

$$u(x) = 1/2 - |x - 1/2| + x^2(1 - x)$$

On trace l'erreur $\|r_h(u - u_h)\|_{H^1(0,1)}$ en fonction de h sur la figure 05. Les croix ou les ronds correspondant à des résultats de calcul (\mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 respectivement), les lignes sont des droites de référence correspondantes aux fonctions \sqrt{h} et h respectivement. On voit que les éléments finis \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 convergent à la même vitesse proportionnelle à \sqrt{h} , ce qui est bien inférieur à la vitesse de h (ou même de h^2) prédite dans le cas régulier. En particulier, il n'y a aucun intérêt à utiliser les éléments finis \mathbb{P}_2 , plutôt que \mathbb{P}_1 , dans un tel cas.

Pour calculer l'erreur dans les figures 04 et 05 nous avons utilisé une solution exacte. Cependant, si celle-ci n'est pas connue, on peut la remplacer par la solution approchée obtenue avec le maillage le plus fin (supposé être la plus convergée). Cette procédure de convergence numérique peut aussi être mise en œuvre pour d'autres méthodes numériques, y compris (et surtout) lorsqu'on ne dispose d'aucun théorème de convergence.

C'est souvent le seul moyen «heuristique» de vérifier si un algorithme converge et à quelle vitesse par rapport aux raffinements du maillage.

2.2.4 La méthode des éléments finis d'Hermite

Après avoir défini des éléments finis \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 , le lecteur imagine facilement comment généraliser et définir des éléments finis \mathbb{P}_k avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ces éléments finis dits de Lagrange, utilisent des fonctions de base qui sont seulement continues mais pas continûment dérivables. Toutefois, il est clair que des polynômes de \mathbb{P}_3 peuvent se raccorder de manière continûment dérivable. Dans ce cas les valeurs des dérivées seront aussi utilisées pour caractériser les fonctions. On introduit donc une méthode des éléments finis d'Hermite qui repose sur l'espace discret

$$V_h = \{v \in C^1([0, 1]), \quad v \mid [x_j, x_{j+1}] \in \mathbb{P}_3, \quad 0 \leq j \leq n\} \quad (51)$$

Il faut bien faire attention que dans la définition (51) de V_h on demande aux fonctions d'appartenir à $C^1([0, 1])$, et non plus seulement à $C([0, 1])$. C'est ce qui fait la différence entre les éléments finis d'Hermite et Lagrange, respectivement.

On peut représenter les fonctions de V_h à l'aide des fonctions de base très simples. On définit deux fonctions «mères»

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^2(1-2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)^2(1+2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x(1+x)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x(1-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, pour $0 \leq j \leq n+1$, on définit les fonctions de base (figure 06).

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n+1$$

$$\psi_j(x) = \psi\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n+1$$

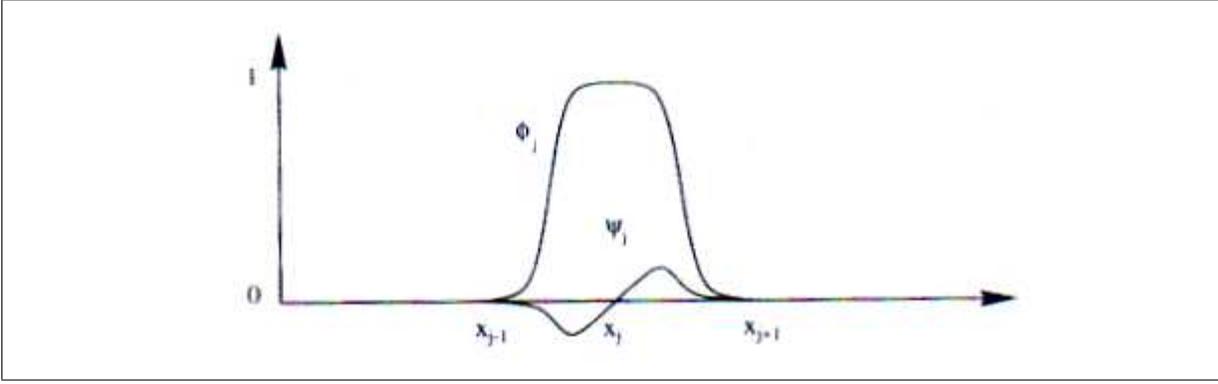


Figure 6: Les fonctions de base des éléments finis d'Hermite \mathbb{P}_3

Lemme 9

L'espace V_h , défini par (51), est un sous espace de $H^1(0, 1)$, de dimension $2(n + 2)$. Toute fonction v_h de V_h est définie de manière unique par ses valeurs et celles de sa dérivée aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$, et on a

$$v_h(x) = \sum_{j=0, n+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) + \sum_{j=0, n+1} (v_h)'(x_j) \psi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad (52)$$

Démonstration

Les fonctions de V_h étant de classe C^1 , il s'agit bien d'un sous espace de $H^1(0, 1)$. On vérifie facilement que les (φ_j, ψ_j) forment une base de V_h , en remarquant que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ et $\varphi_j'(x_i) = 0$ et $\psi_j(x_i) = 0$ et $\psi_j'(x_i) = \delta_{ij}$ (figure 06).

On peut bien sûr utiliser l'espace V_h (ou du moins son sous-espace des fonctions qui s'annulent en 0 et 1) pour résoudre le problème de Dirichlet (31), mais ce n'est pas l'utilisation la plus courante de V_h . En pratique, on utilise V_h pour résoudre l'équation des plaques, ou plutôt des poutres en dimension 1,

$$\begin{cases} u'''' = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

(qui admet une unique solution $u \in H_0^2(0, 1)$ si $f \in L^2(0, 1)$). En effet, V_h n'est pas seulement un sous-espace de $H^1(0, 1)$, mais et aussi un sous-espace de $H^2(0, 1)$ (ce qui n'est pas le cas des éléments finis de Lagrange). Pour résoudre (53) nous aurons besoin du sous-espace

$$V_{0h} = \{v \in V_h, \quad v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\} \quad (54)$$

Lemme 10

L'espace V_h , et son sous-espace V_{0h} défini par (54), sont des sous espaces de $H^2(0,1)$, et de $H_0^2(0,1)$ respectivement, de dimension $2(n+2)$, et $2n$ respectivement. Toute fonction v_h de V_{0h} est définie de manière unique par ses valeurs et celles de sa dérivée aux sommets $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on a

$$v_h(x) = \sum_{j=1,n} v_h(x_j) \varphi_j(x) + \sum_{j=1,n} (v_h)'(x_j) \psi_j(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

Démonstration

Soit $v_h \in V_h$, v_h est de classe C^1 sur $[0,1]$ et C^2 par morceaux. Donc sa dérivée v_h' , étant continue et C^1 par morceaux, appartient bien à $H^1(0,1)$. Par conséquent, v_h est un élément de $H^2(0,1)$. Le reste du lemme est semblable au lemme 9.

Décrivons brièvement la résolution pratique de l'équation des plaques (53) par la méthode des éléments finis d'Hermite \mathbb{P}_3 . La formulation variationnelle de l'approximation interne est

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ \int_{[0,1]} u_h''(x) v_h''(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0h} \end{cases} \quad (55)$$

On décompose u_h sur la base des $(\varphi_j, \psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on note $U_h = (u_h(x_j), u_h'(x_j))_{1 \leq j \leq n}$ le vecteur de ses coordonnées dans cette base. La formulation variationnelle (55) revient à résoudre dans \mathbb{R}^{2n} un système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

2.3 La méthode des éléments finis multidimensionnelles

Nous nous plaçons maintenant en dimension d'espace $N \geq 2$ (en pratique $N = 2, 3$). Par souci de simplicité, certains résultats ne seront démontrés qu'en dimension 2, mais ils s'étendent à la dimension 3 (au prix, parfois, de complications techniques et pratiques importantes).

Nous considérons le problème modèle de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (56)$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$, si

$f \in L^2(0, 1)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que le domaine Ω est polyédrique (polygonal si $N = 2$), c'est-à-dire que $\overline{\Omega}$ est une réunion finie de polyèdres de \mathbb{R}^N . Rappelons qu'un polyèdre est une intersection finie de demi-espaces de \mathbb{R}^N et que les parties de son bord qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées ses faces. La raison de cette hypothèse est qu'il n'est possible de mailler exactement que de tels ouverts.

2.3.1 La méthode des éléments finis triangulaires

Tout commence par la définition d'un maillage du domaine Ω par des triangles en dimension 2 et des tétraèdres en dimension 3. On regroupe les triangles et les tétraèdres dans la famille plus générale dite N -simplexes.

Définition 10

On appelle N -simplexe K de \mathbb{R}^N l'enveloppe convexe de $(N + 1)$ points $(a_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ de \mathbb{R}^N , appelés sommets de K . Bien sûr un 2-simplexe est simplement un triangle et 3-simplexe est un tétraèdre (figure 10).

On dit que le N -simplexe K est non dégénéré si les points $(a_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ n'appartient pas à un même hyperplan de \mathbb{R}^N (le triangle ou le tétraèdre est on «plat»). Si on note $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$ les coordonnées du vecteur a_j , la condition de non dégénérescence de K est que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

soit inversible (ce que l'on supposera toujours par suite).

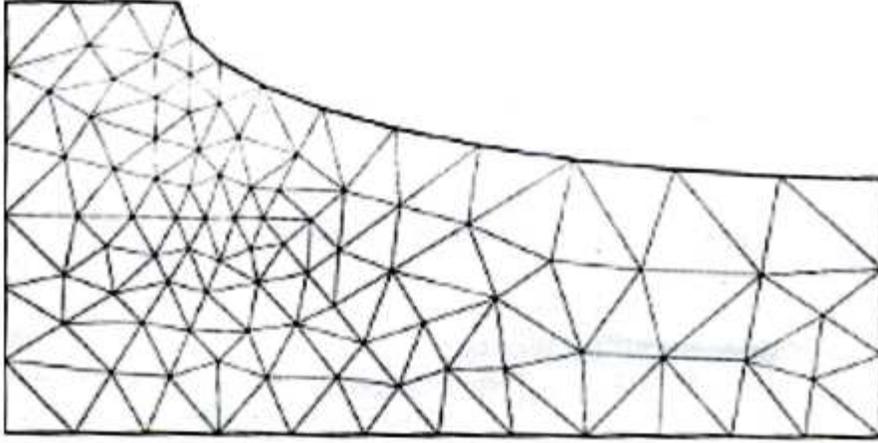


Figure 7: Exemple de maillage triangulaire conforme en dimension 2

Définition 11

Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de \mathbb{R}^N . Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\overline{\Omega}$ est un ensemble τ_h de N -simplexes (non dégénérés) $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifie

$$1/ K_i \subset \overline{\Omega} \text{ et } \overline{\Omega} = \bigcup_{i=1,n} K_i$$

2/ L'intersection $K_i \cap K_j$ de deux N -simplexes distincts est un m -simplexe, avec $0 \leq m \leq N - 1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de K_i et K_j . (En dimension 2, l'intersection de deux triangles est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune entière, en dimension 3 l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un sommet commun soit une arête commune entière, soit une face commune entière).

Les sommets ou nœuds du maillage τ_h sont les sommets des N -simplexes K_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des N -simplexes K_i .

Il est clair que la définition 11 ne peut s'appliquer qu'à un ouvert polyédrique et pas à un ouvert quelconque. Cette définition contient un certain nombre de restrictions sur le maillage : dans ce cas on parle souvent de maillage conforme (figure 7).

Un exemple de maillage uniforme est donné à la figure 08, tandis que la figure 9 présente des situations interdites par la définition 11.

Remarques 09

1/ Nous ne disons rien ici des algorithmes qui permettent de construire un maillage triangulaire. Contentons nous de dire que, s'il est relativement

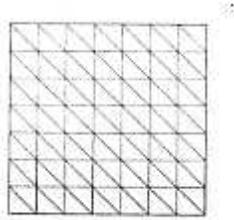


Figure 8: Maillage triangulaire uniforme en dimension 2 d'un carré

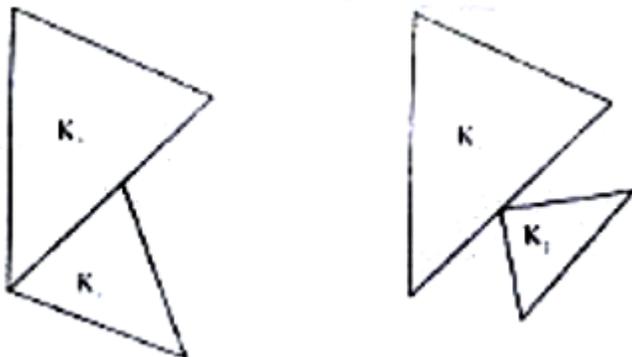


Figure 9: Exemple de situations intrdites pour un maillage triangulaire.

facile de mailler des domaine plans (ils existent de nombreux logiciels libres qui permettent de le faire), il est encore assez compliqué de mailler des domaines tridimensionnels.

2/ Dans un N -simplexe K il est commode d'utiliser des coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes usuelles.

Définition 12

Si K est un N -simplexe non dégénéré de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq n+1}$, les coordonnées barycentrique $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ de $x \in \mathbb{R}^N$ sont définis par le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1, n+1} \lambda_j = 1 \\ \sum_{j=1, n+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \quad (58)$$

qui admet bien une solution unique car la matrice A définie par (57), est inversible.

Remarquons que les λ_j sont des fonctions affines de x . on vérifie alors que

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N; \quad \lambda_j(x) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n + 1\}$$

et que les $(N + 1)$ faces de K sont les intersections de K et des hyperplans $\lambda_j(x) = 0$. On peut alors définir un ensemble de points de K qui vont jouer un rôle particulier pour la suite.

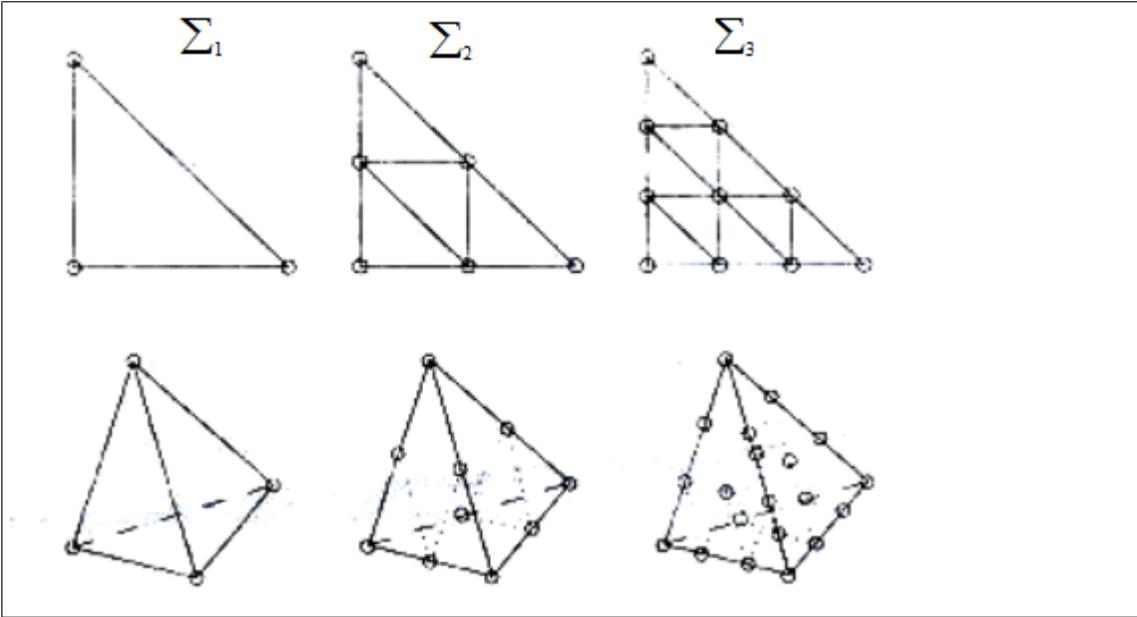


Figure 10: Treillis d'ordre 1, 2, et 3 pour un triangle (en haut) et un tétraèdre (en bas). Les ronds représentent les points du treillis.

Définition 13

Pour tout entier $k \geq 1$ on appelle treillis d'ordre k l'ensemble

$$\sum_k = \left\{ x \in K, \quad \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, \quad 1 \leq j \leq n \right\}. \quad (59)$$

Pour $k = 1$ il s'agit de l'ensemble des sommets de K , et pour $k = 2$ des sommets et des points milieux, des arêtes reliant deux sommets (figure 10). Dans le cas général, \sum_k est un ensemble fini de points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$.

Nous définissons maintenant l'ensemble \mathbb{P}_k des polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égale à k , c'est-à-dire que tout $p \in \mathbb{P}_k$ s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \text{ avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

L'intérêt de la notion de treillis d'un N -simplexe K est qu'il permet de caractériser tous les polynômes de \mathbb{P}_k (on dit que \sum_k est unisolvant pour \mathbb{P}_k).

Lemme 11

Soit K un N -simplexe. Pour un entier $k \geq 1$, soit \sum_K le treillis d'ordre k , défini par (59), dont les points sont notés $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ alors, tout polynôme

de \mathbb{P}_k est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Autrement dit, il existe une base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ de \mathbb{P}_k telle que

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_k$$

Définition 14

Étant donnée un maillage τ_h d'un ouvert connexe polyédrique Ω , la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k , ou éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre k , associés à ce maillage, est définie par l'espace discret

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}), \quad v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k, \quad K_i \in \tau_h\} \quad (60)$$

Définition 15

On appelle nœuds des degrés de liberté l'ensemble des points $(\hat{a}_i(x))_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ des treillis d'ordre k de chacun des N -simplexe $K_i \in \tau_h$. On ne compte qu'une seul fois les points qui coïncident et on note n_{dl} le nombre de degrés de liberté de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k .

Définition 16

On appelle degré de liberté d'une fonction $v \in V_h$ l'ensemble des valeurs de v en ces nœuds $(\hat{a}_i(x))_{1 \leq i \leq n_{dl}}$. On définit le sous espace V_{0h} par

$$V_{0h} = \{v \in V_h, \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (61)$$

Lorsque $k = 1$ les nœuds des degrés de liberté coïncident avec les sommets du maillage.

Lorsque $k = 2$ ces nœuds sont constitués d'une part des sommets du maillage et d'autre part des points milieux des arêtes reliant deux sommets.

Remarque 10

L'appellation "éléments finis de Lagrange" correspond aux éléments finis dont les degrés de liberté sont des valeurs ponctuelles des fonctions de l'espace V_h . On peut définir d'autres types d'éléments finis, par exemple les éléments finis d'Hermite pour lesquels les degrés de liberté sont les valeurs ponctuelles de la fonction de ses dérivés.

Proposition 02

L'espace V_h , défini par (56), est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est finie, égale au nombre de degrés de liberté. De plus, il existe une base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ de V_h définie par

$$\varphi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl}$$

telle que

$$v(x) = \sum_{j=1, n_{al}} v_h(\hat{a}_j) \varphi_j(x)$$

Remarque 11

On obtient un résultat sommable pour le sous-espace V_{0h} , défini par (61), qui est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie égale au nombre de degrés de liberté intérieurs (on ne compte pas les nœuds sur le bord $\partial\Omega$).

Décrivons la résolution pratique du problème de Dirichlet (56) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k . La formulation variationnelle (29) de l'approximation interne devient ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_{0h} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0h} \end{array} \right. \quad (62)$$

On décompose u_h sur la base des $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n_{al}}$ et on prend $v_h = \varphi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1, n_{al}} u_h(\hat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} f \varphi_i dx$$

En notant $U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{al}}$, $b_h = \left(\int_{\Omega} f \varphi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{al}}$ et en introduisant la matrice de rigidité

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{al}}.$$

La formulation variationnelle dans V_{0h} revient à résoudre dans $\mathbb{R}^{n_{al}}$ le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h$$

Comme les fonctions de bases φ_j ont un « petit » support autour du nœud \hat{a}_i (figure 11), l'intersection des supports de φ_i et φ_j souvent vide et la plupart des coefficients de \mathcal{K}_h sont nuls. On dit que la matrice \mathcal{K}_h est creuse.

Pour calculer le second membre b_h (et même éventuellement la matrice \mathcal{K}_h), on utilise des formules de quadrature (ou formules d'intégration numérique)

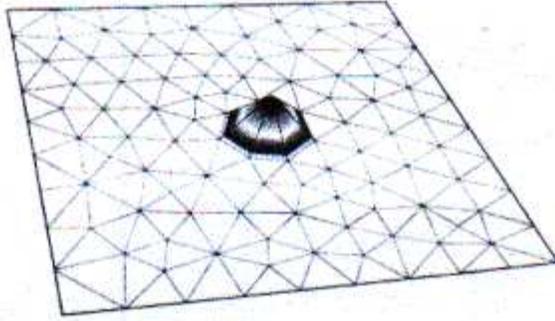


Figure 11: *Fonction de base \mathbb{P}_1 en dimension 2.*

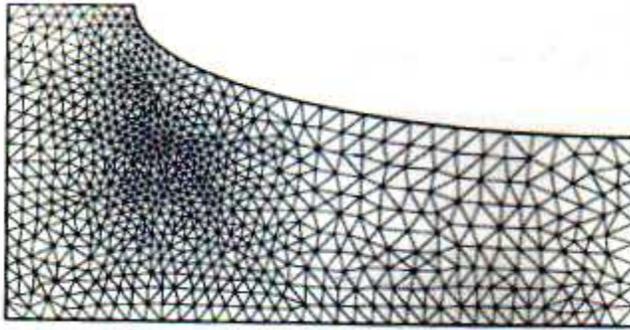


Figure 12: Maillage triangulaire plus fin que celui de la figure 7.

qui donnent une approximation des intégrales sur chaque N -simplexe $K_i \in \mathcal{T}_h$.

La construction de la matrice \mathcal{K}_h est appelée assemblage. La mise en œuvre informatique de cette étape du calcul peut être assez compliquée, mais son coût en terme de temps de calcul est faible. Ce n'est pas le cas de la résolution du système linéaire $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ qui est l'étape la plus coûteuse de la méthode en temps de calcul.

En particulier, les calculs tridimensionnels sont encore très chers de nos jours dès que l'on utilise des maillages fins. Heureusement, la matrice de rigidité \mathcal{K}_h est creuse, ce qui permet de minimiser les calculs. Rappelons que la matrice \mathcal{K}_h est nécessairement inversible et qu'elle est symétrique.

Deux maillages ont été utilisés : le maillage « grossier » de la figure 07 et le maillage « fin » de la figure 12.

2.3.2 Convergence et estimation d'erreur

Nous démontrons la convergence des méthodes d'élément finis \mathbb{P}_k pour le problème de Dirichlet (56). Insistons sur le fait qu'il s'agit seulement d'un problème modèle, et que ces méthodes convergent pour d'autres problèmes, comme celui de Neumann. Nous allons avoir besoin d'hypothèse géométrique sur la qualité du maillage. Pour tout N -simplexe K on introduit deux paramètres géométriques : le diamètre $diam(K)$ et la rondeur $\rho(K)$, définie comme le diamètre de la plus grande boule contenue dans K ,

$$diam(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$$

$$\rho(K) = \max_{B_r \subset K} (2r),$$

Bien sûr, on a toujours $diam(K) / \rho(K) \succ 1$.

Définition 17

Soit $(\tau_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . On dit qu'il s'agit d'une suite de maillage régulière si

1/ La suite $h = \max_{K_i \in \tau_h} (diam(K_i))$ tend vers 0.

2/ Il existe une constante C telle que pour tout $h \succ 0$ et tout $K_i \in \tau_h$

$$\frac{diam(K_i)}{\rho(K_i)} \leq C \quad (63)$$

Remarque 12

Insistons sur le fait que la condition (63) est tout aussi importante en pratique que pour l'analyse de convergence qui va suivre. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous section qui affirme la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k et qui donne une estimation de la vitesse de convergence si la solution est régulière.

Théorème 06 [1]

Soit $(\tau_h)_{h>0}$ une suite de maillages régulière de Ω . Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème de Dirichlet (56), et $u_h \in V_{0h}$, celle de son approximation interne (62) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k . Alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0 \quad (64)$$

de plus, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k + 1 \succ N/2$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (65)$$

où C est une constante indépendante de h et de u .

Remarques 13

1/ Ce théorème s'applique en fait à toute méthode d'éléments finis de type Lagrange. En effet, le seul argument utilisé est la construction d'un opérateur d'interpolation basé sur la caractérisation des fonctions de V_h par leurs valeurs aux nœuds des degrés de liberté, ce qui est toujours possible pour des éléments finis de type Lagrange.

2/ Pour les cas physiquement pertinents $N = 2$ ou $N = 3$, la condition $k + 1 \succ N/2$ est toujours satisfaite dès que $k \geq 1$.

3/ L'estimation d'erreur (65) n'est vraie que si la solution exacte u est régulière, ce qui n'est pas toujours le cas. Si u n'est pas régulière, on constate, en pratique, que la convergence est plus lente (figure 05) dans le cas unidimensionnel.

Proposition 03

Soit $(\tau_h)_{h>0}$ une suite de maillage régulier de Ω . On suppose que $k + 1 \succ N/2$, alors, pour tout $v \in H^{k+1}(\Omega)$ l'interpolée $r_h v$ est bien définie, et il existe une constante C indépendante de h et de v , telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (66)$$

Admettant cette proposition, nous pouvons conclure quant à la convergence de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k .

Chapitre III
Étude d'un problème de vibrations en
élasticité linéaire

3.1 Élasticité linéaire isotrope ou élasticité classique

La théorie de l'élasticité linéaire se situe d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables, et d'autre part on impose que la loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations sont linéaire. Lorsque de plus le solide élastique a un comportement isotrope (c'est-à-dire ne privilégie aucune direction de l'espace), on obtient la loi de comportement de Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1,3} \varepsilon_{ij}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad (67)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé. Le système linéaire que constitue l'équation (67), s'inverse facilement on obtient

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sum_{k=1,3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (68)$$

où ε_{ij} sont les composantes du tenseur de déformations associées aux déplacements, et $E = (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$ est le module d'Young et $\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$ le coefficient de Poisson. Dans la pratique, le module d'Young et le coefficient de Poisson sont connus expérimentalement pour un matériau homogène donné et on en déduit les coefficients de Lamé

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (69)$$

Dans le cas d'un matériau homogène, les différents coefficients introduits ci-dessus sont toujours des constantes et dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit vectoriellement

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{U} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \vec{f}, \quad (70)$$

ou sous la forme équivalente

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \mu \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \vec{f} \quad (71)$$

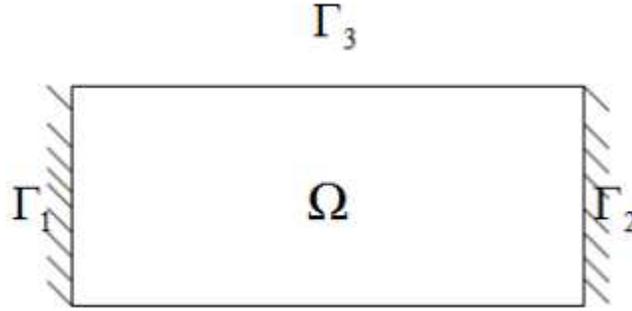


Figure 13: La plaque rectangulaire Ω

On se contente, à propos des problèmes dynamiques (c'est à dire dépendant du temps) de l'élasticité linéaire, de dire qu'on peut deviner, au vu de l'équation (70), qu'ils peuvent mener sous certaines hypothèses et dans certains cas particuliers, notamment l'étude des vibrations dans un milieu élastique, à l'équation modèle des ondes de type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad , \quad (72)$$

où u désigne un champs scalaire inconnu.

On se propose dans ce qui suite de déterminer les modes propres de vibrations d'une plaque en élasticité linéaire.

3.2 Position du problème

La plaque est représentée ci-dessous par un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

où Γ_1 et Γ_3 sont de mesures non nulles.

Notations

$n(n_1, n_2)$ représente la normale extérieure unitaire sur Γ_2 .

$u(x) = (u_1, u_2)$ est le vecteur déplacement.

Le tenseur σ de composantes σ_{ij} est le tenseur de contraintes de l'état initial et l'état actuel.

A est l'opérateur d'élasticité linéaire continu de $V = (H^1(\Omega))^2$ dans son dual topologique V' , et $H = (L^2(\Omega))^2$.

Hypothèses

Les composantes du tenseur de contraintes vérifient la loi de comportement de l'élasticité linéaire

$$\sigma_{ij} = \sum_{h,k} a_{ijhk} \varepsilon_{hk}(\mu) \quad (73)$$

Les coefficients de l'élasticité linéaire a_{ijhk} sont dépendants de x mais indépendants du temps t et vérifient

- 1) $a_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$.
- 2) $a_{ijhk} = a_{ijkh} = a_khij$ (symétrie).
- 3) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{ijhk} a_{ijhk} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} \geq \alpha \varepsilon \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (v - \text{ellipticité})$$

où ε_{hk} sont les composantes du tenseur des déformations associées aux déplacements.

$$\varepsilon_{hk}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right) \quad (74)$$

On associe à A la forme bilinéaire continue et symétrique suivante

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \quad \forall u, v \in V \quad (75)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de dualité entre V et V' , et

$$(Au)_i = - \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \quad (76)$$

Problème

L'étude de vibrations du système de l'élasticité linéaire est définie par le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{trouver } u(x, t), (x, t) \in \Omega \times]0, t[& \text{solution du problème dynamiques} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} & \text{sur } \Omega \times]0, t[\quad i = 1, 2 \\ u_i = 0 & \text{sur } (\Gamma_1 \times]0, t[) \cup (\Gamma_3 \times]0, t[) \\ \sum_{j=1,2} \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, t[\\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u'(x, 0) = u_1(x) \end{array} \right. \quad (77)$$

$u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des fonctions données et t représente un instant arbitrairement fixé.

3.3 Formulation variationnelle

On suppose que

$$\frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial t^2} \in (L^2(\Omega))^2$$

(\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^2$. La norme associée est donnée par

$$|v| = \left(\sum_{i=1,2} |v_i|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

On pose $V = V_1 \times V_2 = (H^1(\Omega))^2$

On définit $U = \{u, u \in V, u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, i = 1, 2\}$,

muni de la topologie induite par $(H^1(\Omega))^2$,

$$(u, v)_V = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} (u_i, v_i) d\Omega + \sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega$$

$$\|v\|_V = \left(|v|^2 + \sum_{i=1,2} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}$$

Lemme 12

U est un espace fermé dans $(H^1(\Omega))^2$.

On suppose que $v \in U$ et on multiplie scalairement dans $(L^2(\Omega))^2$ la première équation de (77) par v . En intégrant, on obtient

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \right) v_i d\Omega = 0$$

d'après (76), on a

$$\langle Au, v \rangle = a(u(t), v) = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i d\Omega,$$

en tenant compte des conditions aux limites on a

$$\left\langle \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, v \right\rangle + a(u(t), v) = 0 \quad \forall v \in U, t \in]0, T[, \quad (78)$$

donc le problème (77) conduit au problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que} \\ \left\langle \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, v \right\rangle + a(u, v) = 0 & \forall v \in U \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u'(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (79)$$

Lemme 13

Le problème (79) est équivalent au problème(77).

Il suffit de montrer que (79) entraîne (77). La première équation de (79) est vérifiée particulièrement pour $\varphi \in (D(\Omega))^2$, d'où

$$a(u(t), \varphi) + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \varphi \right) = 0 \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^2,$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\varphi) d\Omega + \left(\frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \varphi \right) = 0,$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} d\Omega + \left(\frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \varphi \right) = 0,$$

et on a au sens des distributions

$$\sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } (D'(\Omega))^2$$

d'après les hypothèses sur $\frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}$, on a

$$\sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \in (L^2(\Omega))^2$$

U étant dans $(H^1(\Omega))^2$, on a d'après (75)

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

En comparant avec la première équation de (79) on trouve

$$\langle Au, v \rangle = \left\langle -\frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, v \right\rangle \quad \forall v \in U,$$

d'où

$$\left\langle Au + \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in U,$$

donc

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[, \quad i = 1, 2$$

3.4 Résolution du problème

3.4.1 Rappel de quelques résultats

Théorème 07

On suppose que $\text{mes}\Gamma_1 > 0$ et $\text{mes}\Gamma_3 > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_U^2 \quad \forall v \in U.$$

Ce théorème est une conséquence de l'inégalité de Korn.

Lemme 14

La forme $(u, v) \mapsto a(u, v)$ définit un produit scalaire qui induit sur V une norme usuelle $\|\cdot\|$.

Ce lemme résulte également de l'inégalité de Korn.

Lemme 15

L'opérateur A possède une infinité de valeurs propres λ_i positives à valeurs constantes. Les fonctions propres w_i , correspondant à λ_i forment une base orthogonale de V , telle que

$$\begin{aligned} 1/ \quad a(w_i, \varphi) &= \lambda_i (w_i, \varphi) \quad \forall \varphi \in V \\ 2/ \quad a(w_i, w_j) &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

Lemme 16

Avec le lemme 15, on a le résultat de majoration suivant

$$a(\varphi, \varphi) \geq \sum_{j=1, \infty} \left| a\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) \right|^2 = \sum_{j=1, \infty} \lambda_j |(\varphi, w_j)|^2 \quad (80)$$

Théorème 08 (Existence et l'unicité)

Si $u_0 \in V$ et $u_1 \in H = (L^2(\Omega))^2$, alors il existe u unique telle que $u \in C^0([0, T], V)$, et on a

$$u' = \frac{du}{dt} \in C^0([0, T], H),$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j},$$

où u est solution de (79), avec les conditions initiales, u s'explique sous forme d'une combinaison linéaire infinie des solutions stationnaires

$$u(x, t) = \sum_{i=1, \infty} \left[(u_0, w_i) \cos \sqrt{\lambda_i} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (u_1, w_i) \sin \sqrt{\lambda_i} t \right] w_i(x) \quad (81)$$

Démonstration

Pour m fixé, on considère U_m l'espace engendré par w_1, w_2, \dots, w_m , et on cherche une solution approchée $u_m(t)$ telle que

$$u_m(t) = \sum_{j=1, m} g_{jm}(t) w_j$$

$$(u''(t), w_i) + \langle Au_m(t), w_i \rangle = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (82)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in V_m, \quad u'_m(0) = u_{1m} \in V_m \quad (83)$$

Avec $u_{0m} \rightarrow u_0$ dans V quand $m \rightarrow \infty$, et $u_{1m} \rightarrow u_1$ dans H fort quand $m \rightarrow \infty$ (ce la est possible car V_m est dense dans V et dans H).

Les équations (82) et (83) s'explicitent en un système différentiel linéaire pour les fonctions inconnues $g_{1m}, g_{2m}, \dots, g_{mm}$, solution du système

$$\begin{cases} g_i''(t) + \lambda_i g_i(t) = 0 & i = 1, m \\ g_i(0) = (u_0, w_i) \\ g_i'(0) = (u_1, w_i) \end{cases} \quad (84)$$

λ_1 est différent de zéro à cause de la coercivité de A . Le système (84) admet une solution unique sous forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1, m} \left[(u_0, w_i) \cos \sqrt{\lambda_i} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (u_1, w_i) \sin \sqrt{\lambda_i} t \right] w_i(x), \quad (85)$$

d'où

$$u_m'(t) = \sum_{i=1, m} \sqrt{\lambda_i} (u_0, w_i) \sin \sqrt{\lambda_i} t w_i(x) + \sum_{i=1, m} (u_1, w_i) \cos \sqrt{\lambda_i} t w_i(x). \quad (86)$$

Lemme 17

Il existe, pour tout m , une solution unique u_m de rang m . u_m est donnée par (85) et vérifie $u_m \in C^0([0, T]; V)$ et $u_m' \in C^0([0, T]; H)$.

Ces propriétés résultent des formules (85) et (86). Le lemme précédent peut être étendu au cas $t \in [0, \infty]$.

3.5 Estimation à priori

A partir de (85), on a pour $t \in [0, T]$

$$\|u_m(t)\|_V \leq \sum_{i=1, m} \left| (u_0, w_i) \cos \sqrt{\lambda_i} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (u_1, w_i) \sin \sqrt{\lambda_i} t \right| \|w_i\|_V$$

Comme $\|\cdot\|$ est la norme sur V associée au produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$. On a

$$\|w_i\|_V = \sqrt{\lambda_i},$$

d'où

$$\|u_m(t)\|_V \leq \sum_{i=1, m} \sqrt{\lambda_i} |(u_0, w_i)| + \sum_{i=1, m} |(u_1, w_i)|,$$

$$\|u_m(t)\|_V \leq \sum_{i=1, \infty} \sqrt{\lambda_i} |(u_0, w_i)| + \sqrt{2} \|u_1\|_H,$$

$$\|u_m(t)\|_V \leq \sqrt{2} (\|u_0\|_V + \|u_1\|_H). \quad (87)$$

De même, on obtient avec $|w_i|_H = 1$

$$\left| u'_m(t) \right|_H \leq \sum_{i=1, m} \sqrt{\lambda_i} |(u_0, w_i)| + \sum_{i=1, m} |(u_1, w_i)|$$

$$\left| u'_m(t) \right|_H \leq \sqrt{2} (\|u_0\|_V + \|u_1\|_H) \quad (88)$$

Les estimations (87) et (88) sont indépendantes de m . D'où le lemme suivant.

Lemme 18

La suite (u_m) reste dans un borné de $C^0([0, T]; V)$ et la suite (u'_m) reste dans un borné de $C^0([0, T]; H)$, indépendamment de m .

3.6 Passage à la limite

Comme les suites (u_m) et (u'_m) sont deux suites de fonctions continues bornées sur $C^0([0, T]; V)$ et $C^0([0, T]; H)$ respectivement, alors d'après (85), on a

$$\|u(t) - u_m(t)\|_V \leq \sum_{i=m+1, \infty} \sqrt{\lambda_i} |(u_0, w_i)| + \sum_{i=m+1, \infty} |(u_1, w_i)|$$

Le second membre $\rightarrow 0$ car $u_{0m} \rightarrow u_0$ dans V fort et $u_{1m} \rightarrow u_1$ dans H fort, quand $m \rightarrow \infty$. Il résulte que $u_m(t)$ converge uniformément dans V quelque soit t . De la continuité de la limite uniforme, il résulte que

$$u \in C^0([0, T]; V).$$

En partant de (86), on démontre de même que $u'_m(t)$ converge vers $u'(t)$ uniformément dans H quelque soit t . D'où il résulte encore

$$u' \in C^0([0, T]; H)$$

Pour démontrer que u définie par (81) est solution de (77), on passe à la limite dans (85) par la méthode standard en utilisant la convergence de u_m vers u dans $C^0([0, T]; V)$ et de u'_m vers u' dans $C^0([0, T]; H)$.

L'unicité de la solution

L'unicité de la solution résulte du lemme suivant.

Lemme 19

Soit u une solution de (77) telle que $u(0) = u'(0) = 0$, alors u est la solution nulle.

Démonstration

Supposons que u' soit un élément de $L^2([0, T]; V)$ et u'' un élément de $L^2([0, T]; H)$. $L^2([0, T]; H)$ représente l'espace des fonctions de carré sommable de $[0, T]$ dans H . Comme u appartient à $L^2([0, T]; V)$, on peut écrire

$$(u'', u') - \langle Au, u' \rangle = 0$$

d'où

$$1/2 \frac{d}{dt} |u'|_H^2 + \frac{d}{dt} a(u, u) = 0.$$

En intégrant entre 0 et s pour $s \geq 0$ arbitraire, on obtient

$$|u'(s)|^2 + 2a(u(s), u(s)) = 0,$$

ce qui entraîne $u(s) = 0$, à cause de la coercivité de $a(., .)$.

3.7 Un problème spectral associé

Le couple $(\sqrt{\lambda_i}, w_i)$, où λ_i est une valeur propre et w_i , le vecteur propre correspondant s'appelle un mode de vibrations. Ce couple caractérise une solution stationnaire du système de vibrations. Pour calculer les modes de vibrations du système (79), on se ramène à l'étude du problème spectral suivant qui est en liaison avec la mécanique de vibrations.

Problème

Le problème spectral correspondant au problème de vibrations (77) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \text{ solution de} \\ - \sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = \lambda u_i \\ u_i = 0 \\ \sum_{j=1,2} \sigma_{ij} n_j = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \\ \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \quad (89)$$

Problème variationnel

Soit

$$U = \left\{ v; v \in (L^2(\Omega))^2, \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\} \quad (90)$$

L'espace d'Hilbert muni de la topologie induite par $(L^2(\Omega))^2$. En multipliant scalairement la première équation de (89) dans U par v , et en intégrant, on trouve

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega.$$

En faisant une intégration par parties et on tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega \quad \forall v \in U,$$

ou

$$a(u, v) = \lambda \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega.$$

On a donc le problème variationnel suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in U; u \neq 0 \text{ de} \\ \sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega \\ \text{ou } a(u, v) = \lambda(u, v) \end{cases} \quad (91)$$

Réciproquement, l'équation du problème (91) est vérifiée particulièrement pour $\varphi \in (D(\Omega))^2$, d'où

$$a(u, \varphi) = \lambda(u, \varphi) \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^2,$$

donc

$$\sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\varphi) d\Omega - \lambda(u, \varphi) = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \lambda(u, \varphi) = 0.$$

On a au sens des distributions

$$\sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} + \lambda u_i = 0 \quad \text{dans } (D'(\Omega))^2.$$

Puisque $u_i \in L^2(\Omega)$, alors $\sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, où u étant dans V .

On a d'après (75)

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

En comparant avec l'équation du système (91), on a

$$\langle Au, v \rangle = \lambda (u, v) \quad \forall v \in U,$$

d'où

$$\langle Au - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U.$$

Donc

$$-\sum_{j=1,2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = \lambda u_i \quad \text{sur } \Omega, \quad i = 1, 2$$

Chapitre IV
Étude numérique du problème de vibrations

4.1 Introduction

On suppose, dans la suite que Ω est une plaque rectangulaire (figure 14) et on se limite à l'approximation par l'éléments finis de type \mathbb{P}_1 . Rappelons que \mathbb{P}_k désigne l'espace vectoriel des polynômes à deux variables x et y de degré inférieur ou égal à k et à coefficients réels, k entier ≥ 0 .

4.2 Approximation de l'espace V et du sous espace U

Soit τ_h une triangulation de Ω par des triangles T de diamètre inférieur ou égal à h

$$\left(\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau_h} T \right)$$

À la triangulation τ_h , on associe l'espace V_h défini par

$$V_h = V_{h,1} \times V_{h,2} = \left\{ v_h, v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \forall T \in \tau_h; v_{h,i/T} \in \mathbb{P}_1 \right\} \quad (92)$$

V_h est de dimension finie et approche V .

On définit l'espace U_h par

$$U_h = \left\{ v_h, v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \forall T \in \tau_h, v_{h,i/T} \in \mathbb{P}_1; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\} \quad (93)$$

Lemme 20

V_h est un sous espace de V .

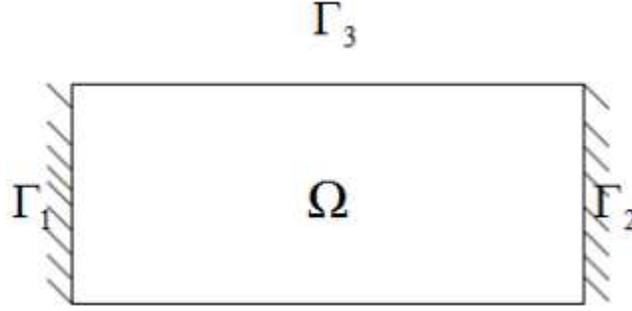


Figure 14: La plaque rectangulaire Ω

Soit $T \in \tau_h$, on désigne par $\lambda_i = \lambda_i(m)$, $i = 1, 3$ les coordonnées barycentriques d'un point $m \in \mathbb{R}^2$ par rapport aux sommets a_i de T , $i = 1, 3$. Si $p \in \mathbb{P}_1$, il est déterminé de manière unique par ses valeurs aux sommets de T et on a

$$p(x) = \sum_{j=1,3} p(a_j) \lambda_j(m).$$

On peut assurer la continuité de chaque composante $v_{h,i}$ de v_h sur un coté $[a_1, a_2]$ commun aux deux triangles T_1 et T_2 de τ_h en imposant la continuité aux points a_1 et a_2 .

Soit $\{a_n\}_{n=1}^{N(h)}$ l'ensemble des sommets de la triangulation τ_h . A tout sommet a_n , on associe la fonction $\varphi_j \in V_{h,i}$ définie par

$$\varphi_j(a_n) = \delta_{jn}; \quad j, n = 1, N(h)$$

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(h)}$ forment une base de $V_{h,i}$, donc chaque composante $v_{h,i}$ de v_h est donnée par

$$v_{h,i} = \sum_{n=1, N(h)} v_{h,i}(a_n) \varphi_n; \quad v_{h,i} \in V_{h,i} \quad (94)$$

Soit $v = (v_1, v_2) \in (D(\bar{\Omega}))^2$. En introduisons la fonction

$$r_h : D(\bar{\Omega}) \rightarrow V_{h,i},$$

qui interpole $v_h \in D(\overline{\Omega})$ sur $\{a_n\}_{n=1}^{N(h)}$, c'est à dire

$$\forall a_j \in \{a_n\}_{n=1}^{N(h)}, \quad (r_h v_i)(a_j) = v_i(a_j) = v_{h,i}(a_j),$$

$r_h v_i$ coïncide avec le p_1 – interpolé π_h de v_i sur le triangle T .

$$r_h v_i|_{T(a_j)} = \pi_h v_i(a_j), \quad j = 1, 3$$

que l'on met sous forme d'un polynôme. D'où $r_h v_i = v_{h,i} \in V_{h,i}$, et

$$\|v_i - r_h v_i\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{T \in \tau_h} \|v_i - \pi_h v_i\|_{1,T}^2 \right)^{1/2}. \quad \forall v_i \in D(\overline{\Omega})$$

On est donc ramené à un résultat d'interpolation.

Théorème 09

Soit $\hat{\mathcal{O}}$ un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière “assez régulière”, et soit un opérateur $\hat{\pi} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{k+1}(\hat{\mathcal{O}}), \mathcal{H}^m(\hat{\mathcal{O}}))$ $m = 0, k + 1$ tel que

$$\forall p \in P_k, \quad \hat{\pi} p = p.$$

Si \mathcal{O} est un ouvert borné de \mathbb{R}^N tel qu'il existe une transformation affine $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ pour laquelle $\mathcal{O} = F(\hat{\mathcal{O}})$, et si l'opérateur $\pi \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\mathcal{O}), H^m(\mathcal{O}))$ est défini par

$$\forall v \in H^{k+1}(\mathcal{O}), \quad \pi v = \hat{\pi} \hat{v},$$

alors il existe une constante $C = C(\hat{\mathcal{O}}, \hat{\pi}, k, m) \succ 0$ indépendante de F telle que

$$\forall v \in H^{k+1}(\mathcal{O}), \quad |v - \pi v|_{m,\mathcal{O}} \leq C \frac{h(\mathcal{O})^{k+1}}{l(\mathcal{O})^m} |v|_{k+1,\mathcal{O}}$$

où $h(\mathcal{O})$ est le diamètre de \mathcal{O} ($\text{diam}(T)$) et $l(\mathcal{O})$ est le diamètre maximum des sphères contenues dans \mathcal{O} ($\rho(T)$).

Définition 18

L'approximation V_h de V est convergente lorsque $v_h \rightarrow v$ dans V fort $\forall v \in V_h$, où V_h est un sous-espace dense dans V .

Définition 19

On dit qu'une famille de triangulation de Ω (ou une triangulation) est régulière lorsque le paramètre $h \rightarrow 0$, et il existe une constante $\sigma \succ 0$ indépendante de h tel que

$$\forall T \in \tau_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad (95)$$

où h_T est la longueur du plus grand coté de T .
et ρ_T est le diamètre du cercle inscrit dans T .

Théorème 10

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , pour toute fonction $v \in H^2(\mathcal{O})$, on a la majoration suivante

$$|v - r_h v|_{1,\mathcal{O}} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T} |v|_{2,\mathcal{O}}$$

Démonstration

On considère $\mathcal{O} = \hat{T}$ le triangle de \mathbb{R}^2 de sommets $\hat{a}_1(1, 0)$, $\hat{a}_2(0, 1)$, $\hat{a}_3(0, 0)$, l'application affine $F_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$F_T(\hat{x}, \hat{y}) = a_1 + \hat{x}(a_2 - a_1) + \hat{y}(a_3 - a_1),$$

et l'opérateur $\hat{\pi}$ de p_1 -interpolation sur $\{a_i\}_{i=1,3}$. En tenant compte de $H^2(\hat{T}) \subset C^0(\hat{T})$ avec injection canonique, on voit que les hypothèses du théorème 09 sont vérifiées avec

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{T}, \quad \mathcal{O} = T = F_T \left(\hat{T} \right), \quad k = 1, m = 1,$$

Comme $h(T) \leq h_T$, on a

$$|v - r_h v|_{1,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T} |v|_{2,T} \quad (96)$$

où la constante C ne dépend pas de h_T .

Lemme 21

Si τ_h est une triangulation régulière et $v_i \in D(\overline{\Omega})$, on a

$$\|v_i - r_h v_i\|_{1,\Omega} \leq Ch |v_i|_{2,\Omega} \quad (97)$$

Le lemme résulte de (95) et (96), du fait que $h_T \leq h$, et que $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$.

Théorème 11

Si τ_h est une triangulation régulière de Ω , alors l'approximation interne converge .

Démonstration

Prenons $V = D(\overline{\Omega})$ et r_h la fonction qui interpole $v_i \in D(\overline{\Omega})$ sur $\{a_n\}_{n=1}^{N(h)}$. D'après (97), on a

$$\forall v_i \in D(\overline{\Omega}), \quad \lim \|v_i - r_h v_i\|_{1,\Omega} = 0,$$

d'où

$$\lim \|v - v_h\| = 0.$$

Comme $(D(\overline{\Omega}))^2$ est dense dans $V = (H^1(\Omega))^2$, alors l'approximation interne de V par V_h converge.

4.3 Approximation du problème (89) sur U

Soit τ_h une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ par des triangles T et U_h l'approximation de l'espace donné par (93)

$$U_h = \left\{ v_h, v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \forall T \in \tau_h, v_{h,i/T} \in \mathbb{P}_1; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\},$$

alors l'approximation U_h est convergente.

En effet, les fonctions de $D(\bar{\Omega})$ nulles sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ sont denses dans U . Donc, on peut appliquer le théorème 11. Le problème approché est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda_h \in \mathbb{R} \text{ pour lesquelles il existe une solution } u_h \in U_h; u_h \neq 0 \text{ de} \\ \sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u_h) \varepsilon_{ij}(v_h) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u_{h,i} v_{h,i} d\Omega \quad \forall v_h \in U_h, \\ \text{ou } a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h) \end{array} \right. \quad (98)$$

où λ_h sont les valeurs propres approchées.

Désignons par $\lambda_{n,h}$ la $n^{\text{ème}}$ valeur propre approche et par $w_{n,h} = (w_{n,h}^1, w_{n,h}^2)$ la fonction propre associée à $\lambda_{n,h}$.

Théorème 12

Sous les hypothèse précédentes, il existe une suite croissante de valeurs propres

$$0 \leq \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots \leq \lambda_{N(h),h}, \quad (99)$$

et une base orthogonale dans U_h de fonctions propres $w_{n,h}$, telles que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(w_{n,h}, v_h) = \lambda_{n,h}(w_{n,h}, v_h); \quad n = 1, N(h) \quad (100)$$

Convergence

Pour le problème considéré, on est dans le cadre d'application des résultats d'approximation pour les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants. Les résultats que l'on va rappeler ici sont dûs à Strange.

On désigne par Ω le domaine rectangulaire de frontière $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et par τ_h une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$. Soit $V = (H^1(\Omega))^2$ et V_h une approximation de V (donnée par (92)).

Théorème 13

Soit V_h une approximation de V par éléments finis conforme d'ordre 1, alors il existe une constante C_n telle que les valeurs propres approchées $\lambda_{n,h}$ soient bornées, pour h petit, par

$$\lambda_n \leq \lambda_{n,h} \leq \lambda_n + C_n h^2, \quad n = 1, N(h) \quad (101)$$

Théorème 14

Soit V_h une approximation de U par éléments finis conforme d'ordre 1. Si λ_n est une valeur propre simple, alors pour h petit, ils existent des constantes C_n, C'_n telles que

$$\|w_n^k - w_{n,h}^k\|_{L^2(\Omega)} \leq C_n h^2 \quad (102)$$

$$a(w_n^k - w_{n,h}^k, w_n^k - w_{n,h}^k) \leq C'_n h^2 \quad (103)$$

où $w_{n,h}^k$ désigne la $k^{\text{ème}}$ composante ($k = 1, 2$) de $w_{n,h}$ et les constantes C_n, C'_n dépendent de n .

4.4 Discrétisation du problème par éléments finis \mathbb{P}_1

Revenons au problème variationnelle (104)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in U; u \neq 0 \text{ solution de} \\ \sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u_i v_i d\Omega \\ \text{où } a(u, v) = \lambda(u, v) \end{array} \right. , \quad (104)$$

où

$$U = \left\{ v, v \in (L^2(\Omega))^2, \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega), v = 0; \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\}$$

On reprend l'approximation de cet espace donnée par (93)

$$U_h = \left\{ v_h, v_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \forall T \in \tau_h; v_{h,i/T} \in \mathbb{P}_1, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\}$$

τ_h est la triangulation de Ω par des triangles T . Désignons par T le triangle de sommets a_1, a_2, a_3 . On a

$$\forall v \in P_1, \quad v(x, y) = \sum_{i=1,3} v(a_i) \lambda_i(x, y)$$

où $\lambda_i(x, y)$, $i = 1, 3$ sont les coordonnées barycentriques d'un point $m \in T$. Pour $v \in \mathbb{P}_1$, on peut écrire

$$v(x, y) = p(x, y) \cdot B_T(v) \quad (105)$$

où $p(x, y)$ désigne la matrice ligne $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et B_T désigne la matrice colonne $(v(a_1), v(a_2), v(a_3))$.

Le problème approché est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda_h \in \mathbb{R} \text{ pour lesquelles il existe une solution } u_h \in U_h; u_h \neq 0 \text{ de} \\ \sum_{i,j=1,2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u_h) \varepsilon_{ij}(v_h) d\Omega = \lambda \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} u_{h,i} v_{h,i} d\Omega \quad \forall v_h \in U_h, \\ \text{ou } a(u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h) \end{array} \right. \quad (106)$$

d'autre part, on a par définition

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(v) \\ \varepsilon_{22}(v) \\ 2\varepsilon_{12}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathcal{D} \cdot Dv \quad (107)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}(v) \\ \sigma_{22}(v) \\ \sigma_{12}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(v) \\ \varepsilon_{22}(v) \\ 2\varepsilon_{12}(v) \end{pmatrix} = E \cdot \varepsilon$$

Le problème approché s'écrit sous forme matricielle

$$\sum_{T \in \tau_h} \left[\int_T {}^t D v_h {}^t \mathcal{D} E \mathcal{D} . D u_h d\Omega - \lambda_h \int_T v_h u_h d\Omega \right] = 0 \quad \forall v_h \in U_h. \quad (108)$$

Sur chaque élément T de la triangulation, on a

$$v_{h,i} = p(x, y) . B_T(v_{h,i}),$$

d'où

$$v_h(x, y) = \begin{bmatrix} v_{h,1}(x, y) \\ v_{h,2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_T(v_{h,1}) \\ B_T(v_{h,2}) \end{pmatrix}.$$

Avec les notations matricielles

$$v_h(x, y) = \tilde{p}(x, y) . B_T(v_h). \quad (109)$$

On a d'autre part

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_{h,1}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{h,1}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_{h,2}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{h,2}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_T(v_{h,i}) \\ B_T(v_{h,i}) \end{bmatrix}$$

d'où

$$D v_h(x, y) = D \tilde{p}(x, y) . B_T(v_h) \quad (110)$$

avec (109) et (110), le système (108) devient

$$\sum_{T \in \tau_h} {}^t B_T(v_h) \left[\int_T {}^t D\tilde{p}(x, y) {}^t \mathcal{D}ED D\tilde{p}(x, y) d\Omega \right] B_T(u_h) = \lambda_h \sum_{T \in \tau_h} {}^t B_T(v_h) \left(\int_T {}^t \tilde{P}(x, y) \tilde{p}(x, y) d\Omega \right) B_T(u_h) \forall v_h \quad (111)$$

Le système est donc de la forme

$$\sum_{T \in \tau_h} {}^t B_T(v_h) (\mathcal{K}_T \cdot B_T(u_h) - \lambda_h \mathcal{H}_T \cdot B_T(u_h)) = 0 \quad \forall v_h \in U_h \quad (112)$$

où \mathcal{K}_T est la matrice de raideur élémentaire et \mathcal{H}_T est la matrice de masse élémentaire. En introduisant la matrice de permutation Q passant de la numérotation par composante de v_h à celle par point pour l'élément T , le système (112) s'écrit sous forme matricielle finale

$$\sum_{T \in \tau_h} {}^t B'_T(v_h) \left[({}^t Q \mathcal{K}_T Q) B'_T(u_h) - \lambda_h ({}^t Q \mathcal{H}_T Q) B'_T(u_h) \right] = 0 \quad \forall v_h \in U_h \quad (113)$$

où $B_T(u_h) = Q B'_T(u_h)$, et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Calcul des différents termes de la formule (113)

4.5.1 Calcul de $\mathcal{K}'_T = {}^t Q \mathcal{K}_T Q$

Pour tout élément T de la triangulation τ_h , de sommets $a_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 3$, il existe une application bijective F_T définie de \hat{T} dans T par

$$F_T(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}(a_2 - a_1) + \hat{y}(a_3 - a_1) + a_1 \quad (114)$$

où \hat{T} est le triangle rectangle isocèle de côté unité et de sommets $\hat{a}_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, $i = 1, 3$. On a

$$\mathcal{K}_T = \int_T {}^t D\tilde{p}(x, y) {}^t \mathcal{DED} D\tilde{p}(x, y) d\Omega. \quad (115)$$

On pose

$${}^t \mathcal{DED} = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

Soit J la matrice jacobienne de la transformation

$$F_R : (\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow (x, y)$$

$$x = \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(x_3 - x_1) + x_1$$

$$y = \hat{x}(y_2 - y_1) + \hat{y}(y_3 - y_1) + y_1.$$

On a

$$J = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

$$|J| = \Delta$$

Associons à l'application p définie sur T l'application \hat{p} définie sur \hat{T} par

$$\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = p \circ F_T(\hat{x}, \hat{y}). \quad (116)$$

On déduit, du théorème de dérivation des fonctions composées, l'égalité suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En multipliant par J^{-1} , on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix},$$

d'où

$$D\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{31} & y_{12} \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \hat{x}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \hat{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \hat{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$ et $y_{ij} = y_i - y_j$, que l'on peut mettre sous forme

$$D\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{\Delta} J^{-1} \hat{D}\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (117)$$

La relation (117) devient

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{\Delta} \int_{\hat{T}}^t \hat{D}\hat{p}^t J A_1 J^{-1} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y}.$$

En passant

$$A_2 = {}^t J A_1 J^{-1},$$

on obtient

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{\Delta} \iint_{\hat{T}}^t \hat{D}\hat{p} A_2 \hat{D}\hat{P} d\hat{x}d\hat{y} \quad (118)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) y_{31}^2 + \mu x_{13}^2 & (\lambda + 2\mu) y_{12} y_{31} + \mu x_{13} x_{31} & (\lambda + \mu) x_{21} y_{31} & \lambda x_{21} y_{31} + \mu x_{31} y_{21} \\ \text{symetrique} & (\lambda + 2\mu) y_{21}^2 + \mu x_{21}^2 & \lambda x_{31} y_{21} + \mu y_{31} x_{21} & (\lambda + \mu) x_{21} y_{12} \\ & & (\lambda + 2\mu) x_{31}^2 + \mu y_{31}^2 & (\lambda + 2\mu) x_{21} x_{13} + \mu y_{21} y_{13} \\ & & & (\lambda + 2\mu) x_{21}^2 + \mu y_{21}^2 \end{pmatrix}$$

Considérons la décomposition par bloc suivante de \mathcal{K}_T

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T &= \frac{1}{\Delta} \iint_{\hat{T}} \begin{pmatrix} {}^t \hat{D}\hat{P} & 0 \\ 0 & {}^t \hat{D}\hat{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2^{11} & A_2^{12} \\ A_2^{21} & A_2^{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{D}\hat{P} & 0 \\ 0 & \hat{D}\hat{P} \end{pmatrix} d\hat{x}d\hat{y} \\ \mathcal{K}_T &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \iint_{\hat{T}} {}^t \hat{D}\hat{p} A_2^{11} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y} & \iint_{\hat{T}} {}^t \hat{D}\hat{p} A_2^{12} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y} \\ \iint_{\hat{T}} {}^t \hat{D}\hat{p} A_2^{21} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y} & \iint_{\hat{T}} {}^t \hat{D}\hat{p} A_2^{22} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (119)$$

Chacun des blocs de \mathcal{K}_T est de dimension (3,3). On désigne chaque bloc de \mathcal{K}_T par

$$A^{ij} = \iint_{\hat{T}} {}^t \hat{D}\hat{p} A_2^{ij} \hat{D}\hat{p} d\hat{x}d\hat{y} \quad i, j = 1, 3,$$

que l'on note

$$A^{ij} = \left(A_{kl}^{ij} \right) \quad k, l = 1, 3.$$

En explicitant la matrice A^{ij} , on obtient

$$A_{kl}^{ij} = \sum_{m,n=1,2} \iint_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\lambda}_k}{\partial \hat{x}_1} A_{2,mn}^{ij} \frac{\partial \hat{\lambda}_l}{\partial \hat{x}_2} d\hat{x}d\hat{y},$$

où $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$.

Comme A_2 ne dépend pas de \hat{T} on a

$$A_{kl}^{ij} = \sum_{m,n=1,2} A_{2,mn}^{ij} c_{k,m,l,n} \quad k, l = 1, 3$$

avec

$$c_{k,m,l,n} = \iint_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\lambda}_k}{\partial \hat{x}_m} \frac{\partial \hat{\lambda}_l}{\partial \hat{x}_n} d\hat{x}d\hat{y} \quad k, l = 1, 3. \quad (120)$$

Le calcul de \mathcal{K}'_T s'obtient par

$$\mathcal{K}'_T = \frac{1}{\Delta} {}^t Q \cdot \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} \cdot Q \quad (121)$$

Les coordonnées barycentriques d'un point $\hat{m}(\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T}$ sont

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{x}, \quad \hat{\lambda}_3 = \hat{y} \quad (122)$$

d'où le calcul des coefficients c_{kmln} s'en déduit immédiatement.

4.5.2 Calcul de la matrice élémentaire du second membre

$$\mathcal{H}'_T = {}^t Q \mathcal{H}_T Q$$

La matrice \mathcal{H}_T du second membre est

$$\mathcal{H}_T = \int_T {}^t \tilde{p}(x, y) p(x, y) d\Omega = \int_T \begin{pmatrix} {}^t p(x, y) & 0 \\ 0 & {}^t p(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x, y) & 0 \\ 0 & p(x, y) \end{pmatrix} d\Omega.$$

Donc \mathcal{H}_T peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{H}_T = \int_T \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} d\Omega,$$

où

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

En faisant le changement de variable suivant

$$x = \hat{x}(x_2 - x_1) + \hat{y}(x_3 - x_1) + x_1$$

$$y = \hat{x}(y_2 - y_1) + \hat{y}(y_3 - y_1) + y_1,$$

on obtient

$$\iint_{\hat{T}} \lambda_i \lambda_j dx dy = \iint_{\hat{T}} |J| \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j d\hat{x} d\hat{y},$$

d'où

$$\mathcal{H}_T = |J| \iint_{\hat{T}} \begin{pmatrix} \hat{N} & 0 \\ 0 & \hat{N} \end{pmatrix} d\hat{x} d\hat{y},$$

où

$$J = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

et

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1^2 & \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_2^2 & \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 \\ \hat{\lambda}_3 \hat{\lambda}_1 & \hat{\lambda}_3 \hat{\lambda}_2 & \hat{\lambda}_3^2 \end{pmatrix}$$

Le calcul de \hat{N} revient au calcul de $P(I, J) = \iint_{\hat{T}} \hat{\lambda}_I \hat{\lambda}_J d\hat{x} d\hat{y}$

Remarque 14

Le calcul de $p(I, J)$ donne

$$p(I, J) = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & 1/12 \end{bmatrix}$$

4.6 Formation des systèmes

On cherche à mettre globalement l'égalité (113) sous forme matricielle.

4.6.1 Problème de numérotage

On se rapporte à la triangulation de la plaque. La figure 15 comporte 24 sommets, à chacun de ces sommets sont affectés deux degrés de liberté (correspondants aux valeurs de $u_{h,1}$, $u_{h,2}$). On a donc 48 degrés de liberté globaux.

Les degrés de liberté locaux, dans chaque élément de la triangulation, sont numérotés de la manière suivante :

On associe (1,2) au premier sommet, (3,4) au second et (5,6) au troisième. Désignons par d_T la bijection entre les numéros des degrés de liberté locaux du triangle de 1 à 6 et les numéros de ces mêmes degrés de 1 à $2 \times NS$, où NS est le nombre total des sommets.

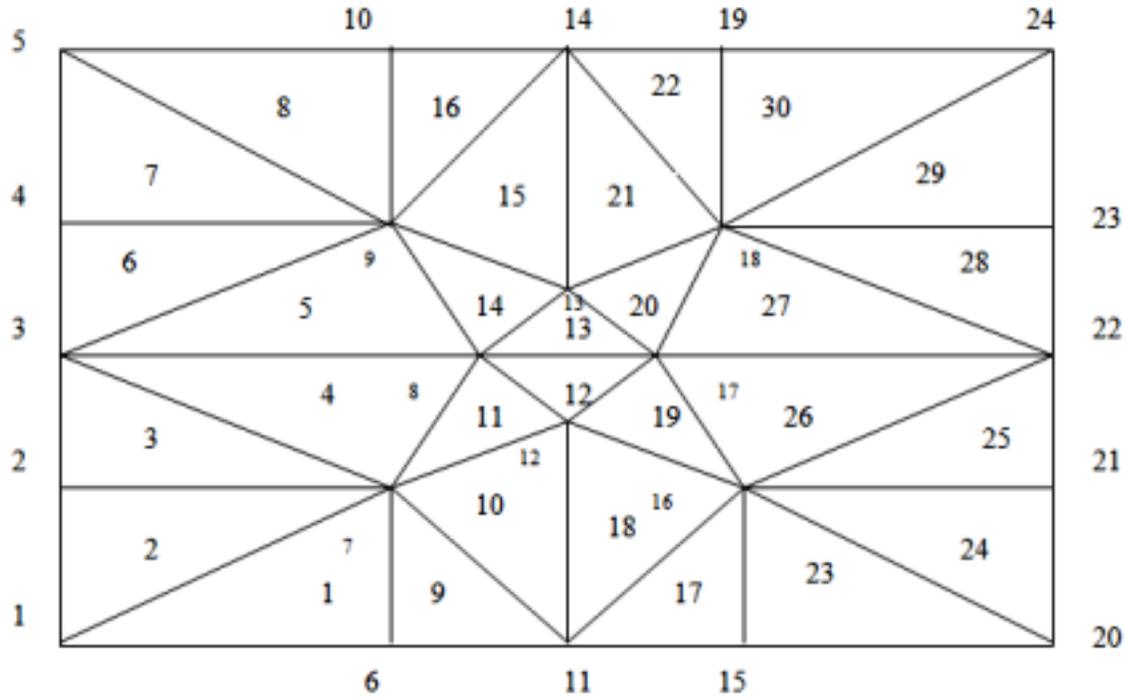


Figure 15: Le maillage de la plaque rectangulaire Ω

Exemple 06

Pour le triangle T de sommets 4, 5, 9 on définit d_T^{-1} par

$$\begin{aligned} \text{sommet n}^\circ 4 (a_1) & \begin{cases} 1 \rightarrow 7 \\ 2 \rightarrow 8 \end{cases} \\ \text{sommet n}^\circ 5 (a_2) & \begin{cases} 3 \rightarrow 9 \\ 4 \rightarrow 10 \end{cases} \\ \text{sommet n}^\circ 9 (a_3) & \begin{cases} 5 \rightarrow 19 \\ 6 \rightarrow 20 \end{cases} \end{aligned}$$

On définit $\overline{\mathcal{K}}'_{T,ij}$ et $\overline{\mathcal{H}}'_{T,ij}$ les matrices d'ordre $2 \times NS$ par

$$\overline{\mathcal{K}}'_{T,ij} = \begin{cases} \mathcal{K}'_{T,d_T^{-1}(i)d_T^{-1}(j)} si & s(i) \text{ et } s(j) \in T \\ 0 & si \text{ non} \end{cases} \quad (124)$$

$$\overline{\mathcal{H}}'_{T,ij} = \begin{cases} \mathcal{H}'_{T,d_T^{-1}(i)d_T^{-1}(j)} si & s(i) \text{ et } s(j) \in T \\ 0 & si \text{ non} \end{cases} \quad (125)$$

où s est la surjection donnant à un degré de liberté le n° du sommet le

supportant. Pour l'exemple précédent on a

$$s(7) = 4, \quad s(10) = 5, \quad (19) = 9$$

4.6.2 Assemblage

Soit $B'(u_h)$ le vecteur des $2 \times NS$ degrés de liberté de u_h . Si on utilise (124) et (125) avec la relation (113), il vient

$${}^t B'(v_h) \left[\left(\sum_{T \in \tau_h} \bar{\mathcal{K}}'_T \right) B'_T(u_h) - \lambda_h \left(\sum_{T \in \tau_h} \bar{\mathcal{H}}'_T \right) B'_T(u_h) \right] = 0 \quad \forall v_h \in U_h \quad (126)$$

Le système assemblé, sous forme matricielle globale est

$${}^t B'(v_h) \left[\mathcal{K} B'_T(u_h) - (\lambda_h \mathcal{H}) B'_T(u_h) \right] = 0 \quad \forall v_h \in U_h, \quad (127)$$

où

$$\mathcal{K} = \sum_{T \in \tau_h} \bar{\mathcal{K}}'_T, \quad \mathcal{H} = \sum_{T \in \tau_h} \bar{\mathcal{H}}'_T$$

4.7 Prise en compte des conditions aux limites

Reprenons l'espace approché

$$U_h = \left\{ v_h \begin{pmatrix} v_{h,1} \\ v_{h,2} \end{pmatrix}, v_{h,i} \in C^0(\Omega); v_{h,i}/T \in \mathbb{P}_1, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \right\},$$

et notons

$$J = \{\text{numéros des } v_{h,i}(s) = 0 \text{ pour } s \in \Gamma_1\}$$

$$K = \{\text{numéros des } v_{h,i}(s) = 0 \text{ pour } s \in \Gamma_3\}$$

$J \cup K$ représente l'ensemble des numéros des degrés de liberté bloqués nuls.

$$I = \{\text{numéros des degrés de liberté de } 1 \text{ à } 2 \times NS\}$$

$$L = I - (J \cup K) = \{\text{numéros des degrés de liberté libres}\}$$

Les noeuds de la triangulation sont numérotés de manière que les degrés de liberté correspondants à Γ_1 sont numérotés les premiers et ceux correspondant à Γ_3 sont numérotés les derniers.

Suivant la décomposition $I = J \cup K \cup L$, la décomposition par bloc du système (127) s'écrit

$${}^t \left[\begin{array}{c} B'(v_h)_J \\ B'(v_h)_L \\ B'(v_h)_K \end{array} \right] \left\{ \left[\begin{array}{ccc} K_{J,J} & K_{J,L} & K_{J,K} \\ K_{L,J} & K_{L,L} & K_{L,K} \\ K_{K,J} & K_{K,L} & K_{K,K} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B'(u_h)_J \\ B'(u_h)_L \\ B'(u_h)_K \end{array} \right] - \lambda_h \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{J,J} & \mathcal{H}_{J,L} & \mathcal{H}_{J,K} \\ \mathcal{H}_{L,J} & \mathcal{H}_{L,L} & \mathcal{H}_{L,K} \\ \mathcal{H}_{K,J} & \mathcal{H}_{K,L} & \mathcal{H}_{K,K} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B'(u_h)_J \\ B'(u_h)_L \\ B'(u_h)_K \end{array} \right] \right\} = 0$$

mais $B'(u_h)_J = B'(u_h)_K = 0$,

d'où $(u_h)_L$ est solution de

$$\mathcal{K}_{LL} B'(u_h)_L = \lambda_h \mathcal{H}_{LL} B'(u_h)_L \quad (128)$$

4.8 Résolution numérique

Notons \mathcal{K}_{LL} par H et \mathcal{H}_{LL} par D (notée, dans le programme de résolution, DV). Les matrices $H = (h_{ij})_{i,j=1,n}$ et $D = (d_{ij})_{i,j=1,n}$ sont symétriques, définies positives et ont une structure bande. Le système est donc de la forme

$$Hu = \lambda Du \quad (129)$$

4.8.1 Réduction à un problème standard de la forme $Au = \lambda u$

Considérons la décomposition de Cholesky de la forme de la matrice D

$$D = L^t L.$$

Le problème (129) est donc équivalent à

$$\begin{cases} L^{-1} H^t (L^{-1}) u = \lambda u \\ {}^t L X = u \end{cases} \quad (130)$$

où la matrice $L^{-1} H^t (L^{-1})$ est évidemment symétrique. Le calcul de la matrice $L^{-1} H^t (L^{-1})$ se fait en deux temps

1^{er} temps : calcul de $L^{-1} H$

Posons : $L^{-1} H = Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$.

Pour calculer Y , on résoud successivement les systèmes

$$L Y_j = H_j \quad j = 1, N$$

où : Y_j et H_j désignent la $j^{\text{ème}}$ colonne de Y et de H respectivement.

2^{ème} temps : calcul de $L^{-1} {}^t (L^{-1} H)$

Posons : $L^{-1} {}^t (L^{-1} H) = X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$.

Pour calculer X , on résoud successivement les systèmes

$$L X_j = {}^t Y_j \quad j = 1, N$$

où X_j et ${}^t Y_j$ désignent la $j^{\text{ème}}$ colonne de X et de ${}^t Y$ respectivement. Le système est donc réduit à la forme standard (130) que l'on résoud en utilisant la méthode de Jacobi.

Remarque 15

La méthode de Jacobi fournit simultanément une approximation de “toutes” les valeurs propres et “tous” les vecteurs propres d’une matrice symétrique. Mais, il faut noter que dans ce cas, seules les premières valeurs propres et les vecteurs propres correspondants ont une signification physique.

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté l'étude théorique et numérique d'un modèle dynamique en élasticité linéaire. Des méthodes voisines permettent d'aborder l'étude des problèmes non linéaires.

Annexe
Mise en oeuvre informatique

1 Programme principal

Le programme principal de calcul est organisé de la manière suivante :

Pour un maillage donné, on commence par repérer sous forme de tableaux les coordonnées des différents noeuds de la triangulation et les numéros des sommets des éléments.

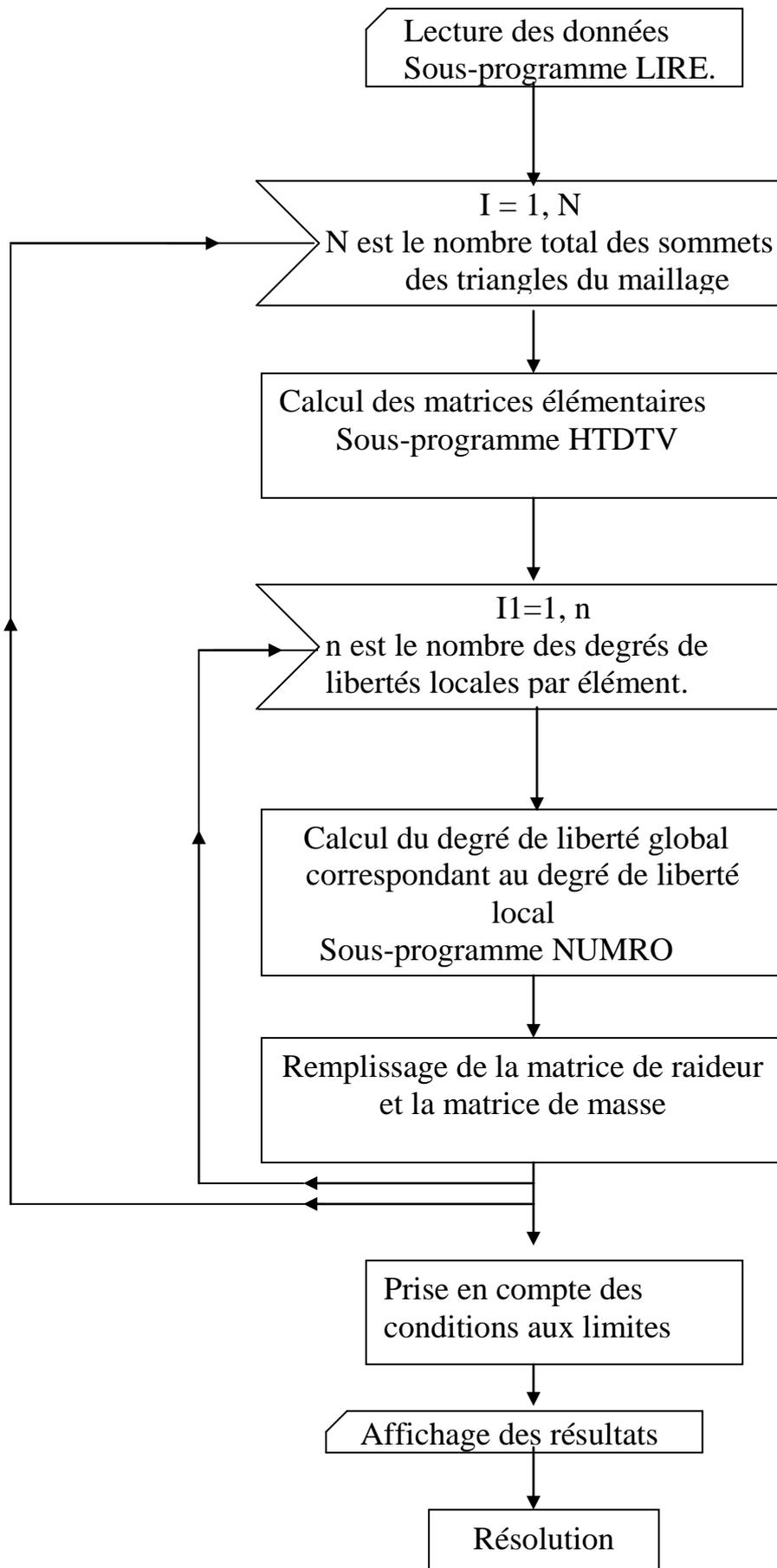
On procède ensuite au calcul des matrices élémentaires notées \mathcal{K}'_T et les matrices de masses élémentaires notées \mathcal{H}'_T .

En utilisant l'algorithme de numérotage, on effectue l'assemblage du système de manière à constituer la matrice de raideur globale notée \mathcal{K} et la matrice de masse globale notée \mathcal{H} . Cette méthode conduit à un problème de valeurs propres non standard

$$Au = \lambda Du$$

Que l'on résoud en le réduisant à un problème standard $AX = \lambda X$, et en utilisant ensuite la méthode de Jacobi. Le programme principal peut être décrit au moyen de l'organigramme suivant

Programme principal



Numéro des noeuds et leurs coordonnées

sommet	X(i)	Y(i)
1	0	0
2	0	0,225
3	0	0,4
4	0	0,575
5	0	0,8
6	0,3	0
7	0,3	0,225
8	0,4	0,4
9	0,3	0,575
10	0,3	0,8
11	0,5	0
12	0,5	0,3
13	0,5	0,5
14	0,5	0,8
15	0,7	0
16	0,7	0,225
17	0,6	0,4
18	0,7	0,575
19	0,7	0,8
20	1	0
21	1	0,225
22	1	0,4
23	1	0,575
24	1	0,8

2 Description des principaux sous-programmes

2.1 Sous programme LIRE

Ce programme permet de lire les différentes données du problème.

Description des paramètres

1/ T est le tableau donnant les numéros des sommets de chaque triangle noté $T(I)$.

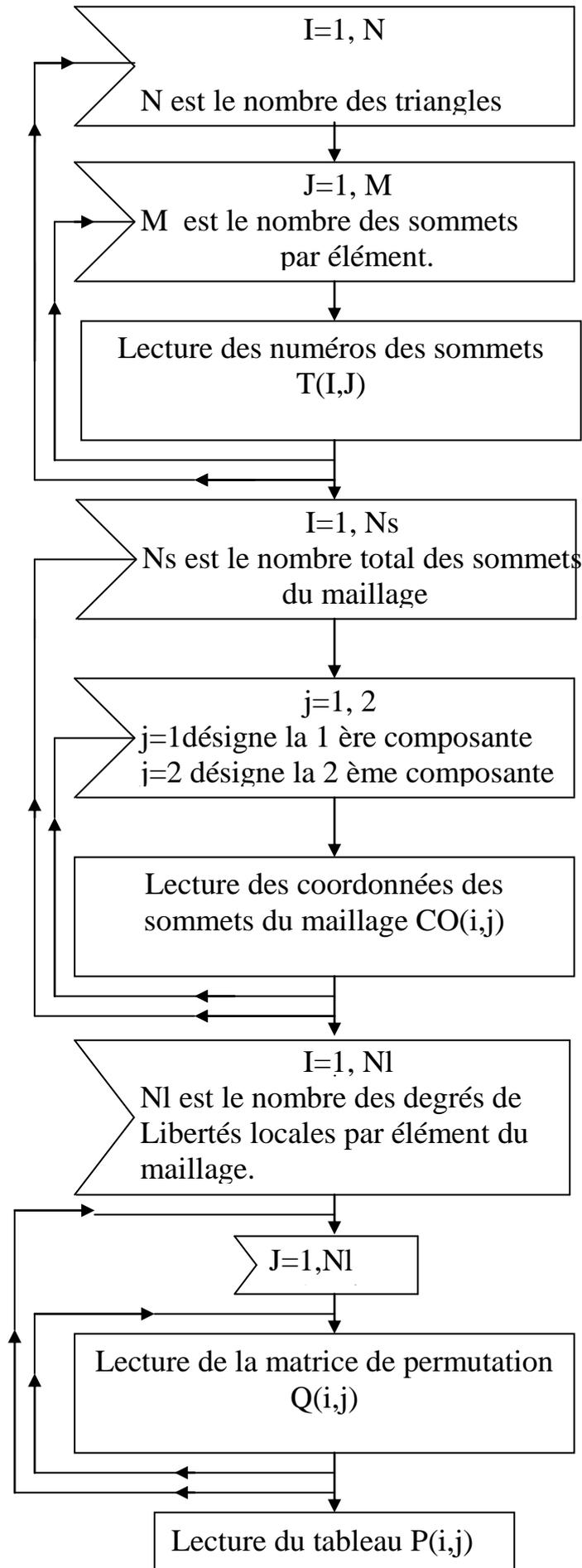
2/ CO est le tableau donnant les coordonnées des sommets des triangles.

3/ Q est la matrice de permutation.

4/ $P(I, J)$ est le tableau donnant les valeurs des intégrales

$$P(I, J) = \iint_{\hat{T}} \hat{\lambda}_I \hat{\lambda}_J d\hat{x} d\hat{y}$$

Sous-programme **LIRE**



2.2 Sous programme HTDTV

Ce programme calcul successivement la matrice A_2 correspondante à chaque triangle du maillage et la matrice \mathcal{K}_T notée EL sous forme de quatre blocs. Chaque bloc de \mathcal{K}_T est de la forme

$$A_{kl}^{ij} = \sum_{m,n} A_{2,mn}^{ij} c_{k,l,m,n} \quad k, l = 1, 3,$$

ensuite il calcule la matrice \mathcal{K}'_T notée HT.

Les coefficients c_{klmn} sont calculés par le sous programme CFT. Le calcul du second membre est organisé de la même manière.

2.3 Sous programme NUMRO

Ce programme permet de donner le numéro du degré de liberté global I_0 ($I_0 = 1, 48$) associé au degré de liberté local I_1 ($I_1 = 1, 6$). Cette procédure est nécessaire pour la constitution de la matrice de raideur \mathcal{K} (notée H) et la matrice de masse \mathcal{H} (notée DV). La procédure est la suivante :

On considère les numéros des sommets de chaque triangle $T(I)$ dans l'ordre croissant. Rappelons que $T(I, M)$ représente le numéro global du M ème sommet du triangle $T(I)$. Par exemple, pour le 8ème triangle, on a

$$T(8, 1) = 5, \quad T(8, 2) = 9, \quad T(8, 3) = 10$$

A chaque sommet du triangle $T(I)$ deux degrés de liberté locaux sont associés. Soient (1,2) pour le premier sommet, (3,4) pour le second et (5,6) pour le troisième.

Soit I_1 un degré de liberté local. On lui associe le sommet M , $M = 1, 3$ suivant la formule

$$M = (I_1 + 1) \text{ div } 2 \quad \text{div} = \text{division entière}$$

Si I_1 est impair, alors il lui correspond le premier degré de liberté global associé au sommet M du triangle, s'il est pair, il lui correspond le second degré de liberté global associé à ce sommet. En posant

$$N = \begin{cases} 1 \text{ si } I_1 \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } I_1 \text{ est paire} \end{cases},$$

l'application

$$\{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$$

$$I \longmapsto (M, N),$$

est une bijection.

En connaissant le couple (M, N) , on peut alors déterminer le degré de liberté global I_0 correspondant au degré de liberté local I_1 par la formule

$$I_0 = 2(T(I, M) - 1) + N$$

Exemple 07

Soit à déterminer le degré de liberté global I_0 correspondant au degré de liberté local $I_1 = 4$, pour $I = 8$

Le numéro au sommet local est

$$M = (4 + 1) / 2 = 2$$

$$N = 2 \quad \text{car } I_1 \text{ est pair.}$$

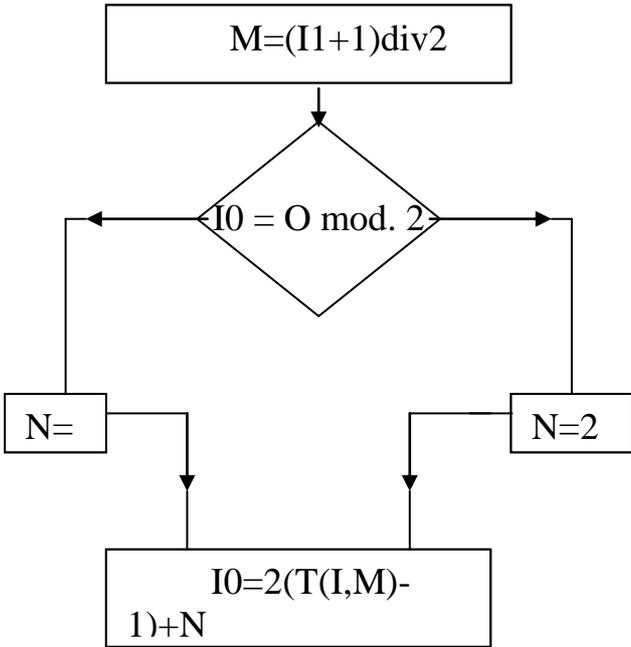
Le numéro du sommet global associé est

$$T(I, M) = T(8, 2) = 9.$$

Enfin le degré de liberté correspondant est

$$I_0 = 2(9 - 2) + 2 = 17$$

Sous programme NUMRO



3 Rangement du système total

Le rangement du système total est effectué à l'intérieure du programme principal de la manière suivante :

La matrice de raideur globale \mathcal{K} de dimension $2 \times NS$ (NS est le nombre total des sommets de la triangulation) et la matrice de masse \mathcal{H} de dimension $2 \times NS$ sont remplies en ajoutant, au fur et à mesure qu'on calcule une matrice de raideur et une matrice de masse élémentaire relatives à un élément du maillage, tous les éléments qui correspondent au même degré de liberté global. Ce degré de liberté est repéré à partir du degré de liberté local à l'aide du sous programme NUMRO.

Bibliographie

- [1] Allaire. G, *Analyse Numérique et Optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Les éditions de l'école polytechnique Mai 2006 91128 Palaiseaux cedex, France.
- [2] Bouzit. M, *Résolution par éléments finis de quelques modèles d'élasticité, cas statistiques*. Les cahiers de la recherche C.U.R.E.R, Constantine, 1982.
- [3] Bouzit. M, *Sur l'équation de poisson*, C.I.SI, C.E.A, Paris, 1980.
- [4] Brezzi. F and Fortine. M, *Mixed and hybrid finite Element methods*, Springer Series in Computational Mathematics, vol.15, Spriger Verlag, New York 1991.
- [5] Chniguel. A, *Résolution par éléments finis de quelques modèles d'élasticité*, Thèse de magister, Université de Constantine, 1981.
- [6] Ern. A, *Éléments Finis aide-mémoire*, Dunod, Paris, 2005 ISBN 2 10 007303 6.
- [7] Rappas. J and Picasso. M *Introduction à l'analyse numérique*, Presses polytechniques universitaires Romandes, Ch.-1015 Lausanne. ISBN2-88 074 – 363 imprimé en suisse 1998.
- [8] Rudin. W, *Principes d'analyse mathématiques*. Ediscience international, 1995. ISBN : 2-84074-108-3.
- [9] Salencon. J, *Mécanique des milieux continus*, Press de l'école polytechnique, Palaiseau, 2004.
- [10] Schwartz. L, *Cours d'analyse*. Hermann, 1967.
- [11] Moncuquet. M, DES.PA, Observatoire de Paris 2001-03-05.
- [12] W. H. Press, S.A. Tenkolsky, W.T, Wetterling, B.P Flannery, *Numerical Recipes in C*, Combridge University, Press 1992.

Résumé

Ce mémoire est consacré à la résolution d'un problème de modes propres de vibrations d'une plaque, le problème a été issu de la mécanique des milieux continus. Pour la partie fonctionnelle, des conditions d'existence et d'unicité de la solution ont été établies. Pour l'aspect numérique, les équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis en la rattachant aux méthodes générales des approximations d'espaces. La résolution nécessite d'une part une étude approfondie de quelques algorithmes adaptés au problème discret obtenu et d'autre part une mise en œuvre informatique importante. Ce travail est une étape qui a permis la réalisation de beaucoup de logiciels exploitables dans différents domaines de l'industrie.

Abstract

This dissertation is devoted to the resolution of a problem of vibrations eigent mods of a thin plate, this problem is issued from the micanichs continuous media. For the fonctionnal part, the existance and uniqueness are established. For the numerical aspect, the equations are discretised by using finite elements method in connection with general methods of space approximations. The resolution requires from one hand a deeply study of some algorithms adapted to the obtained discritised problem and in another hand an informatical important realisation is given. This work is a step wich allowed th realisation of a lot of exploited software in different domains of industry.

حل عددي لنظام ديناميكي

يخص هذا العمل حل مسألة حلا ذاتي لاهتزازات صفحة نتجت هذه المسألة من ميكانيك الاوساط المستمرة. من الناحية التابعية تم البرهان على خواص وجود و نظامية و وحدانية الحل، أما في الجانب الرقمي فقد قطعت المسألة بطريقة العناصر المنتهية بالطرائق العامة لتقريبات الفضاءات. تطلب الحل من ناحية اولى دراسة مستفيضة لبعض الالغوريتيمات المعدة حسب المسألة المتقطعة الناتجة و من ناحية ثانية عملا معلوماتيا هاما. يعتبر هذا العمل مرحلة سمحت بانجاز برامج حل استغلت فى ميادين مختلفة من عالم الصناعة.