

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE 1



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : 06/Maths/2021

N° de série : 60/DS/2021

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT EN SCIENCES EN
MATHÉMATIQUES

Le théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de petite dimension

Présentée par
MATMAT Chahrazade

OPTION
Topologie Algébrique

Devant le jury :

| | | | |
|-----------------------|-------------------------------|-------|--|
| Président | M ^r M. DEGHDAK | Prof | Université frères Mentouri, Constantine 1. |
| Encadreuse de thèse | M ^{me} F. MESSACI | Prof. | Université Salah Boubendir, Constantine 3. |
| Co-encadreur de thèse | M ^r C. BLANCHET | Prof. | Université Paris Diderot, Paris 7. |
| Examinatrice | M ^{me} S. KHARFOUCHI | Prof. | Université Salah Boubendir, Constantine 3. |
| Examinateur | M ^r L. NOUI | Prof | Université Batna 2. |
| Examinateur | M ^r A. BOUDLIOU | M.C.A | Université frères Mentouri, Constantine 1. |

Soutenue le : 09 / Juin / 2021.

Remerciements

*En premier lieu, je tiens à remercier **Mme Fatiha Messaci**, ma directrice de thèse pour sa confiance et son soutien. Elle m'a appris que le travail donnera toujours ses fruits et que ce qui compte dans la recherche est de ne pas s'inquiéter pour les résultats mais plutôt d'insister sur la bonne qualité de tout ce qu'on fait en gardant toujours la patience, l'espoir et le sérieux.*

*Je saisis également cette occasion pour adresser mes profonds remerciements à **Mr Christian Blanchet**, professeur de l'université Paris Diderot, qui m'a beaucoup soutenue même avant qu'il soit mon co-directeur de thèse. J'ai eu de la chance de rencontrer une personne pareille. Il m'a beaucoup aidé sur le plan moral, administratif et recherche. J'ai beaucoup appris avec lui dans le domaine de la topologie algébrique. Il a été très patient avec moi et m'a beaucoup encouragée. Je n'oublierai jamais sa phrase « Chahra, tu arrivera à le faire ». Je lui adresse ma profonde gratitude et mon profond respect.*

*Je profite aussi de cette occasion pour remercier les responsables du laboratoire imj-prg qui ont accepté de m'inviter pour une bourse de dix huit mois ainsi que tout le personnel de ce dernier. Ceci m'a permis de travailler sur mon projet de recherche, et de rédiger ma thèse. J'ai assisté aux séminaires et j'ai rencontré plusieurs chercheurs. Je tiens particulièrement à remercier **Mme Catherine Gille** d'avoir consacré de son temps pour répondre à mes questions dans le but de comprendre l'enlacement des nœuds.*

*Je tiens à remercier vivement **Mr Messaoud Deghdak** professeur de l'université frères Mentouri, Constantine 1 qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

*J'adresse aussi mes remerciements les plus chaleureux à **Mme Soumia Kharfouchi**, professeur de l'université Salah Boubendir, Constantine 3, **Mr Lemnouar Noui**, professeur de l'université Batna 2 et **Mr Ammar Boudliou**, Maître de conférence de l'université frères Mentouri, Constantine 1 de m'avoir accordé l'honneur de faire partie du jury de cette thèse.*

*Je n'oublie pas 'non plus' de remercier tous ceux et celles qui m'ont soutenue et encouragée le long de ce travail. Mes amies **Ilhem** et **Faiza** et tous les autres que je ne peux pas les citer car la liste sera trop longue.*

Dédicace

Je dédie ce travail

à mes chers parents,

à ma chère famille,

à tous les chercheurs qui travaillent durement pour avoir des meilleurs résultats,

à la mémoire de notre enseignant et collègue Mr Chibat Ahmed.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| INTRODUCTION | iii |
| 1 Le théorème de Borsuk-Ulam | 2 |
| 1.1 Introduction | 2 |
| 1.2 Version originale du théorème de Borsuk-Ulam pour les sphères | 3 |
| 1.2.1 Les \mathbb{Z}_2 -actions libres sur les espaces | 3 |
| 1.2.2 Le théorème de Borsuk-Ulam pour le cercle S^1 | 5 |
| 1.2.3 Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^2 | 6 |
| 1.2.4 Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^n et ses preuves homologique et combinatoire | 8 |
| 1.3 Formulations originales du théorème de Borsuk-Ulam | 14 |
| 1.3.1 Équivalence entre toutes les versions du théorème de Borsuk- Ulam | 14 |
| 1.3.2 Preuves de quelques versions équivalentes au théorème de Borsuk- Ulam | 18 |
| 1.3.3 Équivalence entre le théorème de Borsuk-Ulam et le lemme de Tucker | 19 |
| 1.4 Le \mathbb{Z}_2 -indice et le théorème de Borsuk-Ulam | 20 |
| 2 Applications et généralisations du théorème de Borsuk-Ulam | 26 |
| 2.1 Introduction | 26 |
| 2.2 Quelques applications directes du théorème de Borsuk-Ulam | 27 |
| 2.2.1 Le théorème de Brouwer d'après le théorème de Borsuk-Ulam | 27 |
| 2.2.2 Le théorème du sandwich au jambon | 28 |
| 2.2.3 Cas discret du théorème du sandwich au jambon | 31 |
| 2.3 Quelques généralisations du théorème de Borsuk-Ulam | 34 |
| 2.3.1 Le théorème de Borsuk-Ulam pour les surfaces | 38 |
| 2.3.2 Le théorème de Borsuk-Ulam pour les CW-complexes | 40 |
| 2.3.3 Applications en dimensions 2 et 3 | 48 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Quelques aspects sur les 3-variétés | 50 |
| 3.1 | Introduction | 51 |
| 3.2 | Une introduction sur les 3-variétés | 51 |
| 3.2.1 | Les variétés en général | 51 |
| 3.2.2 | Quelques aspects sur les 3-variétés | 53 |
| 3.3 | Une introduction sur les noeuds | 56 |
| 3.3.1 | Enlacement des noeuds | 59 |
| 3.3.2 | Matrice d'enlacement | 63 |
| 3.4 | Chirurgies de Dehn et le théorème de Lickorish- Wallace | 64 |
| 3.4.1 | Chirurgies de Dehn sur les noeuds | 64 |
| 3.4.2 | Chirurgie sur un entrelacs d'une 3-variété M | 66 |
| 3.4.3 | Le théorème de Lickorish-Wallace. | 68 |
| 3.5 | Chirurgie et les 4-variétés | 69 |
| 3.5.1 | Homologie de $M_{\mathcal{L}}$ et de $W_{\mathcal{L}}$ | 71 |
| 3.6 | Les formes d'enlacement et les matrices d'enlacement. | 73 |
| 3.6.1 | Enlacement rationnel | 73 |
| 3.6.2 | Formes d'enlacement d'une 3-variété | 74 |
| 3.6.3 | Versions homologique et cohomologique de la forme d'enlacement | 76 |
| 3.6.4 | Forme d'enlacement d'une matrice | 77 |
| 3.6.5 | Lien entre la matrice d'enlacement et la forme d'enlacement d'une 3-variété | 78 |
| 4 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés. | 80 |
| 4.1 | Introduction | 80 |
| 4.2 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés | 83 |
| 4.3 | Calculs pour la présentation par chirurgie des 3-variétés orientées | 84 |
| 4.4 | Quelques exemples et applications | 87 |
| 4.4.1 | Applications aux espaces lenticulaires | 87 |
| 4.4.2 | Revêtements doubles des fibrés en tores. | 89 |
| 4.4.3 | Application pour les 3 variétés ayant des présentations par chirurgie par des matrices d'enlacements diagonales | 96 |
| 4.4.4 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour $S^1 \times S^2$ | 98 |
| 4.4.5 | Application à la 3-bouteille de Klein \mathbb{K}^3 | 99 |
| 4.5 | Compléments sur quelques calculs des groupes cohomologiques de certains espaces | 100 |
| 4.6 | Une autre preuve du théorème de Borsuk-Ulam pour les espaces lenticulaires | 105 |
| 4.7 | Présentations par chirurgie des espaces lenticulaires et des fibrés en tores | 107 |
| A | Appendice | 109 |
| A.1 | Introduction | 109 |
| A.2 | Degré des applications sur la sphère S^n | 109 |
| A.3 | L'homomorphisme de Bockstein | 112 |
| | Bibliographie | 115 |

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est d'étudier le théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de petite dimension, plus précisément nous avons de nouveaux résultats en dimension trois. Le théorème de Borsuk-Ulam est un célèbre théorème dans l'histoire de la topologie algébrique. Ses généralisations et ses applications sont encore un domaine actif de nos jours. Le grand nombre d'articles variés liés au théorème de Borsuk-Ulam indique son importance et son actualité. Il a été prouvé tout d'abord pour la sphère S^n et généralisé ensuite pour d'autres espaces. Dans cette introduction, nous allons décrire les principaux concepts de ce travail en commençant par un aperçu sur l'histoire de ce théorème et en terminant par fournir notre contribution pour les 3-variétés. Nos ingrédients sont les concepts de base de la topologie algébrique et les propriétés spécifiques des variétés tridimensionnelles, principalement les présentations par chirurgie des variétés orientées.

Qu'est-ce que le théorème de Borsuk-Ulam et pourquoi est-il si intéressant ?

La version générale du théorème de Borsuk-Ulam dit que ce dernier est valable pour un triplet (X, τ, Y) , où X, Y sont des espaces topologiques et $\tau : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme involutif libre de point fixe, si et seulement si pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ il existe $x \in X$ tel que $f(x) = f(\tau(x))$. Dans ce cas, on dit que le triplet (X, τ, Y) possède la propriété Borsuk-Ulam ou que (X, τ, Y) est un Borsuk-Ulam triplet.

La version originale de ce théorème a été conjecturée par St. Ulam et prouvée par K. Borsuk [11] en 1933 pour le triplet $(S^n, \tau, \mathbb{R}^n)$, où $\tau : S^n \rightarrow S^n$ est l'application antipodale. Dans l'illustration de M. Steinhaus [6], [51], le théorème de Borsuk-Ulam s'interprète comme suit : *à tout moment, il y-a toujours deux endroits antipodaux sur Terre qui ont la même température et en même temps ils ont des pressions d'air identiques.* C'était le début de l'un des résultats topologiques bien connus ayant de nombreuses preuves intéressantes, et de nombreuses et de diverses généralisations et applications qui incluent les cas de dimension infinie et les cas multivoques. Quelques exemples en analyse non linéaire peuvent être trouvés dans [29], [30], [42], [64].

Ce théorème possède plusieurs formes équivalentes, ce qui permet dans de nombreuses situations de transformer la question de Borsuk-Ulam en une autre qui peut être plus facile à résoudre. En effet, l'énoncé équivalent bien connu est le théorème de L. Lyusternik et L. Schnirelmann (voir [48] ou [51]). Ce qui fournit plus d'options

diverses pour prouver le théorème de Borsuk-Ulam. De plus, les lemmes combinatoires les plus simples appelés le lemme de Tucker et le lemme de Sperner sont également des analogues du théorème de Borsuk-Ulam. Ils sont connus comme étant ses versions discrètes avec de nombreuses applications utiles, voir par exemples [51], [56].

Dans la littérature, de nombreuses extensions et applications du théorème de Borsuk-Ulam peuvent être trouvées (voir par exemple [51], [67]). Ce théorème est fortement lié à quelques théorèmes bien connus comme le théorème du point fixe de Brouwer (voir pour les exemples [51], [73], [74],) et le théorème de Kakutani [74], et il est aussi applicable en combinatoire et en théorie des graphes. Une excellente référence générale pour ces applications ainsi que le théorème lui-même est le livre de Matoùsek [51]. Une autre application liée à la théorie des mesures est le théorème de Stone-Tukey référé dans la littérature sous le nom du théorème du sandwich au jambon. Ce théorème possède aussi une très grande variété de généralisations (par exemple, nous avons les références [19], [25], [51], [65], [66]).

Un résumé des généralisations du théorème de Borsuk-Ulam.

Les généralisations du théorème de Borsuk-Ulam sont variées. Il suffit de substituer les espaces S^n ou \mathbb{R}^n par d'autres espaces et de considérer une involution libre correspondante τ , cette dernière n'existe pas dans toutes les situations.

Parmi les premières généralisations celle de D. G Bourgin dans [12], où il considère le triplet (S^n, T, \mathbb{R}^n) tel que T est une involution libre sur S^n . Cependant, en gardant $X = S^n$, Corner et Floyd [17] ont prouvé le théorème pour Y une variété différentielle M de dimension finie, Munkholm dans [39] a prouvé qu'on peut omettre la condition de différentiabilité et supposer que Y est une m -variété topologique compacte. D'autre part, Munkholm dans [40] et Minoru Nakaoka dans [57] ont respectivement remplacé la sphère S^n par des n -sphères homologiques fermées (mod 2) et des n -sphères homologiques (mod p), ils ont supposé que Y est une variété topologique compacte et ont prouvé le théorème de Borsuk-Ulam dans ces cas.

Une généralisation naturelle du théorème de Borsuk-Ulam est pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) , où X est un CW-complexe fini équipé d'une involution libre de point fixe τ . La preuve et les formes équivalentes de ces théorèmes généralisés ont été illustrées par Daciberg L. Gonçalves, Claude Hayat et Peter Zvengrowski dans [35]. Parmi ces équivalences, nous concentrons notre attention sur celle qui utilise un degré topologique bien connu appelé le \mathbb{Z}_2 -indice noté par $ind_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau)$ et défini comme étant le plus grand n tel que le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) . Le \mathbb{Z}_2 -indice reformule la propriété du Borsuk-Ulam pour le cas où l'espace d'arrivé est un espace euclidien. Pour la version originale, le théorème de Borsuk-Ulam dit que le \mathbb{Z}_2 -indice pour la sphère S^n est égal à n .

Divers articles traitant le sujet du Borsuk-Ulam peuvent être trouvés dans la littérature. Dans l'étude de Steinlein en 1985 [67], plus de quatre cents publications ont été citées. Si on ajoute tous les autres articles qui ont été publiés après cet article, et on essaye de consulter certains d'entre eux, on voit que des preuves variées avec des techniques diverses dans différents domaines de mathématique ont été utilisées pour ce théorème. Certains papiers récemment publiés sont [7], [4], [15], [20], [29], [36], [55].

Notre intérêt dans cette thèse est l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour les variétés de petite dimension. La dimension 1 est facile à comprendre. Pour la dimension 2, en 2006 Daciberg Lima Gonçalves dans [35] a étudié complètement le cas (S, τ, \mathbb{R}^2) , où S est une surface fermée. Dans [34], Daciberg Lima Gonçalves et Jonh Ghashi ont considéré les triplets (M, τ, N) , où M, N sont des surfaces fermées. Ils ont décrit tous les triplets (M, τ, N) qui ont la propriété du Borsuk-Ulam. Dans [36], un raffinement naturel des résultats de l'article précédent a été donné. Les auteurs ont tenté de classer les éléments de l'ensemble des classes d'homotopie $[M, N]$ qui ont la propriété Borsuk-Ulam. Ils ont résolu ce problème pour les cas où M et N coïncident et sont des surfaces compactes sans bord de caractéristique d'Euler nulle, à savoir le 2-tore \mathbb{T}^2 ou la bouteille de Klein \mathbb{K}^2 .

Comme nous l'avions mentionné précédemment, un moyen très efficace d'étudier la propriété du Borsuk-Ulam est de calculer le \mathbb{Z}_2 -indice. Des conditions générales pour cet invariant topologique ont été données dans [35]. Leur reformulation dans le cas tridimensionnel implique que le \mathbb{Z}_2 -indice sera dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. En se basant sur les résultats de ce dernier article, quelques classes de 3-variétés ont été étudiées. Par exemple, les revêtements doubles des variétés de Seifert dans [4], les variétés sphériques dans [37], et les variétés Sol^3 dans [1].

Quelles sont les propriétés spécifiques des 3-variétés qui les rendent intéressantes à étudier ?

Les variétés sont des espaces topologiques qui peuvent être vus localement comme des espaces euclidiens, c'est-à-dire qu'une n -variété est un espace topologique tel que chaque point possède un voisinage homéomorphe à l'espace n -euclidien. Depuis longtemps, dès que l'on essaye de reformuler des problèmes de physique ou d'autres domaines dans un langage mathématique, on se retrouve naturellement orienté vers la topologie et la géométrie des variétés. Par conséquent, les variétés sont des notions fondamentales pour ces domaines, ce sont les termes mathématiques de la géométrie pour lesquels les topologues s'occupent des questions essentielles de classification et de construction des invariants. Les exemples de variétés incluent les sphères S^n , les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$ et les bouteilles de Klein \mathbb{K}^n .

De plus, les variétés peuvent être équipées de structures supplémentaires. En géométrie, on étudie souvent les variétés avec des structures différentielles appelées les variétés différentiables. En topologie, on s'intéresse à des structures plus générales telle que la structure PL. Notez que toute variété topologique M de dimension inférieure ou égale à 3 admet une structure lisse et une structure PL. En addition à tout ça, les variétés sont divisées en deux parties, orientables et non orientables. La notion de l'orientabilité est définie par différentes manières équivalentes. Celle géométrique dépend du jacobien des fonctions de transition et celle topologique utilise une approche homologique plus générale. Une variété orientable ne peut pas être homéomorphe à une autre non orientable, cela implique que l'orientabilité est une propriété topologique très utile pour les variétés.

On s'intéresse naturellement aux 3-variétés à cause des faits spécifiques et des méthodes essentielles de leur topologie et de leur géométrie. En plus des exemples classiques de trois variétés, les espaces lenticulaires, les sphères d'homologie, les es-

paces fibrés de Seifert et les fibrés en tores sont parmi les classes les plus importantes de 3-variétés.

Les topologues ont développé des présentations équivalentes efficaces de 3-variétés compactes orientées, soit avec des surfaces alors on a la notion des scindements de Heegaard, soit avec des nœuds et des entrelacs dans la 3-sphère qui impliquent la notion de présentations par chirurgie. Pour cette dernière notion, nous avons le théorème bien connu appelé le théorème de Lickorish-Wallace [50], [62]. Par ailleurs, de nombreux résultats variés ont été énoncés pour les 3-variétés comme le théorème de Morse et l'existence d'invariants de Rochlin et Casson. De plus, la géométrie et la topologie des 3-variétés est un domaine d'étude très riche : résolution récente des conjectures de Poincaré et de géométrisation, construction d'invariants classiques et quantiques. Cela les rend une des classes les plus importantes de variétés étudiées dans la topologie de basse dimension. Voir les exemples [54], [62], [63], [70], [76].

Motivation et les résultats principaux

Le problème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés compactes connexes M est un problème homotopique qui peut être discuté avec des outils en topologie algébrique. Des conditions cohomologiques générales pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) sont données dans [36]. Ces conditions ont été reformulées dans le cas des 3-variétés, ce qui implique que le \mathbb{Z}_2 -indice peut être déterminé en utilisant la classe caractéristique $x \in H^1(M/\tau, \mathbb{Z}_2)$ en calculant l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite courte exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$, et le triple cup de la classe caractéristique x . Cela peut être difficile à calculer en général. Notre objectif ici est de reconsidérer et de reformuler ces conditions générales en termes de critères facilement calculables. Nous prouvons le théorème suivant :

Théorème A. *Soit M une 3-variété compacte connexe avec involution libre τ et la classe caractéristique $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$ où $N = M/\tau$. Soit $\bar{x} \in H_1(N, \mathbb{Z}_2)$ le Poincaré dual de $\beta_2(x)$. Alors nous avons les équivalences :*

- (i) $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$,
- (ii) $\langle x, \bar{x} \rangle \neq 0$,
- (iii) $(\beta_2^- \circ \beta_2)(x) \neq 0$.

Lorsque $N = M/\tau$ est orientée, elle peut être représentée par chirurgie sur un entrelacs à m -composantes \mathcal{L} dans S^3 . Alors, les informations cohomologiques appropriées sont contenues dans la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$. La condition sur la triple cup est exprimée en termes de formes d'enlacement sur $H^1(M/\tau, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Nous prouvons le théorème suivant :

Théorème B. *Soit M une 3-variété compacte connexe orientée avec une involution libre τ , et la classe caractéristique $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Soit $\tilde{x} \in Tors(H_1(N, \mathbb{Z}))$ le dual Poincaré de $\beta(x)$. Notons par $\mathcal{L}_N : Tors(H_1(N, \mathbb{Z})) \otimes Tors(H_1(N, \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la forme d'enlacement de N . Alors nous avons*

$$ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \mathcal{L}_N(\tilde{x}, \tilde{x}) \neq 0 .$$

En suite, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème C. *Soit (M, τ) une 3-variété compacte connexe avec une involution libre orientée τ . On suppose que le quotient M/τ est homéomorphe à $N_{\mathcal{L}} = \partial W_{\mathcal{L}}$, le résultat de la chirurgie le long d'un entrelacs parallélisé à m composantes \mathcal{L} dans la 3-sphère, avec la matrice d'enlacement associée $B_{\mathcal{L}}$. Soit $x \in H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2)$ la classe classifiante, et soit $X \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ le relèvement entier du cobord $\delta(x) \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^m$, alors nous avons :*

1. $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 1$ si et seulement si $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}.X$ s'annule dans $\text{coker}(B_{\mathcal{L}}) \approx H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$.
2. $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \frac{1}{2}{}^tX.B_{\mathcal{L}}.X \neq 0 \pmod{2}$.

Le théorème précédent donne une simple recette combinatoire pour calculer le \mathbb{Z}_2 -indice à partir d'une présentation par chirurgie. On montre qu'on retrouve immédiatement le théorème classique de Borsuk-Ulam pour la 3-sphère S^3 et le théorème de Stolz pour le 3-espace projectif $\mathbb{R}P^3$. De plus, dans une variété de cas, la puissance de nos critères est illustrée. On discute en détail les revêtements doubles des espaces lenticulaires $L(p, q)$, où p est pair, suivi par les revêtements doubles des fibrés en tores. En plus, on traite le cas où l'espace des orbites M/τ est donné par une présentation par chirurgie sur un entrelacs algébriquement scindé. Cela nous permet de calculer le \mathbb{Z}_2 -indice dans des situations plus générales. Toutes les applications données ci-dessus traitent des cas où l'espace des orbites M/τ est une 3-variété compacte connexe orientée. On va également avoir des espaces des orbites non orientés. En effet, pour le cas $S^1 \times S^2$, on calcule le \mathbb{Z}_2 -indice pour toutes les involutions libres possibles y compris celles non orientables. Enfin, on considère la bouteille de Klein tridimensionnelle non orientée \mathbb{K} avec involution induite par l'application antipodale sur S^2 et on montre que dans ce cas \mathbb{Z}_2 -indice est égal à 3.

Structure de la thèse

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. Le premier chapitre donne des présentations de base d'une théorie générale des théorèmes originaux de Borsuk-Ulam pour les sphères et leurs preuves. Une preuve topologique utilisant le degré topologique sur la sphère S^n et une preuve combinatoire utilisant le lemme de Tucker ont été étudiées. Bien entendu, ce ne sont pas les seules preuves que l'on peut trouver dans la littérature. On donne et on prouve également ses différentes reformulations équivalentes. On termine ce chapitre par une étude spéciale du \mathbb{Z}_2 -indice et de ses propriétés.

Dans le deuxième chapitre, on commence par les applications du théorème de Borsuk-Ulam. Une qui est directe est le théorème du sandwich au jambon. Une preuve détaillée de ce théorème est fournie. Après cela, notre attention est dirigée vers les généralisations du théorème de Borsuk-Ulam. En particulier, on considère le cas où $X = S$ est une surface fermée, suivie par celles qui constituent le début d'une nouvelle théorie pour l'étude de la propriété de Borsuk-Ulam pour les variétés de basse

dimension.

Dans le troisième chapitre, on limite notre contexte pour comprendre et décrire certaines propriétés des 3-variétés. A savoir, celles concernant leur topologie. Les présentations par chirurgie pour celles orientables seront exposées dans ce chapitre. Donc, on donne le théorème de Lickorish-Wallace et la relation entre les variétés données par chirurgie et les 4-variétés.

A ce stade, on est prêt à énoncer et à prouver les nouveaux résultats de cette thèse [9]. Le quatrième chapitre est consacré pour atteindre cet objectif. Le lecteur va voir la puissance de nos résultats dans les preuves rigoureuses des principaux théorèmes qui traitent le cas orienté ou non et dans leurs diverses et fructueuses applications dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent. En particulier, les études que nous avons fait sur les espaces lenticulaires et les fibrés en tores, qui sont des classes très connues et très importantes de 3-variétés sont parmi les études très intéressantes du théorème de Borsuk-Ulam en dimension 3.

Les résultats obtenus dans cette thèse construisent un pont en utilisant des outils et des techniques de deux domaines différents de topologie : la topologie algébrique classique et la topologie de basse dimension. Les théorèmes prouvés dans le cas orienté par les présentations par chirurgie sont très originaux et très efficaces. Ils fournissent de nouvelles méthodes pour les prochaines études du théorème du Borsuk-Ulam en dimension 3. On espère développer d'autres applications dans cette dimension. La puissance des outils cohomologiques ouvre les perspectives pour d'autres critères dans des dimensions supérieures, en commençant par la dimension quatre.

English version

The purpose of this thesis is to study the Borsuk-Ulam theorem for low dimensional manifolds, more precisely we have new results in dimension three. The Borsuk-Ulam theorem is a famous historical in algebraic topology. Its generalisations and applications is still an active domain nowadays. The large number of various articles related with the Borsuk-Ulam theorem indicates its importance and topicality. It was proved first for the sphere S^n and generalized after for other spaces. In this introduction, we are going to outline the main concepts of this work beginning by a review of the history of this theorem and finishing by providing our contribution for 3-manifolds. Our ingredients are the basic concepts of algebraic topology and the specific properties of three dimensional manifolds, mostly surgery presentations of oriented ones.

What is the Borsuk-Ulam theorem, and why is it so interesting?

The general version of the Borsuk-Ulam theorem said that this last holds for a triple (X, τ, Y) , where X, Y are topological spaces and $\tau : X \rightarrow X$ is a fixed-point-free involutive homeomorphism, if and only if for every continuous map $f : X \rightarrow Y$ there exists $x \in X$ such that $f(x) = f(\tau(x))$. In this case, we say that the triple (X, τ, Y) has the Borsuk-Ulam property or (X, τ, Y) is a Borsuk-Ulam triple.

The original version of this theorem was conjectured by St. Ulam and proved by K. Borsuk [11] in 1933 for the triple $(S^n, \tau, \mathbb{R}^n)$, where $\tau : S^n \rightarrow S^n$ is the antipodal map. In the illustration of Mr. Steinhaus [6] [51], the Ulam-Borsuk theorem reads : *at any given time there are two antipodal places on Earth that have the same temperature and, at the same time, identical air pressure.* This was the beginning of one of the well known topological results having many nice proofs, and many various generalizations and applications which include the infinite-dimensional cases and the multivalued cases. Some examples of them in non linear analysis can be found in [29], [30], [42], [64].

This theorem has many equivalent forms, which allows in many situations to transform the question of Borsuk-Ulam into another one which may be easier to solve. Indeed, the well known equivalent statement is the L. Lusternik and L. Schnirelmann theorem (see [51] or [48]). This provides more various options for proving

the Borsuk-Ulam theorem. Furthermore, the simpler combinatorial lemmas called Tucker's lemma and Sperner's lemma are also analogs of the Borsuk-Ulam theorem. They are known to be its discrete versions with many useful applications, see for examples [51], [56].

In the literature, many extensions and applications of the Borsuk-Ulam theorem may be found (see e.g. [51], [67]). This theorem is strongly related with a few well know theorems like the Brouwer fixed point theorem (see for examples [73], [74], [51] and Kakutani theorem [74], and it is so much applicable in combinatorics and graph theory. An excellent general reference for these applications as well as the theorem itself is the book of Matoušek [51].

Another application related to measure theory is the Stone-Tukey theorem, referred to in the literature as the Ham-sandwich theorem. This theorem has also a very large variety of generalizations (for examples we have the references [51], [66], [19], [65], [25].

A summary of the generalizations of the Borsuk-Ulam theorem.

Generalizations of the Borsuk-Ulam theorem are diverse. Just one substitute the spaces S^n or \mathbb{R}^n with other spaces and one consider a corresponding free involution τ , which does't exists in all situations.

Among the first ones that of D. G Bourgin in [12], where he consider the triple (S^n, T, \mathbb{R}^n) such that T is a free involution on S^n . However, keeping $X = S^n$, Corner and Floyd [17] proved the theorem for Y a finite dimensional differential manifold M , Munkholm in [39] proved that we can omit the condition of differentiability and assume that Y is a compact topological m -manifold. On the other hand, Munkholm in [40] and Minoru Nakaoka in [57] have respectively replaced the sphere S^n with closed topological (mod 2) n -homological spheres and (mod p) n -homological spheres, they assumed that Y is a compact topological manifold and proved the Borsuk-Ulam theorem in these cases.

A natural generalization of the Borsuk-Ulam theorem is for triples (X, τ, \mathbb{R}^n) , where X is a finite CW-complex equipped with a fixed point free involution τ . The proof and the equivalent forms of these generalized theorem have been illustrated by Daciberg L. Gonçalves, Claude Hayat and Peter Zvengrowski in [35]. Among these equivalences, we focus our attention on the one which uses the well known topological degree called the \mathbb{Z}_2 -index noted by $ind_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau)$ and defined to be the largest n such that the Borsuk-Ulam theorem holds for the triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) . The \mathbb{Z}_2 -index reformulate the Borsuk-Ulam property for the case with target euclidean spaces. For the original version, the Borsuk-Ulam theorem state that \mathbb{Z}_2 -index for the sphere S^n is equal to n .

Various papers talking about the subject of the Borsuk-Ulam may be found in the literature. In Steinlein's survey in 1985 [67], more than four hundred publications have been cited. If we add all other papers that were published after this paper, and try to consult some of them, we see that varied proofs with various techniques in different fields of mathematics have been used for this theorem. Some of the recently ones are [7], [4], [36], [55], [15], [29], [20].

Our interest in this thesis is the study of the Borsuk-Ulam theorem for low dimensional manifolds. The dimension 1 is easy to understand. For the dimension 2,

in 2006 Daciberg Lima Gonçalves in [35] fully studied the case (S, τ, \mathbb{R}^2) , where S is a closed surface. In [34], Daciberg Lima Gonçalves and Jonh Ghashi have considered the triples (M, τ, N) , where M, N are closed surfaces. They described all the triples (M, τ, N) that have the Borsuk-Ulam property. In [36], a natural refinement of the results of the previous paper was given. The authors tried to classify the elements of the set of homotopy classes $[M, N]$ that have the Borsuk-Ulam property. They solved this problem for the cases where M and N coincide and are compact surfaces without boundary of Euler characteristic zero, namely the 2-torus \mathbb{T}^2 or the Klein bottle \mathbb{K}^2 .

As mentioned earlier, a very effective way to study the Borsuk-Ulam property is to compute the \mathbb{Z}_2 -index. General conditions for this topological invariant were given in [35]. Their reformulation in three dimensional case implies that the \mathbb{Z}_2 -index will be in $\{1, 2, 3\}$. Based on the results of this last paper, a few classes of 3-manifolds have been studied. For examples, the double covers of Seifert manifolds in [4], the spherical manifolds in [37], and the Sol^3 manifolds in [1].

What are specific properties of 3-manifolds which makes them interesting to study ?

Manifolds are topological spaces which can be seen locally as euclidean spaces i.e a n -manifold is a topological space such that each point has a neighborhood that is homeomorphic to n -euclidean space. Since a long time, as soon as we try to reformulate problems in physics or other fields in a mathematical language, we find ourselves naturally directed towards the topology and geometry of manifolds. Hence manifolds are fundamental notion for these domains, they are mathematical terms of geometry in which topologists are occupied with the essential questions of classification and construction of invariants. Examples of manifolds include the spheres \mathbb{S}^n , the projective spaces $\mathbb{R}P^n$ and the Klein Bottles \mathbb{K}^n .

Moreover, manifolds can be equipped with additional structures. In geometry, we often study manifolds with differential structure called differentiable manifolds. In topology, we are interested in more general structures such as PL-structure. Note that any topological manifold M of dimension less than or equal to 3 admits a smooth and a PL-structure. In addition to this, manifolds are divided into two parts, orientable ones and non orientable ones. The notion of orientability is defined by different equivalent manners. The geometric one depend on the jacobian determinant of transition maps and the topological one uses a more general homological approach. An orientable manifold can not be homeomorphic to another non-orientable, this implies that the orient-ability is a very useful topological property for manifolds.

We are interested naturally in 3-manifolds because the specific facts and basic methods of their topology and geometry. In addition on the classic examples of three manifolds, Lens spaces, homology spheres, Seifert fiber spaces and torus bundles are among the most important classes of 3-manifolds.

Topologists have developed efficient equivalent presentations of compact oriented 3-manifolds, either with surfaces then we have the notion of Heegard splinting or either with knots and links in 3-sphere which imply the notion of surgery presentations. For these last notions, we have the well known theorem called Lickorish-

Wallace theorem [50], [62]. Furthermore, many varied results have been stated for 3-manifolds ; like Morse's theorem and the existence of Rohlin and Casson invariants. Moreover, geometry and topology of 3-manifolds is a very rich field of study : recent resolution of Poincaré and geometrization conjunctures, construction of classical and quantum invariants. These makes them one of the most important class of manifolds studied in low dimensional topology. See for examples [54], [62], [63], [70], [76].

Motivation and the main results.

The Borsuk-Ulam problem for compact connected 3-manifolds M is a homotopical problem which can be discussed with tools in algebraic topology. General cohomological conditions for triples (X, τ, \mathbb{R}^n) are given in [36]. These conditions has been reformulated in the case for 3- manifolds which implies that the \mathbb{Z}_2 -index can be determined using the classifying class $x \in H^1(M/\tau, \mathbb{Z}_2)$ by calculating the Bockstein homomorphism associated to the short exact sequence $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$, and the triplet cup of the classifying class x . This may be hard to compute in general. Our purpose here is to review and reformulate these general conditions in terms of easily computable criterions. We prove the following theorem

Theorem A. *Let M be a compact and connected 3-dimensional manifold with fixed point free involution τ , and classifying class $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$, $N = M/\tau$. Let $\bar{x} \in H_1(N, \mathbb{Z}_2)$ be the Poincaré dual of $\beta_2(x)$. Then the following are equivalent*

- (i) $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$,
- (ii) $\langle x, \bar{x} \rangle \neq 0$,
- (iii) $(\beta_2^- \circ \beta_2)(x) \neq 0$.

When $N = M/\tau$ is oriented, it can be represented by surgery on a m -component link \mathcal{L} in S^3 . Then the relevant cohomological informations are contained in the linking matrix $B_{\mathcal{L}}$. The condition on the triple cup is expressed in terms of linking pairing on $H^1(M/\tau, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. We prove the following theorem :

Theorem B. *Let M be a compact oriented and connected 3-dimensional manifold with fixed point free oriented involution τ , and classifying class $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Let $\tilde{x} \in Tors(H_1(N, \mathbb{Z}))$ be the Poincaré dual of $\beta(x)$. Denote by $\mathcal{L}_N : Tors(H_1(N, \mathbb{Z})) \otimes Tors(H_1(N, \mathbb{Z})) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ the linking pairing of N . Then we have*

$$ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \mathcal{L}_N(\tilde{x}, \tilde{x}) \neq 0 .$$

Then, we prove the following theorem :

Theorem C. *Let (M, τ) be a compact oriented 3-manifold with oriented free involution τ . Suppose that the quotient M/τ is homeomorphic to $N_{\mathcal{L}} = \partial W_{\mathcal{L}}$, the result of surgery along an m components framed link \mathcal{L} in 3-sphere, with associated linking matrix $B_{\mathcal{L}}$. Let $x \in H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2)$ be the classifying class, and let $X \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ be an integral lift of the coboundary $\delta(x) \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^m$, then we have :*

1. $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 1$ if and only if $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}.X$ vanishes in $\text{coker}(B_{\mathcal{L}}) \approx H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$.

$$2. \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \frac{1}{2} \langle X, B_{\mathcal{L}} \cdot X \rangle \neq 0 \pmod{2}.$$

The previous theorem gives a simple combinatorial recipe to compute the \mathbb{Z}_2 -index from a surgery presentation. We show that it recovers immediately the classical Borsuk-Ulam theorem for the 3-sphere S^3 and the Stolz theorem for the 3-projective space $\mathbb{R}P^3$. Moreover in a variety of cases, the power of our criteria is illustrated. We fully discuss the double cover of Lens spaces $L(p, q)$, where p is even following by the double covers of torus bundles. In addition to this, we treat the case when the orbit space M/τ is given by a surgery presentation of algebraically split link. This allows us to compute the \mathbb{Z}_2 -index in more general situations. All the applications given above deal with the cases where the orbit space M/τ is a compact connected oriented 3-manifold. We will also get unoriented orbit spaces. Indeed, for the case $S^1 \times S^2$, we compute the \mathbb{Z}_2 -index for all possible free involutions including non-orientable ones. Finally, we consider the non-oriented 3-dimensional Klein bottle K with involution induced by the antipodal map on S^2 and we show that in this case \mathbb{Z}_2 -index is equal to 3.

Thesis structure.

This thesis is divided into four chapters. Chapter 1 gives basic presentations of a general theory of the original Borsuk-Ulam theorems for the spheres and their proofs. A topological proof using the topological degree on the sphere S^n and a combinatorial one using Tucker's lemma have been studied. Of course, these are not the only proofs that can be found in the literature. We also give and prove its different equivalent reformulations. We finish this chapter with a special study of the \mathbb{Z}_2 -index, and its properties.

In Chapter 2, we start with the applications of the Borsuk-Ulam theorem. The direct one is the ham-sandwich theorem. A detailed proof of this theorem is provided. After this, our attention is directed to the generalizations of the Borsuk-Ulam theorem. In particular, we consider the case when $X = S$ is a closed surface, followed by those which constitute a beginning of a new theory for the study of the property of Borsuk-Ulam for low-dimensional manifolds.

In Chapter 3, we shall restrict our context for understand and describe some properties of 3-manifolds. Namely, those concerning their topology. The surgery presentations for orientable ones will be exposed in this chapter. Hence we give the Lickorish-Wallace theorem, and the relation between manifolds given by surgery and 4-manifolds.

At this stage, we are ready to state and proof the new results of this thesis [9]. Chapter 4 is devoted to achieving this goal. The reader will see the powerful of our results in the rigorous proofs of the main theorems "which deal with the oriented or non-oriented case", and in their various and fruitful applications which we discussed in the previous paragraph. In particular, the studies that we have done on lens spaces and torus bundles, which are very well known and very important classes of 3-manifolds are among the very interesting studies of the Borsuk-Ulam theorem in dimension 3.

The results obtained in this thesis make a bridge using tools and techniques from two different areas of topology : classical algebraic topology and low dimensional

topology. The theorems proved in the oriented case by the surgery presentations are very original and very effective. They provide new methods for future studies of the Borsuk-Ulam theorem in dimension 3. We hope to develop other applications in this dimension. The powerful of cohomological tools opens the perspective of further criterions in higher dimensions, beginning with the dimension four.

The results obtained in this thesis make a bridge using tools and techniques from two different area of topology : classical algebraic topology and low dimensional topology. We hope to develop other applications in dimension three. The powerful of cohomological tools opens the perspective of further criterions in higher dimensions, beginning with the dimension four.

Principales notations

Le long de cette thèse, nous aurons besoin de quelques notations :

1. \mathbb{R}^{n+1} est l'espace euclidien réel des $(n+1)$ -uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ avec une norme usuelle $\|x\| = (\sum_1^{n+1} x_i^2)^{1/2}$.
2. B^{n+1} est la boule unité de \mathbb{R}^{n+1} définie par $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$.
3. La sphère S^n est le bord de B^{n+1} définie par $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.
4. $\pi_1(X, x_0)$ est le groupe fondamental de X , et $\pi_n(X, x_0)$ est le groupe d'homotopie d'ordre n .
5. $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe quotient du groupe des entiers relatifs \mathbb{Z} modulo le sous groupe $2\mathbb{Z}$.
6. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe quotient de \mathbb{Z} modulo le sous groupe $n\mathbb{Z}$.
7. $\mathbb{R}P^n$ est l'espace projectif réel de dimension n .
8. \mathbb{K}^n est la bouteille de Klein de dimension n .
9. $Aut(A)$ le groupe des automorphismes de A .
10. \smile est le cup-produit en cohomologie. C'est une opération définie sur les groupes de cohomologies qui permet d'assembler deux cocycles.
11. \frown est le cap-produit qui permet d'assembler les chaînes et les cochaînes singulières.
12. $C_n(X, K)$ est le complexe des chaînes de X .
13. $C_n(X, A, K)$ est le complexe des chaînes de X relativement à A .
14. $H^*(X, K)$ cohomologie de X à coefficients dans K .
15. $H_*(X, K)$ homologie de X à coefficients dans K .
16. $H_*(X, A, K)$ homologie de X relativement à A à coefficients dans K .
17. $H^*(X, A, K)$ cohomologie de X relativement à A à coefficients dans K .
18. $Tor(A, B)$ est Tor de deux groupes abéliens, où Tor est un foncteur dérivé en algèbre homologique.
19. $Ext(A, B)$ est Ext de deux groupes abéliens, où Ext est un foncteur dérivé en algèbre homologique.

Le théorème de Borsuk-Ulam

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Introduction | 2 |
| 1.2 | Version originale du théorème de Borsuk-Ulam pour les sphères | 3 |
| 1.2.1 | Les \mathbb{Z}_2 -actions libres sur les espaces | 3 |
| 1.2.2 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour le cercle S^1 | 5 |
| 1.2.3 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^2 | 6 |
| 1.2.4 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^n et ses preuves homologique et combinatoire | 8 |
| 1.3 | Formulations originales du théorème de Borsuk-Ulam | 14 |
| 1.3.1 | Équivalence entre toutes les versions du théorème de Borsuk-Ulam | 14 |
| 1.3.2 | Preuves de quelques versions équivalentes au théorème de Borsuk-Ulam | 18 |
| 1.3.3 | Équivalence entre le théorème de Borsuk-Ulam et le lemme de Tucker | 19 |
| 1.4 | Le \mathbb{Z}_2-indice et le théorème de Borsuk-Ulam | 20 |

1.1 Introduction

Dans l'introduction, nous avons donné un petit aperçu sur le contenu de ce chapitre. Puisque cette thèse porte sur le théorème de Borsuk-Ulam, il est naturel de se demander quelle était la preuve de la version originale de ce dernier.

On trouve dans la littérature des preuves variées, parfois compliquées. Dans la section 1.2, nous allons commencer par les preuves des cas élémentaires pour le cercle S^1 et pour la sphère S^2 . Pour le cas général, les démonstrations sont très nombreuses. Suivant le classement de Steinlein (voir [67]), ces dernières sont divisées en deux classes : une qui concerne les preuves théoriques du degré, et l'autre c'est les

preuves directes. Cette dernière contient aussi quatre classes, à savoir des preuves standards de topologie algébrique, des preuves algébriques, la preuve combinatoire par le lemme de Tucker, et des preuves homotopiques. Dans cette thèse, nous avons choisis une preuve de chaque classe. En effet, nous allons étudier les preuves homologique et combinatoire du théorème de Borsuk-Ulam. Par contre il y a une preuve géométrique que nous n'allons pas aborder dans ce chapitre (pour cette preuve voir par exemple [51]).

Puisque la preuve homologique du théorème de Borsuk-Ulam que nous allons traiter ici fait parti des preuves théoriques du degré. Il est naturel de se demander de quel degré s'agit-il? Dans notre cas la preuve dépend du degré défini sur la sphère S^n . Dans l'appendice A, nous allons étudier rigoureusement ce dernier et nous allons introduire toutes ses propriétés qui nous seront utiles ultérieurement dans ce chapitre. Notons que nous allons utiliser aussi les degrés des applications entre les variétés pour montrer le théorème 2.23.

D'autre part, le théorème de Borsuk-Ulam a plusieurs versions équivalentes. Elles sont définies par plusieurs manières, mais le terme "le théorème de Borsuk-Ulam" est commun pour elles. La section 1.3 est consacré pour l'étude de ces dernières. Démontrer que chaque assertion de ces équivalences est vraie est parfois pénible, nous allons étudier quelques unes. Par contre, montrer les équivalences entre elles est plus simple, c'est ce que nous allons établir dans cette dernière section. En particulier l'équivalence entre le théorème de Borsuk-Ulam et le lemme de Tucker est démontrée dans ce chapitre. Nous nous intéressons à ce lemme car il est parmi les résultats qui sont très connus en théorie du combinatoire. En plus, la preuve du théorème de Borsuk-Ulam par ce dernier est plus facile à comprendre pour les lecteurs qui ne sont pas des spécialistes dans le domaine de topologie algébrique.

En fin, nous terminons ce chapitre par une des notions très importantes dans cette thèse. C'est celle de l'indice topologique qu'on note par le \mathbb{Z}_2 -indice. Un invariant topologique très efficace pour l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) , où X est un CW-complexe équipé d'une involution cellulaire libre τ .

1.2 Version originale du théorème de Borsuk-Ulam pour les sphères

1.2.1 Les \mathbb{Z}_2 -actions libres sur les espaces

Les involutions libres sur un espace X sont parmi les hypothèses du théorème de Borsuk-Ulam. Elles engendrent des actions de groupe $\tau : \mathbb{Z}_2 \times X \rightarrow X$. L'existence de ces dernières n'est pas généralement assurée. C'est pour cette raison cette question était l'origine de plusieurs travaux qui ont été fait, et ont été souvent considérés comme référence pour certains d'autres sur les généralisations du théorème de Borsuk-Ulam.

Définition 1.1. Soit X un espace. Une application bijective $f : X \rightarrow X$ est une **involution** si et seulement si $f(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$. C'est à dire, une involution est une application bijective f telle que $f = f^{-1}$.

Une involution engendre d'une façon canonique une action de groupe $\mathbb{Z}_2 \times X \rightarrow X$. Dans ce cas, f est dite aussi une \mathbb{Z}_2 -**action** sur X .

Exemples 1.2. 1. Si $X = G$ où G est un groupe, alors

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

est une involution.

2.

$$\begin{aligned} g : S^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

est une involution sur S^n dite involution antipodale.

Définition 1.3. Une involution $f : X \rightarrow X$ est dite libre si et seulement si $f(x) \neq x$ pour tout $x \in X$ i.e f est sans point fixe. D'une façon équivalente, on dit que f est une \mathbb{Z}_2 -**action libre** sur X .

Ici un exemple d'involution sur une surface.

Exemple 1.4. On prend le tore T^2 . On peut définir sur $T^2 = S^1 \times S^1$ une involution libre en considérant τ l'involution antipodale sur S^1 . Alors les applications :

$$\begin{aligned} \tau : T^2 &\longrightarrow T^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\tau(x), y) \text{ ,} \\ \tau : T^2 &\longrightarrow T^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, \tau(y)) \text{ ,} \\ \tau : T^2 &\longrightarrow T^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\tau(x), \tau(y)) \text{ ,} \end{aligned}$$

sont des involutions libres sur le tore T^2 .

Un autre exemple d'involution sur un produit est le suivant.

Exemple 1.5. On considère $S^2 \times S^3$. On peut définir sur cet ensemble une involution libre par :

$$\begin{aligned} \tau : S^2 \times S^3 &\longrightarrow S^2 \times S^3 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, \tau_i(y)) \end{aligned}$$

où -1 est une involution antipodale et τ_i est la réflexion en i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Définition 1.6. Une paire (X, τ) où X est un espace topologique et τ est une \mathbb{Z}_2 -action sur X est appelée un \mathbb{Z}_2 -**espace**.

Une généralisation naturelle de la notion d'applications impaires en termes d'actions impaires de groupes est la suivante :

Définition 1.7. Soient $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$, deux \mathbb{Z}_2 -espaces. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est dite une \mathbb{Z}_2 - **application** si $\tau_2 f = f \tau_1$. C'est à dire nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \tau_1 \downarrow & & \downarrow \tau_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Une \mathbb{Z}_2 -**application** est aussi appelée une **application antipodale**.

Exemple 1.8. Un exemple d'un \mathbb{Z}_2 -espace est $(P(S^n), \tau_1)$ où $P(S^n)$ est l'espace des chemins avec un point initial donné $x \in S^n$ et un point terminal $-x$ tel que $\tau_1(w)(t) = -w(1-t)$.

Exemple 1.9. [72] Pour $n = 2, 4$, or 8 , il existe une application équivariante $(P(S^n), \tau_1) \rightarrow (S^{n-1}, \tau)$, où τ_1 est l'involution de l'exemple précédent et τ est l'involution antipodale.

Preuve. La preuve est celle de la proposition dans [72]. □

Remarque 1.10. L'existence de \mathbb{Z}_2 - applications équivariantes est fortement liée à l'étude du théorème de Borsuk-Ulam. Nous allons voir dans les sections suivantes que l'une des équivalences au théorème de Borsuk-Ulam est qu'il n'existe pas d'application équivariante de (S^n, τ) dans (S^m, τ) pour $m < n$. C'est ce qu'on va montrer dans les sections suivantes.

Le théorème de Borsuk-Ulam

Maintenant, nous sommes prêt pour énoncer et démontrer le théorème de Borsuk-Ulam. Différentes preuves pour ce dernier ont été élaborées. On trouve dans la littérature des preuves homologiques, géométriques et combinatoires. Pour les petites dimensions, on trouve des preuves spécifiques et un peu particulières. Ce point de vue nous conduit en particulier à nous interroger sur les preuves du théorème de Borsuk-Ulam dans les cas élémentaires $n = 1, 2$. C'est la raison pour laquelle nous allons étudier ces deux cas puis nous allons traiter le cas général.

1.2.2 Le théorème de Borsuk-Ulam pour le cercle S^1

Théorème 1.11. Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, alors il existe $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Preuve. On considère $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et on suppose que $\forall x \in S^1, f(x) \neq f(-x)$. On considère l'application continue $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(-x)$.

On remarque que $g(-x) = -g(x)$ et alors g est impaire. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on va montrer que g possède un zéro. Soit alors $x_0 \in S^1$ quelconque,

- si $g(x_0) = 0$, le théorème est démontré.

- si $g(x_0) \neq 0$, on a $g(-x_0) = -g(x_0)$. Ce qui montre que $g(x_0)$ et $g(-x_0)$ sont de signes contraires dans Img . Et puisque, $Img \subseteq \mathbb{R}$, alors Img est connexe. Par conséquent, le segment d'extrémités $g(x_0)$ et $g(-x_0)$ est contenu dans Img . Ce qui montre l'existence d'un élément $x \in S^1$ tel que $g(x) = 0$.

□

Corollaire 1.12. *Si deux fermés non vides F_1, F_2 du cercle S^1 sont telle que $S^1 = F_1 \cup F_2$, alors il existe $i = \overline{1, 2}$ tel que F_i contient une paire de points antipodes.*

Preuve. On considère l'application continue $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = dist(x, F_1)$. D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe un élément $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

- Si $f(x) = f(-x) = 0$ i.e $dist(x, F_1) = dist(-x, F_1) = 0$, alors x et $-x$ sont dans F_1 car F_1 est fermé, et le théorème est démontré.
- Si $f(x) = f(-x) \neq 0$ alors $dist(x, F_1) = dist(-x, F_1) \neq 0$ alors x et $-x$ sont dans F_2 et le théorème est à nouveau démontré.

□

1.2.3 Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^2

Le théorème de Borsuk-Ulam pour le cas $n = 2$ est le suivant :

Théorème 1.13. [41] *Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue, alors il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve. On suppose que $\forall x \in S^2, f(x) \neq f(-x)$, et on considère la fonction $g : S^2 \rightarrow S^1$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

g est continue, impaire et induit l'homomorphisme $\pi_1(g) = g_* : \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$. Puisque $\pi_1(S^2) = 0$, alors $Img_* = 0_{\pi_1(S^1)}$. Par ailleurs, soit

$$\begin{aligned} \eta : I &\longrightarrow S^2 \\ s &\longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \end{aligned}$$

un lacet qui est autour le contour de S^2 . Et on considère

$$\begin{aligned} h : I &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto g \circ \eta(s) \end{aligned}$$

Puisque g est impaire, on vérifie que $h(s + \frac{1}{2}) = -h(s)$. En effet,

$$\begin{aligned} h(s + \frac{1}{2}) &= g \circ \eta(s + \frac{1}{2}) \\ &= g(\cos 2\pi(s + \frac{1}{2}), \sin 2\pi(s + \frac{1}{2}), 0) \\ &= g(-\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s, 0) \\ &= -g(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \\ &= -g \circ \eta(s) \\ &= -h(s) \end{aligned}$$

Par ailleurs, par un théorème fondamental sur les relèvements des chemins ¹, h peut-être relevé à $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p \circ \tilde{h} = h$ i.e

$$(\cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s)) = h(s) \text{ et } \tilde{h}(0) = 0.$$

En utilisant le fait que $h(s + \frac{1}{2}) = -h(s)$, on a alors pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned} (\cos 2\pi \tilde{h}(s + \frac{1}{2}), \sin 2\pi \tilde{h}(s + \frac{1}{2})) &= -h(s) \\ &= -(\cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s)). \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) - \tilde{h}(s) = \frac{k}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$, k impair. En effet, les égalités de ci-dessus impliquent que $\cos 2\pi \tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = -\cos 2\pi \tilde{h}(s)$ et $\sin 2\pi \tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = -\sin 2\pi \tilde{h}(s)$. Donc, $2\pi \tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = 2\pi \tilde{h}(s) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, k impair. Ce qui permet d'avoir, $\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) - \tilde{h}(s) = \frac{k}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$, k impair. Soit alors la fonction :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ s &\longmapsto \tilde{h}(s + \frac{1}{2}) - \tilde{h}(s) \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est continue sur $[0, 1]$ qui est connexe à valeurs dans \mathbb{Z} qui est discret, elle est alors une fonction constante de la forme $\frac{k}{2}$ où k est impair. Ainsi, $\tilde{h}(1) - \tilde{h}(\frac{1}{2}) = \frac{k}{2}$, et $\tilde{h}(0) = 0$ impliquent que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(1) &= \tilde{h}(\frac{1}{2}) + \frac{k}{2} \\ &= (\tilde{h}(0) + \frac{k}{2}) + \frac{k}{2} \\ &= k. \end{aligned}$$

Puisque k est un entier impair non nul, on a $\tilde{h}(1) \neq 0$ et donc le lacet $g \circ \eta$ fait k tours autour du cercle. D'où, $g \circ \eta$ n'est pas homotope à un point. Et par conséquent,

$$g_*(\eta) = [g \circ \eta] \neq 0_{\pi_1(S^1)}.$$

Ce qui est en contradiction avec 1.2.3. □

Corollaire 1.14. *Si S^2 est la réunion de trois ensembles fermés F_1, F_2, F_3 , alors au moins un de ces ensembles contient des points antipodes $\{x, -x\}$.*

Preuve. On considère l'application $d_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_i(x) = \inf_{y \in F_i} |x - y|$ i.e d_i mesure la distance de x à F_i . Puisque d_i est continue, on considère l'application continue :

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (d_1(x), d_2(x)) \end{aligned}$$

¹Pour un revêtement (\tilde{X}, p) d'un espace X , nous avons les assertions suivantes :

- a) Pour chaque $f : I \rightarrow X$ commençant en un point $x_0 \in X$ et chaque $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique relèvement $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ commençant en \tilde{x}_0 .
- b) Pour chaque homotopie des chemins $f_t : I \rightarrow X$ commençant en x_0 et chaque $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique relèvement $\tilde{f}_t : I \rightarrow \tilde{X}$ des chemins commençant en \tilde{x}_0 .

Par le théorème de Borsuk-Ulam, il existe $x \in S^2$ telle que $f(x) = f(-x)$. Ainsi, $d_1(x) = d_1(-x)$ et $d_2(x) = d_2(-x)$.

- Si l'une de ces distances est zéro et puisque F_1, F_2 sont fermés alors x et $-x$ sont tous les deux dans F_1 ou dans F_2 .

- Si les distances de x et $-x$ de F_1 et F_2 sont strictement positives, alors x et $-x$ ne se trouvent ni dans F_1 ni dans F_2 , alors forcément ils sont dans F_3 .

□

Remarque 1.15. *Le nombre 3 dans la démonstration précédente est le mieux possible. On considère la sphère dessinée dans un tétraèdre. En projetant les 4 faces radialement sur la sphère, on obtient un recouvrement de la sphère par 4 ensembles fermés dont aucun d'eux ne contient une paire de points antipodes. Si on assume cette version pour une dimension plus grande pour le théorème de Borsuk-Ulam, le même argument montre que S^n ne peut être recouverte par de tels $(n + 1)$ ensembles sans paires de points antipodes. Quoiqu'elle peut être recouverte par $(n+2)$ ensembles.*

1.2.4 Le théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^n et ses preuves homologique et combinatoire

La version originale du théorème de Borsuk-Ulam est la suivante :

Théorème 1.16. [11] *Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Si on note :

$$\begin{aligned} \tau : S^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

l'énoncé du théorème de ci-dessus devient :

Si $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, alors il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(\tau(x))$.

Preuve homologique

Cette preuve est appelée dans la littérature la version degré du théorème de Borsuk-Ulam. Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.17. [41][13] *Toute application continue impaire $f : S^n \rightarrow S^n$ i.e satisfaisant $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$ (i.e f est antipodale) doit avoir un degré impair.*

On peut démontrer le lemme de ci-dessus en utilisant l'homologie et certaines suites exactes associées au revêtement à deux feuilles $f : \tilde{X} \rightarrow X$ où $\tilde{X} = S^n$ et $X = \mathbb{R}P^n$.

Preuve du lemme 1.17. On montre tout d'abord que f induit un isomorphisme sur les groupes d'homologies à coefficients dans \mathbb{Z}_2 en degré n , puis on montre que le degré de f est impair. Soit le revêtement à deux feuilles $p : \tilde{X} \rightarrow X$. On va montrer qu'on peut lui associer la suite exacte suivante :

$$\dots \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) \dots \quad (1.1)$$

C'est une suite exacte associée à la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} C_n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

où p_* est l'homomorphisme induit par l'application $p : C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}_2)$, et τ_* est un homomorphisme qu'on va définir ci-dessous. En premier lieu on montre que p_* est surjective. En effet, puisque Δ^n est simplement connexe, alors son groupe homotopique est trivial. Par le théorème fondamental sur les revêtements des simplexes singuliers, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ se relève toujours à \tilde{X} . Chaque σ a en fait précisément deux relèvements $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ de Δ^n dans \tilde{X} . Ainsi, p_* est surjective. Et puisqu'on utilise des coefficients dans \mathbb{Z}_2 , alors le noyau de p_* est engendré par les sommes : $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$. Par ailleurs, on définit

$$\begin{array}{ccc} \tau : C_n(X, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \\ \sigma & \longmapsto & \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 \end{array}$$

C'est à dire τ envoie chaque $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ à la somme de ces deux relèvements à $\tilde{\Delta}^n$. Et comme la somme de deux relèvements $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ d'un simplexe singulier non trivial σ ne peut jamais être 0, alors τ est injective. Par ailleurs, on a vu que $\text{Ker } p_*$ est engendré par les sommes : $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$, mais ces dernières sont dans $\text{Im } \tau$. Ceci permet de déduire que $\text{Im } \tau = \text{Ker } p_*$. Ainsi, on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} C_n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

Puisque τ, p_* commutent avec l'application bord, alors on obtient la longue suite des groupes d'homologie donnée par 1.1. On applique ce résultat au revêtement à deux feuilles $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ de l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ par la sphère S^n , on obtient la suite suivante à coefficients dans \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & 0 \\ \dots & & & \rightarrow & 0 & & H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H_{i-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & 0 \\ \dots & \rightarrow & H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\approx} & H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{0} & H_0(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\approx} & H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (1.2)$$

L'initial 0 est $H_{n+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$, car $\mathbb{R}P^n$ est un CW complexe de dimension n . Par l'homologie cellulaire à coefficients dans \mathbb{Z}_2 , on a $H_i(S^n, \mathbb{Z}_2)$ pour $0 < i < n$, et $H_0(S^n, \mathbb{Z}_2) = H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, alors les zéros à l'intérieur de la suite de ci-dessus sont $H_i(S^n, \mathbb{Z}_2)$ pour $0 < i < n$. Aussi par la même homologie, on assume que pour $n > 1$ tous les termes qui ne sont pas nuls sont \mathbb{Z}_2 , car $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ pour tout $i \leq n$ et 0 si non. ²

²La chaîne exacte 1.2 peut être utilisée pour calculer les groupes d'homologies $H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Par ailleurs, puisque tous les groupes non nuls dans la suite longue exacte de ci-dessus sont \mathbb{Z}_2 et puisque

$$\tau_* : H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$$

est injective, alors par l'exactitude elle est encore surjective comme étant un endomorphisme d'ensembles finis. Ce qui implique que les applications dans la suite de ci-dessus sont des isomorphismes ou des zéros. En effet, $\tau_* = 0$ et aussi

$$\rho : H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$$

est un isomorphisme pour $i = \overline{1, n}$. D'une autre part, une application impair $f : S^n \longrightarrow S^n$ induit une application quotient $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Ces deux applications induisent une application de la suite suivante :

$$0 \longrightarrow C_i(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\tau} C_i(S^n) \xrightarrow{p_n} C_i(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0$$

à elle même. Alors on peut écrire le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_n} & C_i(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \\ & & \bar{f}_n \downarrow & & (I) \quad f_n \downarrow & & (II) \quad \bar{f}_n \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n) & \xrightarrow{p_n} & C_i(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le carré à droite (II) commute par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}P^n \\ f \downarrow & (II) & \bar{f} \downarrow \\ S^n & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

i.e $p \circ f = \bar{f} \circ p$. En effet, partant du fait que f est antipodale, alors on peut définir \bar{f} comme étant l'application quotient induite par f et satisfaisant la commutativité dans le carré de ci-dessus .

Par ailleurs, soient $\sigma : \Delta_i \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ un i simplexe singulier de $\mathbb{R}P^n$, $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ sont deux relèvements de σ . Puisque f prend les points antipodes à des points antipodes, alors $f_n \circ \tilde{\sigma}_1$ et $f_n \circ \tilde{\sigma}_2$ sont des relèvements de $\bar{f}_n \circ \sigma$. En plus, on a

$$\begin{aligned} f_n \circ \tau(\sigma) &= f_n(\tau(\sigma)) \\ &= f_n(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) \\ &= f_n(\tilde{\sigma}_1) + f_n(\tilde{\sigma}_2) \\ &= f_n \circ \tilde{\sigma}_1 + f_n \circ \tilde{\sigma}_2 \\ &= \tau(\bar{f}_n \circ \sigma) \\ &= \tau \circ \bar{f}_n(\sigma) \end{aligned}$$

Donc, on a la commutativité du carré à gauche (II). Maintenant on montre que les applications f_* et \bar{f}_* sont des isomorphismes. En effet, on procède par induction sur n :

- On commence par le fait trivial f_* et \bar{f}_* sont des isomorphismes en dimension 0, puisque

$$f_{0,*} : H_0(S^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H_0(S^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

est clairement un isomorphisme et aussi

$$\bar{f}_{0,*} : H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

est un isomorphisme par le diagramme (I).

- On utilise le fait que si trois applications dans un diagramme commutatif sont des isomorphismes, alors il en est de même pour la quatrième. Ainsi, par les diagrammes (I), (II) on conclut que f_i et \bar{f}_i sont des isomorphismes pour $i \geq 0$.
- En particulier par le diagramme (I), nous avons

$$f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$$

est un isomorphisme .

Par la proposition A.7, cette application est la multiplication du degré de $f \bmod 2$, alors le degré de f doit être impair. \square

Corollaire 1.18. *Si $f : S^n \longrightarrow S^n$ est une application continue et satisfaisant $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$ alors f induit un isomorphisme $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$.*

Preuve. Ce résultat est formulé dans la preuve du lemme de ci-dessus. \square

Preuve du théorème de Borsuk-Ulam. On suppose que $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^n$. On définit

$$\begin{aligned} \phi : S^n &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

ϕ est une application impaire et par 1.17 sa restriction $\phi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ à S^{n-1} doit avoir un degré impair. Ce qui est impossible car l'application $\phi|_{S^{n-1}}$ est nulle homotopique i.e $\pi_1(\phi|_{S^{n-1}}) = 0$. \square

Preuve combinatoire du théorème de Borsuk-Ulam

Ici, nous nous intéressons à la preuve combinatoire du théorème de Borsuk-Ulam. Cette preuve repose sur le lemme de Tucker, qui va nous permettre de donner la version combinatoire de la preuve du théorème de Borsuk-Ulam. On dit ici que nous avons la version discrète du théorème de Borsuk-Ulam (voir [51]).

Notons aussi qu'on va montrer dans la section suivante que le lemme de Tucker (voir [51], [28]) constitue l'une des versions équivalentes au théorème de Borsuk-Ulam.

Soit T une certaine triangulation fini de la boule B^n . On dit que T est antipodalement symétrique sur le bord si l'ensemble des simplexes de T contenus dans $S^{n-1} = \partial B^n$ est une triangulation antipodalement symétrique sur S^{n-1} i.e si $\sigma \in S^{n-1}$ est un simplexe de T , alors $-\sigma$ est aussi un simplexe de T .

Lemme 1.19 (Lemme de Tucker). *Soit T une triangulation de B^n qui est antipodalement symétrique sur le bord. Soit*

$$\lambda : V(T) \longrightarrow \{+1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n\}$$

l'indexation des sommets de T sachant que $\lambda(-v) = -\lambda(v)$, pour chaque $v \in \partial B^n$ (i.e λ est antipodale sur le bord). Alors, il existe un 1-simplexe (un bord) dans T qui est complémentaire i.e $\exists\{v, v'\} \in T$, tel que $\lambda(v) = -\lambda(v')$. Autrement dit, ses sommets sont indexés par des nombres opposés.

Tucker a énoncé ce lemme sous plusieurs formes équivalentes. il y-a des algorithmes qui permettent de trouver le bord complémentaire. Mais pour une preuve constructive, les choses sont un peu plus compliquées. Une preuve a été publiée par Robert M. Freund et Michael J. Todd dans leur papier [28]. Cette dernière, on la trouve souvent dans la littérature parallèlement à d'autres preuves des différentes versions équivalentes du lemme de Tucker (voir par exemple [49], [51]). Nous nous intéressons à la construction de cette preuve mais pas aux détails. Remarquons que dans cette dernière, on exige une triangulation spéciale de B^n ³, mais le lemme de Tucker peut être démontré sans cette hypothèse.

Preuve du lemme de Tucker. On a besoin de quelques notations. On note par $sgn(l)$ le signe 0, +1 ou -1 de n'importe quel nombre réel. Pour un vecteur $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $sgn(x)$ est le vecteur $(sgn(x)_i)$. Soit T une triangulation spéciale de B^n . Pour tout simplexe $\sigma \in T$, on pose

$$\text{sign}\sigma = (\text{sign}x_1, \text{sign}x_2, \dots, \text{sign}x_n),$$

où x est un point arbitraire dans l'intérieur relatif de σ . Cette définition a un sens puisqu'une triangulation spéciale raffine ceux de \mathbb{R}^n et alors les signes des coordonnées ne changent pas à l'intérieur de σ . On dit que σ est complètement indexé, si les conditions suivantes sont satisfaites pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$:

- i) si $(\text{sign}\sigma)_i = 1$, alors certain sommet de σ est indexé par le nombre i .
- ii) si $(\text{sign}\sigma)_i = -1$, alors certain sommet de σ est indexé par $-i$.

On définit le graphe G dont les sommets sont tous les simplexes indexés et dans lequel les sommets $\sigma, \tau \in T$ sont connectés par un bord si :

- i) $\sigma, \tau \in \partial B^n = S^n$ et $\sigma = -\tau$.
- ii) σ est un k simplexe et τ est une $(k-1)$ -face dont les sommets sont déjà indexés par tous les nombres nécessaires pour une indexation complète de σ .

³Un complexe simplicial T est une triangulation spéciale de B^n si $\|T\| = B^n$, T est un raffinement de la triangulation de B^n donnée en coupant par les hyperplans de coordonnées, et elle est symétrique par rapport à l'origine

Le simplexe $\{0\}$ est de degré 1 dans G puisqu'il est connecté exactement au bord de la triangulation qui est complètement indexée par $Lab(0)$.

Nous allons prouver que tout autre sommet σ du graphe G a un degré 2 sauf lorsque σ contient un bord complémentaire. Et puisqu'un graphe ne peut pas contenir seulement un sommet d'un degré impair, ceci va établir la preuve du lemme. Soit σ tel que $sgn \sigma$ possède k -composantes non nulles, alors la dimension de σ peut-être k ou $(k - 1)$.

- Si σ est un $(k - 1)$ -simplexe, alors il est une face de deux k -simplexes complètement indexés ou il est sur le bord de B^n . C'est une face d'un simplexe complètement étiqueté et possède un autre voisin $-\sigma$, d'après (a).
- Si σ est un k -simplexe, Il y-a obligatoirement k -indices et un autre indice complémentaire. Cet indice complémentaire est similaire à un des indices obligatoires. Alors σ est adjacent à deux de ces faces, ou il est opposé à certain de ces indices obligatoires.

Alors, on a le bord complémentaire ou finalement c'est encore un autre nombre, et les voisins de σ sont une de ces faces complètement indexées et un simplexe adjacent de dimension plus grande déterminée par un indice complémentaire. Pour chaque possibilité sans un bord complémentaire, nous avons ainsi deux voisins. □

Maintenant on prouve le théorème de Borsuk-Ulam par le lemme de Tucker.

Preuve du théorème de Borsuk-Ulam. Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, et soit B^n la boule unité dans l'hyperplan "équateur" de S^n . On définit $g : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en posant $g(x) = f(y) - f(-y)$, où y est un point de la demi sphère supérieure de S^n dont la projection verticale est x . L'application g est évidemment antipodale sur $\partial B^n = S^{n-1}$.

Pour la contradiction, on assume que $g(x) \neq 0$, pour tout x . Alors, d'après le compacité de la boule, il existe $\varepsilon > 0$ sachant que $\|g(x)\|_n \geq \varepsilon$ pour tout x (ici $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Par ailleurs, une application continue sur un ensemble compact est uniformément continue. Ainsi, il existe $\delta > 0$ sachant que si $d(x, x') < \delta$, alors $\|g(x) - g(x')\|_n < \varepsilon/n$.

On choisit une triangulation T sachant que le diamètre de chacun de ces simplexes est au plus δ . On définit l'indexation des sommets de T comme suit ⁴ :

$$\left\{ \begin{array}{l} |Lab(x)| = i, \text{ si } |g_i(x)| = \max\{|g_1(x)|, \dots, |g_n(x)|\} \\ \text{et} \\ \text{sign } Lab(x) = \text{sign } g_i(x) \end{array} \right.$$

(Si le max est atteint en plus qu'un indice, on prend le premier indice). D'après le lemme de Tucker, on sait qu'il existe un bord complémentaire xx' . Soit $Lab(x) = -Lab(x') = i$, alors $g_i(x) \geq \varepsilon/n$ et $g_i(x') \leq -\varepsilon/n$ et alors $\|g(x) - g(x')\|_n \geq 2\varepsilon/n$. Ce qui contredit la continuité uniforme de g . Alors, g admet un zéro et pour $y \in S^n$ correspondant (i.e $g(y) = 0$), nous avons $f(y) = f(-y)$. □

⁴Ici lab veut dire label. C'est la lettre que nous utilisons pour définir l'indexation.

1.3 Formulations originales du théorème de Borsuk-Ulam

Nous allons donner les différentes versions équivalentes du théorème de Borsuk-Ulam [3], [51]. La preuve de chacune n'est pas simple en général, mais prouver l'équivalence entre tous les assertions n'est pas pénible. Le terme " théorème de Borsuk-Ulam " est aussi assez commun pour tous les assertions du théorème 1.20, en particulier pour les versions 1, 2, 3.

1.3.1 Équivalence entre toutes les versions du théorème de Borsuk-Ulam

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.20. [51] *Pour $n \geq 0$, les assertions suivantes sont équivalentes et vraies :*

1. (**Borsuk**) [11] *Pour chaque application continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ avec $f(x) = f(-x)$.*
2. *Pour chaque application antipodale $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ satisfaisant $f(x) = 0$.*
3. *Il n'y a pas une application antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.*
4. *Il n'y a pas une application continue $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ telle qu'elle est antipodale sur le bord i.e qui satisfait $f(-x) = -f(x)$ pour tous $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*
5. (**Ljusternik et Shnirelmann**) *Pour tout recouvrement F_1, F_2, \dots, F_{n+1} de la sphère S^n par $(n+1)$ ensembles fermés, il existe au moins un ensemble qui contient une paire de points antipodes (i.e $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).*
6. *Pour tout recouvrement U_1, U_2, \dots, U_{n+1} de la sphère S^n par $(n+1)$ ensembles ouverts, il existe au moins un ensemble qui contient une paire de points antipodes.*

Preuve.

1) implique 2)

Ceci est clair car d'après 1), il existe $x_0 \in S^n$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$. Mais par hypothèse $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$. Ainsi, $f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$. Ce qui implique que $2f(x_0) = 0$, et ainsi $f(x_0) = 0$.

2) implique 1)

On pose $g(x) = f(x) - f(-x)$, où $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Tout d'abord, g est continue et on vérifie que $g(-x) = -g(x)$, alors g est impaire. Par conséquent, par 2) il existe $x \in S^n$ satisfaisant $g(x) = 0$ i.e il existe $x \in S^n$ satisfaisant $f(x) - f(-x) = 0$. Ainsi, 1) est vérifiée.

2) implique 3)

On suppose l'existence d'une application antipodale $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ et on considère la composition $g = i \circ f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par le digramme :

$$S^n \xrightarrow{f} S^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n.$$

Alors, $g : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application antipodale. Par 2) il existe $x \in S^n$ satisfaisant

$$\begin{aligned} g(x) &= i \circ f(x) \\ &= f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est une contradiction puisque 0 n'est pas un élément de S^{n-1} et $0 \in \text{Im}(f) \subset S^{n-1}$.

3) implique 2)

On suppose l'existence d'une application antipodale $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f(x) \neq 0$ pour tous $x \in S^n$. On peut définir alors

$$\begin{aligned} g : S^n &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \end{aligned}$$

g est continue et $g(-x) = -g(x)$. Par conséquent, g est une application antipodale de S^n dans S^{n-1} . Ce qui contredit 3).

3) implique 4)

On suppose qu'il existe une application $g : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ qui est antipodale sur le bord de B^n . Soit U la demi sphère supérieure de S^n et on considère la projection

$$\begin{aligned} \pi : U \subset S^n &\longrightarrow B^n \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

π est un homéomorphisme de U dans B^n . On note par U' l'autre demi sphère et on considère l'application $h : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ où :

$$h(x) = \begin{cases} g \circ \pi(x), & \text{si } x \in U \\ -g \circ \pi(x), & \text{si } x \in U' \end{cases}$$

h est bien définie, car si x appartient à la demi sphère inférieure alors $-x$ appartient à la demi sphère supérieure et g est antipodale sur l'équateur de S^n . En plus h est continue puisqu'elle est continue sur les deux demi sphères fermées. Par ailleurs, par définition de h on a $h(-x) = -h(x)$, $\forall x \in S^n$.

Ce qui montre que h est une application antipodale de S^n dans S^{n-1} . Ainsi nous avons une contradiction avec 3).

4) implique 3)

On raisonne par la contraposée. On part du fait qu'il existe une application antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ et on considère l'application $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$ définie par la composition :

$$B^n \xrightarrow{\pi^{-1}} U \subset S^n \xrightarrow{f} S^{n-1}$$

i.e $g(x) = f \circ \pi^{-1}(x)$ pour tous $x \in S^n$.

g est continue comme étant la composée de deux fonctions continues. En plus, on peut vérifier que $g|_{\partial B^n}(-x) = -g(x)$.

Puisque f est antipodale sur S^n et $\pi^{-1}(-x) = -\pi^{-1}(x)$ sur ∂B^n . Alors, g est antipodale sur ∂B^n .

Avant de démontrer l'équivalence entre 5) et 6), on montre tout d'abord que

1) implique 5)

Soient F_1, F_2, \dots, F_{n+1} un recouvrement de la sphère S^n par $(n+1)$ ensembles fermés et l'application continue

$$\begin{aligned} f : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (\text{dist}(x, F_1), \text{dist}(x, F_2), \dots, \text{dist}(x, F_n)) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. S'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\text{dist}(x, F_i) = 0$, alors $\text{dist}(-x, F_i) = 0$ et ainsi x et $-x$ sont dans F_i .

Si par ailleurs, $\text{dist}(x, F_i) = 0$ pour tous $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors x et $-x$ sont dans F_{n+1} puisque les F_i recouvrent S^n . Par conséquent, il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.

5) implique 3)

Tout d'abord, nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.21. ⁵ *Il existe un recouvrement de S^{n-1} par des ensembles fermés F_1, F_2, \dots, F_{n+1} tel que aucun de ces ensembles ne contient une paire de points antipodes.*

Maintenant, on suppose l'existence de $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ continue et antipodale, et on considère F_1, F_2, \dots, F_{n+1} le recouvrement du lemme précédent, alors les ensembles $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ constituent un recouvrement fermé de S^n tels que

$$f^{-1}(F_i) \cap (-f^{-1}(F_i)) = \emptyset \quad \forall i = \overline{1, n+1}.$$

En effet, On suppose qu'il $\exists j \in \overline{1, n+1}$ telle que $f^{-1}(F_j) \cap (-f^{-1}(F_j)) \neq \emptyset$, alors $\exists x \in f^{-1}(F_j)$ et $x \in -f^{-1}(F_j)$. Ainsi x et $-x$ sont dans $f^{-1}(F_j)$ i.e $f(x) \in F_j$ et $f(-x) = -f(x) \in F_j$ et alors F_j contient deux points antipodes. Ce qui est impossible par le lemme de ci-dessus. Par conséquent,

⁵Pour montrer ce lemme, on considère un n -simplexe de \mathbb{R}^n qui contient 0 dans son intérieur et on projette les faces centralement de 0 à S^{n-1} .

$f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ est un recouvrement fermé de S^n tel que aucun de ces éléments ne contient une paire de points antipodes. Ce qui est en contradiction avec 5).

5) implique 6)

En premier lieu, on a besoin de prouver le résultat suivant :

Lemme 1.22. *Pour tout recouvrement ouvert U_1, U_2, \dots, U_{n+1} de la sphère S^n , il existe un recouvrement fermé F_1, F_2, \dots, F_{n+1} satisfaisant $F_i \subset U_i$, $\forall i \in \overline{1, n+1}$.*

En effet, soit U_1, U_2, \dots, U_{n+1} un recouvrement ouvert de la sphère S^n et soit $x \in S^n$. On choisit alors un voisinage V_x de x sachant que $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset U_i$. Un tel U_i existe puisque les U_i recouvrent S^n . On obtient ainsi un recouvrement de S^n i.e $S^n \subset \cup_{x \in S^n} \bar{V}_x$.

Puisque S^n est compacte, il existe un sous recouvrement fini. Alors on peut prendre un sous ensemble fini S de S^n tel que $S^n \subset \cup_{x \in S} \bar{V}_x$. On considère

$$F_i = \cup \{ \bar{V}_x, x \in S, \bar{V}_x \subset U_i \},$$

on obtient un recouvrement fermé de S^n noté F_1, F_2, \dots, F_{n+1} sachant que $F_i \subset U_i$ pour tous $i \in \overline{1, n+1}$. Par conséquent, on applique 5) au recouvrement (F_i) , il existe un certain $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tel que $F_j \cap (-F_j) = \emptyset$. Et puisque $F_j \subset U_j$, alors on a le résultat désiré.

6) implique 5)

Soient F_1, F_2, \dots, F_{n+1} un recouvrement fermé de S^n , on plonge F_i dans l'ouvert

$$U_i^\varepsilon = \{x \in S^n / \text{dist}(x, F_i) < \varepsilon\}.$$

La famille $(U_i^\varepsilon)_{i \in \overline{1, n+1}}$ est un recouvrement ouvert de S^n . Alors, on applique 5), il existe i_0^ε tel que $U_{i_0^\varepsilon}^\varepsilon$ contient une paire de points antipodes $x^\varepsilon, -x^\varepsilon$. Maintenant on fait tendre ε vers 0 en prenant $\varepsilon = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Alors il existe un certain j tel que $i_0^{\varepsilon_n} = j$ pour un nombre infini de $n \in \mathbb{N}$.

D'une autre part, vu que chaque $U_{i_0}^{\varepsilon_n}$ contient deux points antipodes, on obtient une suite infinie $(x_n^{\varepsilon_n})_n$ tel que $\pm x_n^{\varepsilon_n} \in U_j^{\varepsilon_n}$. Par la compacité de S^n , cette suite infinie admet une sous suite $(x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}})_n$ qui converge vers x et telles que $\pm x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}} \in U_j^{\varepsilon_{n,k}}$ i.e

$$\text{dist}(x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}}, F_j) = \text{dist}(-x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}}, F_j) < \varepsilon_{n,k}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}}, F_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(-x_{n_k}^{\varepsilon_{n,k}}, F_j) = 0.$$

Et puisque F_j est fermé, alors $x \in F_j$, et ainsi $\pm x \in F_j$.

□

Remarques 1.23. [67] *On peut trouver d'autres équivalences du théorème de Ljusternik-Shnirelmann-Borsuk. La même chose pour la version 3 du théorème précédent.*

1.3.2 Preuves de quelques versions équivalentes au théorème de Borsuk-Ulam

Théorème 1.24. (Ljusternik- Shnirelmann) [13] *Si S^n est recouverte par $(n+1)$ ensembles fermés F_1, F_2, \dots, F_{n+1} , alors au moins un des F_i contient une paire de points antipodes.*

Preuve. On suppose que $F_i \neq -F_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ et on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.25 (Lemme de Urysohn). *Si X est normal, F un fermé et U un ouvert tel que $F \subset U$, alors il existe une application $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = 0, \forall x \in F$ et $f(x) = 1 \forall x \in X \setminus U$.*

On applique le lemme de ci-dessus, il existe une application $f_i : S^n \rightarrow [0, 1]$ qui est 0 sur F_i et 1 sur $-F_i$, car $-F_i \subset X \setminus F_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$. On considère

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

et on applique le théorème de Borsuk-Ulam à f , alors il existe $x_0 \in S^n$ tel que $f(x_0) = f(-x_0)$.

(i) Si $x_0 \in F_i$ pour un certain $i \leq n$, alors $f_i(x_0) = 0$.

(ii) Par contre $-x_0 \in -F_i$, alors $f_i(-x_0) = 1$ et ainsi $f_i(x_0) \neq f_i(-x_0)$.

Par conséquent, $x_0 \notin F_i$ pour chaque $i \leq n$. De la même manière, $x_0 \notin F_i$ pour chaque $i \leq n$. Puisque la famille $(F_i)_{i=1, n+1}$ recouvre S^n , alors certainement x et $-x$ sont dans F_{n+1} . \square

La preuve de ci-dessus est une preuve directe, nous avons aussi la remarque suivante :

Remarque 1.26. *L'implication 1) implique 5) qu'on vient de démontrer dans la preuve des équivalences entre les différentes versions du théorème de Borsuk-Ulam est aussi une preuve du théorème de Ljusternik- Shnirelmann.*

Théorème 1.27. *Il n'y a pas une application antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.*

Pour démontrer le théorème de ci-dessus, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.28. *Soit $f : S^n \rightarrow S^n$ une application antipodale, alors f induit un isomorphisme $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$.*

Preuve. La démonstration repose sur la suite exacte longue associée à la suite courte :

$$0 \longrightarrow C_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{P_n} C_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

La preuve est analogue à la preuve du lemme 1.17. Le résultat cherché est donné au cours de la preuve. \square

Preuve du théorème 1.27. On suppose qu'il existe $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ antipodale, et on considère la restriction de f sur S^{n-1} noté f' . Alors d'après le lemme précédent, f' induit un isomorphisme

$$f'_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

sur les groupes d'homologies. Par ailleurs, puisque f' peut être prolongé à $f'' : B^n \rightarrow S^{n-1}$, alors on peut considérer la composition

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} B^n \xrightarrow{f''} S^{n-1}$$

et ainsi $f'_* = f''_* \circ i_*$. Par conséquent, $f'_* = f''_* \circ i_*$ et on sait que $H_{n-1}(B^n) = 0$, alors $f'_* = 0$. Ceci étant impossible puisque f'_* est un isomorphisme entre deux groupes non triviaux. \square

1.3.3 Équivalence entre le théorème de Borsuk-Ulam et le lemme de Tucker

On rappelle que le théorème de Borsuk-Ulam assure la non existence d'une application de B^n dans S^{n-1} qui est antipodale sur le bord. On veut montrer que la proposition suivante :

Proposition 1.29. *Le théorème de Borsuk-Ulam est équivalent au lemme de Tucker.*

Avant d'introduire la preuve de la proposition de ci-dessus nous allons énoncer une version équivalente du lemme de Tucker. Nous aurons besoin des définitions suivantes :

Un **cross-polytope** de dimension n est $\text{Conv}\{\pm e_i\}$ où e_i sont les vecteurs unités de \mathbb{R}^n . Soit \diamond^{n-1} le bord du complexe du cross-polytope de dimension n , alors $\diamond^{n-1} \simeq S^{n-1}$ ou d'une manière équivalente \diamond^{n-1} est n -copies liées de S^0 . Les sommets de \diamond^{n-1} sont

$$V(\diamond^{n-1}) = \{\pm i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Les faces de \diamond^{n-1} sont tous les sous ensembles dont les sommets ne contiennent pas toute paire de points antipodes. Alors, pour une triangulation T comme celle du lemme de Tucker, nous avons une formulation équivalente de ce dernier. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.30. *Il n'existe pas une application simpliciale $\lambda : T \rightarrow \diamond^{n-1}$ qui est antipodale sur $T \cap \partial B^n$.*

En utilisant le lemme ci-dessus, nous avons la preuve suivante :

Preuve de la Proposition 1.29. Nous prouvons :

1) **Borsuk-Ulam \Rightarrow le lemme de Tucker**

Si on suppose qu'il existe une application simpliciale λ de T dans \diamond^{n-1} qui est antipodale sur le bord, alors son extension canonique

$$\|\lambda\| : \|T\| \simeq B^n \longrightarrow \|\diamond^{n-1}\| \simeq S^{n-1}$$

est antipodale sur le bord. Ce qui contredit le théorème de Borsuk-Ulam.

2) **Borsuk-Ulam \Leftarrow le lemme de Tucker.**

Pour prouver cette implication inverse, on assume que $f : B^n \rightarrow S^n$ est une application continue qui est antipodale sur le bord et on construit T et λ qui contredisent le lemme de Tucker. Ici T peut être choisie comme étant une triangulation quelconque de B^n telle qu'elle est antipodale sur le bord et telle que $\dim T < \delta$ (i.e si $\{u, v\} \in T$ alors $d(u, v) < \delta$).

Pour préciser δ , on pose tout d'abord $\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ce choix nous assure que pour chaque $y \in S^{n-1}$, nous avons $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} \geq \varepsilon$. Autrement dit, on a au moins une des composantes de y ayant une valeur absolue égale à au moins ε (si non on doit prendre $\sum_{i=1}^n y_i^2 < 1$).

Par ailleurs, nous savons qu'une application continue sur un compact est uniformément continue. Alors puisque B^n est compact, f l'est. Par conséquent, il existe un nombre $\delta > 0$ sachant que pour tous les points $x, x' \in B^n$ avec $d(x, x') < \delta$, nous avons $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\varepsilon$ (δ est celui qui borde les simplexes de T). Soit

$$k(v) := \min\{i, |f(v)_i| \geq \varepsilon\}.$$

On définit l'application λ par :

$$\lambda(v) = \begin{cases} +k(v), & \text{si } f(v) > 0 \\ -k(v), & \text{si } f(v) < 0 \end{cases}$$

Le fait que f est antipodale sur ∂B^n implique que λ est aussi antipodale i.e $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ pour chaque sommet v sur le bord. Alors, le lemme de Tucker implique qu'il existe un bord complémentaire vv' i.e $\lambda(v) = -\lambda(v') > 0$, et par conséquent $k(v) = k(v')$. On prend

$$i = \lambda(v) = -\lambda(v') > 0,$$

cette valeur assure alors $f(v)_i \geq \varepsilon$ et $f(v')_i \leq -\varepsilon$, ainsi $\|f(v) - f(v')\|_\infty \geq 2\varepsilon$. Ce qui contredit la définition de la continuité uniforme.

□

1.4 Le \mathbb{Z}_2 -indice et le théorème de Borsuk-Ulam

L'une des versions équivalentes du théorème de Borsuk-Ulam (voir th 1.20) atteste qu'il n'existe pas des \mathbb{Z}_2 -applications équivariantes de $(S^n, \tau) \rightarrow (S^m, \tau')$ pour

$m < n$. Lorsque $m \geq n$, elle existe et elle est donnée par l'inclusion. Alors, étant donné (X, T) un \mathbb{Z}_2 -espace, il est naturel qu'on se pose les questions suivantes :

1) quel est le plus grand n pour lequel il existe une application de $(S^n, \tau) \rightarrow (X, T)$?

2) quel est le plus petit entier n pour lequel il existe une application équivariante de $(X, T) \rightarrow (S^n, \tau)$?

On voit que la réponse pour $X = S^n$ pour les deux questions est n . Les deux dernières questions conduisent à la construction du co-indice et de l'indice topologique respectivement. Ce sont deux invariants numériques associés aux \mathbb{Z}_2 -espaces.

L'indice topologique a été introduit par Chung-Tao Yang en 1954 dans son papier [78] et a été utilisé par le même auteur pour les applications sur les sphères en 1955 dans [79]. La notion de co-indice a été étudiée par Corner et Floyd en 1960 dans [16] sous le nom de l'indice (ils appellent indice se qu'on appelle co-indice et inversement). On peut montrer que la détermination du \mathbb{Z}_2 -indice entraîne la détermination du \mathbb{Z}_2 -co-indice et que ce dernier est inférieur ou égal à l'indice. On les trouve liés dans plusieurs cas et ils ont des avantages en commun, parmi lesquelles est que leur calcul est très applicable.

Dans notre travail, on s'intéresse au \mathbb{Z}_2 -indice, il présente un moyen très efficace pour l'étude de l'existence des applications équivariantes et alors l'étude du théorème de Borsuk-Ulam et ses généralisations. Un exemple est son impact dans l'étude du théorème de Borsuk-Ulam sur les CW-complexes. Cette généralisation constitue un outil majeur dans le développement des résultats de cette thèse.

Le \mathbb{Z}_2 -indice a en plus d'autres applications. On le voit parfois immergé dans certains travaux et dans d'autres il constitue un outil majeur. On a les mêmes arguments pour le \mathbb{Z}_2 -co-indice, c'est pour cette raison certains auteurs les considèrent comme étant des moyens très puissants pour les applications combinatoires de la topologie (voir par exemple [47], [51]).

Définition 1.31. Soient $(X, \tau), (X', \tau')$ deux \mathbb{Z}_2 -espaces. S'il existe une \mathbb{Z}_2 -application $f : X \rightarrow X'$, on écrit $X \leq_{\mathbb{Z}_2} X'$ ou $X \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} X'$.

Lemme 1.32. La relation $\leq_{\mathbb{Z}_2}$ définie ci-dessus est une relation d'ordre partiel.

Preuve.

- i) La réflexivité découle du fait que l'application identique commute avec n'importe quelle \mathbb{Z}_2 -action.
- ii) Pour la transitivité, soient $(X, \tau_1), (X_2, \tau_2), (X_3, \tau_3)$ trois \mathbb{Z}_2 -espaces tels que $X_1 \leq_{\mathbb{Z}_2} X_2$ et $X_2 \leq_{\mathbb{Z}_2} X_3$, alors on $X_1 \leq_{\mathbb{Z}_2} X_3$. En effet, ce résultat est obtenu de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (X, \tau_1) & \xrightarrow{f} & (X_2, \tau_2) & \xrightarrow{g} & (X_3, \tau_3) \\ \tau_1 \downarrow & (I) & \downarrow \tau_2 & (II) & \downarrow \tau_3 \\ (X, \tau_1) & \xrightarrow{f} & (X_2, \tau_2) & \xrightarrow{g} & (X_3, \tau_3) \end{array}$$

Cette dernière vient de la commutativité des diagramme (I) et (II).

□

Remarque 1.33. *Dans le cas où f est un homéomorphisme, la relation $\leq_{\mathbb{Z}_2}$ est une relation d'équivalence. Ainsi dans ce cas, certains auteurs ont classifié les involutions libres (voir par exemple [33]. Dans la majorité des travaux récents, on utilise la condition d'homéomorphie des \mathbb{Z}_2 -applications équivariantes).*

Définition 1.34. *Soit (X, τ) un \mathbb{Z}_2 -espace. Le \mathbb{Z}_2 -indice de (X, τ) est défini par :*

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) = \min\{n \in \{0, 1, 2, \dots\} / X \leq_{\mathbb{Z}_2} S^n\},$$

où S^n est prise avec la \mathbb{Z}_2 -action standard antipodale. Parfois on le note $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$, si on a pas à préciser l'involution.

Le \mathbb{Z}_2 -indice peut être un nombre naturel ou l'infini. Il ne dépend pas seulement de l'espace il dépend aussi de la \mathbb{Z}_2 -action. Par exemple, si l'action n'est pas libre le \mathbb{Z}_2 -indice est égale à ∞ . Et si par exemple X est un CW complexe de dimension fini, le \mathbb{Z}_2 -indice est fini.

Exemple 1.35. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^1, \tau) = 1$, où τ est l'application antipodale.

En effet, puisqu'il n'existe pas d'application équivariante de $S^1 \rightarrow S^0$, alors la première application équivariante est l'identité, et alors par définition de l'indice on trouve le résultat.

Exemple 1.36. *Soit $X = S^1 \sqcup S^1$ la réunion disjointe de deux cercles.*

1. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) = 1$, si la \mathbb{Z}_2 -action τ agit comme étant antipodale sur chacun des deux cercles.
2. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) = 0$, si la \mathbb{Z}_2 -action τ échange les deux cercles.

Exemple 1.37. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^3, \tau) = 3$, avec la \mathbb{Z}_2 -action standard de S^3 . C'est le théorème de Borsuk-Ulam (voir le théorème 1.20.3).

Exemple 1.38. [69]. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^3, \tau) = 2$, où la \mathbb{Z}_2 -action τ est induite de la multiplication par nombre complexe i sur $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

La proposition suivante donne quelques propriétés du \mathbb{Z}_2 -indice et de la façon pour l'estimer.

Proposition 1.39. [51] *Le \mathbb{Z}_2 -indice vérifie les propriétés suivantes :*

1. Si $(X, \tau) \leq_{\mathbb{Z}_2} (X', \tau')$, alors $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X', \tau')$.
2. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n, \tau) = n$, pour tout $n \geq 0$, avec la \mathbb{Z}_2 -action standard de S^n .
3. Si X est $(n-1)$ -connexe, alors $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) \geq n$.
4. Si K est un \mathbb{Z}_2 -complexe simpliciale libre de dimension n , alors $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K, \tau) \leq n$.

Preuve. 1. On suppose que $(X, \tau) \leq_{\mathbb{Z}_2} (X', \tau')$, alors il existe une application équivariante $f : X \rightarrow X'$ i.e nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \\ \tau \downarrow & (I) & \downarrow \tau' \\ (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (X', \tau') \end{array}$$

Mais par définition $ind_{\mathbb{Z}_2}(X', \tau') = \min\{n \in \{0, 1, 2, \dots\} / X' \leq_{\mathbb{Z}_2} S^n\}$. Soit alors $g : X' \rightarrow S^n$ une \mathbb{Z}_2 -application, alors nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X', \tau') & \xrightarrow{f} & (S^n, \tau_n) \\ \tau' \downarrow & (II) & \downarrow \tau_n \\ (X', \tau') & \xrightarrow{f} & (S^n, \tau_n) \end{array}$$

On considère alors $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (S^n, \tau_n)$. Cette application est aussi une \mathbb{Z}_2 -application. En effet, en combinant les diagrammes (I) et (II), on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{g \circ f} & (S^n, \tau_n) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau_n \\ (X, \tau) & \xrightarrow{g \circ f} & (S^n, \tau_n) \end{array}$$

On conclut qu'à chaque fois que nous avons une application équivariante $X' \rightarrow S^n$, on obtient une autre de $X \rightarrow S^n$. D'où par définition de l'indice qui est le minimum, on obtient

$$ind_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) \leq ind_{\mathbb{Z}_2}(X', \tau').$$

2. Cette assertion vient directement du théorème 1.20.3.

En effet, on sait que si $f : (S^n, \tau) \rightarrow (S^m, \tau')$ une application équivariante, alors $n \leq m$. Et d'après la définition de l'indice, on déduit que

$$ind_{\mathbb{Z}_2}(S^n, \tau) \leq n \leq m.$$

Si on suppose que $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = k$ avec $k < n$, alors il existe une \mathbb{Z}_2 -application $S^n \rightarrow S^k$, ce qui est impossible. D'où, $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = n$.

3. Ici l'idée est de trouver une application équivariante $g : S^n \rightarrow X$.

En effet, si une telle application existe, alors sa composée avec toute application équivariante de X dans S^m sera une application équivariante de S^n dans S^m . Et alors d'après le théorème de Borsuk-Ulam $n \leq m$. Par conséquent, $n \leq ind_{\mathbb{Z}_2}(X)$ par la définition de l'indice.

Pour la construction de g , on va procéder par induction sur k i.e on va construire des \mathbb{Z}_2 -applications $g_k : S^k \rightarrow X$.

a) Pour $k = 0$, puisque la sphère S^0 ne contient que deux éléments qu'on note H_0^+ , H_0^- , on considère l'application $g_0 : \{H_0^+\} \rightarrow X$ définie par

$g_0(H_0^+) = x_0 \in X$. On suppose que $\{H_0^+\}$ est muni de la topologie discrète, alors g_0 est continue. On prolonge g_0 à $\bar{g}_0 : \{H_0^+, H_0^-\} = S^0 \rightarrow X$ en prenant $g_0(H_0^-) = \tau(x_0)$. Cette application est continue de S^0 dans X si on muni S^0 de la topologie discrète. D'où on a bien construit une \mathbb{Z}_2 -application $S^0 \rightarrow X$.

- b) Pour $k = 1$, une fois que g_0 a été construite et en utilisant le fait que X est 0-connexe (i.e connexe par arcs), on peut l'étendre au demi cercle H_1^+ en connectant les deux points H_0^+ et H_0^- . On obtient alors une application continue $g_1 : H_1^+ \rightarrow X$. On pose

$$g_1(x) = \tau \circ g_1(-x), \quad \forall x \in H_1^-$$

où H_1^- est le demi cercle opposé. En combinant ces deux arcs, on obtient le cercle S^1 et alors $g_1 : S^1 \rightarrow X$ ainsi construite est bien une application équivariante de S^1 dans X .

- c) Maintenant, on suppose qu'on a construit une application équivariante $g_{k-1} : S^k \rightarrow X$. Puisque X est $(k-1)$ -connexe, on peut l'étendre à une application continue $\bar{g}_{k-1} : B^k \rightarrow X$.

Par ailleurs, S^{k-1} peut être considérée comme un sous ensemble de S^k en l'identifiant avec le contour $\{x \in S^k / x_{k+1} \geq 0\}$. En plus, la demi sphère $H_k^+ = \{x \in S^k / x_{k+1} \geq 0\}$ est homéomorphe à B^k par la projection $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ qui élimine la dernière coordonnée. En utilisant π et \bar{g}_{k-1} , on peut définir la composée :

$$g_k = \bar{g}_{k-1} \circ \pi : H_k^+ \rightarrow X,$$

qui est continue. En posant, $g_k(x) = \tau \circ g_k(-x)$, $\forall x \in H_k^-$, où H_k^- est la demi sphère inférieure, on définit alors une application $g_k : S^k \rightarrow X$, où $S^k = H_k^+ \cup H_k^-$. Cette application est bien définie puisque g_k est antipodale sur l'intersection $S^{k-1} = H_k^+ \cap H_k^-$ et continue car elle est continue sur les deux demi sphères fermées. En plus, c'est une application équivariante par construction.

4. On veut construire une \mathbb{Z}_2 -application $g : \|K\| \rightarrow S^n$, pour tout \mathbb{Z}_2 -complexe simplicial de dimension $k \leq n$. On montre plus généralement qu'un \mathbb{Z}_2 -complexe simplicial libre peut être \mathbb{Z}_2 -appliqué sur n'importe quel \mathbb{Z}_2 -espace Y $(n-1)$ -connexe.

L'idée est exactement comme la preuve précédente. On construit par induction les \mathbb{Z}_2 -applications

$$g_k : \|K^k\| \rightarrow Y, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Une fois que g_{k-1} est construite, on divise les simplexes k -dimensionnels en des classes d'équivalences. C'est des orbites sous la \mathbb{Z}_2 -action. Chaque classe est constitué de deux complexes F et $\tau(F)$. En prend un simplexe de chaque

classe, et pour ces simplexes, on étend g_{k-1} sur l'intérieur en utilisant le fait que Y est $(k-1)$ -connexe. Enfin, on définit g_k dans l'intérieur des simplexes restants en une seule manière possible qui rend g_k une \mathbb{Z}_2 -application. On utilise le même raisonnement pour les \mathbb{Z}_2 -complexes cellulaires. \square

Remarques 1.40. 1. *La deuxième propriété de la proposition de ci-dessus est une autre formulation du théorème de Borsuk-Ulam.*

2. *Les propriétés 3) et 4) de la même proposition permettent de borner $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$.*

3. *La condition $(n-1)$ -connexe dans l'assertion 3) peut être affaibli par le condition homologique suivante :*

si tous les groupes d'homologies de X avec des coefficients dans \mathbb{Z}_2 s'annulent pour les dimensions supérieures à $(n-1)$, alors $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \geq n$.

4. *Avec plus de techniques, la quatrième assertion peut être prouvée pour des espaces plus généraux, à savoir :*

si un \mathbb{Z}_2 -espace X est paracompact, alors $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \leq \dim(X)$. La dimension ici est la dimension usuelle du recouvrement ou la dimension topologique.

Partant du fait que tout espace métrique est paracompact, alors cette propriété est vrai pour cette classe d'espaces topologiques.

5. *Puisque toute variété est un espace topologique paracompact localement euclidien, alors on déduit que pour toute variété M , on a $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M) \leq \dim M$.*

Applications et généralisations du théorème de Borsuk-Ulam

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction | 26 |
| 2.2 | Quelques applications directes du théorème de Borsuk-Ulam | 27 |
| 2.2.1 | Le théorème de Brouwer d'après le théorème de Borsuk-Ulam | 27 |
| 2.2.2 | Le théorème du sandwich au jambon | 28 |
| 2.2.3 | Cas discret du théorème du sandwich au jambon | 31 |
| 2.3 | Quelques généralisations du théorème de Borsuk-Ulam | 34 |
| 2.3.1 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour les surfaces | 38 |
| 2.3.2 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour les CW-complexes | 40 |
| 2.3.3 | Applications en dimensions 2 et 3 | 48 |

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux applications et aux généralisations du théorème de Borsuk-Ulam. Les applications de ce dernier sont nombreuses. Parmi lesquelles notons une application directe qui montre que le théorème de Borsuk-Ulam implique le théorème du point fixe Brouwer. Ce résultat est démontré dans la section 2.2 de ce chapitre.

Dans la même section, on trouve une autre application du théorème de Borsuk-Ulam, c'est le théorème du sandwich au jambon (Ham sandwich theorem) dans la théorie de la mesure. Pour ce dernier, on trouve des applications et des généralisations très intéressantes. Nous allons étudier le théorème du sandwich et nous allons montrer comment utiliser le théorème de Borsuk-Ulam pour développer les preuves combinatoires de ce dernier.

Dans la section 2.3 de ce chapitre, nous allons faire une étude sur les généralisations

du théorème de Borsuk-Ulam. C'est un domaine très fructueux et très vaste. On se contente tout d'abord de mentionner quelques travaux qui concerne ce sujet. Ensuite nous exposons une étude principale qui porte sur ceux sur lesquelles nous nous basons pour développer les résultats principaux de cette thèse. A cet effet, nous étudions le théorème de Borsuk-Ulam pour les CW-complexes en utilisant les résultats obtenus par Daciberg L. Gonçalves, Claude Hayat and Peter Zvengrowski dans [35]. On trouve en particulier dans ce chapitre, l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour les surfaces (i.e pour les 2-variétés).

2.2 Quelques applications directes du théorème de Borsuk-Ulam

2.2.1 Le théorème de Brouwer d'après le théorème de Borsuk-Ulam

Le célèbre théorème du point fixe de Brouwer est l'un des théorèmes qui sont très connus en topologie algébrique et dans la théorie de points fixes. Il a été utilisé dans de nombreux domaines de mathématiques et dans d'autres sciences. Ce qui nous intéresse ici est sa relation étroite avec le théorème de Borsuk-Ulam. En fait, c'est un corollaire du théorème de Borsuk-Ulam (voir par exemple [51], [74]). Il y-a des preuves directes et indirectes de cet argument. Nous allons en présenter une qui est simple et adaptée à notre cas dans cette thèse. C'est une preuve indirecte qui se base sur l'une des versions équivalentes au théorème de Borsuk-Ulam. Tout d'abord, on rappelle que le théorème de Brouwer est le suivant :

Théorème 2.1. *Le théorème de point fixe de Brouwer*

Soit B^n la boule unité de dimension n . Toute application continue $f : B^n \longrightarrow B^n$ admet un point fixe i.e il existe $x \in B^n$ tel que $f(x) = x$.

Nous allons montrer que le théorème de Borsuk- Ulam implique le théorème de Brouwer, en utilisant la version du théorème de Borsuk-Ulam affirmant qu'il n'existe pas une application continue $B^n \longrightarrow S^{n-1}$ qui est antipodale sur le bord (voir 4) du théorème 1.20).

Preuve du théorème de Brouwer par le théorème de Borsuk-Ulam. On suppose qu'il existe une application continue $f : B^n \longrightarrow B^n$ qui n'a pas de point fixe. Par une construction très connue, on montre l'existence d'une application continue $g : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ dont la restriction à S^{n-1} est l'application identique (une telle application g est dite une rétraction de B^n à S^{n-1}).

On définit $g(x)$ comme étant le point dans lequel le rayon d'origine $f(x)$ et passant par x intersecte S^{n-1} i.e $g(x)$ est le point d'intersection du rayon $\overrightarrow{xf(x)}$ avec ∂B^n . Cette application est bien définie car f n'a pas de point fixe. En plus, elle est continue et identique sur ∂B^n et alors elle est antipodale. Ce qui contredit Borsuk-Ulam.

□

2.2.2 Le théorème du sandwich au jambon

Le théorème du sandwich au jambon est parfois appelé le théorème de Stone-Tukey d'après Arthur Stone et John Tukey a été démontré en 1938 par Stephan Banach à l'aide du théorème de Borsuk-Ulam. C'est la raison pour laquelle il est considéré comme étant l'une des applications classiques du théorème de Borsuk-Ulam. En plus il a quelques bonnes applications en combinatoire (voir par exemple [51], [66], [19], [65], [25]).

Son nom vient du cas $n = 3$, trois objets sont supposés être le jambon, le fromage et le pain. Pour n'importe quel sandwich fabriqué par ces trois éléments, il existe un plan qui coupe simultanément en moitié le pain, le fromage et le jambon.

La version mathématique originale du théorème du sandwich dit que étant donné trois solides de \mathbb{R}^3 , on peut trouver un plan séparant chacun de ces solides en deux parties du même volume.

Cela se généralise au cas de d solides dans \mathbb{R}^d pour $d \geq 1$. Cette généralisation est formulée comme suit : n'importe quelles distributions de masses de \mathbb{R}^d , d finie peuvent être partitionnés par un hyperplan.

Ce résultat géométrique a plusieurs conséquences intéressantes. En premier, c'est l'équipartition des mesures de Borel $U_1, U_2, \dots, U_d \in \mathbb{R}^d$ qu'on va étudier. Pour cela on introduit les définitions suivantes :

Définition 2.2. [51] Une mesure de Borel finie U sur \mathbb{R}^d est une mesure sur \mathbb{R}^d sachant que tous les sous ensembles ouverts de \mathbb{R}^d sont mesurables et $0 < U(\mathbb{R}^d) < \infty$ (i.e cette mesure est finie).

Comme exemple, on peut penser que c'est une mesure donnée par la restriction de la mesure de Lebesgue usuelle à un ensemble compact de \mathbb{R}^d . C'est à dire si on note par λ^d la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d alors pour $A \subset \mathbb{R}^d$ un compact avec $\lambda^d(A) > 0$ et $U(X) = \lambda^d(X \cap A)$ pour tous les ensembles Lebesgue mesurables $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Définition 2.3. Un hyperplan dans \mathbb{R}^d est un $(d - 1)$ sous espace affine de \mathbb{R}^d i.e l'ensemble de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle = b\}$$

pour un certain a non nul de \mathbb{R}^d et un certain $b \in \mathbb{R}$ (notons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^d). Pour a, b définis comme ci dessus, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle \leq b\}$$

est un demi espace fermé de \mathbb{R}^d .

Par exemple, si on prend un point $u = (u_0, u_1, \dots, u_d) \in S^d$, alors l'ensemble de tous les points $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$ pour lesquels $\langle u, x \rangle = 0$ i.e $\sum_{i=0}^d u_i x_i = 0$ est un hyperplan de \mathbb{R}^{d+1} passant par l'origine et orthogonal au vecteur allant de l'origine à u .

Lorsqu'on prend l'ensemble de tous les points x tel que $\langle u, x \rangle \leq 0$, on définit alors le demi espace ou la moitié de \mathbb{R}^{d+1} au dessous de l'hyperplan.

Pour mieux comprendre cet exemple, on va l'imaginer dans le cas où $n = 3$ pour la sphère S^2 . Lorsqu'on prend un point de la sphère et on dessine un vecteur qui connecte la sphère à l'origine, ce vecteur détermine uniquement un plan allant à

travers l'origine. En fait, tout plan à travers l'origine est déterminé par un certain vecteur. En plus, les points antipodes sur la sphère engendrent des plans avec la même pente mais pointu dans des directions opposés.

Le but du théorème qu'on va étudier est de trouver un hyperplan qui divise \mathbb{R}^d .

Théorème du sandwich au jambon pour les mesures

Définition 2.4. *On considère U_1, U_2, \dots, U_d des mesures de Borel finies. Un hyperplan affine h de \mathbb{R}^d **réalise une bissection** de U_1, U_2, \dots, U_d si $\forall i = 1, 2, \dots, d$, $U_i(h^+) = \frac{1}{2}U_i(\mathbb{R}^d)$ i.e $U_i(h^+) = U_i(h^-)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, d$.*

Le théorème du sandwich au jambon pour les mesures est le suivant :

Théorème 2.5. [51] *Soient U_1, U_2, \dots, U_d des mesures de Borel finies sur \mathbb{R}^d sachant que tout hyperplan de \mathbb{R}^d est de mesure nulle pour chaque U_i (on réfère à telles mesures comme "des distributions de masses"), alors il existe un hyperplan h qui réalise une bissection de U_1, U_2, \dots, U_d i.e $U_i(h^+) = \frac{1}{2}U_i(\mathbb{R}^d)$ où $U_i(h^+) = U_i(h^-)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, d$.*

Preuve. Soit $u = (u_0, u_1, \dots, u_d) \in S^d$. Si au moins l'une des composantes u_1, u_2, \dots, u_d est non nulle, on associe à chaque u les demi-espaces

$$h^+(u) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \sum_{i=1}^d u_i x_i \leq u_0\}$$

et

$$h^-(u) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \sum_{i=1}^d u_i x_i \geq u_0\}.$$

On voit que $h^+(-u) = (h^+(u))^-$. En plus, on remarque que les points antipodes de S^d correspondent à des demi espaces opposés. Pour $u = (1, 0, \dots, 0)$, on a

$$h^+(u) = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \sum_{i=1}^d u_i x_i = 0 \leq 1\} = \mathbb{R}^d$$

et pour $u = (-1, 0, \dots, 0)$, on a

$$h^+(u) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d / \sum_{i=1}^d u_i x_i = 0 \leq -1\} = \emptyset.$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : S^d &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ u \in S^d &\mapsto f(u) = (U_1(h^+(u)), U_2(h^+(u)), \dots, U_d(h^+(u))) \end{aligned}$$

où $U_i(h^+(u)) = \lambda^d(h^+(u) \cap K_i)$, K_1, K_2, \dots, K_d sont d compactes de \mathbb{R}^d et λ^d est la mesure de Lebesgue. Cette fonction est bien définie parce que la mesure du demi espace est finie. Si on peut montrer que f est continue, alors on peut utiliser le théorème de Borsuk-Ulam et déduire l'existence de $u_0 \in S^d$ tel que $f(u_0) = f(-u_0)$

(notons que $u \neq (\pm 1, 0, \dots, 0)$) et alors $\forall i = \overline{1, d}$, $U_i(h^+(u_0)) = U_i(h^+(-u_0))$. Mais d'après ce qu'on a vu précédemment $h^+(-u_0) = (h^+(u_0))^-$, alors on obtient $U_i(h^+(u_0)) = U_i(h^-(u_0))$. Et alors le bord du demi espace $h^+(u_0)$ est l'hyperplan désiré.

On a donné une démonstration qui repose sur la continuité de f . Pour montrer ça, soit la suite $(U_n)_{n=1}^\infty$ une suite de points de S^d convergente vers un point $u \in S^d$. On veut montrer que $(f(U_n))_{n=1}^\infty$ converge vers $f(u)$ i.e $(U_i(h^+(U_n)))_{n=1}^\infty$ converge vers $U_i(h^+(u))$.

Soient g_n, g les fonctions caractéristiques de $h^+(U_n)$ et $h^+(u)$. On va montrer la convergence en terme intégral, c'est à dire on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n(x) du_i = \int g(x) du_i.$$

En analyse, on remarque que le meilleur chemin de montrer ça est le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En utilisant le théorème de Lebesgue, on peut montrer que cette égalité est vraie si on peut borner tous les g_n et g par une autre fonction qui a une intégrale finie (hypothèse du TCD) et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$, U_i presque partout.

En effet, Soient $U_n = (U_n^0, U_n^1, \dots, U_n^d)$ et $U = (u_0, u_1, \dots, u_d)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = u$, alors $U_n^i \rightarrow u_i$ pour tout $i = \overline{0, d}$. Par conséquent, $U_n^0 \rightarrow u_0$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0, \forall n > N_0, |U_n^0 - u_0| < \varepsilon$. C'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0, \forall n > N_0, u_0 - \varepsilon < U_n^0 < u_0 + \varepsilon. \quad (2.1)$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in h^+(U)$, $x \notin \delta h^+(U)$ où $\delta h^+(U)$ est le bord de $h^+(U)$ et on veut montrer que $x \in h^+(U_n)$. $x = (x_1, \dots, x_d) \in h^+(U)$ implique que $\sum_{i=1}^d x_i u_i < u_0$. On pose $u_0 - \sum_{i=1}^d x_i u_i = \delta > 0$. Tout d'abord on considère la projection :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{d+1} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_{d+1}) &\mapsto (v_1, v_2, \dots, v_d) \end{aligned}$$

et on définit la fonction φ par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{d+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle x, \pi(v) \rangle \end{aligned}$$

Cette application est continue puisque les applications produit scalaire et projection sont continues. Ainsi, la suite $\varphi(U_n)$ converge vers $\varphi(u)$. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |\langle x, \pi(U_n) \rangle - \langle x, \pi(u) \rangle| < \varepsilon.$$

i.e

$$\forall n > N, -\varepsilon + \langle x, \pi(u) \rangle < \langle x, \pi(U_n) \rangle < \varepsilon + \langle x, \pi(u) \rangle.$$

Et alors,

$$-\varepsilon + \sum_{i=1}^d x_i u_i < \sum_{i=1}^d U_n^i x_i < \varepsilon + \sum_{i=1}^d x_i u_i.$$

On prend $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ dans les inégalités de ci-dessus et dans 2.1, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^d x_i u_i - \frac{\delta}{2} < \sum_{i=1}^d U_n^i x_i < \sum_{i=1}^d x_i u_i + \frac{\delta}{2}. \quad (2.2)$$

A travers l'inégalité à droite dans la formule 2.2 et pour N assez grand, on déduit que

$$\sum_{i=1}^d U_n^i x_i < (u_0 - \delta) + \frac{\delta}{2} = u_0 - \frac{\delta}{2} < u_0^n$$

(par 2.1, 2.2.2). Ce qui montre que $x \in h^+(U_n)$. Par conséquent, pour tout $x \in h^+(u)$ et n'appartenant pas au bord de $h^+(u)$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$.

Le cas où $x \in h^-(u)$ est similaire, mais dans ce cas on prend

$$\delta = \sum_{i=1}^d x_i u_i - u_0 > 0 \quad (2.3)$$

Pour N assez grand, on utilise l'inégalité à droite dans la formule 6 et la formule 2.3, on obtient :

$$U_n^0 < u_0 + \frac{\delta}{2} < \sum_{i=1}^d U_n^i x_i.$$

Ce qui montre que $x \in h^-(U_n)$. Enfin, pour $x \in \delta h^+(u)$ sachant que $\delta h^+(u) = h(u)$ est un hyperplan et alors par hypothèse $U_i(h(u)) = 0$. Par suite, $g_n(x)$ converge vers $g(x)$, U_i presque partout. En plus puisque tous les g_n sont dominées par 1 qui est intégrable car les U_i sont des mesures finies, alors en intégrant les deux membres de l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$ et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$U_i(h^+(U_n)) = \int g_n(x) du_i \quad \text{converge vers} \quad \int g(x) du_i = U_i(h^+(u)).$$

D'où l'on a la continuité de f . □

2.2.3 Cas discret du théorème du sandwich au jambon

Le théorème du sandwich au jambon pour les ensembles de points finis

On veut parfois partitionner des masses concentrées en un nombre fini de points.

Définition 2.6. *On dit qu'un hyperplan P réalise une bisection d'un nombre fini de points A_i si chaque demi espace défini par P contient au plus $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ points de A_i où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x .*

Notons que si A_i possède un nombre impair de points $n = 2k + 1$, alors chaque demi espace est autorisé à contenir au plus k points et alors au moins un point doit se trouver sur l'hyperplan qui réalise la bisection.

Théorème 2.7. Soient $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ des ensembles finis de points, alors il existe un hyperplan h qui bissecte simultanément A_1, A_2, \dots, A_d .

L'idée de la preuve est la suivante : on remplace chaque point par une boule de rayon assez petit et on inclut la mesure de Borel pour chacune d'elles et on applique le théorème du sandwich au jambon pour les mesures.

Pour concrétiser cette idée intuitive, on remarque que c'est la bisection qui va nous créer certains problèmes. Tout dépend de la position des ensembles. C'est pour cette raison on introduit la définition suivante :

Définition 2.8. Soient $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ des ensembles finis de points, une position des A_i est dite générale s'il n'y a aucune coïncidence entre deux points appartenant à des A_i différents et tout hyperplan contient au plus d points se trouvant dans la $\cup_{i=1}^d A_i$ (i.e il n'y a pas $d+1$ points qui se trouvent dans un même hyperplan).

Preuve du théorème 2.7. La démonstration du théorème est divisée en trois cas :

Premier Cas :

On va montrer le théorème dans le cas où les ensembles $(A_i)_{i=1,d}$ contiennent un nombre impair de points, ils sont disjoints deux à deux et ils sont en position générale.

Soit alors A_i^ε définit de A_i en remplaçant chaque point de A_i par une boule de rayon ε . On peut choisir ε assez petit pour qu'un hyperplan intersecte au plus d boules de rayon ε de $\cup_{i=1}^d A_i^\varepsilon$. On définit les mesures U_i par :

$$U_i(S) = \text{Vol}(S \cap \cup_{x \in A_i} B(x, \varepsilon))$$

où Vol est la mesure volume de Lebesgue. En appliquant le théorème du sandwich au jambon, on déduit qu'il existe un hyperplan h qui bissecte tous les A_i^ε . Et puisque A_i^ε contient un nombre impair de boules, alors h doit intersecter au moins une d'entre elles. En plus, on sait que au plus d boules sont intersectées simultanément par un hyperplan, alors h passe exactement par une boule parmi les A_i^ε . Cette boule est divisée en deux par h et ce dernier passe par son centre. Par conséquent, h réalise une bisection de chaque A_i .

Deuxième cas :

On suppose comme dans le cas précédent que tous les A_i possèdent un nombre impair de points, mais ils ne sont pas en position générale. On va effectuer une petite perturbation sur les A_i de manière à les déplacer pour obtenir une position générale. Pour concrétiser cette idée intuitive, on considère pour toute $\alpha > 0$ assez petite (on peut prendre $\alpha = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$) l'ensemble $A_{i,\alpha}$ obtenu de A_i en déplaçant chaque point par au plus α , de telle sorte que $A_{1,\alpha}, A_{2,\alpha}, \dots, A_{d,\alpha}$ soient en position générale. On applique alors le résultat obtenu dans le premier cas, il existe un hyperplan h_α qui bissecte les $A_{i,\alpha}$ i.e h_α^+ contient $\lfloor \frac{1}{2}|A_{i,\alpha}| \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ points de $A_{i,\alpha}$ (même chose pour h_α^-). Notons que h_α est défini comme suit :

$$h_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle a_\alpha, x \rangle = b_\alpha\}$$

où a_α est le vecteur unitaire et $b_\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque les A_i sont finis donc bornés alors les A_i^α sont bornés. Ainsi les $\{b_\alpha, \alpha > 0\}$ sont liés dans un intervalle borné de \mathbb{R} ($a_\alpha \in$

S^{d-1}). Par la compacité, la suite des paires (a_α, b_α) admet un point d'accumulation¹ lorsque $\alpha \rightarrow 0$, notons ce point par $(a, b) \in \mathbb{R}$. On considère $h = \{x \in \mathbb{R}^d / \langle a, x \rangle = b\}$ et la suite décroissante $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ qui converge vers 0 sachant que $(a_{\alpha_j}, b_{\alpha_j}) \rightarrow (a, b)$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, on montre que pour N assez grand $x \in h^+$ implique que $x \in h_{\alpha_j}^+$ i.e si $\sum_{i=1}^d a_i x_i < b$ alors $\sum_{i=1}^d a_{\alpha_j}^i x_i < b_{\alpha_j}$. En effet, soit $x \in h^+$, alors $\sum_{i=1}^d a_i x_i < b$ et donc $b - \sum_{i=1}^d a_i x_i > 0$. On pose $\delta = b - \sum_{i=1}^d a_i x_i > 0$. D'une autre part, puisque $(a_{\alpha_j}, b_{\alpha_j}) \rightarrow (a, b)$ alors $a_{\alpha_j} \rightarrow a$ et $b_{\alpha_j} \rightarrow b$. Ainsi nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_j > 0, \forall j > N_j, |b_{\alpha_j} - b| < \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, on obtient les inégalités :

$$-\frac{\delta}{2} + b < b_{\alpha_j} < \frac{\delta}{2} + b \quad (2.4)$$

Par ailleurs, on considère pour x fixé dans $x \in h^+$ la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{d+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle x, \pi(v) \rangle \end{aligned}$$

La fonction φ est continue et la suite $(a_\alpha)_j$ converge vers a_α , ce qui implique que $(\varphi(a_\alpha)_j)$ converge vers $\varphi(a_\alpha)$. Par suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall j > N, |\langle x, \pi((a_\alpha)_j) \rangle - \langle x, \pi(a_\alpha) \rangle| < \varepsilon.$$

Et alors,

$$-\varepsilon + \sum_{i=1}^d a_i x_i < \sum_{i=1}^d a_{\alpha_j}^i x_i < \varepsilon + \sum_{i=1}^d a_i x_i.$$

On considère N assez grand et $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, on obtient :

$$-\frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^d a_i x_i < \sum_{i=1}^d a_{\alpha_j}^i x_i < \frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^d a_i x_i. \quad (2.5)$$

Mais $\sum_{i=1}^d a_i x_i = b - \delta$, alors à partir de 2.4 et 2.5 on déduit que

$$\sum_{i=1}^d a_{\alpha_j}^i x_i < \frac{\delta}{2} + b - \delta < b - \frac{\delta}{2} < b_{\alpha_j}.$$

Ainsi, $x \in h_{\alpha_j}^+$. Donc on a démontré que pour j assez grand $x \in h^+$ implique que $x \in h_{\alpha_j}^+$. Ce qui montre que s'il y-a k points de A_j dans l'un des demi-espaces définis par h . Alors il y-a au moins k points de des A_{α_j} dans le demi espace défini par $h_{\alpha_j}^+$. Et puisqu'on a démontré que $h_{\alpha_j}^+$ contient au plus $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$, alors $k \leq \lfloor \frac{1}{2}|A_{i,\alpha}| \rfloor$. On déduit que h bissecte réellement tous les A_i .

¹Le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les réels affirme que de toute suite bornée de réels on peut en extraire une sous suite qui converge vers une limite finie.

Troisième cas :

Si quelques A_i contiennent un nombre pair de points i.e $|A_i|$ est pair, on supprime un point arbitraire de chaque A_i dont le cardinal est pair. Ceci peut se faire en déplaçant de telles points. Et alors on peut utiliser le deuxième cas pour trouver l'hyperplan demandé pour ces ensembles étudiés. Ainsi dans le cas où $|A_i| = 2k$, il y-a $\leq \lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor = \lfloor k - \frac{1}{2} \rfloor = k - 1$ points dans chaque demi espace défini par h . Si on ajoute les points enlevés, alors il y-a $\leq (k - 1) + 1 = k = \frac{2k}{2}$ points dans chaque demi espace défini par h . Ce qui réalise la bisection. \square

D'après le théorème de ci-dessus, le nombre de points de A_i dans chaque demi espace ouvert est inférieur ou égal $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$. On veut montrer qu'on peut exactement avoir $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ points de A_i .

Le corollaire de ci-dessous représente la version générale du théorème du sandwich au jambon.

Corollaire 2.9. *Soient $A_1, A_2, \dots, A_d \in \mathbb{R}^d$ des ensembles de points finis et disjoints de \mathbb{R}^d en position générale (i.e n'importe quel hyperplan de \mathbb{R}^d ne contient pas plus de d points de la réunion disjointe des A_i), alors il existe un hyperplan h qui bissecte chaque A_i sachant qu'il y-a exactement $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ points de A_i dans chaque demi espace ouvert défini par h et au plus un point de A_i sur l'hyperplan h .*

Preuve. Si tous les A_i contiennent un nombre impair de points, alors par le deuxième cas de la démonstration précédente le corollaire est clair.

Si par contre quelques A_i sont en nombre pair, alors on peut reprendre l'opération décrite dans le troisième cas de la démonstration de ci-dessus et alors perturber le plan légèrement de telle sorte que le point qui était sur le plan arrive sur le coté opposé du point arbitraire qu'on a juste enlevé. \square

il y-a des résultats numériques intéressantes du théorème du sandwich (voir [51]). En plus, on trouve d'autres applications du théorème de Borsuk-Ulam dans la littérature. Ce dernier fournit une méthode topologique pour la résolution de certain problèmes en mathématiques, à savoir en combinatoire.

2.3 Quelques généralisations du théorème de Borsuk-Ulam

Comme nous l'avions vu, la version originale du théorème de Borsuk-Ulam était pour le triplet $(S^n, \tau, \mathbb{R}^n)$, où τ est l'involution antipodale. On raisonne de la même manière pour les généralisations du théorème de Borsuk-Ulam. La façon la plus adéquate est de considérer les triplets (X, τ, Y) , où X, Y sont les espaces considérés et τ est une involution libre sur X . Le théorème de Borsuk-Ulam dans ce cas prend la forme suivante :

Théorème 2.10. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue, τ une involution libre sur X , il existe un point $x \in X$ sachant que $f(x) = f(\tau(x))$. C'est à dire il existe un point de coïncidence de f et $f \circ \tau$.*

Un nombre important de travaux qui ont été faits dans le sujet de Borsuk-Ulam, suit cette direction. Ainsi on trouve divers résultats qui dépendent du choix des espaces et du choix des applications. Pour les classes d'espaces on peut citer comme exemples les espaces vectoriels fini ou infinis, les espaces de Banach, les espaces localement convexes, les variétés, ... etc. Et pour les applications, nous avons par exemple les applications non linéaires de Fredholm,etc. Plusieurs références pour ces extensions sont cités dans [67].

En plus nous avons vu dans le premier chapitre que les conditions antipodales sont des conditions d'une action du groupe \mathbb{Z}_2 sur la sphère S^n . Il est naturel de considérer le groupe \mathbb{Z}_2 , et parfois un autre groupe qui agit sur l'espace, cela fournit un autre genre de généralisations. Pour ce sujet, on peut voir par exemples les références [40], [71].

Par ailleurs, il se trouve un autre contexte topologique pour ces extensions, c'est étudier la structure de l'ensemble de coïncidence. Pour cette méthode on trouve deux genres de résultats :

- a) les résultats topologiques qui mesure la taille de l'ensemble de coïncidence

$$\Lambda(f) = \{x \in S^n / f(x) = f(-x)\}$$

en termes topologiques i.e on donne la plus petite estimation de la taille de $\Lambda(f)$ en termes de dimensions , cohomologique ou genre (ou utiliser la théorie de l'indice etc). De tels résultats sont usuellement appelés "les théorèmes de Bourgin-Yang", se référant à la version originale de ce théorème prouvée par Bourgin-Yang [12] qui est la suivante :

Théorème 2.11. [12] *Soit T une involution libre sur la sphère S^n et $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue à valeur dans l'espace euclidien. Alors la dimension² de l'ensemble de coïncidence*

$$A(f) = \{x \in S^n / f(x) = f(T(x))\}$$

est au moins $n - m$.

- b) Des résultats géométriques qui sont caractérisés par la situation commune suivante : on fixe un certain ensemble $A \subset S^n$ et on cherche un ensemble congruent $A' \subset S^n$ sachant que $f(A')$ est constitué d'un point. La version originale était obtenu par Kakutani où il a démontré le théorème suivant (voir [67]pp 185) :

Théorème 2.12. [67] *Pour chaque $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ils existent $P_1, P_2, P_3 \in S^2$ congrus à un autre, sachant que $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$.*

²Ici la dimension est la dimension topologique dont on sait qu'elle vaut -1 pour l'ensemble vide. Pour un espace métrique X , la dimension topologique $dim X \leq n$ si chaque recouvrement ouvert fini de X a un raffinement ouvert fini, sachant que chaque point de X est contenu dans au plus $(n + 1)$ ensembles de ce raffinement.

Pour les complexes simpliciaux finis (ou les CW complexes), la dimension topologique ou la dimension du recouvrement coïncide avec la dimension maximale d'un simplexe (ou cellule).

Tous les résultats de ce genre sont appelés “ Les résultats du type Kakutani ”.

Dans l’histoire du théorème de Borsuk-Ulam, les résultats du type Kakutani sont aussi nombreuses que celles du type Bourgin-Yang. Mais de nos jours, celles de Bourgin-Young sont les plus utilisées (voir par exemple [10]). Notons que le terme Borsuk-Ulam est commun entre les deux, et c’est lui qui est le plus utilisé dans la littérature. Nous allons donner ci-dessous quelques généralisations commençant par des exemples qui présentent l’histoire de ce théorème, et finissant par d’autres qui présentent quelques résultats récents.

Une des premières questions évidentes est : le théorème de Borsuk-Ulam reste-il valable si on remplace l’involution antipodale par une autre involution libre T ?

Comme on vient de le voir ci-dessus, la réponse à cette dernière question a été donnée dans le papier de D.G. Bourgin [12], qui est considéré comme étant l’une des généralisations mémorables du théorème de Borsuk-Ulam.

D’une autre part, si on considère les triplets (S^n, T, Y) où Y une variété et T est l’involution antipodale, on trouve que le cas où M est une variété différentielle de dimension m a été étudié par Corner et Floyd en 1964. Ils ont démontré le théorème suivant :

Théorème 2.13. [17] *Soit $f : S^n \rightarrow M$ une application continue de la n -sphère S^n dans une variété différentielle M de dimension m et T une involution libre sur S^n . On assume que $m \leq n$ et que $f_* : H_*(S^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ est trivial. Alors la dimension de l’ensemble de coïncidence $\wedge(f) = \{x \in S^n / f(x) = f(T(x))\}$ est au moins $(n - m)$.*

La structure différentielle permet d’utiliser les classes de Stiefel-Whitney et mettre la démonstration du théorème de ci-dessus.

En 1969 et dans le même sens, Munkholm a prouvé qu’on peut omettre la condition de différentiabilité si on suppose que M est compacte. Ainsi, nous avons :

Théorème 2.14. [39] *Soient $f : S^n \rightarrow M^k$ une application continue de la n -sphère S^n dans une k -variété topologique compacte M et $\wedge(f) = \{x \in S^n / f(x) = f(-x)\}$, alors :*

1. *Si $n > k$, alors $\dim \wedge(f) \geq n - k$.*
2. *Si $n = k$ et $f^* : H^*(M^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(S^n, \mathbb{Z}_2)$ est trivial, alors $\wedge(f) \neq \emptyset$.*

La preuve du théorème ci-dessus est une preuve homologique qui repose sur trois lemmes en utilisant l’homologie et la cohomologie singulière et la cohomologie d’Alexandre Spanier.

Ensuite pour les variétés généralisées, le théorème a été démontré en 2004 dans [8] par Carlos Biasi, Denise de Matos et Edivaldo L. Dos Santos. En se basant sur le fait que les classes de Stiefel-Whitney ont été généralisés pour ces dernières. Les auteurs de ce papier ont formulé une généralisation du théorème de Corner et Floyd et ont démontré le théorème suivant :

Théorème 2.15. [8] *Soit $f : S^n \rightarrow M^k$ une application continue de la n -sphère S^n dans la variété généralisé M^k , et soit $\wedge(f) = \{x \in S^n / f(x) = f(-x)\}$. Alors,*

- Si $n > k$ alors $\dim \wedge(f) \geq n - k$.
- Si $n = k$ et $f^* : H^n(M^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ est zéro, alors $\wedge(f) \neq \emptyset$.

Ici H désigne le foncteur la cohomologie singulière à support fermé à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

Par ailleurs, dans le but d'étudier le théorème de Borsuk- Ulam en remplaçant la sphère S^n par un autre espace et en gardant l'espace d'arrivé comme étant une variété, Munkholm en 1969 dans [40] a remplacé la sphère S^n par la n -sphère homologique modulo p , où p est impair avec l'action du groupe \mathbb{Z}_p , et ensuite M. Nakaoka en 1970 dans [57] par la n -sphère homologique. Leurs théorèmes sont respectivement les suivants :

Théorème 2.16. [40] Soit \mathbb{Z}_p un groupe cyclique d'ordre premier agissant librement sur la n -sphère homologique (modulo p) N^n et $f : N^n \rightarrow M^m$ une application continue dans une variété topologique M^m de dimension m . Si p est impair, on assume que M est orientable. On suppose que $f_* : H_n(N, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_n(M, \mathbb{Z}_p)$ est trivial, alors la dimension de l'ensemble de coïncidence

$$\wedge(f) = \{y \in N / f(x) = f(gx), \forall g \in \mathbb{Z}_p\}$$

est au moins $n - m(p - 1)$.

Théorème 2.17. [57] Soit N une variété topologique fermée qui est le n -sphère homologique et T une involution libre sur N . Soit $f : M \rightarrow N$ une application continue de N dans la m -variété topologique compacte M (avec ou sans bord). On assume que $n \geq m$ et que $f_* : H_n(N, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M, \mathbb{Z}_2)$ est trivial. Alors la dimension (the covering dimension) de

$$\wedge(f) = \{y \in N / f(y) = f(Ty)\}$$

est au moins $(n - m)$.

Dans le même Contexte, Yuri A. Turigin en 2007 dans [71] considéra le produit de n -sphères homologiques (mod p) et démontra le théorème de Borsuk-Ulam. Notons que de nombreux auteurs ont contribué à généraliser et à étendre le Borsuk-Ulam de différentes manières. On ne peut pas les citer tous dans ce chapitre. Pour ceux qui sont récents le lecteur peut consulter par exemples [4], [7], [9], [15], [20], [36], [29], [53], [55].

Une des autres perspectives du théorème de Borsuk-Ulam est l'étude de son aspect multivoque, Dold, Gorniewicz, Elemberg et Montgomery, Jaworski, Gel'man et autres sont parmi les auteurs qui se sont intéressé à ce sujet (voir par exemples [?], [42], [29], [64]).

D'une autre part, Borsuk-Ulam est toujours lié à ses formes équivalentes. Ces dernières ont aussi eu leurs part de généralisations. Des exemples pour ces extensions concernent le théorème de Ljusternic-Schnirelmann (voir par exemple [68]), le lemme de Tucker (voir par exemple [56]) et le théorème du sandwich au jambon (voir par exemples [51], [66], [19], [65], [25]). Tous ces résultats sont aussi classés avec celles du théorème de Borsuk-Ulam. Ce qui nous mène à conclure que ce dernier

est réellement un des célèbres théorèmes dans le monde des mathématiques et dans d'autres domaines.

Une fois arrivé là, nous voulons passer au contexte des généralisations du théorème de Borsuk-Ulam qui sont particulièrement liées au sujet de cette thèse. Il s'agit de celles pour les variétés de petite dimension. Dans ce qui suit, on va faire l'étude du cas des variétés de dimension 2, puis celui de la dimension 3.

2.3.1 Le théorème de Borsuk-Ulam pour les surfaces

L'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour les triplets (S, τ, \mathbb{R}^n) , où S est une surface compacte sans bord et τ est une \mathbb{Z}_2 -action libre sur S a été abordé en 2006 dans [33] par Daciberg L. Gonçalves. Il a démontré que la validité du théorème dépend du choix de l'involution. C'est pour cette raison, les méthodes développées dans son papier ne pourrait pas être appliquées dans le cas de la sphère S^2 puisque sous la conjugaison, il existe une seule involution libre sur cette dernière.³

La structure de ce papier repose sur les étapes suivantes :

1. On définit une relation d'équivalence sur les paires (X_i, τ_i) où τ_i est une \mathbb{Z}_2 -action sur X_i en utilisant les homéomorphismes \mathbb{Z}_2 -équivariants.
2. On choisit un représentant pour chaque classe d'équivalence.
3. On remarque que le problème de Borsuk-Ulam est invariant avec respect aux actions équivalentes.
4. On construit des involutions dites involutions canoniques.
5. Ensuite, on a le résultat qui affirme que toute involution libre sur une surface est équivalente à une involution canonique (proposition 2.4 de l'article).
6. On a l'énoncé du théorème principal de l'article qui est le suivant :

Théorème 2.18. [33] *Soit (S, τ) une paire où S est une surface fermée et τ une \mathbb{Z}_2 -action libre sur S . Le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour (S, τ, \mathbb{R}^2) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *S est orientable et sa caractéristique d'Euler est congru à 2 modulo 4.*
2. *S est non-orientable, sa caractéristique d'Euler est congrue à 2 modulo 4, et l'action τ est équivalente à l'une des actions canoniques (qui correspondent aux sous groupes donnés par les suites de la forme $(1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{2r+1})$ où δ_i est soit $\bar{1}$ ou $\bar{0}$).*
3. *S est non-orientable, sa caractéristique d'Euler est congru à 0 modulo 4 et τ est équivalente à l'une des actions canoniques (qui correspondent aux sous groupes donnés par les suites de la forme $(1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{2r})$ où δ_i est soit $\bar{1}$ ou $\bar{0}$).*

³Ici il veut dire qu'il y-a qu'une seule classe d'équivalence sous la conjugaison.

Preuve. Pour la preuve, l'auteur a utilisé seulement des propriétés sur la classification des surfaces fermées, leurs revêtements et leurs groupes fondamentaux. Il a transformé la question originale à celle de l'existence d'applications équivariantes. Pour les détails voir [33]. \square

Notons que nous n'avons pas reproduit la preuve détaillée du théorème de ci-dessus car il y-a une autre étude pour les surfaces qui a été faite par le même auteur (voir [35]) et qui utilise les mêmes techniques qu'on a utilisé pour développer les résultats de cette thèse. Nous allons parler de cette dernière dans la partie suivante.

Remarques 2.19. *Le théorème de ci-dessus nous permet d'avoir les remarques suivantes :*

1. *On remarque d'après 1) que le théorème de Borsuk-Ulam est toujours vérifié pour le triplet (S, τ, \mathbb{R}^2) si S est orientable et de caractéristique d'Euler congrue à 2 modulo 4.*
2. *Dans le cas où cette dernière est égale à 2, on a la version classique du théorème. Donc, ce cas est indépendant du choix de l'action.*

D'une autre part, en 2010 dans [34], Daciberg Lima Gonçalves and Jonh Hashi ont étudié les triplets (M, τ, N) , où M, N sont des surfaces fermées. Ils ont décrit tous les triplets (M, τ, N) qui vérifient la propriété du Borsuk-Ulam. L'idée de remplacer \mathbb{R}^n par un autre espace conduit à des complications que les auteurs ont pu omettre en s'inspirant des résultats du papier [33], et aussi en utilisant les groupes fondamentaux, certaines propriétés sur les revêtements et les propriétés algébriques du groupe de tresses à deux brins $B_2(S)$ d'une surface S . Les résultats obtenus dans ce dernier article sont très variés . Pour les détails on peut consulter [34].

Dans leurs études [34] et [33] , Daciberg et Guaschi ont remarqué que la validité de la propriété de Borsuk-Ulam dépend du choix de l'involution. Ils ont aussi remarqué que si le triplet (X, τ, \mathbb{R}^2) où X est une surface compacte sans bord n'a pas la propriété de Borsuk-Ulam, alors par définition il existe une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ sachant que $f(x) \neq f(\tau(x)), \forall x \in X$. Mais, il y-a une seule classe d'homotopie d'applications de X dans \mathbb{R}^2 . Alors si $g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application continue vérifiant $g(x) = g(\tau(x))$ pour un certain $x \in X$, alors g est homotope à f .

La situation est différente, si le triplet (X, τ, Y) n'a pas la propriété de Borsuk-Ulam et l'ensemble des classes d'homotopies $[X, Y]$ est de cardinal supérieur à 1. C'est à dire, il existe une application $f : X \rightarrow Y$ sachant que $f(x) \neq f(\tau(x)), \forall x \in X$ et si $g : X \rightarrow Y$ est une application continue vérifiant $g(x) = g(\tau(x))$. On ne sait pas si g est homotope à une application qui est injective sur chaque orbite de l'involution à moins qu'elle est homotope à f . Ces remarques ont conduit les auteurs à penser que peut être la formulation correcte de la question de Borsuk-Ulam est la suivante :

Étant donné un triplet (X, τ, Y) , quelles sont les classes d'homotopie des applications continues de X dans Y qui vérifient la propriété de Borsuk-Ulam ?

Ainsi, dans ce cas la propriété de Borsuk-Ulam est raffiné et devient sous la forme suivante : on dit qu'une classe d'homotopie $\beta \in [X, Y]$ satisfait la propriété de Borsuk-Ulam avec respect à τ si pour chaque application $f : X \rightarrow Y$ où $f \in \beta$, il existe un $x \in X$ sachant que $f(\tau(x)) = f(x)$.

La question de ci-dessus a été redressée dans l'article de Daciberg, Guaschi et Viničius Casteluber Laass en 2019 dans [36], où ils ont résolu ce problème dans le cas où M, N coïncident et sont des surfaces compactes sans bords avec une caractéristique d'Euler égale à zéro, à savoir le tore \mathbb{T}^2 ou la bouteille de Klein \mathbb{K}^2 .

On va passer maintenant à une étude générale du théorème de Borsuk-Ulam pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) . En se basant sur la théorie du \mathbb{Z}_2 -indice, les résultats obtenus seront utilisés pour reformuler des critères qui donnent des méthodes pour résoudre le problème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés.

2.3.2 Le théorème de Borsuk-Ulam pour les CW-complexes

Une autre étude pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) a été faite dans le papier [35] en 2009 par Daciberg L. Gonçalves, Claude Hayat et Peter Zvengrowski où X est un C.W-complexe connexe de dimension finie m et τ une involution cellulaire libre sur X . Ici X est supposé être connexe pour éviter les exemples triviaux où le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vérifié. Aussi on a la condition $\dim X \geq 2$ doit être vérifiée pour que les involutions libres existent.

Le cas où X est une variété de dimension m est aussi étudié dans ce papier, en particulier $m = 2$ pour les surfaces et $m = 3$ pour les variétés de Seifert.

Avant d'énoncer les résultats importants de ce papier, on a la proposition suivante (voir [35]) qui donne une forme plus générale du théorème 1.20 sur les versions équivalentes du théorème de Borsuk-Ulam pour la sphère S^n . Ces versions sont énoncés dans le cas des CW complexes. Notons que d'autres généralisations se trouve dans la littérature (voir par exemple [55]). Tout d'abord nous avons les hypothèses suivantes :

soient (X, τ, \mathbb{R}^n) un triplet comme ci-dessus, $N = X/\tau$ l'espace de base du revêtement à deux feuilles induit par τ , et la projection $p : X \rightarrow N$ qui est surjective. Puisque X est connexe, p est un \mathbb{Z}_2 -fibré principal non trivial pour lequel il existe une unique (sous l'homotopie) application classifiante $\gamma : N \rightarrow \mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Cette application peut être considérée comme étant induite de l'application $\Gamma : X \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} S^\infty$. Soit y un générateur de $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, alors la classe caractéristique du fibré principal est $x = \gamma^*(y) \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Puisque le fibré n'est pas trivial, alors $x \neq 0$ et $\gamma_\# : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}_2$ est surjective. Comme résultat de la classification nous avons $\text{hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx [N, \mathbb{R}P^\infty]$ et puisque le fibré est régulier alors $[N, \mathbb{R}P^\infty]$ s'identifie à $H^1(N, \mathbb{Z}_2)$.

Proposition 2.20. *Soit (X, τ) comme ci-dessus, alors nous avons les équivalences :*

1. *Le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) .*
2. *Pour chaque application $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \in \text{Im} f$.*
3. *Il n'y-a pas d'applications équivariantes $f : X \rightarrow S^{n-1}$.*
4. *Il n'existe pas d'applications $f : N \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ sachant que le tiré en arrière "pull back" de la classe non triviale $y \in H^1(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$ est la classe caractéristique du \mathbb{Z}_2 -fibré $X \rightarrow N$.*

5. L'application classifiante $\gamma : N = X/\tau \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ ne compresse pas à $\mathbb{R}P^{n-1}$.
6. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) \geq n$.
7. Si U_1, U_2, \dots, U_{n+1} est un recouvrement quelconque de X par $(n+1)$ ensembles ouverts, alors pour un certain $x \in X$ et un certain i , U_i contient une paire $\{x, \tau(x)\}$.
8. Si F_1, F_2, \dots, F_{n+1} est un recouvrement quelconque de X par $(n+1)$ ensembles fermés, alors pour un certain $x \in X$ et un certain j , F_j contient une paire $\{x, \tau(x)\}$.
9. Pour tout recouvrement B_1, B_2, \dots, B_{n+1} de X par $(n+1)$ ensembles chacun d'eux est ouvert ou fermé, alors pour un certain $x \in X$ et un certain i , B_i contient une paire $\{x, \tau(x)\}$.
10. Il n'y a pas n ensembles fermés A_1, A_2, \dots, A_n de X , tel que $A_i \cap \tau(A_i) = \emptyset$ et $X = \cup_{i=1}^n (A_i \cup \tau(A_i))$.

Preuve. Les démonstrations des équivalences entre 1), 2), 3), 7), 8), 9) ont été démontrées dans le cas de la sphère S^n dans le théorème 1.20. Le cas où X est un CW-complexe est mentionné comme exercice dans [51] (exercice 5 pp 107). Les démonstrations complètes peuvent être extraites de [78] pour X est un CW-complexe (puisque chaque CW complexe est paracompact). 6) \iff 3) vient directement de la définition de l'indice. On montre alors 4) \implies 5) \implies 3) \implies 4).

4) \implies 5)

On suppose que 4) est vérifiée et l'application classifiante γ compresse à $\mathbb{R}P^{m-1}$ i.e il existe $\delta : N \longrightarrow \mathbb{R}P^{m-1}$ sachant que $\gamma = i \circ \delta$ où $i : \mathbb{R}P^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Ainsi, $\gamma^* = \delta^* \circ i^*$ et alors

$$\begin{aligned} \gamma^*(y) &= \delta^* \circ i^*(y) \\ &= \delta^*(y) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ce qui contredit 4).

5) \implies 3) \equiv 1)

On suppose que l'application classifiante $\gamma : N \longrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ ne compresse pas à $\mathbb{R}P^{n-1}$, et qu'il existe une application équivariante $F : X \longrightarrow S^{n-1}$ i.e nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & S^{n-1} \\ \tau \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{F} & S^{n-1} \end{array}$$

et

$$F \circ \tau(x) = \sigma \circ F(x) = -F(x).$$

En utilisant l'action de \mathbb{Z}_2 sur X et en notant l'application obtenue par passage au quotient par $\delta = \bar{F}$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{F} & S^{n-1} & \longrightarrow & S^\infty \\ p \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow k \\ N & \xrightarrow{\bar{F}=\delta} & \mathbb{R}P^{n-1} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}P^\infty \end{array}$$

Par conséquent, $i \circ \delta$ est une application classifiante du fibré principal $X \rightarrow N$. Vu l'unicité de γ , on a $\gamma \sim i \circ \delta$. Ce qui montre que γ compresse à $\mathbb{R}P^{n-1}$. Ceci contredit 5).

1) \equiv 3) \implies 4)

On suppose que 1) est vérifiée i.e le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour (X, τ, \mathbb{R}^n) et que γ compresse à $\mathbb{R}P^{n-1}$ i.e il existe $\delta : N \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ sachant que $\gamma \sim i \circ \delta$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \gamma * (y) &= \delta^* \circ i^*(y) \\ &= x. \end{aligned}$$

Alors γ est l'application classifiante du fibré principal. Donc, il existe $\Gamma : X \rightarrow S^\infty$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma} & S^\infty \\ p \downarrow & & \downarrow k \\ N & \xrightarrow{\gamma} & S^\infty \end{array}$$

Puisque $\gamma \sim i \circ \delta$, alors $Im(\gamma) \subseteq \mathbb{R}P^{n-1}$ et alors $Im(\Gamma) \subseteq S^{n-1}$. Donc, il existe une \mathbb{Z}_2 -application $F : X \rightarrow S^{n-1}$ sachant que $\Gamma = i \circ F$ où $i : S^{n-1} \rightarrow S^\infty$. Ce qui contredit 3).

□

Les premiers résultats importants sont ceux qui montrent que la validité du théorème de Borsuk-Ulam dépend de $m = \dim X$ et de n . Autrement dit, nous avons un nombre réduit des cas à étudier pour résoudre le problème de Borsuk-Ulam pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) . Ainsi, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.21. [35]

- 1) Si le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour n , il est aussi vérifié pour $(n - 1)$.
- 2) Le théorème de Borsuk-Ulam est toujours vérifié pour $n = 1$ i.e pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}) .
- 3) Le théorème de Borsuk-Ulam n'est jamais vérifié pour $n = m + 1$.

Preuve. 1) On suppose que le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) . Soit $g : X \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ une application continue. Alors l'application $i \circ g$, où i est l'inclusion $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est aussi une application continue. Par le théorème de Borsuk-Ulam il existe $x \in X$ sachant que $i \circ g(x) = i \circ g(\tau(x))$. Ce qui prouve que $g(x) = g(\tau(x))$. Ainsi le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour les triplets $(X, \tau, \mathbb{R}^{n-1})$.

2) On utilise l'équivalence 1) \Leftrightarrow 3) dans la proposition 2.20.

En effet, puisque X est connexe, il n'existe pas d'applications surjectives de X dans S^0 . Mais, il est évident que les applications équivariantes doivent être surjectives. Alors, on déduit qu'il n'existe pas d'applications équivariantes de X dans S^0 . Ainsi le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}) .

3) On suppose que le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour le triplet $(X, \tau, \mathbb{R}^{m+1})$ et on utilise l'équivalence 1) \Leftrightarrow 5). Alors l'application classifiante $\gamma : N \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ ne compresse pas à $\mathbb{R}P^m$.

Mais vu la continuité de $\gamma : N \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, on peut appliquer le théorème de l'approximation cellulaire pour déduire qu'elle peut être approximée à une application cellulaire γ_1 homotope à γ . D'autre part, puisque γ_1 est une application cellulaire, alors $Im(\gamma_1)$ est aussi un CW-complexe de même dimension que N . Ainsi $Im(\gamma_1) \subset \mathbb{R}P^\infty$ et $dim(Im(\gamma_1)) = m$, alors $Im(\gamma_1) = \mathbb{R}P^m$. Ce qui montre que γ compresse à $\mathbb{R}P^m$ et on a la contradiction avec l'hypothèse. \square

D'après ces résultats, on déduit que le problème peut être formulé de la manière suivante :

Étant donné X un CW-complexe connexe de dimension finie m , trouver le plus grand n sachant que le théorème de Borsuk-Ulam est satisfait pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) . L'étude de ci-dessus montre que $1 \leq n \leq m = dim X$ et par la proposition 2.20, nous avons $n = ind_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau)$.

Les théorèmes suivants sont les théorèmes 3.1 et 3.4 dans [35], ils vont nous permettre de mettre des critères pour le calcul des bornes inférieure et supérieure du \mathbb{Z}_2 -indice.

Théorème 2.22. *Soit (X, τ) comme ci-dessus et l'application classifiante du fibré principal $X \rightarrow N$ et x la classe caractéristique. Soit $\rho : H^1(., \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(., \mathbb{Z}/2)$ l'homomorphisme usuel de coefficients et soit $i : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ l'inclusion. Alors nous avons les équivalences :*

1. *Le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vérifié pour (X, τ, \mathbb{R}^n) , $n \geq 2$.*
2. *Il existe un homomorphisme $\varphi : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \approx \mathbb{Z}$ satisfaisant $i_\# \varphi = \gamma_\# : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$.*
3. *$x \in Im(\rho) \subseteq H^1(N; \mathbb{Z}_2)$, où $\rho : H^1(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(N; \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme de coefficients usuel.*

En plus, chacune de 1, 2, 3 implique que $x^2 = 0$.

Preuve. 1) \implies 2)

On suppose que le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vérifié pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) ,

$n \geq 2$. Alors d'après l'équivalence 1) \Leftrightarrow 5) de la proposition 2.20 l'application classifiante compresse à $\mathbb{R}P^{n-1}$. En particulier pour $n = 2$, cette dernière compresse à $\mathbb{R}P^1$ i.e il existe $\delta : N \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ sachant que $\gamma = i \circ \delta$. Ainsi

$$\gamma_{\#} = i_{\#} \circ \delta_{\#} : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{\infty}).$$

Il suffit de prendre $\varphi = \delta_{\#}$.

2) \implies 3)

On suppose qu'il existe $\varphi : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \approx \mathbb{Z}$ satisfaisant

$$i_{\#} \circ \varphi = \gamma_{\#} : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{\infty}).$$

Mais nous avons la suite des homéomorphismes :

$$\text{hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}) \approx \text{hom}(H_1(N), \mathbb{Z}) \approx H^1(N, \mathbb{Z}) \approx [N, \mathbb{R}P^1]$$

alors il existe une application $\delta : N \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ sachant que $\delta_{\#} = \varphi$. D'où,

$$i_{\#} \circ \varphi = i_{\#} \circ \delta_{\#} = (i \circ \delta)_{\#} = \gamma_{\#} : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{\infty}).$$

Mais aussi on a la suite des homéomorphismes

$$\text{hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx \text{hom}(H_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(N, \mathbb{Z}_2) \approx [N, \mathbb{R}P^{\infty}]$$

à travers laquelle on déduit que $i \circ \delta \sim \gamma$. D'où, on obtient

$$(i \circ \delta)^* = \gamma^* : H^1(N, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^{\infty}, \mathbb{Z}_2).$$

Ainsi,

$$x = \gamma^*(y) = (i \circ \delta)^*(y) = \delta^* \circ i^*(y).$$

Mais $i^*(y) \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ est non nul, alors $i^*(y) \in \text{Im}(\rho : H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2))$. Soit $\sigma \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z})$ tel que $i^*(y) = \rho(\sigma)$. En utilisant la naturalité de ρ , nous obtenons

$$x = \gamma^*(y) = \rho(\sigma_1),$$

où $\sigma_1 = \delta^*(\sigma)$. Par conséquent, $x \in \text{Im}(\rho) \subseteq H^1(N, \mathbb{Z}_2)$.

3) \implies 1)

On suppose que $x \in \text{Im}(\rho) \subseteq H^1(N, \mathbb{Z}_2)$, alors il existe $\sigma \in H^1(N; \mathbb{Z})$ sachant que $x = \rho(\sigma)$. Mais nous avons les homéomorphismes

$$H^1(N, \mathbb{Z}) \approx [N, K(\mathbb{Z}, 1)] \approx [N, \mathbb{R}P^1],$$

alors il existe une application $f : N \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ telle que $f^* : H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^1(N, \mathbb{Z}_2)$ et $\sigma = f^*(\eta)$ où $\eta \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z})$ est un générateur de $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z})$. Par conséquent, en utilisant la naturalité de ρ nous obtenons

$$\begin{aligned} x &= \rho(\sigma) \\ &= \rho(f^*(\eta)) \\ &= f^* \circ \rho(\eta) \\ &= f^*(\zeta) \end{aligned}$$

où ζ est un générateur de $H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $\zeta = i^*(y)$, car $i^*(y) \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$ non nul. D'où l'on a

$$\begin{aligned} x &= \rho(\sigma) \\ &= f^*(\zeta) \\ &= f^* \circ i^*(y) \\ &= (i \circ f)^*(y) \end{aligned}$$

et alors $x = \gamma^*(y) = (i \circ f)^*(y)$.

Par conséquent, γ est homotope à $i \circ f$. Ce qui montre que γ compresse à $\mathbb{R}P^1$. Par la proposition 2.20. 5), le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vrai pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^2) . Aussi par le lemme 2.21 .1), le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vérifié pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) , $n \geq 2$.

Finalement, on remarque que d'après ci-dessus que γ compresse à $\mathbb{R}P^1$. Puisque chaque cup carré dans $\mathbb{R}P^1$ est nul pour des raisons de dimension, nous obtenons par la naturalité que $x^2 = 0$. \square

Le théorème suivant reformule le critère du \mathbb{Z}_2 -indice pour le cas $n = \dim X$. On assume que X est une variété de dimension m , alors il est de même pour N .

Théorème 2.23. [36] *Soit (M, τ) une variété connexe de dimension $m \geq 2$, avec une involution τ et la classe caractéristique $x \in H^1(M/\tau, \mathbb{Z}_2)$. Le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour (M, τ, \mathbb{R}^m) si et seulement si $x^m \neq 0$.*

Preuve. On suppose que $x^m \neq 0$ et que le théorème de Borsuk-Ulam n'est pas vérifié pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^m) . Alors par la proposition 2.20, il existe $f : N \rightarrow \mathbb{R}P^{m-1}$ sachant que la tiré en arrière de la classe non triviale $y \in H^1(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}_2)$ est la classe caractéristique du \mathbb{Z}_2 -fibré $X \rightarrow N$. Soient $i : \mathbb{R}P^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ et $y_1 = i^*(y) \in H^1(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}_2)$, alors par hypothèse $f^*(y_1) = x$. Mais on sait pour des raisons de dimensions que $y_1^m = 0$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} x^m &= (f^*(y_1))^m \\ &= f^*(y_1^m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Maintenant pour la réciproque, on suppose que le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié pour le triplet (X, τ, \mathbb{R}^n) et $x^m = 0$. L'idée est par le moyen du degré utiliser le théorème de Hopf pour montrer que γ compresse à $\mathbb{R}P^{m-1}$. Ce qui implique la contradiction.

Par ailleurs, γ compresse à $\mathbb{R}P^m$. En effet, vu que γ est une application continue entre deux CW-complexes, alors par le théorème de l'approximation cellulaire γ peut être approximé par une application cellulaire γ_1 homotope à γ . Ainsi, l'image de γ_1 est une m -cellule de $\mathbb{R}P^\infty$. D'après la structure cellulaire de ce dernier, on déduit que $Im \gamma_1 = \mathbb{R}P^m$. Ce qui montre que γ compresse à $\mathbb{R}P^m$. On prend $\gamma_1 = f$,

on a d'après ci-dessus $\gamma \sim i \circ f$. On note le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ par $y_1 = i^*(y)$ et on prend

$$f^{*,m} : H^m(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^m(N, \mathbb{Z}_2).$$

En utilisant la notion du degré, cette application prend le générateur de $H^m(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2)$ dans un multiple mod 2 du générateur de $H^m(N, \mathbb{Z}_2)$. Ainsi,

$$f^{*,m}(y_1^m) = a(f, 2) \cdot [N]$$

où $[N]$ est le générateur de $H^m(N, \mathbb{Z}_2)$. Par ailleurs, $x^m = 0$ implique que $(\gamma^*(y))^m = 0$. Donc on déduit que

$$a(f, 2)^m \cdot [N] = 0,$$

et alors $a(f, 2) = 0$. En utilisant la notation de Olum [58], on a alors

$$a(f, 2) = \text{grd} f = 0,$$

et par celle de Epstein [26], on a $\Lambda(f) = 0$. Aussi, en utilisant les notations de Olum, on a

$$\theta = f_{\#} : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^m) \simeq \mathbb{Z}_2$$

et on a le degré twisté qui est noté $\text{deg} f$. D'après Epstein ([26] Th 3.1), on a

$$\Lambda(f) \equiv a(f, 2) \pmod{2},$$

et par Olum ([58] pp 478), tous les degrés cités ci-dessus sont congrus mod 2. Donc, dans notre cas, les degrés $\Lambda(f)$ et $\text{deg} f$ sont égaux à $a(f, 2) \pmod{2}$ et alors ils sont congrus à 0 mod 2.

Idée : Montrer que le degré entier est aussi nul.

Tout d'abord, d'après l'introduction, l'application $\gamma_{\#} : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{\infty})$ est surjective, et alors l'indice $j = [\pi_1(\mathbb{R}P^m) : \gamma_{\#}(\pi_1(N))] = 1$. Suivant les étapes de Olum ([58] pp 475) ou de Epstein ([26] pp 371), il y-a trois possibilités pour $\theta = f_{\#}$:

- I) $\theta = f_{\#}$ est une vraie orientation i.e elle prend les éléments qui préservent l'orientation en des éléments qui préservent l'orientation et les éléments qui reversent l'orientation en des éléments qui reversent l'orientation.
- II) $\theta = f_{\#}$ n'est pas une vraie orientation mais ne prend pas un élément qui reverse l'orientation à l'élément identité w_0 .
- III) $\theta = f_{\#}$ prend un certain élément qui reverse l'orientation à l'élément w_0 .⁴

Si on applique ces résultats à $\theta = f_{\#}$, on a trois possibilités :

⁴Notons que cela se produira si et seulement si certain élément (et donc chaque) dans l'image de θ est l'image à la fois d'un élément qui préserve l'orientation et d'un élément qui inverse l'orientation.

- Premier cas : si θ est dans la classe I), alors par le théorème II .a) de Olum ([58] pp 464) il existe $g : N \longrightarrow \mathbb{R}P^m$ sachant que $g_{\sharp} = f_{\sharp}$ et $\deg g = 0$. En plus,

$$\deg g = 0 = \Lambda(g)$$

(voir Olum [58] pp 478). En utilisant l'isomorphisme $Hom(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(N, \mathbb{Z}_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} (i \circ g)_{\sharp} &= i_{\sharp} \circ g_{\sharp} \\ &= i_{\sharp} \circ f_{\sharp} \\ &= (i \circ f)_{\sharp}. \end{aligned}$$

Aussi en utilisant la suite d'isomorphismes

$$hom(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx hom(H_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(N, \mathbb{Z}_2) \approx [N, \mathbb{R}P^{\infty}]$$

on obtient que $i \circ g \sim i \circ f$. Par conséquent, $(i \circ g)^* \sim (i \circ f)^*$ i.e $g^* \circ i^* = f^* \circ i^*$ de $H^1(\mathbb{R}P^{\infty}, \mathbb{Z}_2)$ dans $H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Ainsi, x est aussi le classe caractéristique induite du fibré $i \circ g$ pour laquelle on sait que

$$g^*(y_1) = g^*(i^*(y)) = \gamma^*(y) = x.$$

- Deuxième cas : si θ est dans la deuxième classe, par le théorème de comparaison dans Olum ([58] th VIII), on obtient

$$\deg f = 0 = \text{grd} f \text{ mod } 2.$$

Et aussi par le même théorème on a $\deg f = |\Lambda(f)|$ implique que

$$\deg f = \Lambda(f) = 0.$$

Alors, dans ce cas, on prend $f = g$ et on raisonne comme le premier cas.

- Troisième cas : si θ est dans la troisième classe, à travers l'article de Epstein (remarque qui suit le diagramme (1.3)), le revêtement $\bar{N} \longrightarrow N$ a j -feuilles (N est le co-domaine qui correspond à $\mathbb{R}P^m$). Puisque l'indice $j = 1$ dans notre cas, alors Il y-a une seule feuille et alors $\bar{N} = N$ et $\bar{f} = f$. D'où,

$$a(f, 2) = a(\bar{f}, 2) = 0.$$

Puisque $a(\bar{f}, 2) = 0$ et le revêtement $\bar{N} \longrightarrow \bar{N}$ est l'identité, alors on ait dans la troisième classe et par suite on a

$$a(f, 2) = a(\bar{f}, 2) = \Lambda(f) = 0.$$

Pour identifier les notations de tous les cas de ci-dessus, On prend $g = f$ pour le deuxième et le troisième. Par conséquent, pour les trois cas précédents, il existe une application $g : N \longrightarrow \mathbb{R}P^m$ sachant que $\Lambda(g) = 0$ et $g^*(y_1) = x$. Par le théorème de Hopf (voir [26] th 4.1), l'application g peut être déformée par homotopie à une application $h : N \longrightarrow \mathbb{R}P^m$ sachant que le degré géométrique

de h et le degré absolu de h sont égaux, aussi le degré absolu de h est égal au degré absolu de g qui est nul. Ainsi,

$$\deg h = \Lambda(h) = \Lambda(g) = 0.$$

Par conséquent, puisque h a un degré géométrique nul, alors elle n'est pas surjective (th 3.4 [58]). Puisque $\mathbb{R}P^m$ avec sa structure usuelle possède seulement une seule m -cellule, alors h peut être déformée à une application qui se factorise à travers $\mathbb{R}P^{m-1}$. Finalement, puisque

$$\begin{aligned} (i \circ h)^*(y) &= (i \circ g)^*(y) \\ &= g^*(y_1) \\ &= x \\ &= \gamma^*(y), \end{aligned}$$

on remarque que $i \circ h \sim \gamma$.

□

2.3.3 Applications en dimensions 2 et 3

Les résultats de la section précédente ont été employés pour résoudre le problème de Borsuk-Ulam pour les triplets (X, τ, \mathbb{R}^n) dans le cas des surfaces et pour quelques classes de variétés de dimension 3. En effet :

- I) Pour les surfaces, on a d'autres méthodes que celles utilisées dans [33]. On prend alors $m = 2$ et M une surface fermée connexe. En plus au théorème 2.18, nous avons d'autres méthodes pour étudier le théorème de Borsuk-Ulam sur les surfaces. Nous avons alors les résultats suivants :

Proposition 2.24. [35] *Soient M et $N = M/\tau$ des surfaces fermées et x la classe caractéristique (ayant le même sens qu'au début), alors nous avons les équivalences :*

- a) *Le théorème de Borsuk-Ulam est vrai pour (X, τ, \mathbb{R}^2) .*
- b) $x^2 \neq 0 \in H^2(N, \mathbb{Z}_2)$.
- c) $x \notin \text{Im}(\rho : H^1(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(N, \mathbb{Z}_2))$.

Preuve. (a) \Leftrightarrow (b) vient du théorème 2.23.

(c) \Leftrightarrow (a) vient de la proposition 2.22.

□

Un autre moyen pour étudier le théorème de Borsuk-Ulam pour les surfaces fermées est donné par la proposition 4.2 dans [35]. Cette proposition a été démontrée en utilisant les informations sur l'anneau de cohomologie des surfaces fermées, l'orientabilité, et les théorèmes de ci-dessus.

II) Pour les variétés de dimension 3, en utilisant les résultats de la section précédente et en particulier les théorèmes 2.22 et 2.23 plusieurs classes de trois variétés ont été traités, à savoir : pour les formes d'espaces sphériques d'homotopie en 2011 [37]; pour les doubles revêtements des variétés de Seifert en 2013 [4]; pour les variétés Sol^3 en 2014 [1]; pour les semi-fibrés en tores en 2016 [5]; et autres que nous n'avons pas cités dans cette thèse.

Quelques aspects sur les 3-variétés

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Introduction | 51 |
| 3.2 | Une introduction sur les 3-variétés | 51 |
| 3.2.1 | Les variétés en général | 51 |
| 3.2.2 | Quelques aspects sur les 3-variétés | 53 |
| 3.3 | Une introduction sur les noeuds | 56 |
| 3.3.1 | Enlacement des noeuds | 59 |
| 3.3.2 | Matrice d'enlacement | 63 |
| 3.4 | Chirurgies de Dehn et le théorème de Lickorish- Wallace | 64 |
| 3.4.1 | Chirurgies de Dehn sur les noeuds | 64 |
| 3.4.2 | Chirurgie sur un entrelacs d'une 3-variété M | 66 |
| 3.4.3 | Le théorème de Lickorish-Wallace. | 68 |
| 3.5 | Chirurgie et les 4-variétés | 69 |
| 3.5.1 | Homologie de $M_{\mathcal{L}}$ et de $W_{\mathcal{L}}$. | 71 |
| 3.6 | Les formes d'enlacement et les matrices d'enlacement. | 73 |
| 3.6.1 | Enlacement rationnel | 73 |
| 3.6.2 | Formes d'enlacement d'une 3-variété | 74 |
| 3.6.3 | Versions homologique et cohomologique de la forme d'enlacement | 76 |
| 3.6.4 | Forme d'enlacement d'une matrice | 77 |
| 3.6.5 | Lien entre la matrice d'enlacement et la forme d'enlacement d'une 3-variété | 78 |

3.1 Introduction

Ce chapitre est inspiré d'une théorie générale sur les variétés de dimension 3. On va en extraire de cette théorie, les notions et les résultats qui entrent dans le contexte de cette thèse.

Ce qui est évident est d'aborder le sujet sur les variétés en général, puis passer aux trois variétés. Évidemment, l'étude qu'on va faire ne va pas contenir toutes les propriétés de ces dernières car elles sont nombreuses et variées.

Parmi les notions que nous allons considérer dans ce chapitre, c'est les chirurgies de Dehn, opérations qu'on peut effectuer sur les 3-variétés pour obtenir d'autres trois variétés. En particulier, dans 3.4.3 nous allons énoncer le théorème de Lickorish 1962 Wallace 1960 sur les 3-variétés fermées connexes et orientables. La chirurgie se fait sur les noeuds, alors la première chose que nous allons aborder dans 3.3 est une petite introduction sur ces derniers qui contient une étude sur l'enlacement des noeuds qui va nous aider à définir et à comprendre la forme d'enlacement des 3-variétés. Cette notion va être abordée dans la section 3.6, elle constitue un moyen algébrique très efficace qui va nous permettre de transformer un problème d'intersection en homologie à un simple problème de calcul sur les matrices. En plus, vu qu'il existe une relation étroite entre les 3-variétés et les 4-variétés. Dans la section 3.5, nous allons décrire cette relation en termes de suites exactes en homologie et en cohomologie. Ces dernières constituent un des outils fondamentaux pour le développement des preuves dans la partie principale de cette thèse.

Les 3-variétés présentent une classe importante d'espaces topologiques et l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour ces dernières enrichie les résultats obtenus en ce sujet jusqu'à nos jours. Plus précisément, étudier ce théorème pour les triplets (M, τ, \mathbb{R}^n) où M est une 3-variété est une perspective logique du travail qui a été fait par Daciberg Lima Gonçalves pour les triplets (S, τ, \mathbb{R}^n) , où S est une surface fermée voir [33].

3.2 Une introduction sur les 3-variétés

3.2.1 Les variétés en général

Un espace topologique de Hausdorff M à base dénombrable d'ouverts est appelé une **n-variété topologique** ou variété de dimension n si chaque point de M admet un voisinage qui est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Autrement dit, une variété est un espace localement euclidien.

- (a) La dimension n d'une variété est un invariant topologique.
- (b) Les exemples les plus fréquents des variétés sont le cercle S^1 qui est une 1-variété, les surfaces qui sont des 2-variétés comme la sphère S^2 et le tore T^2 . En dimension 3, on peut citer plusieurs exemples, mais une des classes importantes des variétés de dimension 3 est la classe des variétés de Seifert. Ces dernières ont été étudiées par Herbert Seifert en 1933.

(c) Si on désigne par \mathbb{H}^n le demi espace de \mathbb{R}^n définie par :

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n \geq 0\}$$

Une n -variété topologique à **bord** est un espace topologique non vide, séparé, à base dénombrable d'ouverts, dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{H}^n .

(d) On note toute variété de dimension n par M^n .

(e) Si on a une variété à bord de dimension n , on note par $\partial M^n = M^n \setminus \text{int}M^n$, et on dit que c'est le bord de la variété M^n .

Lorsque $\partial M^n = \emptyset$, on dit que la variété M^n est sans bord. Si M est une n -variété à bord, alors son bord ∂M^n est une variété sans bord de dimension $(n - 1)$.

(f) Une variété est dite **fermée** si elle est compacte et son bord est vide.

(g) Une **carte** de M est la donnée d'un ouvert U de M et d'un homéomorphisme ϕ de U sur un ouvert de \mathbb{H}^n ou de \mathbb{R}^n . L'ouvert U s'appelle le domaine de la carte et parfois on l'appelle une carte.

Deux cartes (U, ϕ) , (V, ψ) d'une variété M^n sont dites compatibles si $U \cap V \neq \emptyset$ et si l'application $\phi \circ \psi^{-1}$ (dite fonction de transition) est un homéomorphisme entre les ouverts $\psi(U \cap V)$ et $\phi(U \cap V)$.

Une famille de cartes $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)_i\}$ dont les domaines recouvrent M et sont toutes compatibles s'appelle un **atlas** de M .

Un atlas d'une variété topologique M est dit **maximal** ou complet si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle même à l'atlas.

(h) Une **structure différentielle** d'une variété M est un atlas maximal lisse \mathcal{U} i.e pour chaque deux ouverts U, V de \mathcal{U} , la fonction de transition définie ci-dessus est un difféomorphisme (une application bijective de classe C^∞ de jacobien non nul et l'application inverse est aussi C^∞).

Une variété M muni d'une structure différentielle est dite une **variété lisse**.

(i) Une structure **linéaire par morceau** ou simplement **PL** est un atlas maximal \mathcal{U} tel que pour chaque deux ouverts U, V de \mathcal{U} , la fonction de transition est linéaire par morceau.

Une variété M muni d'une structure linéaire par morceaux est dite une variété linéaire par morceau ou une **variété PL**.

Ainsi, on a trois catégories de variétés :

1. la catégorie **Top** des variétés topologiques et des applications continues entre variétés topologiques ;
2. la catégorie **PL** des variétés PL et des applications PL entre variétés PL ;
3. la catégorie **Diff** des variétés différentiables et des applications différentiables entre variétés différentiables.

Une variété topologique à bord M de dimension n est **triangulable** s'il existe une triangulation $\varphi : |K| \rightarrow M$ telle que K soit un complexe simplicial localement fini.

Les variétés se divisent en deux classes **orientables** et **non orientables**. L'orientabilité est défini de manières différentes (au moyen de l'homologie, du jacobien des fonctions de transition et de l'orientation des simplexes de dimension maximale respectivement) suivant que la variété est topologique, différentiable ou triangulable. Mais il existe un lien entre toutes les définitions, c'est pour cette raison on parle uniquement de l'orientation des variétés topologiques. Cette dernière dépend du choix d'un anneau A comme anneau des coefficients de l'homologie, ce qui donne lieu à la notion de A -orientabilité. Lorsque A est intègre, une variété fermée M de dimension n est A -orientable si et seulement si $H_n(M; A)$ est isomorphe à A et qu'à chaque A -orientation de M , il correspond un générateur noté $[M]$ de $H_n(M; A)$ appelé classe fondamentale.

1. Une variété M est dite **orientable** si elle est \mathbb{Z} -orientable. Dans ce cas, M a exactement deux \mathbb{Z} -orientations distinctes.
2. Une variété M avec le choix d'une orientation est dite **orientée**.
3. Si M est orientable, alors elle est A -orientable pour tout anneau A .
4. Toute variété M est \mathbb{Z}_2 -orientable par une unique \mathbb{Z}_2 -orientation.

3.2.2 Quelques aspects sur les 3-variétés

Les variétés de dimension 3 présentent une des classes importantes de variétés de basse dimension à cause de leurs spécificités topologique, géométrique et algébrique qu'on a pas pour les variétés de dimensions supérieures.

En plus, leur étude est très intéressante à cause de leur relation avec plusieurs domaines de mathématiques et d'autres sciences comme la physique.

Plusieurs résultats sur les variétés de dimension 3 ont été obtenus, parmi lesquels le théorème de Moise datant de 1952 (voir [54]) (comme le théorème de Rado en dimension 2), montrant que toute variété de dimension 3 est triangulable et que toute triangulation fournit une variété de dimension 3 combinatoire.

Un autre résultat important est que toute variété PL de dimension 3 admet une et une seule structure différentiable à difféomorphisme près. Et que les concepts des variétés topologiques, lisses et PL en dimension 3 coïncident. Alors le problème de classification "qui n'est pas encore résolu" des 3-variétés fermées est le même dans les trois catégories.

Malgré qu'on ne peut pas jusqu'à maintenant classifier les 3-variétés, il y-a comme même des classes importantes comme les 3-sphères d'homologie, les variétés de Seifert et les compléments de nœuds ou d'entrelacs.

Pour les 3-variétés compactes orientables, on trouve dans la littérature des résultats très connus comme le théorème de décomposition de Milnor qui affirme que si ces dernières diffèrent de S^3 , alors elles se décomposent de manière unique en somme connexe de variétés indécomposables i.e des variétés qui ne sont pas homéomorphes à la sphère.

Par ailleurs, on n'oublie pas de citer quelques faits fondamentaux sur les variétés de dimension 3, comme les scindements de Heegaard et par suite le théorème de Reidemester Singer qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux scindements de Heegaard présentent la même 3-variété, et les chirurgies de Dehn et par suite le théorème de Kirby 1977 donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux entrelacs de S^3 présentent la même 3-variété. Le théorème de Lickorish 1962, Wallace 1960 montre que toute 3-variété compacte, connexe, fermée et orientable peut être obtenue de la sphère S^3 par chirurgie entière sur un entrelacs parallélisé. Ces résultats nous permettent d'en déduire les différentes présentations combinatoires des 3-variétés à partir lesquelles plusieurs résultats ont été prouvés pour ces dernières.

A cause des techniques particulières qu'on peut faire sur les 3-variétés et à cause des propriétés qu'elles possèdent et qu'on ne trouve pas en dimensions supérieures, les 3-variétés ont des relations intéressantes avec les multiples domaines comme la topologie géométrique, la théorie des nœuds, la physique etc.

Les exemples classiques des 3-variétés sont la 3-sphère S^3 , le tore T^3 , l'espace réel projectif $\mathbb{R}P^3$ et la sphère d'homologie de Poincaré. En plus, on connaît d'après ci-dessus quelques classes importantes de ces dernières. Une classe très connue est celle des espaces lenticulaires. On va l'étudier dans ci-dessous.

Les espaces lenticulaires

Les espaces lenticulaires sont des exemples classiques des 3-variétés fermées orientables. Ils jouent un rôle important dans l'histoire de la topologie algébrique. Leur définition classique était introduite en premier lieu par Heinrich Tietze en 1908 et leur nom "espace lenticulaire" était introduit par Threlfall et Seifert en 1933.

On trouve dans la littérature plusieurs descriptions des espaces lenticulaires (voir par exemple [61]), une de ces descriptions est de les considérer comme étant le quotient de la 3-boule où la demi sphère supérieure est identifiée avec la demi sphère inférieure par une rotation d'angle $2\pi q/p$ à travers l'axe des z suivi par une réflexion dans le plan $(x - y)$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 2$ et un certain $q \in \mathbb{Z}$ relativement premier avec p .

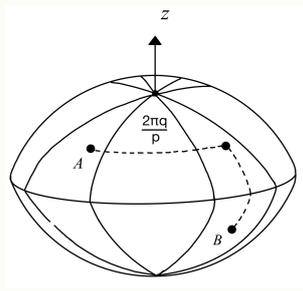


FIGURE 3.1 : Le domaine fondamental de $L(p, q)$.

La trois boule utilisée dans cette définition est souvent dessinée sous la forme d'une lentille (voir fig 3.2), d'où vient le nom lenticulaire. Dans la prochaine description, on va montrer qu'elle représente le domaine fondamental d'une \mathbb{Z}/p -action sur la sphère S^3 .

Définition 3.1. Soient p, q deux entiers premiers entre eux sachant que $p \geq 2$ et $1 < q < p$. On considère la transformation

$$T : \quad \mathbb{Z}/p \times S^3 \quad \longrightarrow \quad S^3 \\ ([K], (z_1, z_2)) \quad \longmapsto \quad (z_1 e^{\frac{2\pi i k}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i k q}{p}})$$

T engendre une action du groupe \mathbb{Z}/p sur S^3 . Cette action est libre et finie, alors la projection $\pi : S^3 \longrightarrow S^3/T$ est un revêtement avec p -feuilletés.

La base de ce revêtement est appelée un espace lenticulaire et est notée par $L(p, q)$.

Puisque la projection $p : S^3 \longrightarrow L(p, q)$ est un revêtement, alors les espaces lenticulaires sont des variétés compactes (fermées) comme l'est la sphère S^3 .

Les exemples classiques des espaces lenticulaires sont $L(1, q) \approx S^3$ pour tout entier q , et $L(2, 1) \approx \mathbb{R}P^3$.

Les espaces lenticulaires définis ci-dessus représentent une classe importante de 3-variétés à cause de leur spécificité topologique, on ne parvient pas à les distinguer par les invariants usuels. Leur groupe fondamental ne dépend que de p ($\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), en plus en dimensions supérieures $\pi_i(L(p, q)) = \pi_i(S^3)$ pour $i > 1$. Ils sont des exemples concrets d'existence de variétés de dimension 3 fermées orientables qui ont le même groupe fondamental mais qui ne sont pas homotopiquement équivalentes. Un exemple concret pour cela sont les espaces lenticulaires $L(5, 2)$ et $L(5, 1)$ (voir le théorème 10.15 pp 365 dans [13]). Ainsi la conjecture de Poincaré est réfuté à cause de ces exemples.

La question de classification des espaces lenticulaires est à l'origine de plusieurs développements en topologie algébrique. Elle a été complètement résolu par Brody en 1960 qui a montré que deux espaces lenticulaires $L(p, q), L(p, q')$ sont homéomorphes si et seulement si $q = \pm q'$ ou $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$ (voir [14]), et Whithead en 1941 qui a montré qu'ils ont le même type d'homotopie si et seulement si $\pm qq'$ est un résidu quadrique mod p i.e $\pm qq' \equiv m^2 \pmod{p}$, pour un certain m .

Plusieurs autres propriétés pour les espaces lenticulaires ont été élaborées. C'est pour cette raison, ils constituent une classe importante de 3-variétés et seront considérés comme l'un des exemples fondamentaux étudiés dans le chapitre suivant de cette thèse.

Les 3-sphères d'homologie

Soit A un anneau commutatif unitaire. Une A -sphère d'homologie (voir [63]) est une 3-variété M fermée, orientée sachant que $H_*(M, A) = H_*(S^3, A)$.

Usuellement, les \mathbb{Z} -sphères d'homologie sont référées à être les sphères d'homologie entière et les \mathbb{Q} -sphères d'homologie sont les sphères d'homologie rationnelle.

Les sphères d'homologie existent et sont nombreuses, l'exemple classique est la 3-sphère S^3 .

Une 3-sphère d'homologie qui est simplement connexe est dite la 3-sphère d'homotopie et elle est toujours homotopiquement équivalente à S^3 . C'est Grigori Perelman qui a démontré ce résultat qui est référé dans la littérature par la conjecture de

Poincaré.

Il y-a des classes très connues des 3-sphères d'homologie comme la 3-sphère d'homologie de Poincaré, les 3-sphères d'homologie de Brieskon et les sphères d'homologie fibrées de Seifert. Chacune de ces classes a ses propres particularités, c'est pour cette raison, les sphères d'homologie sont parmi les espaces topologiques largement étudiés.

Les variétés de Seifert

H. Seifert a étudié en 1933 une classe importante de variétés de dimension 3 dites les variétés de Seifert (voir par exemple [43]). Le modèle de base de ce type de variétés est construit ainsi :

soit D^2 le disque unité de coordonnées polaires (r, θ) , $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ et soient p, q des entiers premiers entre eux tels que $0 \leq q < p$; le quotient de $D^2 \times I$ dans lequel on a identifié le point $(r, \theta, 1)$ avec $(r, \theta + 2\pi q/p, 0)$ est un tore plein $V_{(p,q)}$. Les images dans le quotient des segments $x \times I, x \in D^2$ se recollent en des cercles appelés fibres qui forment une partition du tore plein; de plus, l'image du segment $\{0\} \times I$ intersecte le disque $D^2 \times \{0\}$ en un seul point, alors que les autres fibres l'intersectent en p points.

Deux cas se présentent :

- Si $p = 1$ et donc $q = 0$, les fibres de $V_{(p,q)}$ sont dites régulières.
- Si $p > 1$ l'âme du tore plein s'appelle la fibre exceptionnelle et les autres sont dites régulières.

Définition 3.2. *Une variété fibrée de Seifert ou plus simplement une variété de Seifert est une 3-variété M munie d'une partition en cercles appelées fibres; on demande de plus que toute fibre admette un voisinage fermé N formé d'une union de fibres tel qu'il existe des entiers p, q comme ci-dessus et un homéomorphisme $h : V_{(p,q)} \rightarrow N$ préservant les fibres. Un tel voisinage s'appelle un voisinage fibré. Une fibre de M est exceptionnelle "respectivement régulière" si elle est contenue dans un voisinage fibré et est l'image par l'homéomorphisme h d'une fibre exceptionnelle "respectivement régulière" du tore $V_{(p,q)}$. Il est facile de voir que cette propriété ne dépend pas du voisinage choisi.*

Exemple 3.3. *Une des descriptions d'un espace lenticulaire $L(p, q)$ est qu'il peut être décomposé en deux tores pleins (voir par exemple [61]). Ce qui montre que tout lenticulaire est une variété de Seifert avec deux fibres exceptionnelles.*

Un homéomorphisme entre deux variétés de Seifert est dit fibré s'il respecte les fibrations de ces deux variétés. H. Seifert a complètement classifié en 1933, par des méthodes élémentaires, ces variétés à homéomorphisme fibré près.

3.3 Une introduction sur les noeuds

Quelques généralités

Dans cette sous section e.g [61], on introduit quelques notions sur les noeuds à cause de l'interaction de leur théorie avec celle des 3-variétés. Une technique sur les noeuds

remontant à Dehn et maintenant connue sous le nom de chirurgie est devenue un outil puissant dans la construction des trois variétés et dans les preuves de certains théorèmes sur ces dernières. Par ailleurs, le nombre d'enlacement qu'on va définir pour les noeuds est une bonne introduction pour définir les formes d'enlacements des 3-variétés.

- 1) Un **noeud** K est un plongement du cercle S^1 dans \mathbb{R}^3 ou parfois on préfère S^3 comme étant un espace compact équivalent à $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.
Plus généralement, un **entrelacs** \mathcal{L} est un plongement lisse d'une réunion disjointe de cercles dans S^3 . Un entrelacs à une composante est un noeud.
Les définitions de ci-dessus restent valables si on remplace la sphère S^3 par une 3-variété fermée orientable M .
- 2) Deux noeuds K, K' dans une variété M sont **équivalents** s'il existe un homéomorphisme h sachant que $h(K) = K'$.
De même, dans le cas de deux entrelacs K, K' on fixe un ordre pour les composants, et on impose la condition que h respecte l'ordre.
- 3) Un **noeud trivial**, parfois on l'appelle le noeud **non noué** est le noeud équivalent au cercle. Le noeud le plus simple qui est vraiment **noué** est le noeud du trèfle.

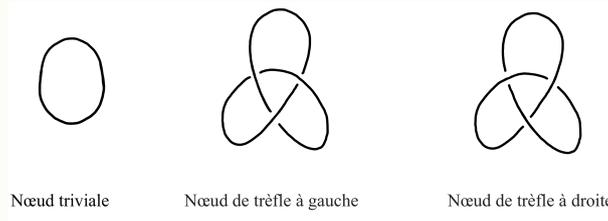


FIGURE 3.2 : Exemples de noeuds

- 4) Un **tore solide** (ou parfois on dit plein) est un espace homéomorphe à $D^2 \times S^1$ ou $S^1 \times D^2$, on le note par V . L'homéomorphisme spécifié

$$h : S^1 \times D^2 \longrightarrow V$$

est appelé le **framing**.¹

- 5) Un noeud est **lisse** ou **régulier** s'il peut être épaissi, i.e considérer son voisinage tubulaire $T(K)$ qui est le plongement lisse du tore plein $S^1 \times D^2$. Ici, l'adjectif lisse est souvent omis car les plongements différentiables sont toujours lisses.
Chaque entrelacs \mathcal{L} peut être épaissi en prenant son voisinage tubulaire $T(\mathcal{L})$, qui est la collection de tores solides disjoints $S^1 \times D^2$, un tel voisinage pour chaque composante de l'entrelacs dont le coeur $S^1 \times \{0\}$ forme un noeud de \mathcal{L} .

¹Cette terminologie est aussi utilisée pour décrire un certain nombre associé à chaque noeud, qu'on va définir ultérieurement.

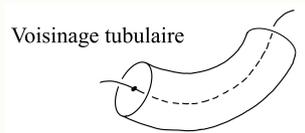


FIGURE 3.3 : Une partie d'un noeud épaissi.

6) Une simple courbe fermée m dans ∂V telle que $[m] \neq (0, 0)$ sur ∂V^2 satisfaisant l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. m est homologiquement trivial sur V .
2. m est homotopiquement trivial sur V .
3. m borne un disque sur V .
4. Pour un certain framing $h : S^1 \times D^2 \rightarrow V$, $m = h(\{1\} \times \partial D^2)$.

est appelée un **méridien** du tore solide V .

7) Une **longitude** d'un tore solide V est une simple courbe fermée dans ∂V de la forme $h(S^1 \times \{1\})$ pour un certain framing h de V .

Si $l \subset \partial V$ est une simple courbe fermée, alors on a les équivalences suivantes :

1. l est une longitude du tore solide V .
2. l présente un générateur de $H_1(V) \simeq \pi_1(V) \simeq \mathbb{Z}$.
3. l intersecte un certain méridien de V transversalement en un seul point.

8) Un **méridien canonique**³ d'un noeud K dans S^3 est courbe fermée simple sur $\partial T(K) = \partial(\overline{S^3 \setminus T(K)})$ (où $T(K)$ est un voisinage tubulaire de K) représentant un générateur de $H_1(\overline{S^3 \setminus T(K)}) \simeq \mathbb{Z}$.⁴

On peut montrer qu'à isotopie près, il existe une seule courbe fermée simple $l \subset \partial(\overline{S^3 \setminus T(K)})$ telle que m, l engendrent $H_1(\partial(\overline{S^3 \setminus T(K)})) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et telle que $[l] = 0$ dans $H_1(\overline{S^3 \setminus T(K)})$. l est appelée **la longitude canonique** de K . Si le noeud K se trouve dans une variété quelconque, la propriété précédente n'est plus vérifiée en général.

9) Un noeud **parallélisé** K est un noeud qui est muni d'une classe d'homotopie de champs de vecteurs transversaux au noeud "c'est une famille lisse de vecteurs non nuls perpendiculaires au noeud". D'une autre manière, une parallélisation d'un noeud K est déterminée par une courbe fermée J se trouvant sur le bord d'un voisinage tubulaire $T(K)$ de telle sorte que K, J constituent le bord d'un ruban qui est l'image de $S^1 \times I$ par l'homéomorphisme h de ci-dessus. Nous

²Ici, $H_1(\partial V) \simeq \pi_1(\partial V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

³Le terme canonique est juste pour faire la différence entre le méridien ordinaire du tore solide.

⁴Bien que l'homologie de $H_1(\overline{S^3 \setminus T(K)})$ est celle du tore solide, mais en général et topologiquement $\overline{S^3 \setminus T(K)}$ n'est pas nécessairement un tore solide. Ici, on assume seulement que $T(K)$ est bien plongé dans S^3 de telle manière que $\overline{S^3 \setminus T(K)}$ soit une variété à bord, de bord $\partial T(K)$.

Dans le cas où ce complémentaire est encore un tore solide, on va voir dans la partie suivante sur la chirurgie que les variétés obtenus sont des lenticulaires.

allons voir que le choix de la courbe fermée J n'est autre que le choix d'une longueur l du noeud K .

Une parallélisation d'un entrelacs \mathcal{L} est le choix d'une longueur (classe d'isotopie)⁵ pour chaque composante de l'entrelacs.

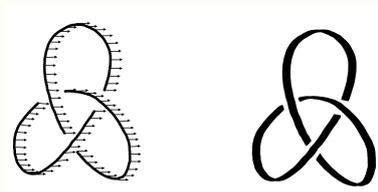


FIGURE 3.4 : Un noeud parallélisé.

Remarque 3.4. Définir le méridien et la longueur canoniques en utilisant les méthodes de ci-dessus est généralement délicat. On va donner dans la section suivante une méthode plus simple qui se base sur le nombre d'enlacement.

3.3.1 Enlacement des noeuds

Le nombre d'enlacement est un invariant numérique qui décrit l'enlacement entre deux noeuds d'une 3-variété.

Un **diagramme** d'un entrelacs \mathcal{L} est une projection générique de \mathcal{L} dans $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{\infty\}$ avec les informations spécifiant qui est le brin qui se croise au dessous de chaque point double.

Soient J, K deux noeuds disjoints orientés de S^3 ou de \mathbb{R}^3 (ou sont deux composantes d'un entrelacs orienté dans S^3). On assume que les noeuds J, K sont parallélisés et on veut définir leur nombre d'enlacement $lk(J, K)$. il y-a plusieurs méthodes équivalentes pour définir ce nombre :

1. **Première méthode :**

Soit $[J]$ une classe de cohomologie de $H_1(S^3 \setminus K)$ porté par J . Puisque

$$H_2(S^3, S^3 \setminus K, \mathbb{Z}) \simeq H_2(T(K), \partial T(K), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

(où $T(K) \simeq S^1 \times D^2$ est un voisinage tubulaire de K), la longue suite exacte de l'homologie montre que $H_1(S^3 \setminus K, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par le méridien γ de K (un cercle γ dans $S^3 \setminus K$ bordant un disque D dans S^3 qui rencontre K exactement une fois transversalement). On fixe une orientation de γ par la loi de la main droite, alors le point d'intersection de D avec K a un signe positif.

Définition 3.5. Pour J, K, γ comme ci-dessus, on écrit

$$[J] = n\gamma \in H_1(S^3 \setminus K, \mathbb{Z})$$

pour un unique $n \in \mathbb{Z}$. On définit le **nombre d'enlacement**

$$lk_1(J, K) = n.$$

⁵une homotopie $h_t : X \rightarrow X$ est une isotopie ambiante si $h_0 = Id$ et h_t est un homéomorphisme

Cette définition peut être appliquée à n'importe quelle paire de nœuds disjoints d'homologie nulle dans une 3-variété en remplaçant $H_1(S^3 \setminus K, \mathbb{Z})$ avec le $\text{Ker}(H_1(M \setminus K) \rightarrow H_1(K)) \simeq \mathbb{Z}$.

2. **Deuxième méthode :**

Soient J, K deux nœuds disjoints de S^3 , il existe une surface Σ dite surface de Seifert (voir [61]) bordée par K (l'existence de Σ est garantie par le fait que $[K] = 0$ dans $H_1(S^3, \mathbb{Z}) = 0$). Le nombre d'enlacement $lk_2(J, K) = n$ est le nombre d'intersection algébrique de J et Σ .

3. **Troisième méthode :**

On considère la projection régulière de $J \cup K$. En chaque point auquel J croise sous K , on calcul $+1$ et -1 comme l'indique la figure suivante :

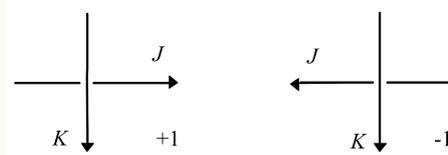


FIGURE 3.5 : Calcul de l'enlacement

La somme sur tous les croisements de J sous K est appelée $lk_3(J, K)$. C'est le nombre de sous croisements positives moins le nombre de sous croisements négatives.

4. **Quatrième méthode :**

J est un lacet de $S^3 \setminus K$, alors il représente un élément de $\pi_1(S^3 \setminus K)$ avec un point de base convenable. Ce groupe fondamentale est abélianisé à \mathbb{Z} et le lacet J est alors porté à un entier appelé $lk_4(J, K)$.

5. **Cinquième méthode :**

J, K sont deux 1-cycles de S^3 . Puisque $H_1(S^3) = 0$, on choisit une 2-chaîne $C \in C_2(S^3, \mathbb{Z})$ (qu'on peut prendre lisse) sachant que $J = \partial C$. L'intersection $C.K$ est un 0-cycle bien défini sous l'homologie. Puisque $H_0(S^3) \simeq \mathbb{Z}$, alors $C.K$ correspond à un entier qu'on appelle $lk_5(J, K)$.

6. **Sixième méthode :**

On regarde $J, K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou S^3) comme des applications. En notation vectorielle, on définit $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ par la formule :

$$f(u, v) = \frac{K(u) - J(v)}{|K(u) - J(v)|}$$

Si on oriente $S^1 \times S^1$ et S^2 , alors f a un degré bien défini, soit

$$lk_6(J, K) = \text{deg} f.$$

7. Septième méthode :

Soit $X = S^3 \setminus K$, et soient $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement cyclique infini de X , et τ l'élément qui engendre la groupe $Aut(\tilde{X})$. On considère J un lacet dans X basé en $x \in ImJ$. On relève J à un chemin \tilde{J} de \tilde{X} commençant à n'importe quel point $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$ et on appelle son point terminal $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$. Il existe un unique entier m sachant que

$$\tau^m(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1.$$

On définit

$$lk_7(J, K) = m.$$

Ils existent d'autres définitions du nombre d'enlacement qu'on a pas énoncé. Mais l'important est que les méthodes du calcul de ce dernier sont variées. Tous les nombres d'enlacements définies ci-dessus sont égaux à un signe près.

Lemme 3.6. *L'enlacement de deux nœuds ou de deux cycles est bien défini.*

Preuve. On considère la cinquième définition puisque c'est la plus utilisée dans notre cas et on montre qu'elle est bien définie.

Soit C' une autre 2-chaîne lisse transverse telle que $\partial C' = J$, alors $C' - C$ est une 2-chaîne vérifiant $\partial(C' - C) = 0$ et alors c'est un 2-cycle dans S^3 . Puisque $H_2(S^3) = 0$, on déduit qu'elle est un cycle homologue à 0. Par ailleurs, l'intersection algébrique des cycles présente un produit en homologie (ou un cup produit en cohomologie), en plus puisque le produit

$$H_2(S^3) \times H_1(S^3) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est nul car $H_2(S^3) = 0$, alors

$$\begin{aligned} C'.K - C.K &= (C' - C).K \\ &= [(C' - C)].[K] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 3.7. [61] $lk_i(J, K) = \pm lk_j(J, K)$ pour $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Preuve. Voir [61] pp 134. □

Définition 3.8. *Le nombre d'enlacement $lk(J, K)$ est l'un des nombres $lk_i(J, K)$ définis ci dessus.*

Remarque 3.9. *L'ambiguïté des signes est sans importance. Elle disparaît si on choisit une convention d'orientation comme dans la troisième définition.*

Exemple 3.10. *Dans la figure suivante :*

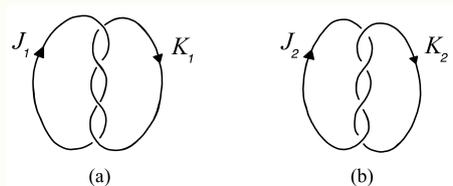


FIGURE 3.6 : Exemple de calcul de l'enlacement entre deux nœuds

- (a) $lk(J_1, K_1) = +2$.
- (b) $lk(J_2, K_2) = -2$.

Quelques propriétés du nombre d'enlacement

Le nombre d'enlacement vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.11. *Le nombre d'enlacement est symétrique i.e*

$$lk(J, K) = lk(K, J).$$

Preuve. Si on utilise la troisième méthode et on considère l'autre coté de \mathbb{R}^2 , on va voir que chaque sous croisement de J est un sous croisement de K , et les signes sont préservés. \square

Proposition 3.12. *S'il existent des homotopies $J_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $K_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que ImJ_t est disjointe de ImK_t pour chaque $0 \leq t \leq 1$, alors*

$$lk(J_0, K_0) = lk(J_1, K_1).$$

Preuve. En utilisant la sixième méthode, on définit les applications

$$f_t(u, v) = \frac{K_t(u, v) - J_t(u, v)}{|K_t(u, v) - J_t(u, v)|}$$

Les applications $f_0, f_1 : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ sont homotopes et par suite elles ont le même degré. \square

Proposition 3.13. *Si on note par $-J$ le noeud J avec une orientation opposée, alors on a*

$$lk(-J, K) = -lk(K, J).$$

Preuve. La méthode la plus simple pour vérifier cette propriété est d'utiliser la troisième définition. \square

Remarques 3.14. 1. *Si on reprend la deuxième définition l'existence d'une surface de Seifert qui borde K vient du fait que $H_1(S^3) = 0$. Cette condition apparaît aussi dans la cinquième définition, alors il est clair qu'on peut étendre la définition du nombre d'enlacement à toute 3-variété M telle $H_1(M) = 0$ comme la sphère d'homologie entière.*

2. *La définition (6) (et quelques autres) n'exige pas que J et K soient des plongement du cercle S^1 tant qu'ils sont disjoints, alors la notion du nombre d'enlacement s'étend à des courbes disjointes arbitraires de S^3 ou de \mathbb{R}^3 .*

3. *La longitude l dans un framing préféré d'un voisinage tubulaire d'un noeud K dans S^3 ou dans \mathbb{R}^3 est caractérisé parmi tous les longitudes possibles par la propriété $lk(l, K) = 0$. En effet, on a vu que $l \in \partial T(K)$ est telle que $0 = [l] \in H_1(T(K))$. En comparant avec la première définition du nombre d'enlacement, on voit que le condition $[l] = 0$ est équivalente à $lk(l, K) = 0$.*

De même, en assumant que les orientations de K et l sont cohérentes, le méridien m est tel que $lk(K, m) = +1$.

En conclusion, avec l'aide du nombre d'enlacement on peut facilement décrire la pair (m, l) du méridien et la longitude canoniques d'un noeud K .

Exemple 3.15. On considère le noeud du trèfle K . Si on choisit l comme étant un parallèle de K , ce choix ne va pas nous donner la longitude canonique. Ainsi, le **framing** n d'un noeud K correspond au choix d'une longitude l sachant que $lk(l, K) = n$. Ce qui donne une autre possibilité de présenter un noeud avec framing.

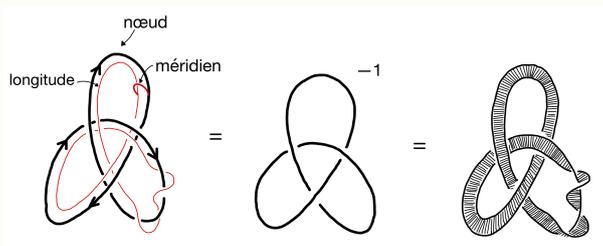


FIGURE 3.7 : Un noeud parallélisé avec framing $lk(l, K) = -1$.

4. Il y-a une autre définition possible du nombre d'enlacement de deux PL noeuds J, K disjoints de S^3 qu'on considère comme étant ∂D^4 qui est la suivante : soient A, B deux chaînes de D^4 sachant que $\partial A = J$ et $\partial B = K$. On assume que A, B s'intersectent transversalement en un nombre fini de points pondérés par $+1$ ou -1 suivant une convention d'orientation convenable, alors on a :

$$lk(J, K) = \pm A.B.$$

5. Le nombre d'enlacement est aussi défini pour les entrelacs orientés. Soient $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$, $\mathcal{L}' = K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_m$ deux entrelacs disjoints et soient m_1, m_2, \dots, m_n les méridiens de l'entrelacs \mathcal{L} . Le groupe d'homologie $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L})$ est un groupe abélien libre de rang n avec la base $\{[m_1], [m_2], \dots, [m_n]\}$. Lorsque

$$[\mathcal{L}'] = n_1[m_1] + n_2[m_2] + \dots + n_m[m_n],$$

on définit le nombre d'enlacement par $lk(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = \sum_{i=1}^n n_i$. Il présente le nombre algébrique de l'intersection d'une surface de Seifert S de \mathcal{L} avec \mathcal{L}' . Notons que le nombre d'enlacement dans ce cas peut être aussi calculé par la formule suivante :

$$lk(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m lk(K_i, K'_j)$$

3.3.2 Matrice d'enlacement

Étant donné un entrelacs parallélisé \mathcal{L} (dans S^3 ou dans \mathbb{R}^3), on peut lui associer une matrice dite **matrice d'enlacement**. Elle est présentée de la manière suivante :

on oriente \mathcal{L} et on choisit un ordre pour ses composantes K_1, K_2, \dots, K_m , alors on peut encoder les données du nombre d'enlacement de K dans une matrice. Ce qui permet d'avoir la définition suivante :

Définition 3.16. Soit \mathcal{L} un entrelacs parallélisé ordonné orienté avec les composantes K_1, K_2, \dots, K_m . La matrice d'enlacement de \mathcal{L} est la matrice symétrique (a_{ij}) d'ordre $m \times m$ où $a_{ij} = lk(K_i, K_j)$ pour $i \neq j$ et a_{ii} est le framings de K_i i.e $lk(K, K')$ où K' est une copie parallèle à K à orientation parallèle à celle de K .
L'enlacement total de \mathcal{L} est le nombre

$$lk(\mathcal{L}) = \sum_{i,j=1,\overline{m}} a_{ij}.$$

Exemple 3.17. La matrice d'enlacement de la figure 3.6 a) est

$$\begin{pmatrix} a_1 & 2 \\ 2 & a_2 \end{pmatrix}$$

sachant que a_1, a_2 sont les framings de K_1 et K_2 .

Nous allons montrer ultérieurement que la matrice d'enlacement constitue un moyen efficace dans l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour les trois variétés compactes connexes orientées. En fait, dans les sections suivantes nous allons montrer que nous pouvons effectuer une opération sur les nœuds et les entrelacs parallélisés dite la chirurgie de Dehn. Nous allons montrer par le théorème de Lickorish et Wallace que toutes les 3-variétés fermées orientées sont obtenus par cette opération sur S^3 qui dépend de l'entrelacs utilisé. Ainsi, toutes les informations sur une 3-variété compacte orientée sont encodées dans la matrice d'enlacement, à savoir les informations cohomologiques pertinentes sont contenus dans cette matrice.

3.4 Chirurgies de Dehn et le théorème de Lickorish-Wallace

Après avoir introduit toutes les notions qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre, nous sommes prêts pour décrire une des présentations combinatoires des 3-variétés, la **chirurgie de Dehn**. Elle est une des applications de la théorie des nœuds sur les 3-variétés et c'est un moyen efficace dans la construction des preuves sur ces dernières. Elle est liée à la théorie des nœuds et aux scindements de Heegaard, mais on n'a pas besoin ici de développer ces deux dernières.

3.4.1 Chirurgies de Dehn sur les nœuds

On s'intéresse particulièrement à la chirurgie sur un nœud [62], [63]. L'idée est la suivante :

on considère un nœud K dans une 3-variété fermée orientée M i.e obtenu par un plongement lisse dans M d'un cercle. Et soit $T(K)$ son voisinage tubulaire (fermé) de K . En coupant M le long du 2-tore $\partial T(K)$, on obtient deux variétés, une c'est

le noeud extérieur \tilde{M} qui est la fermeture de $M \setminus T(K)$, et l'autre est le tore solide $T(K)$ qu'on identifie avec $D^2 \times S^1$. On peut utiliser un homéomorphisme arbitraire

$$h : \partial D^2 \times S^1 \longrightarrow \partial \tilde{M}$$

pour recoller $\partial D^2 \times S^1$ en \tilde{M} . L'espace qui en résulte de cette construction est une variété fermée orientée

$$M_K = \tilde{M} \cup_h (D^2 \times S^1),$$

généralement différente de M . On dit que M_K est obtenue de K par chirurgie de Dehn. L'homéomorphisme h applique le cercle $\partial D^2 \times \{1\}$ en une simple courbe (non-orientée) $c \in \partial \tilde{M}$. La courbe c détermine uniquement la variété M_K une fois que le noeud K est fixé.

Chirurgie sur la sphère S^3

Définition 3.18. Soient K un noeud de S^3 , $T(K)$ un voisinage tubulaire de K dans S^3 , J un parallèle de K dans $T(K)$ et $h : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial T(K)$ un homéomorphisme de recollement tel que $h(* \times S^1) = J$. La variété

$$M = S_K^3 = (S^3 \setminus \text{int}T(K)) \cup_h (S^1 \times D^2)$$

est la variété obtenue par chirurgie sur un noeud parallélisé K suivant l'homéomorphisme h . C'est à dire, on enlève l'intérieur de $T(K)$ et on le remplace par un tore plein $S^1 \times D^2$ le long du bord $\partial(S^1 \times D^2)$ suivant h qui renverse les orientations, on obtient la nouvelle variété M .

Exemple 3.19. Le cas où le complémentaire d'un voisinage d'un noeud est encore un tore solide, les variétés obtenues sont des lenticulaires.

Remarques 3.20. [63] Puisque K est un noeud de S^3 , le noeud extérieur

$$\tilde{M} = \overline{S^3 \setminus T(K)}$$

possède l'homologie entière du cercle. Soit la paire (m, l) du méridien et la longitude canonique de K . Cette paire est quasi-orientée, c'est à dire elle est orientée suivant les orientations simultanées de m et l et en exigeant le fait que $lk(m, l) = 1$. Si le noeud K est orienté alors m et l sont orientés avec la convention que $lk(m, l) = 1$. Les courbes m et l forment une base dans $H_1(\partial \tilde{M}, \mathbb{Z})$, alors chaque élément de $H_1(\partial \tilde{M}, \mathbb{Z})$ est de la forme

$$[c] = p.[m] + q.[l]$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Soit $h : \partial D^2 \times S^1 \longrightarrow \partial \tilde{M}$ l'homéomorphisme qui envoie $\partial D^2 \times \{1\}$ à la courbe $c = p.m + q.l$. La variété

$$M = \tilde{M} \cup_h (D^2 \times S^1)$$

est dite obtenue par **une** p/q -chirurgie de S^3 le long de K et est notée par $S^3 + (p/q).K$ Une p/q -chirurgie est dite **une chirurgie entière** si $q = \pm 1$ ou $q = 0$, autrement elle est dite **rationnelle**. On considère le cas $q = 0$ mais en comprenant

que dans ce cas $p = 1$ et le résultat de 1/0-chirurgie le long de tout noeud K dans S^3 est S^3 . Une telle chirurgie est dite triviale. Notons que

$$H_1(S^3 + (p/q).K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|p|.$$

Exemple 3.21. $S^3 + (1/q).K$ est toujours la sphère d'homologie entière (voir [63]).

Exemple 3.22. Soit N un voisinage tubulaire du trèfle à droite K , et soit J la courbe sur ∂N comme dans la figure suivante. On considère l'homéomorphisme $h : \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial N$ qui prend le méridien $* \times S^1$ sur J , et on forme l'espace d'identification

$$M = (S^3 \setminus \text{int}N) \cup_h (S^1 \times D^2)$$

en collant le tore solide au noeud extérieur par h .

Cette construction qui est apparue en 1910 par Dehn (voir [21], [61]), est une méthode alternative pour construire les sphères d'homologie qui ne sont pas des sphères d'homotopie. Après avoir décrit cette variété et calculé son groupe homotopique, il a été géométriquement démontré qu'elle est la même variété qui a été décrite par Poincaré.

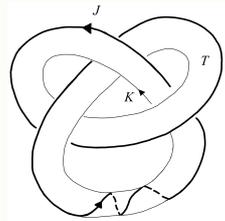


FIGURE 3.8 : La Construction de Dehn pour la sphère d'homologie de Poincaré.

L'avantage de la méthode de Dehn est qu'elle suggère une technique plus générale pour la construction de nombreuses sphères d'homologie. Il y-a même de l'espoir qu'elle peut être utilisée pour construire un contre-exemple de la conjecture de Poincaré.

3.4.2 Chirurgie sur un entrelacs d'une 3-variété M

La notion de chirurgie sur la sphère S^n se généralise aux 3-variétés. Étant donné un entrelacs $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ dans une 3-variété M (ou en particulier de la sphère S^3). Établir une chirurgie sur \mathcal{L} signifie établir une chirurgie de Dehn sur chacun des noeuds K_1, K_2, \dots, K_m de \mathcal{L} de M (ou de S^3). Ce qui permet d'introduire la définition suivante :

Définition 3.23. On se donne les objets suivants :

1. Une 3-variété compacte connexe M .
2. Un entrelacs $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ dans M , c'est à dire un plongement de l'union disjointe de m -cercles dans M .

3. Un ensemble de m -voisinages tubulaires $T(K_i) \simeq S^1 \times D_i^2$, deux à deux disjoints de l'intérieur de M pour chaque composante K_i de l'entrelacs. $T(\mathcal{L}) = \cup_i T(K_i)$ est alors un voisinage tubulaire de l'entrelacs \mathcal{L} .
4. Un entrelacs $J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_m$ dans la réunion disjointe $\sqcup_i \partial T(K_i)$ tels que $J_i \subset \partial T(K_i)$ pour chaque $1 \leq i \leq m$. Ici le choix de la longitude J_i pour chaque composante K_i est une parallélisation de K_i .
5. Un homéomorphisme de recollement $h : \sqcup_i (S^1 \times \partial D_i^2) \longrightarrow \sqcup_i \partial T(K_i)$ tel que $h(* \times \partial D_i^2) = J_i$.

On forme la variété

$$M_{\mathcal{L}} = (M \setminus \text{int}(T(\mathcal{L}))) \cup_h (\sqcup_i S^1 \times D_i^2).$$

$M_{\mathcal{L}}$ est alors la variété obtenue en enlevant les voisinages tubulaires des composantes de l'entrelacs \mathcal{L} et en recollant m -tores solides en identifiant leurs bords respectifs aux bords des voisinages tubulaires $T(K_i)$ suivant l'homéomorphisme h qui renverse l'orientation et prend chaque méridien m_i de $T(K_i)$ sur une longitude spécifiée J_i . La variété $M_{\mathcal{L}}$ est appelée le résultat de chirurgie de Dehn le long de l'entrelacs \mathcal{L} avec les instructions de chirurgie (1)-(5). Parfois elle est notée par $L(J_1, J_2, \dots, J_m)$.

La chirurgie décrite dans la définition 3.23 est dite une chirurgie sur un entrelacs parallélisé, cette dernière est une chirurgie entière (voir la remarque ci-dessous).

Quelques remarques sur les instructions de chirurgie sur la sphère S^3

Dans le cas où la chirurgie est faite sur un entrelacs \mathcal{L} de S^3 , on peut reprendre les mêmes arguments de la remarque 3.20 pour décrire cette chirurgie.

En effet, chaque composante K_i d'un entrelacs orienté \mathcal{L} dans S^3 (ou dans \mathbb{R}^3) possède un framing préféré (i.e d'après ce qu'on a vu un homéomorphisme spécifié $h : S^1 \times D^2 \longrightarrow T(K_i)$) pour un voisinage tubulaire $T(K_i)$ dans lequel la longitude canonique l_i est orientée dans le même sens que K_i et l'enlacement $lk(K_i, m_i) = 1$. Alors, on écrit la courbe J_i en termes de cette base

$$h_*(m_i) = [J_i] = p_i[m_i] + q_i[l_i]$$

avec une ambiguïté \pm dépendant de l'orientation de J_i . Pour enlever cette ambiguïté, on prend le quotient $r_i = \frac{p_i}{q_i}$. Cet entier s'appelle le **coefficient de chirurgie** associé à la composante K_i , et le choix de l'orientation de K_i est sans importance dans cette définition. Par ailleurs, si on change l'orientation de S^3 (ou de \mathbb{R}^3), le signe de tous les r_i change puisque le nombre d'enlacement change. Alors on assume que S^3 est toujours muni d'une orientation fixée correspondante avec la règle de la main droite pour le calcul du nombre d'enlacement. Ainsi, chaque entrelacs \mathcal{L} dans S^3 avec les nombres rationnels r_i attachés à ces composantes donne un m-uplet

$$(p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_m/q_m)$$

qui détermine une chirurgie. Cette dernière donne sans ambiguïté une 3-variété fermée orientée. Un tel m -uplet s'appelle **le framing** de \mathcal{L} . Un entrelacs muni d'un framing fixé est dit un entrelacs avec framing ou bien on dit aussi un **entrelacs parallélisé (ou pondéré)**. On va voir que toutes les 3-variétés viennent dans ce sens.

En pratique, on décrit une variété en dessinant une image de \mathcal{L} et en écrivant son framing. Une chirurgie sur les entrelacs dans S^3 est rationnelle. Par contre, une chirurgie sur un entrelacs dans une variété ne peut pas être décrite par les nombres rationnels parce que il n'y a pas un choix canonique de la longueur sachant que ça existe pour la sphère et les sphères d'homologie. Ainsi la chirurgie sur une variété est entière (i.e tous les r_i sont des entiers ou $1/0$).

3.4.3 Le théorème de Lickorish-Wallace.

Le théorème Lickorish 1962 [50] et Wallace 1960 [76] prouve l'importance de l'étude de la chirurgie sur la sphère S^3 .

Théorème 3.24. *Toute 3-variété fermée, connexe et orientable peut être obtenue de la sphère standard S^3 par chirurgie entière sur un entrelacs pondéré $\mathcal{L} \subset S^3$. En plus, on peut supposer que les composantes K_i de l'entrelacs soient individuellement non noués (i.e sont individuellement des nœuds triviaux) et avec framing ± 1 .*

L'idée originale de Lickorish pour la démonstration de ce théorème est basée sur les scindements de Heegard. Pour la preuve du théorème voir [62] pp 29.

Le théorème de ci-dessus assure que pour chaque 3-variété fermée, connexe et orientable M , il existe un entrelacs $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n \subset S^3$ et un choix de courbes J_1, J_2, \dots, J_n tel que M soit homéomorphe à la variété $L(J_1, J_2, \dots, J_n)$. Toute présentation d'une 3-variété M par chirurgie sur un entrelacs parallélisé est appelée une présentation de chirurgie de M . Parfois on trouve plusieurs présentations de chirurgie de la même variété M . Et alors la question qui se pose est : quant est-ce que ceci est vrai ?

Le théorème de **Kirby** répond à cette question et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que ça soit vrai.

L'idée est la suivante : on définit deux opérations K_1, K_2 dites les **mouvements de Kirby** sur un entrelacs parallélisé. Ces mouvements ont été connus bien avant le théorème de Kirby. On montre que ces opérations ne modifient pas le résultat de la chirurgie (à homéomorphisme près). Autrement dit, deux présentations de chirurgie entière de la même variété M sont liées par une suite de mouvements de Kirby [45], et deux présentations de chirurgie rationnelle sont liés par une suite de mouvements de Kirby généralisés [61].

Kirby a montré la partie la plus difficile : si deux variétés sont homéomorphes alors les entrelacs sont liés par les mouvements de Kirby K_1, K_2 .

Le théorème de Kirby est le suivant.

Théorème 3.25. [45] *Deux variétés fermées orientées obtenues par chirurgie entière sur des entrelacs parallélisés $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sont homéomorphes par un homéomorphisme qui*

préserve l'orientation si et seulement si l'entrelacs \mathcal{L}' peut être obtenu de \mathcal{L} par une suite de mouvements du type K_1, K_2 .

La preuve du théorème de Kirby est difficile (voir [45]). Pour la condition nécessaire qui est la plus simple, il suffit de voir aussi [62].

3.5 Chirurgie et les 4-variétés

Après avoir montré par le théorème de Lickorish et Wallace que toute variété de dimension 3 s'obtient par chirurgie sur un entrelacs, on va montrer que ces variétés peuvent être considérées comme des bords d'autres variétés de dimension 4. Et cette propriété va nous permettre d'utiliser ces dernières pour donner plus d'informations et plus de propriétés sur la chirurgie.

Définition 3.26. [62] Une 4-variété compacte (orientée) W est appelée un **cobordisme** (orienté) entre deux 3-variétés fermées M_1 et M_2 si $\partial W = -M_1 \cup M_2$ où $-M_1$ désigne M_1 avec une orientation renversée.

Si M_1 est vide, on dit que M_2 est cobordante à zéro.

Il y-a une relation étroite entre la chirurgie sur les entrelacs avec framing et les cobordismes. Cette relation est décrite comme suit :

Soit K un noeud avec un framing entier défini par la courbe J dans $\partial(\overline{M \setminus T(K)})$ sachant que $[J] = [K]$ dans $H_1(T(K))$. Soit a un point sur le bord de D^2 . Alors il existe (sous l'isotopie) un unique difféomorphisme

$$h : S^1 \times D^2 \longrightarrow T(K)$$

sachant que

$$h(S^1 \times \{0\}) = K \text{ et } h(S^1 \times \{a\}) = J.$$

On attache une 2-anse $D^2 \times D^2$ à la 4-variété $M \times [0, 1]$ avec l'aide du plongement

$$h : S^1 \times D^2 = \partial D^2 \times D^2 \longrightarrow T(K) \subset M = M \times \{1\},$$

on obtient une 4-variété

$$W = (M \times [0, 1]) \cup_h (D^2 \times D^2).$$

Cette variété est appelée la **trace** de la chirurgie sur K .

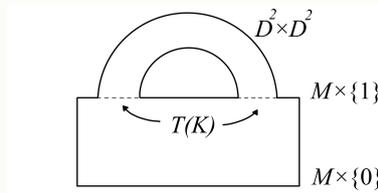


FIGURE 3.9 : Construction du cobordisme

Théorème 3.27. La variété W est un cobordisme entre la variété M et celle obtenue par chirurgie sur K .

Preuve. Le bord de W est constitué de deux composantes. Une d'elles, à savoir $M \times \{0\}$ est homéomorphe à M . En collant $D^2 \times D^2$ à $M \times [0, 1]$, la partie $M \times \{1\}$ change comme suit : on enlève le tore solide $T(K) = h(\partial D^2 \times D^2)$ et on le remplace par le tore solide $D^2 \times \partial D^2$ (qui est une partie du bord libre $\partial(D^2 \times D^2)$). Le méridien $\partial D^2 \times \{a\}$ est identifié avec la courbe $c = h(\partial D^2 \times \{a\})$. Ceci veut dire qu'une chirurgie entière est sur $M \times \{1\}$ le long de K avec un framing donné par la courbe c . D'une façon formelle, la variété W ainsi construite n'est pas lisse car elle a des coins après avoir collé le poignée. Mais il existe un moyen canonique pour munir W d'une structure de variété lisse. On utilise les techniques décrites dans le chapitre 1 de [18]. \square

Corollaire 3.28. *Chaque 3-variété fermée orientée est cobordante à zéro.*

Preuve. Toute 3-variété fermée M peut être obtenue par une chirurgie entière sur un entrelacs dans S^3 .

Le théorème 3.27 implique que M est cobordante à S^3 qui est à son tour le bord de la 4-boule D^4 . Par suite M est cobordante à zéro. \square

Le corollaire de ci-dessus nous permet de dire que toute 3-variété fermée $M = M_{\mathcal{L}}$ où $\mathcal{L} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ peut être considérée comme étant le bord d'une 4-variété $W_{\mathcal{L}}$. La technique utilisée pour construire $W_{\mathcal{L}}$ est inspirée de celle utilisée au début de cette section : en effet, on attache m 2-anses $D^2 \times D^2$ à une boule D^4 par un homéomorphisme de recollement conservant l'orientation :

$$h = \sqcup_1^m h_i : \sqcup_1^m (\partial D^2 \times D^2)_i \longrightarrow \cup_1^m T(K_i) \subset \partial D^4 = S^3$$

qui vérifie que pour tout $i = \overline{1, m}$, l'image par h de la longitude standard de $(\partial D^2 \times D^2)_i$ est la longitude canonique J_i (ici c'est la longitude qu'on choisit pour effectuer la chirurgie sur la composante L_i de l'entrelacs \mathcal{L}). On définit la variété recollée

$$W_{\mathcal{L}} = D^4 \cup_h (\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i)$$

et son bord est $M_{\mathcal{L}} = \partial W_{\mathcal{L}}$ (voir la figure 3.10).

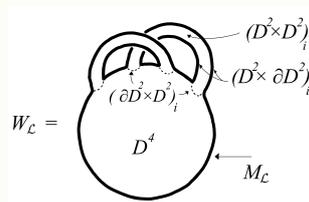


FIGURE 3.10 : Construction de $W_{\mathcal{L}}$.

Pour chaque $i = \overline{1, m}$, on note par l_i, m_i respectivement une longitude et un méridien standards du bord $\partial(D^2 \times S^1)_i$ du tore solide $(D^2 \times S^1)_i$, et par l'_i, m'_i respectivement une longitude et un méridien standards de $(\partial D^2 \times D^2)_i$. On identifie pour tout $i \in \overline{1, m}$ le tore solide $(D^2 \times \partial D^2)_i$ avec $(D^2 \times S^1)_i$ de la construction de Dehn de la trois variété $M_{\mathcal{L}}$. En particulier, $l'_i = m_i$ et $m'_i = l_i$.

3.5.1 Homologie de $M_{\mathcal{L}}$ et de $W_{\mathcal{L}}$.

Le lien entre la chirurgie et les 4-variétés a des conséquences très intéressantes, parmi lesquelles celles qu'on va exprimer par la proposition suivante :

Proposition 3.29. [31] *On note A un des groupes suivants : $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Soit $M_{\mathcal{L}}$ une 3-variété présentée par chirurgie et par $W_{\mathcal{L}}$ la 4-variété telle que $\partial W_{\mathcal{L}} = M_{\mathcal{L}}$ construite dans 3.23, alors*

1. $H_k(W_{\mathcal{L}}) = 0$, sauf $k = 0$ et $k = 2$, et $H_2(W_{\mathcal{L}}, A)$ est un module libre sur A de rang m isomorphe à A^m .
2. $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}})$ est nul sauf pour $k = 4$ et $k = 2$.
3. $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, A)$ est un module libre de rang m isomorphe à A^m ,

et il existe une base de ces deux modules telles que dans la suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(M_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{i_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{j_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{\delta_*} H_1(W_{\mathcal{L}}, A) \rightarrow 0$$

l'homomorphisme j_* sera donnée par la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ (vu comme endomorphisme de A^m). On choisira toujours ces bases pour $H_2(M_{\mathcal{L}}, A)$ et $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, A)$.

La suite exacte de la proposition précédente induit les isomorphismes

$$\text{Ker} B_{\mathcal{L}} \simeq H_2(M_{\mathcal{L}}, A) \text{ et } \text{Coker} B_{\mathcal{L}} \simeq H_1(M_{\mathcal{L}}, A).$$

Preuve. On se place dans le cas où $A = \mathbb{Z}$. Tout d'abord rappelons que $H_1(\partial D^2 \times \partial D^2) = \mathbb{Z}[l'_i] + \mathbb{Z}[m'_i]$, où l'_i, m'_i sont définis ci-dessus, et $H_1(\partial T(K_i)) = \mathbb{Z}[L_i] + \mathbb{Z}[M_i]$, où L_i, M_i sont respectivement la longitude et le méridien standard de $\partial T(K_i)$. On a

$$W_{\mathcal{L}} = D^4 \cup_h (\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i)$$

et les inclusions

$$\begin{array}{ccc} & \cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i & \\ \nearrow & & \searrow \\ \cup_{i=1}^m T(K_i) & & W_{\mathcal{L}} \\ \searrow & & \nearrow \\ & D^4 & \end{array}$$

La suite de Mayer-Vietoris s'écrit de la forme

$$\dots \rightarrow H_*(\cup_{i=1}^m T(K_i)) \rightarrow H_*(\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i) \oplus H_*(D^4) \rightarrow H_*(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow H_{*-1}(\cup_{i=1}^m T(K_i)) \rightarrow \dots$$

Puisque

$$H_i(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases},$$

on a $H_i(W_{\mathcal{L}}) = 0$ pour $i \geq 3$. Et on a tous les termes de la suite de Mayer-Vietoris en degré supérieur ou égal à 3 sont nuls. La suite de ci-dessus en degré $i = 1, 0$ est de la forme suivante :

$$0 \rightarrow H_1(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow H_1(\cup_{i=1}^m T(K_i)) \rightarrow H_0(\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i) \oplus H_0(D^4) \rightarrow H_0(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow 0$$

i.e on a la suite

$$0 \rightarrow H_1(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\gamma=(Id,\phi)} \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} H_0(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow 0$$

où $\phi(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i$. Par conséquent,

$$H_1(W_{\mathcal{L}}) = Ker\gamma = 0 \quad \text{et} \quad H_0(W_{\mathcal{L}}) = Coker\gamma = \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, nous avons aussi la suite exacte

$$\rightarrow H_2(W_{\mathcal{L}}) \xrightarrow{i_*} H_1(\cup_{i=1}^m T(K_i)) \rightarrow H_1(\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2)_i) \oplus H_0(D^4) \rightarrow H_1(W_{\mathcal{L}}) \rightarrow$$

Ici, i_* est un isomorphisme $H_1(\cup_{i=1}^m T(K_i)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[L_i]$. D'où, on obtient $H_2(W_{\mathcal{L}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[L_i]$. On munit $H_2(W_{\mathcal{L}})$ par la base induite par cet isomorphisme. D'une autre part, par le théorème de coefficients universels, on a $H^3(W_{\mathcal{L}}) \simeq Hom H_3(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \simeq 0$ d'où, on déduit par la dualité de Poincaré que $H_1(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^3(W_{\mathcal{L}}) \simeq 0$.

D'une façon analogue, on a $H_3(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^1(W_{\mathcal{L}}) \simeq 0$. Et par la dualité de Poincaré nous avons $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(W_{\mathcal{L}})$. Et par la suite longue exacte en cohomologie induite par la suite des inclusions $D^4 \rightarrow W_{\mathcal{L}} \rightarrow (W_{\mathcal{L}}, D^4)$. On déduit l'isomorphisme

$$H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(W_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(W_{\mathcal{L}}, D^4).$$

Et par l'excision, on obtient $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2 \cup V_{\epsilon}, \partial D^2 \times D^2 \cup V_{\epsilon})_i)$. Ensuite, par une rétraction par déformation, on obtient $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(\cup_{i=1}^m (D^2 \times D^2, \partial D^2 \times D^2)_i)$. Ainsi,

$$H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq H^2(\cup_{i=1}^m (D^2 \times S^1, S^1 \times S^1)_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^m H^2(D^2 \times S^1, S^1 \times S^1)_i.$$

Et par la dualité de Poincaré, on déduit que

$$H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m H_1(D^2 \times S^1)_i \simeq \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[l_i]$$

On munit $H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}})$ par la base induite par cet isomorphisme. Maintenant pour montrer que l'homomorphisme j_* est donné par la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$. On regarde l'image de $[L_i] \in H_1(T_i)$ dans $\bigoplus_{i=1}^m H_1(D^2 \times S^1)_i$. On considère pour chaque $i = \overline{1, m}$, la surface de Seifert Σ_{L_i} de bord L_i dans S^3 . Par définition,

$$a_{ij} = lk(K_i, K_j) = lk(L_i, L_j)$$

Le bord de surface $\Sigma_{L_i} \cap (S^3 \setminus int(T(L)))$ est composé de L_i et de a_{ij} courbes méridiennes isotopes à $-M_j$ (i.e M_j avec une orientation opposée) pour tout $j = \overline{1, m}$. Donc homologiquement dans $H_1(\partial T(L))$, on a $[L_i] - \sum_{j=1}^m a_{ij}[M_j] = 0$.

Soit \tilde{h} la restriction de l'homéomorphisme du recollement h défini dans la section précédente sur le bord. Comme $\tilde{h}_{i*}^{-1}(M_j) = -c_i[l'_j] + [m'_j]$ dans $H_1(\partial D^2 \times \partial D^2)_j$ et $l'_j = m_j$ et $m'_j = l_j$, on a $M_j = [l_j] - c[m_j]$ dans $H_1(\partial D^2 \times \partial D^2)_j$, puis $[M_j] = [l_j]$ dans $H_1((D^2 \times \partial D^2)_j)$. Par conséquent,

$$[L_i] = \sum_{j=1}^m a_{ij}[l_j] \quad \text{dans} \quad \bigoplus_{j=1}^m H_1((D^2 \times S^1)_j).$$

On en déduit que l'homomorphisme j_* est donné par la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ dans les bases choisies. Finalement, puisque $H_1(W_{\mathcal{L}}) = H_1(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}) = 0$, on utilise le théorème de coefficients universels pour obtenir les résultats pour $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. \square

3.6 Les formes d'enlacement et les matrices d'enlacement.

3.6.1 Enlacement rationnel

On a besoin de définir la forme d'enlacement pour une 3-variété M fermée orientée (par rapport à \mathbb{Z}). A cet effet, on commence par les observations et les remarques vu dans la partie précédente (voir 3.14). En fait, on peut définir le nombre d'enlacement de deux noeuds J, K orientés homologiquement nuls dans M par

$$lk(J, K) = F \cdot K$$

où F désigne une surface de Seifert plongée dans M de bord J et (\cdot) désigne la forme d'intersection.

Dans cette dernière définition, nous avons déjà vu que la condition que K soit homologiquement nul est nécessaire, autrement le nombre d'enlacement n'est pas défini. En conclusion, on a besoin d'introduire d'autres conditions supplémentaires pour définir le nombre d'enlacement pour la 3-variété M .

Définition 3.30. *Soient J, K deux noeuds orientés disjoints d'une 3-variété orientée connexe M . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. J et K présentent des éléments de torsion dans $H_1(M, \mathbb{Z}) = H_1(M)$.
2. Il existe $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $n[J] = p[K] = 0$.
3. $[J] = [K] = 0$ dans $H_1(M, \mathbb{Q})$.

L'assertion 3) vient du fait que $H_1(M, \mathbb{Q}) = H_1(M) \otimes \mathbb{Q}$ et que tout groupe de torsion tensorisé par \mathbb{Q} est nul.

On suppose que l'une des conditions de ci-dessus est vérifiée. On définit **l'enlacement à valeurs rationnels** de J et K de la manière suivante :

Soit C une 2-chaîne telle que $\partial C = nJ$. On peut choisir cette 2-chaîne de sorte qu'elle intersecte transversalement K . On définit

$$lk_M(J, K) = \frac{C \cdot K}{n} \in \mathbb{Q}. \quad (3.1)$$

Le fait que $[J], [K]$ sont des éléments de torsion, assure que la partie droite de l'égalité 3.1 de ci-dessus ne dépend pas du choix particulier de C . Ce qu'on va montrer dans le lemme suivant :

Lemme 3.31. *L'enlacement rationnel est bien défini.*

Preuve. Soit C' une autre 2-chaîne lisse transverse telle que $\partial C' = nJ$, alors $C' - C$ est une 2-chaîne vérifiant $\partial(C' - C) = 0$ et alors c'est un 2-cycle dans M . Ainsi, l'intersection $(C' - C).K$ est interprétée par le produit en homologie (ou un cup produit en cohomologie)

$$\begin{aligned} H_2(M) \times H_1(M) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x.y = (PD(x) \smile PD(y))([M]) \end{aligned}$$

où PD désigne l'isomorphisme de dualité de Poincaré. Nous avons alors

$$\begin{aligned} C'.K - C.K &= (C' - C).K \\ &= [(C' - C)].[K]. \end{aligned}$$

Or $[K]$ est de torsion, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p[K] = 0$ dans $H_1(M)$. D'où,

$$\begin{aligned} 0 &= [(C' - C)].p[K] \\ &= p[(C' - C)].[K] \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et alors $[(C' - C)].[K] = 0$. Ainsi, $C.K = C'.K$. □

Remarque 3.32. *D'après la démonstration de ci-dessus, on remarque qu'il est nécessaire que les cycles J, K représentent des éléments de torsion pour que ça soit bien défini.*

Par ailleurs, si on suppose par exemple que $H_2(M) = 0$, on a $[(C' - C)].[K] = 0$ dans la preuve de ci-dessus et ainsi on a pas besoin de supposer que K représente un élément de torsion.

3.6.2 Formes d'enlacement d'une 3-variété

Avant d'énoncer la définition d'une forme d'enlacement d'une trois variété, on introduit tout d'abord celle d'un groupe abélien.

Définition 3.33. *Une forme d'enlacement est un couple (G, ϕ) , où G est un groupe abélien fini et ϕ est une forme bilinéaire symétrique non singulière sur G à valeurs dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ($\phi : G \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).*

On dit que deux formes d'enlacements (G, ϕ) (G', ϕ') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ tel que $\phi(x, y) = \phi'(f(x), f(y))$ pour tous $x, y \in G$

La définition géométrique d'une forme d'enlacement d'une variété de dimension impair a été définie par Herbert Seifert en 1934. On s'intéresse à celle définie sur les 3-variétés (voir [38] et [22]).

Définition 3.34. *Soit M une 3-variété compacte orientée et sans bord. La forme d'enlacement sur M est une forme bilinéaire définie sur $TorsH_1(M)$ par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M : TorsH_1(M) \times TorsH_1(M) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ([J], [K]) &\longmapsto lk(J, K) \bmod 1 \end{aligned}$$

Lemme 3.35. \mathcal{L}_M est bien définie.

Preuve. On montre que la définition de ci-dessus ne dépend pas du choix des représentants J, K dans les classes d'homologie $[J], [K] \in \text{Tors}H_1(M)$.

Soit J_1 un cycle homologue à J , alors il existe un 2-chaîne U telle que $J_1 - J = \partial U$ et une autre chaîne C_1 telle que $nJ_1 = \partial C_1$. D'où,

$$\begin{aligned} n(J_1 - J) &= nJ_1 - nJ \\ &= \partial C_1 - \partial C \\ &= \partial(C_1 - C) \\ &= n\partial U. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(C_1 - C) - nU$ est un 2-cycle de M . Par conséquent, on peut exprimer le produit d'intersection en fonction du produit en homologie et on déduit que

$$\frac{((C_1 - C) - nU).K}{n} = \frac{[(C_1 - C) - nU].[K]}{n} = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} lk(J_1, K) - lk(J, K) &= \frac{C_1.K}{n} - \frac{C.K}{n} \\ &= \frac{(C_1 - C).K}{n} \\ &= U.K \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $lk(J_1, K) - lk(J, K) = 0 \pmod{1}$. La définition ne dépend pas du cycle représentant la première classe, on déduit par symétrie qu'elle ne dépend pas aussi d'un cycle représentant la deuxième classe. En effet,

$$lk(J, K_1) - lk(J, K) = lk(K_1, J) - lk(K, J) = 0.$$

□

Proposition 3.36. La forme d'enlacement est une forme bilinéaire symétrique non singulière.

Preuve. Les propriétés des nombres d'intersection en dimension impair assurent que λ_M est une forme bilinéaire symétrique.

Par ailleurs, par dualité de Poincaré restreinte à la torsion et le théorème de coefficients universels nous avons les isomorphismes

$$\text{Tors}H_1(M) \simeq \text{Tors}H^2(M) \simeq \text{Hom}(\text{Tors}H_1(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui présentent l'adjoint de la forme d'enlacement. Et alors elle est non singulière. □

3.6.3 Versions homologique et cohomologique de la forme d'enlacement

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions équivalentes de la forme d'enlacement (voir par exemple [13] pp 366). Ici on s'intéresse particulièrement à celles qui utilisent l'homomorphisme de Bockstein. La forme d'enlacement dans ce cas peut être définie de la manière suivante :

Définition 3.37. *La forme d'enlacement $(TorsH_1(M, \mathbb{Z}), \lambda_M)$ d'une 3-variété M est définie comme suit : la suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en homologie

$$\dots \longrightarrow H_2(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots$$

On remarque que $Im\beta = TorsH_1(M, \mathbb{Z})$. Pour deux éléments u, u' de $TorsH_1(M, \mathbb{Z})$, on pose

$$\mathcal{L}_M(u, u') = u \cdot x' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où $x' \in H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est tel que $u' = \beta(x')$ où la notation $(.)$ désigne comme précédemment la forme d'intersection.

Deux variétés qui ont le même type d'homotopie ont la même forme d'enlacement.

D'une façon analogue, la version cohomologique de la forme d'enlacement est la suivante :

Définition 3.38. *La suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en homologie

$$\dots \longrightarrow H^1(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots$$

L'homomorphisme de Bockstein $\beta : H^1(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$ possède une image $Im\beta = TorsH^2(M, \mathbb{Z}) = TorsH_1(M, \mathbb{Z})$. Soient $u, u' \in TorsH_1(M, \mathbb{Z})$ et $\tilde{x} \in H^1(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sachant que $\beta(\tilde{x}) = u$. On définit

$$\mathcal{L}_M(u, u') = (\tilde{x} \smile u')([M]) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Une simple vérification montre que $\mathcal{L}_M(u, u')$ ne dépend pas du choix du relèvement de u . Remarquons que l'égalité de ci-dessus peut s'écrire de la manière suivante

$$\mathcal{L}_M(\beta(\tilde{x}), \beta(\tilde{x}')) = (\tilde{x} \smile \beta(\tilde{x}'))([M]) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

pour tous $\tilde{x}, \tilde{x}' \in H^1(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

3.6.4 Forme d'enlacement d'une matrice

On définit une forme d'enlacement sur une matrice de la manière suivante.

Définition 3.39. [31] Soit B une matrice entière symétrique de taille n et soit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker} B \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\delta} \text{Coker} B \longrightarrow 0$$

On définit $(\text{Coker} B, \phi)$ une forme d'enlacement associé à B de la manière suivante : soient u, u' deux éléments de $\text{Tors}(\text{Coker} B)$, on suppose que $N'u = 0$ pour $N' \in \mathbb{N}^*$. Soient z, z' deux éléments de \mathbb{Z}^n tels que $u = \delta(z)$ et $u' = \delta(z')$, alors le système linéaire $N'z' = By'$ possède une solution $y' \in \mathbb{Z}^n$ et on pose

$$\phi(u, u') = \frac{1}{N'} {}^t y' z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 3.40. La forme d'enlacement d'une matrice B définie ci-dessus est bien définie.

Preuve. On veut montrer que la forme d'enlacement ne dépend ni du choix de N' , ni du choix de y' .

Soit alors les hypothèses de la définition 3.39, et soit $u \in \text{Tors}_N(\text{Coker} B)$, où N est un entier. Alors il existe $y \in \mathbb{Z}^m$ tel que $Nz = By$.

On vérifie tout d'abord que la définition ne dépend pas de N' . Soit alors $N'_1 u' = 0$, alors il existe $y'_1 \in \mathbb{Z}^m$ tel que $N'_1 z' = By'_1$. Alors $N'N'_1 z' = N'By'_1$ dans \mathbb{Z}^n . En utilisant le fait que $N'z' = By'$, nous obtenons $N'N'_1 B(\frac{1}{N'}y' - \frac{1}{N'_1}y'_1) = 0$, dans \mathbb{Q}^n . D'où ${}^t y B(\frac{1}{N'}y' - \frac{1}{N'_1}y'_1) = 0$. Mais B est une matrice symétrique, alors on obtient ${}^t (yB)(\frac{1}{N'}y' - \frac{1}{N'_1}y'_1) = 0$. Ce qui est équivalent à ${}^t ({}^t (yB)(\frac{1}{N'}y' - \frac{1}{N'_1}y'_1)) = 0$. Et alors, $(\frac{1}{N'} {}^t y' - \frac{1}{N'_1} {}^t y'_1)By = 0$. Mais $By = Nz$, alors $(\frac{1}{N'} {}^t y' z - \frac{1}{N'_1} {}^t y'_1 z) = 0$. D'où le résultat désiré. On montre maintenant que $\lambda(u, u')$ ne dépend pas du choix de y' . Soit alors $y'' \in \text{Ker} B$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{N'} {}^t y'' z &= \frac{1}{N'} {}^t y'' (\frac{1}{N} By) \\ &= \frac{1}{NN'} {}^t ({}^t y B y'') = 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que λ est bien définie. En plus,

(i) \mathcal{L} est bilinéaire.

(ii) \mathcal{L} est symétrique en utilisant la symétrie de B .

(iii) \mathcal{L} est en plus non singulière. En effet, On suppose que $\mathcal{L}(u, u') = 0$, pour tout $u \in \text{Tors}(\text{Coker} B)$. Alors pour tout $z \in \mathbb{Z}^m$, $\frac{1}{N'} {}^t y' z = 0$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Et alors, $\frac{1}{N'} y' = 0$. D'où, $z' \in \text{Im} B = \text{Ker} \delta$. Ainsi, $u' = \delta(z') = 0$.

□

Remarques 3.41. 1. Si la matrice B est inversible (dans \mathbb{Q}), la forme d'enlacement associée est donnée par $\mathcal{L}(\delta(z), \delta(z')) = {}^t z B^{-1} z'$.

2. Toute forme d'enlacement peut être obtenue par ce procédé à partir d'une matrice entière symétrique (voir [75] th 6).

3.6.5 Lien entre la matrice d'enlacement et la forme d'enlacement d'une 3-variété

On montre le résultat suivant :

Proposition 3.42. *La forme d'enlacement d'une 3-variété présentée par chirurgie $M_{\mathcal{L}}$ est la forme d'enlacement associée à sa matrice d'enlacement.*

Preuve. Soient u, u' deux éléments de $H_1(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$, et x', y', z ayant le même sens que dans les définitions 3.37, 3.39. On va montrer que les formules dans ces dernières coïncident i.e on va montrer que

$$\mathcal{L}_M(u, u') = u.x' = \frac{1}{N'} \text{t}y'z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On utilise la suite exacte associée à une variété obtenue par chirurgie

$$0 \rightarrow H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_*} H_1(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

alors on a pour tout $u, u' \in H_1(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$, il existe $z, z' \in H_2(W_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$ sachant que $u = \delta_*(z)$, $u' = \delta_*(z')$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N'u' = 0$. Puisque la suite courte exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induit une suite longue exacte en homologie

$$\dots \rightarrow H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_1(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

on peut construire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B\xi} & H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{B\xi} & H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \rho \downarrow & & \downarrow \\
 H_2(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{B\xi} & H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 \beta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_1(M_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B\xi} & H_1(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

alors pour $u' \in H_1(M, \mathbb{Z})$, il existe $x' \in H_2(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que $\beta(x') = u'$. D'où,

$$\mathcal{L}(u, u') = u.x' = \delta_*(z).x' = z.i^*(x')$$

Mais $N'u' = 0$, alors $N'\delta_*(z') = 0$ et alors $N'z' \in \text{Ker}\delta_*$. En utilisant l'exactitude, on peut relever $N'z'$. Soit $y' \in H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$ tel que $N'z' = j_*(y') = B_{\mathcal{L}}(y')$, et on note

par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les coordonnées de y' dans $H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^m$. En chassant dans le diagramme, on trouve

$$i_*(x') = \frac{1}{N'} y' = \frac{1}{N'} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in H_2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Finalement, notons $z \in H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^m$ par (u_1, u_2, \dots, u_m) , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, u') &= z \cdot i^*(x') \\ &= \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^m u_i \lambda'_i \\ &= \frac{1}{N'} {}^t y' z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Le théorème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés.

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.1 | Introduction | 80 |
| 4.2 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés | 83 |
| 4.3 | Calculs pour la présentation par chirurgie des 3-variétés orientées | 84 |
| 4.4 | Quelques exemples et applications | 87 |
| 4.4.1 | Applications aux espaces lenticulaires | 87 |
| 4.4.2 | Revêtements doubles des fibrés en tores. | 89 |
| 4.4.3 | Application pour les 3 variétés ayant des présentations par chirurgie par des matrices d'enlacements diagonales | 96 |
| 4.4.4 | Le théorème de Borsuk-Ulam pour $S^1 \times S^2$ | 98 |
| 4.4.5 | Application à la 3-bouteille de Klein \mathbb{K}^3 | 99 |
| 4.5 | Compléments sur quelques calculs des groupes cohomologiques de certains espaces | 100 |
| 4.6 | Une autre preuve du théorème de Borsuk-Ulam pour les espaces lenticulaires | 105 |
| 4.7 | Présentations par chirurgie des espaces lenticulaires et des fibrés en tores | 107 |

4.1 Introduction

Le but dans ce chapitre est de discuter via le \mathbb{Z}_2 -indice la propriété de Borsuk-Ulam pour les triplets (M, τ, \mathbb{R}^n) dans le cas où M est une 3-variété compacte connexe et τ est une involution libre sur M . Les nouveaux résultats de cette thèse (voir [9]) seront traités dans ce chapitre. Motivé par le fait que le résultat est connu pour certaines familles de 3-variétés à savoir pour les formes sphériques d'homotopie en 2011 dans [37], les revêtements doubles des variétés de Seifert en 2013 dans [4], les variété $\mathcal{S}ol^3$ en 2014 dans [1], les semi-fibrés en tores en 2016 dans [5], et autres, et

que des conditions cohomologiques générales sont données dans [35]. Nous voulons revoir et reformuler ces conditions en des critères plus simples à calculer. Nous discutons pleinement le \mathbb{Z}_2 -indice selon les opérations cohomologiques appliquées à la classe caractéristique $x \in H^1(N; \mathbb{Z}_2)$, où $N = M/\tau$ est l'espace des orbites. Dans le cas orienté, nous obtenons une expression de ce dernier en utilisant la matrice d'enlacement d'une présentation par chirurgie de l'espace des orbites. Nous énonçons et démontrons alors des théorèmes 4.1 et 4.2 qui concernent le cas général "orienté ou non", et les théorèmes 4.5 et 4.3 qui traitent le cas orienté. Dans la section 4.4, nous illustrons nos résultats par des exemples incluant des classes très importantes de 3-variétés. Nous commençons par montrer leur efficacité sur des résultats déjà connus comme le théorème de Borsuk-Ulam pour la 3-Sphère S^3 et la théorème de Stolz pour l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^3$. Après nous étudions des classes très importantes de 3-Variétés. Nous considérons en premier les revêtements doubles des espaces lenticulaires. Puisque les espaces lenticulaires sont des fibrations de Seifert, le résultat est contenu (bien que caché) dans [4], le cas $(0; (o_1, 0); (q, p))$ dans la notation de Orlik. Alors on discute pleinement les revêtements doubles des fibrés en tores. Ensuite, on considère le cas d'une présentation par chirurgie sur les entrelacs algébriquement scindés. Finalement, nous étudions toutes les involutions libres sur $S^1 \times S^2$, qui incluent des cas non orientés. Dans la proposition 4.16, nous démontrons le théorème de Borsuk-Ulam pour la bouteille de Klein \mathbb{K}^3 avec une involution naturelle. Ce dernier exemple représente un cas concret de l'étude du théorème de Borsuk-Ulam pour une variété non orienté. Les méthodes utilisées sont variées incluant les notions générales de la topologie algébrique et les propriétés de la topologie en basse dimension, plus précisément en dimension 3.

Pour énoncer les résultats principaux de cette thèse, on considère les hypothèses suivantes :

soit (M, τ, \mathbb{R}^n) un triplet comme ci-dessus, et $N = M/\tau$ l'espace des orbites. Soit $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$ la classe caractéristique du \mathbb{Z}_2 - fibré principal $M \rightarrow N$ i.e $x = \gamma^*(\alpha)$, où $\gamma : N \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ classe le fibré et α est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$. La classe x est non triviale puisque M est connexe.

Soient

$$\beta : H^1(\cdot, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(\cdot, \mathbb{Z}),$$

$$\beta_2 : H^1(\cdot, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(\cdot, \mathbb{Z}_2)$$

les homomorphismes de Bockstein associés respectivement aux suites courtes exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

D'après [35], le théorème suivant réduit la discussion à des calculs cohomologiques.

Théorème 4.1. *Soit M une 3-variété compacte connexe avec une involution libre τ , et la classe caractéristique correspondante $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Alors nous avons :*

1. $1 \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \leq 3$.
2. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 1 \iff \beta(x) = 0$.

$$3. \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff x^3 \neq 0.$$

Le triple cup utilisé dans la troisième équivalence peut être difficile à calculer dans les exemples. On va reformuler ce critère. La classe $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$ peut être utilisée pour définir l'homologie et la cohomologie avec des coefficients twistés.

Nous utilisons la notation Λ^- pour l'anneau des coefficients Λ lorsque l'homologie ou la cohomologie est twisté avec la représentation

$$\phi : \pi_1(N) \rightarrow \text{Aut}(\Lambda),$$

où

$$\phi([\gamma])(\lambda) = (-1)^{\langle x, \gamma \rangle} \lambda.$$

Soit $\beta_2^- : H^2(\cdot, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^3(\cdot, \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite courte exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4^- \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$.

Théorème 4.2. *Soit M une 3-variété compacte connexe avec une involution libre τ , et la classe caractéristique $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Soit $\bar{x} \in H_1(N, \mathbb{Z}_2)$ le dual de Poincaré de $\beta_2(x)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

$$(i) \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3,$$

$$(ii) \langle x, \bar{x} \rangle \neq 0,$$

$$(iii) (\beta_2^- \circ \beta_2)(x) \neq 0.$$

Dans le cas orienté, une formule de Turaev [70] donne le triple cup en termes de la forme d'enlacement, ce qui implique un critère plus simple énoncé dans le théorème 4.5. Basé sur cette formule notre contribution principale est un résultat général pour les 3-variétés orientées en utilisant une présentation par chirurgie de l'espace des orbites. Rappelons qu'on peut donner une telle présentation par chirurgie pour chaque 3-variété compacte orientée.

Théorème 4.3. *Soit (M, τ) une 3-variété compacte, connexe et orientée avec une involution libre orientée τ .*

On suppose que le quotient M/τ est homéomorphe à $N_{\mathcal{L}} = \partial W_{\mathcal{L}}$, le résultat de la chirurgie le long d'un entrelacs parallélisé \mathcal{L} à m -composantes dans la sphère S^3 , avec la matrice d'enlacement associée $B_{\mathcal{L}}$. Soit $x \in H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2)$ la classe caractéristique, et soit $X \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ un relèvement entier du cobord $\delta(x) \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^m$, alors nous avons :

$$1. \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 1 \text{ si et seulement si } \frac{1}{2} B_{\mathcal{L}} \cdot X \text{ est nul dans } \text{coker}(B_{\mathcal{L}}) \approx H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}).$$

$$2. \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \frac{1}{2} {}^t X \cdot B_{\mathcal{L}} \cdot X \neq 0 \pmod{2}.$$

4.2 Le théorème de Borsuk-Ulam pour les 3-variétés

Ici nous spécialisons les énoncés de la section 2.3.2 au cas où X est une 3-variété compacte connexe avec une involution libre τ . Nous obtenons immédiatement le théorème 4.1 énoncé dans l'introduction. Le lemme suivant va nous permettre de reformuler l'indice au cas de dimension 3.

Lemme 4.4. *Soient Y un CW-complexe, et $\beta_2 : H^1(Y, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite courte exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$.*

a) *Pour chaque $x \in H^1(Y, \mathbb{Z}_2)$, nous avons $x \smile x = \beta_2(x)$.*

b) *Soit $\beta_2^- : H^2(Y, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite courte exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4^- \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ pour les coefficients x -twistés \mathbb{Z}_4^- . Alors pour $x \in H^1(Y, \mathbb{Z}_2)$, nous avons $x \smile x \smile x = (\beta_2^- \circ \beta_2)(x)$.*

Preuve. La classe de cohomologie $x \in H^1(Y, \mathbb{Z}_2)$ peut être représentée par l'application $f : Y \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, ce qui signifie que $x = f^*(\alpha)$, où α est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$. Par la functorialité, il suffit de prouver la formule pour le générateur α . Rappelons que α engendre librement l'anneau $H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$. La structure cellulaire standard pour $\mathbb{R}P^\infty$ a une seule cellule e_k pour chaque dimension k , avec bord $\partial e_{2j} = 2e_{2j-1}$, $\partial e_{2j+1} = 0$. L'application de coefficients $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4$ induit un isomorphisme $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\simeq} H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_2$. A partir de la suite exacte du Bockstein, nous démontrons que $\beta_2 : \mathbb{Z}_2 = H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ est un isomorphisme, ce qui prouve a).

Pour prouver b), nous voulons comprendre la cohomologie de $\mathbb{R}P^\infty$ avec \mathbb{Z}_2 -coefficients twistés. Pour cette raison, nous utilisons une décomposition cellulaire équivariante de la transformation du revêtement universel S^∞ avec deux cellules en chaque dimension k , e'_k et e''_k . La transformation du revêtement est $-id_{S^\infty}$. Elle respecte l'orientation sur les cellules de dimension impaire et elle change l'orientation sur les cellules de dimension paire. Le complexe twisté est engendré par les cellules e'_k identifiées avec $-e''_k$, avec bord $\partial^- e'_{2j} = 0$, $\partial^- e'_{2j+1} = 2e'_{2j}$. L'application de coefficients $\mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}_2 = H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_4^-) \xrightarrow{\simeq} H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$. Dans la suite courte exacte du Bockstein, nous obtenons $\beta_2^- : \mathbb{Z}_2 = H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ est nul, alors l'application de coefficients $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4^-$ induit un isomorphisme $H^2(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\simeq} H^2(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_4^-) = \mathbb{Z}_2$. Finalement $\beta_2^- : \mathbb{Z}_2 = H^2(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^3(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ est un isomorphisme. Puisque $H^3(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ est engendré par α^3 , nous avons $\alpha^3 = (\beta_2^- \circ \beta_2)(\alpha)$. Ce qui prouve b) par functorialité. \square

Preuve du théorème 4.2. La formule b) dans le lemme précédent établit l'équivalence (i) \Leftrightarrow (iii). Le calcul de ci-dessous montre l'équivalence avec (ii).

$$\begin{aligned} \langle x \smile x \smile x, [N] \rangle &= \langle x \smile \beta_2(x), [N] \rangle \\ &= \langle x, \beta_2(x) \frown [N] \rangle \\ &= \langle x, \bar{x} \rangle . \end{aligned}$$

□

Dans le cas orienté, une formule de Turaev [70] exprime le triple cup en termes de la forme d'enlacement, ce qui donne un critère plus simple.

Théorème 4.5. *Soit M une 3-variété compacte connexe orientée avec une involution libre τ , et la classe caractéristique $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. Soit $\tilde{x} \in \text{Tors}(H_1(N, \mathbb{Z}))$ le dual de Poincaré de $\beta(x)$. Notons par*

$$\mathcal{L}_N : \text{Tors}(H_1(N, \mathbb{Z})) \otimes \text{Tors}(H_1(N, \mathbb{Z})) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

la forme d'enlacement de N . Alors nous avons

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \mathcal{L}_N(\tilde{x}, \tilde{x}) \neq 0 .$$

Preuve du théorème 4.5. Le théorème I de Turaev dans [70], nous permet d'exprimer l'évaluation du produit cup sur la classe fondamentale. Nous reproduisons ci-dessous l'argument dans notre cas spécial. Soit $Dx \in H_2(N, \mathbb{Z}_2)$ le dual de Poincaré de x . Notons les homomorphismes de coefficients comme suit :

$$\phi : H_1(\cdot; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\cdot; \mathbb{Z}_2) , \quad \psi : H_2(\cdot; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(\cdot; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) .$$

La définition de la forme d'enlacement utilise l'homomorphisme de Bockstein

$$B : H_2(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(N, \mathbb{Z}) .$$

Par la functorialité de la suite exacte du Bockstein avec respect des coefficients, nous obtenons $\bar{x} = \phi(\tilde{x})$, et $B(\psi(Dx)) = \tilde{x}$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\tilde{x}, \tilde{x}) &= \psi(Dx) \cdot \tilde{x} \\ &= \frac{1}{2} Dx \cdot \phi(\tilde{x}) \\ &= \frac{1}{2} \langle x, \bar{x} \rangle . \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est obtenu.

□

4.3 Calculs pour la présentation par chirurgie des 3-variétés orientées

Par le théorème de Lickorish et Wallace (voir le théorème 2.1 in [62]), toute 3-variété compacte connexe orientée peut être obtenue par chirurgie sur un entrelacs parallélisé dans la sphère S^3 . Dans cette section nous discutons le \mathbb{Z}_2 -indice pour une 3-variété orientée M équipée d'une involution orientée τ où le quotient $N = M/\tau$ est donné par une présentation par chirurgie, qui permet de décider quand le triplet (M, τ, \mathbb{R}^n) possède la propriété de Borsuk-Ulam.

Nous rappelons tout d'abord quelques faits sur les présentations par chirurgie. Soient \mathcal{L} un entrelacs parallélisé dans la sphère S^3 , $N_{\mathcal{L}}$ la 3-variété orientée, compacte, connexe obtenue par la chirurgie de Dehn sur \mathcal{L} . On rappelle que si L_1, L_2, \dots, L_m sont les composantes de \mathcal{L} , la matrice d'enlacement de \mathcal{L} est une matrice $m \times m$ des entiers a_{ij} , sachant que $a_{ij} = lk(L_i, L_j)$ si $i \neq j$, ici $lk(L_i, L_j)$ est le nombre d'enlacement de L_i et L_j , et a_{ii} est le framing de L_i . On note par $B_{\mathcal{L}}$ la matrice d'enlacement de \mathcal{L} , et par $\bar{B}_{\mathcal{L}}$ sa réduction modulo 2. Il est connu (voir par exemple [62]) que \mathcal{L} définit une 4-variété compacte $W_{\mathcal{L}}$ telle que $\partial W_{\mathcal{L}} = N_{\mathcal{L}}$. En effet, $W_{\mathcal{L}}$ est obtenue en attachant m 2-ances $D^2 \times D^2$ à la boule D^4 à travers un plongement orienté $\coprod_m (-S^1 \times D^2) \hookrightarrow S^3$. Si A est l'un des groupes : $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ or \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , alors

$$H_2(W_{\mathcal{L}}, A) \simeq H^2(W_{\mathcal{L}}, A) \simeq A^m, \quad H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A) \simeq H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A) \simeq A^m$$

Une base canonique pour l'homologie est représentée par les âmes des anses. La base duale est utilisée pour la cohomologie. Dans les suites exactes

$$0 \longrightarrow H_2(N_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{i_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{j_*} H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{\delta_*} H_1(N_{\mathcal{L}}, A) \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

en homologie et respectivement

$$0 \longrightarrow H^1(N_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{\delta^*} H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{j^*} H^2(W_{\mathcal{L}}, A) \xrightarrow{i^*} H^2(N_{\mathcal{L}}, A) \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

en cohomologie, l'homomorphisme j_* (respectivement j^*) est donné par la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} . Nous choisissons toujours ces bases pour $H_2(W_{\mathcal{L}}, A)$ (respectivement $H^2(W_{\mathcal{L}}, A)$) et $H_2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A)$ (respectivement $H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A)$). En plus, la suite exacte (4.1) induit les isomorphismes

$$\ker B_{\mathcal{L}} \simeq H_2(N_{\mathcal{L}}, A) \simeq H^1(N_{\mathcal{L}}, A) \quad \text{et} \quad \text{coker} B_{\mathcal{L}} \simeq H_1(N_{\mathcal{L}}, A) \simeq H^2(N_{\mathcal{L}}, A).$$

Preuve du théorème 4.3. Soit (M, τ) une 3-variété compacte connexe orientée avec une involution libre orientée τ . Le quotient $N = M/\tau$ est homéomorphe à $N_{\mathcal{L}} = \partial W_{\mathcal{L}}$, où $W_{\mathcal{L}}$ est obtenu de D^4 en attachant m anses d'indice 2 le long d'un entrelacs parallélisé \mathcal{L} , comme c'est expliqué ci-dessus. Soit $x \in H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2)$ la classe caractéristique, et soit $X \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ un relèvement entier du cobord $\delta(x) \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2)$.

1. Nous allons obtenir la première équivalence du théorème 4.1 en calculant $\beta(x)$. Rappelons que l'homomorphisme de Bockstein $\beta : H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$ est l'homomorphisme connectant associé avec la suite courte exacte de complexes de cochaînes

$$0 \longrightarrow C^*(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} C^*(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} C^*(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0 .$$

Ici nous pouvons utiliser les complexes associés avec n'importe quelle décomposition cellulaire. La functorialité de la suite exacte du Bockstein affirme que l'homomorphisme de Bockstein peut être calculé avec une autre suite exacte

courte des complexes de cochaînes à condition qu'il existe une suite d'applications vers ou depuis la précédente, induisant des isomorphismes en cohomologie. Le diagramme commutatif suivant fournira un tel complexe .

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B_{\mathcal{L}}} & H^2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \\
\times 2 \downarrow & & \times 2 \downarrow & & \times 2 \downarrow & & \times 2 \downarrow \\
H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{B_{\mathcal{L}}} & H^2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \\
\rho \downarrow & & \rho \downarrow & & \rho \downarrow & & \rho \downarrow \\
H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\bar{B}_{\mathcal{L}}} & H^2(W_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i^*} & H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2)
\end{array} \tag{4.3}$$

Pour $A = \mathbb{Z}$ or $A = \mathbb{Z}_2$, la cohomologie $H^*(N_{\mathcal{L}}, A)$ peut être calculée avec le complexe de cochaînes

$$C_A^0 = A \xleftarrow{0} C_A^1 = H^2(W_{\mathcal{L}}, A) \xleftarrow{B_{\mathcal{L}} \otimes A} C_A^2 = H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, A) \xleftarrow{0} C_A^3 = A$$

Notons par $V_{\mathcal{L}}$ un voisinage tubulaire ouvert de \mathcal{L} dans S^3 . Alors nous avons $N_{\mathcal{L}} = (S^3 - V_{\mathcal{L}}) \cup (\Pi_m D^2 \times S^1)$ et nous allons considérer $\dot{N}_{\mathcal{L}} = S^3 - V_{\mathcal{L}}$ comme inclut dans $N_{\mathcal{L}}$. Nous supposons que la structure cellulaire est telle que

- $\dot{N}_{\mathcal{L}}$ est un sous complexe,
- il a une seule 0-cellule,
- il y-a une structure cellulaire relative pour $(N_{\mathcal{L}}, \dot{N}_{\mathcal{L}})$ avec une 2-cellule e_i^2 pour chaque composante de \mathcal{L} qui est l'image du disque orienté $D^2 \times 1$, complétée par m 3-cellules.

Un morphisme de chaîne vers le complexe cellulaire de cochaînes est définie comme suit :

- le générateur en degré 0 évalue 1 sur la 0-cellule,
- le i -ème générateur en degré 1 évalue sur une cellule γ comme l'enlacement $lk(L_i, \gamma)$,
- le i -ème générateur en degré 2 évalue 1 sur e_i^2 et 0 sur les autres 2-cellules,
- le générateur en degré 3 évalue 1 sur chaque 3-cellule orientée.

l'homomorphisme de connexion β est obtenu comme suit.

Nous avons $B_{\mathcal{L}}X \in Ker \rho$ et il existe $Y \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m$ tel que $2Y = B_{\mathcal{L}}.X$. Alors Y représente $\beta(x) = i^*(Y) \in H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong coker(B_{\mathcal{L}})$. Finalement, $\beta(x) = i^*(\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}.X)$, alors par 1) du théorème 4.1, nous obtenons la première équivalence du théorème 4.3.

2. Pour montrer que $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3 \iff \frac{1}{2} {}^t X.B_{\mathcal{L}}.X \neq 0 \pmod{2}$, nous allons utiliser les théorèmes 4.2 et 4.5. Soit $\bar{x} \in TorsH_1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2)$ le dual de Poincaré de $\beta_2(x)$ et $\tilde{x} \in TorsH_1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z})$ le dual de Poincaré de $\beta(x)$. Nous avons

$$\bar{x} = (D \circ \beta_2)(x) = (D \circ \rho \circ i^*)(Y) \text{ et } \tilde{x} = D \circ \beta(x) = D \circ i^*(Y)$$

où D est l'isomorphisme de la dualité de Poincaré et $Y = \frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}(X)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x, \bar{x} \rangle &= 2\mathcal{L}_N(\tilde{x}, \tilde{x}) \\ &= 2\langle x, (D \circ i^*)(Y) \rangle \\ &= 2\langle \delta x, Y \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant que $\delta(x) = \rho(X)$, nous déduisons

$$\begin{aligned}\langle x, \bar{x} \rangle &= {}^tXY \text{ mod. } 2 \\ &= \frac{1}{2} {}^tXB_{\mathcal{L}}X \text{ mod. } 2.\end{aligned}$$

Ce qui donne les résultats. □

Récupération des résultats classiques. Nous pouvons directement vérifier qu'à partir du théorème 4.3, on retrouve des résultats classiques bien connus. Pour la sphère S^3 avec une action antipodale, l'espace des orbites est l'espace projectif $\mathbb{R}P^3$, obtenu par chirurgie sur un nœud trivial avec framing 2. Nous avons $B_{\mathcal{L}} = (2)$. Soit x la classe caractéristique dans $H^1(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Un relèvement entier de δx est 1, et $\frac{1}{2} {}^tXB_{\mathcal{L}}X = 1$. Ceci prouve que l'indice est 3 comme prévu.

Pour l'espace projectif $\mathbb{R}P^3$ avec l'action τ induite par la multiplication par le nombre complexe i , l'espace des orbites est l'espace lenticulaire $L(4, 1)$, qui est obtenu par chirurgie sur le nœud trivial avec framing (-4) [45, Example 5.3.2], et $B_{\mathcal{L}} = (-4)$. La classe caractéristique x est le générateur de $H^1(L(4, 1), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Un relèvement entier de $\delta(x)$ est 1. Nous avons $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}X = 2$ ne s'annule pas dans $H^2(L(4, 1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$, et $\frac{1}{2} {}^tXB_{\mathcal{L}}X \text{ mod. } 2 = -2 = 0 \text{ mod. } 2$. Ce qui prouve que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^3, \tau) \leq 2$. En plus, $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}X = 2$ ne s'annule pas dans $\text{coker}(B_{\mathcal{L}}) = \mathbb{Z}_4$. Par conséquent, $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^3, \tau) = 2$. Ce résultat été obtenu en premier par Stephan Stolz [69]¹ en 1989.

4.4 Quelques exemples et applications

4.4.1 Applications aux espaces lenticulaires

Le but de cette section est d'étudier le théorème de Borsuk-Ulam pour les revêtements doubles des espaces lenticulaires en utilisant leur présentation par chirurgie. On connaît qu'ils peuvent être obtenus du nœud trivial par une chirurgie rationnelle avec framing $-\frac{p}{q}$ (voir par exemple [62] and [61]). Mais ils peuvent aussi être représentés par une chirurgie entière sur un entrelacs parallélisé \mathcal{L} ayant n -composantes avec framing $(a_i)_{i=1, n}$ (voir les mêmes références ou [45]), où $-\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ est une décomposition en fraction continue. C'est une décomposition sous la forme

$$-\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}.$$

¹L'indice dans le papier de ce dernier est appelé degré 'level' et il est différent de notre définition, à savoir le degré $s(X, \tau)$ est $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \tau) + 1$.

Les entrées diagonales de la matrice d'enlacement sont les a_i , $i = \overline{1, n}$. Le signe des nombres d'enlacement non nuls dépend du choix des orientations. Il convient ici et dans l'exemple suivant de suivre [45, Figures 14,17]. Alors nous obtenons la matrice $n \times n$ définie par :

$$B_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

Notons que \mathcal{L} spécifie aussi la 4-variété $W_{\mathcal{L}}$ avec bord $L(p, q)$, obtenue en ajoutant des 2-anses à la 4-boule le long de \mathcal{L} . En utilisant la matrice de ci-dessus, les groupes d'homologie et de cohomologie des espaces lenticulaires peuvent être calculés. Dans une partie de la preuve de la Proposition 4.17 ci-dessous, nous obtenons que

$$H_2(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq 0 \simeq H^1(L(p, q), \mathbb{Z}), \quad H_1(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p \simeq H^2(L(p, q), \mathbb{Z})$$

aussi

$$H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Après cette introduction, nous voyons qu'un espace lenticulaire $L(p, q)$ possède un revêtement double connexe si et seulement si p est pair. En effet,

$$\text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx \text{Hom}(H_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(N, \mathbb{Z}_2).$$

Dès maintenant, nous supposons que p est pair, alors l'élément non trivial $\alpha \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2)$ donne naissance à une paire (M, τ) , où M est une 3-variété fermée connexe et τ est une involution libre sur M associée au revêtement double avec l'action τ donnée par la transformation non triviale du revêtement. Nous pouvons vérifier que le revêtement M est aussi un lenticulaire, à savoir $L(\frac{p}{2}, q)$.

Proposition 4.6. *Soient $L(p, q)$ un lenticulaire sachant que p est pair, $(M, \tau) = (L(\frac{p}{2}, q), \tau)$ est comme ci-dessus, et $x \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2)$ est la classe non triviale (qui classe le revêtement).*

1. *Nous avons $\beta(x) \neq 0$. Par conséquent, $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \geq 2$ et (M, τ, \mathbb{R}^2) est toujours un Borsuk-Ulam triplet.*
2. *$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod{4}$.*

Preuve. Nous allons utiliser les résultats du théorème 4.3. Par induction, nous voyons que la matrice d'enlacement est équivalente à la matrice

$$B_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \alpha_n = a_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_n = a_n$, $\alpha_{n-1} = -1 + a_{n-1}a_n$ et $\alpha_i = -\alpha_{i+2} + a_i\alpha_{i+1}$ pour $n - 2 \geq i \geq 1$. Par ailleurs, nous remarquons que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2} = a_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = a_1 - \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{a_4}}} = \dots = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\dots a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}.$$

Ainsi nous obtenons $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{p}{q}$. Pour chaque i on a α_i est premier avec α_{i+1} . On conclut que $\det(B_{\mathcal{L}}) = \alpha_1 = \pm p$. Par conséquent, comme prévu, nous obtenons

$$\ker(B_{\mathcal{L}}) \simeq H_2(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq H^1(L(p, q), \mathbb{Z}) = 0$$

$$\text{coker}(B_{\mathcal{L}}) = H_1(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p \simeq H^2(L(p, q), \mathbb{Z})$$

et

$$\ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2) \simeq H_2(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{if } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

On considère le cas où p est pair et soit $x \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ la classe caractéristique qui est l'unique élément non trivial dans ce groupe. En utilisant le diagramme commutatif 4.3, on considère $X \in H^2(W_{\mathcal{L}}, N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$. Nous pouvons choisir comme relèvement entier de $\delta(x)$ le vecteur $X = {}^t(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, 1)$. Par conséquent,

$$i^*\left(\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}X\right) = \frac{1}{2} {}^t(\alpha_1, 0, \dots, 0) \neq 0 \in H^2(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p,$$

Ainsi d'après l'énoncé 1 du 4.3 on obtient $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \geq 2$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle x, \bar{x} \rangle &= \frac{1}{2} {}^tXB_{\mathcal{L}}X \text{ mod } 2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 \text{ mod } 2 \\ &= \frac{1}{2}pq \text{ mod } 2 \end{aligned}$$

En utilisant l'énoncé 2 du 4.3, ceci prouve que $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod{4}$. □

4.4.2 Revêtements doubles des fibrés en tores.

Dans cette partie, nous appliquons notre méthode de chirurgie pour l'indice de Borsuk-Ulam des revêtements doubles des fibrés en tores orientés sur un cercle. Suivant la classification de Thurston, ces 3-variétés orientées se divisent en trois sous-classes ayant respectivement une géométrie euclidienne, Nil géométrie et Sol géométrie. Pour autant que nous le sachions, la discussion de l'indice de Borsuk-Ulam dans le dernier cas, c'est-à-dire lorsque la monodromie est Anosov [1], est connue.

Définition 4.7. Soit A un difféomorphisme du tore T^2 . Le fibré en tores associé à A est l'espace d'identification

$$T_A = T^2 \times [0, 1] / (x, 1) \sim (A(x), 0)$$

Pour un fibré en tores T_A , on peut isotoper A pour être un difféomorphisme linéaire, ce qui veut dire que nous avons $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. T_A est appelé un fibré en tores avec matrice de monodromie A . Dans le cas orienté, A doit être dans le groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{Z})$.

On rappelle que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note par I la matrice unité. En utilisant que $S^2 = -I = SIS$, on obtient que chaque A peut être décomposée comme $A = S^\epsilon T^{a_1} S T^{a_2} \dots S T^{a_n} S^\eta$, avec $\epsilon, \eta \in \{0, 1\}$. Si ϵ ou η est 0, alors on peut remplacer S^0 par $SISISIS$. Dans tous les cas on peut obtenir une décomposition commençant et finissant par S :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S T^{a_1} S T^{a_2} \dots S T^{a_n} S .$$

Alors une présentation par chirurgie pour T_A , $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, est donnée dans [45, Theorem A.4]. Avec une numérotation appropriée des $n+2$ composantes, la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ est comme suit :

$$B_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & a_2 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & a_{n-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & a_n & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En premier, on décrit $H^1(T_A, \mathbb{Z}_2)$.

Lemme 4.8. Soit T_A un fibré en tores orienté avec une matrice de monodromie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

- a) Si a et d n'ont pas la même parité, alors $H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.
- b) Si $a \equiv d \equiv 0 \pmod{2}$, alors $b \equiv c \equiv 1 \pmod{2}$ et $H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^2$.
- c) Si $a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ alors $bc \equiv 0 \pmod{2}$, et si $b \equiv 1 \pmod{2}$ ou $c \equiv 1 \pmod{2}$ alors nous avons $H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^2$.
- d) Si $A \equiv I \pmod{2}$, alors $H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^3$.

Preuve. Ceci peut être directement prouvé à partir de la matrice de monodromie avec un argument de Mayer-Vietoris. Nous utiliserons plutôt la matrice d'enlacement dans le but d'avoir une description des générateurs dans le schéma de la chirurgie. Nous utilisons des transformations successives des lignes sur $B_{\mathcal{L}}$ pour clarifier son rang et son noyau, à savoir $R_{n-1} \leftarrow R_{n-1} + a_n R_n$, $R_i \leftarrow R_i + a_i R_{i+1} - R_{i+2}$, pour $i = n - 2$ to 1, et alors $R_{n+1} \leftarrow R_{n+1} - R_2$. Nous obtenons une matrice B' avec le même noyau mod 2.

$$B'_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 & \gamma_1 - 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_i & \gamma_i & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & -1 & 0 & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & 0 & -1 & \alpha_n & \gamma_n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & 0 & 0 & -1 - \alpha_2 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec la formule récurrente décroissante $\alpha_n = a_n$, $\gamma_n = -1$, $\alpha_{n+1} = 1$, $\gamma_{n+1} = 0$ et $\alpha_i = a_i \alpha_{i+1} - \alpha_{i+2}$, $\gamma_i = a_i \gamma_{i+1} - \gamma_{i+2}$ pour $i = n - 1$ to 1.

Une récurrence décroissante montre que pour $i = n$ à 1 nous avons

$$ST^{a_i} \dots ST^{a_n} S = \begin{pmatrix} -\alpha_{i+1} & -\gamma_{i+1} \\ \alpha_i & \gamma_i \end{pmatrix}$$

Ainsi nous obtenons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\gamma_2 \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

On voit qu'une solution $x = {}^t(x_1, \dots, x_{n+2})$ de l'équation du noyau mod 2 est uniquement déterminée par les trois derniers composantes qui sont soumis aux conditions

$$\begin{cases} \alpha_1 x_n + (\gamma_1 - 1)x_{n+1} = 0 \\ (-1 - \alpha_2)x_n - \gamma_2 x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

qui sont

$$\begin{cases} cx_n + (d - 1)x_{n+1} = 0 \\ (a - 1)x_n + bx_{n+1} = 0 \end{cases}$$

La description de la base utilisera les éléments dans \mathbb{Z}_2^{n+2} définis par

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Si a, d n'ont pas la même parité alors

$$H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2,$$

engendré par u .

b) Si a, d sont pairs alors b et c sont impairs et

$$H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^2,$$

avec la base $(u, v + w)$.

c) Si a, d sont impairs, alors bc est pair. Si en plus $b \equiv 1 \pmod{2}$ ou $c \equiv 1 \pmod{2}$, alors

$$H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^2.$$

avec la base (u, w) lorsque b est impair, et (u, v) lorsque c est impair.

d) Si a, d sont impairs et $b \equiv c \equiv 0 \pmod{2}$, alors

$$H^1(T_A, \mathbb{Z}_2) \simeq \ker(B_{\mathcal{L}} \otimes \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^3,$$

avec la base (u, v, w) .

□

Nous aurons également besoin de connaître le conoyau.

Lemme 4.9. *Soit T_A un fibré en tores orienté avec une matrice de monodromie*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

et une présentation par chirurgie donnée par un entrelacs \mathcal{L} comme ci-dessus. Alors $H^2(T_A, \mathbb{Z})$ est isomorphe à

$$\mathbb{Z} \oplus \text{coker}(A - I).$$

Si $A = ST^{a_1}ST^{a_2} \dots ST^{a_n}S$ est une décomposition qui donne une présentation par chirurgie sur un entrelacs \mathcal{L} et e_1, \dots, e_{n+2} est la base canonique du module \mathbb{Z}^{n+2} sur laquelle la matrice d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ agit, alors le facteur direct libre \mathbb{Z} de la somme est engendré par e_{n+2} , et $A - I$ est une application linéaire

$$\mathbb{Z}^2 \cong \text{Span}(e_n, e_{n+1}) \rightarrow \text{Span}(e_{n+1}, e_1)$$

Remarque 4.10. *Si $a + d = 2$ et $A \neq I$, alors la matrice $A - I$ est de rang 1. Son image est un sous groupe discret dans une droite, donc un groupe cyclique. On note par $\text{gcd}(A - I)$ un générateur de ce groupe ou d'une manière équivalente qui minimise la norme. Il peut être obtenu à partir des colonnes de $A - I$ en adaptant l'algorithme euclidien.*

Preuve. Le conoyau de $B_{\mathcal{L}}$ est égal à \mathbb{Z}^{n+2} modulo l'espace engendré par les colonnes. En utilisant les colonnes de 2 à n nous obtenons que le conoyau est engendré par la base e_1, e_{n+1}, e_{n+2} . Ce qui implique que

$$\text{coker}(B_{\mathcal{L}}) = E/\text{Im}(B_{\mathcal{L}}) \cap E ,$$

où $E = \text{Span}(e_{n+2}, e_{n+1}, e_1)$.

Une combinaison linéaire $y_1e_1 + y_{n+1}e_{n+1} + y_{n+2}e_{n+2}$ appartient à $\text{Im}(B_{\mathcal{L}})$ si et seulement si le système linéaire $B_{\mathcal{L}}x = y$ possède au moins une solution ; ici $y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$. Les transformations linéaires utilisées pour le noyau produisent un système équivalent $B'_{\mathcal{L}}x = y$. Notons que la partie droite de l'équation ne change pas sous les transformations des lignes, car on modifie avec les lignes n jusqu'à 2 pour laquelle la composante de y s'annule. On voit que la solution est uniquement déterminée par les trois dernières composantes qui sont soumises aux conditions

$$\begin{cases} \alpha_1 x_n + (\gamma_1 - 1)x_{n+1} & = y_1 \\ (-1 - \alpha_2)x_n - \gamma_2 x_{n+1} & = y_{n+1} \end{cases}$$

qui sont

$$\begin{cases} (a - 1)x_n + bx_{n+1} & = y_{n+1} \\ cx_n + (d - 1)x_{n+1} & = y_1 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi la conclusion. \square

Maintenant nous sommes prêt pour discuter l'indice de Borsuk-Ulam pour tous les revêtements doubles de T_A . Dans le cas $a + d = 2$, les colonnes de la matrice $A - I = \begin{pmatrix} a - 1 & b \\ c & d - 1 \end{pmatrix}$ engendrent un groupe cyclique.

Théorème 4.11. *Soit T_A un fibré en tores orienté avec une matrice de monodromie*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

et soit (M, τ) le revêtement double de T_A avec la transformation du revêtement τ définie par la classe caractéristique non nulle $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2$ soumise à la condition du noyau. L'indice $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = f(A, x)$ de Borsuk-Ulam est donné comme suit.

1. Pour chaque A , nous avons $f(A, u) = 1$.
2. Si $x = \beta v + \gamma w$ est une classe caractéristique non nulle, alors $f(A, u + x) = f(A, x)$.
3. Tous les indices de Borsuk-Ulam sont donnés par.
 - (a) Si a et d n'ont pas la même parité, alors seulement u est caractéristique et $f(A, u) = 1$.

(b) Si $a \equiv d \equiv 0 \pmod{2}$, alors

$$f(A, u) = 1$$

$$f(A, v + w) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + v + w) = 3 \Leftrightarrow (a + b)(c + d - 2) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f(A, v + w) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + v + w) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} a + b - 1 \\ c + d - 1 \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

Ici $\operatorname{gcd}(A - I)$ est le générateur du groupe cyclique engendré par les colonnes de $A - I$.

(c) Si $a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$, alors

i. si $b \equiv 1 \pmod{2}$ nous avons

$$f(A, u) = 1$$

$$f(A, w) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + w) = 3 \Leftrightarrow a(c - 1) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f(A, w) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + w) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} a - 1 \\ c \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

ii. si $c \equiv 1 \pmod{2}$ nous avons

$$f(A, u) = 1$$

$$f(A, v) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + v) = 3 \Leftrightarrow b \equiv 2 \pmod{4},$$

$$f(A, v) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + v) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} b \\ d - 1 \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

(d) Si $A \equiv I \pmod{2}$, il y-a 7 possibilités pour la classe caractéristique x , et nous avons :

$$f(A, u) = 1$$

$$f(A, v) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + v) = 3 \Leftrightarrow b \equiv 2 \pmod{4},$$

$$f(A, v) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + v) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} b \\ d - 1 \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

$$f(A, w) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + w) = 3 \Leftrightarrow a(c - 1) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f(A, w) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + w) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} a - 1 \\ c \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

$$f(A, v + w) = 3 \Leftrightarrow f(A, u + v + w) = 3 \Leftrightarrow (a + b)(c + d - 2) \equiv 1 \pmod{4},$$

$$f(A, v + w) = 1 \Leftrightarrow f(A, u + v + w) = 1 \Leftrightarrow a + d = 2 \text{ et } \begin{pmatrix} a + b - 1 \\ c + d - 1 \end{pmatrix} \in 2 \operatorname{gcd}(A - I) \mathbb{Z}.$$

Preuve. Nous avons les relèvements entiers de u, v, w :

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons $B_{\mathcal{L}}U = 0$ ce qui prouve 1. et 2. Alors on calcul :

$$B_{\mathcal{L}}V = \begin{pmatrix} \gamma_1 - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, B_{\mathcal{L}}W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Le cas $a \not\equiv d$ modulo 2 est résolu par 1.
 (b) Le cas où a, d sont pairs et alors b, c sont impairs. La classe caractéristique va prendre les valeurs $u, v + w, u + v + w$. La cas u est récupéré par 1). Par ailleurs, nous avons

$$B_{\mathcal{L}}(V + W) = \begin{pmatrix} c + d - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a + b - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$${}^t(V + W)B_{\mathcal{L}}(V + W) = -[(a + b)(c + d - 2) + 1].$$

Maintenant on utilise le théorème 4.3. Le critère de l'indice 3 donne $f(A, v + w) = 3$ si et seulement si $(a + b)(c + d - 2) + 1 \equiv 2 \pmod{4}$.

Pour le critère de l'indice 1, suivant la description de $\text{coker}(B_{\mathcal{L}})$, nous obtenant que $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}(V + W)$ s'annule dans le conoyau si et seulement si le système ci-dessous possède une solution entière.

$$\begin{cases} (a - 1)x + by = \frac{a+b-1}{2} \\ cx + (d - 1)y = \frac{c+d-1}{2} \end{cases}$$

Dans le cas $a + d \neq 2$, le système a une solution rationnelle unique $x = y = \frac{1}{2}$ et n'a pas une solution entière. Dans le cas $a + d = 2$, le système possède une solution entière si et seulement si $\begin{pmatrix} \frac{a+b-1}{2} \\ \frac{c+d-1}{2} \end{pmatrix}$ appartient au groupe engendré par les colonnes de $(A - I)$ qui est $\mathbb{Z} \text{gcd}(A - I)$. Par conséquent la condition écrite dans le théorème.

(c) Si $a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ alors nous avons deux cas

(a) Si $b \equiv 1 \pmod{2}$, la classe caractéristique va prendre les valeurs u , w ou $u + w$. $f(A, u)$ est calculé dans 1). Nous avons

$${}^tWB_{\mathcal{L}}W = -ac + a - 1.$$

Le critère pour l'indice 3 donne $f(A, w) = 3$ si et seulement si $ac - a + 1 \equiv 2 \pmod{4}$.

Par ailleurs, $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}W$ s'annule dans le conoyau si et seulement si le système ci-dessous a une solution entière.

$$\begin{cases} (a-1)x + by = \frac{a-1}{2} \\ cx + (d-1)y = \frac{c}{2} \end{cases}$$

Dans le cas $a + d \neq 2$ le système possède une solution rationnelle unique $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, et n'a pas une solution entière. Dans le cas $a + d = 2$, le système possède une solution entière si et seulement si $\begin{pmatrix} \frac{a-1}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$ appartient à $\mathbb{Z} \gcd(A - I)$.

(b) Si $c \equiv 1 \pmod{2}$, la classe caractéristique va prendre les valeurs u , v or $u + v$. Nous avons

$${}^tVB_{\mathcal{L}}V = b(-d + 2).$$

Notons que d est impair et nous obtenons $f(A, v) = 3$ si et seulement si $b \equiv 2 \pmod{4}$.

Par ailleurs, en utilisant l'expression ci-dessus de $B_{\mathcal{L}}V$, nous voyons que $f(A, v) = 1$ si et seulement si $a + d = 2$ et $\begin{pmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{d-1}{2} \end{pmatrix}$ appartient à $\mathbb{Z} \gcd(A - I)$.

(d) La preuve dans le cas $A \equiv I \pmod{2}$ utilise les mêmes calculs des cas précédents.

□

4.4.3 Application pour les 3 variétés ayant des présentations par chirurgie par des matrices d'enlacements diagonales

Dans cette partie, on considère les triplets (M, τ, \mathbb{R}^n) , et $N = M/\tau = S^3(\mathcal{L})$ i.e N est obtenue de S^3 par chirurgie entière sur \mathcal{L} . On suppose que dans ce cas la matrice

d'enlacement $B_{\mathcal{L}}$ of N est la $n \times n$ matrice diagonale de la forme

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & a_\nu & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & b_1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \dots & \dots & & & b_\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où a_i, b_i dans le premier bloc sont respectivement des entiers pairs et impairs, et tous les autres coefficients sont nuls. Dans ce cas, nous avons

$$H^1(N_{\mathcal{L}}, \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z}_2)^\nu \oplus (\mathbb{Z}_2)^m$$

avec $m = n - (\nu + v)$.

Alors la classe caractéristique est de la forme $x = x' + x''$ où $x' \in (\mathbb{Z}_2)^\nu$ et $x'' \in (\mathbb{Z}_2)^m$.

Proposition 4.12. *Sous les hypothèses de ci-dessus, nous avons*

1. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \geq 2$ si et seulement si $x' \neq 0$.
2. $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$ si et seulement si $\sum_{\substack{1 \leq i \leq \nu \\ x'_i \neq 0}} a_i$ n'est pas divisible par 4.

Preuve. Notons par $X \in \mathbb{Z}^n$ (resp. X', X'') les relèvements de x (resp. x', x'') dont les composantes sont dans $\{0, 1\}$. On va utiliser les critères du théorème 4.3. Nous avons $B_{\mathcal{L}}X = B_{\mathcal{L}}X'$. Les composantes non nulles de $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}X$ sont $\frac{a_i}{2}$ pour chaque x'_i non nul. Il s'annule si $x' = 0$, et si $x' \neq 0$ alors $\frac{1}{2}B_{\mathcal{L}}X$ n'appartient pas à l'image de $B_{\mathcal{L}}$. Ce qui prouve le premier énoncé.

Le deuxième énoncé vient du calcul

$$\frac{1}{2} {}^t X B_{\mathcal{L}} X = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \nu \\ x'_i \neq 0}} a_i .$$

□

Remarque 4.13. *La proposition 4.12 peut être utilisée dans des cas plus généraux. En effet, soit (M, τ) un \mathbb{Z}_2 -espace, où M est une 3-variété compacte connexe orientée, $N = M/\tau$ est tel que $N = N_{\mathcal{L}}$ où \mathcal{L} est un entrelacs parallélisé. En utilisant le corollaire 2.5 dans [59], il existe des espaces lenticulaires $L(p_i, 1)$, $i = \overline{1, \nu}$ avec $|p_i| \leq |H_1(N, \mathbb{Z})|$, sachant que la variété*

$$N' = N \# L(p_1, 1) \# L(p_2, 1) \# \dots \# L(p_\nu, 1)$$

peut être obtenue par une chirurgie entière le long d'un certain entrelacs parallélisé algébriquement scindé \mathcal{L}' . Ceci permet de calculer l'indice $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau)$, en utilisant N' avec une classe caractéristique étendue par zéro sur les espaces lenticulaires.

4.4.4 Le théorème de Borsuk-Ulam pour $S^1 \times S^2$

Dans cette section, on va discuter toutes les involutions libres sur $S^1 \times S^2$. Toutes les applications données ci-dessus traitent les cas où l'espace des orbites N est une 3-variété compacte connexe orientée. Ici nous allons aussi avoir des espaces des orbites qui ne sont pas orientés. Le théorème suivant prouvé par Y. Tao en 1962, décrit toutes les involutions libres.

Théorème 4.14. [80] *Si T est une involution libre de $S^1 \times S^2$, alors l'espace des orbites $N = M/T$ est homéomorphe soit à (1) $S^1 \times S^2$ ou (2) la 3-bouteille de Klein (qu'on note par \mathbb{K}^3), ou (3) $S^1 \times \mathbb{R}P^2$, ou (4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.*

En utilisant le théorème de ci-dessus, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.15. *Soit le triplet $(S^1 \times S^2, \tau, \mathbb{R}^n)$, où τ est une \mathbb{Z}_2 -action libre sur $S^1 \times S^2$, et soit N l'espace des orbites de cette action. Alors nous avons les cas suivant :*

1. *Si N est $S^1 \times S^2$, alors $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 1$.*
2. *Si N est la 3-bouteille de Klein \mathbb{K}^3 , alors $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 1$.*
3. *Si N est $S^1 \times \mathbb{R}P^2$, alors $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 2$.*
4. *Si N est $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, alors $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 2$.*

Preuve. Le premier cas : $N = S^1 \times S^2$

Ici après les calculs des groupes de cohomologie de la 3-variété $S^1 \times S^2$, nous obtenons $H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $H^2(S^1 \times S^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, alors l'homomorphisme de Bockstein $\beta \in Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$ s'annule. Ainsi, $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 1$.

Le deuxième cas : $N = \mathbb{K}^3$.

Ici, $\mathbb{K}^3 = [0, 1] \times S^2 / (1, x) \sim (0, -x)$. Nous prenons

$$A = [0, \frac{1}{2}] \times S^2, \quad B = [\frac{1}{2}, 1] \times S^2 \quad \text{et} \quad A \cap B = \{\frac{1}{2}\} \times S^2 \sqcup \{0\} \times S^2.$$

En utilisant la longue suite exacte de Mayer-Vietoris et le théorème de coefficients universels, nous obtenons

$$H^1(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad H^2(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z}) \simeq 0.$$

Par conséquent, l'homomorphisme de Bockstein $\beta : H^1(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z})$ est nul, et dans ce cas nous avons $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 1$.

Le troisième cas : $N = S^1 \times \mathbb{R}P^2$.

En utilisant la formule de Künneth, nous obtenons

$$H^1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Le premier facteur de cette somme directe est engendré par $u_1 \times v_0$, l'image de $u_1 \otimes v_0$ par le produit cross \times , où u_1, v_0 sont respectivement les générateurs de $H^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $H^0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. Puisque, l'anneau \mathbb{Z}_2 possède un élément

identité et v_0 est la seule classe non nulle dans $H^0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, elle correspond à l'élément identité du cup produit défini par le 0 cycle prenant la valeur 1 sur chaque 0 simplexe singulier. Notons le par $\mathbf{1}$. Ainsi, $u_1 \times \mathbf{1}$ est le générateur du premier facteur de la somme directe dans $H^1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$.

En utilisant un argument similaire, nous obtenons que $\mathbf{1} \times v_1$ est le générateur du second facteur de la dernière somme directe, où $\mathbf{1} \in H^0(S^1, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $v_1 \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ sont les générateurs de ces modules.

La classe caractéristique $x \in H^1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ dans ce cas va prendre la valeur $(0, 1)$ dans $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ puisque son revêtement associé est $S^1 \times S^2$. Alors en utilisant les propriétés du cup produit et du cross produit, nous avons

$$\begin{aligned} \beta_2(x) &= x \smile x \\ &= (0 + \mathbf{1} \times v_1) \smile (0 + \mathbf{1} \times v_1) \\ &= (\mathbf{1} \times v_1) \smile (\mathbf{1} \times v_1) \\ &= \mathbf{1} \times v_1^2. \end{aligned}$$

Puisque v_1 est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, nous savons que v_1^2 est aussi le générateur de $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$, alors $v_1^2 \neq 0$ et $\beta_2(x) \neq 0$. Ainsi, $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) \geq 2$.

Maintenant on calcule le triple cup,

$$\begin{aligned} x^3 &= \beta_2(x) \smile x \\ &= (\mathbf{1} \times v_1^2) \smile (\mathbf{1} \times v_1) \\ &= \mathbf{1} \times v_1^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour des raisons de dimension. Par conséquent, dans ce cas nous avons

$$ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 2.$$

La quatrième cas : $N = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.

Ici nous sommes dans le cas des variétés orientées. Nous pouvons utiliser une présentation par chirurgie à savoir un entrelacs trivial avec deux composantes de framing 2. La matrice d'enlacement est la matrice

$$B_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ils existent 3 revêtements doubles non équivalents de $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$. Ceux avec des classes caractéristiques $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$, celui qui reste est $S^1 \times S^2$ avec une classe caractéristique $(1, 1)$. D'après la discussion sur la présentation par chirurgie diagonale de la section précédente, nous obtenons $ind_{\mathbb{Z}_2}(S^1 \times S^2, \tau) = 2$.

□

4.4.5 Application à la 3-bouteille de Klein \mathbb{K}^3

L'étude de l'application précédente nous permet de remarquer qu'il existe un revêtement double $p : \mathbb{K}^3 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}P^2$ qui associe à chaque classe $[(t, x)] \in \mathbb{K}^3$, la

classe $[(t, [x]) \in S^1 \times \mathbb{R}P^2$. La \mathbb{Z}_2 -action libre correspondante sur \mathbb{K}^3 associée à ce revêtement est $[t, x] \rightarrow [t, -x]$. Nous avons vu que $H^1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ce qui implique qu'ils existent 3 revêtements doubles connexes non équivalents de $S^1 \times \mathbb{R}P^2 : S^1 \times S^2$ avec la classe caractéristique $(0, 1)$, $S^1 \times \mathbb{R}P^2$ avec la classe caractéristique $(1, 0)$ et \mathbb{K}^3 avec la classe caractéristique $(1, 1)$.

Proposition 4.16. *Soit (\mathbb{K}^3, τ) la bouteille de Klein*

$$\mathbb{K}^3 = [0, 1] \times S^2 / (1, x) \sim (0, -x)$$

avec l'involution $\tau : [t, x] \rightarrow [t, -x]$, alors nous avons $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{K}^3, \tau) = 3$.

Preuve. En premier, comme la dernière sous section $x = u_1 \times \mathbf{1} + \mathbf{1} \times v_1$. Nous calculons

$$\begin{aligned} \beta_2(x) &= (u_1 \times \mathbf{1} + \mathbf{1} \times v_1) \smile (u_1 \times \mathbf{1} + \mathbf{1} \times v_1) \\ &= (u_1^2 \times \mathbf{1}) + (u_1 \smile \mathbf{1}) \times (\mathbf{1} \smile v_1) - (\mathbf{1} \smile u_1) \times (v_1 \smile \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times v_1^2) \\ &= u_1^2 \times \mathbf{1} + u_1 \times v_1 - u_1 \times v_1 + \mathbf{1} \times v_1^2 \\ &= \mathbf{1} \times v_1^2, \end{aligned}$$

car $u_1^2 = 0 \in H^2(S^1, \mathbb{Z}_2) \simeq 0$. Puisque, $v_1^2 \in H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ est non nul, alors $\beta_2(x) \neq 0$ et $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{K}^3, \tau) \geq 2$.

Pour le triple cup, nous avons

$$\begin{aligned} x^3 &= \beta_2(x) \smile x \\ &= (\mathbf{1} \times v_1^2) \smile (u_1 \times \mathbf{1} + \mathbf{1} \times v_1) \\ &= (\mathbf{1} \smile u_1) \times (v_1^2 \smile \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \times v_1^3) \\ &= u_1 \times v_1^2 \neq 0 \end{aligned}$$

aussi puisque $v_1^3 = 0$. □

4.5 Compléments sur quelques calculs des groupes cohomologiques de certains espaces

Dans les sections précédentes, nous avons eu besoin de faire des calculs de quelques groupes de cohomologies de certains espaces. Ici on va donner les détails de quelques calculs.

Calculs pour le produit $S^1 \times S^2$.

En utilisant la formule de Künneth, on a :

$$\begin{aligned} H_0(S^1 \times S^2) &= H_0(S^1) \otimes H_0(S^2) \\ &= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1(S^1 \times S^2) &= \bigoplus_{p+q=1} H_p(S^1) \otimes H_q(S^2) \\
&= \mathbb{Z} \times \{0\} \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\
&= \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient que $H_2(S^1 \times S^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Par la dualité de Poincaré, on obtient

$$H^1(S^1 \times S^2) \simeq \mathbb{Z} \text{ et } H^2(S^1 \times S^2) \simeq \mathbb{Z}.$$

En utilisant le théorème de coefficients universels, on obtient :

$$\begin{aligned}
H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Z}_2) &= H^1(S^1 \times S^2, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H^2(S^1 \times S^2), \mathbb{Z}_2) \\
&= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\
&= \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Calculs pour le produit $S^1 \times \mathbb{R}P^2$.

En utilisant la formule de Kûnneth, nous avons :

$$H_0(S^1 \times \mathbb{R}P^2) = H_0(S^1) \otimes H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}.$$

et

$$\begin{aligned}
H_1(S^1 \times \mathbb{R}P^2) &= \bigoplus_{p+q=1} H_p(S^1) \otimes H_q(\mathbb{R}P^2) \oplus \bigoplus_{i+j=0} \text{Tor}_1(H_i(S^1), H_j(\mathbb{R}P^2)) \\
&= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\
&= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $H_2(S^1 \times \mathbb{R}P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Lorsque les coefficients sont dans \mathbb{Z}_2 , on utilise le théorème de coefficients universels.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
H_1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) &= H_1(S^1 \otimes \mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_0(S^1 \otimes \mathbb{R}P^2), \mathbb{Z}_2) \\
&= (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\
&= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) &= H_2(S^1 \otimes \mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_1(S^1 \otimes \mathbb{R}P^2), \mathbb{Z}_2) \\
&= \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\
&= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

en utilisant l'additivité du foncteur Tor . En plus puisque $S^1 \otimes \mathbb{R}P^2$ est orientable par rapport à \mathbb{Z}_2 , nous obtenons :

$$H^1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq H_2(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

$$H^2(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq H_1(S^1 \times \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Calculs pour le produit $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.

En utilisant le fait que l'homologie de la somme connexe de deux variétés orientées est égale à la somme directe de l'homologie de chacune d'elles et la dualité de Poincaré, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) &= H^3(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) \\ &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) &= H^2(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) &= H^1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par le théorème des coefficients universels, on a :

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2) &= H_1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_0(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3), \mathbb{Z}_2) \\ &= (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Par la dualité de Poincaré, nous obtenons : $H^2(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. De la même manière nous avons :

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2) &= H_2(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}_1(H_1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3), \mathbb{Z}_2) \\ &= \{0\} \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

et alors $H^1(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Calculs pour la 3-bouteille de Klein \mathbb{K}^3 .

Par définition, la 3-bouteille de Klein K^3 est l'espace quotient

$$\mathbb{K}^3 = [0, 1] \times S^2 / (1, x) \sim (0, x).$$

On a besoin de calculer quelques groupes d'homologie et de cohomologie de cette variété. Pour cette raison, on veut utiliser la suite longue exacte de Mayer-Vietoris. On considère alors la décomposition

$$A = [0, \frac{1}{2}] \times S^2, \quad B = [\frac{1}{2}, 1] \times S^2, \quad A \cap B = \{\frac{1}{2}\} \times S^2 \sqcup \{0\} \times S^2$$

et les applications

$$\begin{aligned} A &\xleftarrow{k} A \cap B \xrightarrow{l} B \\ A &\xrightarrow{k} A \cup B \xleftarrow{l} B \end{aligned}$$

Et la suite exacte de Mayer-Vietoris définie par

$$\dots H_i(A \cap B) \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix} \xrightarrow{i} H_i(A) \oplus H_i(B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_i(K^3) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(A \cap B) \dots$$

On calcul tout d'abord les groupes d'homologie de A, B et $A \cap B$.

On remarque que $[0, \frac{1}{2}]$ est contractile, alors il a la même homologie qu'un point et alors cette dernière est nulle sauf en degré zéro. En utilisant la formule de Kûnneth, on obtient

$$\begin{aligned} H_0(A) &= H_0([0, \frac{1}{2}] \times S^2) \\ &= \bigoplus_{p+q=0} H_p([0, \frac{1}{2}]) \otimes H_q(S^2) \\ &= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(A) &= \bigoplus_{p+q=1} H_p([0, \frac{1}{2}]) \otimes H_q(S^2) \oplus \bigoplus_{p+q=0} Tor(H_p([0, \frac{1}{2}]), H_q(S^2)) \\ &= \mathbb{Z} \otimes \{0\} \oplus \{0\} \otimes \mathbb{Z} \oplus Tor(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient que

$$H_2(A) \simeq \mathbb{Z} \text{ et } H_3(A) \simeq 0.$$

Et on a les mêmes résultats pour B . En ce qui concerne $A \cup B$, puisque c'est une réunion disjointe, alors pour chaque degré le groupe d'homologie de $A \cup B$ égal à la somme directe des groupes d'homologie de A et de B . Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} H_0(A \cup B) &\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \\ H_1(A \cup B) &\simeq 0 \\ H_2(A \cup B) &\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \\ H_3(A \cup B) &\simeq 0. \end{aligned}$$

D'après les calculs de ci-dessus, maintenant on peut écrire et utiliser la suite longue exacte de Mayer-Vietoris sachant que $H_3(\mathbb{K}^3) = 0$ puisque K^3 n'est pas orientable et $H_0(\mathbb{K}^3) = 0$ puisqu'elle est connexe par arcs. La suite longue exacte de Mayer-

Vietoris s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\dots\dots H_3(A \cap B) &= 0 \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_3 H_3(A) \oplus H_3(B) = 0 \xrightarrow{(i_*, j_*)^3} H_3(K^3) = 0 \xrightarrow{\partial_3} \\
H_2(A \cap B) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_2 H_2(A) \oplus H_2(B) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(i_*, j_*)^2} H_2(K^3) \xrightarrow{\partial_2} \\
H_1(A \cap B) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_1 H_1(A) \oplus H_1(B) = 0 \xrightarrow{(i_*, j_*)^1} H_1(K^3) \xrightarrow{\partial_1} \\
H_0(A \cap B) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_0 H_0(A) \oplus H_0(B) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{(i_*, j_*)^0} H_0(K^3) = \mathbb{Z} \\
&\hspace{20em} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

où

$$\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_0 : H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \\
(x, y) \longmapsto (x + y, -x - y)$$

et $\begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_2$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, après les calculs, on obtient $Im(i_*, j_*)_1 = 0 = Ker \partial_1$, donc ∂_1 est injective. Et alors

$$H_3(\mathbb{K}^3) \simeq \partial_1 = Ker \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_0 \simeq \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad H_1(\mathbb{K}^3) \simeq \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, pour calculer $H_2(\mathbb{K}^3)$, on utilise encore l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris. On a alors

$$\begin{aligned}
H_2(\mathbb{K}^3) &\simeq Ker \partial_2 \\
&\simeq Im(i_*, j_*)_2 \\
&\simeq H_2(A) \oplus H_2(B) / Ker(i_*, j_*)_2 \\
&\simeq H_2(A) \oplus H_2(B) / Im \begin{pmatrix} k_* \\ -l_* \end{pmatrix}_2 \\
&\simeq \langle e_1, e_2 / e_1 + e_2 = 0, e_1 + e_2 = 0 \rangle \\
&\simeq \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Pour le calcul des groupes de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} et dans \mathbb{Z}_2 , on utilise le théorème de coefficients universels. On obtient

$$\begin{aligned}
H^0(\mathbb{K}^3) &\simeq \mathbb{Z} \\
H^1(\mathbb{K}^3) &\simeq \mathbb{Z} \\
H^2(\mathbb{K}^3) &\simeq 0 \\
H^3(K^3) &\simeq 0.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$H_i(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad i = \overline{0, 3}$$

et alors

$$H^i(\mathbb{K}^3, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad i = \overline{0, 3}.$$

4.6 Une autre preuve du théorème de Borsuk-Ulam pour les espaces lenticulaires

Dans cette partie nous allons donner une autre preuve du théorème de Borsuk-Ulam pour les espaces de lenticulaires. Dans les sections précédentes nous avons fait une preuve qui dépend de leur présentation par chirurgie. Alors en utilisant les propriétés algébriques de la matrice d'enlacement, nous avons pu obtenir les résultats de la proposition 4.17. Nous allons montrer que cette dernière peut être obtenue par des méthodes purement topologiques. La preuve développée ici est aussi originale pour les espaces lenticulaires. Nous utiliserons quelques informations sur leur CW-structure et leur topologie.

En effet, puisque la 3-sphère S^3 est le revêtement universel de l'espace lenticulaire, il possède une décomposition cellulaire naturelle qui est obtenue de la décomposition cellulaire de S^3 , qui est \mathbb{Z}/p -invariante avec p cellules dans chaque dimension 0, 1, 2, 3 (voir par exemple [41] et [27]). La 3-sphère est définie comme étant la sphère unité dans \mathbb{C}^2 : $S^3 = \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z|^2 + |z'|^2 = 1\}$. Le cercle $S^1 = \{(z, 0) / |z| = 1\}$ du premier facteur de \mathbb{C}^2 est divisé en p points sachant que :

- $e_{k,0} = (e^{\frac{2\pi ki}{p}}, 0)$, les indices k sont pris mod p .
- $e_{k,1} = \{(z, 0) / 0 < \text{arg} z < 2\pi/p\}$. Il représente l'arc ouvert joignant $e_{k,0}$ and $e_{k+1,0}$.
- $e_{k,2} = \{(z, z') / 0 < \text{arg} z < 2\pi/p, \text{arg} z' = 0\} = e_{k,0} * S^1$, ici S^1 est le cercle unité du second facteur de \mathbb{C}^2 .
- $e_{k,3} = \{(z, z') / 0 < \text{arg} z' < 2\pi/p\} = e_{k,1} * S^1$. C'est le domaine entre $e_{k,2}$ et $e_{k+1,2}$.

La transformation T applique les cellules $e_{k,0}, e_{k,1}, e_{k,2}, e_{k,3}$ homéomorphiquement sur $e_{k+1,0}, e_{k+1,1}, e_{k+q,2}, e_{k+q,3}$. Ainsi, notre décomposition cellulaire de S^3 induit une décomposition cellulaire de $L(p, q)$, avec une seule cellule dans chaque dimension, e_0, e_1, e_2, e_3 . Toutes les cellules dans S^3 ont des orientations naturelles préservées par T . Ainsi, les cellules dans $L(p, q)$ sont aussi naturellement orientées. Par ailleurs, dans le complexe cellulaire de S^3 , nous avons $\partial e_{k,2} = e_{0,1} + e_{1,1} + \dots + e_{p-1,1}$ et $\partial e_{k,3} = e_{k+1,2} - e_{k,2}$. Ainsi, dans le complexe cellulaire de $L(p, q)$, nous avons $\partial e_2 = p e_1$ et $\partial e_3 = 0$, car les identifications des deux faces $e_{k,2}$ et $e_{k+1,2}$ sont la rotation de degré +1 suivi par une réflexion de degré -1 i.e $\partial e_3 = e_2 - e_2 = 0$. Le complexe de chaînes cellulaires (resp. cochaînes) de $L(p, q)$ est

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}e_0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}e_1 \xrightarrow{p} \mathbb{Z}e_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}e_3 \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longleftarrow \mathbb{Z}e^0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}e^1 \xleftarrow{p} \mathbb{Z}e^2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}e^3 \longleftarrow 0)$$

où e^k est le dual de e_k . Par conséquent,

$$H_0(Lp, q), \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \simeq H_3(L(p, q), \mathbb{Z}),$$

$$H_1(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p \simeq \pi_1(L(p, q)), H_2(Lp, q), \mathbb{Z} \simeq 0,$$

et aussi

$$H^i(L(p, q), \mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z}/p \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3.$$

En utilisant le théorème de coefficients universels, nous obtenons que

$$H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{if } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{if } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Après cette introduction, on voit qu'un espace lenticulaire $L(p, q)$ a un revêtement double connexe, unique sous l'équivalence si et seulement si p est pair. En effet, nous avons $Hom(\pi_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx Hom(H_1(N), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(N, \mathbb{Z}_2)$. A partir de maintenant, nous supposons que p est pair alors l'élément non trivial $\alpha \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2)$ donne naissance à une paire (M, τ) , où M est une 3-variété fermée connexe et τ est une involution libre sur M associée au revêtement double avec l'action τ donné par une non triviale transformation de revêtement. On peut vérifier que l'espace du revêtement est lui même un espace lenticulaire M , à savoir $L(\frac{p}{2}, q)$ (see [44, section]).

Proposition 4.17. *Soit $L(p, q)$ un espace lenticulaire sachant que p est pair, $(M, \tau) = (L(\frac{p}{2}, q), \tau)$ comme ci-dessus, et $x \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2)$ est la classe non triviale (qui classifie le revêtement).*

1. Nous avons $\beta(x) \neq 0$. Par conséquent $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \geq 2$ et (M, τ, \mathbb{R}^2) est toujours un Borsuk-Ulam triplet.
2. $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) = 3$ si et seulement si $p \equiv 2 \pmod{4}$.

Preuve. 1- D'après le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^1(L(p, q), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & C^1((L(p, q), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{j_1} & C^1((L(p, q), \mathbb{Z}_2)) \\ & & \delta_2 \downarrow & & \delta_2 \downarrow & & \delta_2 \downarrow \\ & \longrightarrow & C^2((L(p, q), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{\times 2} & C^2((L(p, q), \mathbb{Z})) & \xrightarrow{j_2} & C^2((L(p, q), \mathbb{Z}_2)) \end{array}$$

on définit l'homomorphisme de Bockstein

$$\begin{array}{ccc} \beta : H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^2(L(p, q), \mathbb{Z}) \\ x = [c] & \longmapsto & [\alpha] = [\frac{1}{2}\delta_2(c')] \end{array}$$

où $c' \in C^1((L(p, q), \mathbb{Z}))$ est un relèvement de c , et $\alpha \in C^2((L(p, q), \mathbb{Z}))$ est un cocycle sachant que $2\alpha = \delta_2(c')$. Maintenant, puisque dans notre cas la classe caractéristique $x = [c] \neq 0$ et $x \in H^1(L(p, q), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, alors elle corresponde à $1 \in \mathbb{Z}_2$. Nous choisissons c' sachant que $\langle c', e^1 \rangle = 1 \in \mathbb{Z}$ et nous avons

$$\langle \delta_2 c', e^2 \rangle = \langle c', \partial e^2 \rangle = \langle c', pe^1 \rangle = p.$$

Par conséquent,

$$\beta(x) = \frac{p}{2} \cdot [e^2] \in H^2(L(p, q), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p,$$

et $\beta(x) \neq 0$. En utilisant le théorème 4.1, nous avons $ind_{\mathbb{Z}_2}(M, \tau) \geq 2$ et (M, τ, \mathbb{R}^2) est toujours un Borsuk-Ulam triplet.

2. La deuxième assertion vient de la description de l'anneau de cohomologie modulo 2 dans [44]. Nous allons donner une preuve indépendante basée sur la forme d'enlacement. En premier lieu, nous savons que $\tilde{x} \in Tor H_1(L(p, q), \mathbb{Z})$ est tel que

$$\tilde{x} = D \circ \beta(x) = D\left(\frac{p}{2} \cdot [e^2]\right) = \frac{p}{2} \cdot [e_1].$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}_{L(p,q)}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \mathcal{L}_{L(p,q)}\left(\frac{p}{2} \cdot [e_1], \frac{p}{2} \cdot [e_1]\right) = \frac{p^2}{4} \mathcal{L}_{L(p,q)}([e_1], [e_1]).$$

Mais, $\mathcal{L}_{L(p,q)}([e_1], [e_1]) = \mathcal{L}_{L(p,q)}(e_1, e_1) \pmod 1$ and

$$\mathcal{L}_{L(p,q)}(e_1, e_1) = \mathcal{L}_{L(p,q)}\left(\frac{1}{p} \partial e_2, e_1\right) = \frac{1}{p} e_2 \cdot e_1$$

où (\cdot) désigne la forme d'intersection. Mais, $e_2 \cdot e_1 = q$, voir par exemple [27] pp 427, alors $\mathcal{L}_{L(p,q)}([e_1], [e_1]) = \frac{q}{p} \pmod 1$. Ainsi,

$$\mathcal{L}_{L(p,q)}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \frac{p^2}{4} \mathcal{L}_{L(p,q)}([e_1], [e_1]) = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{4} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

La dernière expression ne dépend pas sur q . Alors,

- If $p \equiv 0 \pmod 4$, so $\frac{p \cdot q}{4} = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- If $p \equiv 2 \pmod 4$, so $\frac{p \cdot q}{4} = \frac{1}{2} \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

□

4.7 Présentations par chirurgie des espaces lenticulaires et des fibrés en tores

Nous terminons ce chapitre par les présentations par chirurgie des espaces lenticulaires et des fibrés en tore (voir [62], [46]).

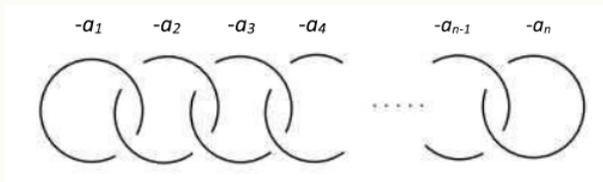


FIGURE 4.1 : Presentation des espaces lenticulaires

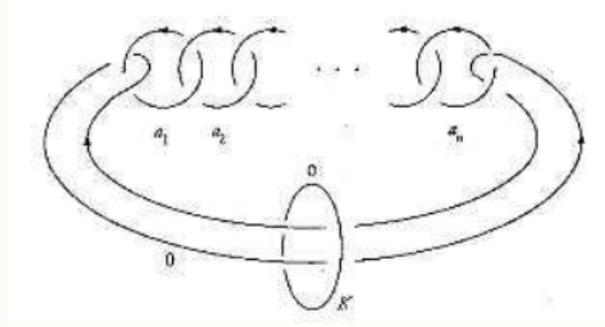


FIGURE 4.2 : Présentation des fibrés en tores

A.1 Introduction

On veut ajouter quelques détails pour une meilleure compréhension de quelques résultats énoncés dans cette thèse. Le degré sur la sphère S^n était le moyen à travers lequel la preuve topologique du théorème de Borsuk-Ulam a été développée. Nous commençons cet appendice par un petit aperçu sur ce degré. Ensuite l'homomorphisme de Bockstein était parmi les notions les plus utilisées dans l'étude du \mathbb{Z}_2 -indice dans le chapitre 4, alors on va définir ce dernier et montrer pourquoi il est si utile en tant qu'opération cohomologique.

A.2 Degré des applications sur la sphère S^n

Construction du degré

Tout endomorphisme ϕ d'un groupe cyclique est donné par un entier i.e $\phi(x) = dx$ pour un certain entier $d \in \mathbb{Z}$ uniquement déterminé. Si on applique cette remarque pour les groupes d'homologies, on arrive à définir la notion de degré en topologie algébrique. Cette dernière a des applications très intéressantes.

Définition A.1. [23] Si $f : S^n \rightarrow S^n$ (respectivement $f : (\mathbb{B}^{n+1}, S^n) \rightarrow (\mathbb{B}^{n+1}, S^n)$), est une application continue, alors elle induit un endomorphisme sur $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ (respectivement sur $H_{n+1}(\mathbb{B}^{n+1}, S^n) \simeq \mathbb{Z}$) donné par $f_*(x) = d.x$, où $d \in \mathbb{Z}$ est un entier uniquement déterminé, et $(.)$ désigne le produit dans \mathbb{Z} . Ce nombre est appelé le degré de f et est noté par $\deg(f)$.

Le degré défini ci-dessus vérifie les propriétés intéressantes suivantes (voir : [23], [41], [77]).

Quelques propriétés du degré sur la sphère S^n

Proposition A.2. Le degré sur la sphère vérifie les propriétés suivantes :

1. $\deg(\text{Id}) = 1$, où Id est l'identité de S^n .

2. $\deg(f \circ f') = \deg(f) \times \deg(f')$.
3. Si f est homotope à f' et on note $f \sim f'$, alors $\deg(f) = \deg(f')$.
4. Le degré d'une équivalence homotopique est égale à ± 1 .
5. Si $f : (B^{n+1}, S^n) \longrightarrow (B^{n+1}, S^n)$, alors $\deg(f) = \deg(f|_{S^n})$.
6. $\deg(f) = 0$ si f n'est pas surjective.

Preuve. 1) Si $f = Id : S^n \longrightarrow S^n$, alors $f_* = Id_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$. Et puisque $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, alors $Id_* = Id_{\mathbb{Z}}$, et ainsi $\deg f = 1$.

2) En utilisant le fait que $(f \circ f')_* = f_* \circ f'_*$, alors pour tout $x \in H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} (f \circ f')_*(x) &= f_* \circ f'_*(x) \\ &= f_*(\deg f' \cdot x) \\ &= \deg f' \times f_*(x) \\ &= \deg f' \times \deg f \cdot x \end{aligned}$$

Mais, $(f \circ f')_*(x) = \deg_{f \circ f'} \cdot x$. Ainsi, $\deg(f \circ f') = \deg f \times \deg f'$.

3) Si f est homotope à f' , alors $f_* = f'_*$ et ainsi $\deg f = \deg f'$.

4) Si f est une équivalence homotopique, alors il existe $g : S^n \longrightarrow S^n$ tel que $f \circ g \sim Id_{S^n}$. Par suite,

$$\deg(f \circ g) = \deg(Id_{S^n}).$$

Ce qui permet de conclure que $\deg f \times \deg g = 1$, alors $\deg f = \pm 1$.

5) On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) \\ \partial_* \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \partial_* \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{(f|_{S^n})_*} & H_n(S^n) \end{array}$$

En utilisant la commutativité du diagramme de ci-dessus et le fait que ∂_* est un isomorphisme, on déduit que

$$\deg(f) = \deg(f|_{S^n}).$$

6) On suppose que $f : S^n \longrightarrow S^n$ n'est pas surjective i.e $f(S^n) \neq S^n$. On prend alors $x_0 \in S^n \setminus f(S^n)$, et on considère la composition $i \circ f_1$ donnée par le diagramme

$$S^n \xrightarrow{f_1} S^n \setminus \{x_0\} \xrightarrow{i} S^n,$$

où $f_1 = f$. Partant du fait que $S^n \setminus \{x_0\}$ est contractile, alors $H_n(S^n \setminus \{x_0\}) = 0$. Donc, à partir du diagramme induit par le diagramme de ci-dessus sur les groupes d'homologies, on déduit que $f_* = 0$, et ainsi $\deg f = 0$. \square

Notons que la réciproque de l'assertion 3) est basée sur le théorème suivant :

Théorème A.3. (Théorème de Hopf) $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par l'application identique pour tout $n \geq 1$.

En particulier, l'application $\text{deg} : \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Corollaire A.4. Si $\text{deg} f = \text{deg} f'$, alors $f \sim f'$.

Preuve. D'après le théorème de Hopf, si on suppose que $\text{deg} f = \text{deg} f'$ alors $f_* = f'_*$ dans $\pi_n(S^n)$ et ainsi on a $f \sim f'$. \square

Proposition A.5. 1. Si f est une réflexion (i.e l'application qui change une coordonnée avec son opposé), alors $\text{deg} f = -1$.

2. L'application antipodale

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{-1} & S^n \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

a un degré $(-1)^{n+1}$.

Preuve. 1) Tout d'abord on essaye de donner un générateur de $H_n(S^n)$, en regardant S^n comme étant à deux simplexes de dimensions n notés Δ_1^n, Δ_2^n , avec leurs bords identifiés en préservant l'ordre des sommets. La différence $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ peut être vu comme une n -chaîne singulière et alors un cycle. Cette chaîne représente un générateur de $H_n(S^n)$, $n > 0$.

Avec la même idée, si f est une réflexion de S^n fixant les points de la sous sphère S^{n-1} et inter-changeant les deux demi-sphères complémentaires. Alors, on donne à S^n une structure avec ces deux demi-sphères comme celle qu'on vient d'énoncer ci-dessus. Par conséquent, la réflexion inter-changeant Δ_1^n à Δ_2^n envoie ce générateur à son négative.

2) Le résultat vient du fait que $-1 : S^n \rightarrow S^n$ est la composition de $(n+1)$ réflexions chacune change une coordonnée dans \mathbb{R}^{n+1} . \square

Proposition A.6. Nous avons les propriétés suivantes :

1. Si $f : S^n \rightarrow S^n$ n'a pas de points fixes (i.e $f(x) \neq x \forall x \in S^n$), alors $\text{deg} f = (-1)^{n+1}$.
2. Si $f : S^n \rightarrow S^n$ n'a pas de points antipodes i.e $f(x) \neq -x \forall x \in S^n$, alors $\text{deg} f = 1$.

Preuve. 1) Si f n'a pas de points fixes, alors pour $0 \leq t \leq 1$ l'application

$$d_t(x) = (1-t)f(x) - tx \neq 0.$$

Ainsi, l'application définie par $D_t(x) = \frac{d_t(x)}{\|d_t(x)\|}$ est une homotopie de f à l'application antipodale $x \mapsto -x$ de degré $(-1)^{n+1}$. Puisque les degrés des applications homotopes sont égaux, alors on déduit que $\text{deg} f = (-1)^{n+1}$.

2) Si on suppose que $f(x) \neq -x, \forall x \in S^n$, alors $g(x) = -f(x)$ n'a pas de points fixes. Ainsi, $\text{deg}g = (-1)^{n+1}$. Par ailleurs, et puisque $g = -f$, alors $\text{deg}g = (-1)^{n+1}\text{deg}f$, car g est la composée des applications $x \mapsto -x$ et f . Donc,

$$\text{deg}g = (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\text{deg}f.$$

Ce qui permet de conclure que $\text{deg}f = 1$. \square

Dans la construction du degré, les groupes d'homologies étaient à coefficients dans \mathbb{Z} . Le lemme suivant étudie le cas où les groupes d'homologies sont considérés à coefficients dans un groupe quelconque G .

Proposition A.7. *Si $f : S^n \rightarrow S^n$ a un degré m , alors $f_* : H_n(S^n, G) \rightarrow H_n(S^n, G)$ est une multiplication par m .*

Preuve. Soit

$$f : S^n \rightarrow S^n$$

de degré m et soit

$$\phi : \mathbb{Z} \rightarrow G$$

l'homomorphisme qui prend 1 à un élément fixé $g \in G$. Alors, il est bien connu dans la théorie de l'homologie que cette dernière application induit une application dans les groupes des n -chaînes simplexes singuliers $\phi : C(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow C(S^n, G)$ et que cette dernière induit un homomorphisme $\phi_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, G)$ (pour les détails voir [41]). Ainsi, on peut construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \simeq & H_n(S^n, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, \mathbb{Z}) & \simeq & \mathbb{Z} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi \\ G & \simeq & H_n(S^n, G) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, G) & \simeq & G \end{array}$$

En effet, la commutativité se montre par induction sur n , car le cas $n = 0$ est trivial. En utilisant cette commutativité, on montre que l'application dans la ligne supérieur du digramme qui prend 1 à m implique que celle du bas prend g à mg . \square

A.3 L'homomorphisme de Bockstein

Le but ici est d'étudier l'homomorphisme de Bockstein. Ce dernier est un exemple d'une théorie plus générale qui se base sur les propriétés cohomologiques, à savoir les opérations cohomologiques [41], [13].

Une opération cohomologique est une transformation $\Theta : H^m(X, G) \rightarrow H^n(Y, H)$ définie pour l'espace X , avec un choix de m, n, G et H et qui satisfait la propriété de naturalité suivante : pour toutes les applications $f : X \rightarrow Y$, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^m(Y, G) & \xrightarrow{\Theta_Y} & H^n(Y, H) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^m(X, G) & \xrightarrow{\Theta_X} & H^n(X, H) \end{array}$$

Exemple A.8. *La transformation*

$$\begin{array}{ccc} H^m(X, R) & \longrightarrow & H^{mp}(X, R) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^p \end{array}$$

est une opération cohomologique.

En prenant $R = \mathbb{Z}$ l'exemple précédent montre que les opérations cohomologiques n'ont pas besoin d'être des homomorphismes. Par ailleurs, pour $R = \mathbb{Z}_p$ où p est premier l'opération cohomologique de l'exemple précédent est un homomorphisme. Aussi des exemples triviaux des opérations cohomologiques sont les homomorphismes de changement des coefficients $H^n(X, G) \longrightarrow H^n(X, H)$ induits par l'homomorphisme $G \longrightarrow H$. On s'intéresse en particulier à une opération cohomologique appelée l'homomorphisme de Bockstein. Motivé par le fait que les groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans un corps, en particulier \mathbb{Z}_p avec p premier possèdent toujours plus de structure et sont plus faciles à calculer que ceux avec des coefficients dans \mathbb{Z} . Passer des coefficients dans \mathbb{Z} au coefficients dans \mathbb{Z}_p peut produire certaine perte d'informations et des distinctions les plus fines. Les homomorphismes de Bockstein sont des moyens pour garder les informations des coefficients dans \mathbb{Z} à travers ceux dans \mathbb{Z}_p . Ils fournissent aussi un autre moyen pour la construction interne de la \mathbb{Z}_p -homologie ou cohomologie elle-même qui est très utilisée. On s'intéresse ici à la cohomologie pour utiliser les produits cup. On prend la suite courte exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

de groupes abéliens. On applique le foncteur covariant $Hom(C_n(X), -)$, on obtient

$$0 \longrightarrow C^n(X, G) \longrightarrow C^n(X, H) \longrightarrow C^n(X, K) \longrightarrow 0$$

Cette dernière suite est aussi exacte puisque $C_n(X)$ est libre. Lorsque n varie, la dernière chaîne induit la suite courte exacte en cohomologie

$$0 \longrightarrow H^n(X, G) \longrightarrow H^n(X, H) \longrightarrow H^n(X, K) \longrightarrow 0$$

qu'on peut lui associer la suite longue exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(X, G) & \longrightarrow & H^n(X, H) & \longrightarrow & H^n(X, K) \\ & & & & & & = \\ & & H^{n+1}(X, G) & \longrightarrow & H^{n+1}(X, H) & \longrightarrow & H^{n+1}(X, K) \dots \end{array}$$

avec l'application bord $H^n(X, K) \longrightarrow H^{n+1}(X, G)$ appelée **l'homomorphisme du Bockstein**. Parmi les homomorphismes de Bockstein, on s'intéresse à

$$\beta_m : H^n(X, \mathbb{Z}_m) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathbb{Z}_m) \text{ et } \beta : H^n(X, \mathbb{Z}_m) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathbb{Z})$$

associés respectivement aux suites courtes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m & \xrightarrow{\times m} & \mathbb{Z}_{m^2} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times m} & m\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

A travers l'application naturelle $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ qui induit l'homomorphisme

$$\rho : H^*(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_m),$$

nous pouvons montrer que $\beta_m = \rho \circ \beta$ (voir [41]). En plus, l'homomorphisme de Bockstein vérifie la propriété de dérivation suivante

$$\beta(a \smile b) = \beta(a) \smile b + (-1)^{|a|} a \smile \beta(b)$$

Pour la preuve voir [41] pp 313.

Calcul de l'homomorphisme de Bockstein

Ici, nous voulons calculer les homomorphismes de Bockstein [13]

$$\beta : H^p(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathbb{Z}) \text{ et } \beta_2 : H^p(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathbb{Z}_2)$$

associés aux suites courtes exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

La première suite courte exacte de ci-dessus induit la suite longue exacte

$$\dots H^p(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} H^{p+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

et les homomorphismes de chaînes complexes, qui permettent d'écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & C^p(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & C^p(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_p} & C^p(X, \mathbb{Z}_2) & \dots \\ & \delta_p \downarrow & & \delta_p \downarrow & & \delta_p \downarrow & \\ \dots & C^{p+1}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & C^{p+1}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_{p+1}} & C^{p+1}(X, \mathbb{Z}_2) & \dots \end{array}$$

Soit $x \in H^p(X, \mathbb{Z}_2)$, alors x est une classe représentée par un cocycle $c \in C^p(X, \mathbb{Z}_2)$, alors $\delta_p(c) = 0$. Mais j_p est surjective, alors il existe une cochaîne entière $c' \in C^p(X, \mathbb{Z})$ sachant que $j_p(c') = c$. Et alors, $\delta_p \circ j_p(c') = 0$. La commutativité du diagramme de ci-dessus implique que $j_{p+1} \circ \delta_p(c') = 0$. Ce qui implique que $\delta_p(c') \in \text{Ker } j_{p+1} = \text{Im}(\times 2)$ par l'exactitude. Par conséquent, il existe $\alpha \in C^{p+1}(X, \mathbb{Z})$ tel que $2\alpha = \delta_p(c')$ i.e $\alpha = \frac{1}{2}\delta_p(c')$. On pose alors

$$\begin{array}{ccc} \beta : H^p(X, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H^{p+1}(X, \mathbb{Z}) \\ x = [c] & \longmapsto & [\alpha] = [\frac{1}{2}\delta_p(c')] \end{array}$$

où $j^*([c']) = [c]$. Il est simple de vérifier que α est un cocycle et que cette définition ne dépend pas du choix de α .

Pour définir l'homomorphisme de Bockstein β_2 associé à la deuxième chaîne courte exacte, il suffit d'utiliser la relation qu'on vient de voir ci-dessus $\beta_2 = \rho \circ \beta$ où $\rho : H^{p+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ est l'homomorphisme qui induit les coefficients modulo 2.

Bibliographie

- [1] Hillman, J. A. *The \mathbb{F}_2 -cohomology rings of Sol^3 -manifolds*. Bull. Aust. Math. Soc. 89 (2014), no. 2, 191–201. v, xi, 49, 80, 89
- [2] Mahima.R. Adhikari, Basic Algebraic Topology and its Applications, *Springer India* , 2016.
- [3] Philip Bacon, *Equivalent Formulations of the Borsuk-Ulam Theorem*, Canadian-Journal-of-Mathematics, Vol 18 (1966), 492-502. 14
- [4] A. Bauval, D. L. Gonçalves, C. Hayat, P. Zvengrowski, *The Borsuk-Ulam Theorem for Double Coverings of Seifert Manifolds*, Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Brazilian-Polish Topology Workshop) **6**, no. 6 (2013), 165-189. iv, v, x, xi, 37, 49, 80, 81
- [5] Alexandre Paiva Barreto, Daciberg Lima Gonçalves and Daniel Vendru'scolo, *Free involutions on torus semi-bundles and the Borsuk-Ulam Theorem for maps into \mathbb{R}^n* , Hiroshima Math. J. 46 (2016), 255–270. 49, 80
- [6] W. A. Beyer and Andrew Zardecki, *The Early History of the Ham Sandwich Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 1 (2004), 58-61. iii, ix
- [7] Carlos Biasi, Alice Kimie Miwa Libardi, Denise de Mattos and Sergio Tsuyoshi Ura, *Borsuk-Ulam theorem for filtered spaces*, to appear in Forum Mathematicum, De Gruyter, 2021. iv, x, 37
- [8] Carlos. Biasi, D. Matos, E. L. Dos Santos, *A Borsuk-Ulam theorem for maps from a sphere to a generalized manifold*, Geometricae Dedicata, 107, (2004), 101-110. 36
- [9] Christian Blanchet, Chahrazade Matmat, *The Borsuk-Ulam Theorem for 3- Manifolds*, Quaestiones Mathematicae, DOI : 10.2989/16073606.2021.1887391(online, 2021) ; arXiv :2001.03680. viii, xiii, 37, 80

- [10] Zbigniew Błaszczyk, Waclaw Marzantowicz, Mahender Singh, *General Bourgin–Yang theorems*, *Topology and its Applications*, Vol 249 (2018), 112-126. 36
- [11] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale Euklidische Sphäre*, *Fund. Math.* 20, (1933), 177–190. iii, ix, 8, 14
- [12] D. G. Bourgin, *Multiplicity of solutions in frame mappings*, *Illinois J. Math.*, vol. 9 (1965), 169-177. iv, x, 35, 36
- [13] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, *Graduate texts in Mathematics*, 139, Springer-Verlag New York, Inc, 1993. 8, 18, 55, 76, 112, 114
- [14] E. J. Brody, *The topological classification of the lens spaces*, *Annals of Mathematics*, 71, no 1, (1960), 163-184. 55
- [15] Bang-Yen Chen, *Borsuk-Ulam Theorem and Maximal Antipodal Sets of Compact Symmetric Spaces*, *International Electronic Journal of Geometry*, Vol 10 no. 2 (2017), pp 11–19. iv, x, 37
- [16] P. E. Corner, E. E. Floyd *Fixed Point Free Involutions And Equivariant Maps*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66, (1960), 416–441. 21
- [17] P. E. Corner, E. E. Floyd, *Differentiable Periodic maps*, Springer Verlag Berlin, 1964. iv, x, 36
- [18] P. Conner, E. Floyd, *Periodic maps*. *Ergeb. Math. Grenzgeb. (N. F.)* 33, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964. 70
- [19] G. W. Cox1 and R. D. McKelvey, *A Ham Sandwich Theorem for General Measures*, *Soc Choice Welfare* (1984) 1, 75-83. iv, x, 28, 37
- [20] M. C. Crabb and J. Jaworowski, *Aspects of the Borsuk–Ulam theorem*, *J. Fixed Point Theory and Applications*, 13 (2013), 459–488. iv, x, 37
- [21] M. Dehn, *Über die Topologie des drei-dimensionalen Raumes*. *Math Ann.* 75 (1910), 402-413. 66
- [22] Florian Deloup, *Quelques aspects des invariants des variétés de dimension 3*, *Note de cours, Université de Toulouse*, 2010. 74
- [23] Albrecht Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972. 109
- [24] Zdzisław Dzedzej, Adam Idzik, Marek Izydorek, *Borsuk-Ulam type theorems on product space II*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, *Journal of the Juliusz Schauder Center*, Volume 14, (1999), 345–352.
- [25] John H. Elton, Theodore P. Hill, *A stronger conclusion to the classical ham sandwich theorem*, *European Journal of Combinatorics*, 32 (2011), 657-661. iv, x, 28, 37

- [26] David. B. A Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. 16 (1966), 369-383. 46, 47
- [27] J. A. Fomenko, D. Fuchs, Homotopical Topology, *Graduate texts in Mathematics 273*, Springer, 2016. 105, 107
- [28] R. M. Freund, M. J. Todd, *A Constructive Proof of Tucker's Combinatorial Lemma*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 30, (1981), 321-325. 11, 12
- [29] B. D. Gel'man, *On the Borsuk-Ulam Theorem for Lipschitz Mappings on an Infinite-Dimensional Space*, Functional Analysis and Its Applications, Vol. 53, No. 1, pp. 61-64, 2019. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. 53, No. 1 (2019), pp. 79-83. iii, iv, ix, x, 37
- [30] B. D. Gel'man, *An Infinite-Dimensional Version of the Borsuk-Ulam Theorem*, Functional Analysis and Its Applications, Vol. 38, No. 4, pp. 239-242, 2004. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. 38, No. 4 (2004), pp. 1-5. iii, ix
- [31] Catherine. Gille, Sur certains invariants récents en topologie de dimension 3, *Thèse de Doctorat, Université de Nantes*, 1998. 71, 77
- [32] Robert E. Gompf, Andras I. Stipsicz, 4 manifolds and Kirby Calculus, *Graduate Studies in Mathematics, Vol 20*, American Mathematical Society, 1999. 68, 69, 87, 88, 90
- [33] Daciberg L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam Theorem for Surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29, (2006), 117-123. 22, 38, 39, 48, 51
- [34] Daciberg L. Gonçalves, John Ghaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into surface*, Topology and its applications, 157, (2010), 1742-1759. v, xi, 39
- [35] Daciberg L. Gonçalves, Claude Hayat and Peter Zvengrowski, *The Borsuk-Ulam theorem for manifolds with applications to dimensions two and three*, Proceeding of the International Conference "Group actions and homogenous spaces", Comenius University, Bratislava, Slovakia, September (2009). iv, v, x, xi, 27, 39, 40, 42, 43, 48, 81
- [36] Daciberg L. Gonçalves, John Ghaschi, Vinicius Casteluber Laass, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler-characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. (2019) 21-65. iv, v, vi, x, xi, xii, 37, 40, 45
- [37] Daciberg L. Gonçalves, S. Mauro, O. Manzoli Neto, *The Borsuk-Ulam theorem for homotopy spherical space forms*, J. Fixed Point Theory Appl. 9 (2011), no. 2, 285-294. v, xi, 49, 80
- [38] A. Gramain, *Formes d'intersection et d'enlacement sur une variété*, Mémoires de la S. M. F, Tome 48 (1976), 11-19. 74
- [39] Munkholm Hans. J, *A Borsuk-Ulam theorem for maps from a sphere to compact topological manifold*, Illinois J. Math, 13, (1969), 116-124. iv, x, 36

- [40] Munkholm Hans. J, *Borsuk-Ulam type theorems for \mathbb{Z}_p - actions on mod(p) homology n-sphères*, Math- Scand 24. (1969), 167-185. iv, x, 35, 37
- [41] Allen. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2001. 6, 8, 105, 109, 112, 114
- [42] Marek Izodorek, Jan Jaworowski, *Parametrized Borsuk-Ulam theorems for multivalued maps*, Proceedings of the American Mathematical society, Vol 116, number 1, 1992. iii, ix, 37
- [43] Alain Jeanneret, Daniel Lines, *Invitation à la Topologie Algébrique, Tome II Cépaduès-Éditions*, 2014. 56
- [44] J. Jaworowski, *Involutions in lens spaces*, Topology and its Applications. 94 (1999), 155-162. 106, 107
- [45] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3* , Inventiones. Math. Vol 45, (1978), 35-56. 68, 69, 87, 88, 90
- [46] R. Kirby, P. Melvin, *Dedekind sums, μ -invariants and the signature cocycle*, Math. Ann. 299 (1994), 231-267. 107
- [47] Dmitry Kozlov, *Combinatorial Algebraic Topology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 21
- [48] Lyusternik L. A. and Shnirel'man S, *Topological Methods in Variational Problems*, Trudy Inst. Math. Mech., Moscow State Univ, Moscow, 1930. iii, ix
- [49] Solomon. Lefschetz, *Introduction to Topology*, Princeton New Jersey. 1949, Princeton University Press. 12
- [50] W. B. R. Lickorish, *A Representation of Orientable Combinatorial 3-Manifolds*, Annals of mathematics, 76, No. 3, (1962), 531-540. vi, xii, 68
- [51] Jiri Matoùsek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Lectures on Topological methods in Combinatorics and Geometry, Univesitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. iii, iv, ix, x, 3, 11, 12, 14, 21, 22, 27, 28, 29, 34, 37, 41
- [52] Mark. D. Meyson, Alden H. Wright, *A new constructive proof of the Borsuk-Ulam theorem*, Preceding of the American Mathematical Society, Vol 73, N 1, (1979), 134-136.
- [53] Dariusz Miklaszewski, *Borsuk-Ulam theorem for the loop space of a sphere*, Topol. Appl. (2018), <https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.10.004>. 37
- [54] E. Moise, Edwin E, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math, 56, (1952), 96-114. vi, xii, 53
- [55] Oleg R. Musin and Alexey Yu. Volovikov, *Borsuk-Ulam Type Spaces*, Moscow Mathematical Journal Vol 15, N 4, (2015), 749-766. iv, x, 37, 40

- [56] Oleg R. Musin, *Extensions of Sperner and Tucker's lemma for manifolds*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 132 (2015), 172-187. iv, x, 37
- [57] Minoru Nakaoka, *Generalizations of the Borsuk-Ulam theorem*, Osaka J. Math., 7, (1970), 423-441. iv, x, 37
- [58] Paul Olum, *Mappings of manifolds and The Notion of Degree*, Annals of Mathematics, Vol. 58, No. 3, (1953), 458-480. 46, 47, 48
- [59] T. Otsuki, *A polynomial invariant of rational homology 3-spheres*, Invent. math. 123, (1996), 241-257. 97
- [60] Frederic Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, *École normale supérieure*, 2009-2010.
- [61] Dale Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, 2003. 54, 56, 60, 61, 66, 68, 87
- [62] Nikolai Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds*, *Walter de Gruyter, Berlin New York*, 1999. vi, xii, 64, 68, 69, 84, 85, 87, 107
- [63] Nikolai Saveliev, *Invariants for Homology 3-Spheres*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer, Vol 140, 2002. vi, xii, 55, 64, 65, 66
- [64] Yoshimi Shitanda, *A generalization of antipodal point theorems for set-valued mappings*, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 39 (2010) p. 217-238. iii, ix, 37
- [65] Steven Simona, *G-Ham Sandwich Theorems : Balancing measures by finites subgroups of spheres*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 120 (2013), 1906-1912. iv, x, 28, 37
- [66] Joel Spencer, *Discrete Ham Sandwich Theorems*, Europ. J. Combinatorics (1981) 2, 291-298. iv, x, 28, 37
- [67] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications : a survey*. Méthodes topologiques en analyse non linéaire. Sémin. Math. Supér. Montréal, Sémin. Sci. OTAN (NATO Adv. Study Inst.), 95 (1985), 166-235. iv, x, 2, 17, 35
- [68] H. Steinlein, *Some Abstract Generalizations of the Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk Covering Theorem*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 83, No. 1 (1979), 285-296. 37
- [69] S. Stolz, *The level of real projective spaces*, Comment. Math. Helvetici, 64, (1989), 661-674. 22, 87
- [70] V. G. Turaev, *Cohomology rings, linking forms and invariants of spin structures of three dimensional manifolds*, Math. USSR Sbornik, 48, (1984), 65-79. vi, xii, 82, 84
- [71] Yuri A. Turgin, *A Borsuk-Ulam theorem for $(\mathbb{Z}_p)^k$ actions on products of $(\text{mod } p)$ homology spheres*, Topology and its Applications, 154, (2007), 455-461. 35, 37

- [72] Jack. Uccia, *Note On Fixed Point Free Involutions And Equivariant Maps*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 31, No 1, 1972, January (1972), 297-298. 5
- [73] Alexey Yu. Volovikov, *Borsuk-Ulam Implies Brouwer : A Direct Construction Revisited*, The American Mathematical Monthly, 115 : 6 (2008), 553-556. iv, x
- [74] A. Yu. Volovikov, *Brouwer, Kakutani, and Borsuk-Ulam Theorems*, Mathematical Notes, vol. 79, no. 3, (2006), pp 433-435. Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 79, no 03, (2006), pp.471-473. iv, x, 27
- [75] C. T. C. Wall, *Quadric forms of finite groups, and related topics*, Topology Vol. 2. pp. 281-298. Perpamon Press. (1964) Printed in Great Britain. 77
- [76] Andrew H. Wallace, *Modifications and Cobounding Manifolds*, Canadien. J. Math, 12, (1960), 503-528. vi, xii, 68
- [77] Steven H. Weintraub, *Fundamentals of Algebraic Topology*, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2013. 109
- [78] Chung -Tao. Yang, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, I*, Annals. of Mathematics, Vol 60 (1954), 262-282. 21, 41
- [79] Chung -Tao. Yang, *Continuous Functions From Spheres to Euclidean Spaces*, Annals of Mathematics, Vol 62, no. 2, 1955, 284-292. 21
- [80] Yoko.Tao, *On Fixed Point Free Involutions of $S^1 \times S^2$* , Osaka Math. J. 14, (1962), 145-152. 98

ملخص

ندرس نظرية "Borsuk-Ulam" بورسوك-ايلام للثلاثي (M, τ, \mathbb{R}^n) حيث M هو متغير متراس مترابط ذو بعد 3 مزود بالانعكاس الحر τ . أكبر قيمة من n التي من اجلها تتحقق نظرية Borsuk-Ulam تسمى مؤشر - \mathbb{Z}_2 ، وفي حالتنا يأخذ القيمة 1 أو 2 أو 3. نناقش هذا المؤشر بالكامل وفقًا للعمليات الكوهومولوجية المطبقة على الصنف المميز $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$ حيث $N = M/\tau$ هو فضاء المدارات.

في حالة ما إذا كان المتغير موجه نحصل على عبارة المؤشر من خلال مصفوفة التشابك المحصل عليها عن طريق جراحة لفضاء المدارات. نذكر أن أي متغير متراس مترابط موجه يمكن أن يكون له مثل هذا العرض عن طريق الجراحة. نطبق نتائجنا على مجموعات من الأمثلة. نعتبر أولاً الأغلفة المزدوجة للفضاءات العدسية. ثم نناقش بشكل كامل الأغلفة المزدوجة للألياف التورية. نعتبر حالة العروض عن طريق الجراحة على وصلات شبكية مقسمة جبريًا. أخيرًا، ندرس جميع الانعكاسات الحرة على $S^1 \times S^2$ ، والتي تحتوي على واحد غير موجه. نثبت نظرية Borsuk-Ulam لزجاجة كلاين K^3 الغير موجهة مع انعكاس طبيعي.

2020 MSC : 57K30, 57M60.

كلمات المفاتيح : نظرية بورسوك-ايلام، 3-متغيرات، جراحة، شكل التشابك.

Abstract

We study the Borsuk-Ulam theorem for the triplet (M, τ, \mathbb{R}^n) , where M is a compact, connected, 3-manifold equipped with a fixed-point-free involution τ . The largest value of n for which the Borsuk-Ulam theorem holds is called the \mathbb{Z}_2 -index and in our case it takes the value 1, 2 or 3. We fully discuss this index according to cohomological operations applied on the characteristic class $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$, where $N = M/\tau$ is the orbit space.

In the oriented case, we obtain an expression of the index from the linking matrix of a surgery presentation of the orbit space. Recall that any oriented compact 3-manifold can be given such a surgery presentation. We apply our results to a few families of examples. As a warm up we first consider the double cover of lens spaces. We then fully discuss double covers of mapping tori. We consider the case of surgery presentations on algebraically split links. We finally study all free involutions on $S^1 \times S^2$, which include a non oriented one. We prove the Borsuk-Ulam theorem for the non oriented 3-Klein bottle K^3 with a natural involution.

2020 MSC : 57K30, 57M60.

Key words : Borsuk-Ulam Theorem, 3-manifolds, surgery, linking forms.

Résumé

Nous étudions le théorème de Borsuk-Ulam pour les triplets (M, τ, \mathbb{R}^n) , où M est une 3-variété compacte connexe équipée d'une involution libre τ . La plus grande valeur de n pour laquelle le théorème de Borsuk-Ulam est vérifié est appelée le \mathbb{Z}_2 -indice et dans notre cas il prend la valeur 1, 2 ou 3. Nous discutons pleinement cet indice en fonction des opérations cohomologiques appliquées sur la classe caractéristique $x \in H^1(N, \mathbb{Z}_2)$, où $N = M/\tau$ est l'espace des orbites.

Dans le cas orienté, nous obtenons une expression de l'indice de la matrice d'enlacement d'une présentation par chirurgie de l'espace des orbites. Rappelons que toute 3 variété compacte orientée peut avoir une telle présentation par chirurgie. Nous appliquons nos résultats à quelques familles d'exemples. Nous considérons en premier les revêtements doubles des espaces lenticulaires. Ensuite nous discutons entièrement les revêtements doubles des fibrés en tores. On considère le cas des présentations par chirurgie sur des entrelacs algébriquement scindés. Finalement, nous étudions toutes les involutions libres sur $S^1 \times S^2$, qui incluent une qui n'est pas orientée. Nous prouvons le théorème de Borsuk-Ulam pour la bouteille de Klein non orientée K^3 avec une involution naturelle.

2020 MSC : 57K30, 57M60.

Mots clés : Le théorème de Borsuk-Ulam, 3-variétés, chirurgie, forme d'enlacement.