



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université des Frères Mentouri Constantine



Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

THÈSE

Présentée pour l'Obtention de Diplôme de Doctorat en Sciences

Par: Meddour Lotfi

Option : Equations Différentiels et ces Applications

THÈME

Chaos, Stabilité et Coexistence dans les Systèmes Dynamiques

Soutenue le : 12.11.2020.

Devant le jury :

Berkane Abdelhak	MCA.	Université des Frères Mentouri	Président
Zeraoulia Elhadj	Prof.	Université de Tébessa	Rapporteur
Hamri Nasr Eddine	Prof .	Centre universitaire de Mila	Examineur
Saoudi Khaled	MCA.	Université de Khenchela	Examineur
Hamaizia Tayeb	MCA.	Université des Frères Mentouri	Examineur

Année Universitaire 2019/2020

Remerciements

Mes remerciements les plus sincères vont à mon directeur de thèse Mr le professeur : **Zeraoulia Elhadj**, pour la grande qualité de son encadrement durant ce travail de thèse. Toujours avec gentillesse, il a donné sans compter de son temps pour accompagner mes premiers pas dans le monde de la recherche, et c'est une chance d'avoir pu travailler avec un directeur sachant doser si justement patience, rigueur et exigence.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Messieurs les professeurs **Hamri Nasr Eddine, Saoudi Khaled** et **Hamaizia Tayeb** qui m'ont honoré d'accepter de faire partie du Jury. Ma reconnaissance va aussi à Mr le professeur **Berkane Abdelhak** pour avoir accepté de présider le Jury.

Je voudrais remercier tous **les professeurs** qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes **les personnes** que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

TABLE DES FIGURES

1.1 Bifurcation point selle-nœud, la branche (a) est stable tandis que la branche (b) est instable.....	10
1.2 la bifurcation de Hop.....	11
1.3 Bifurcation hétéroclinique.....	12
1.4 Bifurcation homoclinique.....	13
1.5 Comportement temporel d'une orbite homoclinique.....	13
1.6 Diagramme de bifurcation de Hénon.....	14
3.1 Les trajectoires du modèle de Lorenz pour différentes conditions initiales avec $\rho=0.5$	23
3.2 Attracteur étrange de Lorenz $\sigma=10$; $\beta = \frac{8}{3}$; $\rho = 28$	25
3.3 Position $x(t)$ pour $\rho = 30$	25
3.4 Attracteur étrange de Chen.....	27
3.5 Diverses projections de l'attracteur chaotique de Lü : (a) xy , (b) xz , (c) yz , (d) zxy	29
4.1 (a) Projection sur le plan de coordonnées $x-z$ de Chen. (b) Projection sur le plan de coordonnées $X-Z$ de Lorenz	35
4.2 (a) L'existence de l'attracteur de Chen pour $a = 35$; $b = 3$; $c = 28$; (b) L'attracteur qui existe dans le système de Lorenz	37
4.3 Projections sur le plan de coordonnées $y-z$	42
4.4 Projections sur le plan de coordonnées $x-z$	43
4.5 Les attracteurs chaotiques du système (4.10)	44
4.6 Projections sur le plan de coordonnées $x-z$	46

Table des matières

1	Notions de base sur les systèmes dynamiques	5
1.1	Définition d'un système dynamique	5
1.2	Système linéarisé	6
1.3	Notions de stabilité	7
1.3.1	Stabilité d'un point d'équilibre	8
1.3.2	Stabilité asymptotique	8
1.3.3	Stabilité exponentielle	9
1.3.4	Stabilité globale et stabilité locale	9
1.4	Attracteurs	9
1.5	Bifurcation	10
2	Notions de la théorie du chaos	15
2.1	Introduction	15
2.2	Histoire de la théorie du chaos	15
2.3	Caractérisation des systèmes chaotiques	16
3	Quelques modèles des systèmes chaotiques	21
3.1	Modèle de Lorenz	21
3.2	Modèle de Chen	25
3.3	Modèle de Lü	28
4	L'équivalence topologique de deux systèmes dynamiques chaotiques	31
4.1	Introduction	31

4.2	L'équivalence du système de Chen au système de Lorenz	31
4.2.1	La transformation entre le système de Chen et le système de Lorenz . . .	32
4.2.2	Comparaison dynamique de deux systèmes	33
4.3	L'équivalence du système de Lü au système de Lorenz	37
4.3.1	La transformation entre le systèmes de Lü et le système de Lorenz	38
4.3.2	Comparaison dynamique de deux systèmes	39
4.4	L'équivalence d'une famille générale de Lorenz au système de Lorenz	43
4.5	Conclusion	47
5	Les systèmes tridimensionnels équivalents au système de Lorenz	48
5.1	Introduction	48
5.2	Nouveaux formes des systèmes tridimensionnels équivalents au système de Lorenz	48
5.3	Quelques applications de l'équivalence au système de Lorenz	69
5.4	Conclusion	73

Introduction

La description théorique de la dynamique d'un système physique donné (mécanique, électronique, biologique, économique, ...) sous l'angle d'un modèle mathématique qui s'exprime en termes de variables d'état, permettant de définir l'état instantané du système, et d'équations d'évolution faisant passer ces variables d'un instant initial à un instant final, les équations d'évolution sont des itérations d'applications (système dynamique à temps discret), ou des équations différentielles (système dynamique à temps continu). Cette thèse concerne plus particulièrement les systèmes dynamiques chaotiques, qui est un système non linéaire, déterministe et imprévisible, le lieu qui relie les deux notions paradoxales, déterminisme et imprévisibilité est la propriété de sensibilité aux conditions initiales, en effet, deux conditions initiales infiniment proches peuvent conduire à des états futurs très différents du système.

La théorie du chaos a été reconnue en tant que telle à partir des années 1960 par de nombreux scientifiques. En 1963, Edward Lorenz a établi un modèle atmosphérique très simplifié qui possède une forte sensibilité aux conditions initiales. Cette propriété explique le comportement chaotique des solutions du modèle, s'il y a des erreurs dans la mesure où l'observation de l'état initial du système alors la prédiction du futur du système dans ce cas est impossible. Lorenz a appelé ces systèmes présentent la dépendance sensible sur les conditions initiales comme avoir de "l'effet papillon", ce nom unique est venu de la proposition qu'un battement d'aile de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas. Plus tard, de nombreux autres systèmes chaotiques liés au système de Lorenz (généralement appelés systèmes de type Lorenz) ont été analysés. Parmi eux un système à trois dimensions est inventé par Chen et Ueta en 1999, dans la poursuite d'une stratégie de contrôle appelée anti-contrôle du chaos pour le modèle de Lorenz. Plusieurs chercheurs ont démontré dans leurs études que le modèle de Chen paraît être plus complexe et plus sophistiqué, et qu'il a la même complexité que le modèle de Lorenz, ils sont tous les deux à trois dimensions, autonomes avec seulement deux termes quadratiques, et ils ne sont pas topologiquement équivalents.

L'objet de cette thèse consiste en une étude de l'équivalence de deux systèmes dynamiques chaotiques, le but de cette étude est d'examiner et clarifier le domaine des systèmes de type Lorenz bien que des centaines de documents prétendent sinon, généralement, Comme était prouvé dans les travaux d'Antonio Algaba et al. que les systèmes de Chen et de Lü ne sont que

des cas particuliers de système de Lorenz, ils ont prouvé aussi que la famille générale de Lorenz, de manière générique, homothétique au système de Lorenz. De manière analogue, dans cette thèse on a posé plusieurs conditions sur des formes de systèmes tridimensionnels autonomes quadratiques à deux termes quadratiques pour être équivalent au système de Lorenz. Par les résultats obtenus dans nos travaux, nous avons distingué trois systèmes reconnus équivalents au système de Lorenz.

Cette thèse comprend cinq chapitres :

Chapitre 01 : Nous donnons dans ce chapitre les notions de base concernant les systèmes dynamiques : la définition et les types des systèmes dynamiques et ces propriétés.

Chapitre 02 : Ce chapitre comprend la définition de la théorie du chaos et les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, tels que les attracteurs étranges, sensibilité aux conditions initiales et les exposants de Lyapunov.

Chapitre 03 : Dans ce chapitre on donne des exemples célèbres sur les systèmes dynamiques chaotiques tels que le modèle de Lorenz, le modèle de Chen et le modèle de Lü qui nous servira dans la suite de la thèse.

Chapitre 04 : Dans ce chapitre nous présentons les travaux d'Antonio Algaba et al. qui prouvent l'équivalence de deux systèmes dynamiques chaotiques, l'équivalence du système de Chen et le système de Lü avec le système de Lorenz, et à la fin de ce chapitre une équivalence de la famille générale de Lorenz avec le système de Lorenz sera aussi présentée.

Chapitre 05 : Dans ce chapitre, nous déterminons, au moyen d'une transformation linéaire des coordonnées et de temps, plusieurs conditions sur six formes générales de systèmes autonomes quadratiques tridimensionnels avec deux termes quadratiques équivalents au système de Lorenz, quelques exemples sont donnés pour illustrer nos principaux résultats à certains systèmes bien étudiés en littérature actuelle.

Le contenu du chapitre 5 fait l'objet d'une publication internationale : "**About the Three-Dimensional Quadratic Autonomous System With Two Quadratic Terms Equivalent to the Lorenz System**", *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, Vol **27** (2020), pp 133-143.

- Communication internationale : "**Some Well Studied Systems Equivalent to the Lorenz System**", *International Conference on Operator Theory ; ICOT-2018, Hammamet, Tunisie*.

Chapitre 1

Notions de base sur les systèmes dynamiques

1.1 Définition d'un système dynamique

Définition 1.1 *Un système dynamique continu est défini par un système d'équations différentielles de la forme :*

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(x, t, \mu). \quad (1.1)$$

Avec f un champ de vecteurs. $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres et t la variable temporelle. \mathbb{R}^n est l'espace des phases (ou d'état) consiste en un ensemble d'états possibles du système, l'ordre qui est égal à la dimension de cet espace représente le degré de liberté du système. \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres.

Exemple 1.1 *L'oscillateur de duffing*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases} \quad (1.2)$$

où δ , γ et ω sont des paramètres réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 .

Définition 1.2 *Un système dynamique discret est la donnée d'un ensemble d'équations algé-*

briques définies par une application itérative f qui associe x_k l'état du système à un instant t_k par x_{k+1} l'état suivant à l'instant t_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p. \quad (1.3)$$

Exemple 1.2 L'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (1.4)$$

où a et b sont des paramètres réels. L'espace des phases et des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.2 Système linéarisé

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe \bar{x} ait été ramené à l'origine $f(0) = 0$. Le développement de Taylor en $x = 0$ s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.5)$$

où l'on a

$$f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T,$$

$$\begin{aligned} Df(x)x &= \sum \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j, \\ D^2f(x)(x, x) &= \sum \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j, \end{aligned}$$

$$D^3f(x)(x, x, x) = \sum \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k, \dots$$

La matrice

$$Df(x) \equiv \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right),$$

s'appelle matrice jacobienne de $f(x)$ (son déterminant est le jacobien). Pour x petit (1.5) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$x' = Df(0)x. \quad (1.6)$$

Dans le cas où la matrice $A = Df(0)$ possède n valeurs propres λ_i , $i = 1, \dots, n$ distinctes, la solution de (1.6) est :

$$x = \sum c_i a^{(i)} \exp \lambda_i t$$

où $a^{(i)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et c_i , $i = 1, \dots, n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales).

Définition 1.3 1- Un point d'équilibre \bar{x} est dit point hyperbolique si la matrice A n'a pas de valeur propre nulle ou imaginaire.

2- Un point d'équilibre \bar{x} est dit point selle si le nombre des valeurs propres positives est égal à celui des valeurs propres négatives.

3- Un point d'équilibre \bar{x} est dit point nœud si toutes les valeurs propres ont le même signe.

4- Un point d'équilibre \bar{x} est dit point foyer si des valeurs propres sont des paires complexes conjuguées.

Théorème 1.1 (Hartmann-Grobman) : Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un C^1 difféomorphisme avec un point d'équilibre \bar{x} hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme h d'un voisinage du point d'équilibre $\bar{x} \in U$ dans \mathbb{R}^n , mettant en correspondance les trajectoires du système non linéaire et celles du système linéarisé $\dot{x} = Ax$. En particulier :

$$h(\bar{x}) = 0 \text{ et } h(F(x)) = Ah(x), \quad \forall x \in U.$$

1.3 Notions de stabilité

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temps et permet de formaliser la question suivante : en un point voisin d'un point d'équilibre \bar{x} qu'advient-il de la trajectoire solution ? Cette question est d'importance car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes, il serait souhaitable que deux conditions initiales voisines

conduisent à des trajectoires voisines pour tout temps et ceci même pour des temps infiniment longs. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle et à examiner le comportement de solutions. Mais en général, on ne peut pas résoudre les équations différentielles.

1.3.1 Stabilité d'un point d'équilibre

Définition 1.4 *Un point d'équilibre \bar{x} est dit stable si pour tout voisinage V de x_0 , il existe un plus petit voisinage $V' \subseteq V$ de \bar{x} tel que toute trajectoire traversant V' reste dans V lorsque t augmente, i.e., si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que :*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \rho, \forall t \geq t_0$$

Si ce n'est pas le cas, le point d'équilibre est dit instable.

Définition 1.5 *Le point d'équilibre \bar{x} est dit attractif s'il existe $\rho > 0$ tel que :*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < \rho \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = \bar{x}$$

L'attractivité signifie que, si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant (même infini).

Il existe plusieurs notions de stabilité :

1.3.2 Stabilité asymptotique

Définition 1.6 *Le point d'équilibre \bar{x} est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, i.e., s'il existe $r > 0$ tel que :*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0) - x(t; \bar{x})\| = 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Remarque 1.1 *La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque $(t \rightarrow \infty)$ soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre impose seulement que les trajectoires*

restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers celui-ci, et exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre.

1.3.3 Stabilité exponentielle

Dans certaines situations, on exige la stabilité exponentielle de l'équilibre qui est plus forte que la stabilité asymptotique.

Définition 1.7 *Le point d'équilibre \bar{x} est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives α , γ et r telles que :*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < r \implies \|x(t, x_0) - \bar{x}\| \leq \gamma e^{-\alpha t} \|x_0 - \bar{x}\|, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

1.3.4 Stabilité globale et stabilité locale

Définition 1.8 *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage. En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.*

Définition 1.9 *Si un système est stable exponentiellement (resp asymptotiquement) pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R}^n , on dira que \bar{x} est exponentiellement (resp asymptotiquement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement exponentiellement (resp asymptotiquement) stable.*

1.4 Attracteurs

Pour les systèmes dissipatifs, lorsque t tend vers l'infini le point représentatif du système dans l'espace de phase va se rapprocher asymptotiquement d'un objet géométrique que l'on nomme attracteur. On distingue quelques types de comportements asymptotiques, et donc d'attracteurs :

1. Le point fixe : C'est le cas le plus courant, dans lequel le système évolue vers un état de repos. C'est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires.

2. Le cycle limite périodique : Est une trajectoire fermée dans l'espace des phases se referme sur elle-même, vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

3. Le cycle limite quasi-périodique : C'est presque un cas particulier du précédent. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dim-2.

1.5 Bifurcation

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite,...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation. Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse des bifurcations a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres. La théorie des bifurcations consiste à classer les différents types de bifurcations en classes. Chaque classe correspond à une certaine symétrie dans le problème. Parmi les différents types de bifurcations on trouve :

Bifurcations locales : de façon générale, toutes les déstabilisations d'un système se ramènent à trois types de bifurcations génériques :

Bifurcation selle-nœud : Cette bifurcation consiste en le dédoublement d'un point fixe en deux nouveaux points fixes, l'un étant stable et l'autre pas.

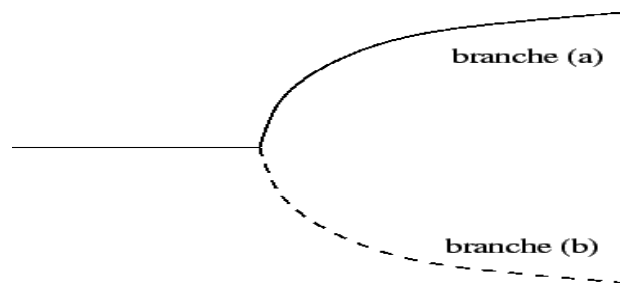


Fig.1.1: Bifurcation point selle-nœud, la branche (a) est stable tandis que la branche (b) est instable.

Bifurcation fourche (pitchfork) : Un point d'équilibre unique stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. On distingue deux types de bifurcation pitchfork, super-critique (se caractérise par un point d'équilibre qui bifurque en deux points d'équilibres stables et un point d'équilibre instable), ou sous-critique (un nœud instable bifurquera en deux nœuds stables).

Bifurcation de Hopf : La bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes, elle associée à l'équation dans le plan complexe :

$$z'(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega)z(t) - |z|^2 z(t).$$

Pour étudier cette équation, on écrit z sous la forme :

$$z(t) = x(t)e^{i\theta(t)},$$

on obtient alors :

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^3, \\ \theta' = \omega. \end{cases}$$

La première équation représente la bifurcation fourche de paramètre de contrôle μ .

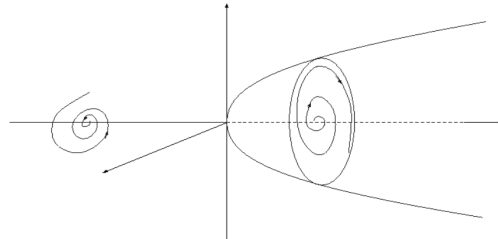


Fig.1.2: la bifurcation de Hop.

Nous partons d'un système où le paramètre μ est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque $\mu = 0$, ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque $\mu > 0$, il se forme alors une trajectoire périodique stable ou un cycle limite.

Bifurcations globales

Ces bifurcations correspondent aux collisions de variétés et ne sont plus détectées par li-

néarisation autour de la solution (elles ne font donc pas forcément intervenir le voisinage de la solution).

Orbite hétéroclinique Cette bifurcation résulte de la collision de variétés stables et instables de deux selles séparées. C'est en fait un phénomène assez rare.

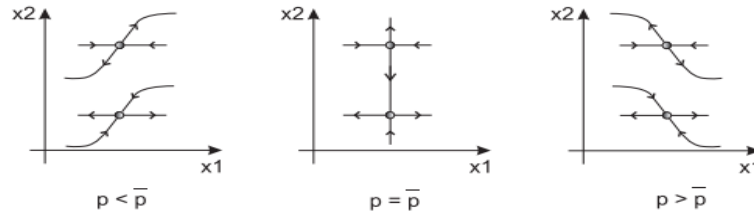


Fig.1.3: Bifurcation hétéroclinique

Orbite homoclinique Ce sont les variétés stable et instable d'une même selle qui entrent en collision. Selon le signe d'une certaine quantité, appelée quantité de selle et notée σ , deux types de cycles sont observés comme on peut le voir sur la Figure 1.4.

Au niveau temporel, les orbites homocliniques ont un comportement très particulier. Comme le montre la Figure 1.5, les trajectoires restent longtemps à proximité de la selle avant d'être très rapidement expulsées vers le cycle homoclinique en cours de formation pour revenir enfin près de la selle et y passer un peu plus de temps encore etc. La théorie prédit que, pour la valeur du paramètre pour laquelle l'orbite homoclinique est observée (valeur de bifurcation) la période des trajectoires sur l'orbite est infinie. Cela rend les points de bifurcation homoclinique très difficilement détectables par simulation (à la limite, le temps de simulation serait infini). D'autre part, dans le cas des systèmes biologiques, les données sont souvent recueillies sur une période de temps assez courte (quelques années par exemple pour les systèmes écologiques). Dans ce cas, il faut garder à l'esprit le comportement des orbites homocliniques pour ne pas identifier à tort un équilibre du système qui serait en fait une phase stationnaire (proche de la selle) d'une trajectoire attirée par une orbite homoclinique, qui pourrait donc encore subir des changements brutaux.

Remarque 1.2 *De plus, cette bifurcation peut aussi être à l'origine d'un comportement chaotique. Dans ce cas, une seule bifurcation est suffisante pour faire basculer le système dans un régime chaotique.*

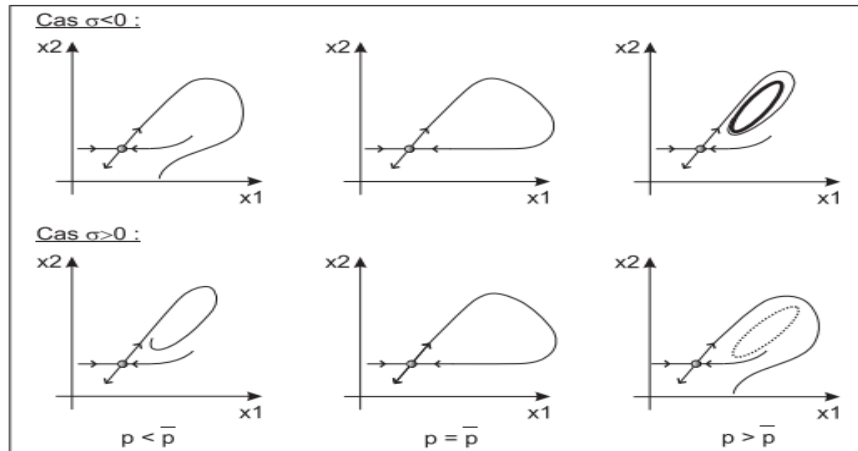


Fig.1.4: Bifurcation homoclinique.

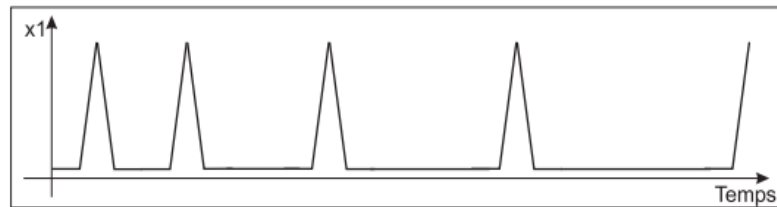


Fig.1.5: Comportement temporel d'une orbite homoclinique.

Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Pour les systèmes continus, un certain type de discrétisation est demandée, en général à l'aide d'une section de Poincaré. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

Dans l'application de Hénon (1.4) la construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0,0005, b est égale à 0,3. Le diagramme obtenu est représenté par la figure 1.6. Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période (l'attracteur de Hénon contient deux points fixes). La partie stable se situe dans l'intervalle $[0; 0,3675]$: Un 2-cycle stable commence à $a = 0,3675$ suivi d'un 4-cycle stable à

$a = 0,9$ et ainsi de suite. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où le trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a = 1,4$, on ne distingue plus les cycles, le système est chaotique.

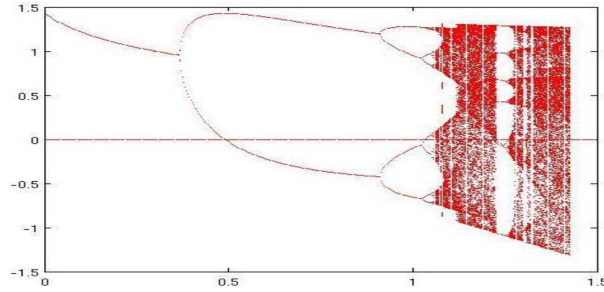


Fig.1.6: Diagramme de bifurcation de Hénon

Chapitre 2

Notions de la théorie du chaos

2.1 Introduction

Des systèmes dynamiques non linéaires, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes : Chaque condition initiale détermine entièrement l'évolution future car il n'y a pas de hasard). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos, (Voir par exemple [4]-[11]). Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? ».

Ce chapitre est consacré à donner quelque notion de base sur la théorie de chaos.

2.2 Histoire de la théorie du chaos

En 1846, la planète de Neptune a été découverte, en causant d'une vraie célébration dans le monde mécanique classique Newtonien, cette révélation avait été prédite de l'observation des

petites déviations dans l'orbite d'Uranus.

En 1860 James Maxwell employé a discuté comment les collisions entre molécules de la sphère dures pourraient mener à l'amplification progressive des monnaies d'appoint et le rendement aléatoire microscopique dans les gaz.

En 1889 le Roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n -corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité de système solaire.

En 1890 Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II. Etant le plus proche à résoudre le problème de n -corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est né (mais pas encore mentionné!). En 1908 il a publié, une idée de chance qui est au début le facteur déterminant dans les systèmes dynamiques, parce qu'il n'y avait pas d'outils tels que le théorème d'ergodique au sujet des mathématiques de mesure, et parce qu'il n'y avait pas d'ordinateurs pour simuler ce que ces théorèmes prouvent.

En 1963 Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.

En 1975 Tien-Yien Li et James Yorke ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé "Period three implies chaos".

Au début de 1980 au moins le chaos dans ce sens avait été vu dans toutes sortes de mécanique, systèmes électriques, fluides et autres.

2.3 Caractérisation des systèmes chaotiques

Ce paragraphe est consacré à quelques outils servant à rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques. Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : sensibilité aux conditions initiales, exposant de Lyapunov, attracteurs étranges, . . . etc.

1. Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, si deux trajectoires divergent exponentiellement à deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement,

par suite les deux trajectoires sont incomparables.

2. Exposants de Lyapunov

Lorsque la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de Lyapunov, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale.

Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel qu'après t itérations :

$$|f(x_0) - f(x_0 + \varepsilon)| \simeq \varepsilon e^{\lambda t}.$$

En passant au logarithme on trouve :

$$\ln \left| \frac{f(x_0) - f(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \simeq \lambda t.$$

Si l'on fait tendre ε vers 0 il vient :

$$\lambda \simeq \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda \simeq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|,$$

λ est appelé exposant de Lyapunov. Il indique le taux moyen de divergence par itération. Si ce nombre est positif, il y a élongation et sensibilité aux conditions initiales. Si, par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

Généralisation aux applications multidimensionnelles

Pour généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimension-

nelles de type :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : x_{t+1} = f(x_t).$$

Commençons par préciser qu'un système m -dimensionnel possédera m exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m)t}.$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un des λ_i soit positif, pour avoir étirement et donc SDIC selon au moins un axe. Mais il faut également que la somme des λ_i soit négative. En effet, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé. On n'aurait alors plus un attracteur de faible dimension, et donc plus affaire à du chaos déterministe. Mais avant de nous pencher sur ce genre de considérations, nous devons pouvoir définir et calculer les λ_i . Dans ce but, fixons-nous donc une hypersphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0).$$

Soit $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ et opérons un développement en série limité d'ordre 1 de $f^t(x_0)$ au voisinage de x'_0 :

$$x_t - x'_t = \frac{df^t(x_0)}{dx} (x_0 - x'_0) = J^t(x_0)(x_0 - x'_0),$$

où $J^t(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de $f^t(\cdot)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_t telle que :

$$D_m^t = P_t^{-1} J^t P_t$$

où D_m^t est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de J^t . Dénotons celles-ci par L_i^t

, $i = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln[\Lambda_i^t], \quad i = 1, \dots, m$$

3. L'existence d'une trajectoire homocline ou hétérocline

Définition 2.1 Une orbite $\gamma(x_0)$ telle qu'il existe deux points d'équilibres a et b vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x_0) = a$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x_0) = b$ est dite orbite hétérocline si $a \neq b$ et orbite homocline si $a = b$.

Théorème 2.1 (Shilnikov, 1965) Soit ζ un champ de vecteurs linéaires par morceaux associé à un système autonome en trois dimensions $f(X)$. Si l'origine est un point d'équilibre ayant une paire de valeurs propres complexes $\sigma \pm i\omega$ avec $\sigma < 0$, $\omega \neq 0$ et une valeur propre réelle γ tel que $|\sigma| < \gamma$, et si l'origine possède une orbite homocline alors ζ peut être perturbé de manière infinitésimal en un champ de vecteurs ζ' ayant un nombre dénombrable d'ensemble « fer à cheval ». De tels ensembles étant la signature de systèmes chaotiques.

4. L'attracteur étrange ou chaotique

L'attracteur étrange est caractérisé par le phénomène de sensibilité aux conditions initiales qui limite les possibilités de prédiction à long terme d'une trajectoire particulière. Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale et non entière, sa trajectoire est complexe, presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique, deux trajectoires proches à un instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Alors un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

Attraction : U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U et entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

Sensibilité : les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

Fractal : Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière « auto similaire » à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimensions entières, mais de dimensions fractionnaires (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface).

Mélange : Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

Chapitre 3

Quelques modèles des systèmes chaotiques

3.1 Modèle de Lorenz

Edward Lorenz (1917-2008), météorologue au Massachusetts Institute of Technology, a développé un modèle météorologique basé sur l'étude de la convection dans l'atmosphère (du chaud vers le froid). La différence entre la température de la Terre et celle de l'atmosphère crée des courants convectifs qui ont pour effet d'influencer les phénomènes météorologiques [12]. Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier système dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange. Lorenz a proposé en 1963 un modèle mathématique simplifié, basé sur les équations de Boussinesq, qui peut être exprimé sous la forme d'un système de trois équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} X' = \sigma(Y - X) \\ Y' = \rho X - Y - XZ \\ Z' = -\beta Z + XY \end{cases}$$

où σ désigne le nombre de Prandtl, β est l'élongation de la boîte contenant le fluide et ρ (Le paramètre de contrôle) est le nombre de Rayleigh réduit.

Equilibres de modèle

Les points d'équilibre sont définis pour $x' = y' = z' = 0$. Pour $\rho < 1$, il n'y a qu'un seul point d'équilibre $P_0(0, 0, 0)$ et pour $\rho > 1$, il y a deux autres points : $P_1(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$ et $P_2(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$. L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne J obtenue en linéarisant autour d'un point d'équilibre.

La matrice jacobienne du système s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Stabilité de l'équilibre nul

L'origine est un point d'équilibre pour toutes les valeurs de paramètre β , σ et ρ . La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

et pour $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique suivante :

$$(\lambda + \beta)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)] = 0, \quad (3.3)$$

a pour racines :

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\rho\sigma}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Pour $\rho < 1$, il y a trois racines réelles négatives, l'équilibre est donc stable. Pour $\rho > 1$, une des valeurs propres est positive, l'équilibre est donc instable.

Il y a une bifurcation quand $\rho = 1$: c'est une bifurcation de fourche créant les deux autres points d'équilibre.

Comme application numérique dans la Fig.3.1 avec $\rho = 0,5$ et avec trois conditions initiales

différentes $I_0(0, 0, 0)$, $I_1(-1, 2, -1/2)$ et $I_2(2, 2, -3)$, en remarque que quelque soient les conditions initiales, les points convergent vers le point d'équilibre P_0 . C'est donc un point d'équilibre stable et il est unique.

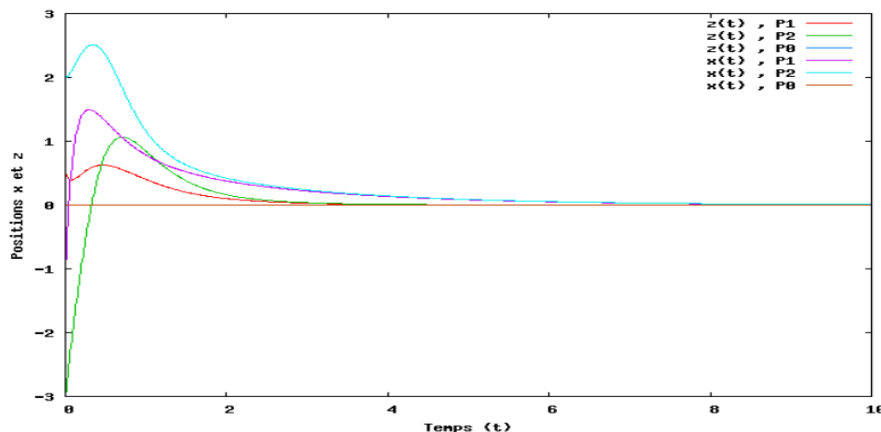


Fig.3.1: Les trajectoires du modèle de Lorenz pour différentes conditions initiales avec $\rho=0.5$.

Stabilité des équilibres pour $\rho > 1$

La matrice jacobienne correspond à ce cas s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & (\sqrt{\beta(\rho-1)}) & -b \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(J - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + \beta + 1)\lambda^2 + \beta(\sigma + \rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho - 1). \quad (3.5)$$

Selon les valeurs du paramètre ρ , ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $\rho = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|\rho - 1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation :

$$\lambda_1 \cong \frac{-2\sigma\beta(\rho-1)}{+\beta\rho} < 0, \quad \text{pour } \rho > 1.$$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas de ρ .

$$-\lambda^2 - \lambda(\sigma + 1 + \beta) - (\sigma\beta + \beta) = 0,$$

on a donc :

$$\Delta = (\sigma + 1 + \beta)^2 - 4\beta(\sigma + 1),$$

alors les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{-(\sigma + 1 + \beta) + \sqrt{(\sigma + 1 + \beta)^2 - 4\beta(\sigma + 1)}}{2} < 0, \\ \lambda_3 &= \frac{-(\sigma + 1 + \beta) - \sqrt{(\sigma + 1 + \beta)^2 - 4\beta(\sigma + 1)}}{2} < 0.\end{aligned}$$

On fait de même avec P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable). Donc pour les points P_1, P_2 sont stable pour $|\rho - 1| \ll 1$.

On va maintenant montrer que les points d'équilibres issus de la première bifurcation se déstabilisent pour une valeur critique de ρ par une bifurcation de Hopf. Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm iw$ quand ρ assume sa valeur critique ρ_c . En reportant la valeur $\lambda = iw$ dans l'équation, on obtient les deux conditions :

$$-\omega^2(\sigma + \beta + 1) + 2\beta(\rho - 1)\sigma = 0, \quad -i\omega^3 + i\omega\beta(\sigma + \rho) = 0.$$

L'élimination de ω^2 entre les deux équations permet d'obtenir la valeur critique ρ_c :

$$\rho_c = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{(\sigma - \beta - 1)}.$$

Pour les valeurs $\sigma = 10, \beta = 8/3$, la valeur critique est $\rho_c = 470/19 \simeq 24,73$. Lorsque $\rho > \rho_c$, le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour d'un des deux équilibres instables comme si elle y convergeait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement. Tous les trajectoires convergent vers une trajectoire

chaotique, c'est l'attracteur étrange.

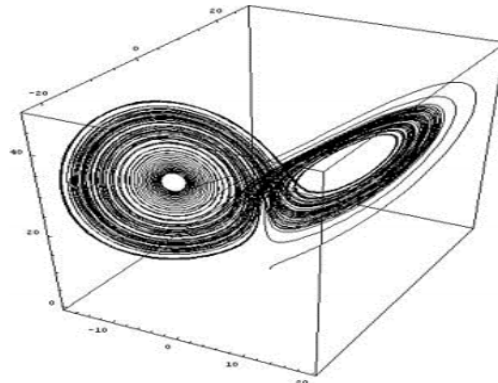


Fig.3.2: Attracteur étrange de Lorenz $\sigma=10$, $\beta=8/3$ et $\rho=28$.

On montre que la distance entre deux conditions initiales très proches s'amplifie très rapidement (sensibilité aux conditions initiales), ainsi que le chaos déterministe observé avec ce système dynamique simple.

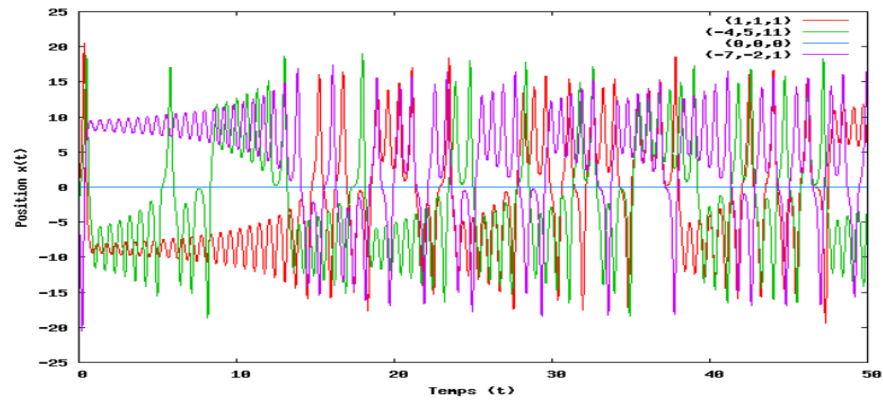


Fig.3.3: Position $x(t)$ pour $\rho=30$.

3.2 Modèle de Chen

La construction du système du Chen [50], est basée sur la création de chaos avec la technique de l'anti-contrôle, elle basée sur la déstabilisation de quelque points d'équilibre stable existant dans le système non-chaotique par l'utilisation de la réaction de l'état (Feedback).

Anti-contrôle de l'équation de Lorenz

Chen a considéré l'équation de Lorenz contrôlé :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - y - xz + u \\ z' = -bz + xy \end{cases} \quad (3.6)$$

où a, b, c sont des constantes et u est un contrôleur linéaire de la forme

$$u = k_1x + k_2y + k_3z,$$

tel que k_1, k_2, k_3 sont des constants de gains à déterminer.

Le Jacobian du système contrôlé, évalué à (x^*, y^*, z^*) , est donné par

$$J(x^*, y^*, z^*) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c + k_1 - z^* & k_2 - 1 & k_3 - x^* \\ y^* & x^* & -b \end{pmatrix}.$$

Les trois points d'équilibres du système de Lorenz contrôlé sont donné par :

$$O(0, 0, 0), P(x) = \left(x, x, \frac{x^2}{b}\right),$$

où :

$$x = \frac{1}{2}k_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_3^2 + 4b(c + k_1 + k_2 - 1)}.$$

Si le Jacobian est évalué au point $O(0, 0, 0)$, Chen a choisi $k_3 = 0$ pour la simplicité, car k_3 n'influence pas les valeurs propres, et les paramètres k_1, k_2 sont déterminés plus loin pour un comportement chaotique possible du système contrôlé. Pour avoir un comportement chaotique, les deux points d'équilibre $P(x)$ ne peuvent pas être stables, la condition de Routh de stabilité des points d'équilibre révèle un choix possible simple de k_1, k_2 comme :

$$k_1 = -a, k_2 = 1 + c,$$

alors le contrôleur est donnée par :

$$u = -ax + (1 + c)y,$$

qui transforme le système de Lorenz non chaotique vers le système chaotique de Chen :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = (c - a)x + cy - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases} \quad (3.7)$$

Le portrait de phase pour le système de Lorenz non-contrôlé avec $a = 35$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$, est une orbite stable qui part d'un point arbitraire et qui est attiré vers l'un des points d'équilibre. Au contraire, Fig.3.2 montre un attracteur chaotique dans le système contrôlé avec le même ensemble de valeurs du paramètre. Ces résultats suggèrent que l'action de contrôle u est efficace pour la création des comportements chaotiques dans certains cas comme celui-ci :

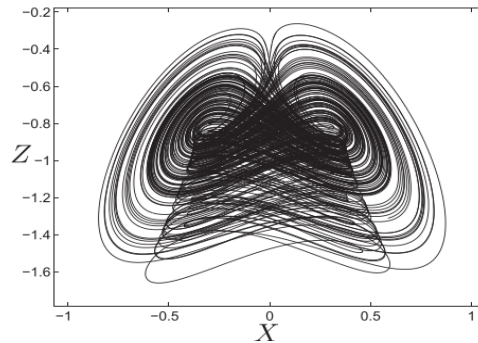


Fig.3.4: Attracteur étrange de Chen.

Stabilité des points d'équilibre

La dynamique du système de Chen est globalement, uniformément et asymptotiquement stable autour l'origine si $c < 0 < a$, cela peut être vérifié par l'utilisant de la fonction de Lyapunov :

$$V(x, y, z) = \frac{a - c}{2a}x^2 + y^2 + z^2.$$

Ensuite, pour un volume dans un certain domaine D_0 , de l'espace d'état, la divergence du

système est donnée par :

$$\text{div} = -a - b + c.$$

Pour une solution du système de Chen existe il faut toujours utiliser un ensemble de paramètres satisfaisant $\text{div} < 0$, comme $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, cela veut dire que le système de Chen est dissipatif, donc le volume de tout attracteur du système doit être nul, donc l'orbite vote dans une certaine région bornée quand $t \rightarrow \infty$.

Bifurcations des points d'équilibres

Le système de Chen à trois points d'équilibre si $(2c - a)b > 0$:

$$O(0, 0, 0), C^+ = (\sqrt{(2c - a)b}, \sqrt{(2c - a)b}, 2c - a), C^- = (-\sqrt{(2c - a)b}, -\sqrt{(2c - a)b}, 2c - a).$$

Pour $a > a_n$, l'origine O est un foyer (le seul équilibre), tel que $a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ est la valeur du paramètre a au laquelle le foyer change à un noeud. La bifurcation pitchfork pour O émerge à la valeur de $a_p = 2c$, ici, O a un changement à un selle instable et en même temps deux foyers symétriques sont produits, donc nous avons trois points d'équilibre pour $a < a_p$.

Le paramètre a_p est aussi la valeur de la bifurcation noeud-col pour C^+ et C^- , qui ne dépendent pas de paramètre b .

Pour : $a_h = \frac{3c + \sqrt{-8bc + 17c^2}}{4}$ les bifurcations de Hopf émergent de ces foyers.

Pour : $a_h < a < a_p$ les valeurs propres sont complexes conjuguées, C^+ et C^- sont deux foyers stables.

Pour : $a = a_h$ ils changent en deux selles instables, et deux cycles limite isolés sont produits autour les d'eux point, C^+ et C^- .

3.3 Modèle de Lü

Le système de Lü est définit par [22] :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = -xz + cy \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (3.8)$$

le système (3.8) avec $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$, présent un attracteur chaotique comme montré dans la figure suivante :

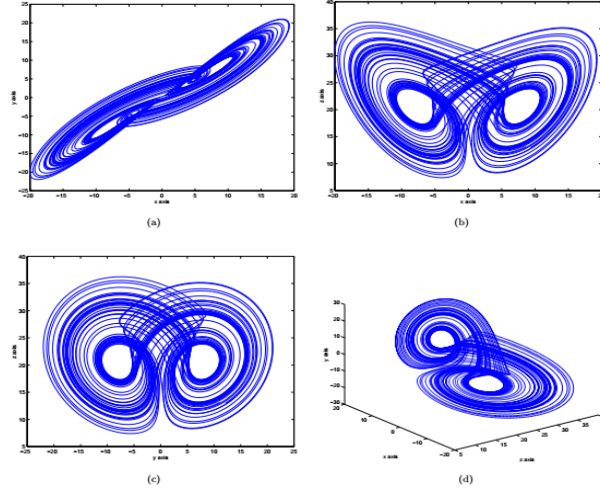


Fig.3.5: Diverses projections de l'attracteur chaotique de Lü : (a) $x-y$, (b) $x-z$, (c) $y-z$, (d) $z-x-y$.

Équilibres et bifurcations

Dans le système (3.8), si $bc > 0$, alors le système a trois points d'équilibres :

$$S_0 = (0, 0, 0), \quad S_+ = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c), \quad S_- = (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c).$$

La bifurcation de fourche de la solution nulle à $c = 0$ peut être observée, si a et b sont fixes et c est varié, les autres équilibres, S_+ et S_- sont symétriques placé par rapport à l'axe z . La linéarisation du système (3.8) pour la solution nulle S_0 donne trois valeurs propres : $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = c$, et $\lambda_3 = -b$. Lorsque $c > 0$ l'origine est un point selle en trois dimensions, lorsque $c < 0$ l'origine est le seulement point d'équilibre et c'est un puits.

Ensuite, linéariser le système pour l'autres équilibres donne l'équation caractéristique suivante :

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + ab\lambda + 2abc = 0 \quad (3.9)$$

Notez que les coefficients de ce polynôme cubique sont tous positifs (puisque $a + b - c > 0$), de sorte que $f(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$. Par conséquent, il y a instabilité ($Re(\lambda) > 0$) seulement s'il y a deux conjugués complexes zéros de f . Maintenant, il est clair que lorsque $c = 0$, les trois zéros sont $\lambda = 0$, $-a$, $-b$ et donc le système a une stabilité linéaire ou une stabilité

marginale. Le premier zéro donne $\lambda = -2c$, comme $c \downarrow 0$, donc la stabilité est perdue dans la limite lorsque c s'approche de zéro. Comme c augmente de 0, l'instabilité ne peut s'établir que lorsque $Re(\lambda) = 0$, c'est-à-dire lorsque deux zéros sont $\lambda = \pm\omega i$ pour un vrai ω . Mais la somme des trois zéros du polynôme cubique f est :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(a + b - c).$$

Donc $\lambda_3 = -(a + b - c)$. Sur la marge de stabilité, nous avons $\lambda = \pm\omega i$. Par conséquent, sur la marge, nous avons

$$0 = f(-(a + b - c)) = ab(3c - a - b),$$

et

$$c_h = \frac{a + b}{3}. \tag{3.10}$$

En fait, s'il y a l'instabilité alors que c augmente à partir de 0, le phénomène suivant peut être observé. Le diagramme continu une bifurcation de Hopf, $b = 3$, λ_1 décroît de zéro jusqu'à coalescence avec λ_2 (quand $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$), ils deviennent alors un complexe paire conjuguée, et finalement leur partie réelle augmente par zéro, tandis que λ_3 reste négatif pour tout $c > 0$. On peut ainsi voir que chacun des points S_+ et S_- , lorsqu'ils sont instables, ont une valeur propre négative et deux valeurs propres conjuguées complexes. Ce point d'équilibre est un selle-foyer. Les bifurcations de Hopf émergent de la valeur de $c_h = (a + b)/3$, où le complexe conjugué valeurs propres sont $\lambda = \pm\sqrt{bci}$. Lorsque $c < c_h$, S_+ et S_- sont les deux puits stables. À $c = c_h$, ici ils changent à deux selles instables bidimensionnelles. Si nous réparons $b = 3$ et varient a et c , on peut observer une continuité de bifurcation de Hopf. Et c'est facile pour voir que la bifurcation de Hopf continue du système (3.8) est plus simple que celle systèmes de Lorenz et Chen puisque ces derniers ont des fonctions quadratiques du paramètre a .

Chapitre 4

L'équivalence topologique de deux systèmes dynamiques chaotiques

4.1 Introduction

Depuis l'introduction du système de Lorenz, qui a fait l'objet d'une étude approfondie (voir par exemple [12]-[25]), de nombreux autres systèmes chaotiques liés à lui (généralement appelé les systèmes semblables à Lorenz) ont été analysés (voir par exemple [26]-[45]). Parmi tous les systèmes semblables à Lorenz considérés dans la littérature, il y en a deux ont de nombreux documents été publié à leur sujet : le système de Chen (voir par exemple [50]-[67]) et le système de Lü (voir par exemple [68]-[87]). Dans ce chapitre nous intéressons à la question de l'équivalence au système de Lorenz qui a été discutée récemment [90]-[104], pour ça nous présentons quelques travaux sur le problème de l'équivalence, Telles que les travaux d'Antonio Algaba et al., qu'ils ont prouvé l'équivalence entre les systèmes de Chen et Lü avec le système de Lorenz, de même pour la famille générale de Lorenz.

4.2 L'équivalence du système de Chen au système de Lorenz

Dans la référence [53] Chen indique que le système de Lorenz et de Chen sont similaires, ainsi qu'il est simple de vérifier qu'aucune transformation de coordonnées (linéaire ou non linéaire) ne peut convertir l'un à l'autre. Dans la référence [90] Antonio Algaba et al. ont prouvé qu'il

existe une transformation linéaire entre le système de Chen et le système de Lorenz, d'autre part, le système de Chen est un cas particulier du système de Lorenz, et par conséquent, tout le comportement dynamique présenté par le système de Chen est présent dans le système de Lorenz. Ces résultats illustrent reliant les bifurcations de Hopf, les orbites périodiques, les surfaces invariantes et les attracteurs chaotiques des deux systèmes. Comme il y a eu une grande littérature qui a ignoré cette équivalence (voir par exemple [50]-[67]).

4.2.1 La transformation entre le système de Chen et le système de Lorenz

Dans [90] et avec la transformation linéaire suivante, $c \neq 0$

$$x = -cX, \quad y = -cY, \quad z = -cZ, \quad \tau = -ct, \quad (4.1)$$

le système de Chen (3.7) devient :

$$\begin{cases} c^2 \frac{dX}{d\tau} = a(-cY + cX) \\ \frac{c^2 dY}{d\tau} = -(c-a)cX - c^2 Y - c^2 XZ \\ c^2 \frac{dZ}{d\tau} = bcZ + c^2 xy \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\frac{a}{c}(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} = \left(\frac{a}{c} - 1\right) X - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = \frac{b}{c}Z + XY \end{cases} \quad (4.2)$$

Par conséquent, si $c \neq 0$, le système de Chen est un système à deux paramètres $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$. Notez que le système (4.2) correspond au système de Lorenz avec les paramètres :

$$\sigma = -\frac{a}{c}, \quad \rho = \frac{a}{c} - 1, \quad \beta = -\frac{b}{c}. \quad (4.3)$$

Donc, généralement, pour $c \neq 0$, le système de Chen est équivalent au système de Lorenz dans le cas particulier $\rho + \sigma = -1$. Ainsi, pour un système de Lorenz satisfaisant $\rho + \sigma = -1$, il y a un nombre infini des systèmes de Chen de paramètre c . Dans ce cas tout objet dynamique existant dans le système de Chen avec $c \neq 0$ (équilibre, orbite périodique, orbite homocline,

hétérocline orbite, ensemble d'attracteur, etc...) existe également pour le système de Lorenz.

De plus, pour $c = 0$, la transformation linéaire :

$$x = aX, \quad y = aY, \quad z = aZ, \quad \tau = at, \quad (a \neq 0),$$

montre de manière triviale que le système de Chen est équivalent au système à un paramètre

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = Y - X \\ \frac{dY}{d\tau} = -X - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = -\frac{b}{a}Z + XY \end{cases}$$

En fait, c'est un cas particulier du T-système [47].

Rappelons que si $a = 0$, le système de Chen devient linéaire, alors il a un intérêt trivial.

En bref, du point de vue dynamique, quand $c \neq 0$ le système de Chen est équivalent au système de Lorenz dans le plan des paramètres $\rho + \sigma = -1$. Dans le cas $c = 0$, il est équivalent au T-système dans un espace à un paramètre.

4.2.2 Comparaison dynamique de deux systèmes

Dans la référence [90], les auteurs ont donné quelques exemples de la dynamique trouvée dans le système de Chen (bifurcations de Hopf, surfaces invariables, attracteurs,...) qui a été présenté dans un nombre des travaux qui auraient peut être évités simplement en prenant en compte l'équivalence dynamique entre les deux systèmes. Ils ont utilisé les relations (4.1) et (4.3), pour déterminer facilement une correspondance entre la dynamique trouvée dans le système de Chen et l'autre dans le système de Lorenz.

Ce qui suit, Leurs explications concernant la dynamique trouvée dans les deux systèmes.

Bifurcation de Hopf La bifurcation de Hopf des équilibres non triviaux dans le système de Lorenz se produit lorsque

$$\beta(\sigma + \rho) + \sigma^2 + (3 - \rho)\sigma + \rho = 0, \quad \beta(\sigma + \rho) > 0.$$

Le premier coefficient de la forme normale de cette bifurcation de Hopf est calculé dans [46], qui détermine la stabilité de l'orbite périodique sortant de cette bifurcation. Dans le cas du système de Chen, la bifurcation de Hopf des équilibres non triviaux apparaît pour (voir [51])

$$2a^2 - 3ac + bc - c^2 = 0, \quad bc > 0.$$

Pour l'étude de la stabilité des orbites périodiques créés dans la bifurcation de Hopf du système de Chen, il suffit de remplacer les relations (4.3) dans le coefficient calculé pour le système de Lorenz :

$$\begin{aligned} -\frac{b}{c} \left(-\frac{a}{c} + \frac{a}{c} - 1 \right) + \left(-\frac{a}{c} \right)^2 + \left(3 - \frac{a}{c} + 1 \right) \left(-\frac{a}{c} \right) + \frac{a}{c} - 1 &= 0, \\ -\frac{b}{c} \left(-\frac{a}{c} + \frac{a}{c} - 1 \right) &> 0, \quad c \neq 0, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{b}{c} - 3\frac{a}{c} + 2\frac{a^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{b}{c} > 0, \quad c \neq 0,$$

donc

$$2a^2 - 3ac + bc - c^2 = 0, \quad bc > 0.$$

Ainsi, les résultats présentés dans les références [53] et [56] sont obtenus.

Orbites périodiques Dans la section précédente, on a vu que, pour un système de Lorenz satisfaisant $\rho + \sigma = -1$, il y a un nombre infini des systèmes de Chen, paramétrés par $c \neq 0$. Cela est clair, en tenant compte de l'orbite périodique stable dessiné dans [51] (Fig.4.1 (a)).

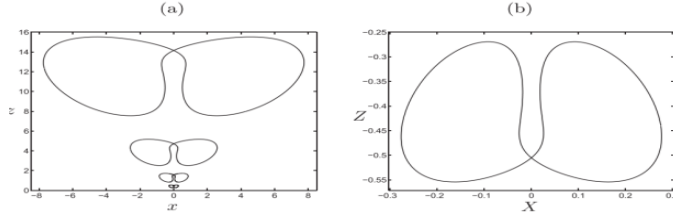


Fig.4.1. (a) Projection sur le plan de coordonnées $x - z$ de quatre orbites périodiques homothétiques stables du système de Chen pour, respectivement,

$a = 45, b = 1, c = 28$ (le plus grand, avec période $T \approx 2.326$),

$a = 45/3, b = 1/3, c = 28/3$ ($T \approx 3 \times 2.326$),

$a = 45/9, b = 9, c = 28/9$ ($T \approx 9 \times 2.326$)

et $a = 45/28, b = 1/28, c = 1$ (le plus petit, $T \approx 28 \times 2.326$).

(b) Projection sur le plan de coordonnées $X - Z$ de l'orbite périodique instable associée existant dans le système de Lorenz pour

$$r = -\frac{45}{28}, q = \frac{45}{28} - 1, b = -\frac{1}{28} \quad (T \approx 28 \times 2.326)$$

Dans la figure 4.1 (a), il y a quatre orbites périodiques homothétiques stables du système de Chen, dont la dynamique ne dépend que de paramètres $a/c = 45/28$ et $b/c = 1/28$. Tous ont l'orbite périodique instable de compagnon (stabilité opposée parce que $c > 0$) du système de Lorenz pour $\sigma = -45/28, \rho = 45/28 - 1, \beta = -1/28$, dessiné sur la figure 4.1 (b) [90].

Surfaces algébriques invariantes Les surfaces algébriques invariantes du système de Lorenz étaient étudié dans les références [13], [17] (Théorème 1) et [18]. Leurs résultats sont résumés dans le tableau I. A partir de ce tableau, et par l'utilisation des relations (4.1) et (4.3), les surfaces algébriques invariantes du système de Chen pour $c \neq 0$ sont obtenus de manière triviale (voir tableau II). Cela a été réalisé dans les références [61]. (Théorème 2.1) et [66] (Théorème 1). Remarquant que les cinq premiers cas (Ch1) - (Ch5) du tableau II est obtenu, respectivement,

de cinq premiers cas (Lo1) - (Lo5) du tableau I.

TABLEAU 1 : Surfaces algébriques invariantes pour le système de Lorenz. ([13], [17] Théorème1 et [21] Tableau I).

Cas	Les paramètres	Surfaces algébriques invariantes
(Lo1)	$\beta = 2\sigma$	$X^2 - 2\sigma Z$
(Lo2)	$\beta = 0, \sigma = \frac{1}{3}$	$X^4 - \frac{4}{3}X^2Z - \frac{4}{9}Y^2 - \frac{8}{9}XY + \frac{4}{3}\rho X^2$
(Lo3)	$\beta = 1, \rho = 0$	$Y^2 + Z^2$
(Lo4)	$\beta = 4, \sigma = 1$	$X^4 - 4X^2Z - 4Y^2 - 8XY + 4\rho X^2 - 16(1 - \rho)Z$
(Lo5)	$\beta = 1, \sigma = 1$	$Y^2 + Z^2 - \rho X^2$
(Lo6)	$\beta = 6\sigma - 2, \rho = 2\sigma - 1$	$X^4 - 4\sigma X^2Z - 4\sigma^2 Y^2 + 8\rho\sigma XY + 4\rho^2 X^2$

TABLEAU 2 : Surfaces algébriques invariantes pour le système de Chen ([61] Théorème 2.1 et [66] Théorème 1).

Cas	Correspondance	Les paramètres	Surfaces algébriques invariantes
(Ch1)	Lo1→Ch1	$b = 2a$	$x^2 - 2az$
(Ch2)	Lo2→Ch2	$b = 0, 3a + c = 0$	$x^4 + \frac{4}{3}c^2x^2z - \frac{4}{9}c^2y^2 - \frac{8}{9}c^2xy - \frac{16}{9}c^2x^2$
(Ch3)	Lo3→Ch3	$a = -b = c$	$y^2 + z^2$
(Ch4)	Lo4→Ch4	$a + c = 0, b = 4a$	$x^4 + 4cx^2z - 4c^2y^2 + 8c^2xy + 8c^2x^2 + 48c^3z$
(Ch5)	Lo5→Ch5	$a = b = -c$	$y^2 + z^2 + 2x^2$
(Ch6)	Lo6→Ch6	$b = c = 0$	$y^2 + z^2 + 2az$

Comme le cas (Lo6) du tableau I apparaît en dehors du plan de paramètre $\rho + \sigma = -1$ alors, il n'a pas de cas compagnon dans le système de Chen. De façon analogue, comme le cas (Ch6) du tableau II se produit pour $c = 0$, il n'a pas de correspondance avec le système de Lorenz. D'un autre côté, la dynamique globale du Chen sur ses surfaces invariantes est étudiée dans les références [63, 67]. Lorsque $c \neq 0$, ces deux articles n'apportent rien de nouveau à la littérature, car leurs résultats sont présentés dans les références [19, 21], pris en compte l'équivalence entre le système de Chen et le système de Lorenz.

Attracteurs Chaotiques Pris en compte l'équivalence entre les systèmes de Chen et de Lorenz, la célèbre méthode développée par Tucker [15, 16] prouve l'existence de l'attracteur de

Lorenz peut également être utilisée pour démontrer l'existence de l'attracteur de Chen.

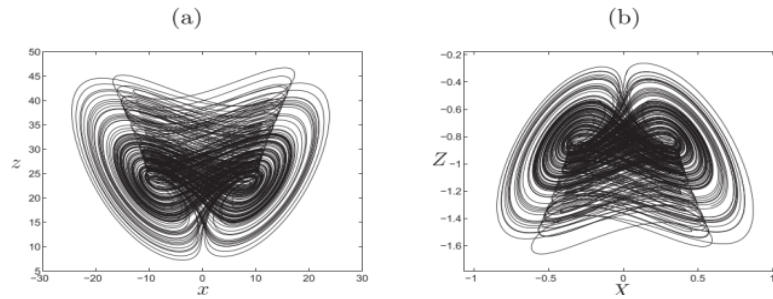


Fig.4.2. (a) L'existence de l'attracteur de Chen pour $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$.

(b) L'attracteur qui existe dans le système de Lorenz pour $\sigma = -35/28 = -5/4$, $\rho = 35/28 - 1 = 1/4$, $\beta = -3/28$ [90].

Alors l'équivalence entre les deux systèmes dynamiques dessinant un attracteur chaotique. Ainsi, dans la figure 4.2 (a), il y a une projection de l'attracteur chaotique du système de Chen pour les valeurs typiques $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ ([50] (Fig.1), ([51] (Fig.5 (k))). Cet attracteur chaotique est homothétique au répulseur chaotique compagnon (ci-contre stabilité car $c > 0$) obtenu dans le système de Lorenz pour $\sigma = -5/4$, $\rho = 1/4$, $\beta = -3/28$, voir la figure 4.2 (b).

Par conséquent, Algaba et al. déduisent une conséquence importante basée sur leurs études, pour $c > 0$ (respectivement, $c < 0$), l'attracteur de Chen existe si le répulseur (resp., attracteur) de Lorenz existe [90].

4.3 L'équivalence du système de Lü au système de Lorenz

Antonio Algaba et al. ont prouvé que le système de Lü est également un cas particulier du système de Lorenz. Ils ont montré qu'il y a une transformation linéaire qui transforme le système de Lü au système de Lorenz, et par conséquent, tout le comportement dynamique présenté par le système de Lü est également présent dans le système de Lorenz [92].

4.3.1 La transformation entre le systèmes de Lü et le système de Lorenz

Le système de Lü est donné par [22] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = cy - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (4.4)$$

où a , b et c sont des paramètres réels.

Dans [99] et par la transformation linéaire suivante, $c \neq 0$,

$$x = -cX, \quad y = -cY, \quad z = -cZ, \quad \tau = -ct, \quad (4.5)$$

le système de Lü (4.4) devient :

$$\begin{cases} c^2 \frac{dX}{d\tau} = a(-cY + cX) \\ c^2 \frac{dY}{d\tau} = -cY - c^2 XZ \\ c^2 \frac{dZ}{d\tau} = bcZ + c^2 XY \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\frac{a}{c}(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} = -Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = \frac{b}{c}Z + XY \end{cases} \quad (4.6)$$

Par conséquent, généralement ($c \neq 0$) le système de Lü ne dépend que de deux paramètres a/c et b/c . En outre, et ce qui est plus important, remarquons que le système (4.6) correspond au système de Lorenz avec les paramètres :

$$\sigma = -\frac{a}{c}, \quad \rho = 0, \quad \beta = -\frac{b}{c}. \quad (4.7)$$

Par conséquent, pour $c \neq 0$, le système de Lü est équivalent au système de Lorenz dans le cas particulier du plan de paramètres $\rho = 0$. Ainsi, pour chaque système de Lorenz satisfaisant $\rho = 0$, il y a un nombre infini des systèmes de Lü paramétrés par c . Dans ce cas, les deux systèmes sont homothétiques, c-à-d. tout le comportement dynamique présenté par le système de Lü avec

$c \neq 0$ (équilibre, orbite périodique, orbite homoclinique, orbite hétérocline, attracteur,...) existe aussi pour le système de Lorenz, et plus, ils sont homothétiques avec la même stabilité si $c < 0$ et de stabilité opposée si $c > 0$. D'autre part, si $c = 0$ et $a \neq 0$ (observer que quand $a = 0$ le système de Lü est linéaire), avec la transformation linéaire :

$$x = aX, \quad y = aY, \quad z = aZ, \quad \tau = at, \quad (a \neq 0), \quad (4.8)$$

le système de Lü est transformé en système à un seul paramètre :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = Y - X \\ \frac{dY}{d\tau} = -XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = -\frac{b}{a}Z + XY \end{cases}$$

ce qui est un cas particulier du T-système [30].

En résumé, d'un point de vue dynamique, si $c \neq 0$, le système de Lü est équivalent au système de Lorenz dans le plan des paramètres $\rho = 0$. Lorsque $c = 0$ (et $a \neq 0$), il est équivalent au T-système dans un espace à un paramètre.

4.3.2 Comparaison dynamique de deux systèmes

Dans la référence [92] avec quelques exemples les auteurs ont montré comment la dynamique présentée par le système de Lü (équilibres, bifurcations locales, orbites périodiques et attracteurs chaotiques) peut être déduit de la dynamique trouvée dans le système de Lorenz. Ceci est fait en tenant compte de l'équivalence montrée ci-dessus entre les deux systèmes. Ainsi, à partir des relations entre les variables d'état et les paramètres des deux systèmes donnés par les relations (4.5) et (4.7), une correspondance entre le comportement dynamique trouvé dans le système de Lü et le comportement dynamique dans le système de Lorenz est facilement obtenu.

Ce qui suite, Leurs explications concernant la dynamique trouvée dans les deux systèmes.

Equilibres et bifurcations locales Les équilibres du système de Lorenz sont $E_0(0, 0, 0)$ et $E_{\pm}(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$, quand $\beta(\rho-1) > 0$. Il suffit d'utiliser les relations (4.7) pour obtenir que les équilibres du système de Lü sont $E_0^*(0, 0, 0)$ et $E^*\pm(\mp\text{sgn}(c)\sqrt{bc}, \mp\text{sgn}(c)\sqrt{bc}, c)$,

quand $bc > 0$.

Une bifurcation fourche dans le système de Lorenz apparaît pour $\beta(\rho - 1) = 0$, et, par conséquent, une bifurcation de fourche dans le système de Lü se produit lorsque $b = 0$. La bifurcation de Hopf des équilibres non triviaux se produit dans le système de Lorenz lorsque :

$$\beta(\sigma + \rho) + \sigma^2 + (3 - \rho)\sigma + \rho = 0, \quad \beta(\sigma + \rho) > 0, \quad (4.9)$$

qui correspond à la bifurcation de Hopf des équilibres non triviaux dans le système de Lü lorsque :

$$a + b - 3c = 0, \quad ab > 0.$$

Pour le système de Lorenz, le premier coefficient de la forme normale de la bifurcation de Hopf, qui détermine la stabilité de l'orbite périodique émergente, est calculé dans ([14], Eqs. (13) - (15)). Si ces expressions sont particularisées à $\rho = 0$, on obtient le premier coefficient de la forme normale de la bifurcation de Hopf dans le système de Lü [92].

Surfaces algébriques invariantes Dans la référence [92] les surfaces algébriques invariantes du système de Lü pour $c \neq 0$ sont obtenues de manière triviale (voir Tableau 3).

TABLEAU 3 : Surfaces algébriques invariantes pour le système de Lü ([86], [89], [88], Théorème 1).

Cas	Correspondance	Les paramètres	Surfaces algébriques invariantes
(Lu1)	Lo1→Lu1	$b = 2a$	$x^2 - 2az$
(Lu2)	Lo2→Lu2	$b = 0, 3a + c = 0$	$x^4 + \frac{4}{3}cx^2z - \frac{4}{9}c^2y^2 - \frac{8}{9}c^2xy$
(Lu3)	Lo3→Lu3	$a = -c$	$y^2 + z^2$
(Lu4)	Lo4→Lu4	$a + c = 0, b = 4a$	$x^4 + 4cx^2z - 4c^2y^2 + 8c^2xy + 8c^2x^2 + 16c^3z$
(Lu5)	Lo5→Lu5	$a = b = -c$	$y^2 + z^2$
(Lu6)	Lo6→Lu6	$b = -c, c = -2a$	$x^4 + 2cx^2z - c^2y^2$

Si les paramètres de Lorenz satisfont $\rho = 0$, il suffit de prendre $\sigma = -\frac{a}{c}$ et $\beta = -\frac{b}{c}$, alors

$$a = \sigma\lambda, \quad c = -\lambda, \quad b = -\beta c = \beta\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Pour chaque système de Lorenz satisfaisant $\rho = 0$, il existe une infinité de systèmes de Lü,

paramétrés par λ .

Pour illustrer comment obtenir les surfaces algébriques invariantes du système de Lü à partir des surfaces algébriques invariantes du système de Lorenz, ils ont montré comment le cas (Lo6) du tableau 1 conduit au cas (Lu6) du tableau 3.

Le système de Lorenz lorsque $\beta = 6\sigma - 2$, $\rho = 2\sigma - 1$, a la surface algébrique invariante

$$X^4 + 4\sigma X^2 Z - 4\sigma^2 Y^2 + 8\rho\sigma XY - 4\rho^2 X^2.$$

Pour $\rho = 0$, on a $\sigma = 1/2$ et $\beta = 1$, et par conséquent, $b = -c$ et $c = -2a$ pour le système de Lü. Ils ont utilisé (4.5) et (4.7) pour obtenir :

$$X^4 + 4\sigma X^2 Z - 4\sigma^2 Y^2 + 8\rho\sigma XY - 4\rho^2 X^2 \rightarrow \frac{1}{c^4} (x^4 + 2cx^2z - c^2y^2).$$

Par conséquent, $x^4 + 2cx^2z - c^2y^2$ est une surface algébrique invariante du système de Lü. De manière analogue, à partir des autres surfaces algébriques invariantes connues du système de Lorenz (cas (Lo1) - (Lo5) dans le tableau 1), les surfaces algébriques invariantes compagnes dans le système de Lü (cas (Lu1) - (Lu5) dans le tableau 3) sont obtenues, respectivement.

Notez que le cas (Lu5) est simplement un sous-cas de (Lu3) et ensuite il n'ajoute rien de nouveau. Par contre, le cas (Lu6) n'a été détecté ni dans [86] ni dans [89]. La liste complète de toutes les surfaces algébriques invariantes du système de Lü ne se trouve que dans [88].

De plus, la dynamique sur ces surfaces algébriques invariantes coïncide avec la dynamique sur les surfaces algébriques invariantes compagnes dans le système de Lorenz. Toute la dynamique décrite dans [89] pour le système de Lü est trivialement obtenue à partir des informations cités dans [19, 21] pour le système de Lorenz.

Attracteurs chaotiques Algaba et al. ont illustré l'équivalence entre les deux systèmes considérant un attracteur chaotique/ répulseur [92]. Dans la Fig.4.3 (a) l'attracteur chaotique pour les valeurs typiques $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$ [68]. Cet attracteur chaotique est homothétique à celui obtenu pour $a = 9/5$, $b = 3/20$, $c = 1$, représenté sur la Fig.4.3 (b). Celui-ci est le répulseur obtenu dans le système de Lorenz (avec une stabilité opposée parce que $c > 0$) pour $\sigma = -9/5$, $\rho = 0$, $\beta = -3/20$, dessiné sur la figure 4. 3 (c), simplement changeant (x, y, z) par

$(-X, -Y, -Z)$. Le répulseur chaotique représenté en (c) est obtenu à partir de l'attracteur chaotique dessiné en (b) par moyen du changement $(x, y, z) \rightarrow (-X, -Y, -Z)$.

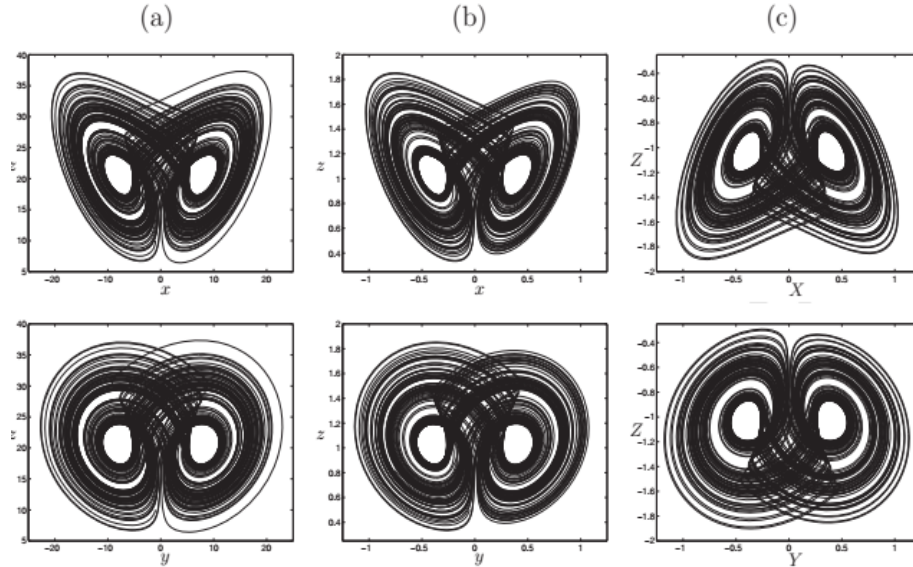


Fig.4.3. Projections sur le plan de coordonnées $y - z$

(a) Attracteur chaotique qui existe dans le système de Lü pour $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$.

(b) L'attracteur chaotique homothétique qui existe dans le système de Lü pour

$$a = 36/20 = 9/5, \quad b = 3/20, \quad c = 1;$$

(c) Le répulseur chaotique compagnon qui existe dans le système de Lorenz pour

$$\sigma = -36/20 = -9/5, \quad \rho = 0, \quad \beta = -3/20.$$

Notez que le répulseur chaotique montré en (c) est obtenu à partir de l'attracteur chaotique dessiné en (b) au moyen du changement $(x, y, z) \rightarrow (-X, -Y, -Z)$.

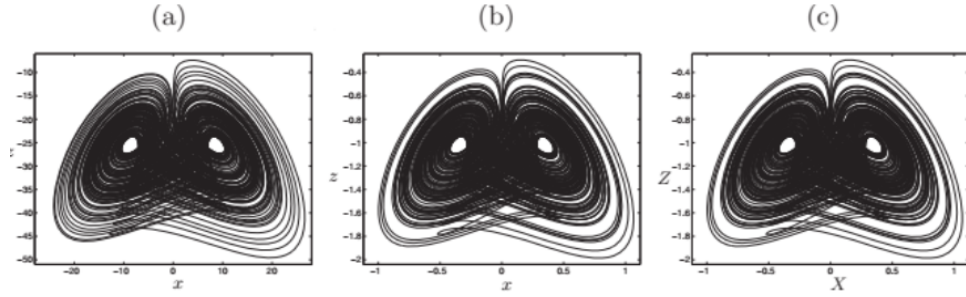


Fig.4.4. Projections sur le plan de coordonnées $x - z$

(a) Un répulseur chaotique qui existe dans le système de Lü pour :

$$a = -40, b = -3, c = -25;$$

(b) Le répulseur chaotique homothétique qui existe dans le système de Lü pour :

$$a = -40/25 = -8/5, b = -3/25, c = -1;$$

(c) Le répulseur chaotique compagnon qui existe dans le système de Lorenz pour :

$$\sigma = -40/25 = -8/5, \rho = 0, \beta = -3/25.$$

Pour le cas avec $c < 0$. Ainsi, dans la figure 4.4 (a) un répulseur chaotique qui existe dans le système de Lü pour $a = -40, b = -3, c = -25$, le répulseur homothétique qui existe pour $c = -1$ apparaît sur la figure 4.4 (b), le répulseur chaotique compagnon dans le système de Lorenz se produit lorsque $\sigma = -8/5, \rho = 0, \beta = -3/25$, voir la figure 4.4 (c) (il y a la même stabilité car $c < 0$). Trivialement, le répulseur montré en (c) est obtenu à partir de celui dessiné en (b) au moyen du changement $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ [92].

Sur la base de l'équivalence entre les deux systèmes, pour démontrer l'existence d'un attracteur chaotique dans le système de Lü nous pouvons utiliser la méthode renommée développé par Tucker [15] pour montrer que l'attracteur de Lorenz existe.

4.4 L'équivalence d'une famille générale de Lorenz au système de Lorenz

Dans la référence [48], les auteurs donnent une preuve constructive de l'existence d'un ensemble globalement exponentiellement attractif et d'un ensemble invariant positif de la famille

générale de Lorenz, qui contient quatre paramètres indépendants et est plus général que tous les systèmes semblables à Lorenz étudiés dans la littérature. Le système considéré dans cet article défini par :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - \gamma y - xz \\ z' = -\beta z + xy \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\sigma > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et $\rho \in (-\infty, +\infty)$ sont des paramètres réels. Quand $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, $\gamma = 1$ le système (4.10) devient le système de Lorenz classique, et quand $\sigma = 25\alpha + 10$, $\rho = 28 - 35\alpha$, $\beta = 8 + \alpha/3$, $\gamma = 1 - 29\alpha$, où $\alpha \in [0, \frac{1}{29})$, le système (4.10) devient le système de Lorenz généralisé.

Dans la figure 4.5, trois attracteurs sont proposés par les auteurs,

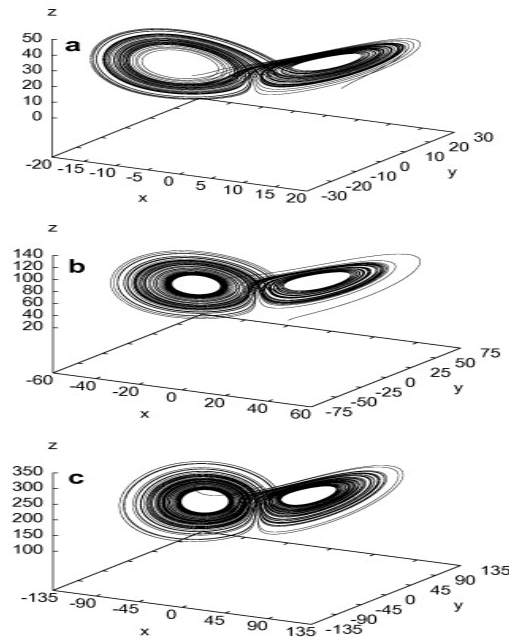


Fig.4.5 Les attracteurs chaotiques du système (4.10) :

- (a) Attracteur chaotique pour $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, $\gamma = 1$.
- (b) Attracteur chaotique pour $\sigma = 30$, $\rho = 80$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$.
- (c) Attracteur chaotique pour $\sigma = 40$, $\rho = 250$, $\beta = 5$, $\gamma = 20$.

Dans [100], Algaba et al. ont prouvé par la transformation suivante :

$$x = \gamma X, \quad y = \gamma Y, \quad z = \gamma Z, \quad \tau = \gamma t; \quad \gamma > 0,$$

que la famille générale de Lorenz (4.10) devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\frac{\sigma}{\gamma}(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} = \frac{\rho}{\gamma}X - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = \frac{\beta}{\gamma}Z + XY \end{cases}$$

Par conséquent, si $\gamma > 0$, la famille générale de Lorenz (4.10) ne dépend que de trois paramètres libres, $\sigma^* = \frac{\sigma}{\gamma}$, $\rho^* = \frac{\rho}{\gamma}$ et $\beta^* = \frac{\beta}{\gamma}$. Qui peuvent être considérés comme des paramètres de système de Lorenz :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\sigma^*(Y - X) \\ \frac{dY}{d\tau} = \rho^*X - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = \beta^*Z + XY \end{cases} \quad (4.11)$$

Alors la famille générale de Lorenz (4.10) est équivalente au système de Lorenz (4.11). Ainsi, pour chaque système de Lorenz (et fixe), il existe une infinité de systèmes de la famille générale de Lorenz, paramétrés de la manière suivante : $\sigma = \sigma^*\gamma$, $\rho = \rho^*\gamma$ et $\beta = \beta^*\gamma$, $\gamma > 0$. De cette façon, Algaba et al. ont trouvé que les énoncés dans la référence [48] ne sont pas corrects.

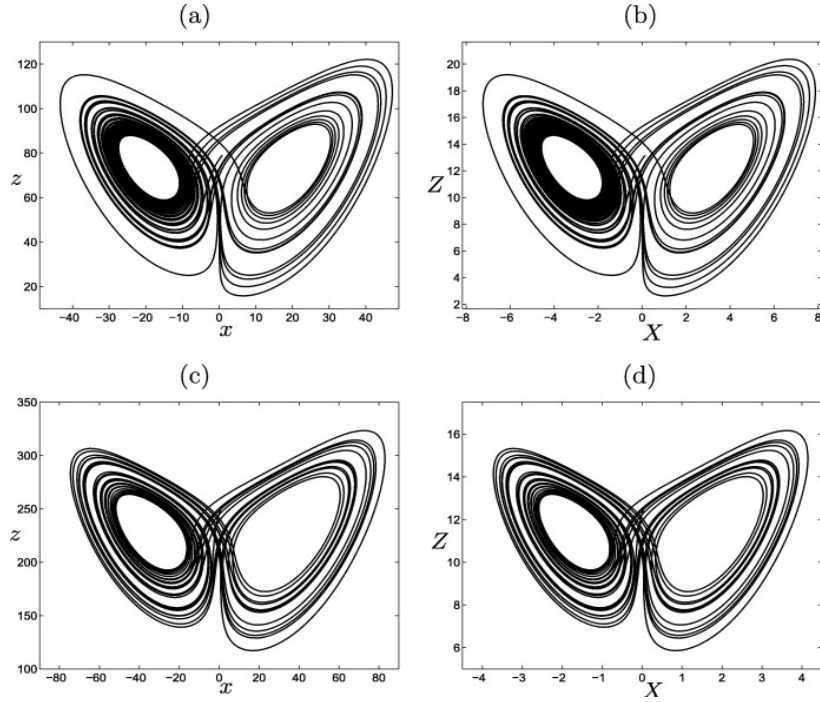


Fig 4.6 : Projections sur le plan de coordonnées $x - z$ de :

- (a) Un attracteur chaotique pour le système (4.10) : $\sigma = 30$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$, $\rho = 80$,
(temps d'intégration $T = 20$, C.I. : $(x, y, z) = (0.8078, -5.4522, 78.9460)$).
- (b) Un attracteur chaotique du système (4.11) : $\sigma^* = 30/6$, $\beta^* = 5/6$, $\rho^* = 80/6$,
(temps d'intégration $T = 20 \times 6$, C.I. : $(X, Y, Z) = (0.8078/6, -5.4522/6, 78.9460/6)$).
- (c) Un attracteur chaotique pour le système (4.10) : $\sigma = 40$, $\beta = 5$, $\gamma = 20$, $\rho = 250$,
(temps d'intégration $T = 8$, C.I. : $(x, y, z) = (0.8078, -5.4522, 250)$).
- (d) Un attracteur chaotique du système (4.11) : $\sigma^* = 40/20$, $\beta^* = 5/20$, $\rho^* = 250/20$,
(temps d'intégration $T = 8 \times 20$, C.I. : $(X, Y, Z) = (0.8078/20, -5.4522/20, 250/20)$).

Algaba et al. ont illustré que les attracteurs chaotiques dessinés dans les figures 4.5 (b) et (c) ne sont que des copies homothétiques des attracteurs chaotiques présentés par le système de Lorenz pour les valeurs correspondantes, comme ils l'ont montré sur la figure 4.6, ainsi, sur la figure 4.6 (a) ils ont dessiné la projection sur le plan $x - z$ de l'attracteur chaotique du système (4.10) pour $\sigma = 30$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$, $\rho = 80$ qui est une copie homothétique du chaotique attracteur du système de Lorenz pour $\sigma^* = 30/6$, $\beta^* = 5/6$, $\rho^* = 80/6$, dont la projection sur

le plan $X - Z$ apparaît sur la figure 5.6 (b). De manière analogue, sur les figures 5.6 (c) et (d), les attracteurs chaotiques compagnons qui existent, respectivement, pour $\sigma = 40$, $\beta = 5$, $\gamma = 20$, $\rho = 250$ dans le système (4.10) et pour $\sigma^* = 40/20$, $\beta^* = 5/20$, $\rho^* = 250/20$ dans le système de Lorenz sont représentés. Observons qu’au moyen d’une transformation linéaire, les résultats nouveaux et intéressants qu’ils fournissent pour la famille générale de Lorenz peuvent être obtenus en travaillant directement avec les équations de Lorenz, c’est-à-dire en ne traitant que de trois paramètres indépendants.

4.5 Conclusion

Le système de Chen est introduit en 1999 en tant que nouveau système chaotique. Dès le premier instant, des auteurs le comparent au système de Lorenz, considérant toujours que c’est différent et essayant de le concurrencer : topologiquement pas équivalent (il n’existe pas d’homéomorphisme qui peut transformer un système à l’autre), et a encore plus de complexité comportement dynamique que le système de Lorenz. Suivant cette ligne, le système de Lü est présenté comme une «transition» entre les systèmes de Lorenz et Chen. De plus, la famille générale de Lorenz [48] est considérée comme comprenant les trois systèmes (Lorenz, Chen et Lü) que les auteurs croient différents. De plus, un système chaotique unifié à un paramètre est introduit pour connecter ces trois systèmes [49]. Cependant, malgré les centaines d’ouvrages qui affirment le contraire, Algaba et al. ont récemment montré que, génériquement, les systèmes de Chen et Lü ne sont que des cas particuliers du système de Lorenz. De façon analogue, la famille générale de Lorenz [48] est, génériquement, homothétique au système de Lorenz. En outre, le système chaotique unifié est homothétiquement équivalent au système de Lorenz le long d’une ligne à un paramètre. Par conséquent, la dynamique des systèmes ci-dessus (Chen, Lü, famille générale de Lorenz, système chaotique unifié) peut être déduite trivialement de la dynamique correspondante du système de Lorenz.

Chapitre 5

Les systèmes tridimensionnels équivalents au système de Lorenz

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on déterminera six formes générales de systèmes tridimensionnels avec deux non linéarités quadratiques équivalents au système de Lorenz. Nous donnons nos résultats sous la forme de théorèmes avec des preuves. Notez que le changement de variables donné dans chaque cas est valable dans tout l'espace de phase \mathbb{R}^3 , pour toute valeur des paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$ et par conséquent, la dynamique des deux systèmes est la même dans toute la phase de l'espace [105].

5.2 Nouveaux formes des systèmes tridimensionnels équivalents au système de Lorenz

La forme général du système quadratique tridimensionnel donne par :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz \\ z' = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz \end{cases} \quad (5.1)$$

où $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{30}$.

Théorème 5.1 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0, \\ b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, \\ c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, \\ a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, b_8 \neq 0, c_7 \neq 0, c_3 \neq 0, \\ c_7 b_8 < 0, \frac{c_2}{c_7} = \frac{b_3}{b_8}, a_0 - \frac{a_1 c_2}{c_7} - \frac{a_2 c_1}{c_7} = 0, \\ b_0 - \frac{c_0 b_3}{c_3} - \frac{b_1 c_2}{c_7} - \frac{b_2 c_1}{c_7} + \frac{b_3 c_1 c_2}{c_3 c_7} + \frac{c_0 c_2 b_8}{c_3 c_7} - \frac{c_1 b_8 c_2^2}{c_3 c_7^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = (\alpha_1 X + \beta_1), \quad y = (\alpha_2 Y + \beta_2), \quad z = (\alpha_3 Z + \beta_3), \quad \tau = \alpha_4 t \quad (5.3)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le system (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \alpha_4 \frac{\partial X}{\partial \tau} = (a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0) + \\ \quad (a_1 \alpha_1 + 2a_4 \alpha_1 \beta_1 + a_7 \alpha_1 \beta_2 + a_8 \alpha_1 \beta_3) X + (a_2 \alpha_2 + 2a_5 \alpha_2 \beta_2 + a_7 \alpha_2 \beta_1 + a_9 \alpha_2 \beta_3) Y + \\ \quad (a_3 \alpha_3 + 2a_6 \alpha_3 \beta_3 + a_8 \alpha_3 \beta_1 + a_9 \alpha_3 \beta_2) Z + a_4 \alpha_1^2 X^2 + a_5 \alpha_2^2 Y^2 + a_6 \alpha_3^2 Z^2 + \\ \quad a_7 \alpha_1 \alpha_2 XY + a_8 \alpha_1 \alpha_3 XZ + a_9 \alpha_2 \alpha_3 YZ \\ \alpha_2 \alpha_4 \frac{\partial Y}{\partial \tau} = (b_0 + b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 + b_4 \beta_1^2 + b_5 \beta_2^2 + b_6 \beta_3^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_9 \beta_2 \beta_3) + \\ \quad (b_1 \alpha_1 + 2b_4 \alpha_1 \beta_1 + b_7 \alpha_1 \beta_2 + b_8 \alpha_1 \beta_3) X + (b_2 \alpha_2 + 2b_5 \alpha_2 \beta_2 + b_7 \alpha_2 \beta_1 + b_9 \alpha_2 \beta_3) Y + \\ \quad (b_3 \alpha_3 + 2b_6 \alpha_3 \beta_3 + b_8 \alpha_3 \beta_1 + b_9 \alpha_3 \beta_2) Z + b_4 \alpha_1^2 X^2 + b_5 \alpha_2^2 Y^2 + b_6 \alpha_3^2 Z^2 + \\ \quad b_7 \alpha_1 \alpha_2 XY + b_8 \alpha_1 \alpha_3 XZ + b_9 \alpha_2 \alpha_3 YZ \\ \alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial Z}{\partial \tau} = (c_0 + c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3 + c_4 \beta_1^2 + c_5 \beta_2^2 + c_6 \beta_3^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_9 \beta_2 \beta_3) + \\ \quad (c_1 \alpha_1 + 2c_4 \alpha_1 \beta_1 + c_7 \alpha_1 \beta_2 + c_8 \alpha_1 \beta_3) X + (c_2 \alpha_2 + 2c_5 \alpha_2 \beta_2 + c_7 \alpha_2 \beta_1 + c_9 \alpha_2 \beta_3) Y + \\ \quad (c_3 \alpha_3 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_8 \alpha_3 \beta_1 + c_9 \alpha_3 \beta_2) Z + c_4 \alpha_1^2 X^2 + c_5 \alpha_2^2 Y^2 + c_6 \alpha_3^2 Z^2 + \\ \quad c_7 \alpha_1 \alpha_2 XY + c_8 \alpha_1 \alpha_3 XZ + c_9 \alpha_2 \alpha_3 YZ \end{array} \right. \quad (5.4)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.4) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$, doivent vérifier les équations suivantes :

$$a_1\alpha_1 + 2a_4\alpha_1\beta_1 + a_7\alpha_1\beta_2 + a_8\alpha_1\beta_3 = -\sigma\alpha_1\alpha_4,$$

$$a_2\alpha_2 + 2a_5\alpha_2\beta_2 + a_7\alpha_2\beta_1 + a_9\alpha_2\beta_3 = \sigma\alpha_1\alpha_4,$$

$$a_3\alpha_3 + 2a_6\alpha_3\beta_3 + a_8\alpha_3\beta_1 + a_9\alpha_3\beta_2 = 0,$$

$$a_4\alpha_1^2 = 0, a_5\alpha_2^2 = 0, a_6\alpha_3^2 = 0, a_7\alpha_1\alpha_2 = 0, a_8\alpha_1\alpha_3 = 0, a_9\alpha_2\alpha_3 = 0,$$

$$b_0 + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + b_4\beta_1^2 + b_5\beta_2^2 + b_6\beta_3^2 + b_7\beta_1\beta_2 + b_8\beta_1\beta_3 + b_9\beta_2\beta_3 = 0,$$

$$b_1\alpha_1 + 2b_4\alpha_1\beta_1 + b_7\alpha_1\beta_2 + b_8\alpha_1\beta_3 = \rho\alpha_2\alpha_4,$$

$$b_2\alpha_2 + 2b_5\alpha_2\beta_2 + b_7\alpha_2\beta_1 + b_9\alpha_2\beta_3 = -\alpha_2\alpha_4,$$

$$b_3\alpha_3 + 2b_6\alpha_3\beta_3 + b_8\alpha_3\beta_1 + b_9\alpha_3\beta_2 = 0,$$

$$b_4\alpha_1^2 = 0, b_5\alpha_2^2 = 0, b_6\alpha_3^2 = 0, b_7\alpha_1\alpha_2 = 0, b_8\alpha_1\alpha_3 = -\alpha_2\alpha_4, b_9\alpha_2\alpha_3 = 0,$$

$$c_0 + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + c_4\beta_1^2 + c_5\beta_2^2 + c_6\beta_3^2 + c_7\beta_1\beta_2 + c_8\beta_1\beta_3 + c_9\beta_2\beta_3 = 0,$$

$$c_1\alpha_1 + 2c_4\alpha_1\beta_1 + c_7\alpha_1\beta_2 + c_8\alpha_1\beta_3 = 0,$$

$$c_2\alpha_2 + 2c_5\alpha_2\beta_2 + c_7\alpha_2\beta_1 + c_9\alpha_2\beta_3 = 0,$$

$$c_3\alpha_3 + 2c_6\alpha_3\beta_3 + c_8\alpha_3\beta_1 + c_9\alpha_3\beta_2 = -\beta\alpha_3\alpha_4,$$

$$c_4\alpha_1^2 = 0, c_5\alpha_2^2 = 0, c_6\alpha_3^2 = 0, c_7\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4, c_8\alpha_1\alpha_3 = 0, c_9\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Alors on trouve :

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0,$$

$$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, b_8 \neq 0,$$

$$c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, c_7 \neq 0, c_3 \neq 0,$$

$$\frac{c_2}{c_7} = \frac{b_3}{b_8}, \quad c_7 b_8 < 0,$$

$$b_0 + b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 + b_8 \beta_1 \beta_3 = 0,$$

$$b_0 - \frac{c_0 b_3}{c_3} - \frac{b_1 c_2}{c_7} - \frac{b_2 c_1}{c_7} + \frac{b_3 c_1 c_2}{c_3 c_7} + \frac{c_0 c_2 b_8}{c_3 c_7} - \frac{c_1 c_2^2 b_8}{c_3 c_7^2},$$

$$a_0 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 = 0, \quad a_0 - \frac{a_1 c_2}{c_7} - \frac{a_2 c_1}{c_7} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{|b_2|}{\sqrt{-c_7 b_8}}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1 |b_2|}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}}, \quad \alpha_3 = -\frac{a_1 b_2}{a_2 b_8}$$

$$\alpha_4 = -b_2, \quad \beta_1 = -\frac{c_2}{c_7}, \quad \beta_2 = -\frac{c_1}{c_7}, \quad \beta_3 = \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3}.$$

Avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_8 x z \\ z' = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_7 x y \end{cases} \quad (5.5)$$

et la transformation linéaire (5.3) s'écrit :

$$x = \left(\frac{|b_2|}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right), \quad y = \left(-\frac{a_1 |b_2|}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{c_1}{c_7} \right), \quad z = \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 b_8} Z + \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} \right), \quad \tau = -b_2 t,$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.5) devient :

$$\begin{cases} -\frac{b_2^2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X' = a_0 + a_1 \left(\frac{b_2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right) + a_2 \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{c_1}{c_7} \right) \\ \frac{a_1 b_2^2}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y' = b_0 + b_1 \left(\frac{b_2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right) + b_2 \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{c_1}{c_7} \right) + b_3 \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 b_8} Z + \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} \right) + \\ b_8 \left(\frac{b_2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right) \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 b_8} Z + \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} \right) \\ \frac{a_1 b_2^2}{a_2 b_8} Z' = c_0 + c_1 \left(\frac{b_2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right) + c_2 \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{c_1}{c_7} \right) + c_3 \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 b_8} Z + \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} \right) + \\ c_7 \left(\frac{b_2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{c_2}{c_7} \right) \left(-\frac{a_1 b_2}{a_2 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{c_1}{c_7} \right) \end{cases}$$

après les calculs on trouve le système :

$$\begin{cases} X' = -\frac{a_1}{b_2}X + \frac{a_1}{b_2}Y \\ Y' = \left(\frac{a_2b_1}{a_1b_2} - \frac{a_2c_0b_8}{a_1b_2c_3} + \frac{a_2c_2c_1b_8}{a_1b_2c_3c_7} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -\frac{c_3}{b_2}Z + XY \end{cases}$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{a_1}{b_2}, \quad \rho = \frac{a_2b_1}{a_1b_2} - \frac{a_2c_0b_8}{a_1b_2c_3} + \frac{a_2c_2c_1b_8}{a_1b_2c_3c_7}, \quad \beta = \frac{c_3}{b_2}.$$

■

Théorème 5.2 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0, \\ c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, \\ b_4 = b_6 = b_5 = b_9 = b_7 = 0, \\ a_1 \neq 0, \quad a_3 \neq 0, \quad b_8 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \quad c_7 \neq 0, \\ c_7b_8 < 0, \quad \frac{c_2}{c_7} = \frac{b_3}{b_8}, \quad a_0 - \frac{a_1b_3}{b_8} - \frac{a_3b_1}{b_8} = 0, \\ c_0 - \frac{c_2b_0}{b_2} - \frac{c_1b_3}{b_8} - \frac{c_3b_1}{b_8} + \frac{c_2b_3b_1}{b_2b_8} + \frac{c_7b_3b_0}{b_8b_2} - \frac{c_7b_1b_3^2}{b_2b_8^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = \alpha_1X + \beta_1, \quad y = \alpha_2Z + \beta_2, \quad z = \alpha_3Y + \beta_3, \quad \tau = \alpha_4t, \quad (5.7)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le système (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\alpha_1 \alpha_4 \frac{\partial X}{\partial \tau} = (a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0) + \\
\quad (a_1 \alpha_1 + 2a_4 \alpha_1 \beta_1 + a_7 \alpha_1 \beta_2 + a_8 \alpha_1 \beta_3) X + (a_3 \alpha_3 + 2a_6 \alpha_3 \beta_3 + a_8 \alpha_3 \beta_1 + a_9 \alpha_3 \beta_2) Y + \\
\quad (a_2 \alpha_2 + 2a_5 \alpha_2 \beta_2 + a_7 \alpha_2 \beta_1 + a_9 \alpha_2 \beta_3) Z + \\
\quad a_4 X^2 \alpha_1^2 + a_6 Y^2 \alpha_3^2 + a_5 Z^2 \alpha_2^2 + a_8 XY \alpha_1 \alpha_3 + a_7 XZ \alpha_1 \alpha_2 + a_9 YZ \alpha_2 \alpha_3 \\
\alpha_3 \alpha_4 \frac{\partial Y}{\partial \tau} = (c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0) + \\
\quad (2c_4 \alpha_1 \beta_1 + c_7 \alpha_1 \beta_2 + c_8 \alpha_1 \beta_3 + c_1 \alpha_1) X + (c_8 \beta_1 \alpha_3 + c_9 \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_3 \alpha_3) Y + \\
\quad (c_7 \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 \alpha_2 \beta_2 + c_9 \alpha_2 \beta_3 + c_2 \alpha_2) Z + c_4 X^2 \alpha_1^2 + c_6 Y^2 \alpha_3^2 + c_5 Z^2 \alpha_2^2 + \\
\quad c_8 XY \alpha_1 \alpha_3 + c_7 XZ \alpha_1 \alpha_2 + c_9 YZ \alpha_2 \alpha_3 \\
\alpha_2 \alpha_4 \frac{\partial Z}{\partial \tau} = (b_4 \beta_1^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_1 \beta_1 + b_5 \beta_2^2 + b_9 \beta_2 \beta_3 + b_2 \beta_2 + b_6 \beta_3^2 + b_3 \beta_3 + b_0) + \\
\quad (2b_4 \alpha_1 \beta_1 + b_7 \alpha_1 \beta_2 + b_8 \alpha_1 \beta_3 + b_1 \alpha_1) X + (b_8 \beta_1 \alpha_3 + b_9 \alpha_3 \beta_2 + 2b_6 \alpha_3 \beta_3 + b_3 \alpha_3) Y + \\
\quad (b_7 \alpha_2 \beta_1 + 2b_5 \alpha_2 \beta_2 + b_9 \alpha_2 \beta_3 + b_2 \alpha_2) Z + b_4 X^2 \alpha_1^2 + b_6 Y^2 \alpha_3^2 + b_5 Z^2 \alpha_2^2 + \\
\quad b_9 YZ \alpha_2 \alpha_3 + b_8 XY \alpha_1 \alpha_3 + b_7 XZ \alpha_1 \alpha_2
\end{array} \right. \quad (5.8)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.8) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$, doivent vérifier les équations suivantes :

$$a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0 = 0,$$

$$(a_1 \alpha_1 + 2a_4 \alpha_1 \beta_1 + a_7 \alpha_1 \beta_2 + a_8 \alpha_1 \beta_3) = \sigma \alpha_1 \alpha_4,$$

$$a_3 \alpha_3 + 2a_6 \alpha_3 \beta_3 + a_8 \alpha_3 \beta_1 + a_9 \alpha_3 \beta_2 = \sigma \alpha_1 \alpha_4,$$

$$a_2 \alpha_2 + 2a_5 \alpha_2 \beta_2 + a_7 \alpha_2 \beta_1 + a_9 \alpha_2 \beta_3 = 0,$$

$$a_4 \alpha_1^2 = 0, \quad a_6 \alpha_3^2 = 0, \quad a_5 \alpha_2^2 = 0, \quad a_8 \alpha_1 \alpha_3 = 0, \quad a_7 \alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad a_9 \alpha_2 \alpha_3 = 0,$$

$$c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0 = 0,$$

$$2c_4 \alpha_1 \beta_1 + c_7 \alpha_1 \beta_2 + c_8 \alpha_1 \beta_3 + c_1 \alpha_1 = \rho \alpha_3 \alpha_4,$$

$$c_8 \beta_1 \alpha_3 + c_9 \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_3 \alpha_3 = -\alpha_3 \alpha_4,$$

$$c_7\alpha_2\beta_1 + 2c_5\alpha_2\beta_2 + c_9\alpha_2\beta_3 + c_2\alpha_2 = 0,$$

$$c_4\alpha_1^2 = 0, c_6\alpha_3^2 = 0, c_5\alpha_2^2 = 0, c_8\alpha_1\alpha_3 = 0, c_7\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_3\alpha_4, c_9\alpha_2\alpha_3 = 0,$$

$$b_4\beta_1^2 + b_7\beta_1\beta_2 + b_8\beta_1\beta_3 + b_1\beta_1 + b_5\beta_2^2 + b_9\beta_2\beta_3 + b_2\beta_2 + b_6\beta_3^2 + b_3\beta_3 + b_0 = 0,$$

$$2b_4\alpha_1\beta_1 + b_7\alpha_1\beta_2 + b_8\alpha_1\beta_3 + b_1\alpha_1 = 0,$$

$$b_8\beta_1\alpha_3 + b_9\alpha_3\beta_2 + 2b_6\alpha_3\beta_3 + b_3\alpha_3 = 0,$$

$$b_7\alpha_2\beta_1 + 2b_5\alpha_2\beta_2 + b_9\alpha_2\beta_3 + b_2\alpha_2 = -\beta\alpha_2\alpha_4,$$

$$b_4\alpha_1^2 = 0, b_6\alpha_3^2 = 0, b_5\alpha_2^2 = 0, b_9\alpha_2\alpha_3 = 0, b_8\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4, b_7\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Alors on trouve :

$$a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0, a_3 \neq 0,$$

$$c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, c_7 \neq 0,$$

$$b_4 = b_6 = b_5 = b_9 = b_7 = 0, b_8 \neq 0, b_2 \neq 0,$$

$$\frac{c_2}{c_7} = \frac{b_3}{b_8}, c_7 b_8 < 0,$$

$$-\frac{a_1 b_3}{b_8} - \frac{a_3 b_1}{b_8} + a_0 = 0,$$

$$-\frac{c_7 b_3}{b_8} \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} + \frac{c_7 b_3}{b_8} \frac{b_0}{b_2} - \frac{c_1 b_3}{b_8} + \frac{c_2 b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{c_2 b_0}{b_2} - c_3 \frac{b_1}{b_8} + c_0 = 0,$$

$$\alpha_1 = \frac{|c_3|}{\sqrt{-c_7 b_8}}, \alpha_2 = -\frac{a_1 c_3}{a_3 c_7}, \alpha_3 = -\frac{a_1 |c_3|}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}}, \alpha_4 = -c_3,$$

$$\beta_1 = -\frac{b_3}{b_8}, \beta_2 = \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{b_0}{b_2}, \beta_3 = -\frac{b_1}{b_8}.$$

Avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_3 z \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_8 x z \\ z' = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_7 x y \end{cases} \quad (5.9)$$

et la transformation linéaire (5.7) s'écrit :

$$x = \left(\frac{|c_3|}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right), \quad y = \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 c_7} Z + \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{b_0}{b_2} \right), \quad z = \left(-\frac{a_1 |c_3|}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{b_1}{b_8} \right), \quad \tau = -c_3 t,$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.9) devient ;

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{c_3^2}{\sqrt{-c_7 b_8}} X' = a_0 + a_1 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right) + a_3 \left(-\frac{a_1 |c_3|}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{b_1}{b_8} \right), \\ \frac{a_1 c_3^2}{a_3 c_7} Z' = b_0 + b_1 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right) + b_2 \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 c_7} Z + \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{b_0}{b_2} \right) + b_3 \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{b_1}{b_8} \right) + \\ \quad b_8 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right) \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{b_1}{b_8} \right), \\ \frac{a_1 c_3^2}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y' = c_0 + c_1 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right) + c_2 \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 c_7} Z + \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{b_0}{b_2} \right) + c_3 \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 \sqrt{-c_7 b_8}} Y - \frac{b_1}{b_8} \right) + \\ \quad c_7 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-c_7 b_8}} X - \frac{b_3}{b_8} \right) \left(-\frac{a_1 c_3}{a_3 c_7} Z + \frac{b_3 b_1}{b_2 b_8} - \frac{b_0}{b_2} \right), \end{array} \right.$$

après les calculs on trouve le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = -\frac{a_1}{c_3} X + \frac{a_1}{c_3} Y \\ Y' = \left(\frac{a_3 c_1}{a_1 c_3} - \frac{b_0}{b_2} \frac{a_3 c_7}{a_1 c_3} + \frac{b_1}{b_2} \frac{a_3}{b_8} \frac{b_3 c_7}{a_1 c_3} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -Z \frac{b_2}{c_3} + XY \end{array} \right.$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{a_1}{c_3}, \quad \rho = \frac{c_7}{c_3} \frac{a_3 b_3 b_1}{a_1 b_2 b_8} - \frac{a_3 c_7}{a_1 c_3} \frac{b_0}{b_2} + \frac{a_3 c_1}{a_1 c_3}, \quad \beta = \frac{b_2}{c_3}.$$

■

Théorème 5.3 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \\ b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0, \\ c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, \\ a_9 \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad c_7 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \\ a_9 c_7 < 0, \quad \frac{c_1}{c_7} = \frac{a_3}{a_9}, \quad b_0 - \frac{b_1 c_2}{c_7} - \frac{b_2 c_1}{c_7} = 0, \\ a_0 - \frac{a_3 c_0}{c_3} - \frac{a_1 c_2}{c_7} - \frac{a_2 c_1}{c_7} + \frac{a_3 c_1 c_2}{c_3 c_7} + \frac{c_0 c_1 a_9}{c_3 c_7} - \frac{a_9 c_2 c_1^2}{c_3 c_7^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = \alpha_1 Y + \beta_1, \quad y = \alpha_2 X + \beta_2, \quad z = \alpha_3 Z + \beta_3, \quad \tau = \alpha_4 t, \quad (5.11)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le système (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 \alpha_2 X' = (b_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 + \beta_1^2 b_4 + \beta_2^2 b_5 + \beta_3^2 b_6 + \beta_1 \beta_2 b_7 + \beta_1 \beta_3 b_8 + \beta_2 \beta_3 b_9) + \\ \quad (\alpha_2 b_2 + 2\alpha_2 \beta_2 b_5 + \alpha_2 \beta_1 b_7 + \alpha_2 \beta_3 b_9) X + (\alpha_1 b_1 + 2\alpha_1 \beta_1 b_4 + \alpha_1 \beta_2 b_7 + \alpha_1 \beta_3 b_8) Y + \\ \quad (\alpha_3 b_3 + \beta_1 \alpha_3 b_8 + 2\alpha_3 \beta_3 b_6 + \alpha_3 \beta_2 b_9) Z + X^2 \alpha_2^2 b_5 + Y^2 \alpha_1^2 b_4 + Z^2 \alpha_3^2 b_6 + \\ \quad \quad \quad XY \alpha_1 \alpha_2 b_7 + XZ \alpha_2 \alpha_3 b_9 + YZ \alpha_1 \alpha_3 b_8 \\ \alpha_4 \alpha_1 Y' = (a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \beta_1^2 a_4 + \beta_2^2 a_5 + \beta_3^2 a_6 + \beta_1 \beta_2 a_7 + \beta_1 \beta_3 a_8 + \beta_2 \beta_3 a_9) + \\ \quad (\alpha_2 a_2 + 2\alpha_2 \beta_2 a_5 + \alpha_2 \beta_1 a_7 + \alpha_2 \beta_3 a_9) X + (\alpha_1 a_1 + 2\alpha_1 \beta_1 a_4 + \alpha_1 \beta_2 a_7 + \alpha_1 \beta_3 a_8) Y + \\ \quad (\alpha_3 a_3 + \beta_1 \alpha_3 a_8 + 2\alpha_3 \beta_3 a_6 + \alpha_3 \beta_2 a_9) Z + X^2 \alpha_2^2 a_5 + Y^2 \alpha_1^2 a_4 + Z^2 \alpha_3^2 a_6 + \\ \quad \quad \quad XY \alpha_1 \alpha_2 a_7 + XZ \alpha_2 \alpha_3 a_9 + YZ \alpha_1 \alpha_3 a_8 \\ \alpha_4 \alpha_3 Z' = (c_0 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3 + \beta_1^2 c_4 + \beta_2^2 c_5 + \beta_3^2 c_6 + \beta_1 \beta_2 c_7 + \beta_1 \beta_3 c_8 + \beta_2 \beta_3 c_9) + \\ \quad (\alpha_2 c_2 + 2\alpha_2 \beta_2 c_5 + \alpha_2 \beta_1 c_7 + \alpha_2 \beta_3 c_9) X + (\alpha_1 c_1 + 2\alpha_1 \beta_1 c_4 + \alpha_1 \beta_2 c_7 + \alpha_1 \beta_3 c_8) Y + \\ \quad (\alpha_3 c_3 + \beta_1 \alpha_3 c_8 + 2\alpha_3 \beta_3 c_6 + \alpha_3 \beta_2 c_9) Z + X^2 \alpha_2^2 c_5 + Y^2 \alpha_1^2 c_4 + Z^2 \alpha_3^2 c_6 + \\ \quad \quad \quad XY \alpha_1 \alpha_2 c_7 + XZ \alpha_2 \alpha_3 c_9 + YZ \alpha_1 \alpha_3 c_8 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.12) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$, doivent vérifier les équations suivantes :

$$b_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 + \beta_1^2 b_4 + \beta_2^2 b_5 + \beta_3^2 b_6 + \beta_1 \beta_2 b_7 + \beta_1 \beta_3 b_8 + \beta_2 \beta_3 b_9 = 0$$

$$\alpha_2 b_2 + 2\alpha_2 \beta_2 b_5 + \alpha_2 \beta_1 b_7 + \alpha_2 \beta_3 b_9 = -\alpha_4 \alpha_2 \sigma,$$

$$\alpha_1 b_1 + 2\alpha_1 \beta_1 b_4 + \alpha_1 \beta_2 b_7 + \alpha_1 \beta_3 b_8 = \alpha_4 \alpha_2 \sigma,$$

$$\alpha_3 b_3 + \beta_1 \alpha_3 b_8 + 2\alpha_3 \beta_3 b_6 + \alpha_3 \beta_2 b_9 = 0,$$

$$\alpha_2^2 b_5 = 0, \quad \alpha_1^2 b_4 = 0, \quad \alpha_3^2 b_6 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 b_7 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 b_9 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_3 b_8 = 0,$$

$$a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \beta_1^2 a_4 + \beta_2^2 a_5 + \beta_3^2 a_6 + \beta_1 \beta_2 a_7 + \beta_1 \beta_3 a_8 + \beta_2 \beta_3 a_9 = 0,$$

$$\alpha_2 a_2 + 2\alpha_2 \beta_2 a_5 + \alpha_2 \beta_1 a_7 + \alpha_2 \beta_3 a_9 = \alpha_4 \alpha_1 \rho,$$

$$\alpha_1 a_1 + 2\alpha_1 \beta_1 a_4 + \alpha_1 \beta_2 a_7 + \alpha_1 \beta_3 a_8 = -\alpha_4 \alpha_1,$$

$$\alpha_3 a_3 + \beta_1 \alpha_3 a_8 + 2\alpha_3 \beta_3 a_6 + \alpha_3 \beta_2 a_9 = 0,$$

$$\alpha_2^2 a_5 = 0, \alpha_1^2 a_4 = 0, \alpha_3^2 a_6 = 0, \alpha_1 \alpha_2 a_7 = 0, \alpha_2 \alpha_3 a_9 = -\alpha_4 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_3 a_8 = 0,$$

$$c_0 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3 + \beta_1^2 c_4 + \beta_2^2 c_5 + \beta_3^2 c_6 + \beta_1 \beta_2 c_7 + \beta_1 \beta_3 c_8 + \beta_2 \beta_3 c_9 = 0,$$

$$\alpha_2 c_2 + 2\alpha_2 \beta_2 c_5 + \alpha_2 \beta_1 c_7 + \alpha_2 \beta_3 c_9 = 0,$$

$$\alpha_1 c_1 + 2\alpha_1 \beta_1 c_4 + \alpha_1 \beta_2 c_7 + \alpha_1 \beta_3 c_8 = 0,$$

$$\alpha_3 c_3 + \beta_1 \alpha_3 c_8 + 2\alpha_3 \beta_3 c_6 + \alpha_3 \beta_2 c_9 = -\beta \alpha_4 \alpha_3,$$

$$\alpha_2^2 c_5 = 0, \alpha_1^2 c_4 = 0, \alpha_3^2 c_6 = 0, \alpha_1 \alpha_2 c_7 = \alpha_4 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3 c_9 = 0, \alpha_1 \alpha_3 c_8 = 0.$$

Alors on trouve

$$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0, b_1 \neq 0,$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, a_9 \neq 0, a_1 \neq 0,$$

$$c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, c_7 \neq 0, c_3 \neq 0,$$

$$\frac{c_1}{c_7} = \frac{a_3}{a_9}, a_9 c_7 < 0,$$

$$b_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 = 0,$$

$$b_0 - b_1 \frac{c_2}{c_7} - b_2 \frac{c_1}{c_7} = 0,$$

$$a_0 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \beta_2 \beta_3 a_9 = 0,$$

$$a_0 - \frac{a_3 c_0}{c_3} - \frac{a_1 c_2}{c_7} - \frac{a_2 c_1}{c_7} + \frac{a_3 c_1 c_2}{c_3 c_7} + \frac{c_1 c_0 a_9}{c_3 c_7} - \frac{c_1^2 c_2 a_9}{c_3 c_7^2} = 0,$$

$$a_0 - \frac{c_2}{c_7} a_1 - \frac{c_1}{c_7} a_2 + \frac{a_3 c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} a_3 - \frac{c_1 a_9 c_1 c_2}{c_7 c_3 c_7} + \frac{c_0 c_1}{c_3 c_7} a_9,$$

$$\alpha_1 = \left| \frac{a_1 b_2}{b_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9 c_7}}, \quad \alpha_2 = -\frac{b_1}{b_2} \left| \frac{a_1 b_2}{b_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9 c_7}}, \quad \alpha_3 = -\frac{a_1 b_2}{b_1 a_9}, \quad \alpha_4 = -a_1,$$

$$\beta_1 = -\frac{c_2}{c_7}, \quad \beta_2 = -\frac{c_1}{c_7}, \quad \beta_3 = \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3}.$$

Avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_9 y z \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y \\ z' = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_7 x y \end{cases} \quad (5.13)$$

et la transformation linéaire (5.11) s'écrit :

$$x = \left(\left| \frac{a_1 b_2}{b_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{c_2}{c_7} \right), \quad y = \left(-\frac{b_1}{b_2} \left| \frac{a_1 b_2}{b_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{c_1}{c_7} \right),$$

$$z = \left(-\frac{a_1 b_2}{b_1 a_9} Z + \frac{c_1 c_2}{c_3 c_7} - \frac{c_0}{c_3} \right), \quad \tau = -a_1 t$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.13) devient :

$$\begin{cases} \frac{a_1^2}{\sqrt{-a_9 c_7}} X' = b_0 - b_1 \frac{c_2}{c_7} - b_2 \frac{c_1}{c_7} - X a_1 \frac{b_2}{\sqrt{-a_9 c_7}} + Y a_1 \frac{b_2}{\sqrt{-a_9 c_7}}, \\ -\frac{a_1^2 b_2}{b_1 \sqrt{-a_9 c_7}} Y' = a_0 - a_3 \frac{c_0}{c_3} - a_1 \frac{c_2}{c_7} - a_2 \frac{c_1}{c_7} + a_3 c_1 \frac{c_2}{c_3 c_7} + c_0 \frac{c_1 a_9}{c_3 c_7} - c_1^2 \frac{c_2 a_9}{c_3 c_7^2} - X a_1 \frac{a_2}{\sqrt{-a_9 c_7}} + Y \frac{a_1^2}{b_1} \frac{b_2}{\sqrt{-a_9 c_7}} + \\ X a_1 \frac{c_0}{c_3} \frac{a_9}{\sqrt{-a_9 c_7}} + X Z \frac{a_1^2}{b_1} \frac{b_2}{\sqrt{-a_9 c_7}} - Z a_1 \frac{a_3}{b_1} \frac{b_2}{a_9} + Z \frac{a_1}{b_1} b_2 \frac{c_1}{c_7} - X a_1 c_1 \frac{c_2}{c_3} \frac{a_9}{\sqrt{-a_9 c_7}}, \\ \frac{a_1^2 b_2}{b_1 a_9} Z' = X Y \frac{a_1^2}{b_1 a_9} - Z \frac{a_1}{b_1} b_2 \frac{c_3}{a_9}, \end{cases}$$

après les calculs on trouve le système :

$$\begin{cases} X' = -\frac{b_2}{a_1} X + \frac{b_2}{a_1} Y \\ Y' = \left(-\frac{c_0}{c_3} \frac{b_1 a_9}{b_2 a_1} + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} + \frac{c_2}{c_3} \frac{b_1 c_1 a_9}{b_2 c_7 a_1} \right) X - Y - X Z \\ Z' = -\frac{c_3}{a_1} Z + X Y \end{cases}$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{b_2}{a_1}, \quad \rho = -\frac{c_0}{c_3} \frac{b_1 a_9}{b_2 a_1} + \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1} + \frac{c_2}{c_3} \frac{b_1 c_1 a_9}{b_2 c_7 a_1}, \quad \beta = \frac{c_3}{a_1}.$$

■

Théorème 5.4 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \\ b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, \\ c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0, \\ a_1 \neq 0, a_9 \neq 0, b_2 \neq 0, b_8 \neq 0, c_1 \neq 0, c_3 \neq 0, \\ a_9 b_8 < 0, \frac{b_1}{b_8} = \frac{a_2}{a_9}, c_0 - \frac{b_1 c_3}{b_8} - \frac{b_3 c_1}{b_8} = 0, \\ a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} - \frac{a_1 b_3}{b_8} - \frac{a_3 b_1}{b_8} + \frac{a_2 b_1 b_3}{b_8 b_2} + \frac{a_9 b_1 b_0}{b_8 b_2} - \frac{a_9 b_3 b_1^2}{b_2 b_8^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = \alpha_1 Y + \beta_1, \quad y = \alpha_2 Z + \beta_2, \quad z = \alpha_3 X + \beta_3, \quad \tau = \alpha_4 t \quad (5.15)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le système (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 \alpha_3 X' = (c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0) + \\ \quad (c_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 X \alpha_3 \beta_3 + c_3 X \alpha_3 + c_8 X \beta_1 \alpha_3) + \\ (2c_4 Y \alpha_1 \beta_1 + c_7 Y \alpha_1 \beta_2 + c_8 Y \alpha_1 \beta_3 + c_1 Y \alpha_1) + (c_7 Z \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 Z \alpha_2 \beta_2 + c_9 Z \alpha_2 \beta_3 + c_2 Z \alpha_2) + \\ \quad c_6 X^2 \alpha_3^2 + c_4 Y^2 \alpha_1^2 + c_5 Z^2 \alpha_2^2 + c_8 X Y \alpha_1 \alpha_3 + c_9 X Z \alpha_2 \alpha_3 + c_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2 \\ \quad c_7 (\alpha_1 Y + \beta_1) (\alpha_2 Z + \beta_2) + c_8 (\alpha_1 Y + \beta_1) (\alpha_3 X + \beta_3) + c_9 (\alpha_2 Z + \beta_2) (\alpha_3 X + \beta_3) \\ \alpha_4 \alpha_1 Y' = (a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0) + \\ \quad (a_8 X \beta_1 \alpha_3 + a_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2a_6 X \alpha_3 \beta_3 + a_3 X \alpha_3) + \\ (2a_4 Y \alpha_1 \beta_1 + a_7 Y \alpha_1 \beta_2 + a_8 Y \alpha_1 \beta_3 + a_1 Y \alpha_1) + (a_7 Z \alpha_2 \beta_1 + 2a_5 Z \alpha_2 \beta_2 + a_9 Z \alpha_2 \beta_3 + a_2 Z \alpha_2) + \\ \quad a_6 X^2 \alpha_3^2 + a_4 Y^2 \alpha_1^2 + a_5 Z^2 \alpha_2^2 + a_8 X Y \alpha_1 \alpha_3 + a_9 X Z \alpha_2 \alpha_3 + a_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2 \\ \quad a_7 (\alpha_1 Y + \beta_1) (\alpha_2 Z + \beta_2) + a_8 (\alpha_1 Y + \beta_1) (\alpha_3 X + \beta_3) + a_9 (\alpha_2 Z + \beta_2) (\alpha_3 X + \beta_3) \\ \alpha_4 \alpha_2 Z' = (b_4 \beta_1^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_1 \beta_1 + b_5 \beta_2^2 + b_9 \beta_2 \beta_3 + b_2 \beta_2 + b_6 \beta_3^2 + b_3 \beta_3 + b_0) + \\ \quad (b_8 X \beta_1 \alpha_3 + b_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2b_6 X \alpha_3 \beta_3 + b_3 X \alpha_3) + \\ (2b_4 Y \alpha_1 \beta_1 + b_7 Y \alpha_1 \beta_2 + b_8 Y \alpha_1 \beta_3 + b_1 Y \alpha_1) + (b_7 Z \alpha_2 \beta_1 + 2b_5 Z \alpha_2 \beta_2 + b_9 Z \alpha_2 \beta_3 + b_2 Z \alpha_2) + \\ \quad b_6 X^2 \alpha_3^2 + b_4 Y^2 \alpha_1^2 + b_5 Z^2 \alpha_2^2 + b_8 X Y \alpha_1 \alpha_3 + b_9 X Z \alpha_2 \alpha_3 + b_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2 \end{array} \right. \quad (5.16)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.16) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$ doivent vérifier les équations suivantes :

$$c_4\beta_1^2 + c_7\beta_1\beta_2 + c_8\beta_1\beta_3 + c_1\beta_1 + c_5\beta_2^2 + c_9\beta_2\beta_3 + c_2\beta_2 + c_6\beta_3^2 + c_3\beta_3 + c_0 = 0,$$

$$c_9\alpha_3\beta_2 + 2c_6\alpha_3\beta_3 + c_3\alpha_3 + c_8\beta_1\alpha_3 = -\sigma\alpha_4\alpha_3,$$

$$2c_4\alpha_1\beta_1 + c_7\alpha_1\beta_2 + c_8\alpha_1\beta_3 + c_1\alpha_1 = \sigma\alpha_4\alpha_3,$$

$$c_7\alpha_2\beta_1 + 2c_5\alpha_2\beta_2 + c_9\alpha_2\beta_3 + c_2\alpha_2 = 0,$$

$$c_6\alpha_3^2 = 0, c_4\alpha_1^2 = 0, c_5\alpha_2^2 = 0, c_8\alpha_1\alpha_3 = 0, c_9\alpha_2\alpha_3 = 0, c_7\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

$$a_4\beta_1^2 + a_7\beta_1\beta_2 + a_8\beta_1\beta_3 + a_1\beta_1 + a_5\beta_2^2 + a_9\beta_2\beta_3 + a_2\beta_2 + a_6\beta_3^2 + a_3\beta_3 + a_0 = 0,$$

$$a_8\beta_1\alpha_3 + a_9\alpha_3\beta_2 + 2a_6\alpha_3\beta_3 + a_3\alpha_3 = \rho\alpha_4\alpha_1,$$

$$2a_4\alpha_1\beta_1 + a_7\alpha_1\beta_2 + a_8\alpha_1\beta_3 + a_1\alpha_1 = -\alpha_4\alpha_1,$$

$$a_7\alpha_2\beta_1 + 2a_5\alpha_2\beta_2 + a_9\alpha_2\beta_3 + a_2\alpha_2 = 0,$$

$$a_6\alpha_3^2 = 0, a_4\alpha_1^2 = 0, a_5\alpha_2^2 = 0, a_8\alpha_1\alpha_3 = 0, a_9\alpha_2\alpha_3 = -\alpha_4\alpha_1, a_7\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

$$b_4\beta_1^2 + b_7\beta_1\beta_2 + b_8\beta_1\beta_3 + b_1\beta_1 + b_5\beta_2^2 + b_9\beta_2\beta_3 + b_2\beta_2 + b_6\beta_3^2 + b_3\beta_3 + b_0 = 0,$$

$$b_8\beta_1\alpha_3 + b_9\alpha_3\beta_2 + 2b_6\alpha_3\beta_3 + b_3\alpha_3 = 0,$$

$$2b_4\alpha_1\beta_1 + b_7\alpha_1\beta_2 + b_8\alpha_1\beta_3 + b_1\alpha_1 = 0,$$

$$b_7\alpha_2\beta_1 + 2b_5\alpha_2\beta_2 + b_9\alpha_2\beta_3 + b_2\alpha_2 = -\beta\alpha_4\alpha_2,$$

$$b_6\alpha_3^2 = 0, b_4\alpha_1^2 = 0, b_5\alpha_2^2 = 0, b_8\alpha_1\alpha_3 = \alpha_4\alpha_2, b_9\alpha_2\alpha_3 = 0, b_7\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Alors on trouve :

$$c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0, c_1 \neq 0, c_3 \neq 0,$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \quad a_9 \neq 0,$$

$$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, \quad b_8 \neq 0,$$

$$\frac{b_1}{b_8} = \frac{a_2}{a_9}, \quad a_9 b_8 > 0,$$

$$c_0 - b_1 \frac{c_3}{b_8} - b_3 \frac{c_1}{b_8},$$

$$a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2} - \frac{a_1 b_3}{b_8} - \frac{a_3 b_1}{b_8} + \frac{a_2 b_1 b_3}{b_8 b_2} + \frac{a_9 b_1 b_0}{b_8 b_2} - \frac{b_1 a_9 b_1 b_3}{b_8 b_8 b_2} = 0,$$

$$\beta_2 = \frac{b_1 b_3}{b_8 b_2} - \frac{b_0}{b_2}, \beta_1 = -\frac{b_3}{b_8}, \beta_3 = -\frac{b_1}{b_8},$$

$$\alpha_4 = -a_1, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1 c_3}{a_9 c_1}, \quad \alpha_3 = -\left| \frac{a_1 c_3}{c_1} \right| \frac{1}{c_3 \sqrt{-b_8 a_9}}, \quad \alpha_1 = \left| \frac{a_1 c_3}{c_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-b_8 a_9}}.$$

Avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_9 y z \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_8 x z \\ z' = c_0 + c_1 x + c_3 z \end{cases} \quad (5.17)$$

et la transformation linéaire (5.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= \left(\left| \frac{a_1 c_3}{c_1} \right| \frac{1}{\sqrt{-b_8 a_9}} Y - \frac{b_3}{b_8} \right), \quad y = \left(-\frac{a_1 c_3}{a_9 c_1} Z + \frac{b_1 b_3}{b_8 b_2} - \frac{b_0}{b_2} \right), \\ z &= \left(-\left| \frac{a_1 c_3}{c_1} \right| \frac{c_1}{c_3} \frac{1}{\sqrt{-b_8 a_9}} X - \frac{b_1}{b_8} \right), \quad \tau = -a_1 t, \end{aligned}$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.17) devient ;

$$\begin{cases} \frac{a_1^2}{\sqrt{-b_8 a_9}} X' = -X \frac{a_1 c_3}{\sqrt{-a_9 b_8}} + Y \frac{a_1 c_3}{\sqrt{-a_9 b_8}}, \\ -\frac{a_1^2 c_3}{c_1} \frac{1}{\sqrt{-b_8 a_9}} Y' = -X a_1 \frac{a_3}{\sqrt{-a_9 b_8}} + Y \frac{a_1^2}{c_1} \frac{c_3}{\sqrt{-a_9 b_8}} + X a_1 \frac{b_0}{b_2} \frac{a_9}{\sqrt{-a_9 b_8}} + \\ X Z \frac{a_1^2}{c_1} \frac{c_3}{\sqrt{-a_9 b_8}} - Z a_1 \frac{a_2}{c_1} \frac{c_3}{a_9} + Z a_1 \frac{b_1}{c_1} \frac{c_3}{b_8} - X a_1 \frac{b_1}{b_2} b_3 \frac{a_9}{b_8 \sqrt{-a_9 b_8}}, \\ \frac{a_1^2 c_3}{a_9 c_1} Z' = X Y \frac{a_1^2}{c_1} \frac{c_3}{a_9} - Z a_1 \frac{b_2}{c_1} \frac{c_3}{a_9}, \end{cases}$$

après les calculs on trouve :

$$\begin{cases} X' = -\frac{c_3}{a_1}X + \frac{c_3}{a_1}Y \\ Y' = \left(\frac{a_3c_1}{a_1c_3} - \frac{b_0}{b_2} \frac{c_1a_9}{a_1c_3} + \frac{b_1}{b_2} \frac{b_3c_1a_9}{b_8a_1c_3} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -\frac{b_2}{a_1}Z + XY \end{cases}$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{c_3}{a_1}, \quad \rho = \frac{c_1a_9b_1b_3}{c_3a_1b_8b_2} - \frac{c_1a_9b_0}{c_3a_1b_2} + \frac{c_1a_3}{c_3a_1}, \quad \beta = \frac{b_2}{a_1}.$$

■

Théorème 5.5 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \\ b_1 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0, \\ c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, \\ a_9 \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad b_3 \neq 0, \quad c_7 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \\ a_9c_7 < 0, \quad \frac{c_1}{c_7} = \frac{a_3}{a_9}, \quad b_0 - \frac{a_2b_3}{a_9} - \frac{a_3b_2}{a_9} = 0, \\ c_0 - \frac{c_1a_0}{a_1} - \frac{a_3c_2}{a_9} - \frac{a_2c_3}{a_9} + \frac{a_2a_3c_1}{a_1a_9} + \frac{a_0a_3c_7}{a_1a_9} - \frac{c_7a_2a_3^2}{a_1a_9^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = \alpha_1Z + \beta_1, \quad y = \alpha_2X + \beta_2, \quad z = \alpha_3Y + \beta_3, \quad \tau = \alpha_4t, \quad (5.19)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le système (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_4 \alpha_2 X' = (b_4 \beta_1^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_1 \beta_1 + b_5 \beta_2^2 + b_9 \beta_2 \beta_3 + b_2 \beta_2 + b_6 \beta_3^2 + b_3 \beta_3 + b_0) + \\
 \quad (b_7 \alpha_2 \beta_1 + 2b_5 \alpha_2 \beta_2 + b_9 \alpha_2 \beta_3 + b_2 \alpha_2) X + \\
 \quad (b_8 \beta_1 \alpha_3 + b_9 \alpha_3 \beta_2 + 2b_6 \alpha_3 \beta_3 + b_3 \alpha_3) Y + (2b_4 \alpha_1 \beta_1 + b_7 \alpha_1 \beta_2 + b_8 \alpha_1 \beta_3 + b_1 \alpha_1) Z + \\
 \quad b_5 X^2 \alpha_2^2 + b_6 Y^2 \alpha_3^2 + b_4 Z^2 \alpha_1^2 + b_9 XY \alpha_2 \alpha_3 + b_7 XZ \alpha_1 \alpha_2 + b_8 YZ \alpha_1 \alpha_3 \\
 \alpha_4 \alpha_3 Y' = (c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0) + \\
 \quad (c_7 \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 \alpha_2 \beta_2 + c_9 \alpha_2 \beta_3 + c_2 \alpha_2) X + \\
 \quad (c_8 \beta_1 \alpha_3 + c_9 \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_3 \alpha_3) Y + (2c_4 \alpha_1 \beta_1 + c_7 \alpha_1 \beta_2 + c_8 \alpha_1 \beta_3 + c_1 \alpha_1) Z + \\
 \quad c_5 X^2 \alpha_2^2 + c_6 Y^2 \alpha_3^2 + c_4 Z^2 \alpha_1^2 + c_9 XY \alpha_2 \alpha_3 + c_7 XZ \alpha_1 \alpha_2 + c_8 YZ \alpha_1 \alpha_3 \\
 \alpha_1 \alpha_4 Z' = (a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0) + \\
 \quad (a_7 \alpha_2 \beta_1 + 2a_5 \alpha_2 \beta_2 + a_9 \alpha_2 \beta_3 + a_2 \alpha_2) X + \\
 \quad (a_8 \beta_1 \alpha_3 + a_9 \alpha_3 \beta_2 + 2a_6 \alpha_3 \beta_3 + a_3 \alpha_3) Y + (2a_4 \alpha_1 \beta_1 + a_7 \alpha_1 \beta_2 + a_8 \alpha_1 \beta_3 + a_1 \alpha_1) Z + \\
 \quad a_5 X^2 \alpha_2^2 + a_6 Y^2 \alpha_3^2 + a_4 Z^2 \alpha_1^2 + a_9 XY \alpha_2 \alpha_3 + a_7 XZ \alpha_1 \alpha_2 + a_8 YZ \alpha_1 \alpha_3
 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.20) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$, doivent vérifier les équations suivantes :

$$b_4 \beta_1^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_1 \beta_1 + b_5 \beta_2^2 + b_9 \beta_2 \beta_3 + b_2 \beta_2 + b_6 \beta_3^2 + b_3 \beta_3 + b_0 = 0,$$

$$b_7 \alpha_2 \beta_1 + 2b_5 \alpha_2 \beta_2 + b_9 \alpha_2 \beta_3 + b_2 \alpha_2 = -\sigma \alpha_4 \alpha_2,$$

$$b_8 \beta_1 \alpha_3 + b_9 \alpha_3 \beta_2 + 2b_6 \alpha_3 \beta_3 + b_3 \alpha_3 = \sigma \alpha_4 \alpha_2,$$

$$2b_4 \alpha_1 \beta_1 + b_7 \alpha_1 \beta_2 + b_8 \alpha_1 \beta_3 + b_1 \alpha_1 = 0,$$

$$b_5 \alpha_2^2 = 0, \quad b_6 \alpha_3^2 = 0, \quad b_4 \alpha_1^2 = 0, \quad b_9 \alpha_2 \alpha_3 = 0, \quad b_7 \alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad b_8 \alpha_1 \alpha_3 = 0,$$

$$c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0 = 0,$$

$$c_7 \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 \alpha_2 \beta_2 + c_9 \alpha_2 \beta_3 + c_2 \alpha_2 = \rho \alpha_4 \alpha_3,$$

$$c_8 \beta_1 \alpha_3 + c_9 \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_3 \alpha_3 = -\alpha_4 \alpha_3,$$

$$\begin{aligned}
& 2c_4\alpha_1\beta_1 + c_7\alpha_1\beta_2 + c_8\alpha_1\beta_3 + c_1\alpha_1 = 0, \\
& c_5\alpha_2^2 = 0, \quad c_6\alpha_3^2 = 0, \quad c_4\alpha_1^2 = 0, \quad c_9\alpha_2\alpha_3 = 0, \quad c_7\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_4\alpha_3, \quad c_8\alpha_1\alpha_3 = 0, \\
& a_4\beta_1^2 + a_7\beta_1\beta_2 + a_8\beta_1\beta_3 + a_1\beta_1 + a_5\beta_2^2 + a_9\beta_2\beta_3 + a_2\beta_2 + a_6\beta_3^2 + a_3\beta_3 + a_0 = 0, \\
& a_7\alpha_2\beta_1 + 2a_5\alpha_2\beta_2 + a_9\alpha_2\beta_3 + a_2\alpha_2 = 0, \\
& a_8\beta_1\alpha_3 + a_9\alpha_3\beta_2 + 2a_6\alpha_3\beta_3 + a_3\alpha_3 = 0, \\
& 2a_4\alpha_1\beta_1 + a_7\alpha_1\beta_2 + a_8\alpha_1\beta_3 + a_1\alpha_1 = -\beta\alpha_1\alpha_4, \\
& a_5\alpha_2^2 = 0, \quad a_6\alpha_3^2 = 0, \quad a_4\alpha_1^2 = 0, \quad a_9\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_4, \quad a_7\alpha_1\alpha_2 = 0, \quad a_8\alpha_1\alpha_3 = 0.
\end{aligned}$$

Alors on trouve

$$\begin{aligned}
& b_1 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0, \quad b_2 \neq 0, \\
& c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = c_9 = 0, \quad c_7 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \\
& a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \quad a_9 \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \\
& \frac{c_1}{c_7} = \frac{a_3}{a_9}, \quad a_9 b_7 > 0, \quad b_0 - \frac{a_2 b_3}{a_9} - \frac{a_3 b_2}{a_9} = 0, \\
& -\frac{a_2 a_3^2}{a_1 a_9^2} c_7 + \frac{a_0 a_3}{a_1 a_9} c_7 + \frac{a_2 a_3}{a_1} \frac{c_1}{a_9} - \frac{c_1 a_0}{a_1} - \frac{a_3 c_2}{a_9} - \frac{a_2 c_3}{a_9} + c_0 = 0, \\
& \beta_1 = \frac{a_2 a_3}{a_1 a_9} - \frac{a_0}{a_1}, \quad \beta_2 = -\frac{a_3}{a_9}, \quad \beta_3 = -\frac{a_2}{a_9}, \\
& \alpha_4 = -c_3, \quad \alpha_1 = -\frac{b_2 c_3}{c_7 b_3}, \quad \alpha_2 = \frac{|c_3|}{\sqrt{-a_9 c_7}}, \quad \alpha_3 = -\frac{b_2 |c_3|}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}}
\end{aligned}$$

avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_9 y z \\ y' = b_0 + b_2 y + b_3 z \\ z' = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_7 x y \end{cases} \quad (5.21)$$

et la transformation linéaire (5.19) s'écrit :

$$x = \left(-\frac{b_2 c_3}{c_7 b_3} Z + \frac{a_2 a_3}{a_1 a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right), \quad y = \left(\frac{|c_3|}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right), \quad z = \left(-\frac{b_2 |c_3|}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{a_2}{a_9} \right), \quad \tau = -c_3 t,$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.21) devient ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 \alpha_2 X' = b_0 + b_2 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right) + b_3 \left(-\frac{b_2 c_3}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{a_2}{a_9} \right) \\ \alpha_4 \alpha_3 Y' = c_0 + c_1 \left(-\frac{b_2 c_3}{c_7 b_3} Z + \frac{a_2 a_3}{a_1 a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) + c_2 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right) + c_3 \left(-\frac{b_2 c_3}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{a_2}{a_9} \right) + \\ \quad c_7 \left(-\frac{b_2 c_3}{c_7 b_3} Z + \frac{a_2 a_3}{a_1 a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) \left(\frac{c_3}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right) \\ \alpha_1 \alpha_4 Z' = a_0 + a_1 \left(-\frac{b_2 c_3}{c_7 b_3} Z + \frac{a_2 a_3}{a_1 a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) + a_2 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right) + a_3 \left(-\frac{b_2 c_3}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{a_2}{a_9} \right) + \\ \quad a_9 \left(\frac{c_3}{\sqrt{-a_9 c_7}} X - \frac{a_3}{a_9} \right) \left(-\frac{b_2 c_3}{b_3 \sqrt{-a_9 c_7}} Y - \frac{a_2}{a_9} \right) \end{array} \right.$$

après les calculs on trouve le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = -\frac{b_2}{c_3} X + \frac{b_2}{c_3} Y \\ Y' = \left(\frac{b_3 c_7 a_2 a_3}{b_2 c_3 a_1 a_9} - \frac{b_3 c_7 a_0}{b_2 c_3 a_1} + \frac{b_3 c_2}{b_2 c_3} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -\frac{a_1}{c_3} Z + XY \end{array} \right.$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{b_2}{c_3}, \quad \rho = \frac{b_3 c_7 a_2 a_3}{b_2 c_3 a_1 a_9} - \frac{b_3 c_7 a_0}{b_2 c_3 a_1} + \frac{b_3 c_2}{b_2 c_3}, \quad \beta = \frac{a_1}{c_3}.$$

■

Théorème 5.6 *Le système (5.1) est équivalent au système de Lorenz si :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, \\ b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, \\ c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0, \\ a_1 \neq 0, \quad a_9 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad b_8 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 \neq 0, \\ a_9 b_8 < 0, \quad \frac{b_1}{b_8} = \frac{a_2}{a_9}, \quad c_0 - \frac{a_2 c_3}{a_9} - \frac{a_3 c_2}{a_9} = 0, \\ b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} - \frac{a_2 b_3}{a_9} - \frac{a_3 b_2}{a_9} + \frac{a_2 a_3 b_1}{a_1 a_9} + \frac{a_0 b_8 a_2}{a_1 a_9} - \frac{b_8 a_3 a_2^2}{a_1 a_9^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Preuve. Avec la transformation linéaire suivante :

$$x = \alpha_1 Z + \beta_1, \quad y = \alpha_2 Y + \beta_2, \quad z = \alpha_3 X + \beta_3, \quad \tau = \alpha_4 t \quad (5.23)$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$,

le système (5.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_4 \alpha_3 X' = c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0 + \\ (c_8 X \beta_1 \alpha_3 + c_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 X \alpha_3 \beta_3 + c_3 X \alpha_3) + (c_7 Y \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 Y \alpha_2 \beta_2 + c_9 Y \alpha_2 \beta_3 + c_2 Y \alpha_2) + \\ (2c_4 Z \alpha_1 \beta_1 + c_7 Z \alpha_1 \beta_2 + c_8 Z \alpha_1 \beta_3 + c_1 Z \alpha_1) + \\ c_6 X^2 \alpha_3^2 + c_5 Y^2 \alpha_2^2 + c_4 Z^2 \alpha_1^2 + c_9 X Y \alpha_2 \alpha_3 + c_8 X Z \alpha_1 \alpha_3 + c_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2, \\ \alpha_4 \alpha_2 Y' = b_4 \beta_1^2 + b_7 \beta_1 \beta_2 + b_8 \beta_1 \beta_3 + b_1 \beta_1 + b_5 \beta_2^2 + b_9 \beta_2 \beta_3 + b_2 \beta_2 + b_6 \beta_3^2 + b_3 \beta_3 + b_0 + \\ (b_8 X \beta_1 \alpha_3 + b_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2b_6 X \alpha_3 \beta_3 + b_3 X \alpha_3) + (b_7 Y \alpha_2 \beta_1 + 2b_5 Y \alpha_2 \beta_2 + b_9 Y \alpha_2 \beta_3 + b_2 Y \alpha_2) + \\ (2b_4 Z \alpha_1 \beta_1 + b_7 Z \alpha_1 \beta_2 + b_8 Z \alpha_1 \beta_3 + b_1 Z \alpha_1) + \\ b_6 X^2 \alpha_3^2 + b_5 Y^2 \alpha_2^2 + b_4 Z^2 \alpha_1^2 + b_9 X Y \alpha_2 \alpha_3 + b_8 X Z \alpha_1 \alpha_3 + b_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2, \\ \alpha_4 \alpha_1 Z' = a_4 \beta_1^2 + a_7 \beta_1 \beta_2 + a_8 \beta_1 \beta_3 + a_1 \beta_1 + a_5 \beta_2^2 + a_9 \beta_2 \beta_3 + a_2 \beta_2 + a_6 \beta_3^2 + a_3 \beta_3 + a_0 + \\ (a_8 X \beta_1 \alpha_3 + a_9 X \alpha_3 \beta_2 + 2a_6 X \alpha_3 \beta_3 + a_3 X \alpha_3) + (a_7 Y \alpha_2 \beta_1 + 2a_5 Y \alpha_2 \beta_2 + a_9 Y \alpha_2 \beta_3 + a_2 Y \alpha_2) + \\ (2a_4 Z \alpha_1 \beta_1 + a_7 Z \alpha_1 \beta_2 + a_8 Z \alpha_1 \beta_3 + a_1 Z \alpha_1) + \\ a_6 X^2 \alpha_3^2 + a_5 Y^2 \alpha_2^2 + a_4 Z^2 \alpha_1^2 + a_9 X Y \alpha_2 \alpha_3 + a_8 X Z \alpha_1 \alpha_3 + a_7 Y Z \alpha_1 \alpha_2 \end{array} \right. \quad (5.24)$$

nous cherchons des conditions suffisantes pour le système (5.24) lorsqu'il sera équivalent au système de Lorenz. Pour cela les paramètres $(a_i, b_i, c_i)_{0 \leq i \leq 9}$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}$, doivent vérifier les équations suivantes :

$$c_4 \beta_1^2 + c_7 \beta_1 \beta_2 + c_8 \beta_1 \beta_3 + c_1 \beta_1 + c_5 \beta_2^2 + c_9 \beta_2 \beta_3 + c_2 \beta_2 + c_6 \beta_3^2 + c_3 \beta_3 + c_0 = 0,$$

$$c_8 \beta_1 \alpha_3 + c_9 \alpha_3 \beta_2 + 2c_6 \alpha_3 \beta_3 + c_3 \alpha_3 = -\sigma \alpha_4 \alpha_3,$$

$$c_7 \alpha_2 \beta_1 + 2c_5 \alpha_2 \beta_2 + c_9 \alpha_2 \beta_3 + c_2 \alpha_2 = \sigma \alpha_4 \alpha_3,$$

$$2c_4 \alpha_1 \beta_1 + c_7 \alpha_1 \beta_2 + c_8 \alpha_1 \beta_3 + c_1 \alpha_1 = 0,$$

$$c_6 \alpha_3^2 = 0, \quad c_5 \alpha_2^2 = 0, \quad c_4 \alpha_1^2 = 0, \quad c_9 \alpha_2 \alpha_3 = 0, \quad c_8 \alpha_1 \alpha_3 = 0, \quad c_7 \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

$$b_4\beta_1^2 + b_7\beta_1\beta_2 + b_8\beta_1\beta_3 + b_1\beta_1 + b_5\beta_2^2 + b_9\beta_2\beta_3 + b_2\beta_2 + b_6\beta_3^2 + b_3\beta_3 + b_0 = 0,$$

$$b_8\beta_1\alpha_3 + b_9\alpha_3\beta_2 + 2b_6\alpha_3\beta_3 + b_3\alpha_3 = \rho\alpha_4\alpha_2,$$

$$b_7\alpha_2\beta_1 + 2b_5\alpha_2\beta_2 + b_9\alpha_2\beta_3 + b_2\alpha_2 = -\alpha_4\alpha_2,$$

$$2b_4\alpha_1\beta_1 + b_7\alpha_1\beta_2 + b_8\alpha_1\beta_3 + b_1\alpha_1 = 0,$$

$$b_6\alpha_3^2 = 0, b_5\alpha_2^2 = 0, b_4\alpha_1^2 = 0, b_9\alpha_2\alpha_3 = 0, b_8\alpha_1\alpha_3 = -\alpha_4\alpha_2, b_7\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

$$a_4\beta_1^2 + a_7\beta_1\beta_2 + a_8\beta_1\beta_3 + a_1\beta_1 + a_5\beta_2^2 + a_9\beta_2\beta_3 + a_2\beta_2 + a_6\beta_3^2 + a_3\beta_3 + a_0 = 0,$$

$$a_8\beta_1\alpha_3 + a_9\alpha_3\beta_2 + 2a_6\alpha_3\beta_3 + a_3\alpha_3 = 0,$$

$$a_7\alpha_2\beta_1 + 2a_5\alpha_2\beta_2 + a_9\alpha_2\beta_3 + a_2\alpha_2 = 0,$$

$$2a_4\alpha_1\beta_1 + a_7\alpha_1\beta_2 + a_8\alpha_1\beta_3 + a_1\alpha_1 = -\beta\alpha_4\alpha_1,$$

$$a_6\alpha_3^2 = 0, a_5\alpha_2^2 = 0, a_4\alpha_1^2 = 0, a_9\alpha_2\alpha_3 = \alpha_4\alpha_1, a_8\alpha_1\alpha_3 = 0, a_7\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Alors on trouve

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0,$$

$$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_9 = 0, b_8 \neq 0,$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0, a_9 \neq 0,$$

$$a_9b_8 < 0, \frac{b_1}{b_8} = \frac{a_2}{a_9}, c_0 - a_2\frac{c_3}{a_9} - a_3\frac{c_2}{a_9} = 0$$

$$b_0 - \frac{b_1a_0}{a_1} - \frac{a_2b_3}{a_9} - \frac{a_3b_2}{a_9} + \frac{a_2a_3}{a_1} \frac{b_1}{a_9} + \frac{a_0}{a_1} \frac{b_8a_2}{a_9} - \frac{a_2^2}{a_1} \frac{b_8a_3}{a_9^2} = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{a_2a_3}{a_1a_9} - \frac{a_0}{a_1}, \beta_2 = -\frac{a_3}{a_9}, \beta_3 = -\frac{a_2}{a_9},$$

$$\alpha_1 = -\frac{c_3b_2}{b_8c_2}, \alpha_2 = \left| \frac{c_3b_2}{c_2} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}, \alpha_3 = -\frac{c_2}{c_3} \left| \frac{c_3b_2}{c_2} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}, \alpha_4 = -b_2.$$

Avec ces résultats le système (5.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_9yz \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_8xz \\ z' = c_0 + c_2y + c_3z \end{cases} \quad (5.25)$$

et la transformation linéaire (5.23) s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= \left(-\frac{c_3b_2}{b_8c_2}Z + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right), \quad y = \left(\left| \frac{c_3b_2}{c_2} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}Y - \frac{a_3}{a_9} \right), \\ z &= \left(-\frac{c_2}{c_3} \left| \frac{c_3b_2}{c_2} \right| \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right), \quad \tau = -b_2t, \end{aligned}$$

et avec cette transformation linéaire le système (5.25) devient ;

$$\begin{cases} \alpha_4\alpha_3X' = c_0 + c_2 \left(\frac{c_3b_2}{c_2} \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}Y - \frac{a_3}{a_9} \right) + c_3 \left(-\frac{b_2}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right), \\ \alpha_4\alpha_2Y' = b_0 + b_1 \left(-\frac{c_3b_2}{b_8c_2}Z + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) + b_2 \left(\frac{c_3b_2}{c_2} \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}Y - \frac{a_3}{a_9} \right) + \\ b_3 \left(-\frac{b_2}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right) + b_8 \left(-\frac{c_3b_2}{b_8c_2}Z + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) \left(-\frac{b_2}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right), \\ \alpha_4\alpha_1Z' = a_0 + a_1 \left(-\frac{c_3b_2}{b_8c_2}Z + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} - \frac{a_0}{a_1} \right) + a_2 \left(\frac{c_3b_2}{c_2} \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}Y - \frac{a_3}{a_9} \right) + \\ a_3 \left(-\frac{b_2}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right) + a_9 \left(\frac{c_3b_2}{c_2} \frac{1}{\sqrt{-a_9b_8}}Y - \frac{a_3}{a_9} \right) \left(-\frac{b_2}{\sqrt{-a_9b_8}}X - \frac{a_2}{a_9} \right), \end{cases}$$

après les calculs on trouve le système :

$$\begin{cases} X' = -X \frac{c_3}{b_2} + Y \frac{c_3}{b_2} \\ Y' = \left(-\frac{a_0}{a_1} \frac{b_8c_2}{c_3b_2} + \frac{b_3c_2}{c_3b_2} + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} \frac{b_8c_2}{c_3b_2} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -Z \frac{a_1}{b_2} + XY \end{cases}$$

qui a la même forme du système de Lorenz, où les paramètres de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{c_3}{b_2}, \quad \rho = -\frac{a_0}{a_1} \frac{b_8c_2}{c_3b_2} + \frac{b_3c_2}{c_3b_2} + \frac{a_2a_3}{a_1a_9} \frac{b_8c_2}{c_3b_2}, \quad \beta = \frac{a_1}{b_2}.$$

■

5.3 Quelques applications de l'équivalence au système de Lorenz

En plus du système de Chen et de Lü qui vérifient les condition de Théorème 1, Nous illustrons dans cette section quelques d'autres systèmes qui présentent une nouvelle équivalence avec le système de Lorenz.

Exemple 5.1 *Pour le système de Chen (3.6) on a $a_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_1 = c - a$, $b_2 = c$, $b_8 = -1$, $c_3 = -b$, $c_7 = 1$, qui satisfait les conditions du théorème 1, alors la transformation linéaire donne par :*

$$x = |c|X, \quad y = |c|Y, \quad z = -cZ, \quad \tau = -ct; \quad c \neq 0$$

alors le système de Chen devient :

$$\begin{cases} X' = -\frac{a}{c}(Y - X) \\ Y' = (\frac{a}{c} - 1)X - Y - XZ \\ Z' = \frac{b}{c}Z + XY \end{cases}$$

Où les paramètres du système de Lorenz sont :

$$\sigma = -\frac{a}{c}, \quad \rho = \frac{a}{c} - 1, \quad \beta = -\frac{b}{c}.$$

Exemple 5.2 *Dans le système de Lü (3.8) on a $a_1 = -a$, $a_2 = a$, $b_2 = c$, $b_8 = -1$, $c_3 = -b$, $c_7 = 1$, qui satisfait les conditions du théorème 1, alors la transformation linéaire donne par :*

$$x = |c|X, \quad y = |c|Y, \quad z = -cZ, \quad \tau = -ct; \quad c \neq 0$$

alors le système de Lü devient :

$$\begin{cases} X' = -\frac{a}{c}(Y - X) \\ Y' = -Y - XZ \\ Z' = \frac{b}{c}Z + XY \end{cases}$$

Où les paramètres du système de Lorenz sont :

$$\sigma = -\frac{a}{c}, \rho = 0, \beta = -\frac{b}{c}.$$

Exemple 5.3 En 2009, X.F. Li et al. [41] sont désignés un nouveau système chaotique :

$$\begin{cases} x' = -ax + ay \\ y' = -y + xz \\ z' = b - cz - xy \end{cases} \quad (5.26)$$

où a, b et c sont des paramètres réels positifs. On a $a_1 = -a, a_2 = a, b_2 = -1, b_8 = 1, c_0 = b, c_3 = -c, c_7 = -1$, qui satisfait les conditions du théorème 1, alors la transformation linéaire donne par :

$$x = Y, y = X, z = -Z + \frac{b}{c}, \tau = t,; \quad c \neq 0$$

alors le système (5.26) devient :

$$\begin{cases} X' = a(Y - X) \\ Y' = \frac{b}{c}X - Y - XZ \\ Z' = -cZ + XY \end{cases}$$

Où les paramètres du système de Lorenz sont :

$$\sigma = a, \rho = \frac{b}{c}, \beta = c.$$

Exemple 5.4 En 1992, Wang et al. [29] sont désignés un modèle chaotique décrit par la dynamique :

$$\begin{cases} x' = -ax + ay \\ y' = -y - xz \\ z' = -b - z + xy \end{cases} \quad (5.27)$$

où a et b sont des paramètres réels positifs. On a : $a_1 = -a, a_2 = a, b_2 = -1, b_8 = -1, c_0 = -b, c_3 = -1, c_7 = 1$, qui satisfait les conditions du théorème 1, alors la transformation linéaire

donne par :

$$x = Y, \quad y = X, \quad z = Z - b, \quad \tau = t,$$

alors le système (5.27) devient :

$$\begin{cases} X' = a(Y - X) \\ Y' = bX - Y - XZ \\ Z' = -Z + XY \end{cases}$$

Où les paramètres du système de Lorenz sont :

$$\sigma = a, \quad \rho = b, \quad \beta = -1.$$

Exemple 5.5 En 2013, Wang and Chen [26] ont désignés le système suivant :

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y - xz \\ z' = a_{33}z + xy + c \end{cases} \quad (5.28)$$

Si $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$, alors le system (5.28) satisfait les conditions du théorème 1, alors la transformation linéaire donne par :

$$x = |a_{22}|X, \quad y = -\frac{a_{11}|a_{22}|}{a_{12}}Y, \quad z = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}Z - \frac{c}{a_{33}}, \quad \tau = -a_{22}t$$

alors le système (5.28) devient :

$$\begin{cases} X' = \frac{a_{11}}{a_{22}}(Y - X) \\ Y' = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}} + \frac{a_{12}c}{a_{22}a_{11}a_{33}} \right) X - Y - XZ \\ Z' = -\frac{a_{33}}{a_{22}}Z + XY \end{cases}$$

Où les paramètres du système de Lorenz sont :

$$\sigma = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad \rho = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}a_{11}} + \frac{a_{12}c}{a_{22}a_{11}a_{33}}, \quad \beta = -\frac{a_{33}}{a_{22}}.$$

Pour vérifier l'équivalence d'un système au système de Lorenz par la transformation linéaire, on peut suivre la méthode de l'exemple suivant :

Exemple 5.6 *Le système de Sprott C est décrit par [45]*

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -xz \\ z' = y^2 - i \end{cases} \quad (5.29)$$

où i est un paramètre réel, ce système est équivalent au système de Lorenz s'il y a une transformation linéaire

$$x = (\alpha_1 X + \beta_1), \quad y = (\alpha_2 Y + \beta_2), \quad z = (\alpha_3 Z + \beta_3), \quad \tau = \alpha_4 t$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^*$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}$, avec cette transformation linéaire le système (5.29) devient :

$$\begin{cases} X' = -\frac{1}{\alpha_4} X + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_4} y - \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 \alpha_4} \\ Y' = -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} X Z - \frac{\alpha_1 \beta_3}{\alpha_2 \alpha_4} X - \frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_2 \alpha_4} Z - \frac{\beta_1 \beta_3}{\alpha_2 \alpha_4} \\ Z' = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_4 \alpha_3} Y^2 + \frac{2\alpha_2 \beta_2}{\alpha_4 \alpha_3} Y + \frac{\beta_2^2 - i}{\alpha_4 \alpha_3} \end{cases}$$

il est clair que parmi les conditions pour que le système (5.29) soit équivalent au système de Lorenz est $\alpha_2 = 0$ et cela est contradiction avec la définition de la transformation linéaire. Nous trouvons le même type de contradictions si on utilise les formes de la transformation linéaire définies dans les théorèmes 2 à 6.

Pour obtenir d'autres formes de systèmes équivalents au système de Lorenz, cela se fait en utilisant un changement linéaire général,

$$\begin{cases} x = \alpha_{11} X + \alpha_{12} Y + \alpha_{13} Z + \beta_1, \\ y = \alpha_{21} X + \alpha_{22} Y + \alpha_{23} Z + \beta_2, \\ z = \alpha_{31} X + \alpha_{32} Y + \alpha_{33} Z + \beta_3, \\ \tau = \alpha t, \end{cases} \quad (5.30)$$

où $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}^9$, $(\beta_j)_{1 \leq j \leq 3} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, par notre méthode cela conduit à un calcul très compliqué afin de définir les conditions nécessaires à cela. Par conséquent, il est recommandé pour déterminer qu'un système peut être équivalent au système de Lorenz d'appliquer la transformation (5.30) directement au système à étudier en utilisant la même méthode de l'exemple 6 avec la condition $|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + |\alpha_{i3}| \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$.

5.4 Conclusion

Le système de Lorenz est le premier modèle mathématique et physique du chaos, devenant ainsi le point de départ et la pierre angulaire de recherches ultérieures sur la théorie du chaos, la question de l'équivalence de divers systèmes de type Lorenz et la possibilité d'une prise en compte universelle de leur comportement, en vue de la possibilité de réduire ces systèmes à la même forme à l'aide de diverses transformations, comme cela s'est produit pour les systèmes de Chen et Lü, par conséquent tous les résultats obtenus dans les articles consacrés à l'étude du Chen et Lü (équilibres, bifurcations, orbites périodiques, stabilité, surfaces invariantes, attracteurs chaotiques,...) peuvent être dérivées trivialement des résultats correspondants sur le système de Lorenz. Par les résultats obtenus dans notre travaux, et sur la base des théories mentionnées dans le chapitre 5, nous avons posé plusieurs conditions à six formes générales des systèmes autonomes quadratiques tridimensionnels à deux termes quadratiques (5.5), (5.9), (5.13), (5.17), (5.21), (5.25), pour être équivalents au système de Lorenz, Nous avons également identifié trois systèmes reconnus équivalents au système de Lorenz, il s'agit les systèmes mentionnés dans les exemples 3, 4 et 5.

Bibliographie

- [1] M. W. Hirsch and S. Smale, Differential Equation, Dynamique Systeme and Linear Algebra, *Academic Press*, New York (1974).
- [2] J. Hale and H. Koçak. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag New York Inc (1991).
- [3] C. M. Marle, Systèmes dynamiques : une introduction. C-M. Marle, P.Pilibossian, ellipses édition (2003).
- [4] R. L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. *Addison-Wesley*, New York (1987).
- [5] J. Gleick, Chaos : Making a New Science. Penguin Books (1987).
- [6] K. T. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke, Chaos, An Introduction to Dynamical Systems, *Springer*, Textbooks in Mathematical Sciences (1997).
- [7] C. Sparrow, The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos and Strange attractors. Springer-Verlag New York Inc (1982).
- [8] C. Sparrow, The Lorenz Equations, *Springer*, New York (1982).
- [9] H. Dang-Vu and C. Delcarte, *Bifurcation et Chaos*, Ellipses, Paris (2000).
- [10] R. Hilborn, Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers, Oxford Student Edition (1994).
- [11] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney and J. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* **16 D** (1985), 285-317.
- [12] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci*, **20** (1963) 130–141.
- [13] M. Kus, Integrals of motion for the Lorenz system, *J. Phys. A*, **16** (1983) L689–L691.

- [14] J. Pade, A. Rauh, and G. Tsarouhas, Analytical investigation of the Hopf bifurcation in the Lorenz model, *Phys. Lett. A*, **115** (1986) 93–96.
- [15] W. Tucker, The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci., Ser. I : Math*, **328** (1999) 1197–1202.
- [16] P. Swinnerton-Dyer, Bounds for trajectories of the Lorenz equations : An illustration of how to choose Liapunov functions, *Phys. Lett. A*, **281** (2001) 161–167.
- [17] J. Llibre and X. Zhang, Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system, *J. Math. Phys*, **43** (2002) 1622–1645.
- [18] P. Swinnerton-Dyer, The invariant algebraic surfaces of the Lorenz system, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, **132** (2002) 385–393.
- [19] J. Cao and X. Zhang, Dynamics of the Lorenz system having an invariant algebraic surface, *J. Math. Phys*, **48** (2007) 082702 .
- [20] M. Messias, Dynamics at infinity and the existence of singularly degenerate heteroclinic cycles in the Lorenz system, *J. Phys. A : Math. Theor*, **42** (2009) 115101 .
- [21] J. Llibre, M. Messias and P. R. da Silva, Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **20** (2010) 3137–3155.
- [22] B. Coomes, The Lorenz system does not have a polynomial flow. *Journal of Differential Equations*, **82**(2) (1989) 386 – 407.
- [23] G. Leonov, Formulas for the Lyapunov dimension of attractors of the generalized Lorenz system, *Doklady Mathematics* **87**(3) (2013b) 264–268.
- [24] G. Leonov, Shilnikov chaos in Lorenz-like systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**(03) (2013c) 1350058.
- [25] G.A. Leonov, On estimates of the bifurcation values of the parameters of a Lorenz system. *Russian Mathematical Surveys* **43**(3) (1988b) 216–217.
- [26] X. Wang and G. Chen, A Gallery of Lorenz-like and Chen-like attractors, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **23** (2013) 1330011.
- [27] C. Lainscsek, A class of Lorenz-like systems, *Chaos*, **22** (2012) 013126.

- [28] L. Runzi and W. Yinglan, Finite-time stochastic combination synchronization of three different chaotic systems and its application in secure communication, *Chaos*, **22** (2012) 023109.
- [29] Y. Wang, J. Singer and H.H. Bau, Controlling chaos in a thermal convection loop, *J Fluid Mech*, **237** (1992) 479 - 498.
- [30] B. Jiang, X. Han and Q. Bi, Hopf bifurcation analysis in the T-system, *Nonlinear Anal. Real World Appl*, **11** (2010) 522–527.
- [31] J. C. Sprott, Simplest dissipative chaotic flow, *Phys. Lett A*, **228** (1997) 271–274.
- [32] H.K. Chen, C.I. Lee, Anti-control of chaos in rigid body motion, *Chaos Solit. Fract*, **21** (2004) 957–965.
- [33] C. Liu, T. Liu, L. Liu, K. Liu, A new chaotic attractor, *Chaos Solit. Fract*, **22** (2004) 1031–1038.
- [34] D. Li, A three-scroll chaotic attractor, *Phys. Lett. A*, **372** (2008) 387–393.
- [35] B. Munmuangsaen, B. Srisuchinwong, A new five-term simple chaotic attractor, *Phys. Lett. A*, **373** (2009) 4038–4043.
- [36] C. Liu, L. Liu, T. Liu, A novel three-dimensional autonomous chaos system, *Chaos Solit. Fract*, **39** (2009) 1950–1958.
- [37] S. Dadras, H.R. Momeni, A novel three-dimensional autonomous chaotic system generating two, three and four-scroll attractors, *Phys. Lett. A*, **373** (2009) 3637–3642.
- [38] G. Dong, S. Zheng, L. Tian, R. Du, M. Sun, Z. Shi, The analysis of a novel 3-D autonomous system and circuit implementation, *Phys. Lett. A*, **373** (2009) 4227–4238.
- [39] Z. Wei, Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria, *Phys. Lett. A*, **376** (2011) 102–108.
- [40] S. Jafari, J.C. Sprott, S.M.R.H. Golpayegani, Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria, *Phys. Lett. A*, **377** (2013) 699–702.
- [41] X.F. Li, K.E. Chlouverakis and D.L. Xu, Nonlinear dynamics and circuit realization of a new chaotic flow : A variant of Lorenz, Chen and Lü, *Nonlinear Analysis*, **10** (2009) 2357-2368.

- [42] Zeraoulia Elhadj, J. C. Sprott, On the dynamics of a new 2-D rational mapping, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, Vol. **21**, No. 1 (2011) 155-160.
- [43] Zeraoulia Elhadj, J.C Sprott, About the boundedness of 3D continuous time quadratic systems, *Nonlinear Oscillations*, **13** (4) (2010) 550-557.
- [44] Zeraoulia Elhadj, J. C. Sprott, Chaotifying 2-D linear maps via a piecewise linear controller function, *Nonlinear Oscillations*, vol. 13 (2010).
- [45] J. C.Sprott, Some simple chaotic flows, *Phys. Rev. E*, **50** (1994) 647-650.
- [46] J. Pade, A. Rauh, and G. Tsarouhas, Analytical investigation of the Hopf bifurcation in the Lorenz model, *Phys. Lett. A*, **115** (1986) 93–96.
- [47] G. Tigan and D. Opris, Analysis of a 3-D Chaotic System, *Chaos, Solitons and Fractals*, **36** (2008) 1315-1319.
- [48] P. Yu, X. X. Liao, S. L. Xie, Y. L. Fu, A constructive proof on the existence of globally exponentially attractive set and positive invariant set of general Lorenz family, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **14** (2009), pp. 2886-2896.
- [49] J. Lü, G. Chen, D. Cheng, S. Čelikovsk, Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system, *Int J Bifurcat Chaos*, **12** (2002), pp. 2917-2926.
- [50] G. Chen and T. Ueta, Yet another chaotic attractor, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **9** (1999) 1465-1466.
- [51] T. Ueta and G. Chen, Bifurcation analysis of Chen's attractor," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **10** (2000) 1917-1931.
- [52] J. Lü, S. Zhang, Controlling Chen's chaotic attractor using backstepping design based on parameters identification, *Phys. Lett. A* 286 (2001) 148–152
- [53] J. Lü, T. Zhou, G. Chen, S. Zhang, Local bifurcation of the Chen system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **12** (2002) 2257–2270
- [54] T. Zhou, Y. Tang, G. Chen, Chen's attractor exists, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **14** (2004) 3167–3177.
- [55] J. Lü and G. Chen, A new chaotic attractor coined, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12** (2002) 659-661.

- [56] C. Li and G. Chen, A note on Hopf bifurcation in Chen's system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **13** (2003) 1609–1615.
- [57] T. S. Zhou, Y. Tang, and G. R. Chen, Complex dynamical behaviors of the chaotic Chen's system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **13** 2561–2574 (2003).
- [58] T. C. Li, G. R. Chen, and Y. Tang, On stability and bifurcation of Chen's system, *Chaos, Solitons Fractals*, **19** (2004) 1269–1282.
- [59] Y. Chang and G. Chen, Complex dynamics in Chen's system, *Chaos, Solitons Fractals*, **27** (2006) 75–86.
- [60] T. Li, G. Chen, and G. Chen, On homoclinic and heteroclinic orbits of Chen's system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **16** (2006) 3035–3041.
- [61] T. Lu and X. Zhang, Darboux polynomials and algebraic integrability of the Chen system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **17** (2007) 2739–2748.
- [62] W.X. Qin and G.R. Chen, On the boundedness of the solutions of the Chen system, *J. Math. Anal. Appl.*, **329** (2007) 445–451.
- [63] J. Cao, C. Chen, and X. Zhang, The Chen system having an algebraic surface, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **18** (2008) 3753–3758.
- [64] J.H. Lu, T.S. Zhou, G. R. Chen and S. C. Zhang, Local bifurcation of the Chen system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **12** (2002) 2257–2270.
- [65] R. Barboza and G. Chen, On the global boundedness of the Chen system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **21** (2011) 3373–3385.
- [66] X. Deng and A. Chen, Invariant algebraic surfaces of the Chen system, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **21** (2011) 1645–1651.
- [67] J. Llibre, M. Messias, and P. R. da Silva, Global dynamics in the Poincare ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **22** (2012) 1250154.
- [68] J. Lü, G. Chen, A new chaotic attractor coined, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **12** (2002) 659–661.
- [69] J. Lü, G. Chen, S. Zhang, Dynamical analysis of a new chaotic attractor, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **12** (2002) 1001–1015.

- [70] J. Lü, G. Chen, S. Zhang, Controlling in between the Lorenz and the Chen systems, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **12** (2002) 1417–1422.
- [71] J. Lü, G. Chen, S. Zhang, The compound structure of a new chaotic attractor, *Chaos Solit. Fract*, **14** (2002) 669–672.
- [72] Y. Yu, S. Zhang, Adaptive backstepping control of the uncertain Lü system, *Chin. Phys*, **11** (2002) 1249–1253.
- [73] Y. Yu, S. Zhang, Hopf bifurcation in the Lü system, *Chaos Solit. Fract*, **17** (2003) 901–906.
- [74] D. Chen, J. Sun, Q. Wu, Impulsive control and its application to Lü’s chaotic system, *Chaos Solit. Fract*, **21** (2004) 1135–1142.
- [75] X. Wu, J. Lu, Adaptive control of uncertain Lü system, *Chaos Solit. Fract*, **22** (2004) 375–381.
- [76] L. Huang, R. Feng, M. Wang, Synchronization of chaotic systems via nonlinear control, *Phys. Lett. A*, **320** (2004) 271–275.
- [77] H.N. Agiza, Chaos synchronization of Lü dynamical system, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl*, **58** (2004) 11–20.
- [78] E.M. Elabbasy, H. N. Agiza, M.M. El-Dessoky, Adaptive synchronization of Lü system with uncertain parameters, *Chaos Solit. Fract*, **21** (2004) 657–667.
- [79] Y. Zhang, J. Sun, Controlling chaotic Lü systems using impulsive control, *Phys. Lett. A*, **342** (2005) 256–262.
- [80] M.T. Yassen, Feedback and adaptive synchronization of chaotic Lü system, *Chaos Solit. Fract*. **25** (2005) 379–386.
- [81] Z. Lü, L. Duan, Codimension-2 Bautin bifurcation in the Lü system, *Phys. Lett. A*, **366** (2007) 442–446.
- [82] S. Anastassiou, T. Bountis, Y. G. Petalas, On the topology of the Lü attractor and related systems, *J. Phys. A : Math. Theor*, **41** (2008) 485101.
- [83] Z. Lü, L. Duan, Control of Codimension-2 Bautin Bifurcation in Chaotic Lü System, *Commun. Theor. Phys*, **52** (2009) 631–636.
- [84] L.F. Mello, S.F. Coelho, Degenerate Hopf bifurcations in the Lü system, *Phys. Lett. A* **373** (2009) 1116–1120.

- [85] G. Tigan, D. Constantinescu, Heteroclinic orbits in the T and the Lü system, *Chaos Solit. Fract*, **42** (2009) 20–23.
- [86] T. Lü, Darboux polynomials and non-algebraic integrability of the Lü system, *Ann. Differential Equations*, **25** (2009) 420–431.
- [87] T. Yang, B. Fang, W. Huang, Approximate chaotic solutions of the Lü system, *Int. J. Nonlinear Sci. Num. Simul*, **10** (2009) 1273–1279.
- [88] J. Llibre, A. Mahdi, C. Valls, Darboux integrability of the Lü system, *J. Geom. Phys*, **63** (2013) 118–128.
- [89] Y. Liu, Q. Yang, Dynamics of the Lü system on the invariant algebraic surface and at infinity, *Int. J. Bifurcation Chaos* **21** (2011) 2559–2582.
- [90] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J.Rodriguez-Luis, Chen’s attractor exists if Lorenz repulsor exists : The Chen system is a special case of the Lorenz system, *Chaos*, **23** (2013) 033108.
- [91] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J.Rodriguez-Luis, Comments on "The Chen system revisited", *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst*, **21** (2014) 275-280.
- [92] A. Algaba, F.Fernandez-Sanchez, M.Merino and A. J. Rodriguez-Luis, The Lü system is a particular case of the Lorenz system, *Phys. Lett, A* **377** (2013) 2771-2776.
- [93] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J.Rodriguez-Luis, Comment on “A constructive proof on the existence of globally exponentially attractive set and positive invariant set of general Lorenz family”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19** (3) (2014b) 758–761.
- [94] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J.Rodriguez-Luis, Comment on Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system, 2013.
- [95] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J.Rodriguez-Luis, Comments on ‘Global dynamics of the generalized Lorenz systems having invariant algebraic surfaces’ *Physica D : Nonlinear Phenomena*, **266** (2014) 80-82.

- [96] A. Algaba, F. Fernandez-Sanchez, M. Merino and A. J. Rodriguez-Luis, On Darboux polynomials and rational first integrals of the generalized Lorenz system, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **138** (3) (2014) 317-322.
- [97] G.A. Leonov and N.V. Kuznetsov. On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lü systems, *Applied Mathematics and Computation*, **256** (2015) 334-343.
- [98] G. Chen, The Chen system revisited, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, **20** (2013) 691-696.
- [99] G. Leonov, Criteria for the existence of homoclinic orbits of systems Lü and Chen, *Doklady Mathematics*, **87**(2) (2013) 220–223.
- [100] J. Lü, T. Zhou, G. Chen and S. Zhang, The compound structure of Chen’s attractor, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12**, No. 4 (2002) 855-858.
- [101] J. Lü, G. Chen, D. Cheng and S. Celikovsk y, Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **12** (2002) 2917–2926.
- [102] J. C.Sprott, New Chaotic Regimes in the Lorenz and Chen Systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **25**, No. 2 (2015) 1550033.
- [103] Y. Chen and Q. Yang, The nonequivalence and dimension formula for attractos of Lorenz-type systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **23** (12) (2013) 1250200.
- [104] Z. Hou, N. Kang, X. Kong, G. Chen and G. Yan, On the nonequivalence of Lorenz system and Chen system, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **20** (2010) 557–560.
- [105] L. Meddour and E. Zeraoulia, About the threedimensional quadratic autonomous system with two quadratic terms equivalent to the Lorenz syste, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst.*, B **27**, (2020) 133–143.

Résumé

L'objet de ce travail consiste en une étude de l'équivalence de deux systèmes dynamiques chaotiques, le but de cette étude est d'examiner et clarifier l'équivalence des systèmes au système de Lorenz et à cet effet on a posé plusieurs conditions pour des formes générales des systèmes autonomes quadratiques tridimensionnels à deux termes quadratiques pour être équivalent au système de Lorenz, comme cela s'est produit, par exemple, avec les systèmes Chen et Lu qui sont des cas particuliers du système de Lorenz. A l'aide de résultats obtenus dans nos travaux, nous avons distingué trois systèmes reconnus équivalents au système de Lorenz.

Mots clés : Système de Lorenz, transformation linéaire, équivalence, stabilité, chaos.

Abstract

The aim of the present work consists in a study of the equivalence of two chaotic dynamic systems and to examine and clarify the equivalence of the systems to the Lorenz system. For this purpose we had give several conditions for general forms of three-dimensional quadratic autonomous systems with two quadratic terms to be equivalent to the Lorenz system, as it has happened, for example, with the Chen and Lu systems that are particular cases of the Lorenz system. By the results obtained in our work, we have distinguished three well-known systems equivalent to the Lorenz system.

Keywords : Lorenz system, linear scaling, equivalence, stability, chaos.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة تكافؤ نظامين ديناميكين فوضويين و فحص وتوضيح تكافؤ بعض الانظمة مع نظام لورينز ولهذا الغرض تم وضع عدة شروط لأشكال عامة لأنظمة ثلاثية الأبعاد متجانسة مع حدين تربيعيين تعادل نظام لورينز، كما حدث على سبيل المثال، مع نظام " شان " و " لو " الذين يعتبران حالات خاصة لنظام لورينز. من خلال النتائج التي تم الحصول عليها في عملنا ، تمكنا من تمييز ثلاثة أنظمة معترف بها سابقا تعادل نظام لورينز

.الكلمات المفتاحية: نظام لورينز ، التطبيق الخطي، التكافؤ ، الاستقرار، الفوضى