

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université Frères

Mentouri Constantine 1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

N° d'ordre:

N° de Série:

Thèse
Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat En Sciences
En: **Mathématique Appliquées**
Intitulée

Aspects Chaotiques dans les Systèmes
Dynamiques Discrets

Présentée par
Djafri Nabila

Devant le jury composé de:

Mr. Dalah Mohamed	Prof, Université FM-Constantine 1	Président
Mr. Hamaizia Tayeb	MCA, Université FM-Constantine 1	Rapporteur
Mr. Diar Ahmed	MCA, Université LBM, Oum El-Bouaghi	Examineur
Mr. Zehrour Okba	Prof, Université LBM, Oum El-Bouaghi	Examineur
Mme. Kharfouchi Soumia	Prof, Université Constantine 3	Examinatrice

Soutenue le: 05 / 04 / 2021

Remerciements

Je remercie avant tout Dieu Allah tout puissant, la santé et la patience qu'il m'a donnée afin de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier en tout premier lieu mon directeur de thèse, Monsieur Hamaizia Tayeb, Docteur à l'université F.M-Constantine 1, je remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercie Mr. Dalah Mohamed, professeur à l'université F.M Constantine 1 de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance et également les examinateurs : Mr. Zahrou Okba professeur à l'université L B M. Oum El-Bouaghi, Mme. Kharfouchi Soumia professeur à l'université Constantine 3 et Mr. Diar Ahmed Docteur à l'université L B M. Oum El-Bouaghi qui ont acceptés d'examiner mon manuscrit de thèse.

J'adresse des remerciements spéciaux à mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mon marie Kamel et ma princesse Anfel pour sa patience et ses encouragements.

Je remercie mes sœurs et mes frères, à toute ma famille et ma belle famille.

Résumé

Un nouveau système chaotique discret bidimensionnel modifié avec fraction rationnelle est présenté dans cette thèse ; il a des structures dynamiques plus compliquées que le système de Hénon et le système de Lozi.

Quelques comportements dynamiques, les points fixes, la bifurcation doublement de la période, la route vers le chaos et le spectre des exposants de Lyapunov sont étudiés plus en détail en utilisant à la fois une analyse théorique et une simulation numérique.

En particulier, le modèle considéré est un simple système discret borné basé sur une fraction rationnelle capable de générer des attracteurs étranges «multiples» via une route de bifurcation à double période vers le chaos. Ce nouveau système chaotique discret a une application étendue dans de nombreux domaines, tels que l'optimisation et la communication sécurisée.

Mots clés : Système 2D-chaotique rationnelle, Nouveau Attracteurs chaotique, Coexistence attracteurs.

Abstract

A new modified 2-D discrete chaotic system with rational fraction is introduced in this thesis ; it has more complicated dynamical structures than Hénon map and Lozi map.

Some dynamical behaviors, fixed points, period-doubling bifurcation, the way to chaos, and Lyapunov exponents spectrum, are further investigated using both theoretical analysis and numerical simulation.

In particular, the map under consideration is a simple rational discrete bounded map capable of generating “multi- fold” strange attractors via period-doubling bifurcation ways to chaos. This new discrete chaotic system has extensive application in many fields, such as optimization and secure communication.

Keywords :2-D rational chaotic map, New-chaotic attractor, Coexisting attractors.

ملخص

في هذه الأطروحة تم تقديم نظام فوضوي جديد معدل ثنائي الأبعاد يعتمد على دالة كسرية ؛ لديها سلوك ديناميكي أكثر تعقيداً من تطبيق Hénon وتطبيق Lozi.

بعض السلوكيات الديناميكية، والنقاط الثابتة، والتشعب المضاعف للفترة، والطريق إلى الفوضى، وظيف أس Lyapunov ، تم فحصها ودرستها بشكل أكبر باستخدام كل من التحليل النظري والمحاكاة العددية.

على وجه الخصوص ، التطبيق قيد الدراسة عبارة عن نظام بسيط محدود ذو طرف غير خطي كسري قادر على توليد جواذب غريبة "متعددة الطيات" عبر طرق التشعب المضاعفة التي تؤدي إلى الفوضى. يتمتع هذا النظام الفوضوي المتقطع المعدل بتطبيق واسع في العديد من المجالات ، مثل التحسين والتواصل الآمن.

الكلمات المفتاحية : خريطة فوضوية كسرية ثنائية الأبعاد ، جاذب فوضوي جديد ، جواذب متعايشة.

Table des matières

Table des figures	iv
1 Généralité sur les systèmes dynamiques	4
1.1 Introduction	4
1.2 Définitions et notations	6
1.2.1 Représentations mathématiques	6
1.2.2 Système dynamique discret	6
1.2.3 Systèmes autonomes ou non-autonomes	7
1.2.4 Espaces des phases	7
1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	7
1.3 Section de Poincaré	8
1.4 Points d'équilibres et orbites périodiques	10
1.4.1 Orbites ou trajectoire	10
1.4.2 Points d'équilibres	11
1.5 Points périodiques et P-cycles	11
1.6 Stabilité	12
1.6.1 Etude de stabilité	12
1.6.2 Stabilité du point fixe	13
1.6.3 Stabilité des points périodiques	15
1.7 Bifurcation	17
1.7.1 Différents types des bifurcations régulières	17
1.7.2 Diagramme de bifurcation	19
2 Notion de la théorie du chaos	20
2.1 Introduction	20
2.2 Histoire de la théorie du chaos	21
2.3 Caractésation du Systèmes Chaotiques Discret	24

2.3.1	Sensibilité aux conditions initiales	24
2.3.2	L'attracteur étrange	25
2.3.3	Spectre de puissance	26
2.4	Exposant de Lyapunov	27
2.4.1	Exposant de Lyapunov d'application discret	27
3	Quelques modèles des systèmes chaotiques discret	30
3.1	L'application de Hénon	30
3.2	L'application de Lozi	33
3.2.1	Propriétés de l'application de Lozi	33
3.2.2	Stabilité des points fixes	34
3.3	L'application logistique	35
3.3.1	La fonction logistique L_μ et ses points fixes	37
3.3.2	L'étude de stabilité des points fixes	37
3.3.3	Les points fixes de L_μ^4	44
3.4	Les bifurcations	46
3.4.1	Classification des bifurcations	46
3.5	Conjugaison topologique	51
3.5.1	Conjugaison topologique de L_μ et Q_c	54
4	Dynamique d'un système chaotique discret modifié avec fraction rationnelle	60
4.1	Introduction	60
4.2	Résultats analytiques	61
4.3	Points fixes et leurs stabilité	62
4.4	Détermination des orbites bornés et non bornés	65
4.5	Existence d'orbites bornés et non bornés	67
4.6	Certaines observations des nouveaux attracteurs	71
4.7	Simulations numériques et route vers le chaos	72
4.8	Conclusion	74
5	Conclusion générale	75
	Bibliographie	77

Table des figures

1.1	Section de Poincaré : la trajectoire de phase le \mathcal{T} coupe le plan \sum	10
1.2	Différents types de bifurcations	18
2.1	Sensibilité aux conditions initiales	25
3.1	L'attracteur chaotique de Hénon pour les valeurs $a=1,4$ et $b=0,3$	32
3.2	L'attracteur chaotique de Lozi pour les valeurs $a=1,7$ et $b=0,5$	36
3.3	a : Les points fixes de L_μ , b : Stabilité dans le cas $0 < \mu < 1$, d : $\mu = 1$, c : $1 < \mu < 2$, e : $\mu = 2$, f : $2 < \mu < 3$, g : $\mu = 3$	42
3.4	i : Les points fixes de L_2 , j : Stabilité dans le cas $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, k : Les points fixes de L_4 , l : Stabilité dans le cas $1 + \sqrt{6} < \mu < 3,54409$	45
3.5	Bifurcation tangente de F_μ	47
3.6	Bifurcation par doublement de la période de F_μ	49
3.7	Bifurcation par doublement de la période de $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$	50
3.8	Diagramme de bifurcation de l'application logistique	52
3.9	Cascade de bifurcation par doublement de la période de l'application logistique	53
4.1	Attracteurs de la carte (1) avec (a) $a=0.9$, $b=0.9$, (b) $a=0.9$, $b=2$, (c) $a=0.3$, $b=0.115$, (d) $a=0.3$, $b=0.3$, (e) $a=0.6$, $b=0.4$, (f) $a=0.6$, $b=0.9$	71
4.2	(a) le diagramme de bifurcation de la carte (3) obtenu pour $b = 0.3$ et $0.108 \leq a \leq 0.347$. (b) variation des exposants lyapunov de la carte(4.1) en fonction du paramètre $0.108 \leq a \leq 0.347$ avec $b = 0.3$	72
4.3	(a) le diagramme de bifurcation de la carte (3) obtenu pour $b = 0.9$ et $0.13 \leq a \leq 2$. (b) variation des exposants lyapunov de la carte(4.1) en fonction du paramètre $0.13 \leq a \leq 2$ avec $b = 0.9$	73

Introduction

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps de telle façon qu'il soit déterministe et son avenir ne dépend que du passé ou du présent [3].

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du *XIXe* siècle. En effet, vers la fin du ce siècle le Français H. Poincaré a introduit l'étude des propriétés qualitatives des solutions grâce à des techniques géométriques et topologiques. Certaines de ces études ont conduit à la définition du terme "chaos" quelques décennies plus tard. Les trajectoires qui décrivent certains corps du système solaire ont les caractéristiques d'un signal chaotique : apériodiques et sensibles aux conditions initiales [3].

Depuis, des nombreuses études ont été réalisées sur les systèmes dynamiques présentant un comportement chaotique. Certains concernent la convection de Rayleigh-Bénard en 1916 [3], le modèle de turbulences de Lorenz en 1963 [16] et les travaux du physicien Mitchell Feigenbaum en 1978 [19]. Le premier travail qui a introduit le mot "chaos" avec cette signification était celui de Li and Yorke [15]. Actuellement, un grand nombre de chercheurs dans des domaines de recherche très différents utilisent des signaux chaotiques. De nombreuses applications peuvent être trouvées dans [18, 19].

Cette thèse a pour objet l'étude d'une dynamique chaotique produite par un système non linéaire bidimensionnel régi par des équations aux récurrences

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui évolue au cours du temps et qui est à la fois déterministes et présente une instabilité appelé «sensibilité aux conditions initiales». Ces phénomènes ne sont donc pas prédictibles en principe à long terme.

Dans l'étude de mouvement chaotique, le but ultime n'est pas de résoudre l'équation différentielle ou les équations aux récurrences que l'on obtient comme pour un système quelconque mais d'étudier le comportement général de notre corps et de voir s'il tend vers certains domaines, à quels moments et pourquoi.

Enfin, on cherche à comprendre et à étudier dans quelle mesure les conditions initiales influent sur le comportement de notre corps. Lors de l'étude d'un système chaotique, un objectif important est la recherche des points fixes aussi appelés états stationnaires du système.

Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle n'évolue plus avec le temps. Certains de ces points fixes sont attractifs, ce qui veut dire que si le système parvient à leur voisinage, il va converger vers le point fixe.

De même, on recherche les points dits périodique. Ce sont les états du système pour lesquels on remarque que le mouvement commence à se répéter au bout d'un certain nombre de périodes. Les points périodiques peuvent également être attractifs. Nous construisons les bifurcations du système Aussi nous construisons les attracteurs étranges.

Notre recherche porte sur l'analyse et l'étude d'un système modéliser par une transformation basée sur une fonction rationnelle. Elle regroupe différents résultats concernant l'existence des attracteurs, les caractérisations des différentes bifurcations et comportements chaotiques possibles.

Les travaux de la thèse sont structurés comme suit

Nous avons présenté, dans **le premier chapitre**, les notions fondamentales et les outils nécessaires à la compréhension et à l'étude des systèmes dynamiques discrets.

Le **deuxième chapitre** comprend un survol historique de la théorie du chaos déterministe et les principales définitions et notions générales qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, tels que les attracteurs étranges, sensibilité aux conditions initiales et les exposants de Lyapunov.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude des modèles célèbres tels que l'application logistique et les modèles de Hénon et Lozi.

Le **quatrième chapitre** expose le contenu de notre travail " Boundedness and dynamics of a modified discrete chaotic system with rational fraction", est destiné à étudier un système modélisé par une récurrence d'ordre 2 basée sur une « fonction rationnelle ». Nous souhaitons mettre en évidence les propriétés intrinsèques associées de cette fonction, en particulier, l'évolution qui conduise au chaos.

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes dynamiques

Le but de ce premier chapitre est d'introduire de nombreuses notions et techniques de base de la théorie des systèmes dynamiques.

1.1 Introduction

En mathématique, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes

dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).

Deux aspects importants d'un système dynamique sont :

- Causal, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.

- Déterministe, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

Une notion importante est celle de système dynamique réversible pour lequel on peut également décrire un état passé du système à partir de son présent et de son futur. Autrement dit, en renversant la flèche du temps, on a encore un système dynamique. Mathématiquement, un système dynamique réversible est un cas particulier d'action de groupe (le groupe étant celui des entiers relatifs Z dans le cas discret et l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} dans le cas continu).

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distincte

- Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), x \in u \subset \mathbb{R}^n, v \in V \subset \mathbb{R}^p . \quad (1.1)$$

Le système (1.1) s'appelle système dynamique, \mathbb{R}^n est appelé l'espace des phases, \mathbb{R}^p est appelé l'espace des paramètres.

- Une évolution discrète dans le temps, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se

généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finie représenté par une application :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^p.$$

1.2 Définitions et notations

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction il est défini par un triplet $(X; T; f)$ constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \longrightarrow T$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

1.2.1 Représentations mathématiques

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : Dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres, du système sont fixes.

1.2.2 Système dynamique discret

Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$x_{k+1} = f(x_k, v), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^p. \quad (1.2)$$

1.2.3 Systèmes autonomes ou non-autonomes

Lorsque la fonction f dans (1.2) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

1.2.4 Espaces des phases

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y pallier est l'espace de phase. On considère chaque composante x_i de X comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n . L'évolution suivante t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à

chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \varphi & : X \times \mathbb{R} \longrightarrow X \\ (x, t) & \longmapsto \varphi_t(x) = \varphi(x, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Qu'on appelle **flot** et qui possède les propriétés suivantes :

$$\varphi_t(x_0) = x_0,$$

$$\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0)).$$

Pour tous $t, s \in \mathbb{R}$.

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

Exemple 1 : *Cas discret (L'application de Hénon)*

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels, l'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.3 Section de Poincaré

Nous présentons dans cette section la méthode des section de Poincaré qui permet de construire des systèmes dynamiques discrets à partir des systèmes différentiels.

La technique dite des section de Poincaré facilite l'étude des systèmes dynamiques considérés en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret) par le biais de cette méthode, la dimension d du problème initiale sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension $d - 1$.

Soit $(\mathbb{R}^d, \{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ un système dynamique crée par un champ de vecteurs f . Il s'agit de déterminer les intersections successives des orbite avec un hyperplan Σ transvers au flot dans l'espace de phase, la séquence des points ordonnés suivant le temps constitue la section de Poincaré S :

$$S = \left\{ \sum \cap \varphi_t(x), t \in \mathbb{R}, x \in X \right\}.$$

Suivant la structure de l'espace des phases X et les propriétés des applications φ_t , plusieurs types de systèmes dynamiques sont distingués :

- Systèmes dynamiques topologiques : X est un espace topologique et φ_t une application continue
- Les systèmes mesurés (théorie ergodique) : X est un espace de probabilité muni de la σ -algèbre B et de la mesure μ , et φ_t est une application sur X préservant la mesure.
- Les systèmes dynamiques différentiables : X est un espace différentiable compact et φ_t un difféomorphisme sur X .
- Les systèmes dynamiques algébriques.

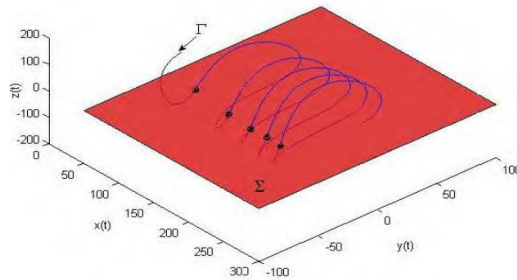


FIG. 1.1: Section de Poincaré : la trajectoire de phase le \mathcal{T} coupe le plan Σ

1.4 Points d'équilibres et orbites périodiques

Les points fixes et les orbites périodiques sont des trajectoires particulièrement simples mais qui jouent un rôle central dans l'étude des systèmes dynamiques.

1.4.1 Orbites ou trajectoire

L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_+^f = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Si f est bijectif, on définit l'orbite de x par :

$$O^f = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_-^f = \{f^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

1.4.2 Points d'équilibres

Un point d'équilibre (ou point critique, ou point singulier, ou point fixe) de l'équation $\dot{x} = f(x)$ est un point x^* de l'espace des phases vérifiant $f(x^*) = 0$, ou bien de manière équivalente si $\varphi_t(x^*) = x^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, sinon le point est dit ordinaire.

Remarque 2 :

Par un changement de variable $y = x - x^$, on peut ramener le point à l'origine (0).*

1.5 Points périodiques et P-cycles

S'il existe $n \geq 1$, tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est un point **périodique**, la **période** d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que :

$$f^n(x) = x$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un **P-cycle**), si :

$$f(x_i) = x_{i+1}, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, p-1$$

et

$$f(x_{p-1}) = x_0.$$

1.6 Stabilité

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des applications, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 – 1918).

Un point d'équilibre d'application continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : Si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : Une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-il avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

1.6.1 Etude de stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

Les deux théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

Théorème 3 *⟨Brouwer⟩*

Toute application continue $f : \overline{B}^n \longrightarrow \overline{B}^n$ avec $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$, admet un point fixe c'est-à-dire l'application $f(x) = x$ admet une solution dans \overline{B}^n

Théorème 4 *⟨contraction de Banach⟩*

Soit $f : \overline{B}^2 \longrightarrow \overline{B}^2$ application continue, où \overline{B}^2 est le disque unitaire fermé :
 $\overline{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$

Supposons que : $|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda |x_1 - x_2|$

Pour tout vecteur $x_{i,j} \in \overline{B}^2$ et un certain $0 < \lambda < 1$, alors il existe un point fixe unique $\bar{x} \in \overline{B}^2$. De plus on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x}$ pour tout $\bar{x} \in \overline{B}^2$

1.6.2 Stabilité du point fixe

- Un sous ensemble A de D est invariant par f si $f(A) = A$.

- Un sous ensemble compact fermé A de D est un **attractif** ou est **attracteur** si A est invariant par f , et s'il existe un voisinage V de A tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une suite qui converge vers A . Le voisinage V est appelé le bassin d'attraction de A et on a :

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V).$$

- Le sous ensemble A est **répulsif** ou **instable** s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$ l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de façon équivalence : si A est un attracteur pour f^{-1}).

- Un attracteur A est fractal (ou un attracteur étrange) si l'orbite de x est dense dans A pour tout $x \in A$ et est sensible aux condition initiales.

L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

Définition 5 <stabilité>

Un point fixe $\bar{x} \in D$ est stable, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x_0 - \bar{x}| < \delta \implies \forall k > 0 : |x_k - \bar{x}| < \varepsilon$$

En dimension un, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la pente $m = f'(\bar{x})$ de la tangente au point fixe \bar{x} qui détermine le type de point fixe.

Théorème 6 :

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le point fixe est :

- 1)- Attractif(ou stable si $|m| < 1$
- 2)- Répulsif(ou instable) si $|m| > 1$
- 3)- Indifférent si $|m| = 1$
- 4)- Superattractif(ou super stable) si $|m| = 0$

m s'appelle le multiplicateur de f au point \bar{x} en dimension n , pour décider si un point fixe \bar{x} est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice Jacobéenne $Df(x) = J(x)$.

Théorème 7 :

Si toutes les valeurs propres de $Df(x) = J(x)$ sont à l'intérieur du disque unité, x est stable si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un, x stable.

-Cas $f'(x^*) = 1$, on a le théorème suivante

Théorème 8 :

Si x^* un point fixe de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f \in C^2$ et $f'(x^*) = 1$ alors :

- $f''(x^*) > 0 \implies x^*$ est inférieurement asymptotiquement stable et supérieurement instable.
- $f''(x^*) < 0 \implies x^*$ est supérieurement asymptotiquement stable et inférieurement instable.

Théorème 9 :

Si x^* un point fixe de l'équation $x_{n+1} = f(x_n)$ où $f \in C^3$ et $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) = 0$, alors :

- $f'''(x^*) > 0 \implies x^*$ est instable.

- $f'''(x^*) < 0 \implies x^*$ est stable.

-Cas $f'(x^*) = -1$, on a le théorème suivante

Théorème 10 :

Soit f une fonction trois fois continument différentiable dans un voisinage de point fixe x^* tel que $f'(x^*) = -1$:

Soit $S_f(x^*) = 2f'''(x^*) + 3\left(f''(x^*)\right)^2$

- Si $S_f > 0$, alors x^* est asymptotiquement stable .

- Si $S_f < 0$, alors x^* est instable.

1.6.3 Stabilité des points périodiques

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur comme les points périodiques d'ordre p sont des points fixes de f^p , alors le théorème suivant est une généralisation du thèrome.

Théorème 11 :

Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité. Le cycle est stable si une des valeurs propres a un module plus grand de un, le cycle est instable.

En dimension un, si $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est un cycle d'ordre p , les dérivées $(f^p)'(x)$ pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ sont égales. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_0) = f'(f(\dots f(x_0))) \dots f'(f(x_0)) f'(x_0) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0).$$

Mais $x_0 = x_p$, on en déduit que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_i)$, pour $i = 0, 1, \dots, p-1$

$$m_p = (f^p)'(x_0) = \dots = (f^p)'(x_{p-1})$$

Cette valeur commune m_p est appelée le multiplicateur du cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$, cette dernière détermine le type du cycle.

Théorème 12 :

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est :

- Attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$
- Répulsif si $|m_p| > 1$
- Indifférent si $|m_p| = 1$
- Super attractif (ou super stable) si $m_p = 0$

Théorème 13 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans un voisinage de point fixe x^* ,

alors :

- Si $|f'(x^*)| < 1$, x^* est localement asymptotiquement stable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, x^* est instable.

1.7 Bifurcation

La théorie de bifurcation étudie le changement de stabilité d'une application (ou un système dynamique) sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre d'application. Ce changement se produit à des points particuliers appelés points de bifurcation.

Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un attracteur ou d'un cycle.

1.7.1 Différents types des bifurcations régulières

Ce type d'application possède trois types de bifurcations locales à un paramètre :

- La bifurcation de doublement de période (ou flip)

Cette bifurcation a lieu lorsque un des multiplicateurs (ou les valeurs propres λ) est égale à -1 , et donc un d'ordre k soumis à cette bifurcation changera sa nature et créera un cycle d'ordre $2k$ et avec la même nature, lorsque une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à -1 , on a alors une bifurcation flip (ou doublement de période, ou fourche).

- La bifurcation point selle (ou noeud-col ou fold)

Cette bifurcation correspond à la situation où l'un des valeurs propres est égale à $\lambda = +1$, ce type de bifurcation donne deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est instable et l'autre est attractif. ou on dit lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à $+1$, on a alors une bifurcation noeud-col (ou tangente)

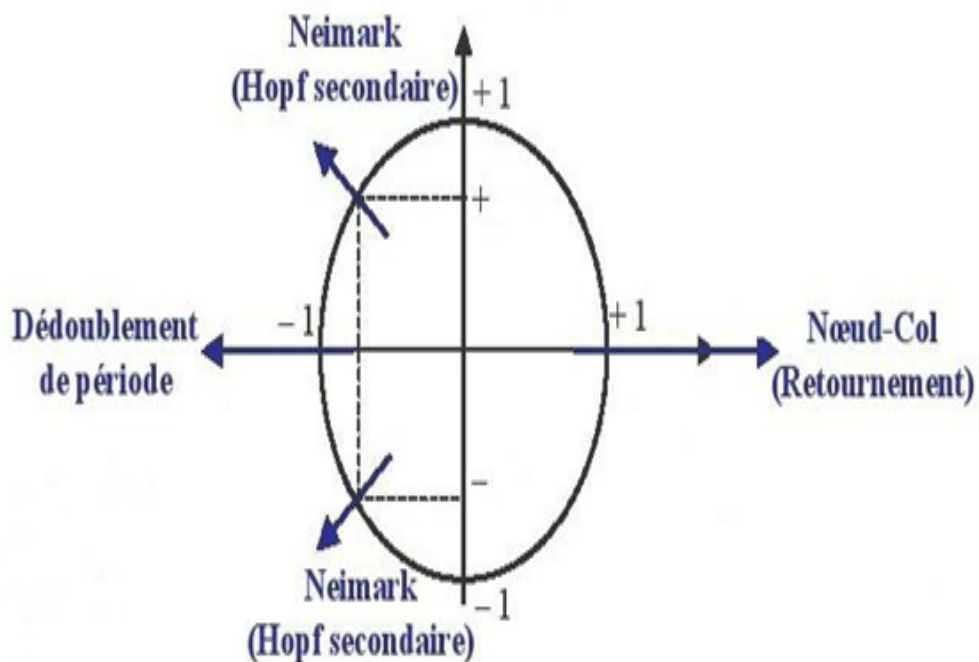


FIG. 1.2: Différents types de bifurcations

- La bifurcation de Neimark

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne $Df(x)$ possède deux multiplicateurs complexes conjugués (ou deux valeurs propres) $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$

ou on dit lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(x)$ quittent (ou rentrent dans) le cercle unité simultanément à $\lambda_{1,2} = \exp \pm i\theta$ on a alors une bifurcation de Neimark.

Remarque 14 : *Nous avons déjà dit que cette bifurcation sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation d'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle*

limite. On va étudier les systèmes de bifurcation correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$.

1.7.2 Diagramme de bifurcation

Il est intéressant de visualiser ces différents comportements sur diagramme de bifurcation le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire d'application en fonction du paramètre de contrôle (ou bifurcation).

On trace tous les points obtenus en fonction de la valeur du paramètre de bifurcation λ correspondant. Le nombre des points différents représentés sur une même droite verticale donne donc ainsi le facteur par lequel est multipliée la période initiale. On y retrouve bien les valeurs des seuils de bifurcation λ_i . Et à la fin, alors un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. la transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

Chapitre 2

Notion de la théorie du chaos

2.1 Introduction

La théorie du chaos fait partie des sciences les plus récentes est devenue l'un des domaines les plus avancés dans la recherche contemporaine. Les origines de cette nouvelle théorie s'étendent aux mathématique et physique des débuts du 20^{ème} siècle, mais elle a émergé dans les années 1960 – 1970 [21].

Durant des années, le chaos était considéré comme incontrôlable et même inutilisable, malgré la mise en équation de certains phénomènes et la démonstration du déterminisme dans des aspects d'apparence aléatoire [21].

La théorie du chaos est définie comme une étude des systèmes dynamiques non-linéaires complexes et les systèmes complexes qui sont exprimés par des récurrences et des algorithmes mathématiques et qui sont dynamiques (non constants) et non périodique. Elle inclut l'étude qualitative et quantitative d'un comportement instable non périodique et aléatoire des systèmes dynamiques non linéaires déterministes. Le chaos peut être vu

aussi comme un système avec des propriétés stochastiques. Dans toutes les définitions qui peuvent exister pour le chaos, un phénomène fondamental est indispensable. La sensibilité aux conditions initiales [21].

En effet, en programmant son ordinateur et en changeant par 10^{-4} les conditions initiales des prévisions météo, Edward Lorenz a découvert que pour certaines équations ou système d'équations non linéaires les résultats montrent une grande sensibilité aux conditions initiales. On peut dire que cette anecdote est la base du chaos déterministe [5][21].

La théorie du chaos influence l'explication de plusieurs phénomènes et trouve son application dans plusieurs domaines tels que :

- Economie : Prévision des cycles économiques, des mouvements commerciaux et des marchés financiers.
- Météo : Prévisions météo logiques.
- Santé : Prévisions des crises d'épilepsie.
- Sciences sociales : Comportement des systèmes sociaux.
- Cryptage de l'information.

2.2 Histoire de la théorie du chaos

La signification scientifique du chaos n'a été citée qu'à la fin du *XIXe* siècle par Henri Poincaré (1854–1912), car depuis les travaux d'Isaac Newton (1642–1727), la science était dominée par le déterminisme. Moyennant la connaissance des conditions initiales d'un système donné, les scientifiques pensaient pouvoir prédire complètement et précisément le futur du système en question. Un siècle après Newton, Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)

définit le sens absolu du déterminisme, il affirmait que l'état présent de l'univers permettait en principe de prédire complètement son futur. Mais Poincaré allait donner tort à Laplace, il avait en effet montré que, malgré un caractère déterministe, le problème des trois corps en mécanique céleste (exemple Terre-lune-soleil) ne pouvait pas donner lieu à la prédiction [5].

On a ainsi pu tester la stabilité de ce système en comparant les trajectoires suivies par un des corps à partir de deux positions initiales très proches : ces trajectoires restent proches l'une de l'autre à court terme et on peut donc prédire les éclipses, mais elles deviennent complètement différentes à long terme, une toute petite différence initiale a donc produit un effet considérable. C'est dans cette extrême sensibilité aux conditions initiales que réside l'origine de l'imprédictibilité du chaos déterministe. Poincaré avait remarqué cet effet puisqu'il a écrit : « Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est du au hasard » [5].

L'idée que les petites causes peuvent avoir quelquefois de grands effets a été notée par les historiens et autres depuis longtemps, par exemple dans la fameuse expression “ pour manque d'un clou un royaume a été perdu “ en 1860 James Maxwell a discuté comment les collisions entre molécules dures de la sphère pourraient mener à l'amplification progressive du rendement aléatoire microscopique dans les gaz [21].

En 1898 Jacques Hadamard a noté la divergence générale de trajectoires dans l'espace, et Pierre Duhem a discuté la signification générale possible de ceci en 1908, il a donné le résultat qu'on ne peut jamais atteindre une prédiction complète du système

chaotique, et cela à cause des conditions initiales aléatoires nécessairement présentes dans le théorème de Hadamard [5].

En 1961, Edward Lorenz, météorologue et professeur de mathématiques au MIT (Massachusetts Institut of Technology) observa par hasard le phénomène qui s'appellera plus tard la théorie de chaos déterministe, à la suite de calculs visant à prévoir les phénomènes météorologiques. Ces prévisions nécessitaient un grand nombre de calculs d'équations différentielles complexes à très grand nombre de variables impossible à faire à la main, il a utilisé alors un ordinateur, son Royal Mcbee LGP-300 qui est entré dans l'histoire de la théorie du chaos, et qui a fait de Lorenz le père officiel de cette théorie puisque les calculs des systèmes chaotiques régissant ces phénomènes étaient difficiles à comprendre et à simuler sans ordinateur. Après plusieurs heures de calculs, Lorenz avait obtenu une série de résultats et a décidé de repasser une deuxième fois ces données dans l'ordinateur pour s'assurer du résultat. Pour gagner du temps, il avait entré les variables avec trois chiffres après la virgule au lieu de six, il pensait qu'une faible variation dans les variables à la base d'un calcul aurait une incidence du même ordre de grandeur sur le résultat final, mais à sa grande surprise les résultats étaient totalement différents de la première série. Il venait de découvrir le comportement chaotique d'un système non linéaire : soit, d'infimes différences dans les conditions initiales d'un système déterministe entraîneraient des résultats complètement différents. Pour mieux comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales Lorenz a eu recours à une métaphore qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : «le simple battement d'aile de papillon au Brésil pourrait déclencher une tornade au Texas » [5].

En 1971, le physicien belge David Ruelle et le mathématicien Floris Takens ont également publié un article dans lequel ils avaient analysé les états finaux des modèles mathématiques de systèmes qui dissipent une partie de leur énergie en chaleur. Les résultats ont montré que l'ensemble des états finaux d'un tel système a une nature fractale : C'est un attracteur étrange. Le mouvement sur un tel attracteur dépend énormément des conditions initiales ; c'est la propriété appelée effet papillon par Lorenz. En appelant bifurcation le point où une faible variation d'un paramètre induit un changement qualitatif de la solution d'une équation, Ruelle et Takens ont montré qu'un tout petit nombre de bifurcations suffit à produire un comportement chaotique et donc à engendrer la turbulence. Quatre ans plus tard, l'étude expérimentale d'un fluide en rotation par les physiciens Jerry Gollub et Harry

Swinney, du City Collège de New York, montrait que l'apparition de la turbulence suit bien dans ce cas la description de Ruelle et Takens mais le mot Chaos n'a pas encore été utilisé ; il était introduit par le mathématicien Yorke en 1975 et la théorie du chaos déterministe sera alors appliquée à l'étude de phénomènes dans divers [5].

2.3 Caractérisation des Systèmes Chaotiques Discrets

2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

Pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x_0 dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée (FIG.2.1).

D'un point de vue mathématiquement on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

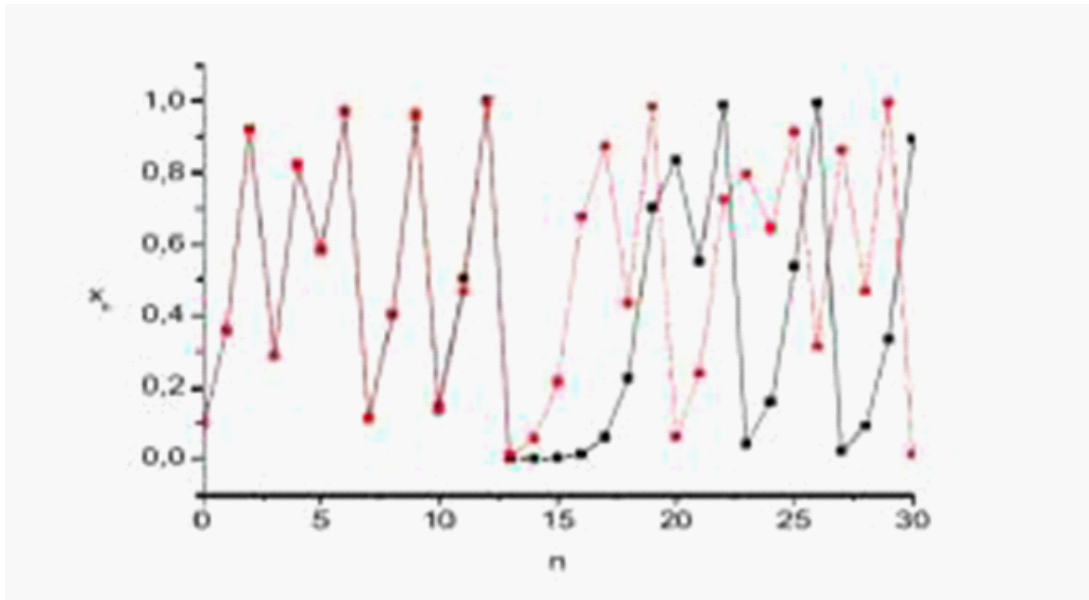


FIG. 2.1: Sensibilité aux conditions initiales

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists (y, p) \in D : \begin{cases} \|x - y\| < \varepsilon \\ \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \end{cases} \quad (2.1)$$

2.3.2 L'attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange,. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infini, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Alors on peut donner cette définition :

Définition 15 : *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A , c'est-à-dire que pour tout point de A s'il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Attraction : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*

- *Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).*

- *Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement a périodique.*

- *Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

2.3.3 Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évolution temporelle d'une des variables du système. Lorsque le système est intégrable c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace de phases, ce système est dit intégrable, les trajectoires étant la composition de mouvements d'oscillation ayant chacune une pulsation w_i .

Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations w_i , à leurs harmoniques mw_i avec $m \in \mathbb{N}$, aux combinaisons linéaires de fréquences $mw_i + nw_j$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$, les spectres qui sont la combinaison de

plusieurs fréquences sans rapport simple sont dit quasi-périodiques.

L'existence de spectre larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système.

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalle régulier, c'est ce qu'on appelle la série temporelle.

2.4 Exposant de Lyapunov

Exposant de Lyapunov permet de quantifier la stabilité ou l'instabilité de ses mouvements, un exposant de Lyapunov soit est un nombre réel (fini) soit vaut $+\infty$ ou $-\infty$, un mouvement instable a un exposant de Lyapunov positif, et est stable si exposant de Lyapunov négatif, les mouvement bornés d'un système linéaire ont un exposant de Lyapunov négatif ou nul. On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapunov est strictement positif. En outre, L'exposant de Lyapunov.

2.4.1 Exposant de Lyapunov d'application discret

f une application unidimensionnelle, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $x_{N+1} = f(x_N)$, x_0 et $x_0 + \varepsilon$ deux points initiaux proches après N itération on aura :

$$\varepsilon \exp N\lambda(x_0) = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|. \quad (2.2)$$

Quand N tend vers l'infini et ε tend vers 0.

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right|. \quad (2.3)$$

Notons $x_i = f^i(x_0)$ et on sait que

$$f^N(x_0) = f(f^{N-1}(x_0)). \quad (2.4)$$

Par règle de chaîne on obtient :

$$\frac{df^N(x_0)}{dx} = f'(x_{N-1}) f'(x_{N-2}) \dots f'(x_1) f'(x_0). \quad (2.5)$$

Par l'exposant de Lyapunov égale :

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|. \quad (2.6)$$

On considère l'application discret [8]

$$X_{n+1} = f(X_n), X_n \in \mathbb{R}^2, n = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, est un champ de vecteur associé d'application (2.7)

soient $J(X_n)$ sa Jacobienne en $X_n \in \mathbb{R}^2, n = 0, 1, \dots$ et la matrice :

$$T_N(X_0) = J(X_{N-1}) J(X_{N-2}) \dots J(X_1) J(X_0) \quad (2.8)$$

D'autre part, soit $J_i(X_0, N)$ le module de la valeur propre $i^{\text{ème}}$ où $i = 1, 2$ de la matrice $T_N(X_0)$ où $N = 0, 1, 2, \dots$

D'après ce qui précède nous avons la définition suivante :

Définition 16 :

Les exposants de Lyapunov d'application discret (2.7) en dimension deux au point x_0 sont définis par :

$$l_i(X_i) = \ln \left(\lim_{N \rightarrow \infty} J_i(X_0, N)^{\frac{1}{N}} \right), i = 1, 2 \quad (2.9)$$

Exemple 17 : *Soit le système discret suivante :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + ax_n^2 = ax_n(1 + x_n) \\ y_{n+1} = b + x_n + by_n + x_n y_n \end{cases}$$

La matrice Jacobienne du système est :

$$\begin{pmatrix} a(2x + 1) & 0 \\ y + 1 & b + x \end{pmatrix}$$

Parceque la matrice jacobienne est triangulaire, les exposant de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N=1}^{N=k} \ln a |2x + 1| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{N=1}^{N=k} \ln |b + x| \end{cases}$$

Chapitre 3

Quelques modèles des systèmes chaotiques discret

3.1 L'application de Hénon

L'application de Poincaré correspondante au modèle de Lorenz étant fortement dissipative, donc difficile à calculer précisément M. Hénon en 1976, dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz, proposa l'application suivante du plan sur lui-même :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (3.1)$$

avec a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non linéarité de l'itération et celle de b traduit le rôle de la dissipation.

Les valeurs habituellement utilisées pour a et b sont :

$a = 1.4$ et $b = 0.3$, ce sont les valeurs adoptées dans la suite.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite.

L'application de Hénon est inversible, son inverse est :

$$f^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2) \quad (3.2)$$

La matrice Jacobienne ici a pour expression

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La déterminant de la matrice Jacobienne est égale à $|J| = -b$

Ainsi, les aires sont multipliées à chaque itération par un facteur de $|b|$, il y a donc contraction des aires si $|b| < 1$.

Considérons l'application de Hénon

$$f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) \quad \text{avec } 0 < b < 1 \quad (3.4)$$

Cette application a deux points fixes

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, y_1 = bx_1 \\ x_2 = \frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, y_2 = bx_2 \end{cases}$$

Trouvés en faisant la définition des points d'équilibres :

$$f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) = (x, y)$$

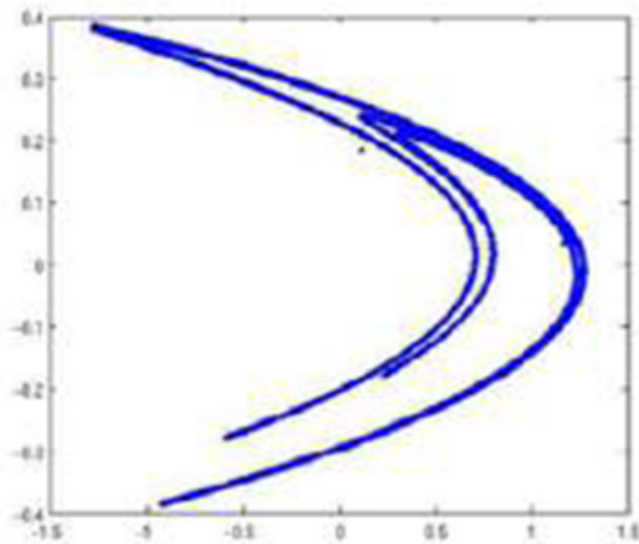


FIG. 3.1: L'attracteur chaotique de Hénon pour les valeurs $a=1,4$ et $b= 0,3$

Le déterminant $(1 - b)^2 + 4a$ est négative si $a < a_0$:

$$a < a_0 = -\frac{(1 - b)^2}{4} = -0.1225$$

Dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

Stabilité des points fixes :

La matrice Jacobienne J a pour valeurs propres, les valeurs propres données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieur à 1, tandis que la plus grand est inférieur,

égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $\frac{(1-b)}{2a}$, on en déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle.

L'autre point fixe stable si $a < \frac{3(1-b)^2}{4} = 0.3675$

Si $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$

3.2 L'application de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi [13], propose l'application suivante :

$$\begin{cases} L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y + 1 - a|x|, bx) \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2.1 Propriétés de l'application de Lozi

1- La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non linéaire x^2 de l'application de Hénon est remplacé par $|x|$ dans l'application de Lozi. Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x > 0$, $x < 0$.

2- L'application de Lozi n'est pas différentiable.

3- Si $a = 0$, L'application de Lozi est une application linéaire, donc, on pose toujours $a \neq 0$.

4- L'application de Lozi est inversible, son inverse est :

$$f^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + a/b|y|) \quad (3.6)$$

5- Le déterminant de la matrice Jacobienne est égale à $|J| = -b$, alors il y a contraction des aires pour $|b| < 1$

Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right), \text{ si } b < a + 1 \\ P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right), \text{ si } b < 1 - a \end{cases} \quad (3.7)$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évolution des valeurs propres de la matrice Jacobienne.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2 Stabilité des points fixes

L'équation caractéristique de la matrice Jacobienne est :

$$\begin{cases} \lambda^2 + a\lambda - a \text{ pour } P_1 \\ \lambda^2 - a\lambda - a \text{ pour } P_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Stabilité de P_1 :

- Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, Les valeurs propres sont des réelles.

-Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, Les valeurs propres sont des complexes.

Elle sont de module inférieur à un si :

$b > -1, b < a + 1$ et $b < 1 - a$, et le point fixe P_1 est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si :

$b < -1, b < a + 1$ et $b < 1 - a$, et le point fixe P_1 est instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si :

$b > a + 1$ et $b > 1 - a$, et le point fixe P_1 est point selle ou col.

Stabilité de P_2 :

L'équation caractéristique pour P_2 est définie par :

$$\lambda^2 - a\lambda - b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

L'existence de P_2 est pour $b > 1 - a$, alors $\Delta = a^2 + 4b > 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elles sont de modules supérieurs à un si :

$b > -a + 1$ et $b > 1 + a$, et le point fixe P_2 est point instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si

$b > a + 1$ et $b > 1 - a$, et le point fixe P_2 est point selle ou col.

Pour plus de détails voir les références cités à la fin de cette étude, en particulier [6] [12] [20].

Misiurewicz dans [17] prouve l'existence d'un attracteur étrange de l'application de Lozi.

Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.6$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la **Figur (3.2)**

3.3 L'application logistique

Le but est de modéliser une population P qui dépend du temps de manière déterministe c'est-à-dire avec une loi parfaitement définie, dans le cas où le temps est discret

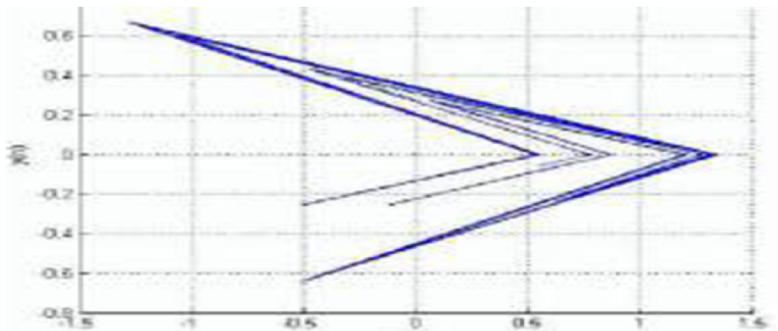


FIG. 3.2: L'attracteur chaotique de Lozi pour les valeurs $a=1,7$ et $b=0.5$

$n \in \mathbb{N}$, et on a une suite P_n là encore à valeurs réelles, on se donne l'accroissement $P_{n+1} - P_n$ en fonction de P_n .

On ne s'intéresse ici qu'aux cas où la population suit un modèle dit autonome au sens où elle ne dépend que d'elle-même et non du temps. On aura donc une équation de la forme $P_{n+1} = f(P_n)$, la fonction f étant indépendante du temps. D'après l'accroissement de population $P_{n+1} - P_n$, dans tous les cas on obtient une équation de degré 2 :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \mu P_n - \lambda P_n^2 \\ &= \lambda P_n \left(\frac{\mu}{\lambda} - P_n \right) \\ &= \mu P_n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} P_n \right), \text{ ou } \lambda, \mu > 0 \end{aligned}$$

Comme P_n doit rester 0, on a nécessairement $P_n \leq \frac{\mu}{\lambda}$ le rapport entre la population P_n et la population maximum μ , on trouve l'équation logistique standard :

$$X_{n+1} = \mu X_n (1 - X_n)$$

On note que cette équation ne dépend plus que de μ .

Comme X_n doit être compris entre 0 et 1 (le rapport entre la population et la population maximale), on vérifie qu'il faut que μ soit compris entre 0 et 4.

3.3.1 La fonction logistique L_μ et ses points fixes

-La fonction L_μ :

Soit le réel $\mu \in [0, 4]$, on a :

$$L(x) = \mu x(1-x) \implies L'(x) = \mu(1-2x)$$

La dérivée est nulle au point $x = \frac{1}{2}$, positive auparavant, négative après. Le graphe de L est une parabole dont le sommet est le point $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$. On note qu'on a $L(0) = L(1) = 0$, l'image de I est le segment $[0, \frac{\mu}{4}]$. En particulier, comme on a $\mu \leq 4$, l'intervalle I est stable.

-Recherche des points fixes :

On résout l'équation

$$\mu x^*(1-x^*) = x^*$$

On trouve deux points

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

Le point fixe x_2^* est biologiquement possible si et seulement si $\mu \geq 1$ (c'est-à-dire si $x_2^* \geq 0$).

3.3.2 L'étude de stabilité des points fixes

Par linéarisation on a :

$$L'(x) = \mu(1-2x)$$

$$L'(x_1^*) = L'(0) = \mu \text{ et } L'(x_2^*) = L'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu$$

L'étude de stabilité des points fixes dépend de la valeur de μ :

-Cas $0 < \mu < 3$

-Cas $0 < \mu < 1$

Il y a un seul point fixe x_1^* et $L'(x_1^*) = L'(0) = \mu < 1$, alors x_1^* est localement asymptotiquement stable.

Théorème 18 :

Soit $x_0 \in I$

-Si $x_0 = 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

-Si $x_0 = 1$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et égale à 0 à partir du rang 1.

-Si $x_0 \in]0, \frac{1}{2}]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge géométriquement vers 0.

-Si $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$, alors on a $x_1 \in]0, \frac{1}{2}]$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge géométriquement vers 0.

-Cas $\mu = 1$

Si $\mu = 1$, alors $x_2^* = x_1^* = 0$, donc on a un unique point fixe $x^* = 0$, $L'(x^*) = L'(0) = 1$, x^* n'est pas hyperbolique.

On a d'après le théorème 6, on a $L''(x^*) = -2\mu = -2 < 0$, alors $x^* = 0$, est est supérieurement asymptotiquement stable .

Pour $x_0 \in [0, 1]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour $\mu = 1$, on voit une BIFURCATION!

-Cas $1 < \mu < 3$

On a deux points fixes

$$x_1^* \text{ est instable et } x_2^* \text{ est localement asymptotiquement stable} \iff \left| L'(x_2^*) \right| = \left| L' \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right| < 1 \iff |2 - \mu| < 1 \iff 1 < \mu < 3.$$

Dans ce cas le comportement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est change, encore en escaliers et encore en escargot.

-Cas $1 < \mu < 2$

Il y a deux points fixes : $x_1^* = 0$ est localement asymptotiquement instable, $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ est localement asymptotiquement stable, et $L'(x_2^*) = L' \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) > 0$

Théorème 19 :

Soit $x_0 \in I$, et $1 < \mu < 2$, donc $0 < x_2^ < \frac{1}{2}$*

-Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = x_2^$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.*

-Si $x_0 = 1$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et égale à 0 à partir du rang 1.

-Si $x_0 = \frac{1}{\mu}$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et égale à x_2^ à partir du rang 1.*

-Si $x_0 \in]0, x_2^]$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_2^**

-Si $x_0 \in]x_2^, \frac{1}{2}]$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers x_2^**

-Si $x_0 \in \left] \frac{1}{2}, \frac{1}{\mu} \right]$, alors on a $x_1 \in \left] x_2^, \frac{1}{2} \right]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers x_2^* .*

-Si $x_0 \in \left] \frac{1}{\mu}, 1 \right[$, alors on a $x_1 \in]0, x_2^[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_2^* .*

-Cas $\mu = 2$

Il y a deux points fixes : $x_1^* = 0$ est localement asymptotiquement instable, $x_2^* = \frac{1}{2}$ alors, $L'(x_2^*) = L' \left(\frac{1}{2} \right) = 0 < 1$ donc $x_2^* = \frac{1}{2}$ est localement asymptotiquement stable.

La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une convergence rapide vers x_2^* .

-Cas $2 < \mu < 3$

Il y a deux points fixes : $x_1^* = 0$ est localement asymptotiquement instable, $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ est localement asymptotiquement stable, et $L'(x_2^*) = L'\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) < 0$.

Proposition 20 :

Pour $2 < \mu < 3$, donc $\frac{1}{2} < x_2^ < 1, \forall x_0 \in]0, 1[$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est converge vers x_2^* .*

Conclusion 21 :

Pour $0 < \mu < 3$, on a $\forall x_0 \in]0, 1[$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On étudiera les cas aux limites.

-Cas $\mu = 3$

Si $\mu = 3$, alors $L'(x_2^*) = L'\left(\frac{2}{3}\right) = -1$, $x_2^* = \frac{2}{3}$ n'est pas hyperbolique, donc x_2^* est localement asymptotiquement stable.

Remarque 22 :

Pour $\mu = 3$, la suite converge vers x_2^ (sauf si x_0 est nul).*

$x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ est localement asymptotiquement stable si et seulement si $1 \leq \mu \leq 3$.

Pour $\mu = 3$ on voit un autre type de BIFURCATION !

-Cas $\mu > 3$

P-cycles (orbite périodique)

On sait déjà que $x_1^* = 0$, et $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ sont instables.

Dans ce cas la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers l'un de ces points fixes que si elle est stationnaire.

On peut alors montrer qu'il apparaît des cycles de période 2, c'est-à-dire que

$$x_{n+2} = x_n = L^2(x_n).$$

Par définition, $x_{n+2} = L(x_{n+1}) = \mu x_{n+1}(1 - x_{n+1})$, or sur un cycle de période 2, on a aussi

$$x_{n+1} = L(x_n) = L(x_{n+2}) = \mu x_{n+2}(1 - x_{n+2}).$$

D'après ce dessus, nous donnons $x_{n+2} = x_n = L^2(x_n)$.

On calcule donc les points fixes :

$$x^* = L^2(x^*) = L(L(x^*))$$

$$x^* = \mu L(x^*)(1 - L(x^*))$$

$$x^* = \mu^2 x^*(1 - x^*)(1 - (\mu x^*(1 - x^*)))$$

$x_1^* = 0$, et $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ étant déjà solutions, on cherche $x_3^* \neq 0$, $x_4^* \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} &= (1 - x^*)(1 - (\mu x^*(1 - x^*))) \\ \iff (x^*)^3 - 2(x^*)^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)x^* + \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

Or on sait que x_2^* est une solution puisque x_2^* est un point fixe de première itération.

$$x^* = L(x^*) \iff L(x^*) = L(L(x^*)) \iff x^* = L^2(x^*)$$

Ceci signifie que le polynôme $(x^*)^3$ est divisible par $(x^* - x_2^*) = \left(x^* - 1 + \frac{1}{\mu}\right)$

$$(x^*)^3 - 2(x^*)^2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)x^* + \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{\mu} = \left(x^* - 1 + \frac{1}{\mu}\right) \left[(x^*)^2 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)x^* + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \right]$$

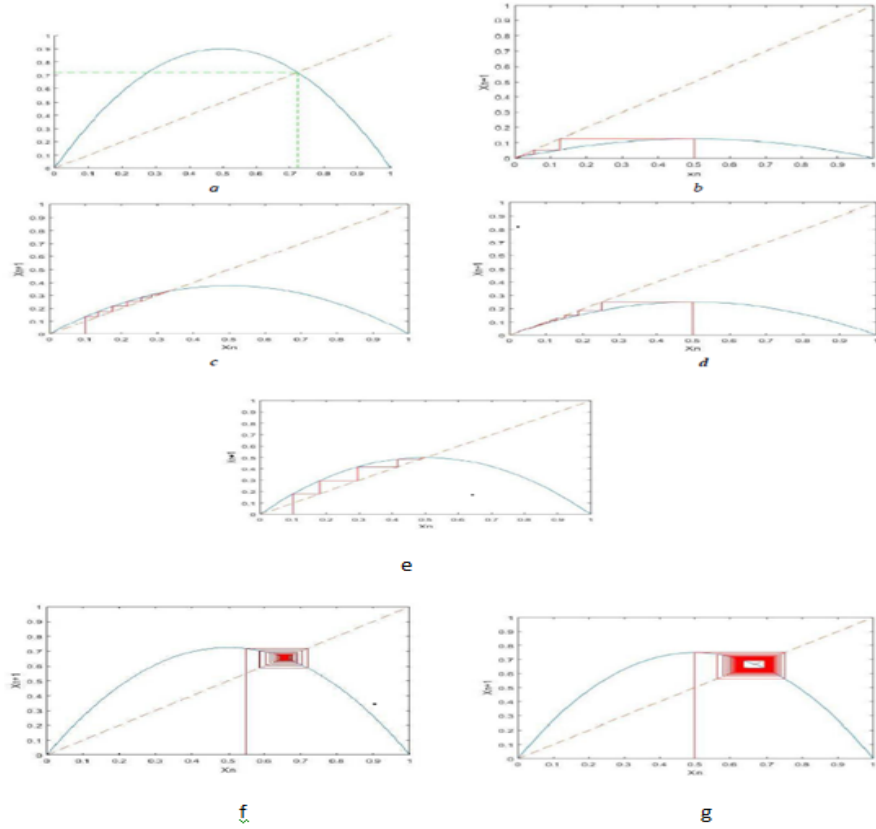


FIG. 3.3: a : Les points fixes de L_μ , b : Stabilité dans le cas $0 < \mu < 1$, d : $\mu = 1$, c : $1 < \mu < 2$, e : $\mu = 2$, f : $2 < \mu < 3$, g : $\mu = 3$

Il reste donc à résoudre $(x^*)^2 - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)x^* + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 0$ pour obtenir les points :

$$x_3^* = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}, x_4^* = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

-On étudier la stabilité de x_3^*, x_4^* :

$$x_{n+2} = L(L(x_n)) = g(x_n)$$

$$x_4^* = L(x_3^*) \implies L(x_4^*) = L(fL(x_3^*)) \implies L(x_4^*) = L^2(x_3^*) = x_3^*$$

Compte-tenu du fait que $x_4^* = L(x_3^*)$ par définition de la suite récurrente, et que

$$L(x_4^*) = x_3^*$$

puisque ce sont des points fixes de seconde itération, on a :

$$g'(x_3^*) = L'(x_3^*) \cdot L'(f(x_3^*)) = L'(x_3^*) \cdot L'(x_4^*) = g'(x_4^*)$$

La stabilité de x_3^* et x_4^* sont de même, x_3^* et x_4^* sont localement asymptotiquement stable si et seulement si :

$$-1 < L'(x_3^*) \cdot L'(x_4^*) < 1$$

$$L'(x) = \mu(1 - 2x)$$

$$L'(x_3^*) = -1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}$$

$$L'(x_4^*) = -1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}$$

On veut donc finalement que $-1 < 1 - (\mu + 1)(\mu - 3) < 1$

$$(i) \quad 1 - (\mu + 1)(\mu - 3) < 1 \iff (\mu + 1)(\mu - 3) > 0 \iff \mu > 3$$

Ce qui est vérifié dans les conditions qui nous intéressent ici.

$$(ii) \quad -1 < 1 - (\mu + 1)(\mu - 3) \iff (\mu + 1)(\mu - 3) < 2 \iff \mu^2 - 2\mu - 5 < 0$$

Calcule $\Delta = 4 + 20 = 24 = (2\sqrt{6})^2$, ce qui conduit à :

$$\mu_1 = 1 - \sqrt{6} \approx -1.449 \text{ et } \mu_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449 \quad (\mu > 3)$$

La stabilité de x_3^* et x_4^* est donc localement asymptotiquement stable pour $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$

- **Cas** $\mu > 1 + \sqrt{6}$

Le comportement devient beaucoup plus complexe, on a quatre points fixes x_1^* , x_2^* , x_3^* , x_4^* sont localement instable.

Dans ce cas la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers l'un de ces points fixes, on a alors Le théorème suivante :

Théorème 23 :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue.

On suppose que f n'admet pas de 2-cycle. Alors, pour tout $x_0 \in I$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge.

Lemma 24 :

Avec les notations du théorème, on suppose que f n'admet pas de 2-cycle. Soit $c \in I$ et supposons $f(c) = c$. Alors on a $f^n(c) = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^$.*

3.3.3 Les points fixes de L_μ^4

Lorsque le cycle d'ordre 2 cesse d'être localement asymptotiquement stable, le théorème 23, appliqué à L_μ^2 montre qu'il y a un cycle d'ordre 2 pour L_μ^2 , donc d'ordre 4 pour L_μ .

On va utiliser la calculatrice pour résoudre les équations algébriques très compliquées, le polynôme qui donne les 4- cycles. Il s'agit de $L_\mu^4(x) = x$.

On cherche les racines d'un polynôme de degré 8.

Proposition 25 :

Si $\mu > 1 + \sqrt{6}$ le comportement devient beaucoup plus complexe, le cycle n'est plus localement asymptotiquement stable est un cycle d'ordre 4.

- Pour $\mu \leq 1 + \sqrt{6}$, L_μ^4 n'a pas de point fixe (autre que ceux de L_μ et L_μ^2).

- Pour $\mu \leq 1 + \sqrt{6}$, L_μ admet un cycle d'ordre 4 unique et ce cycle est localement asymptotiquement stable tant que l'on a $\mu < 3.54409$

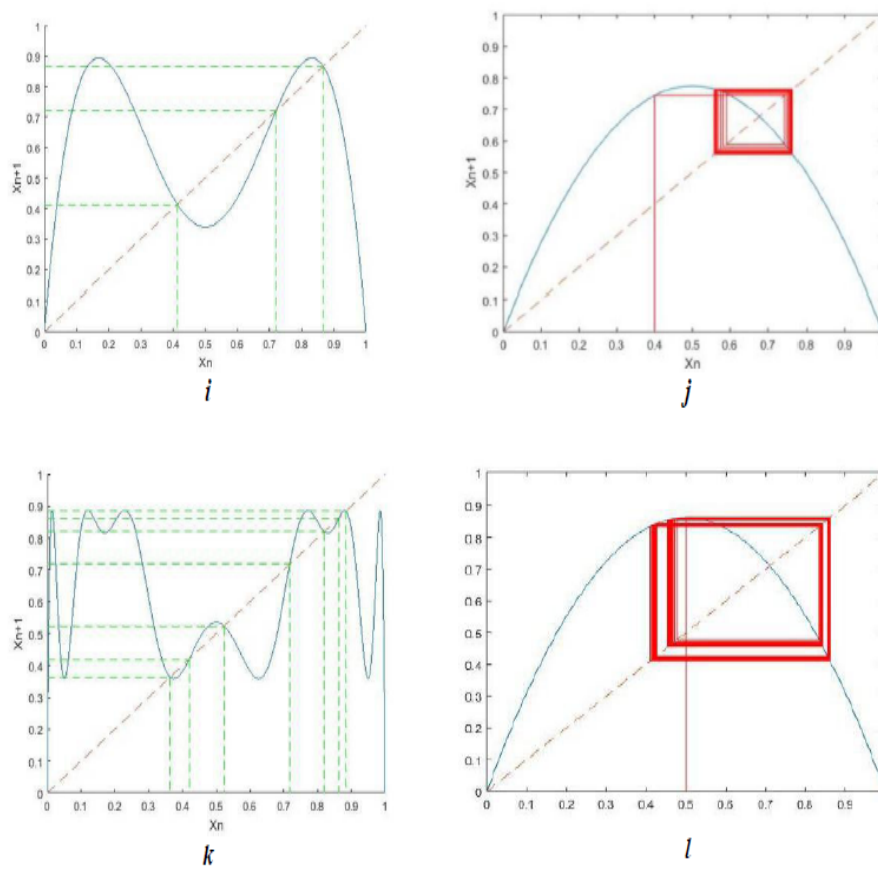


FIG. 3.4: *i* : Les points fixes de L_2 , *j* : Stabilité dans le cas $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, *k* : Les points fixes de L_4 , *l* : Stabilité dans le cas $1 + \sqrt{6} < \mu < 3,54409$

Remarque 26 On a étudié l'application logistique en fonction de paramètre μ varie entre $[0, 4]$, on a trouver dans $\mu = 3.5699946\dots$ un phénomène qui s'appelle le Chaos.

3.4 Les bifurcations

Définition 27 :

Soit une application $F_\mu : X \rightarrow X$ dépendant d'un paramètre μ .

Une bifurcation de F_μ est un changement qualitatif ou quantitatif aux points fixes à cause de modification du paramètre μ .

En d'autres termes : pour tous $\varepsilon > 0$ on a $F_{\mu_0-\varepsilon}$ et $F_{\mu_0+\varepsilon}$ n'ont pas le même comportement.

Proposition 28 :

L'application F_μ a une bifurcation en μ_0 si et seulement s'il existe un point fixe x^ de F_{μ_0} tel que $F'_{\mu_0}(x^*) = \pm 1$.*

3.4.1 Classification des bifurcations

a) **Bifurcation tangente**

Définition 29 :

Une application F_μ dépendant d'un paramètre μ admet une bifurcation tangente (bifurcation selle-noeud) en μ_0 s'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$.

1. *L'application $F_{\mu_0-\varepsilon}$ n'a pas de points fixes dans I .*
2. *L'application F_{μ_0} a un seul point fixe dans I .*

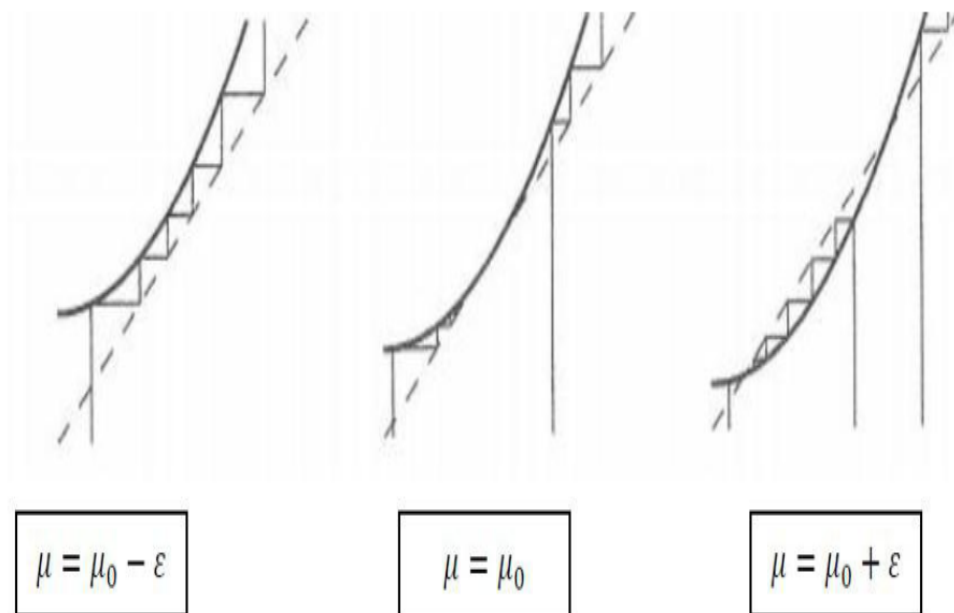


FIG. 3.5: Bifurcation tangente de F_μ

3. L'application $F_{\mu_0+\varepsilon}$ a deux points fixes dans I , l'un est attractif tandis que l'autre est répulsif.

Remarque 30 :

- Une bifurcation tangente est une bifurcation locale puisqu'elle est définie uniquement sur un petit intervalle I .

- Pour $\mu = \mu_0$ le graphe de F_μ est un tangent à la bissectrice $y = x$, d'où son appellation est bifurcation tangente.

Proposition 31 :

L'application F_{μ_0} admet une bifurcation tangente en μ_0 si et seulement s'il existe un point fixe x de f_{μ_0} tel que $F'_{\mu_0}(x^*) = 1$.

b) Bifurcation par doublement de la période

Définition 32 :

Une application F_μ dépendante d'un paramètre μ admet une bifurcation par doublement de la période en μ_1 s'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant exactement un point fixe x_μ^* de F_μ ($\mu \in [\mu_1 - \varepsilon, \mu_1 + \varepsilon]$) et tel que :

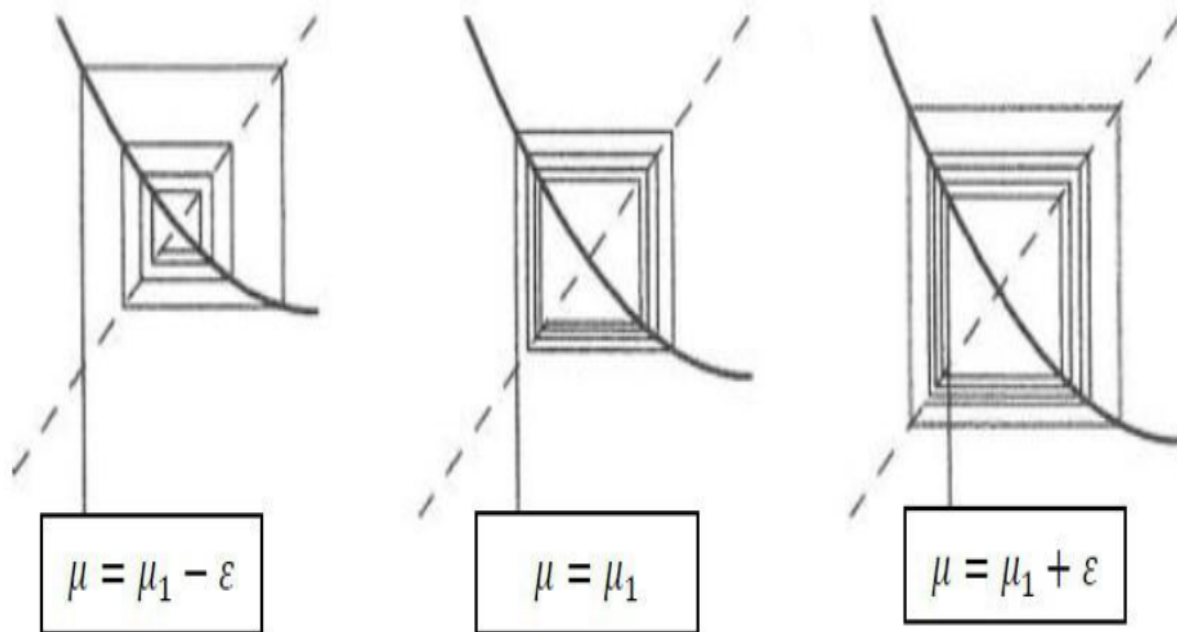
1. Le point fixe $x_{\mu_1 - \varepsilon}^*$ est localement asymptotiquement stable et $F_{\mu_1 - \varepsilon}$ n'a pas d'autres points fixes dans I .
2. Le point fixe $x_{\mu_1}^*$ est neutre et F_{μ_1} n'a pas d'autres points fixes dans I .
3. Le point fixe $x_{\mu_1 + \varepsilon}^*$ est localement instable et $F_{\mu_1 + \varepsilon}$ a une orbite périodique attractif de période 2 dans I .

Proposition 33 L'application F_μ admet une bifurcation par doublement de la période en μ_1 si et seulement s'il existe un point fixe x de F_{μ_1} tel que $F'_{\mu_1}(x^*) = -1$.

Diagramme de bifurcation :

Le diagramme de bifurcation rend compte du comportement de l'application logistique (ou de toutes autres applications dépendant d'un paramètre) en fonction du paramètre μ .

Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs du paramètre μ et en ordonnées celles de L_μ . Nous construisons le diagramme en repérant pour

FIG. 3.6: Bifurcation par doublement de la période de F_μ

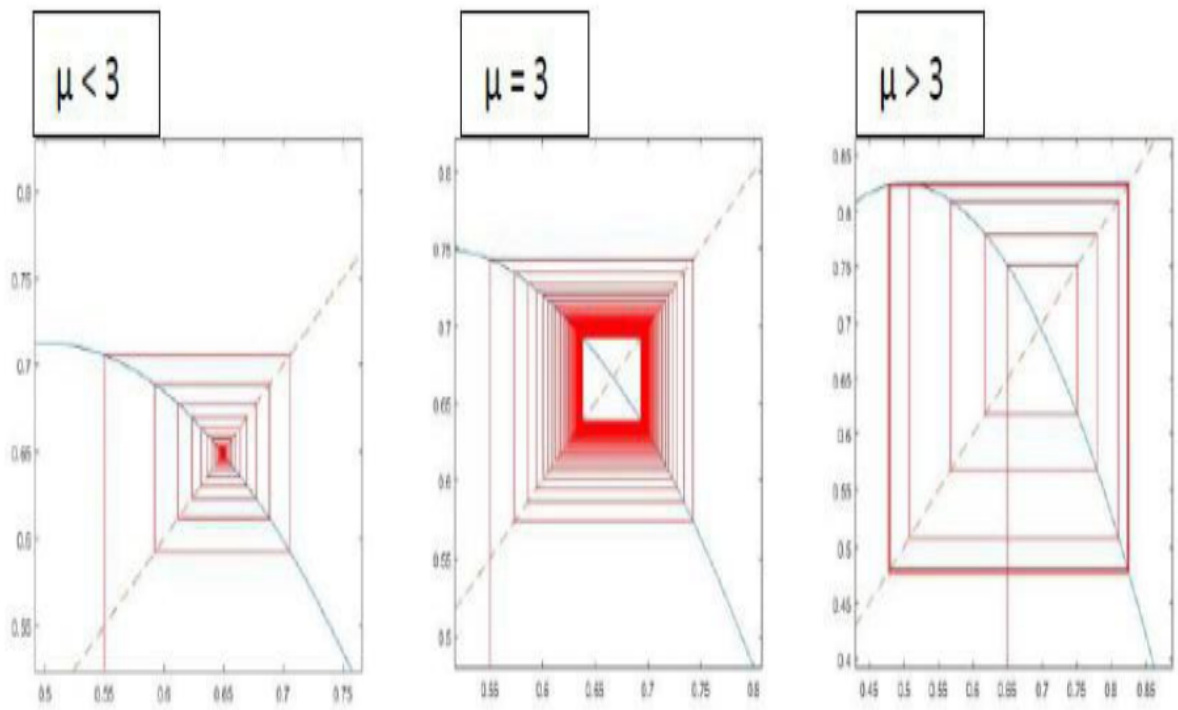


FIG. 3.7: Bifurcation par doublement de la période de $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$

chaque valeur de μ le ou les points de convergence de la suite en $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par en $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = L_\mu(x_n)$. Nous obtenons :

Le comportement de l'application logistique décrite dans les parties précédentes.

- Pour $1 < \mu < 3$, il n'y a qu'une seule branche. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ précédemment définie converge vers le point fixe.

- Pour $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application L_μ a une orbite périodique de période 2.

Quand il y a 4 branches, il y a une orbite périodique de période 4. Puis, pour 8 branches, c'est une orbite périodique de période 8, etc ...

Cette partie du diagramme est appelée cascade ou arbre de doublement de la période.

3.5 Conjugaison topologique

Afin d'analyser l'application logistique L_μ , il nous semble utile d'introduire une fonction dont l'étude est plus simple.

Dans ce but, avant toute chose, il est nécessaire de définir la notion de conjugaison topologique.

Définition 34 :

Soit X et Y deux espaces topologiques et soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux applications continues. Les applications f et g sont topologiquement conjuguées s'il existe un

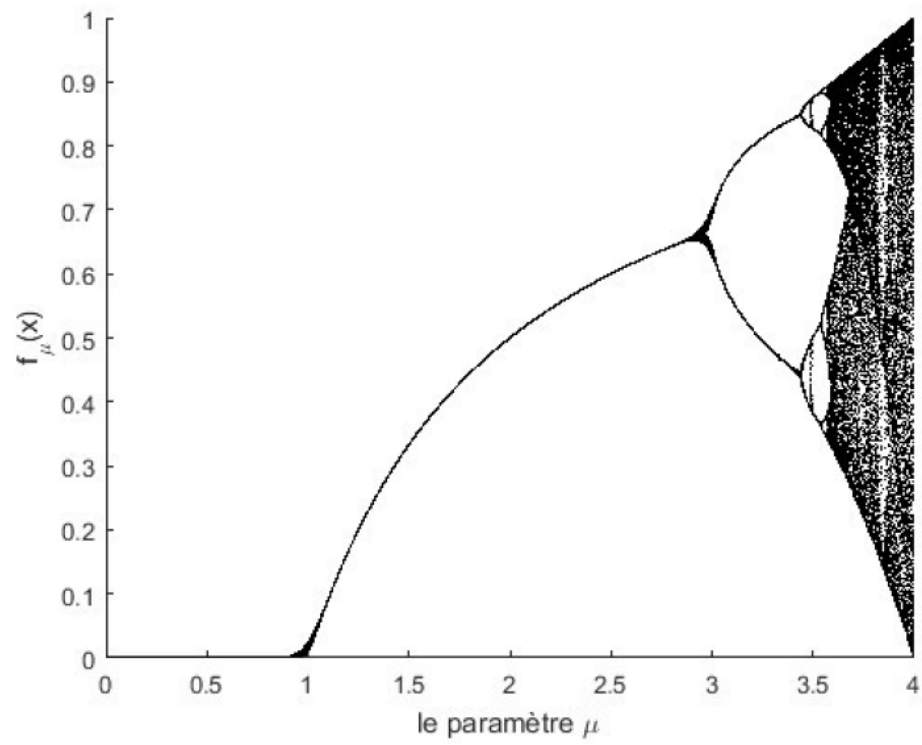


FIG. 3.8: Diagramme de bifurcation de l'application logistique

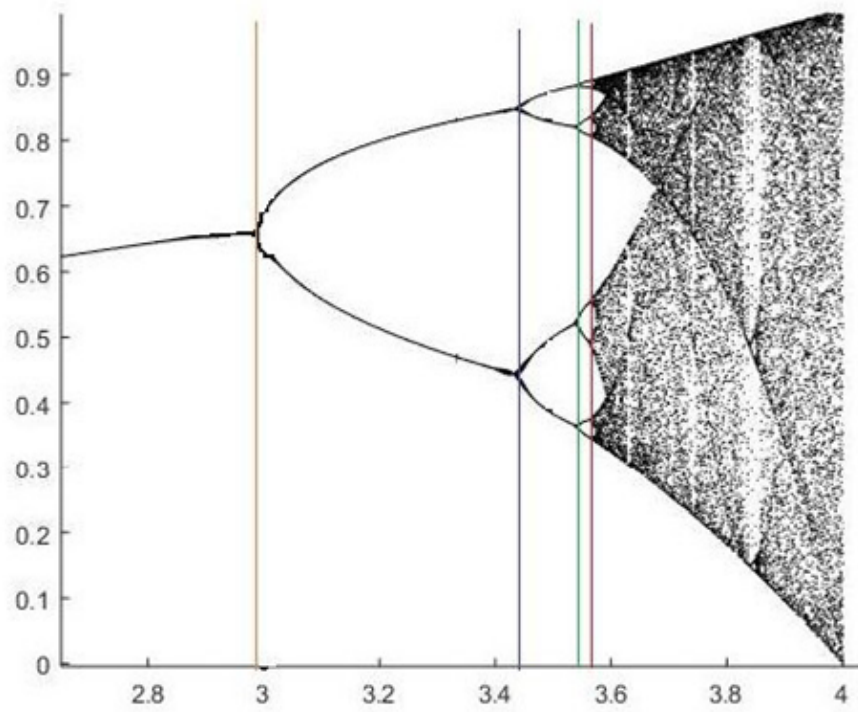


FIG. 3.9: Cascade de bifurcation par doublement de la période de l'application logistique

homéomorphisme $\Psi : Y \rightarrow X$ tel que $f \circ \Psi = \Psi \circ g$.

L'homéomorphisme Ψ peut assimilé à un changement de variables.

Les application f et g jouent les rôles de deux matrices semblables A et B . Tout comme dans le cas des matrices, les applications f et g ont les mêmes propriétés dynamiques, énoncées par la suite.

Deux applications topologiquement conjuguées ont donc le même comportement.

Elles ont, entres autres, le même nombre de pointes fixes et d'orbites périodiques.

Proposition 35 :

1. Les application f et g sont topologiquement conjugués par l'homéomorphisme Ψ , alors les applications f^n et g^n sont conjugués par Ψ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors :

$$f^n \circ \Psi = \Psi \circ g^n$$

2. La conjugaison de deux applications est souvent représentée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y \\ \boxed{\uparrow \Psi^{-1}} & & \boxed{\downarrow \Psi} \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

3.5.1 Conjugaison topologique de L_μ et Q_c

Nous introduisons désormais l'application Q_c définie par :

$$\begin{aligned} Q_c & : \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right] \rightarrow \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right] \\ x & \mapsto x^2 + c \end{aligned}$$

Avec $c \in [-2, 2]$ qui est topologiquement conjuguée à l'application L_μ définie par :

$$L_\mu \quad : \quad [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mu x(1 - x)$$

Avec $\mu \in [0, 4]$.

Cette nouvelle application va ainsi nous permettre une étude plus simple par la suite.

Proposition 36 :

Considérons pour un $c \in [-2, 2]$ donné, l'application Q_c définie par :

$$Q_c \quad : \quad \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right] \rightarrow \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right]$$

$$x \longmapsto x^2 + c$$

Les applications L_μ et Q_c sont topologiquement conjuguées par l'homéomorphisme

Ψ défini par :

$$\Psi \quad : \quad [0, 1] \rightarrow \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right]$$

$$x \longmapsto \frac{\mu}{2}(1 - 2x)$$

Les paramètres μ et c sont liés par : $c = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$

Preuve. Soit $\Psi : [0, 1] \rightarrow I$ où I est un intervalle.

D'après la définition de conjugaison topologique, et comme L_μ et Q_c sont continues, nous cherchons $Q_c \circ \Psi = \Psi \circ L_\mu$.

Posons $\Psi(x) = \frac{\mu}{2}(1 - 2x)$, on a

$$\begin{aligned} Q_c \circ \Psi &= Q_c\left(\frac{\mu}{2}(1 - 2x)\right) \\ &= \left(\frac{\mu}{2}(1 - 2x)\right)^2 + c \\ &= \frac{\mu^2}{4} - \mu^2 x^2 - \mu^2 x + c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi \circ L_\mu &= \Psi(\mu x(1 - x)) \\ &= \frac{\mu}{2}(1 - 2\mu x(1 - x)) \\ &= \frac{\mu}{2} - \mu^2 x + \mu^2 x^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{4} - \mu^2 x^2 - \mu^2 x + c &= \frac{\mu}{2} - \mu^2 x + \mu^2 x^2 \\ \implies c &= \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4} = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $c = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$, l'homéomorphisme Ψ défini de $[0, 1]$ dans I par $\Psi(x) = \frac{\mu}{2}(1 - 2x)$ conjugue les application L_μ et Q_c .

De plus $I = \Psi([0, 1])$ et comme $\Psi(0) = \frac{\mu}{2}$ et $\Psi(1) = -1$, nous obtenons $I = \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$. ■

Remarque 37 :

L'application Ψ est non seulement un homéomorphisme mais c'est aussi un difféomorphisme.

Les comportements de L_μ et Q_c sont ainsi identiques ce que nous décrivons dans les propositions suivantes :

Proposition 38 :

Si x est un point fixe de L_μ , alors $\Psi(x)$ est un point fixe de Q_c .

Preuve. Comme L_μ et Q_c sont topologiquement conjuguées nous avons

$$Q_c \circ \Psi(x) = \Psi \circ L_\mu(x).$$

Comme x est fixe pour L_μ , nous obtenons :

$$Q_c \circ \Psi(x) = \Psi(x)$$

Ainsi, $\Psi(x)$ est fixe pour Q_c . ■

Exemple 39 : Soit l'application logistique suivante :

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$$

$$\begin{aligned} \Psi & : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{-\mu}{2}, \frac{\mu}{2} \right] \\ x & \longmapsto \frac{\mu}{2}(1 - 2x) \end{aligned}$$

On a $\mu = 2$, alors :

$$\begin{aligned} \Psi & : [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ x & \longmapsto \Psi(x) = (1 - 2x) \end{aligned}$$

Considérons l'application quadratique qui suit :

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \quad \text{avec } c = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

On a $\mu = 2$, alors : $c = \frac{2}{2} \left(1 - \frac{2}{2} \right) = 0$

Donc, $x_{n+1} = x_n^2$

On vérifie que $Q_0 \circ \Psi(x) = \Psi \circ L_2(x)$

On a

$$Q_0 \circ \Psi(x) = (1 - 2x)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

et

$$\Psi \circ L_2(x) = 1 - 2(2x - 2x^2) = 4x^2 - 4x + 1$$

donc

$$Q_0 \circ \Psi(x) = \Psi \circ L_2(x).$$

Ce qui montre que Q_0 et L_2 sont topologiquement conjugués.

Maintenant on calcule les points fixes :

On a $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ admet deux points fixes $x^* = 0$ et $x^* = \frac{1}{2}$

On calcule $Q_0 \circ \Psi(x^*)$

$$\Psi(0) = 1 \text{ et } \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$Q_0 \circ \Psi(0) = Q_0(1) = 1^2 = 1$$

$$\implies Q_0 \circ \Psi(0) = \Psi(0)$$

Et

$$Q_0 \circ \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = Q_0(0) = 0^2 = 0$$

$$\implies Q_0 \circ \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ce qui montre ce résultat $\Psi(0)$ et $\Psi\left(\frac{1}{2}\right)$ sont deux points fixes de $x_{n+1} = x_n^2$.

Proposition 40 :

Si L_μ et Q_c sont topologiquement conjugués, les orbites de L_μ envoyant sur celles de Q_c par Ψ .

Proposition 41 :

Les points fixes de L_μ et Q_c sont de même nature.

Preuve. Soit x un point fixe de L_μ . D'après la proposition précédente, $\Psi(x)$ est fixe pour Q_c . Nous avons

$$Q_c \circ \Psi(x) = \Psi \circ L_\mu(x).$$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, Ψ est un difféomorphisme ce qui nous permet d'obtenir :

$$\Psi'(x) \cdot Q'_c(\Psi(x)) = L'_\mu(x) \cdot \Psi'(L_\mu(x))$$

Comme x est fixe pour L_μ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi'(x) \cdot Q'_c(\Psi(x)) &= L'_\mu(x) \Psi'(x) \\ \implies Q'_c(\Psi(x)) &= L'_\mu(x) \end{aligned}$$

Le Théorème (13) permettent de conclure que $\Psi(x)$ et x sont de même nature.

Deux application topologiquement conjuguées ont le même nombre de points fixe et ces points fixes sont de même nature. ■

Chapitre 4

Dynamique d'un système chaotique discret modifié avec fraction rationnelle

4.1 Introduction

Un système dynamique en temps discret est donné par une application $T : X \rightarrow X$ depuis un espace X en lui-même ; nous nous intéressons au comportement asymptotique des séquences $(x(n))$ défini par $x(n+1) = T(x(n))$, en fonction de la condition initiale $x(0)$.

L'intérêt pour les systèmes dynamiques a explosé dans les années 1960–70 quand il a été montré dans les éléments suivants : (a) des systèmes dynamiques très simples peuvent avoir un comportement «chaotique» extrêmement complexe, qui semble être «aléatoire» ; (b) un tel comportement «chaotique» peut paradoxalement être «stable» ; (c) Le compor-

tement de certains systèmes dynamiques est tellement "chaotiques" et "aléatoires" qu'il vaut mieux l'étudier statistiquement. L'un de ces modèles est l'application de Lozi [13, 17]. De plus, c'est possible de changer la forme de la carte Lozi pour obtenir d'autres attracteurs chaotiques [2, 4, 6, 10, 13]. Dans [14] un système chaotique discret unidimensionnel avec fraction rationnelle a été proposé. Dans [7] les auteurs ont étendu le premier système chaotique discret unidimensionnel avec bidimensionnel et dans un travail récent donné dans [22] la dynamique d'une nouvelle application discrète rationnelle $2D$ simple a été étudiée. En particulier, un exemple de la coexistence de plusieurs attracteurs chaotiques a été présenté et discuté. Dans cet chapitre, nous proposons le nouveau système chaotique discret avec fraction rationnelle donnée par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y + 1 - a \left(\frac{1}{0.1 + x^2} \right) \\ b.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La carte (4.1) est obtenue en changeant le terme $|x|$ dans l'application non linéaire de Lozi par la fraction $\left(\frac{1}{0.1 + x^2} \right)$, les systèmes itératifs discrets à fraction rationnelle ont été découverts dans l'étude de l'algorithme évolutif, ce type d'applications est utilisé dans des communications sécurisées à l'aide du notions de chaos [8, 11].

4.2 Résultats analytiques

Les nouveaux attracteurs chaotiques décrits par l'application (4.1) est vérifié quelque propriétés :

- (i) La carte (4.1) est définie pour tous les points du plan.

(ii) La fonction associée $f(x, y)$ de la carte (4.1) est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et elle n'a pas de dénominateur disparaissant.

(iii) Le système (4.1) et le système Lozi sont pas topologiquement équivalent, car le système de Lozi est linéaire par morceaux, mais le modèle (4.1) est un système non linéaire.

4.3 Points fixes et leurs stabilité

Dans cette section, on étudier l'existence des points fixes de la fonction f et leur type de stabilité, on a :

$$\begin{cases} x = b.x + 1 - a \left(\frac{1}{0.1 + x^2} \right) \\ y = b.x \end{cases} \quad (4.2)$$

Par conséquent, soit

$$x = b.x + 1 - a \left(\frac{1}{0.1 + x^2} \right),$$

et donc

$$(1 - b)x - 1 = -\frac{a}{0.1 + x^2}$$

alors

$$[(1 - b)x - 1] (0.1 + x^2) + a = 0.$$

Puis,

$$(1 - b)x^3 - x^2 + 0.1(1 - b)x - 0.1 + a = 0. \quad (4.3)$$

Eliminez d'abord le terme x^2 en substituant $x = \left(X - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right)$, qui donne une équation cubique de la forme :

$$X^3 + pX + q = 0. \quad (4.4)$$

On a

$$(1-b)x^3 - x^2 + 0.1(1-b)x - 0.1 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-b) \left[x - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right]^3 - \left[x - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right]^2 + 0.1(1-b) \left[x - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right] - 0.1 + a = 0$$

tel que

$$\left[x - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right]^3 = x^3 + \frac{1}{27(1-b)^3} + \frac{x^2}{(1-b)} + \frac{x}{3(1-b)^2},$$

et

$$\left[x - \left(- \left(\frac{1}{3(1-b)} \right) \right) \right]^2 = x^2 + \frac{2x}{3(1-b)} + \frac{1}{9(1-b)^2}.$$

On remplace, on obtient :

$$x^3 + \left[0.1 - \frac{1}{3(1-b)^2} \right] x + \left[\frac{-2}{27(1-b)^3} + \frac{0.1}{3(1-b)} + \frac{a-0.1}{(1-b)} \right] = 0.$$

On pose $p = 0.1 - \frac{1}{3(1-b)^2}$, et $q = \frac{-2}{27(1-b)^3} + \frac{0.1}{3(1-b)} + \frac{a-0.1}{(1-b)}$, on trouve l'équation (4.4).

L'équation cubique réduite est celle que Cardan a pu résoudre. Seulement des équations cubiques réduites avec le discriminant $\Delta = 27q^2 + 4p^3$ négatif, aura 3 racines réelles seulement si $p < 0$.

Proposition 42 :

La fonction f aura 3 points fixes uniquement si $b \in \left] 1 - \sqrt{\frac{10}{3}}, 1 \right[\cup \left] 1, 1 + \sqrt{\frac{10}{3}} \right[$

Preuve. Soit

$$\begin{cases} x = b.x + 1 - a \left(\frac{1}{0.1+x^2} \right) \\ y = b.x \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} x &= b.x + 1 - a \left(\frac{1}{0.1+x^2} \right) \implies [(1-b)x - 1] (0.1+x^2) + a = 0 \\ \implies (1-b)x^3 - x^2 + 0.1(1-b)x - 0.1 + a &= 0 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \Delta &= 27q^2 + 4p^3 < 0 \\ \implies 27q^2 &< -4p^3 \\ \implies 0 < q^2 &< \frac{-4}{27}p^2 \cdot p \\ \implies p &< 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0.1 - \frac{1}{3(1-b)^2} < 0, \quad (1-b) \neq 0 &\iff \frac{1}{3(1-b)^2} > 0.1 \\ \iff 3(1-b)^2 < 10 \\ \iff |1-b| < \sqrt{\frac{10}{3}} \\ \iff -\sqrt{\frac{10}{3}} < 1-b < \sqrt{\frac{10}{3}} \\ \iff 1 - \sqrt{\frac{10}{3}} < b < 1 + \sqrt{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

Donc

$$-0.8257 < b < 2.8257, b \neq 1$$

La matrice Jacobienne de (4.1) est :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2ax}{(0.1+x^2)^2} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\det(J) = -b < 0$$

$\det(J) = -b$, donc si $b > -1$, alors le système est dissipatif.

- Valeurs propres

On a le polynôme caractéristique suivant :

$$\begin{aligned} |J - \lambda I| &= \begin{vmatrix} \frac{2ax}{(0.1+x^2)^2} - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \frac{2ax}{(0.1+x^2)^2} \cdot \lambda - b \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = \frac{(ax)^2}{(0.1+x^2)^4} + b > 0$, alors on a deux racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{ax}{(0.1+x^2)^2} \pm \sqrt{\frac{(ax)^2}{(0.1+x^2)^4} + b} \quad (4.6)$$

Il est facile de vérifier que la plus petite valeur absolue est toujours inférieure à 1.

On en déduit que les points fixes sont de type selle. ■

4.4 Détermination des orbites bornés et non bornés

On remarque que les variations du côté droit du système (4.1) dépendent principalement de la fraction qui est une fonction lisse. Dans ce qui suit, nous démontrons la délimitation du système (4.1) à l'aide d'un critère de comparaison. Il est possible de réécrire le système (4.1) sous le formulaire (4.7) ci-dessous :

$$x_{n+1} = 1 - \frac{a}{0.1 + x_n^2} + bx_{n-1} \quad (4.7)$$

Or, par substitution successive des termes de la suite $(x_n)_n$ on peut prouver que cette suite est bornée pour tout $b < 1$ comme le montre le résultat suivant

Théorème 43 :

Pour chaque $n > 1$, et toutes les valeurs de a et b , et pour toutes les valeurs des conditions initiales $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(x_n)_n$ satisfait les égalités suivantes :

a) Si $b \neq 1$, puis :

$$x_n = \begin{cases} \frac{b^{\frac{n-1}{2}} - 1}{b-1} + b^{\frac{n-1}{2}} x_1 - 10a \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} \frac{b^{m-1}}{0.1+x_{n-(2m-1)}^2} & \text{si } n \text{ impaire} \\ \frac{b^{\frac{n}{2}} - 1}{b-1} + b^{\frac{n}{2}} x_0 - 10a \sum_{m=1}^{m=\frac{n}{2}} \frac{b^{m-1}}{0.1+x_{n-(2m-1)}^2} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases} \quad (4.8)$$

b) Si $b = 1$, on a

$$x_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2} + x_1 - 10a \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{0.1+x_{n-(2m-1)}^2} & \text{si } n \text{ impaire} \\ \frac{n}{2} + x_0 - 10a \sum_{m=1}^{m=\frac{n}{2}} \frac{1}{0.1+x_{n-(2m-1)}^2} & \text{si } n \text{ paire} \end{cases} \quad (4.9)$$

Théorème 44 :

La suite $(x_n)_n$ donnée en (4.1) satisfait l'inégalité suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n > 1, |1 - x_n + bx_{n-2}| < |10a| \quad (4.10)$$

Preuve. On a pour tout $n > 1$

$$x_n = 1 - a \frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} + bx_{n-2}$$

Puis on a :

$$|-x_n + 1 + bx_{n-2}| = \left| \frac{a}{0.1 + x_{n-1}^2} \right| < |10a| \quad (4.11)$$

Depuis

$$\begin{aligned}
 x_{n-1}^2 &> 0 \iff 0.1 + x_{n-1}^2 > 0.1 \\
 &\iff \frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} < 10 \\
 &\iff \left| \frac{a}{0.1 + x_{n-1}^2} \right| < |10a|
 \end{aligned}$$

■

4.5 Existence d'orbites bornés et non bornés

Dans le théorème suivant, nous donnons des conditions suffisantes pour les orbites bornées et non bornées du système (4.1) :

Théorème 45 :

Pour tous les $a \in \mathbb{R}$ et toutes les conditions initiales $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$

i) Les orbites de la carte (4.1) sont bornées dans les sous-régions suivantes de \mathbb{R}^4

$$\Gamma_1 = \{(a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| < 1\} \quad (4.12)$$

ii) La carte (4.1) possède des orbites non bornées dans les sous-régions suivantes de \mathbb{R}^4

$$\Gamma_2 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| > 1 \text{ et les deux } |x_0|, |x_1| > \frac{|10a| + 1}{|b| - 1} \right\} \quad (4.13)$$

Et

$$\Gamma_3 = \{(a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| = 1 \text{ et } |10a| < 1\} \quad (4.14)$$

Preuve. I- De l'équation (4.1) et du fait que $\frac{1}{0.1+x_n^2}$ est une fonction bornée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les inégalités suivantes pour tous $n > 1$:

$$|x_n| < 1 + |10a| + |bx_{n-2}| \quad (4.15)$$

Si on remplace les termes successifs $x_{n-2}, x_{n-4}, x_{n-6}, \dots$, dans le terme x_n , alors le dernier terme est obtenu

$$|x_n| \leq (1 + |10a|) + (1 + |10a|)|b| + (1 + |10a|)|b|^2 + |x_{n-6}||b|^3. \quad (4.16)$$

Puisque $|b| < 1$, alors l'utilisation de (4.16) ci-dessous et l'induction autour d'un entier k en utilisant la somme d'une formule de croissance géométrique nous permet d'obtenir les inégalités suivantes pour tout $n > 1, k > 0$:

$$|x_n| \leq (1 + |10a|) \left(\frac{1 - |b|^k}{1 - |b|} \right) + |b|^k |x_{n-2k}| \quad (4.17)$$

Ainsi, on a les deux cas suivants :

1) Si $n = 2m + 1$, pour laquelle $(x_n)_n$ satisfait les inégalités suivantes :

$$|x_{2m+1}| \leq (1 + |10a|) \left(\frac{1 - |b|^m}{1 - |b|} \right) + |b|^m |x_1| = W_m \quad (4.18)$$

2) Si $n = 2m$, pour laquelle $(x_n)_n$ satisfait les inégalités suivantes :

$$|x_{2m}| \leq (1 + |10a|) \left(\frac{1 - |b|^m}{1 - |b|} \right) + |b|^m |x_0| = V_m \quad (4.19)$$

Ainsi, puisque $|b| < 1$, les suites $(W_m)_m$ et $(V_m)_m$ sont bornées, et on a :

$$\begin{cases} W_m \leq \frac{1+|10a|}{1-|b|} + \left| |x_1| - \frac{1+|10a|}{1-|b|} \right| & \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \\ V_m \leq \frac{1+|10a|}{1-|b|} + \left| |x_0| - \frac{1+|10a|}{1-|b|} \right| & \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.20)$$

Ainsi, les formules précédentes donnent les bornes suivantes pour la séquence

$(x_n)_n$:

$$|x_m| \leq \max \left(\frac{1 + |10a|}{1 - |b|} + \left| |x_1| - \frac{1 + |10a|}{1 - |b|} \right|, \frac{1 + |10a|}{1 - |b|} + \left| |x_0| - \frac{1 + |10a|}{1 - |b|} \right| \right) \quad (4.21)$$

Enfin, pour toutes les valeurs de a et toutes les valeurs de b satisfaisant $|b| < 1$ et toutes conditions initiales $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, on conclut que toutes les orbites de la carte (1.4) sont bornées, c'est-à-dire dans la sous-région de \mathbb{R}^4

$$\Gamma_1 = \{(a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| < 1\}$$

La preuve (i) est donc terminée.

II-

a) Pour tout $n > 1$, on a :

$$x_n = 1 - a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) + bx_{n-2}$$

Puis

$$\left| bx_{n-2} - a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) \right| = |x_{n-1}| \quad \text{et} \quad \left| |bx_{n-2}| - \left| a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) \right| \right| \leq |x_{n-1}|$$

(Nous utilisons les inégalités triangulaires) : Cela implique que

$$|bx_{n-2}| - \left| a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) \right| \leq |x_n| + 1 \quad (4.22)$$

Puisque $\left| \frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right| \leq 10$, ce la implique $\left| a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) \right| \leq 10|a|$.

$$|bx_{n-2}| - \left| a \left(\frac{1}{0.1 + x_{n-1}^2} \right) \right| \geq |bx_{n-2}| - 10|a|$$

Enfin, on a de (4.22) que :

$$|bx_{n-2}| - (10|a| + 1) \leq |x_n| \quad (4.23)$$

En suite, par récurrence comme dans la section précédente, on a :

$$|x_n| \geq \begin{cases} \left(\frac{|10a|+1}{|b|-1} + |x_1| \right) |b|^{\frac{n-1}{2}} + \frac{|10a|+1}{|b|-1} & \text{si } n \text{ impair} \\ \left(\frac{|10a|+1}{|b|-1} + |x_0| \right) |b|^{\frac{n}{2}} + \frac{|10a|+1}{|b|-1} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (4.24)$$

Ans, si $|b| > 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

b) Pour $b = 1$, on a :

$$|x_n| \geq \begin{cases} (1 - |10a|) \left(\frac{n-1}{2} \right) + |x_1| & \text{si } n \text{ impair} \\ (1 - |10a|) \left(\frac{n}{2} \right) + |x_0| & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (4.25)$$

Donc, si $|10a| < 1$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

Pour $b = -1$, on a du théorème 1, les inégalités suivantes :

$$x_n \leq \begin{cases} -\left(\frac{n-1}{2}\right) + x_1 + \left| a \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{m-1}}{0.1+x^2_{n-(2m-1)}} \right| & \text{si } n \text{ impair} \\ -\left(\frac{n}{2}\right) + x_0 + \left| a \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{m-1}}{0.1+x^2_{n-(2m-1)}} \right| & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \quad (4.26)$$

Parceque, $\left| \frac{a(-1)^{m-1}}{0.1+x^2_{n-(2m-1)}} \right| \leq |10a|$, alors on a :

$$x_n \leq \begin{cases} (|10a| - 1) \left(\frac{n-1}{2} \right) + |x_1| & \text{si } n \text{ impair} \\ (|10a| - 1) \left(\frac{n}{2} \right) + |x_0| & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi si $|10a| < 1$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$.

Notez qu'il n'y a pas preuve similaire pour les sous-régions suivantes de \mathbb{R}^4 définies

par :

$$\Gamma_4 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| > 1 \text{ et les deux } |x_0|, |x_1| \leq \frac{|10a|+1}{|b|-1} \right\} \quad (4.27)$$

Et

$$\Gamma_5 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / |b| = 1 \text{ et } |a| \geq 1 \right\} \quad (4.28)$$

Par conséquent, la preuve (ii) est terminée. ■

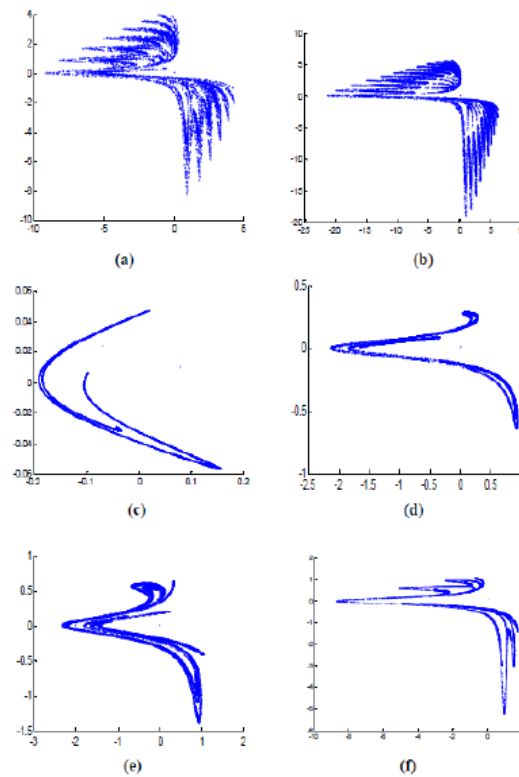


FIG. 4.1: Attracteurs de la carte (1) avec (a) $a=0.9$, $b=0.9$, (b) $a=0.9$, $b=2$, (c) $a=0.3$, $b=0.115$, (d) $a=0.3$, $b=0.3$, (e) $a=0.6$, $b=0.4$, (f) $a=0.6$, $b=0.9$

4.6 Certaines observations des nouveaux attracteurs

Comme déjà mentionné dans l'introduction, nous étudions le système chaotique discret bidimensionnel à deux paramètres a et b , obtenu via une modification directe dans l'application de Lozi, où le terme de valeur absolue est remplacé par la fraction rationnelle définie sur tout \mathbb{R} et il est différentiable continu. Ce fait est l'idée centrale qui rend les solutions du système (4.1) bornées pour certaines valeurs de b . Cette nouvelle carte génère des attracteurs chaotiques à «multiples» multiples qui évoluent autour de trois points comme le montre la figure 4.1.

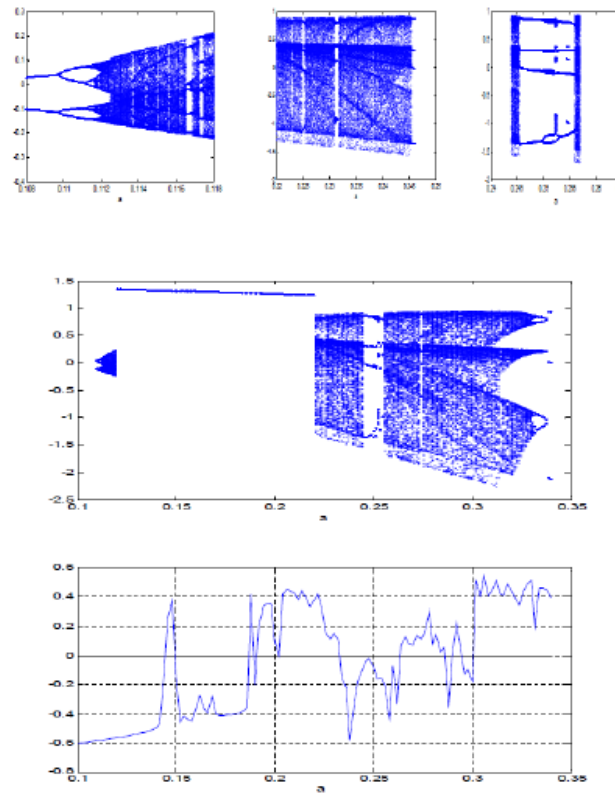


FIG. 4.2: (a) le diagramme de bifurcation de la carte (3) obtenu pour $b = 0.3$ et $0.108 \leq a \leq 0.347$. (b) variation des exposants lyapunov de la carte (4.1) en fonction du paramètre $0.108 \leq a \leq 0.347$ avec $b = 0.3$

4.7 Simulations numériques et route vers le chaos

Dans cette section, le comportement dynamique de la carte (4.1) est étudié numériquement. Nous illustrerons quelques attracteurs chaotiques observés. Le diagramme de bifurcation est un moyen pour un système dynamique discret faire la transition d'un comportement régulier au chaos [1]. Pour démontrer la dynamique chaotique, le plus grand exposant de Lyapunov doit être la première chose à considérer, car tout système contenant au moins un exposant de Lyapunov positif est défini comme chaotique. D'après les **figures 4.2 et 4.3**, il est clair que le diagramme de bifurcation coïncide avec le spectre des exposants

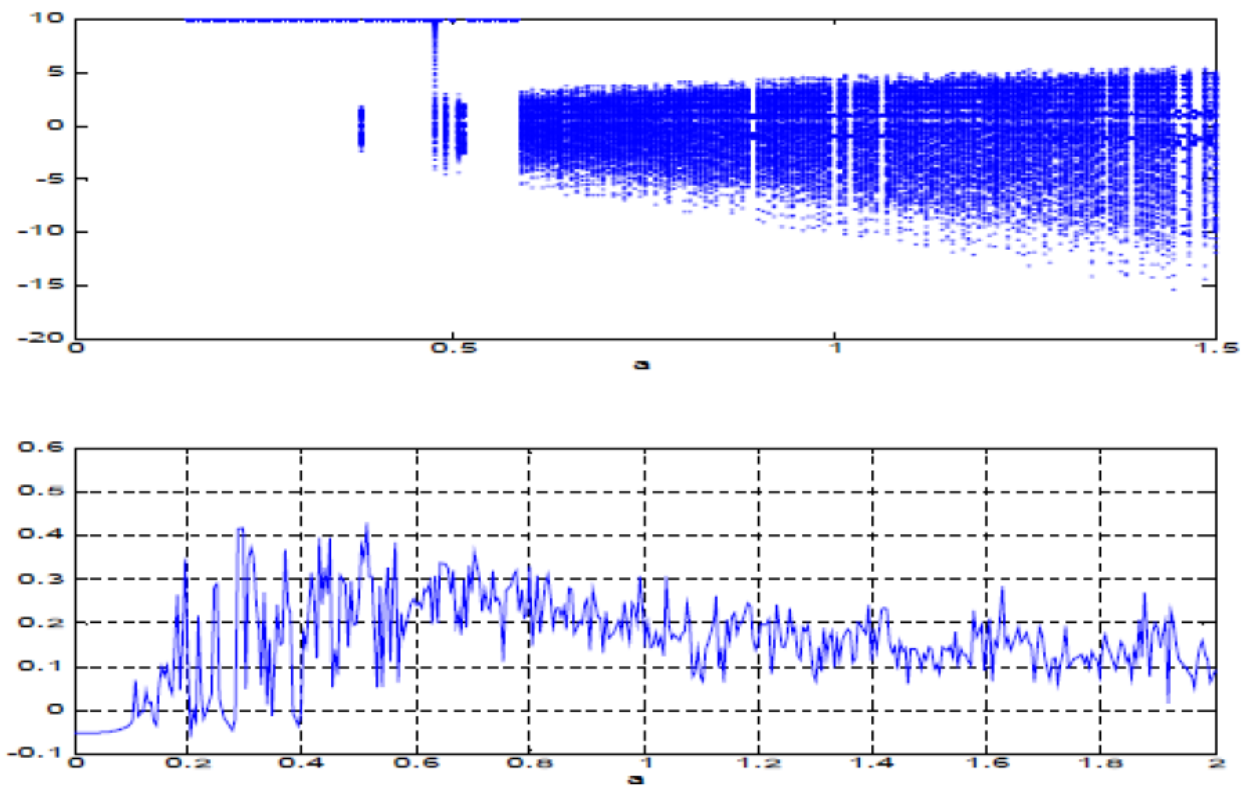


FIG. 4.3: (a)le diagramme de bifurcation de la carte (3) obtenu pour $b = 0.9$ et $0.13 \leq a \leq 2$.(b) variation des exposants lyapunov de la carte(4.1) en fonction du paramètre $0.13 \leq a \leq 2$ avec $b = 0.9$

de Lyapunov. **La figure 4.2** montre que le système (4.1) peut évoluer vers des comportements périodiques et chaotiques. En effet, lorsque a varie de 0.108 à 0.347, on peut voir qu'il existe un exposant de Lyapunov positif sur une large gamme de paramètres, ce qui implique que le système est chaotique sur cette gamme. Quand a augmente dans la région $[0.118, 0.220]$, le système (4.1) converge vers un point fixe stable. Dans la section d'intervalle $(0.108, 0.112)$, la trajectoire du système se transformera en un cycle limite stable. De plus, le système montre un mouvement périodique de certaines fenêtres dans la région chaotique, c'est-à-dire $[0.245, 0.255]$. Enfin, il est clair que le système est chaotique pour $a \in (0.220, 0.245) \cup (0.255, 0.347)$.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau système chaotique discret bidimensionnel avec fraction rationnelle, obtenu par modification directe dans l'application de Hénon. Les comportements dynamiques détaillés de cette carte (qui est utile pour l'algorithme évolutif et la communication sécurisée) sont davantage étudiés en utilisant à la fois l'analyse théorique et la simulation numérique.

Chapitre 5

Conclusion générale

Le travail développé dans cette thèse a porté sur l'étude numérique et théorique d'un système pouvant générer du chaos. Le système est modélisé par une récurrence non-linéaire de dimensions deux où le terme non linéaire est une « fraction rationnelle ».

Nous ferons abstraction de toute application, et nous attacherons à mettre en évidence les différentes propriétés du modèle choisi en utilisant des outils connus d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires (bifurcation dans le plan des paramètres, stabilité), nous apportons une compréhension de régimes chaotiques engendrés par le système.

Dans cette optique et afin de mieux comprendre l'enchaînement des concepts fondamentaux de notre recherche, le travail s'articule autour des aspects suivants.

D'abord, nous présentons les notions fondamentales et les outils nécessaires à la compréhension et à l'étude des récurrences non linéaires c-à-d les systèmes dynamiques discrets.

Puis nous exposons la théorie du chaos et nous citons les différents outils mathé-

matiques qui nous servent à détecter le comportement chaotique.

Ensuite, on redécouvre les caractéristiques du chaos à savoir : la sensibilité aux conditions initiales, l'influence des paramètres de bifurcation, les exposants de Lyapunov par une étude mathématiques détaillé de la dynamique du quelques systèmes dans la littérature.

Enfin on se focalise au développement d'un nouveau système chaotique discret bi-dimensionnel basé sur une fraction rationnelle. Nous avons également faire une étude (analytique) de quelques propriétés du ce système dynamique discret et nous illustrons cette étude par une simulation numérique.

Un autre objectif est de mettre en évidence et caractériser les attracteurs chaotiques en vu de leur utilisation pour l'optimisation globale et la cryptographie.

Bibliographie

- [1] Avrutin. V, Schan. M, Banerjee. S : Occurrence of multiple attractor bifurcations in the two-dimensional piecewise linear normal form map. *Nonlinear Dyn*, DOI 10.1007/s11071- 011-9978-5, (2011).
- [2] Aziz-Alaoui, A. Robert, C, Grebogi, C : Dynamics of a Hénon-Lozi map, *Chaos, Solitons Fractals*, 12(11),2323-2341 (2001).
- [3] Alligood.K.T,Sauer.T.D., and J. A. Yorke. An introduction to dynamical systems. Springer Verlag, New York, USA, 1996.
- [4] Benedicks. M, Carleson.L : The dynamics of the Hénon maps, *Ann. Math*, 133, 125, (1991).
- [5] Christian Jutten « Systèmes asservis non linéaires » cours de troisième année du département 3i option Automatique. Université Joseph Fourier- Polytech Grenoble. 2006
- [6] Cao Y, Liu Z. "Orientation-preserving Lozi map". *Chaos, Soliton Fractals* 1998 ; 9(11) :1857-63.
- [7] Chang, L. Lu, J. Deng, X : A new two-dimensional discrete chaotic system with rational

- fraction and its tracking and synchronization. *Chaos, Solitons and Fractals* (2005), Pages 1135-1143.
- [8] Chen, G. and X. Dong, *from chaos to order : methodology, perspectives and applications*, World Scientific (1998).
- [9] Djafri. N and Hamaizia. T and Derouiche.F : Boundedness and dynamics of a modified discrete chaotic system with rational fraction. *Non linear Dynamics and systems Theory* 21(02)(2021).
- [10] Hénon, M : A two dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 50, 69-77 (1976).
- [11] Hunt, B.R, Kennedy, J.A, Li, T.Y, Nusse, H. : *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, New-York (2003).
- [12] Ishii Y, Sands D. "Monoyonicity of the Lozi family near the tent map". *Comm Math Phys* 198 ;198 :397-406.
- [13] Lozi. R, (1978), "Un Attracteur étrange (?) du Type Attracteur de Hénon ". *Journal de Physique. Colloque C5 ; Supplément au no8, Tome 39, pp.9-10.*
- [14] Lu, J. A , Wu, X, Lu, J ,Kang, L : A new discrete chaotic system with rational fraction and its dynamical behaviors, *Chaos, Solitons and Fractals* 22 (2004), pp. 311319.
- [15] Li.T.Y. and J. A.Yorke. Period three implies chaos. *American Mathematics Montly.* 82 :985-992.1975.
- [16] Lorenz. E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20 :130, 1963.

- [17] Misiurewicz, M : strange attractors for the lozi mappings. annals of the new york academy of sciences, nonlinear dyn. 357, 348-358 (1980).
- [18] Stavroulakis.P. Chaos Applications in Telecommunications. CRC Press, Boca Raton, USA, 2005.
- [19] Strogatz.S. H. Nonlinear Dynamics And Chaos :With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering. Westview Press, USA, 1994.
- [20] Ssastry. S. « Nonlinear Système », Edition Spriger, New York, 1999.
- [21] Yan Li, Yang Quan Chen, Igor Podlubny, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Le-er stability, Computers and Mathematics with Applicationsn vol.59 pp. 1810 1821, (2010).
- [22] Zeraoulia, E, Sprott, J.C : On the dynamics of a new simple 2-D rational discrete mapping. Int. J. Bifurc. Chaos.21 (1), 1-6 (2011).