

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE 1

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N°d'ordre : 144/DS/2019.

N°de série : 07/Math/2019.

Thèse de Doctorat en Sciences

intitulée

Encadrement de la fiabilité des systèmes
k-consécutifs-sur-n sous l'hypothèse de dépendance

Présentée par

Megraoui Fatima Zohra

OPTION : Probabilité et Statistique

Devant le jury composé de :

Président :	N. NEMOUCHI	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1
Encadreur :	S. BELALOUI	M.C(A)	Université Frères Mentouri Constantine 1
Examineur :	S. KHARFOUCHI	M.C(A)	Université Salah Boubnider Constantine 3
Examineur :	N. GHORAF	M.C(A)	Université Larbi ben Mhidi Oum El Bouaghi

Soutenue le ...

Dédicace

À la mémoire de mon père

MEGRAOUI MOHAMED SALAH

Et à ma mère

KHALAFALLAH YAMOUNA

ملخص:

" حدود موثوقية الأنظمة k-متتالية-n ضمن فرضية الارتباط "

ركزت معظم الأبحاث حول نظرية الموثوقية على دراسة الاستقلال بين مكونات النظام ومع ذلك ، في العديد من الأنظمة الحقيقية ، يعد الارتباط بين المكونات أحد الافتراضات الواقعية والمستعصية التي يجب مراعاتها بشكل صحيح.

الغرض من هذا العمل هو توفير حدود علوية وسفلية دقيقة لموثوقية الأنظمة الخطية : k-متتالية-n : G

ذات مكونات مرتبطة دوال توزيعها متطابقة أو متغيرة. بعض من المقارنات حققت وتم معالجة العديد من الأمثلة لإثبات فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية :

الانظمة الخطية k-متتالية-n : G , الحاد من الأسفل (B_L) , الحاد من الأعلى (B_U) , الموثوقية , مكونات مرتبطة , الفعل الرابط .

Résumé

“ Encadrement de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n sous l’hypothèse de dépendance “

La plupart des recherches menées sur la théorie de la fiabilité ont porté sur l’étude de l’indépendance entre les composants d’un système.

Toutefois, dans de nombreux systèmes réels, la dépendance entre les composants est l’une des hypothèses réalistes et intraitables qu’il convient d’examiner comme il se doit.

Ce travail a pour objectif de fournir des bornes supérieure et inférieure précises pour la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n : G linéaires constitués de composants dépendants dotés de fonctions de distribution identiques ou arbitraires. Certaines comparaisons sont effectuées et de nombreux exemples sont traités pour prouver la performance de la méthode proposée.

Mot clés

Système linéaire k-consécutif s-sur-n : G, borne supérieure (B_U), borne inférieure (B_L), fiabilité, composants dépendants, Copule.

Abstract

“ Bounds of the reliability of consecutive k-out-of-n systems under the dependency hypothesis “

Most of the research on reliability theory has focused on the study of independence between the components of a system.

However, in many real systems, dependence between components is one of the realistic and intractable assumptions that should be properly considered.

The purpose of this work is to provide precise upper and lower bounds for the reliability of linear consecutive k-out-of-n :G systems consisting of dependent components with identical or arbitrary distribution functions. Some comparisons are made and many examples are processed to prove the performance of the proposed method.

Keywords

Linear consecutive k-out-of-n :G system, upper bound (B_U), lower bound (B_L), reliability, dependent components, Copula.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé	iv
Introduction générale	1
1 Structures des systèmes	4
1.1 Introduction	4
1.2 Notions de fiabilité	4
1.2.1 Structures cohérentes	6
1.2.2 Variables aléatoires associées	9
1.2.3 Propriétés importantes des v.a associées	9
1.3 Structure des systèmes	11
1.3.1 Système en série	11
1.3.2 Système en parallèle	12
1.3.3 Configuration série-parallèle	13
1.3.4 Configuration parallèle-série	14
1.3.5 Configuration k/n (k parmi n)	14
1.3.6 k-consécutifs-parmi-n	15
1.4 Fiabilité d'un système dont les composants sont indépendants	16
1.4.1 Définitions et généralités	16
1.4.2 Propriétés fondamentales de la fiabilité d'un système cohérent	16
1.5 Importance en fiabilité des composants	17
2 Copule	18
2.1 Introduction	18
2.2 Dépendance	19
2.3 Ordre à dépendance positive bivariée	20
2.4 Copule	21
2.4.1 Éléments de base	21
2.4.2 Théorème de Sklar	24
2.5 Exemples de copules	25
2.6 Copules elliptiques	26
2.6.1 Copule gaussienne	26
2.6.2 Copule de Student	27
2.7 Copules archimédiennes	27
2.7.1 Copule de Clayton	28
2.7.2 Copule de Frank	28

2.7.3	Copule de Gumbel	29
3	Etude Comparative	31
3.1	Introduction	31
3.2	Cas indépendants	32
3.2.1	Le calcul exact de la fiabilité d'un système	32
3.2.2	Fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n à multi-états	32
3.2.3	Encadrement de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n :G à multi-états	33
3.2.4	La méthode d'inclusion-exclusion	34
3.2.5	Encadrement de la fiabilité dans le cas indépendant	34
3.2.6	Encadrement de la fiabilité d'un système cohérent à composants hétérogènes	40
3.2.7	Les principaux résultats	41
3.2.8	Bornes de la fiabilité basées sur \overline{G}_1	43
3.2.9	Bornes de la fiabilité basées sur \overline{G}_2	44
3.2.10	Exemples	45
3.2.11	Autre bornes	48
4	Encadrement de la fiabilité des systèmes linéaires k-consécutifs-sur-n :G sous l'hypothèse de dépendance	51
4.1	Introduction	51
4.2	Notations et Définitions	52
4.3	Bornes d'un système linéaire k-consécutifs-sur-n :G	53
4.3.1	Exemples numériques	57
4.4	Comparaison avec des résultats récents	59
4.4.1	Comparaison avec la valeur exacte de fiabilité en utilisant la Copule	59
4.4.2	Comparaison avec les bornes de Miziula et Navarro	61
4.5	Influence des composants du système sur les bornes de fiabilité	65
	Bibliographie	68

Table des figures

1.1	Fonction de distribution	5
1.2	Fonction de fiabilité	5
1.3	Fonction de distribution et de fiabilité	6
1.4	Configuration de n composants en série	12
1.5	Configuration de n composants en parallèle.	13
1.6	Configuration série-parallèle.	14
1.7	Configuration parallèle-série.	15
2.1	Densité de la copule gaussienne pour une corrélation de 0,05	27
2.2	Densité bivariée de la copule de Clayton $\theta = 0,05$	29
2.3	Densité bivariée de la copule de Frank $\theta = 2$	29
2.4	Densité de la copule de Gumbel bivariée pour $\alpha = 2$	30
2.5	Copules Archimédiennes bivariées	30
3.1	45
3.2	Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G	47
3.3	Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G	48
3.4	Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G	50
4.1	Bornes de fiabilité d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G	58
4.2	Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-4 :G	58
4.3	Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 3-consécutifs-sur-4 :G	59
4.4	Bornes inférieure, supérieure et valeur exacte de la fiabilité d'un système Lin/- con/2/3 :G	61
4.5	Différentes bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G	62
4.6	Differentes bornes de fiabilité pour un système linéaires 2-consécutifs-sur-4 :G	63
4.7	Valeur exacte et différentes bornes de fiabilité pour un système linéaire 2- consécutifs-sur-3 :G	64
4.8	Bornes de fiabilité pour un systèmè 2 consécutifs -sur-3 :G (en utilisant (Equ11) dans Navarro (2018))	65
4.9	Intervalle de différence pour divers systèmes	66

Liste des abréviations

- n : nombre des composants dans le système .
- k : le nombre minimum de composants consécutifs nécessaires au bon fonctionnement du système.
- T_j : durée de vie du composant j , $j = 1, \dots, n$.
- $F_j(t) = P(T_j \leq t)$: fonction de distribution de T_j .
- $R(t) = P(T_{k/n:G} > t)$: fiabilité du système.
- $T_{k/n:G}$: durée de vie du système.
- $F(t)$: la fonction de distribution.
- $f(t)$: la densité de probabilité .
- $\bar{F}(t)$: la fiabilité.
- X_i : les variables associées au composants du système.
- ϕ : la fonction de structure.
- C_x : chemin lié à x .
- K_x : coupe liée à x .
- P : la probabilité.
- $R_i(t)$: la fiabilité de la composant i .
- $I_R(i)$: l'importance en fiabilité du composant i .
- $F(x_1, x_2)$: fonction de répartition bivariée.
- $C(u, v)$: copule bivariée.
- E : espérance mathématique.
- T_n^j : La durée de vie du système k consécutifs-parmi- n : G à multi-états.
- $\chi^N = \times_{i=1}^N \chi$: le produit cartésien décrivant l'ensemble des états possibles du système.
- \bar{G}_1 : la moyenne des fonctions de fiabilité des composants.
- Q : la fonction de double distorsion associée à un système à durée de vie T .
- $|P_1|$: le cardinal d'un chemin minimal.

Introduction générale

L'Oxford English Dictionary définit la fiabilité comme “ la qualité d'une entité à être fiable ”, sur laquelle on peut compter à un instant donné ”, “ dans laquelle la confiance peut être mise ”. En anglais ” reliability ” vient de ” to rely on ” signifiant ” compter sur, avoir confiance en ”. . . alors que fiabilité en français vient effectivement du mot ” fiable ”, c'est-à-dire ” à qui on peut se fier ”.

En 1962, l'Académie des Sciences, l'a définie de la façon suivante : Grandeur caractérisant la sécurité de fonctionnement, ou mesure de la probabilité de fonctionnement d'un appareillage selon des normes prescrites [Chapouille P \(1968\)](#). Plus tard dans les années soixante-dix, le Comité Electronique International propose la définition suivante : Caractéristique d'un dispositif, exprimée par la fiabilité, qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions spécifiées, pendant une durée donnée [Pagès and Gondran \(1980\)](#).

La fiabilité d'un système a bien montré son importance et son intérêt dans les grandes entreprises notamment sur le volet économique. On cite Général Motors, depuis 1940, Airbus, Air fore et laboratoires Bell téléphone, depuis 1960 ; Philips, Kodak, Citroën,... depuis les années 1970. Avec le temps, les systèmes industriels sont devenus de plus en plus complexes utilisant de nouvelles et hautes technologies permettant d'accroître la qualité des produits et des services ainsi que la productivité. Donc, au fur et à mesure, la fiabilité est devenue un indicateur très intéressant dans les études de la qualité et la décision.

Mathématiquement, la fiabilité est définie comme la probabilité qu'un élément mécanique ou électronique (c'est-à-dire un composant, un sous-système ou un système complet) accomplisse la tâche qui lui est assignée dans un délai spécifié, sous des conditions précises d'exploitations. Partant de cette définition, ceci montre bien que le domaine de la fiabilité englobe les probabilités, donc les statistiques et les mathématiques en général.

Notant que les problèmes de fiabilité sont particulièrement critiques lorsque les conséquences des défaillances des systèmes en termes de sécurité et de coût nécessitent une préoccupation majeure. Plus précisément, la théorie de la fiabilité concerne un certain nombre de questions liées au bon fonctionnement d'un système au sens large. Ainsi, on peut s'interroger sur la probabilité que le système soit en marche à un certain moment ou pendant une certaine période, sur le temps moyen de bon fonctionnement, sur le risque instantané ou cumulé de tomber en panne, etc

Mentionnons que les systèmes cohérents constituent un des principaux sujets de cette théorie notons que le calcul de la fonction de fiabilité et de la durée de vie moyenne d'un système cohérent complexe demeure une tâche difficile (voir [Jasinski et al. \(2009\)](#) et [Nelsen \(1999\)](#)). Les systèmes cohérents étudiés dans cette thèse sont les systèmes k-consécutifs-sur-n, du fait de leur large utilisation dans plusieurs domaines ; systèmes de pompage de gaz et de pétrole, télécommunications, distributions d'eau, trafic, radar, réseaux, etc . . . et leur particularité est qu'ils sont plus fiables que les systèmes en série et moins chers que les systèmes en parallèle.

Evaluer la fiabilité d'un système revient à la calculer (ou l'approximer) par différentes tech-

niques et méthodes probabilistes ou algorithmiques ou bien, trouver un encadrement de celle-ci lorsque la configuration du système est trop compliquée.

Cette évaluation se fait sous certaines hypothèses, parmi celles-ci ; les composants du système sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d), indépendants hétérogènes, dépendants et identiques, dépendants hétérogènes, . . . Le calcul exact de la fiabilité s'est avéré difficile pour les systèmes ayant des composants (i.i.d), néanmoins, la littérature présente des résultats. Concernant les systèmes k-consécutifs-sur-n, on peut citer par exemples ; [Ross \(1979\)](#), [Chiang and Niu \(1981\)](#), [Derman et al. \(1982\)](#), [Eryilmaz and Navarro \(2012\)](#), [Kuo et al. \(1990\)](#), [Hwang and Yao \(1989\)](#), [Zuo et al. \(2003\)](#), [Huang et al. \(2003\)](#), [Yamamoto et al. \(2006\)](#), [Belaloui and Ksir \(2007\)](#), [Eryilmaz \(2009\)](#), [Bouloudene and Belaloui \(2017\)](#), Notons que certains travaux ont traité le cas binaire (les composants et le système ont juste deux états ; fonction, panne) et d'autres travaux ont traité le cas multi-états (le système et les composants peuvent avoir plus de deux états).

Toutefois, dans beaucoup de situations réelles, un nombre important de systèmes fonctionnent avec des structures de dépendance. Pour cette raison, il était impératif et nécessaire d'étudier cette catégorie de situations. D'où, Ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont investis dans cet axe de recherche. Mais le problème dominant était la complexité des calculs, notamment, le calcul de la fiabilité exacte du système étudié. En conséquence, la littérature présente peu de résultats dans ce domaine. On cite comme exemples ; [Gera \(2000\)](#), [Navarro and Rychlik \(2007\)](#), [Navarro et al. \(2007\)](#) , [Salhi et al. \(2011\)](#), [Eryilmaz and Navarro \(2012\)](#), [Destercke et al. \(2014\)](#), [Miziula and Navarro \(2017\)](#), [Miziula and Navarro \(2018\)](#).

Sachant que dans la recherche, il faut toujours essayer de trouver des solutions pour les problèmes posés et existants. Ainsi, pour l'évaluation de la fiabilité d'un système étudié sous certaines hypothèses, il faut parfois travailler avec des limites (approximations). Le calcul de ces limites a été largement étudié dans le cas de systèmes cohérents avec des composants indépendants et identiques (i.i.d).

Certains résultats ont été obtenus dans le cas de composants échangeables et dans le cas de composants éventuellement dépendants à distribution identique [Navarro and Rychlik \(2010\)](#). Cependant, jusqu'à présent, peu de travaux de recherche ont été publiés pour des systèmes à composants éventuellement dépendants hétérogènes (distribués de façon non identique). Certaines formules de comparaison ont été présentées dans [Balakrishnan and Torrado \(2016\)](#) pour les systèmes parallèles et dans [Navarro J and A \(2016\)](#) pour les systèmes cohérents en général.

Notons qu'une nouvelle méthode a été appliquée, ces dernières années en fiabilité, à savoir celle utilisant le concept de la fonction copule. Copule provenant du mot latin " copula" (définie par Abe Sklar en 1959 : mathématicien américain) qui signifie : " tout ce qui sert à attacher ", en d'autres termes, c'est une fonction qui sert à " coupler" les lois marginales afin d'obtenir une loi multivariée. En Utilisant certaines fonctions de copule, la fiabilité de certains systèmes cohérents a été évaluée. En particulier, les systèmes k-consécutifs-sur-n ; voir [Jia et al. \(2010\)](#).

Notre contribution est consacrée à l'établissement des bornes supérieure et inférieure précises de la fiabilité pour les systèmes linéaires k-consécutifs-sur-n : G , constitués de com-

posants positivement dépendants ayant des fonctions de distribution identiques ou arbitraires.

Ce mémoire est conçu d'une introduction générale, quatre chapitres, une conclusion et se termine par des références bibliographiques.

Le chapitre 1 est un chapitre introductif dans lequel nous définissons les principales notions mathématiques sur la fiabilité utilisées tout au long de notre travail. Nous y rappelons quelques systèmes et leurs configurations qui sont utilisés dans divers domaines ainsi que leurs spécificités et leur fiabilité évaluée.

Dans **Le chapitre 2** une introduction brève de la théorie des copules et leurs éléments principaux ; On y met en valeur le concept de la fonction copule, les propriétés essentielles et les caractéristiques principales. Plusieurs exemples de copules utilisées sont cités.

Le chapitre 3 comporte quelques résultats établis concernant les systèmes k-consécutifs-sur n dans le cas où les composants sont i.i.d et même dans le cas où les composants sont dépendants et arbitrairement distribués. Des exemples sont traités à travers des différentes méthodes.

Dans **Le chapitre 4**, une investigation est faite sur l'encadrement de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n. Nous déterminons une borne supérieure et une borne inférieure de la fiabilité, basées sur des concepts mathématiques connus et utilisés et certains résultats antérieurs, puis une comparaison illustrée avec d'autres résultats récents pour prouver l'efficacité de notre méthode proposée. Ce travail a été sanctionné par un article publié dans "**ITALIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS**".

Nous concluons le manuscrit par une conclusion et quelques perspectives de recherche dans le domaine de la fiabilité.

Structures des systèmes

1.1 Introduction

Etant donné que le principe des calculs de la fiabilité par structure (ou architecture) est de considérer qu'un système est constitué de composants élémentaires, et que sa fiabilité dépend à la fois de la fiabilité de ses composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système tout entier. Il est donc nécessaire de représenter la logique de fonctionnement du système. Plusieurs types de représentations sont possibles : diagrammes de fiabilité, arbres de défaillance, graphes de Markov, réseaux de Petri, diagrammes de décision binaires, réseaux bayésiens, etc Ce chapitre regroupe donc, d'une part, des notions fondamentales et nécessaires pour la théorie de la fiabilité, à savoir ; fonction de fiabilité, fonction de structure, lien minimal, coupe minimale, durée de vie, etc D'autre part, quelques structures de systèmes de base considérés et utilisés dans divers domaines.

1.2 Notions de fiabilité

Durée de vie

La durée de vie (lifetime) d'un équipement qui commence à fonctionner au temps $t_0 = 0$, est l'intervalle de temps entre sa mise en service jusqu'à la première défaillance. Elle sera assimilée à une variable aléatoire non négative X . Sa fonction de répartition représente la probabilité de défaillance de l'équipement avant l'instant t ou la probabilité de défaillance dans l'intervalle $[0, t]$:

$$F(t) = P(X \leq t)$$

Si $F(t)$ absolument continue (donc dérivable), la dérivée $f(t) = F'(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ s'appelle densité de probabilité de la durée de vie X .

Fonction de fiabilité

La fonction de fiabilité (Reliability) de la variable aléatoire X est la probabilité de bon fonctionnement continu durant un intervalle $[0, t]$, on la note $R(\cdot)$ ou $\bar{F}(\cdot)$. Elle est donnée par

$$R(t) = 1 - F(t) = P(X > t) = \bar{F}(t) = \int_t^{\infty} f(u)du \quad (1.1)$$

Le diagramme de fiabilité d'un système est un graphe sans circuit admettant une entrée E et une sortie S, dont : les sommets, appelés blocs, représentent les composants du système, les

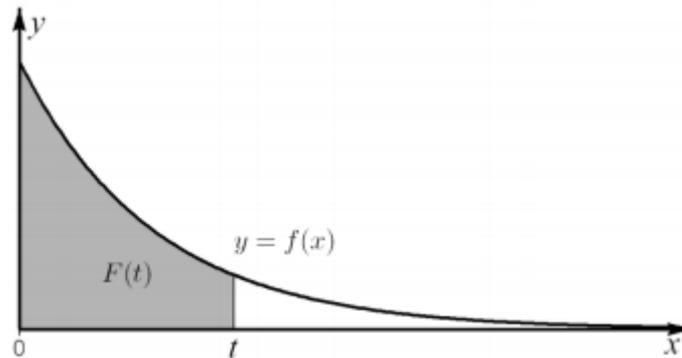


FIGURE 1.1 – Fonction de distribution

arcs traduisent les relations entre les différents composants, au sens où le système fonctionne si et seulement si il existe un chemin allant de E à S qui ne passe que par des composants en fonctionnement.

On peut faire l'analogie avec un réseau de distribution d'eau : l'eau n'est pas coupée tant qu'il existe un chemin dans le réseau qui lui permet d'aller de son point d'entrée à son point de sortie.

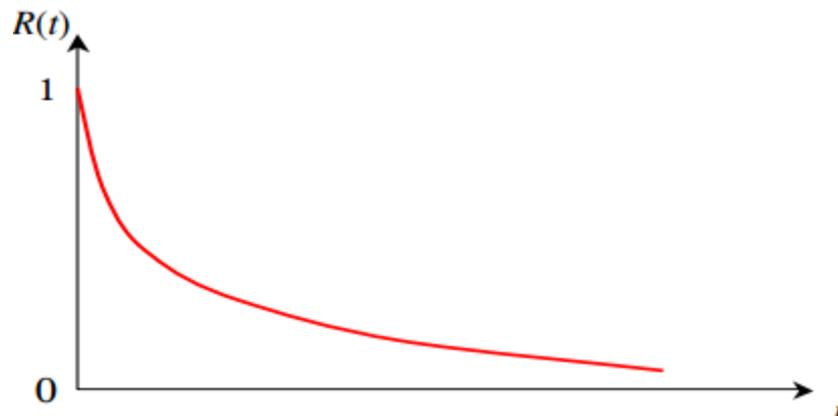


FIGURE 1.2 – Fonction de fiabilité

Fonction de structure :

Soit un système de n composants distincts, avec X_1, X_2, \dots, X_n des variables associées au composants de ce système, alors pour tout i , on définit X_i par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{me}} \text{ composant est en bon état} \\ 0 & \text{si le } i^{\text{me}} \text{ composant est en panne} \end{cases}$$

L'état de chacun de ses éléments influe sur l'état du système qui peut être en bon état (marche) ou en panne.

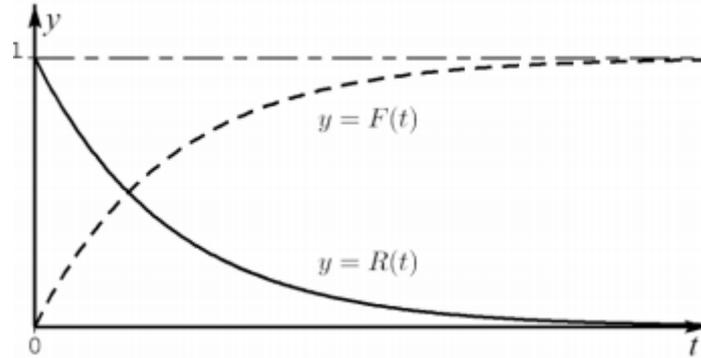


FIGURE 1.3 – Fonction de distribution et de fiabilité

Définition 1. Soit ϕ une fonction dépendante du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, on appelle ϕ fonction de structure définie par :

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si le système est fonctionne} \\ 0 & \text{si le système est en panne} \end{cases}$$

Définition 2. Soit ϕ une fonction de structure d'ordre n , le i^{me} composant est dit inutile à la structure ϕ , si ϕ est constante en X_i , c'est-à-dire :

$$\phi(1_i, \mathbf{X}) = \phi(0_i, \mathbf{X})$$

pour tout vecteur (\cdot, X) , avec

$$(1_i, \mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$(0_i, \mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$(\cdot, \mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{i-1}, \cdot, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

1.2.1 Structures cohérentes

Définition 3. On dit qu'un système est cohérent quand :

- La fonction de structure est non-décroissante en chaque argument.
- Chacun de ses composants est utile.

Théorème 1. Soit ϕ une structure cohérente d'ordre n , alors :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{1}) = 1 \\ \phi(\mathbf{0}) = 0 \end{cases}$$

Théorème 2. Soit ϕ une structure cohérente d'ordre n , alors :

$$\prod_{i=1}^n X_i \leq \phi(\mathbf{X}) \leq \prod_{i=1}^n X_i \quad (1.2)$$

tel que : $\prod_{i=1}^n X_i = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\prod_{i=1}^n X_i = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Chemins (Liens)

Définition 4. Le chemin lié à \mathbf{X} est l'ensemble

$$C_{\mathbf{X}} = \{i : X_i = 1\}$$

pour tout vecteur \mathbf{X} de E avec $\phi(\mathbf{X}) = 1$.

Il est donc un ensemble de composants où son bon fonctionnement assure le bon fonctionnement du système.

Définition 5. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ le vecteur indiquant les états des composants. On définit

$$C_1(\mathbf{X}) = \{i : X_i = 1\}$$

et supposons que la fonction de structure ϕ est cohérente
-un vecteur-lien est un vecteur \mathbf{X} tel que

$$\phi(\mathbf{X}) = 1$$

L'ensemble $C_1(\mathbf{X})$ correspondant s'appelle lien.

Chemin minimal

Définition 6. Un chemin minimal est défini par l'ensemble minimal d'éléments où leur fonctionnement assure celui du système. On dit que la fonction de structure ϕ est égale au max sur tous les chemins minimaux du produit des états de ce chemin, qui s'écrit :

$$\phi(\mathbf{X}) = \max_{c \in CM} \{\min_{i \in c} (X_i)\} \quad (1.3)$$

où CM est l'ensemble de tous les chemins minimaux.

Définition 7. Un vecteur-lien minimal est un vecteur-lien \mathbf{X} tel que :

Si $\mathbf{Y} < \mathbf{X}$, alors $\phi(\mathbf{Y}) = 0$

L'ensemble $C_1(\mathbf{X})$ correspondant s'appelle lien minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont le fonctionnement entraîne le fonctionnement du système.

Coupes

Définition 8. Une coupe (cut set) est définie par un ensemble d'éléments dont leur panne entraîne la panne du système.

Si $\phi(x) = 0$ alors $K_x = \{i : x_i = 0\}$ est la coupe liée à x .

Définition 9. Un vecteur-coupe est un vecteur \mathbf{X} tel que

$$\phi(\mathbf{X}) = 0$$

Avec

$$C_0(\mathbf{X}) = \{i : X_i = 0\}$$

L'ensemble $C_0(\mathbf{X})$ correspondant s'appelle coupe

Coupe minimale

Définition 10. Un vecteur-coupe minimal est un vecteur-coupe \mathbf{X} tel que si $\mathbf{Y} > \mathbf{X}$, alors $\phi(\mathbf{Y}) = 1$

L'ensemble $C_0(\mathbf{X})$ correspondant s'appelle coupe minimale. C'est l'ensemble minimal de composants dont la panne entraîne la panne du système.

Définition 11. Une coupe minimale est définie par une défaillance du système due à une défaillance d'un ensemble minimal d'éléments.

Dans ce cas la fonction de structure ϕ est comme suit :

$$\phi(\mathbf{X}) = \min_{k \in KM} \{\max_{i \in k} (X_i)\} \quad (1.4)$$

où KM est l'ensemble des coupes minimales.

Propriétés 1. 1) Pour le j^{ime} lien minimal L_j on peut associer la fonction de structure $P_j(\mathbf{X})$;

$$P_j(\mathbf{X}) = \prod_{i \in L_j} X_i$$

telle que

$$P_j(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si tous les composants du } j^{\text{ime}} \text{ lien minimal fonctionnent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(($j = 1, \dots, p$) où p est le nombre de liens minimaux).

Donc la fonction de structure est donnée par :

$$\phi(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^p P_j(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{j=1}^p (1 - P_j(\mathbf{X})) = \prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} X_i = \max_{1 \leq j \leq p} \min_{i \in L_j} X_i$$

2) De même, pour la j^{ime} coupe minimale K_j on peut associer la fonction de structure $K_j(\mathbf{X})$

$$K_j(\mathbf{X}) = \prod_{i \in K_j} X_i$$

tel que

$$K_j(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0 & \text{si tous les composants de la } j^{\text{ime}} \text{ coupe minimale sont en panne} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(($j = 1, \dots, K$) où K est le nombre de coupes minimales).

Donc :

$$\phi(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^K K_j(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^K \prod_{i \in K_j} X_i = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} X_i$$

3) On a :

$$\bigcup_{j=1}^p L_j = C$$

et

$$\bigcup_{j=1}^K K_j = C$$

1.2.2 Variables aléatoires associées

Définition 12. On dit que les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont associées si

$$\text{cov}(\Gamma(\mathbf{T}), \Delta(\mathbf{T})) \geq 0$$

pour toute paire de fonctions binaires (Γ, Δ) croissantes.

Lemme 1. Si T_1, T_2, \dots, T_n sont des v.a associées et si f et g sont des fonctions croissantes, alors, lorsque la covariance existe, on a

$$\text{cov}(f(\mathbf{T}), g(\mathbf{T})) \geq 0, \mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$$

Définition 13. (Association Positive) la suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_n est dite faiblement associée ou bien positivement associée si pour tous sous-ensembles disjoints I et J de $1, \dots, n$ et toutes fonctions croissantes f et g on a :

$$\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \geq 0$$

lorsque cette covariance existe.

Définition 14. (Association Négative) Un ensemble de variables aléatoires X_1, \dots, X_n est dit être associé négativement (NA) si pour deux ensembles d'indices disjoints $I, J \subseteq [n]$ et deux fonctions f, g les deux monotones croissantes ou les deux monotones décroissantes, il est vérifié que :

$$E(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq E(f(X_i, i \in I)).E(g(X_j, j \in J))$$

1.2.3 Propriétés importantes des v.a associées

(P1) Tout sous-ensemble de variables aléatoires associées est associé.

Preuve 1. (P1) découle immédiatement de la définition en choisissant des fonctions non décroissantes f et g qui ne dépendent que des variables du sous-ensemble.

(P2) Si deux ensembles de variables aléatoires associées sont indépendants l'un de l'autre, leur union est un ensemble de variables aléatoires associées.

Preuve 2. Soient $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)$, $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$ deux vecteurs associés tel que \mathbf{S} et \mathbf{T} sont indépendants l'un de l'autre. Soit f, g des fonctions non décroissantes. En écrivant f pour $f(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, et g pour $g(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, on a

$$\begin{aligned} \text{cov}(f, g) &= E_{\mathbf{S}, \mathbf{T}}fg - E_{\mathbf{S}, \mathbf{T}}f \times E_{\mathbf{S}, \mathbf{T}}g \\ &= E_{\mathbf{S}}E_{\mathbf{T}}fg - E_{\mathbf{S}}\{E_{\mathbf{T}}f \cdot E_{\mathbf{T}}g\} + E_{\mathbf{S}}\{E_{\mathbf{T}}f \cdot E_{\mathbf{T}}g\} - E_{\mathbf{S}}E_{\mathbf{T}}f \cdot E_{\mathbf{S}}E_{\mathbf{T}}g \\ &= E_{\mathbf{S}}\text{cov}_{\mathbf{T}}[f, g] + \text{cov}_{\mathbf{S}}[E_{\mathbf{T}}f, E_{\mathbf{T}}g] \end{aligned}$$

Où $E_{\mathbf{S}}$: espérance sur la distribution de \mathbf{S}

$E_{\mathbf{T}}$: espérance sur la distribution de \mathbf{T} .

$E_{\mathbf{S}, \mathbf{T}}$: espérance sur la distribution conjointe de \mathbf{S}, \mathbf{T} .

$E_{\mathbf{S}, \mathbf{T}} = E_{\mathbf{S}} \cdot E_{\mathbf{T}}$ dans le cas de l'indépendance de \mathbf{S}, \mathbf{T} .

puisque $\text{cov}_{\mathbf{T}}[f(s, \mathbf{T}), g(s, \mathbf{T})] \geq 0$ pour chaque s fixe, puis

$$E_{\mathbf{S}}\text{cov}_{\mathbf{T}}[f, g] \geq 0$$

Et comme $E_{\mathbf{T}}f(\mathbf{S}, \mathbf{T}), E_{\mathbf{T}}g(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ sont des fonctions non décroissantes en s

$$\text{cov}_{\mathbf{S}}[E_{\mathbf{T}}f, E_{\mathbf{T}}g] \geq 0$$

(P3) L'ensemble constitué d'une seule variable aléatoire est associé.

Preuve 3. Le résultat est une conséquence d'une inégalité classique pour des fonctions du même ordre dues à Chebyshev (Hardy, Littlewood et Pólya, (1934), section 2.17). Une preuve directe et simple est donnée dans la section 3 voir Esary et al. (1967).

Propriétés (P1), (P2) et (P3) permettent certaines manipulations multivariées standard avec des variables aléatoires associées.

(P4) Les v.a images par les fonctions croissantes de v.a associées, sont associées.

(P5) Si X_1, \dots, X_n sont des v.a associées et Y_1, \dots, Y_n sont des v.a associées et si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes alors $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables associées.

Théorème 3. Des variables aléatoires indépendantes sont associées.

Théorème 4. Si X_1, \dots, X_n sont des v.a binaires associées, $1 - X_1, \dots, 1 - X_n$ sont aussi des v.a binaires associées.

Preuve 4. Si Γ est une fonction binaire non décroissante, alors la fonction duale est :

$$\Gamma^D(\mathbf{X}) = \mathbf{1} - \Gamma(\mathbf{1} - \mathbf{X})$$

où $\mathbf{1} - \mathbf{X} = (1 - X_1, \dots, 1 - X_n)$, est également binaire et non décroissante. Soit

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1} - \mathbf{X}$$

ensuite

$$\text{cov}_{\mathbf{Y}}[\Gamma(\mathbf{Y}), \Delta(\mathbf{Y})] = \text{cov}_{\mathbf{X}}[\Gamma^D(\mathbf{X}), \Delta^D(\mathbf{X})] \geq 0$$

pour Γ, Δ binaires non décroissantes.

Théorème 5. Si S et T sont associées et $Cov(S, T) = 0$ alors S et T sont indépendantes.

Théorème 6. Si X_1, \dots, X_n sont des v.a binaires associées alors :

- $P[\prod_{i=1}^n X_i = 1] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i = 1]$
- $P[\prod_{i=1}^n X_i = 1] \leq \prod_{i=1}^n P[X_i = 1]$

Preuve 5. voir *Esary et al. (1967)*

Théorème 7. Soit ϕ une structure cohérente dont les composants sont associés et de fiabilités p_1, \dots, p_n , alors

$$\prod_{i=1}^n p_i \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{i=1}^n p_i$$

Théorème 8. Soit ϕ une structure cohérente dont les composants sont associés, soient $L_1(X), \dots, L_p(X)$ les liens minimaux et $K_1(X), \dots, K_K(X)$, les coupes minimales de la structure ϕ alors :

$$\prod_{j=1}^K P[K_j(X) = 1] \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p P[L_j(X) = 1]$$

Remarque 1. Soit ϕ une structure cohérente dont les composants sont indépendants alors :

$$\prod_{j=1}^k \prod_{i \in K_j} p_i \leq P[\phi(X) = 1] \leq \prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} p_i$$

1.3 Structure des systèmes

1.3.1 Système en série

Un système en série correspond à un système qui ne fonctionne sauf si tous ses composants fonctionnent. Donc on dit qu'un système en série tombe en panne si un de ses composants tombe en panne. Et on a alors :

$$X = \min_1^n X_i$$

La fiabilité du système est alors :

$$R(x) = P(X > x) = P(\min_{i=1}^n X_i > x) = P(\forall i, X_i > x) = P\left(\bigcap_1^n [X_i > x]\right) \quad (1.5)$$

Si on suppose que les composants sont indépendants, la probabilité ci-dessus est la probabilité d'une intersection d'évènements indépendants. Elle est donc égale au produit des probabilités de ces évènements :

$$R(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = \prod_{i=1}^n R_i(x)$$

Dans ce cas la fonction de structure ϕ est de la forme :

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \prod_{i=1}^n (x_i)$$

Proof 1. *En effet*

$$\begin{aligned} R(x) &= P(X > x) = P(\min_{i=1}^n X_i > x) \\ &= P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \\ &= P(X_1 > x) \cdot P(X_2 > x) \dots P(X_n > x) \\ &= R_1(x) \dots R_n(x) \\ &= \prod_{i=1}^n R_i(x) \end{aligned}$$



FIGURE 1.4 – Configuration de n composants en série

1.3.2 Système en parallèle

Un système en parallèle correspond à un système dont un de ses composants fonctionne suffit pour qu'il fonctionne. Sinon, la défaillance du système survient quand tous ses composants sont en panne. On a évidemment :

$$X = \max_1^n X_i$$

La fiabilité de ce système est donnée par :

$$R(x) = P(X > x) = P(\max_1^n X_i > x) = 1 - P(\max_1^n X_i \leq x) = 1 - P(\forall i, X_i \leq x) \quad (1.6)$$

Dans le cas où les composants sont indépendants, on obtient :

$$R(x) = 1 - \prod_1^n P(X_i \leq x) = 1 - \prod_1^n (1 - P(X_i > x))$$

Finalement

$$R(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(x))$$

La fonction de structure est donnée par :

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

Démonstration. La fonction de répartition de la variable X est alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n F_i(x) \end{aligned}$$

La fiabilité d'un système de n composants en parallèle est donnée par

$$\begin{aligned} R(x) &= 1 - F(x) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(x) \\ &= 1 - [(1 - R_1(x))(1 - R_2(x)) \dots (1 - R_n(x))] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(x)) \end{aligned}$$

□

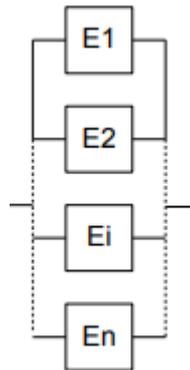


FIGURE 1.5 – Configuration de n composants en parallèle.

1.3.3 Configuration série-parallèle

La combinaison des systèmes en série et des systèmes en parallèle donne des systèmes mixtes.

Définition 15. *Un système série-parallèle résulte de la mise en parallèle de sous-systèmes en série. Si on note $R_{ij}(x)$ la fiabilité du j^{me} composant de la i^{me} branche, les résultats*

précédents montrent que la fiabilité est :

$$R(x) = 1 - \prod_1^p (1 - \prod_1^{n_i} R_{ij}(x)) \quad (1.7)$$

où n_i : nombre d'éléments de la branche i .

p : nombre de branches en série.

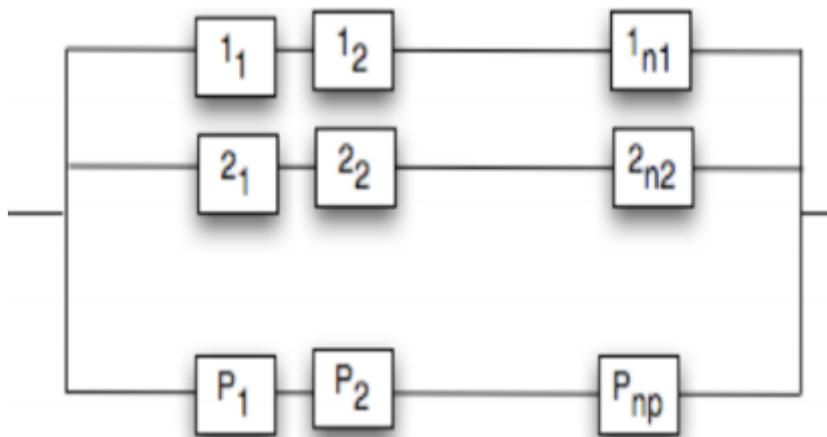


FIGURE 1.6 – Configuration série-parallèle.

1.3.4 Configuration parallèle-série

Un système parallèle-série résulte de la mise en série de sous-systèmes parallèles. En gardant les mêmes notations précédentes, on obtient :

$$R(x) = \prod_1^p (1 - \prod_{j=1}^{n_i} [1 - R_{ij}(x)]) \quad (1.8)$$

Le diagramme de fiabilité est donné dans la figure (2.7).

1.3.5 Configuration k/n (k parmi n)

Un système k/n est un système qui fonctionne à condition qu'au moins k composants parmi n fonctionnent.

Il n'y a pas un diagramme de fiabilité usuel qui représente ce mode de fonctionnement.

On donne la formule de la fiabilité suivante

$$R(x) = P(N_x \geq k)$$

où $R(x)$ représente la probabilité que k composants au moins parmi n fonctionnent encore à l'instant x et N_x est le nombre de composants qui fonctionnent au même instant x .

Dans le cas général, supposons que tous les composants sont identiques et indépendants,

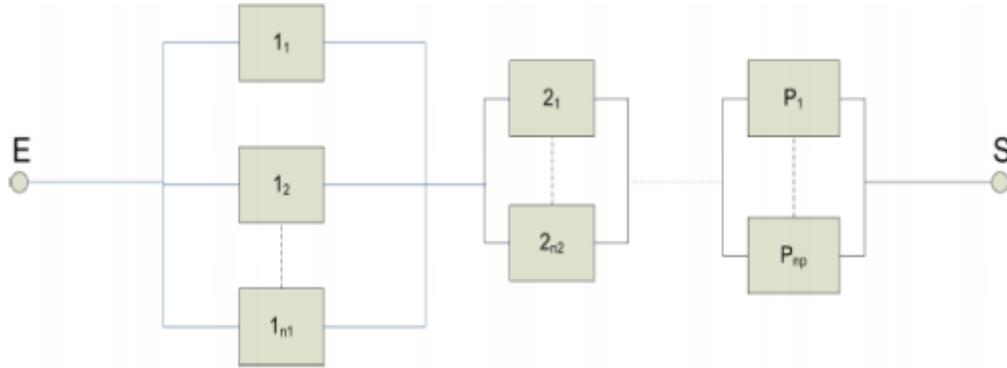


FIGURE 1.7 – Configuration parallèle-série.

de même fiabilité $r(x)$, alors la variable aléatoire N_x est de loi binomiale $B(n, r(x))$, ce qui permet de calculer :

$$R(x) = \sum_{j=k}^n C_n^j r(x)^j [1 - r(x)]^{n-j}$$

Autrement dit ce système tombe en panne si moins de k éléments parmi n fonctionnent. La fonction de structure dans ce cas est sous la forme :

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum x_i \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 2. – Pour $k = n$, on obtient $R(x) = r(x)^n$. C'est bien la fiabilité d'un système série.

– Pour $k = 1$, on obtient $R(x) = 1 - [1 - r(x)]^n$. C'est bien la fiabilité d'un système parallèle.

1.3.6 k-consécutifs-parmi-n

Une structure k-consécutifs-parmi-n fonctionne si et seulement si au moins k composants consécutifs des n composants fonctionnent. Dans ce cas la fonction de structure est donnée par :

$$\phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} X_l = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} X_l \quad (1.9)$$

Lemme 2. (décomposition pivotale) Pour toute fonction de structure ϕ d'ordre n on a :

$$\phi(X) = X_i \phi(1_i, X) + (1 - X_i) \phi(0_i, X) \quad (1.10)$$

pour tout X et pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n$

Définition 16. (La fonction duale)

Si ϕ est une fonction de structure d'ordre n , on définit sa duale par :

$$\phi^D(\mathbf{X}) = 1 - \phi(\mathbf{1-X})$$

où

$$\mathbf{1-X} = (1 - X_1, \dots, 1 - X_n)$$

Remarque 3. – Le dual d'un système en série est un système en parallèle.

- le dual d'un système en parallèle est un système en série
- le dual d'un système k -parmi- n est un système $(n - k + 1)$ -parmi- n .
- le dual d'un système k -consécutifs-parmi- n est un système $(n - k + 1)$ consécutifs-parmi- n .

1.4 Fiabilité d'un système dont les composants sont indépendants

1.4.1 Définitions et généralités

Dans ce paragraphe, on suppose que les composants du système sont statistiquement indépendants. L'état du i^{me} composant est une v.a X_i telle que :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{me}} \text{ composant fonctionne} \\ 0 & \text{si le } i^{\text{me}} \text{ composant est en panne} \end{cases}$$

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ on a

$E(X_i) = P[X_i = 1] = p_i$, et $i = 1, \dots, n$

p_i est la fiabilité du i^{me} composant, c-à-d la probabilité que le i^{me} composant fonctionne.

De la même façon, la probabilité que le système fonctionne est donnée par :

$$P[\phi(\mathbf{X}) = 1] = R = E[\phi(\mathbf{X})]$$

puisque les composants sont supposés indépendants, alors on peut écrire :

$$R = R(p)$$

avec $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $R(p)$ est appelée fonction de fiabilité du système.

1.4.2 Propriétés fondamentales de la fiabilité d'un système cohérent

Lemme 3. (décomposition pivotale) La fonction de la fiabilité d'un système cohérent vérifie l'identité suivante :

$$R(p) = p_i R(1_i, p) + (1 - p_i) R(0_i, p)$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Théorème 9. La fonction de fiabilité $R(p)$ d'une structure cohérente est une fonction strictement croissante par rapport à chaque p_i , pour $0 \ll p \ll 1$.

Notation

$$a \ll b \Leftrightarrow a_i < b_i$$

pour tout $i = 1, \dots, n$

1.5 Importance en fiabilité des composants

Définition 17. *L'importance en fiabilité $I_R(i)$ du composant i est donnée par :*

$$I_R(i) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i}$$

ou ce qui est équivalent à :

$$I_R(i) = R(1_i, p) - R(0_i, p)$$

2.1 Introduction

Dans une collection de domaines de recherche notamment la médecine, la biologie, la finance, l'informatique, génie civil, la mécanique, ainsi que les réseaux....., les chercheurs de chaque domaine s'intéressent aux structures de dépendance entre deux ou plusieurs variables ainsi que les relations décrites par les fonctions de distribution conjointe. Mais, la détermination de la loi conjointe peut être une tâche pénible car il est plus difficile de faire des hypothèses sur le comportement conjoint de plusieurs variables [Chabot \(2012\)](#).

Une des méthodes qui permet d'étudier des structures de dépendance est celle utilisant la notion de copule. La définition de copule a été introduite pour la première fois par Abe Sklar 1959, elle a été étudiée par d'autres mathématiciens et statisticiens; Fréchet, Féron et sous d'autres appellations "fonctions de dépendance" (1971), "représentations uniforme"(1975).

Dans la littérature, il y'a deux études qui ont éclairai le lien entre la copule et l'étude de la dépendance des variables aléatoires :

- (1) L'étude implicite : basée sur les mesures d'association du rho de Spearman et l'indice de dépendance [Hoeffding \(1940\)](#).
- (2) L'étude explicite : basée sur les propriétés d'invariance de la copule sous les transformations strictement monotones où ils introduisent une mesure de dépendance connue sous le nom de sigma [Schweizer et al. \(1981\)](#).

[Hoeffding \(1940\)](#) décrivait des fonctions de distributions bivariées où il a travaillé sur les mesures de dépendance invariantes avec des transformations croissantes. Malgré l'apport notable de ses travaux, ces derniers ne furent pas immédiatement considérés à leur juste valeur notamment en raison de circonstances historiques (Deuxième Guerre mondiale). Fréchet et Hoeffding ont conduit aux mêmes conclusions ce qui explique la présence de ces deux noms juxtaposés largement mentionnés comme références bibliographiques [Fréchet \(1951\)](#).

Les copules constituent un sujet de recherche relativement moderne étant en plein essor depuis ces dernières années. Leurs applications pratiques présentent à l'état actuel un phénomène moderne en probabilités et statistique. Elles sont très utiles pour les raisons suivantes :

- (1) Elles permettent de résumer la structure de dépendance d'une loi de distribution conjointe en la séparant des comportements marginaux. (En d'autres termes, La notion de copule permet de décomposer la loi jointe d'un vecteur aléatoire de dimension n en n fonctions décrivant les lois marginales seules et une fonction décrivant la dépendance entre les composantes de ce vecteur indépendamment des lois marginales).

- (2) Outre, elles servent à coupler les marginales afin d'obtenir une loi multi-variée, ce qui a permis de modéliser les risques multivariés.
- (3) Elles aident à comprendre et à exposer les différentes idées fausses associées à la corrélation, elles présentent un outil très important dans la tarification des titres qui dépendent de nombreux titres sous-jacents tel que : l'option sur le panier d'action, les obligations garanties par des créances (CDO), n options par défaut, etc...

Ce chapitre est un rappel sur les principaux éléments de la théorie des copules. Nous mettons en valeur le concept des fonctions copules, en détaillant leurs propriétés. Une esquisse de certaines démonstrations est élaborée en présentant également les principales caractéristiques de ces fonctions. Plusieurs exemples de copules utilisées sont cités.

2.2 Dépendance

Définition 18. Soit F une fonction continue à droite et définie de $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$, on dit que F est une fonction de répartition bivariée si et seulement si :

$$1) \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0, \text{ pour } i \in \{1, 2\}$$

$$2) \lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1$$

3) (Inégalité du rectangle) pour tout $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_1 < \beta_1$ et $\alpha_2 < \beta_2$, on a

$$F(\alpha_1, \alpha_2) + F(\beta_1, \beta_2) - F(\alpha_1, \beta_2) - F(\beta_1, \alpha_2) \geq 0 \quad (2.1)$$

toute fonction F satisfaisant l'équation (2.1) est dite 2-croissante.

Notation 1. La classe des fonctions de répartition bivariées de marginales F_1 et F_2 , est notée par : $C(F_1, F_2)$.

Remarque 4. en utilisant la fonction de répartition $F(x_1, x_2)$, les marginales F_1 et F_2 sont telles que :

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \quad (2.2)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F_2(x_2) \quad (2.3)$$

Définition 19. La fonction de survie \bar{F} associée à une fonction de répartition cumulative bivariée F correspond à

$$\bar{F}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$$

\bar{F} peut s'écrire en fonction de F, F_1 et F_2 comme suit :

$$\bar{F}(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2)$$

Preuve 6. En effet

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, x_2) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= 1 - P(X_1 \leq x_1 \cup X_2 \leq x_2) \\ &= 1 - P(X_1 \leq x_1) - P(X_2 \leq x_2) + P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2) \end{aligned}$$

$$= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2)$$

2.3 Ordre à dépendance positive bivariée

Dans certaines familles paramétriques de distribution multidimensionnelle, on remarque que la valeur du ou des paramètres influence la force de la dépendance. À partir de cela on peut comparer les fonctions de répartition multivariées entre elles, et on peut également établir un ordre partiel, cette comparaison nous permet de déterminer le degré de dépendance d'une fonction cumulative, la comparaison peut également s'exprimer en termes d'un couple de variables aléatoires.

Notation 2. Le symbole \xrightarrow{d} désignera la convergence en distribution ou en loi .

Définition 20. Soient $F, G, H \in C(F_1, F_2)$ des fonctions de répartition bivariées. Soient (X_1, X_2) et (X'_1, X'_2) deux couples de variables aléatoires telles X_1 et X'_1 ont la même distribution marginale, et X_2 et X'_2 aussi. Un ordre \prec est dit à dépendance positive bivariée, s'il satisfait les conditions suivantes :

1)(Concordance)

$$F \prec G \Rightarrow F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

2)(Reflexive) $F \prec F$.

3)(antisymétrique) $F \prec G$ et $G \prec F \Rightarrow G = F$

4)(Transitive) $F \prec G$ et $G \prec H \Rightarrow F \prec H$

5)(Bornes) $\max\{0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\} \prec F \prec \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$

6)(Invariance à la limite distributionnelle) $F_n \prec G_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$),

$$F_n \xrightarrow{d} F \text{ et } G_n \xrightarrow{d} G \Rightarrow F \prec G$$

7)(Invariance à l'ordre des indices) $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \Rightarrow (X_2, X_1) \prec (X'_2, X'_1)$

8)(Invariance aux transformations croissantes) , Soit a une fonction strictement croissante $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \Rightarrow (a(X_1), X_2) \prec (a(X'_1), X'_2)$

9)(Invariance aux transformations décroissantes) , Soit b une fonction strictement décroissante $(X_1, X_2) \prec (X'_1, X'_2) \Rightarrow (b(X_1), X_2) \prec (b(X'_1), X'_2)$

Remarque 5. Les conditions de 2) à 4) montrent que \prec est une relation d'ordre.

Définition 21. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de couple de variables aléatoires de fonction de répartition F , X est dit de dépendance de quadrant positive si

$$P(X_1 > \alpha_1, X_2 > \alpha_2) \geq P(X_1 > \alpha_1)P(X_2 > \alpha_2) \quad (2.4)$$

pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Remarque 6. En récrivant l'inégalité précédente en utilisant la fonction de survie, on obtient

$$\bar{F}(\alpha_1, \alpha_2) \geq \bar{F}_1(\alpha_1)\bar{F}_2(\alpha_2)$$

Pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Définition 22. Soit F une fonction de répartition. La quasi-inverse $F^{(-1)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ de F est une fonction définie comme suit :

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\} \quad (2.5)$$

Définition 23. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de fonction de répartition univariée respective F_1 et F_2 . Si les limites existent, on peut mesurer la dépendance de queue à droite par le paramètre λ_U

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[X_2 > F_2^{(-1)}(t) \mid X_1 > F_1^{(-1)}(t)] \quad (2.6)$$

Le paramètre λ_L est utilisé pour mesurer la dépendance de queue à gauche avec

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[X_2 \leq F_2^{(-1)}(t) \mid X_1 \leq F_1^{(-1)}(t)] \quad (2.7)$$

Définition 24. Soient $F, G \in C(F_1, F_2)$ deux fonctions de répartition bivariées. On dit que G est plus concordant que F , et on note $F \prec_c G$, si

$$F(x_1, x_2) \leq G(x_1, x_2)$$

Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

2.4 Copule

La notion de copule permet de décomposer la loi jointe d'un vecteur aléatoire de dimension n en n fonctions décrivant les lois marginales seules et une fonction décrivant la dépendance entre les composantes de ce vecteur indépendamment des lois marginales.

Dans cette section, nous formalisons ce concept en donnant une définition précise, en énonçant le fameux théorème de Sklar ainsi qu'en présentant quelques propriétés et résultats.

A la fin de ce chapitre on présente quelques modèles de copules les plus utilisées avec leurs propriétés à titre d'exemple ; la copule de Clayton, de Frank, de Gumbel et la copule gaussienne.

2.4.1 Éléments de base

Notation 3. On note par $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$. et, I^2 fera référence au carré unitaire $I = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Rappelons la fonction de répartition univariée d'une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle I ($U \sim U(0, 1)$) qui est donnée par :

$$P(U \leq u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

Puisque les copules sont liées à la distribution uniforme,

Définition 25. Soit $C : I^2 \rightarrow I$ une fonction, on dit que C est une copule bivariée si elle vérifie les conditions suivantes :

1) C est fermée (close) c'est-à-dire

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (2.8)$$

pour tout $u, v \in I$

2) Les marges sont uniformes, c'est-à-dire

$$C(u, 1) = u, C(1, v) = v \quad (2.9)$$

pour tout $u, v \in I$

3) C est une fonction 2-croissante sur I^2 , c'est-à-dire pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ tels que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (2.10)$$

Définition 26. On appelle copule C de dimension n une fonction de répartition n dimensionnelle définie sur $[0, 1]^n$ et dont les lois marginales sont uniformes sur $[0, 1]$:

1) Pour tout $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ ayant au moins une composante nulle, $C(\mathbf{u}) = 0$

2) C est n -croissante :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} C_{u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}} \geq 0$$

Avec $u_{j1} = a_j$ et $u_{j2} = b_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [0, 1]^n$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

3) Pour tout $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ ayant toutes ses composantes égales à 1 sauf éventuellement u_k , $C(\mathbf{u}) = u_k$

Remarque 7. Lorsqu'on compare la définition de copules avec celle d'une fonction de répartition bivariée, on aura une restriction de cette dernière en limitant le domaine à I^2 et que les marges soient uniformes.

Par exemple, on peut déterminer les copules extrêmes, qui sont données par les bornes de Fréchet

$$C^-(u, v) = \max(0, u + v - 1)$$

et

$$C^+(u, v) = \min(u, v)$$

Théorème 10. Pour toute copule C de dimension $d \geq 2$ et pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$, la copule $C(\mathbf{u})$ est bornée telle que

$$C^-(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq C^+(\mathbf{u}) \quad (2.11)$$

où les bornes de Fréchet sont définies par

$$C^-(\mathbf{u}) = \max(0, 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i) \quad (2.12)$$

et

$$C^+(\mathbf{u}) = \min_{1 \leq i \leq d} u_i \quad (2.13)$$

Preuve 7. Pour (2.12), soit $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ un vecteur des variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]^d$, où $d \geq 2$, et C la copule associée à la loi jointe de ces variables. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$. On a donc :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{U}) &= P(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) \\ &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^d U_i > u_i\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^d P(U_i \geq u_i) \\ &= 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i \end{aligned}$$

Or, étant une fonction de répartition, C est toujours supérieure ou égale à 0. Alors,

$$c(\mathbf{u}) \geq \max(0, 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i)$$

et pour (2.13) se montre sous ce raisonnement :

$$c(\mathbf{u}) = P(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) \leq P(U_i \leq u_i) = u_i$$

Ainsi,

$$C(\mathbf{u}) \leq \min_{1 \leq i \leq d} u_i$$

Théorème 11. Soit C une copule multivariée de dimension $d \geq 2$. C est lipschitzienne : pour tout (u_1, \dots, u_d) et (v_1, \dots, v_d) qui appartiennent au domaine de C , on a

$$|C(u_1, \dots, u_d) - C(v_1, \dots, v_d)| \leq \sum_{i=1}^d |u_i - v_i|$$

Ainsi, C est uniformément continue sur son domaine.

Preuve 8. Soient les variables aléatoires suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$: $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ et C une copule de dimension $d \geq 2$ définie par $P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d)$ On a,

lorsque $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$

$$\begin{aligned} |C(u_1, \dots, u_d) - C(v_1, \dots, v_d)| &= |E[1_{\mathbf{U} \leq \mathbf{u}}] - E[1_{\mathbf{V} \leq \mathbf{v}}]| \\ &\leq E[|\prod_{i=1}^d 1_{(U_i \leq u_i)} - \prod_{i=1}^d 1_{(V_i \leq v_i)}|] \\ &\leq E[\sum_{i=1}^d |1_{(U_i \leq u_i)} - 1_{(V_i \leq v_i)}|] \\ &= \sum_{i=1}^d |u_i - v_i| \end{aligned}$$

2.4.2 Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar nous permet d'expliquer la relation entre le principe de la copule et la fonction de répartition bivariée et aux lois marginales.

Théorème 12. Soit F une fonction de répartition conjointe de marginales F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule $C : I^2 \rightarrow I$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)) \quad (2.14)$$

De plus, C est dite unique lorsque F_1 et F_2 sont continues.

L'équation sus notée (2.14) est une fonction de répartition bivariée F à l'aide d'une copule et de lois marginales F_1 et F_2 . par ailleurs, il est possible d'exprimer une copule à partir de F et des inverses (ou quasi-inverses) des fonctions de répartition marginales

Corollaire 1. Soit F une fonction de répartition conjointe de marges continues F_1 et F_2 et C la copule associée à F . Alors

$$\begin{aligned} C(u, v) &= C(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \\ &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

pour tout $(u, v) \in I^2$.

Propriétés

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques propriétés importantes de la théorie des copules, qui sont devenues un outil statistique très avantageux grâce à leur caractère prévisible lorsqu'elles sont appliquées aux variables aléatoires des transformations strictement monotones.

Notation 4. La notation C_{X_1, X_2} précise que la copule C est associée aux variables X_1 et X_2 .

Théorème 13. Pour X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues ayant pour copule C_{X_1, X_2} . Pour α et β deux fonctions strictement croissantes, on a

$$C_{X_1, X_2} = C_{\alpha(X_1), \beta(X_2)}$$

Dans la littérature, On l'appelle le théorème d'invariance sous transformations strictement croissantes.

Remarque 8. Bien que l'invariance soit assurée seulement pour une croissance stricte des deux fonctions appliquées, il existe un résultat dans le cas où α et β sont plutôt décroissantes, le comportement de la copule étant ainsi prévisible.

Lemme 4. Soient U et V deux variables aléatoires uniformes sur I , et C la copule associée. Pour $u, v \in I$, on a

$$P(U \leq u \mid V \leq v) = \frac{C(u, v)}{v} \quad (2.16)$$

et

$$P(U > u \mid V > v) = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}. \quad (2.17)$$

Théorème 14. Soient X et Y deux variables aléatoires (définies dans la définition 23). Si les limites des équations (2.6) et (2.7) existent, alors

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \quad (2.18)$$

et

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (2.19)$$

La valeur de ces paramètres de dépendance de queue se situe toujours dans l'intervalle I .

Remarque 9. Soit C une copule

- 1 Si λ_U existe et $\lambda_U \in I^*$, alors C a une dépendance de queue à droite.
- 2 Si λ_L existe et $\lambda_L \in I^*$, alors C a une dépendance de queue à gauche.

Théorème 15. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues. On dit que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si

$$C_{X_1, X_2}(u, v) = C^{\text{II}}(u, v) = uv$$

et on note par

$$C^{\text{II}}(u, v) = uv$$

2.5 Exemples de copules

Une fois les données obtenues, et pour déterminer les relations entre les variables et afin de résumer d'avantage la structure de dépendance il faut établir un meilleur choix de copule

(leur type ainsi que le ou les paramètres en cause) à l'aide de tests d'adéquation. La densité d'une copule, notée $c(u, v)$, est définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (2.20)$$

À partir de celle-ci, on peut calculer la fonction de densité :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times f_1(x_1) \times f_2(x_2) \quad (2.21)$$

où $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ sont les fonctions de densité marginales.

De l'équation (2.21), on peut facilement montrer que la densité de la copule d'indépendance $c^{\text{II}}(u, v)$ vérifié

$$c^{\text{II}}(u, v) = 1$$

$\forall (u, v) \in I^2$.

2.6 Copules elliptiques

Du théorème de Sklar, il est possible d'extraire d'une distribution elliptique une copule dite elliptique.

Définition 27. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires, on dit que X suit une loi elliptique bivariée si et seulement si on peut écrire X sous la forme

$$X = \mu + R\Sigma^{\frac{1}{2}}U \quad (2.22)$$

où μ : est la moyenne, si elle existe.

R : une variable aléatoire positive indépendante de U .

Σ : une matrice de forme (matrice de variance-covariance, si elle existe).

U : une variable aléatoire uniformément distribuée sur le disque unitaire de \mathbb{R}^2 .

Remarque 10. Les courbes de niveau des densités de telles distributions forment des ellipses d'excentricité constante *Nelsen (2006)*.

Dans cette famille on trouve les copules gaussiennes et les copules de Student.

2.6.1 Copule gaussienne

La copule gaussienne fait partie de la famille elliptique des copules bivariées à un paramètre. L'utilisation de cette copule est en relation avec la mesure de dépendance obtenue par le coefficient de corrélation linéaire ρ .

Définition 28. On définit la copule gaussienne bivariée C_G par :

$$C_G(u, v; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (2.23)$$

avec : ρ le coefficient de corrélation.

Φ la distribution normale $N(0, 1)$.

Φ_ρ la distribution normale bivariée de matrice de corrélation associée à ρ .

Cependant la copule gaussienne n'est pas adaptée pour modéliser l'interaction de valeurs extrêmes. C'est pour cela, c'est préférable d'appliquer d'autres copules, et même pour caractériser une dépendance non linéaire.

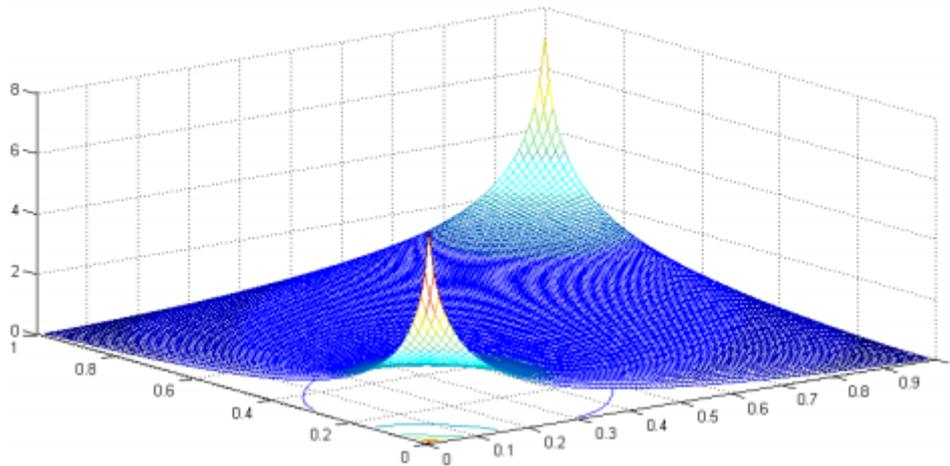


FIGURE 2.1 – Densité de la copule gaussienne pour une corrélation de 0,05

2.6.2 Copule de Student

La copule de Student est issue, comme son nom l'indique, de la distribution multivariée de Student. Sa construction est dans le continu de la copule gaussienne mais, contrairement à cette dernière, elle réussit à bien capter les dépendances aux extrêmes, tant positives que négatives, de par ses queues lourdes.

Définition 29. La copule de Student bivariée C_T est définie par :

$$C_T(u, v; \rho, k) = T_{\rho, k}(T^{-1}(u), T^{-1}(v)) \quad (2.24)$$

Avec : ρ le coefficient de corrélation.

T la distribution de Student bivariée standardisée.

$T_{\rho, k}$ la distribution de student bivariée de matrice de corrélation associée à ρ et de degré de liberté $k \geq 3$.

2.7 Copules archimédiennes

La notion de copule archimédienne, définie par GENEST et MACKAY [1986], regroupe un certain nombre de copules ci-dessous (Clayton, Gumbel, Franck); l'idée d'une copule

archimédienne de générateur φ est que la transformation $w(u) = \exp(-\varphi(u))$ appliquée aux marginales " rend les composantes indépendantes " :

$$w(C(u_1, u_2, \dots, u_n)) = \prod_{i=1}^n w(u_i)$$

Les copules archimédiennes représentent une classe très importante de copule, en raison de

- 1) Elles sont très faciles à construire.
- 2) Un nombre considérable de familles qui appartiennent à celles-ci.
- 3) Elles ont des propriétés très intéressantes.

Définition 30. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ une fonction telle que, pour tout $u \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(u) < 0 \\ \varphi''(u) > 0 \end{cases}$$

Les copules archimédiennes sont définies comme suit :

$$C(u, v) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u), \varphi(v)) & \text{Si } \varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

La fonction φ sera dite fonction génératrice de la copule.

2.7.1 Copule de Clayton

Pour $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, la copule de Clayton, de générateur

$$\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \tag{2.25}$$

est définie sous la forme suivante

$$C_\theta(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{\frac{-1}{\theta}}$$

2.7.2 Copule de Frank

La copule de Frank, de générateur

$$\varphi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{\theta t} - 1}{e^\theta - 1}\right)$$

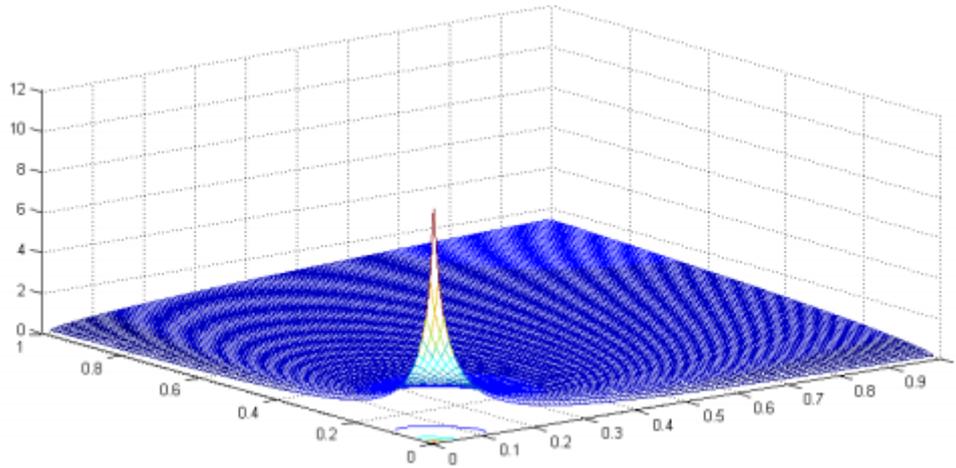


FIGURE 2.2 – Densité bivarée de la copule de Clayton $\theta = 0,05$

Pour $\theta \in \mathbb{R}^*$, est définée par

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right) \quad (2.26)$$

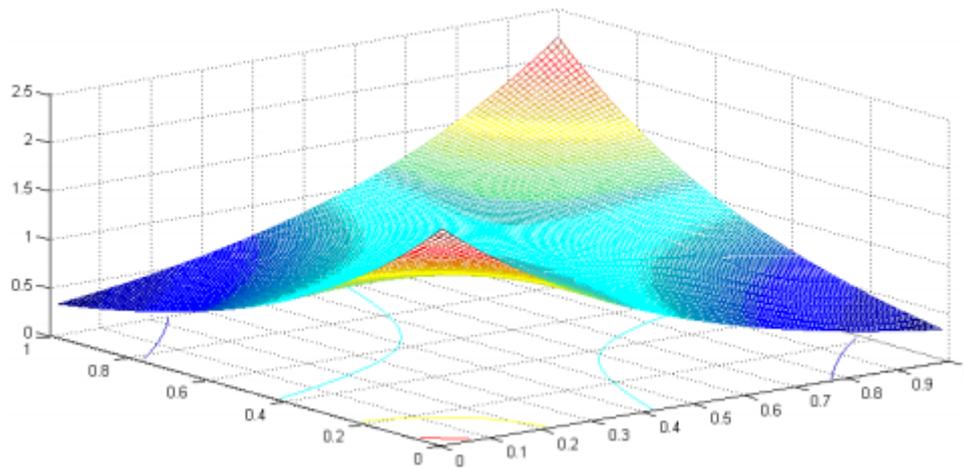


FIGURE 2.3 – Densité bivarée de la copule de Frank $\theta = 2$

2.7.3 Copule de Gumbel

La copule de Gumbel, parfois appelée Gumbel-Hougaard, où la fonction génératrice est sous la forme :

$$\varphi_{\theta}(t) = (-\ln t)^{\theta}$$

pour $\theta \geq 1$.

Cette fonction de copule est définie par l'expression suivante :

$$C_\theta(u, v) = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}} \quad (2.27)$$

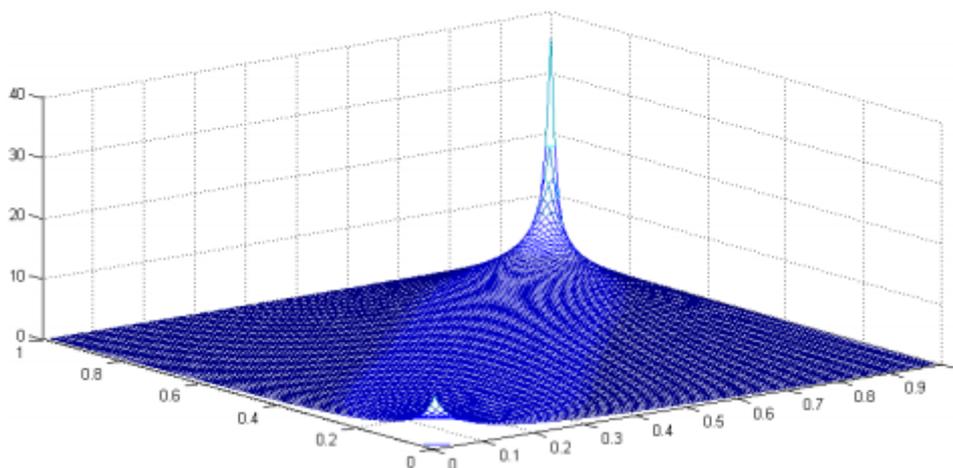


FIGURE 2.4 – Densité de la copule de Gumbel bvariée pour $\alpha = 2$

Remarque 11. D'autre part, les copules ainsi générées ont des formes analytiques closes. Le tableau suivant regroupe les caractéristiques des familles les plus connues.

Copule	Générateur	Copule bvariée
Frank ($\alpha \neq 0$)	$-\ln\left(\frac{e^{-\alpha t}-1}{e^{-\alpha}-1}\right)$	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)}{(e^{-\alpha}-1)}\right)$
Gumbel ($\alpha \geq 1$)	$(-\ln(t))^\alpha$	$\exp\left(-\left[(-\ln(u))^\alpha + (-\ln(v))^\alpha\right]^{1/\alpha}\right)$
clyton $\alpha > 0$	$\alpha(t^{-1/\alpha}-1)$	$(u^{-1/\alpha} + v^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}$

FIGURE 2.5 – Copules Archimédiennes bvariées

Propriétés 2.

- 1) La copule de Gumbel n'appréhende que des dépendances positives et possède la caractéristique de pouvoir représenter des risques dont la structure de dépendance est plus accentuée sur la queue supérieure. Elle est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événements de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurance ou actifs financiers.
- 2) La copule de Franck permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives. On note qu'il n'existe pas de dépendance de queue pour cette copule.
- 3) La copule de Clayton, comme celle de Gumbel, ne permet de modéliser que les dépendances positives. Mais, en plus elle vise à rendre compte d'une dépendance sur les événements de faible intensité.

Etude Comparative

3.1 Introduction

Le calcul exact de la fonction de fiabilité reste une tâche difficile. Ceci amène dans certains cas à chercher d'autres issues pour cette évaluation. Parmi ces issues, l'approche qui consiste à chercher des limites de la fiabilité. Si ces limites sont atteignables, elles fournissent également la meilleure (ou la pire) performance du système. Notons que dans le cas i.i.d, quelques bornes limites ont été obtenues [Barlow R. E (1975), Lindqvist B.H (2016), P and T (2014), Navarro and Rychlik (2007), Navarro and Rychlik (2010)]...

Quelques résultats ont été étendus aux systèmes à composants échangeables ; la distribution conjointe des durées de vie des composants est invariante en respectant la loi des permutations. Dans ce cas, les durées de vie des composants sont également distribuées de manière identique.

Mais, jusqu'à présent, nous constatons que peu de résultats ont été publiés pour des systèmes aux composants éventuellement dépendants et hétérogènes (les durées de vie des composants sont distribuées de manière non identique). Certains résultats de comparaison ont été illustrés dans [Balakrishnan and Torrado (2016)] pour les systèmes parallèles et dans [Navarro J and A (2016)] pour les systèmes cohérents. Dans le dernier article, des bornes précises pour la fiabilité du système en général ont été dérivées. Les résultats obtenus sont basés sur la représentation de la fonction de fiabilité du système sous forme de distorsion des fonctions de fiabilité des composants.

Peu de travaux également sur les limites inférieures et supérieures précises qui sont obtenues pour les fonctions de fiabilité et les durées de vie de systèmes cohérents basés sur des composants dépendants absolument continus et échangeables avec une fonction de distribution marginale donnée. Ces travaux sont basés sur le concept de signature de Samaniego, ils montrent en premier, que la distribution de tout système cohérent basée sur des composants interchangeables avec une distribution jointe absolument continue est une combinaison convexe de distributions de statistiques d'ordre (équivalente aux systèmes k -sur- n) avec des poids identiques aux valeurs de la signature de Samaniego du système. Ceci étend la représentation de Samaniego valable dans le cas de composants indépendants et identiquement distribués. En combinant la représentation avec des limites optimales sur des combinaisons linéaires de fonctions de distribution de statistiques d'ordre provenant d'échantillons identiques, ils déduisent les limites de fiabilité, en fonction de la signature du système et de distributions marginales des composants dépendants. ils présentent également les séquences de distributions jointes absolument continues échangeables de composants atteignant les limites .

Dans ce chapitre, une investigation sur l'évaluation de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n :G est faite, celle-ci est basée sur les résultats existants dans la littérature.

Le contenu de ce chapitre est subdivisé en deux parties essentielles : celle des composants i.i.d puis celle des composants dépendants avec les variantes, composants identiques et composants non identiques. La première partie est dédiée, en premier lieu, au calcul exact de la fiabilité des systèmes en question ; voir [Belaloui \(2007\)](#) et [Bouloudene and Belaloui \(2017\)](#) où les résultats sont établis dans un cadre plus général car les systèmes et les composants sont supposés à multi-états ce qui englobe le cas binaire où les systèmes et les composants sont ou en fonction ou en panne. En deuxième lieu, l'intérêt est porté sur l'encadrement de la fiabilité de ces systèmes ; voir la méthode d'inclusion exclusion [Belaloui \(2007\)](#).

Alors que la deuxième partie englobe le cas dépendant, on y présente les résultats de [Destercke et al. \(2014\)](#) qui donnent les bornes dans le cas de l'indépendance inconnue. Puis les résultats obtenus par [Miziula and Navarro \(2018\)](#) concernat les systèmes linéaires (circulaires) k-consécutifs-sur-n :G (resp). Les bornes élaborées sont basées sur deux fonctions $\overline{G_1}$ et $\overline{G_2}$.

Nous complétons et enrichissons cette partie par l'étude de quelques exemples pour l'illustration de ces résultats.

3.2 Cas indépendants

Dans cette partie, on présente brièvement quelques récents résultats concernant l'évaluation de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n.

3.2.1 Le calcul exact de la fiabilité d'un système

Pour un système cohérent, la fiabilité est évaluée selon les liens minimaux ou bien les coupes minimales comme suit :

$$R = E\left[\prod_{j=1}^p \prod_{i \in L_j} X_i\right] \quad (3.1)$$

$$R = E\left[\prod_{j=1}^K \prod_{i \in K_j} X_i\right] \quad (3.2)$$

où $L_j, j = 1, \dots, p$ sont les liens minimaux et $K_j, j = 1, \dots, K$ sont les coupes minimales.

Dans le cas où les v.a X_1, \dots, X_n sont indépendantes, on obtient :

$$R(p) = \sum_X \phi(X_1, \dots, X_n) \prod_i p_i^{X_i} (1 - p_i)^{1 - X_i} \quad (3.3)$$

3.2.2 Fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n à multi-états

[Belaloui \(2007\)](#) a adopté une approche combinatoire pour calculer la fiabilité exacte des systèmes k-consécutifs-sur-n : G multi-états. Puis [Bouloudene and Belaloui \(2017\)](#) ont élaboré

une formule donnant aussi la fiabilité exacte des mêmes systèmes lorsque $2k \geq n$. Ensuite, une extension a été faite pour les systèmes k-consécutifs-sur- L_n : G série.

Définition 31. *Un système k-consécutifs-sur-n : G multi-états est un système à n composants multi-états disposés linéairement. Ce système fonctionne si et seulement si au moins k composants consécutifs fonctionnent ($k \leq n$). Sa fonction de structure est donnée par :*

$$\phi_c(x) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \left(\min_{i \leq j \leq i+k-1} X_j \right) \quad (3.4)$$

Théorème 16. *Si $k \geq n - k$, alors :*

$$P(\phi_c \geq l) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \left(\prod_{j=i}^{k+i-1} \sum_{h=l}^M p_j(h) \right) - \sum_{i=1}^{n-k} \left(\prod_{j=i}^{k+i} \sum_{h=l}^M p_j(h) \right) \quad (3.5)$$

Preuve 9. voir l'article de *Bouloudene and Belaloui (2017)*

Corollaire 2. *Si tous les composants sont identiquement distribués, alors*

$$P(\phi_c \geq l) = (n - k + 1) \left(\sum_{h=l}^M p_j(h) \right)^k - (n - k) \left(\sum_{h=l}^M p_j(h) \right)^{k+1} \quad (3.6)$$

Corollaire 3. *Si $k = n$, alors*

$$P(\phi_c \geq l) = \prod_{j=1}^n \sum_{h=l}^M p_j(h) \quad (3.7)$$

Qui est la probabilité d'un système série à multi-états.

3.2.3 Encadrement de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n :G à multi-états

Comme le calcul direct de la fiabilité des systèmes est très pénible, surtout quand ces systèmes sont à multi-états et avec des configurations complexes. Ceci amènent les chercheurs à adopter d'autres méthodes pour résoudre le problème. Ce sont des méthodes d'approximation, simulation comme par la méthode de Monté-Carlo [Berleant and Zhang (2004), Levitin G. (2003) et Zio E (2004)], optimisation qui est soit à maximiser la fiabilité du système, soit à minimiser le coût total et dont les algorithmes génétiques sont appréciablement utilisés. Notons également les travaux de Levitin, Lisnianski [Levitin (2001); Levitin G. (2003)...] où ils ont eu recours à l'estimation en utilisant la fonction génératrice des moments universelle (UMGF). Et ceux de B.H (2003) et Belaloui (2005) où l'approche adoptée est celle de l'encadrement de la valeur de la fiabilité. Pour cela, les résultats de (EL-Neweihi (1978), Boedigheimer (1994)) ont été appliqués pour établir des bornes de la fiabilité de tels systèmes. Et ceci en utilisant le concept de vecteurs critiques de connexion au niveau j qui n'est autre que le concept de vecteurs liens minimaux au niveau j.

3.2.4 La méthode d'inclusion-exclusion

Cette méthode fournit des bornes successives d'encadrement de la fiabilité du système qui convergent vers la valeur exacte.

Soit E_r l'évènement : "tous les composants du lien minimal L_r fonctionnent" et soit :

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq p} P[E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}]$$

Le principe d'inclusion-exclusion définit R par :

$$R = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} S_k \quad (3.8)$$

où p est le nombre de liens minimaux

et

$$S_1 - S_2 \leq R \leq S_1 \quad (3.9)$$

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \leq R \leq S_1 - S_2 + S_3 \quad (3.10)$$

etc

Pratiquement, le calcul de quelques S_k est suffisant pour obtenir une bonne approximation.

3.2.5 Encadrement de la fiabilité dans le cas indépendant

L'objectif dans cette partie est de donner une borne supérieure et une borne inférieure du système k consécutifs-parmi- n : G à multi-états. voir [Belaloui \(2007\)](#).

Le modèle

Soit un système constitué de n composants, X_i représente l'état du composant i , T_i sa durée de vie, tel que :

$$X_i = j, i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, M$$

Définition 32. Soit un système k consécutifs-parmi- n : G à multi-états, on dit qu'il fonctionne ssi il y a au moins k composants consécutifs dans des états de fonctionnement.

On considère que :

$$\begin{cases} x_i \geq j & \Rightarrow \text{le composant } i \text{ fonctionne} \\ x_i < j & \Rightarrow \text{le composant } i \text{ est en panne} \end{cases}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, M$. et similairement pour le système

$$\begin{cases} \phi(X) \geq j & \Rightarrow \text{le système fonctionne} \\ \phi(X) < j & \Rightarrow \text{le système est en panne} \end{cases}$$

On remarque que j peut avoir des valeurs différentes, donc les termes "fonctionnement" et "panne" ont des sens dynamiques.

Définition 33. Un système k consécutifs-parmi- n : G à multi-états, fonctionne (i.e $\phi(X) \geq j, j = 1, \dots, M$) ssi il y a au moins k composants consécutifs qui sont dans des états supérieurs ou égaux à l'état j .

La fonction de structure de l'état de ce système est donnée par :

$$\phi(X) = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} X_l$$

$$\phi(X) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{l=i}^{i+k-1} X_l$$

où, X_1, X_2, \dots, X_n sont les états des composants $1, 2, \dots, n$

La durée de vie T_n^j de ce système est donnée par :

$$T_n^j = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq l \leq i+k-1} T_l$$

où, T_1, T_2, \dots, T_n sont les durées de vie des composants $1, 2, \dots, n$

Théorème 17. Soit un système k consécutifs-sur- n : G à multi-états et soit T_n^j sa durée de vie, la fiabilité de ce système $P(T_n^j > t)$ est encadrée comme suit :

$$\frac{S_{i,j}(t)}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\bar{F}(t) - (M-j+1)^k \bar{F}^k(t)}{1 - (M-j+1)\bar{F}(t)} \left[\frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(t)} \right]^k + (n-k+1)(M-j+1)^k \bar{F}^k(t)} \leq P(T_n^j > t) \leq S_{i,j}(t) \quad (3.11)$$

où

$$S_{i,j}(t) = \sum_{i=1}^{n-k+1} P_i(t)$$

et

$$P_i(t) = \prod_{l=i}^{i+k-1} \Delta_l(t)$$

$$\Delta_l(t) = \sum_{h=j}^M P(T_{l,h} > t)$$

$T_{l,h}$: la durée de vie du composant l quand il est à l'état h ; ($h = j, j+1, \dots, M$), et $t \in (0, +\infty)$, il représente le temps.

Proof 2. Voir *Belaloui (2007)*

Cas de composants indépendants et identiquement distribués

Dans le cas où les durées de vies T_i des composants sont indépendantes et identiquement distribuées, le résultat précédent se réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{(n-k+1)[(M-j+1)\overline{F}(t)]^k}{1 + 2 \frac{(M-j+1)\overline{F}(t) - [(M-j+1)\overline{F}(t)]^k}{1 - (M-j+1)\overline{F}(t)} + (n-k+1)[(M-j+1)\overline{F}(t)]^k} \quad (3.12)$$

$$\leq P(T_n^j > t) \leq (n-k+1)[(M-j+1)\overline{F}(t)]^k$$

Plusieurs exemples sont traités dans la thèse de [Belaloui \(2007\)](#) et ceci donne une bonne approximation de la fiabilité du système dans le cas indépendant.

3.2.5.1 Cas dépendant

Dans de nombreux cas, la fiabilité du système y supposée binaire (opérationnel ou défaillant), peut être estimée à partir de la fiabilité de ses composants et d'une fonction de structure reliant les états binaires (opérationnel ou défaillant) de ces composants à l'état du système. Habituellement, cette estimation est réalisée en supposant que :

- Les probabilités de défaillance des composants soient connues ou données avec précision.
- Le comportement des composants est indépendant.

La première hypothèse est assez forte, en particulier, lorsque peu ou pas de données concernant les composants sont disponibles, ou lorsqu'il faut modéliser l'opinion d'un expert sur le composant. Dans ces cas, l'utilisation d'une probabilité précise signifie généralement que l'on doit ajouter une hypothèse non étayée par les preuves disponibles (par exemple, en utilisant le principe d'entropie maximale ([Jaynes \(2003\)](#))). Une alternative consiste à inclure l'imprécision dans le modèle d'incertitude en prenant en compte les limites de probabilité.

La deuxième hypothèse est généralement plus probable, mais l'analyste peut souhaiter l'assouplir, en considérant le cas où les dépendances possibles entre les composants sont inconnues ou partiellement connues. Les deux problèmes ont été examinés, en général, par des théories de probabilités imprécises [Walley \(1991\)](#), [Couso and Walley \(2000\)](#).

Cependant, le problème spécifique de l'évaluation de la fiabilité d'un système dans des hypothèses aussi prudentes n'a été exploré que dans très peu de travaux [Pedroni and Zio \(2013\)](#), [Berleant and Zhang \(2004\)](#), [Utkin \(2004\)](#).

Un axe de ce domaine très sollicité du fait de ses nombreuses applications dans des domaines de grande importance, à savoir les systèmes k-consécutifs-sur-n dans le cas où la dépendance entre les composants est mal connue ou partiellement connue. [Destercke et al. \(2014\)](#) se sont investis dans cet axe. Ils ont commencé par rappeler certains résultats obtenus antérieurement qui considéraient que les probabilités de panne des composants sont inconnues en supposant l'indépendance des composants puis la dépendance mal connue des composants.

L'étude principale de cet article porte sur les systèmes k-sur-n, k-consécutifs-sur-n avec les deux variantes linéaire et circulaire. Le but était d'établir des bornes de la fiabilité de ces systèmes, vu que le calcul direct reste très difficile à élaborer. Les résultats obtenus étaient pour les systèmes k-sur-n :F puis le système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :F et le système cir-

culaire 2-consécutifs-sur-4 :F dans le cas de la dépendance des composants. Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement, les résultats de cet article.

Préliminaires et notations

Considérons un ensemble de composants X_1, \dots, X_N , dont les valeurs sont binaires et décrites par le domaine $\chi = \{1, 0\}$.

Où 1 signifie généralement le cas en fonction et 0 pour le cas en panne.

On note $\chi^N = \times_{i=1}^N \chi$ le produit cartésien décrivant l'ensemble des états possibles du système.

On note $x = (x_1, \dots, x_N) \in \chi^N$ un état du système.

L'incertitude du fonctionnement d'un composant X_i est donnée par une probabilité imprécise, c'est-à-dire par deux bornes

$$\underline{P}_i = \underline{P}(X_i = 1_i) \quad (3.13)$$

Et

$$\overline{P}_i = \overline{P}(X_i = 1_i) \quad (3.14)$$

Noter que les probabilités précises sont récupérées lorsque $\underline{P}_i = \overline{P}_i$.

Pour un système donné, la fonction de structure $\phi : \chi^N \rightarrow \{0, 1\}$ est une application pour chaque système à état $x \in \chi^N$ est définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si le système fonctionne} \\ 0 & \text{si le système est en panne} \end{cases}$$

$\phi^{-1}(0)$ et $\phi^{-1}(1) \subseteq \chi^N$ (noter qu'ils forment une partition de χ^N).

$$\begin{cases} \phi^{-1}(0) & \text{l'ensemble des états pour les quels le système est en panne} \\ \phi^{-1}(1) & \text{l'ensemble des états pour les quels il fonctionne} \end{cases}$$

Nous supposons également que le système est cohérent, c'est-à-dire

si $x \geq x'$, alors $\phi(x) \geq \phi(x')$

Ce qui signifie que si davantage de composants fonctionnent, le système ne peut que s'améliorer.

Problème générique

Le problème générique que nous souhaitons aborder consiste à estimer les limites d'incertitude de $\phi^{-1}(1)$ tel que

$$\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = 1 - \overline{P}(\phi^{-1}(0)) \quad (3.15)$$

Et

$$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = 1 - \underline{P}(\phi^{-1}(0)) \quad (3.16)$$

Connaissant juste les limites $\underline{P}_i, \overline{P}_i$, le problème d'estimation $\underline{P}(\phi^{-1}(1))$ peut être exprimé par :

$$\min_p \sum_{x \in \chi^N, \phi(x)=1} P(x) \quad (3.17)$$

sous les contraintes

$$\underline{P}_i \leq \sum_{x \in \chi^N, x_i=1} P(x) \leq \overline{P}_i \quad (3.18)$$

$\forall i \in [1, N]$

$$\sum_{x \in \chi_{1:N}} P(x) = 1, P(x) \geq 0, \forall x \in \chi^N$$

La borne supérieure est obtenue en prenant la valeur max au lieu de min.

Le programme linéaire ci-dessus exprime que nous recherchons la probabilité conjointe qui minimise $P(\phi^{-1}(1))$ qui respecte les marginales $\underline{P}_i, \overline{P}_i$ sans faire aucune hypothèse sur la dépendance.

Il est intéressant de noter que, sous de telles hypothèses, l'inférence obtenue sur $P(\phi^{-1}(1))$ sera imprécise, même si on part de probabilités marginales précises $\underline{P}_i = \overline{P}_i$

Bien que le problème ci-dessus soit un programme linéaire, le nombre de variables augmente de manière exponentielle avec le nombre de composants, ce qui rend NP-difficile à résoudre (comme le problème de fiabilité fondamental (Myers (2010), Ch 3.)) pour les systèmes génériques. Il est donc intéressant de rechercher des cas spécifiques présentant une complexité informatique inférieure. Dans la suite, nous détaillerons quelques résultats pour de telles structures de système spécifiques, à la fois dans le cas de composants indépendants et d'indépendance inconnue. Nous nous en tiendrons au cas plus facile mais souvent considéré des composants avec une incertitude identique (i.e $\overline{P}_i = \overline{P}_w$ et $\underline{P}_w = \underline{P}_i$ pour tout i)

Notez également que, le système étant cohérent, le minimum en (3.17) est obtenu en considérant $p_i = \underline{P}_i$ c'est pour cela nous pouvons remplacer (3.18) par :

$$\underline{P}_i = \sum_{x \in \chi_{1:N}, x_i=1} P(x)$$

Cela rend le problème un peu plus simple à résoudre et indique en gros que nous pouvons le considérer comme un problème de cas précis où les probabilités de fonctionnement précises des composants sont égales à leurs limites inférieures. Il en va de même pour les limites supérieures, cette fois en prenant les probabilités supérieures \overline{P}_i comme des valeurs précises. Dans le cas de l'indépendance, nous avons que

$$P(x) = \prod_{i, x_i=1} p_i \prod_{i, x_i=0} (1 - P_i) \quad (3.19)$$

Remarque 12. Par conséquent, dans ce cas, obtenir les limites supérieure et inférieure $\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))$ consiste simplement à remplacer la probabilité qu'un composant fonctionne par la limite appropriée dans (3.19) par exemple, on prend $P_i = \underline{P}_i$ pour calculer $\underline{P}(\phi^{-1}(1))$.

Les structures étudiées dans le travail de Destercke et al. (2014) sont les suivantes :

- Système k-sur-n :F (k/n : F) : système de n composants, il tombe en panne en cas de défaillance d'au moins k d'entre eux disposés linéairement.
- Système circulaire k-consécutifs-sur-n :F (c :k/n : F) : les composants sont disposés sur un

cercle, ce système tombe en panne ssi au moins k composants consécutifs sont en panne. Le tableau 3.1 récapitule les formules des bornes de la fiabilité des différents systèmes.

k/n :F	$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^{k-1} C_i^n (\overline{P}_w)^{n-i} (1 - \overline{P}_w)^i$ $\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^{k-1} C_i^n (\underline{P}_w)^{n-i} (1 - \underline{P}_w)^i$
L : k/n :F	$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^n C_i^{n-i.k} (-1)^i (\overline{P}_w (1 - \overline{P}_w)^k)^i$ $-(1 - \overline{P}_w)^k \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-k(i+1)} (-1)^i (\overline{P}_w (1 - \overline{P}_w)^k)^i$ $\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^n C_i^{n-i.k} (-1)^i (\underline{P}_w (1 - \underline{P}_w)^k)^i$ $-(1 - \underline{P}_w)^k \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-k(i+1)} (-1)^i (\underline{P}_w (1 - \underline{P}_w)^k)^i$
C : k/n :F	$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^n C_i^{n-i.k} (-1)^i (\overline{P}_w (1 - \overline{P}_w)^k)^i$ $+k \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-k(i+1)-1} (-1)^i (\overline{P}_w (1 - \overline{P}_w)^k)^{i+1} - (1 - \overline{P}_w)^n$ $\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \sum_{i=0}^n C_i^{n-i.k} (-1)^i (\underline{P}_w (1 - \underline{P}_w)^k)^i$ $+k \sum_{i=0}^{k-1} C_i^{n-k(i+1)-1} (-1)^i (\underline{P}_w (1 - \underline{P}_w)^k)^{i+1} - (1 - \underline{P}_w)^n$

Table 3.1 : les Formules des bornes de la fiabilité dans le cas indépendant

- Remarque 13.** 1) *Tous ces systèmes généralisent des systèmes en série et en parallèle bien connus, ces derniers correspondant respectivement à des systèmes 1 sur $n : F$ et n sur $n : F$ (qu'ils soient consécutifs ou non). Il convient également de noter que, une fois que k et la composante incertitude sont fixes.*
- 2) *Un système $L : k / n : F$ est plus fiable qu'un système $C : k / n : F$, lui-même plus fiable qu'un système $k / n : F$ (en ce sens que $P(\phi^{-1}(1))$ augmente et est le plus élevé pour le système $L : k / n : F$). Cela signifie que les formules pour les systèmes $k / n : F$ peuvent être utilisées comme limites pessimistes pour les autres systèmes.*
- 3) *Les systèmes $k / n : F$, $L : k / n : F$ et $C : k / n : F$ sous l'hypothèse d'indépendance des composants ont été étudiés dans la littérature (Lambiris and Papastavridis (1985); Utkin (2004), Chao and Koutras (1995), Eryilmaz (2010)), l'obtention des limites inférieures et supérieures consiste donc simplement à remplacer des probabilités précises par des limites appropriées.*
- 4) *Notez que, bien que triviales, les formules pour les systèmes $L : k / n : F$ et $C : k / n : F$ tenant compte de probabilités imprécises n'ont pas été étudiées auparavant.*

Exemple 1. *Soit un système de 4 composants tels que $[\underline{P}_w, \overline{P}_w] = [0.95, 0.99]$, $k = 2$.*

En utilisant les résultats du tableau 1, nous obtenons les limites suivantes :

$$\text{Système } 2/4 : F [\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.9859, 0.9993]$$

$$\text{Système } C : 2/4 : F [\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.9905, 0.9996]$$

$$\text{Système } L : 2/4 : F [\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.9927, 0.9997]$$

Dans cette section, nous nous intéressons au cas d'indépendance inconnue. Pour le système k sur $n : F$ on a

$$\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \max(0, (n - k + 1)\underline{P}_w + k - n) \quad (3.20)$$

$$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \min(1, k\overline{P}_w) \quad (3.21)$$

Pour les systèmes en série et en parallèle, nous récupérerons les bornes bien connues de Fréchet (Pedroni and Zio (2013); Fréchet (1935)).

Il est plus difficile d'obtenir des bornes de la fiabilité sous l'hypothèse d'une indépendance inconnue pour les systèmes k-consécutifs-sur-n : F avec leur variantes linéaire et circulaire. Cependant le problème a été résolu pour le système linéaire 2-consécutifs-sur3 : F noté (L :2/3 :F) (prop1) et le système circulaire 2-consécutifs-sur-4 :F noté (C :2/4 :F) (prop2) voir [Destercke et al. \(2014\)](#).

Proposition 1. *Connaissant $\underline{P}_w, \overline{P}_w$ avec une indépendance inconnue, les bornes inférieure et supérieure pour un système L : 2 sur 3 :F sont données par :*

$$\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \underline{P}_w \quad (3.22)$$

$$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \min(1, 2\overline{P}_w) \quad (3.23)$$

Exemple 2. *On considère les composants tel que $[\underline{P}_w, \overline{P}_w] = [0.95, 0.99]$ et les systèmes 2/3 :F et L : 2/3 :F avec une hypothèse d'indépendance inconnue. Puis, en utilisant les formules correspondantes pour ces systèmes nous obtenons :*

Système 2/3 : F, $[\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.9, 1]$

Système L : 2/3 : F, $[\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.95, 1]$

La borne inférieure du système L : 2/3 : F est légèrement supérieure à la borne inférieure du système 2/3 : F.

Proposition 2. *Soit $\underline{P}_w, \overline{P}_w$ et indépendance inconnue, les bornes inférieure et supérieure $\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))$ pour un système C :2/4 :F sont*

$$\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = \max(0, 2\underline{P}_w - 1) \quad (3.24)$$

$$\overline{P}(\phi^{-1}(1)) = \min(1, 2\overline{P}_w) \quad (3.25)$$

Exemple 3. *On considère les systèmes 2/4 : F et C : 2/4 : F avec une hypothèse d'indépendance inconnue tel que :*

$$[\underline{P}_w, \overline{P}_w] = [0.95, 0.99]$$

En utilisant les formules correspondantes pour ces systèmes nous obtenons :

Système 2/4 : F, $[\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.85, 1]$

Système C : 2/4 : F, $[\underline{P}(\phi^{-1}(1)), \overline{P}(\phi^{-1}(1))] = [0.9, 1]$

La borne inférieure du système C : 2/3 : F est légèrement supérieure à la borne inférieure du système 2/4 : F.

3.2.6 Encadrement de la fiabilité d'un système cohérent à composants hétérogènes

Dans cette partie, l'intérêt est porté sur les méthodes d'obtenir des bornes de la fiabilité d'un système cohérent sous l'hypothèse de dépendance.

Dans ce contexte, on cite comme exemples les articles de [Miziula and Navarro \(2017\)](#), [Miziula and Navarro \(2018\)](#) (qui sont les derniers à notre avis), dont les quels les bornes de la fiabilité et la durée de vie moyenne d'un système cohérent à composants arbitrairement

distribués, ont été élaborées.

Pour cela, ils ont procédé par plusieurs façons.

- la première façon est basée sur l'utilisation d'une fonction notée \overline{G}_1 : moyenne des fonctions de fiabilité des composants.

- la deuxième façon est basée sur l'utilisation d'une fonction \overline{G}_2 : moyenne des fonctions de fiabilité des systèmes séries obtenus à partir des ensembles des chemins minimaux.

Ils ont montré, en traitant quelques exemples, que les bornes obtenues par \overline{G}_2 semblaient être meilleures que celles de \overline{G}_1 , mais pas toujours (ils ont présenté un contre-exemple). Avec la particularité que \overline{G}_1 ne dépend pas de la structure du système, de la permutation des fonctions de fiabilité des composants et de la structure de dépendance, tandis que \overline{G}_2 peut dépendre de ces trois caractéristiques. Dans leur autre papier, [Miziula and Navarro \(2017\)](#) ont étendu les résultats obtenus dans le précédent cas où les composants sont ordonnés (l'ordre stochastique habituel). Ensuite, en utilisant ces bornes, ils ont étudié l'allocation optimale des composants dans une structure de système donnée afin d'améliorer la fiabilité du système.

3.2.7 Les principaux résultats

Définition 34. Soit T la durée de vie d'un système cohérent avec X_1, \dots, X_n les durées de vie des composants, on peut écrire T sous la forme :

$$T = \max_{1 \leq i \leq r} X_{P_i}$$

avec P_1, \dots, P_r l'ensemble des liens minimaux du système et $X_P = \min_{j \in P} X_j$ (c-à-d : la durée de vie d'un système série avec des composants dans P). Un ensemble $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ est un ensemble des liens d'un système cohérent.

Ce système fonctionne si tous les composants dans P fonctionnent.

On peut écrire également T sous la forme :

$$T = \min_{1 \leq i \leq r} X^{c_i}$$

tel que c_1, \dots, c_r sont les coupes minimales du système et :

$$X^C = \max_{j \in C} X_j$$

(La durée de vie d'un système parallèle avec les composants dans C) pour tout $C \subseteq \{1, \dots, n\}$.

L'ensemble $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des coupes d'un système cohérent. Ce dernier ne fonctionne pas si tous les composants dans C ne fonctionnent pas.

Remarque 14. – L'ensemble des liens minimaux est l'ensemble des liens qui ne contient aucun autre lien

– L'ensemble des coupes minimales est l'ensemble des coupes qui ne contient aucune autre coupe.

Définition 35. Soit \bar{F}_T la fonction de fiabilité d'un système, en utilisant la formule inclusion-exclusion on trouve :

$$\bar{F}_T(t) = P\left(\bigcup_{i=1}^r X_{P_i} > t\right) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) - \sum_{1 \leq i < j \leq r} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} \bar{F}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(t) \quad (3.26)$$

tel que $\bar{F}_P(t) = P(X_P > t)$ est la fonction de fiabilité des systèmes en serie avec des composants dans P .

pour calculer cette fiabilité on utilise la représentation de copule :

$$\bar{F}(x) = K(\bar{F}_1(x), \dots, \bar{F}_n(x))$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, K : copule de survie et $\bar{F}_1(x), \dots, \bar{F}_n(x)$ les fonctions de fiabilité marginales Pour $P \subseteq \{1, \dots, j\}$ la fonction de fiabilité de $X_{\{1, \dots, j\}}$ est :

$$\bar{F}_{\{1, \dots, j\}}(t) = K(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_j, 1, \dots, 1)$$

Pour $j = 1, \dots, n$

Lemme 5. Dans le cas général, la fonction de fiabilité de X_P peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{F}_p(t) = K_p(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$$

pour tout $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel que $K_p(x) = K(x_1^p, \dots, x_n^p)$ et

$$x_j^p = \begin{cases} x_j & \text{si } j \in P \\ 1 & \text{si } j \notin P \end{cases}$$

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

Avec \bar{Q} une fonction continue croissante définie sur $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ par

$$\begin{cases} \bar{Q}(\mathbf{0}_n) = 0 \\ \bar{Q}(\mathbf{1}_n) = 1 \end{cases}$$

\bar{Q} est dite fonction de distorsion associée au système.

Remarque 15. La fonction \bar{Q} est appelée fonction de double distorsion associée au système. \bar{Q} ne dépend que de la structure du système (les ensembles de chemins minimaux) et de la dépendance entre les durées de vie des composants (de la copule de survie K).

Si les composants sont indépendants, alors la fonction \bar{Q} est une multinomiale strictement croissante dans $[0, 1]^n$ appelée fonction de fiabilité de la structure dans *Barlow R. E (1975)*. Une représentation similaire est valable pour les fonctions de distribution respectives \bar{F}_T et $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$.

3.2.8 Bornes de la fiabilité basées sur \overline{G}_1

Dans le cas de systèmes à composants homogènes, les bornes ont été exprimées en terme de fonction de fiabilité commune, voir [Navarro and Rychlik \(2010\)](#). Pour un système cohérent avec composants hétérogènes, la question principale est de savoir quelle fonction doit être comparée à la fonction de fiabilité du système afin de fournir des bornes fiables et significatives.

Une première étape consiste à prendre en compte la moyenne des fonctions de fiabilité des composants.

Définition 36. On définit \overline{G}_1 par :

$$\overline{G}_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{F}_i(t)}{n} \quad (3.27)$$

On prouve que cette fonction peut être utilisée pour obtenir des bornes raisonnables pour \overline{F}_T

Lemme 6. On peut aussi définir \overline{G}_1 par :

$$\overline{G}_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{F}_{i:n}(t)}{n}, \forall t$$

Lemme 7. Soit \overline{Q} la fonction de double distorsion associée à un système de durée de vie T et considérons la fonction

$$H(x) = \frac{\overline{Q}(x)}{\frac{x_1, \dots, x_n}{n}} \quad (3.28)$$

pour $x \in D = [0, 1]^n \setminus \{0_n\}$, alors les valeurs extrêmes du quotient

$$\frac{\overline{F}_T(t)}{\overline{G}_1(t)} = \frac{\overline{Q}(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t))}{\frac{(\sum \overline{F}_i(t))}{n}} \quad (3.29)$$

sur toutes les fonctions de fiabilité $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ et tous les réels t coïncident avec les valeurs extrêmes de $H(x)$ sur D .

Démonstration. voir [Miziula and Navarro \(2018\)](#)

Supposons désormais que les cardinaux du chemin minimal et des ensembles coupes soient ordonnés, c'est-à-dire on suppose que :

$$|P_1| \leq \dots \leq |P_r|$$

et

$$|C_1| \leq \dots \leq |C_r|$$

□

Lemme 8. Soit $\overline{Q}_{\{i:n\}}$ la fonction de distorsion d'un système $(n-i+1)$ -sur- n : G , $i = 1, \dots, n$. Si $|P_1| = k$ alors

$$\overline{Q}(x) \leq \overline{Q}_{n-k+1:n}(x), \forall x \in D$$

par contre :

$$\bar{Q}(x) \geq \bar{Q}_{j:n}(x), \forall x \in D$$

pour $j = 1, \dots, |C_1|$

Théorème 18. *Si T est la durée de vie d'un système cohérent avec des composants hétérogènes arbitrairement dépendants, alors :*

$$c \leq \frac{\bar{F}_T(t)}{\bar{G}_1(t)} \leq \frac{n}{|P_1|} \quad (3.30)$$

pour tout $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ et tout $\bar{G}_1(t) > 0$, tel que

$$\begin{cases} c = 1 & \text{Pour un système en parallèle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut aussi utiliser la formule suivante :

$$c\bar{G}_1(t) \leq \bar{F}_T(t) \leq \min(1, \frac{n}{|P_1|}\bar{G}_1(t)) \quad (3.31)$$

Ici, les bornes sont dépendantes de \bar{G}_1 , et donc de $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$, mais elles sont indépendantes de K . Ainsi, les bornes restent optimales quel que soit la forme de la dépendance entre les composants du système.

Théorème 19. *On suppose que $|P_1| = k$*

- Si $\{1, \dots, k\}$ est l'ensemble des liens minimaux, alors :

$$\sup_{D'} H = \frac{n}{k} \quad (3.32)$$

avec $D' = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 \geq \dots \geq x_n, x_1 > 0\}$

- Si $\{1, \dots, k\}$ n'est pas l'ensemble des liens minimaux, alors

$$\frac{n}{l} \leq \sup_{D'} H \leq \min(n - l + 1, \frac{n}{k}) \quad (3.33)$$

pour $l = \min\{i \in \{1, \dots, n\}\}$ et $\{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des liens.

3.2.9 Bornes de la fiabilité basées sur \bar{G}_2

Définition 37. *On définit \bar{G}_2 par :*

$$\bar{G}_2(t) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) \quad (3.34)$$

r : le nombre de liens minimaux du système.

Théorème 20. *Si T est la durée de vie d'un système cohérent avec des composants hétérogènes arbitrairement dépendants, l'utilisation de \bar{G}_2 montre que la fiabilité d'un système est*

bornée comme suit :

$$\overline{G}_2(t) \leq \overline{F}_T(t) \leq r\overline{G}_2(t) \quad (3.35)$$

pour tout $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ et $\forall t$.

Ces bornes sont optimales, c'est-à-dire que, pour toute structure de dépendance pour chacune de ces 2 inégalités, il existe $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ pour lequel cette inégalité devient une égalité pour certains $t > 0$, tel que $\overline{G}_2(t) > 0$.

A présent, on va traiter quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus par *Miziula and Navarro (2018)*, *Miziula and Navarro (2017)*.

Le but est de faire une comparaison avec nos résultats qui seront prouvés dans le chapitre suivant.

3.2.10 Exemples

Exemple 4. On considère le système cohérent présenté dans la figure suivante

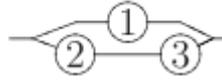


FIGURE 3.1

où la durée de vie est donnée par :

$$T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$$

et $P_1 = \{1\}$ et $P_2 = \{2, 3\}$ sont les liens minimaux.

Donc la fonction de fiabilité de ce système est sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{F}_T(t) &= P(\{X_1 > t\} \cup \{\min(X_2, X_3) > t\}) \\ &= \overline{F}_1(t) + \overline{F}_{2,3}(t) - \overline{F}_{1,2,3}(t) \\ &= \overline{F}_1(t) + K(1, \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)) - K(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)) \\ &= \overline{Q}_K(\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)) \end{aligned}$$

tel que

$$\overline{Q}_K(x_1, x_2, x_3) = x_1 + K(1, x_2, x_3) - K(x_1, x_2, x_3)$$

Où $\overline{F}_1(t), \overline{F}_2(t), \overline{F}_3(t)$ sont les fiabilités des composants et K est la copule.

Pour obtenir les bornes basées sur

$$\overline{G}_1 = \frac{\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t) + \overline{F}_3(t)}{3}$$

on a besoin de calculer la fonction des valeurs limites

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, x_3) &= 3 \frac{\overline{Q}_K(x_1, x_2, x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} \\ &= 3 \frac{x_1 + K(1, x_2, x_3) - K(x_1, x_2, x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} \end{aligned}$$

sur l'ensemble $D = [0, 1]^3 \setminus \{0_3\}$ et en utilisant le théorème 18 on trouve que 0 est la borne inférieure et $\frac{3}{|P_1|} = 3$ est la borne supérieure.

Exemple 5. Dans cet exemple on va calculer les bornes d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 : G avec des composants dépendants.

La durée de vie de ce système est donnée par :

$$T = \max(\min(T_1, T_2), \min(T_2, T_3))$$

avec $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{2, 3\}$ donc le calcul de $\overline{F}_T(t)$ donne :

$$\begin{aligned} \overline{F}_T(t) &= P(T > t) = P(\max(\min(T_1, T_2), \min(T_2, T_3)) > t) \\ &= P(\min(T_1, T_2) > t) + P(\min(T_2, T_3) > t) - P(\min(T_1, T_2, T_3) > t) \\ &= k(\overline{F}_1, \overline{F}_2, 1) + k(1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) - k(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) = \overline{Q}_k(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) \end{aligned}$$

Cas 1 : les bornes basées sur \overline{G}_1 , tel que \overline{G}_1 est définie par :

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(t) &= \frac{\overline{F}_1(t) + \overline{F}_2(t) + \overline{F}_3(t)}{3} \\ H(x_1, x_2, x_3) &= 3 \frac{\overline{Q}_k(x_1, x_2, x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} = 3 \frac{k(x_1, x_2, 1) + k(1, x_2, x_3) - k(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} \end{aligned}$$

Sur l'ensemble $D = [0, 1]^3 \setminus \{0_3\}$ et on utilise le théorème 18 on trouve que : la borne inférieure est 0.

Pour la borne supérieure, on a $\frac{n}{|p_1|} = \frac{3}{2}$

c-à-d :

$$0 \leq H \leq 1,5$$

on conclut que

$$0 \leq \overline{F}_T(t) \leq \frac{\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3}{2}$$

Si on suppose que les durées de vie des composants suivent la loi exponentielle tel que

$$T_1 \sim \xi(1), T_2 \sim \xi(2), T_3 \sim \xi(3)$$

On obtient

$$0 \leq \overline{F}_T(t) \leq \frac{e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}}{2}$$

Cas 2 : les bornes basées sur \overline{G}_2 .

Soit

$$\overline{G}_2(t) = \frac{\overline{F}_{1,2}(t) + \overline{F}_{2,3}(t)}{2}$$

donc la fiabilité du système linéaire 2-consécutifs-sur-3 : G est encadrée selon \overline{G}_2 comme suit :

$$\overline{G}_2(t) \leq \overline{F}_T(t) \leq 2\overline{G}_2(t)$$

$$0,5(\overline{F}_{1,2}(t) + \overline{F}_{2,3}(t)) \leq \overline{F}_T(t) \leq \overline{F}_{1,2}(t) + \overline{F}_{2,3}(t)$$

si on choisit la copule de Clayton, définie par :

$$C_\theta(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{\frac{-1}{\theta}}$$

on obtient :

$$F_{1,2}(t) = \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} - 1\}^{-1}$$

$$F_{2,3}(t) = \{(1 - e^{-2t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 1\}^{-1}$$

donc :

$$0,5(-2 + e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} + F_{1,2}(t) + F_{2,3}(t)) \leq \overline{F}_T(t) \leq (-2 + e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} + F_{1,2}(t) + F_{2,3}(t))$$

les bornes de la fiabilité du système étudié sont schématisées dans les figures suivantes :
Figure 3.2 représente les bornes d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 : G en utilisant \overline{G}_1 .
Figure 3.3 représente les bornes d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 : G basée sur \overline{G}_2 .

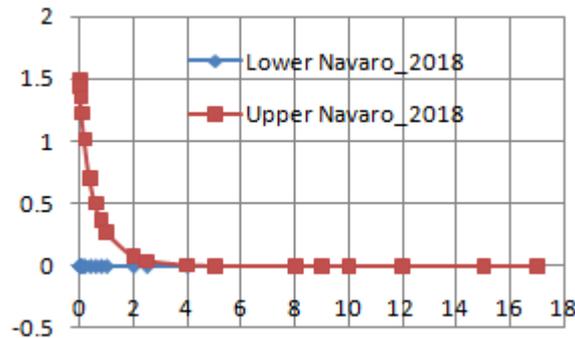


FIGURE 3.2 – Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 : G

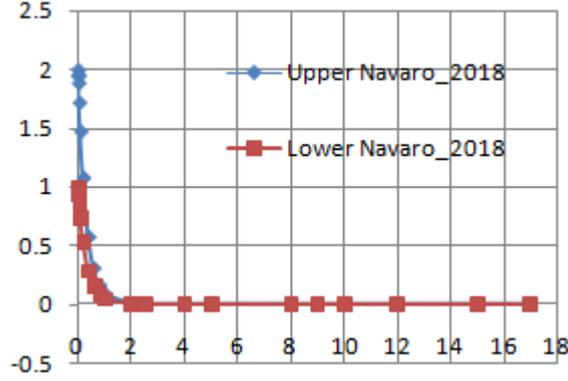


FIGURE 3.3 – Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

3.2.11 Autre bornes

D'autres bornes de la fiabilité du système étudié ont été proposées à savoir :

- Celles provenant de la probabilité de la réunion des événements et en utilisant l'inégalité de Chung and Erdős. Ces bornes sont données par le lemme suivant

Lemme 9. Pour tous les événements A_1, A_2, \dots, A_n dans l'espace probabilisé (Ω, S, P)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \leq \min_{i=1, \dots, r} (P(A_i) + \sum_{j \neq i} P(A_j \cap A_i^c)) \quad (3.36)$$

cette borne est atteinte quand $r = 2$. Pour $r \geq 3$, si on a $\forall i; A_j \cap A_k \cap A_i^c = \emptyset$ pour tout $j \neq k$ la formule (3.36) reste valable.

et on a de plus

$$P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) \geq \frac{(\sum_{i=1}^r P(A_i))^2}{\sum_{i=1}^r P(A_i) + 2 \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j)} \quad (3.37)$$

Preuve 10. voir *Miziula and Navarro (2018)*

- Celles de Barlow et Proschan qui sont données dans le lemme suivant

Lemme 10. Soit T la durée de vie d'un système cohérent et soit $\bar{F}_T(t) = P(T > t)$, P_i les liens minimaux et C_i les coupes minimales, alors

$$\max_{i=1, \dots, r} \bar{F}_{P_i}(t) \leq \bar{F}_T(t) \leq \min_{i=1, \dots, r'} \bar{F}^{C_i}(t) \quad (3.38)$$

Nous traitons à présent l'exemple du système 2-consécutifs-3 :G sous l'hypothèse de composants dépendants en utilisant les résultats du lemme 10.

Exemple 6. Soit un système linéaire 2-consécutifs-sur 3 : G. D'après (3.38), on a :

$$\max\{\bar{F}_{\{1,2\}}(t), \bar{F}_{\{2,3\}}(t)\} \leq \bar{F}_T(t) \leq \bar{F}^{\{2\}}(t) \quad (3.39)$$

avec $P_1 = \{1, 2\}$, $P_2 = \{2, 3\}$ et $C_2 = \{2\}$

$$\max\{\bar{F}_{\{1,2\}}(t), \bar{F}_{\{2,3\}}(t)\} \leq \bar{F}_T(t) \leq 1 - F_2(t) \quad (3.40)$$

Si on suppose que les durées de vie des composants suivent la loi exponentielle tel que

$$T_1 \sim \xi(1), T_2 \sim \xi(2), T_3 \sim \xi(3)$$

et si on utilise la copule de Clayton qui donne :

$$F_{\{1,2\}}(t) = \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} - 1\}^{-1}$$

$$F_{\{2,3\}}(t) = \{(1 - e^{-2t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 1\}^{-1}$$

et comme :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\{1,2\}}(t) &= P(T_1 > t, T_2 > t) \\ &= 1 - P(T_1 \leq t \cup T_2 \leq t) \\ &= 1 - P(T_1 \leq t) - P(T_2 \leq t) + P(T_1 \leq t \cap T_2 \leq t) \\ &= 1 - F_1(t) - F_2(t) + F_{\{1,2\}}(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

En remplaçant la valeur de $F_1(t)$, $F_2(t)$ et $F_{\{1,2\}}$, on aura :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\{1,2\}}(t) &= 1 - 1 + e^{-t} - 1 + e^{-2t} + \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} - 1\}^{-1} \\ &= -1 + e^{-t} + e^{-2t} + \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} - 1\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

De même pour $\bar{F}_{\{2,3\}}(t)$ on trouve

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\{2,3\}}(t) &= P(T_2 > t, T_3 > t) \\ &= 1 - F_2(t) - F_3(t) + F_{\{2,3\}}(t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 1 + e^{-2t} - 1 + e^{-3t} + \{(1 - e^{-2t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 1\}^{-1} \\ &= -1 + e^{-2t} + e^{-3t} + \{(1 - e^{-2t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 1\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ensuite on détermine le maximum c-à-d :

$$\max\{\bar{F}_{\{1,2\}}(t), \bar{F}_{\{2,3\}}(t)\} = \bar{F}_{\{1,2\}}(t)$$

Qui conduit à

$$-1 + e^{-t} + e^{-2t} + \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} - 1\}^{-1} \leq \bar{F}_T(t) \leq e^{-2t} \quad (3.45)$$

La figure suivante représente les bornes d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G en utilisant (3.45)

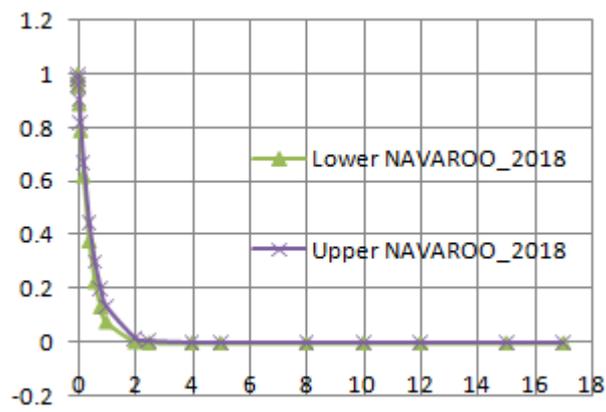


FIGURE 3.4 – Bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

Encadrement de la fiabilité des systèmes linéaires k -consécutifs-sur- n :G sous l'hypothèse de dépendance

4.1 Introduction

La fiabilité joue un rôle primordial dans les systèmes complexes et de haute technologie. Les problèmes de fiabilité sont particulièrement critiques lorsque les conséquences des défaillances des systèmes en termes de sécurité et de coût nécessitent une préoccupation majeure. Les études élaborées pour des systèmes linéaires k -consécutifs-sur- n ont porté beaucoup d'intérêt indifféremment sur les plans théoriques et pratiques. Ces systèmes apparaissent de manière particulière dans divers domaines de l'ingénierie : mécanique, génie civil, génie électronique, les télécommunications, réseaux, ... etc.

Un système linéaire k -consécutifs-sur- n :G (F) (noté $Lin / Con / k / n :G (F)$) est constitué de n composants disposés linéairement. Ce système fonctionne (en panne) si et seulement si au moins k composants consécutifs fonctionnent (en panne). Notons qu'il y'a une dualité entre les deux systèmes.

La fiabilité et les problèmes ouverts liés aux systèmes k -consécutifs-sur- n : G (F) ont été largement étudiés en considérant plusieurs suppositions. Une grande partie de ces problèmes a été résolue dans le cas binaire (il n'y a que deux états : fonction, panne) : Ross (1979), Chiang and Niu (1981), Derman et al. (1982), Eryilmaz and Navarro (2012), Kuo et al. (1990), et dans le cas multi-états (le système et les composants peuvent avoir plus de deux états) : Hwang and Yao (1989), Zuo et al. (2003), Huang et al. (2003), Yamamoto et al. (2006), Belaloui and Ksir (2007), Eryilmaz (2009), Bouloudene and Belaloui (2017). . . . où l'hypothèse dominante était l'indépendance entre les composants du système.

Cependant, dans plusieurs situations réelles, un grand nombre de systèmes fonctionnent avec des structures de dépendance, c'est pourquoi, récemment, des chercheurs se sont investis dans l'étude de cette catégorie. Mais le problème qui a souvent surgi était la complexité des calculs, notamment, le calcul de la fiabilité exacte du système étudié. En conséquence, la littérature présente peu de résultats dans cet axe de recherche. On cite comme exemples ;

Gera (2000) qui a obtenu la fiabilité d'un système k -consécutifs-sur- n : G avec des éléments dépendants en utilisant une formule matricielle. *Navarro and Rychlik (2007)* ont proposé des bornes de la fiabilité et les durées de vie moyennes de systèmes cohérents basés sur des composants échangeables dépendants (ce qui signifie que la distribution conjointe des durées de vie des composants est invariante dans la loi des permutations), en utilisant le concept de signature de Samaniego. *Navarro et al. (2007)* ont étudié les propriétés de systèmes cohérents avec des composants dépendants en utilisant le concept de distributions hyperminimales et hypermaximales. Ils ont pu montrer que la distribution de durée de vie pour tout système cohérent est une combinaison de sous-systèmes en série (parallèle) et de leurs distributions de durée de vie. *Salhi et al. (2011)* ont étudié la durée de vie résiduelle de systèmes k -consécutifs-sur- n linéaires et circulaires avec des composants indépendants mais non identiques. En conséquence, ils ont développé des expressions de durée de vie résiduelle lorsque $2k > n$ pour les systèmes linéaires et $2k + 1 > n$ pour les systèmes circulaires. Les fonctions de taux de panne et leur comportement asymptotique de systèmes k -consécutifs-sur- n , utilisant des représentations combinatoires, ont été étudiés par *Eryilmaz and Navarro (2012)*. Citons aussi les travaux de *Destercke et al. (2014)*, *Miziula and Navarro (2017)*, *Miziula and Navarro (2018)* (mentionnés dans le chapitre 3 de ce mémoire).

Ce chapitre comporte notre contribution à savoir l'établissement des bornes de fiabilité pour les systèmes k -consécutifs-sur- n : G , dont les durées de vie des composants sont dépendantes et arbitrairement ou identiquement distribuées, pour toutes valeurs de n et k satisfaisant la relation $2k \geq n$. Et ceci, en utilisant les formules d'*Eryilmaz (2009)*, *Salhi et al. (2011)* et quelques propriétés connues des systèmes cohérents *Nelsen (2006)*. Pour montrer l'efficacité de nos résultats, des comparaisons avec les derniers résultats obtenus dans cet axe de recherche, seront élaborées.

4.2 Notations et Définitions

Hypothèses 1. Nous supposons que $T = (T_1, \dots, T_n)$ un vecteur aléatoire à n dimensions est positivement inférieur ou supérieur orthant dépendant.

Remarque 16. Cette hypothèse est très importante dans notre travail, elle n'est pas restrictive du fait qu'en fiabilité, les durées de vie des composants sont généralement positivement dépendantes.

Définition 38. (*Nelsen (2006)*) Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ un vecteur aléatoire à n dimensions, positivement inférieur orthant dépendant et positivement supérieur orthant dépendant sont définies comme suit :

1. T est positivement inférieur orthant dépendant (PLOD) si pour tous (t_1, t_2, \dots, t_n) dans \mathbb{R}^n

$$P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \dots, T_n \leq t_n) \geq \prod_{j=1}^n P(T_j \leq t_j)$$

2. T est positivement supérieur orthant dépendant (PUOD) si pour tous (t_1, t_2, \dots, t_n) dans \mathbb{R}^n

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_n > t_n) \geq \prod_{j=1}^n P(T_j > t_j)$$

Dans la section suivante, nous proposons des bornes de fiabilité pour un système dépendant linéaire k-consécutifs-sur-n :G (système Lin / con / k / n : G).

4.3 Bornes d'un système linéaire k-consécutifs-sur-n :G

Théorème 21. Soit le système Lin / con / k / n : G avec des composants dépendants arbitrairement distribués. Pour $2k \geq n$, la fiabilité du système est bornée comme suit

$$B_L \leq R(t) \leq B_U$$

où

$$B_U = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} F_{k+m}(t) \left[1 - \max_{m \leq j \leq k+m-1} F_j(t) \right] - \max_{n-k+1 \leq j \leq n} F_j(t). \quad (4.1)$$

et

$$B_L = (k - n) + \sum_{m=1}^{m=n-k} \max_{m \leq j \leq k+m} F_j(t) + \sum_{m=1}^{m=n-k+1} \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)] \quad (4.2)$$

Corollaire 4. Si les fonctions de distribution sont identiques ($F_j(t) = F(t) \forall j$), la formule ci-dessus peut être réécrite sous une forme plus simple

$$(k - n) + (n - k)F(t) + (n - k + 1)(1 - F(t))^k \leq R(t) \leq 1 + (n - k - 1)F(t) - (n - k)F(t)^2 \quad (4.3)$$

Remarque 17. Pour maintenir la valeur de la fiabilité d'un système dans l'intervalle tolérable $[0, 1]$, il est nécessaire d'établir la relation suivante.

$$\begin{aligned} & \max \left\{ (k - n) + \sum_{m=1}^{m=n-k} \max_{m \leq j \leq k+m} F_j(t) + \sum_{m=1}^{m=n-k+1} \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)], 0 \right\} \\ & \leq R(t) \leq \\ & \min \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} F_{k+m}(t) \left[1 - \max_{m \leq j \leq k+m-1} F_j(t) \right] - \max_{n-k+1 \leq j \leq n} F_j(t), 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Lorsque les composants sont identiquement distribués, l'équation (4.4) devient

$$\begin{aligned} & \max\{(k - n) + (n - k)F(t) + (n - k + 1)(1 - F(t))^k, 0\} \\ & \leq R(t) \leq \\ & \min\{1 + (n - k - 1)F(t) - (n - k)F(t)^2, 1\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La propriété ci-dessous peut être utilisée pour quantifier les bornes de la fiabilité du système étudié.

Propriétés 3. $\max_j \{P(T_j \leq t)\} \leq P(\bigcup_j T_j \leq t) \leq \min\{\sum_j P(T_j \leq t), 1\}$

Preuve 11 (Preuve du théorème 21). *La fiabilité du système linéaire k-consécutifs-sur-n :G dépendant est définie par*

$$R(t) = P(T_{k/n:G} > t)$$

où la durée de vie de ce système peut être représentée comme suit

$$T_{k/n:G} = \max\{T_{[1:k]}, T_{[2:k+1]}, \dots, T_{[n-k+1:n]}\}$$

avec $T_{[1:n]} = \min\{T_1, \dots, T_n\}$.

Eryilmaz (2009) a établi la fiabilité du système en question par la formule suivante :

$$R(t) = P(T_{k/n:G} > t) = \sum_{i=k}^n [P(T_{[i-k+1:i]} > t) - P(T_{[i-k+1:i+1]} > t)] \quad (4.6)$$

tel que $P(T_{[n-k+1:n+1]} > t) = 0$.

Remarquons que, la formule (4.6) donne l'expression de la fiabilité de ce système, mais le calcul est assez compliqué et l'utilisation de cette formule n'est pas simple, en particulier, pour les grands systèmes (un grand nombre de composants) pour ces raisons, nous avons eu recours à encadrer la fiabilité du système en établissant les bornes suivantes.

L'équation (4.6) peut être réécrite sous la forme suivante

$$R(t) = P(T_{[1:k]} > t) + P(T_{[2:k+1]} > t) + P(T_{[3:k+2]} > t) + \dots + P(T_{[n-k:n-1]} > t) + P(T_{[n-k+1:n]} > t) \\ - P(T_{[1:k+1]} > t) - P(T_{[2:k+2]} > t) - P(T_{[3:k+3]} > t) - \dots - P(T_{[n-k:n]} > t) \quad (4.7)$$

Nous utilisons la notion de probabilité du minimum, on trouve que

$$P(T_{[1:n]} > t) = P\left(\bigcap_{j=1}^n T_j > t\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^n T_j \leq t\right)$$

En injectant l'équation ci-dessus dans la relation (4.7), il en résulte

$$R(t) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^{j=k} T_j \leq t\right) + 1 - P\left(\bigcup_{j=2}^{j=k+1} T_j \leq t\right) + 1 - P\left(\bigcup_{j=3}^{j=k+2} T_j \leq t\right) + \dots + 1 \\ - P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} T_j \leq t\right) - 1 + P\left(\bigcup_{j=1}^{j=k+1} T_j \leq t\right) - 1 + P\left(\bigcup_{j=2}^{j=k+2} T_j \leq t\right) - 1 + P\left(\bigcup_{j=3}^{j=k+3} T_j \leq t\right) \\ + \dots - 1 + P\left(\bigcup_{j=n-k}^{j=n} T_j \leq t\right) \quad (4.8)$$

qui s'écrit sous la forme

$$R(t) = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m} T_j \leq t\right) - \sum_{m=1}^{m=n-k+1} P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) \quad (4.9)$$

Et en faisant quelques modifications dans la formule, on aboutit à :

$$R(t) = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} [P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m} T_j \leq t\right) - P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right)] - P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} T_j \leq t\right) \quad (4.10)$$

ou encore

$$\begin{aligned} R(t) = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} [P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) + P(T_{k+m} \leq t) \\ - P(T_{k+m} \leq t \cap \left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right)) - P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right)] - P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} T_j \leq t\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

d'où

$$R(t) = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} [P(T_{k+m} \leq t) - P(T_{k+m} \leq t \cap \left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right))] - P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} T_j \leq t\right) \quad (4.12)$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} R(t) = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} \left[F_{k+m}(t) - P(T_{k+m} \leq t \cap \left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right)) \right] \\ - P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} T_j \leq t\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Commençons maintenant par établir la borne supérieure.

En adoptant la propriété 3, on a

$$\begin{aligned} -P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} (T_j \leq t)\right) &\leq -\max_{n-k+1 \leq j \leq n} P(T_j \leq t) \\ -P\left(\bigcup_{j=n-k+1}^{j=n} (T_j \leq t)\right) &\leq -\max_{n-k+1 \leq j \leq n} F_j(t) \end{aligned}$$

L'utilisation de la définition 38 et la propriété 3 nous donnent

$$\begin{aligned} -P(T_{k+m} \leq t \cap (\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t)) &\leq -P(T_{k+m} \leq t)P(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t) \\ &\leq -F_{k+m}(t) \max_{m \leq j \leq k+m-1} F_j(t) \end{aligned}$$

Finalement, l'intégration des inégalités ci-dessus dans l'équation (4.13), montre que la borne supérieure de la fiabilité est donnée par

$$B_U = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} \left[F_{k+m}(t) - F_{k+m}(t) \max_{m \leq j \leq k+m-1} F_j(t) \right] - \max_{n-k+1 \leq j \leq n} F_j(t) \quad (4.14)$$

$$B_U = 1 + \sum_{m=1}^{m=n-k} F_{k+m}(t) \left[1 - \max_{m \leq j \leq k+m-1} F_j(t) \right] - \max_{n-k+1 \leq j \leq n} F_j(t) \quad (4.15)$$

Nous refaisons le même procédé pour établir la borne inférieure de la fiabilité du système étudié. En reprenant l'équation (4.9), et en utilisant les inégalités suivantes

$$P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m} T_j \leq t\right) \geq \max_{m \leq j \leq k+m} P(T_j \leq t) = \max_{m \leq j \leq k+m} F_j(t)$$

et comme on a

$$\begin{aligned} -P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) &= -1 + P\left(\bigcap_{j=m}^{j=k+m-1} T_j > t\right) \\ -P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) &\geq -1 + \prod_{j=m}^{j=k+m-1} P(T_j > t) \\ &\geq -1 + \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - P(T_j \leq t)] \\ &\geq -1 + \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

En prenant la somme de part et d'autre, on obtient

$$- \sum_{m=1}^{m=n-k+1} P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) \geq \sum_{m=1}^{m=n-k+1} \left[-1 + \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)]\right] \quad (4.17)$$

qui s'écrit sous la forme

$$- \sum_{m=1}^{m=n-k+1} P\left(\bigcup_{j=m}^{j=k+m-1} T_j \leq t\right) \geq (k-n-1) + \sum_{m=1}^{m=n-k+1} \left[\prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)] \right] \quad (4.18)$$

On remplace dans l'équation (4.9), on obtient

$$B_L = (k-n) + \sum_{m=1}^{m=n-k} \max_{m \leq j \leq k+m} F_j(t) + \sum_{m=1}^{m=n-k+1} \prod_{j=m}^{j=k+m-1} [1 - F_j(t)] \quad (4.19)$$

Remarque 18. Dans le cas où les composants sont identiquement distribués, la borne supérieure s'écrit sous la forme :

$$B_U = 1 + (n-k-1)F(t) - (n-k)F(t)^2 \quad (4.20)$$

et la borne inférieure sous la forme

$$B_L = (k-n) + (n-k)F(t) + (n-k+1)(1-F(t))^k \quad (4.21)$$

4.3.1 Exemples numériques

A présent, nous faisons l'étude de quelques cas de systèmes k-consécutif-sur-n :G. Nous supposons que tous les composants sont distribués selon la loi exponentielle de paramètre λ ($T_j \sim \xi(\lambda)$)

Cas 1 : Un système linéaire 2-consécutif-sur-3 :G.

Les bornes de la fiabilité, en utilisant l'équation (4.5) sont données dans le tableau 1 et tracées dans la figure 4.1.

λt	B_L	B_U
0.001	0.9970035	0.999999
0.008	0.97622273	0.99993651
0.009	0.97328169	0.99991973
0.01	0.9703475	0.99990099
0.02	0.9413802	0.99960791
0.05	0.85844541	0.99762143
0.1	0.73262409	0.99094408
2	0	0.25234236
2.5	0	0.15743205
4	0	0.03629582
5	0	0.01343049
9	0	0.0002468
10	0	9.0798 E-05

Tableau 1 : Bornes de fiabilité d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

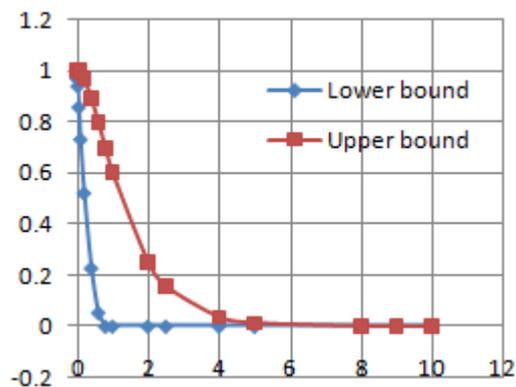


FIGURE 4.1 – Bornes de fiabilité d'un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

Cas 2 : Un système linéaire 2-consécutifs-sur-4 :G. Les bornes de la fiabilité sont données dans le tableau 2 et tracées dans la figure 4.2.

λt	B_L	B_U
0.001	0.996005	1
0.008	0.96831813	1
0.009	0.96440234	1
0.01	0.96049635	1
0.02	0.92197097	1
0.05	0.81205341	1
2	0	0.36937457
2.5	0	0.2327791
4	0	0.05427599
5	0	0.02012304
9	0	0.0003702
10	0	0.0001362

Tableau 2 : Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-4 :G

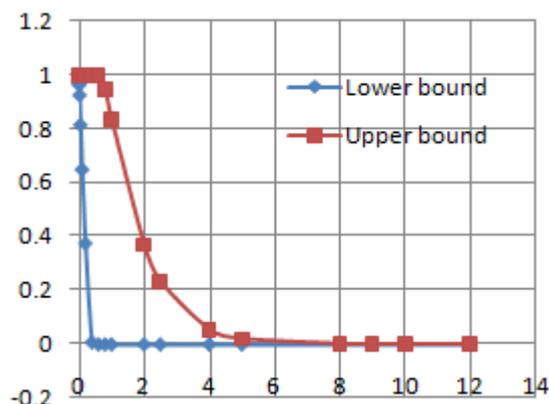


FIGURE 4.2 – Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-4 :G

Cas 3 : Un système linéaire 3-consécutifs-sur-4 :G. Les bornes de la fiabilité sont données dans le tableau 3 et tracées dans la figure 4.3.

λt	B_L	B_U
0.001	0.99500849	0.999999
0.008	0.9605395	0.99993651
0.009	0.9556821	0.99991973
0.01	0.95084123	0.99990099
0.02	0.90333039	0.99960791
0.05	0.77018653	0.99762143
0.1	0.57679902	0.99094408
2	0	0.25235493
2.5	0	0.15743205
4	0	0.03629582
5	0	0.01343049
9	0	0.0002468
10	0	9.0798 E-05

Tableau 3 : Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 3-consécutifs-sur-4 :G

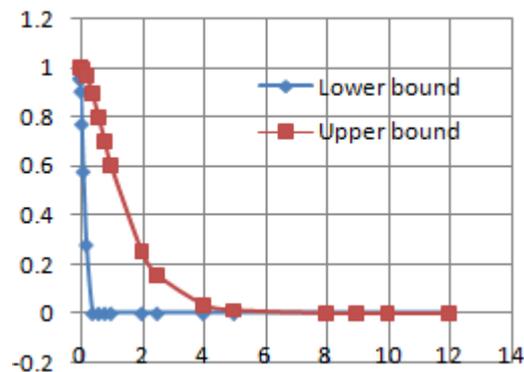


FIGURE 4.3 – Bornes de la fiabilité pour un système linéaire 3-consécutifs-sur-4 :G

Les tableaux 1,2,3 et les figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent que, pour $\lambda t > 5$, le système étudié est moins fiable. Donc, dans ces cas il est nécessaire de faire fonctionner les machines jusqu'à $\lambda t = 5$. Nous pouvons également remarquer que lorsque la différence $(n - k)$ diminue, les limites de fiabilité du système se rapprochent.

4.4 Comparaison avec des résultats récents

4.4.1 Comparaison avec la valeur exacte de fiabilité en utilisant la Copule

L'une des méthodes les plus couramment utilisées pour modéliser la dépendance entre les durées de vie des composants est basée sur les copules car elles contiennent des informations sur la structure de dépendance et peuvent capturer la dépendance non linéaire. Chaque copule a ses propres propriétés de dépendance (les détails des copules se trouvent dans les travaux

de *Nelsen (1999)* et *Nelsen (2006)*). En termes de fiabilité, les durées de vie des composants sont généralement positivement dépendantes. Ceci doit être pris en compte lors du choix d'une copule appropriée. Ainsi plusieurs familles de distributions ont été adoptées pour construire des copules telles que copule de Gauss, Clayton, Gumbel, Frank...etc, avec la particularité que les copules de Gumbel et de Clayton ont une forme plus simple que les autres copules. De plus, la copule de Clayton peut caractériser la distribution conjointe des durées de vie des composants dans le contexte de l'interférence de contrainte, pour cette raison, *Jia et al. (2010)* ont adopté la notion de copule pour calculer la fiabilité d'un système k-consécutifs-sur-n : G ayant des composants avec une dépendance linéaire ou non linéaire. Dans leur article le système dépendant 2-consécutifs-sur-3 :G a été étudié à l'aide de la copule de Clayton qui est définie comme suit

$$C_l^{cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-1} + u_2^{-1} - 1)^{-1} \quad (4.22)$$

Les fonctions de distribution de la durée de vie des composants ont été supposées telles que

$$F_1(t) = 1 - e^{-t}, F_2(t) = 1 - e^{-2t}, F_3(t) = 1 - e^{-3t}$$

La fiabilité du système est obtenue comme suit

$$R(t) = e^{-2t} - \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 1\}^{-1} + \{(1 - e^{-t})^{-1} + (1 - e^{-2t})^{-1} + (1 - e^{-3t})^{-1} - 2\}^{-1} \quad (4.23)$$

Pour notre part, le même exemple étudié dans l'article de *Jia et al. (2010)* est repris pour être traité en utilisant notre approche.

Les bornes de la fiabilité en question sont élaborées en appliquant la formule (4.4) ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \max\{-1 + F_3(t) + [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] + [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)], 0\} \\ & \leq R(t) \leq \\ & \min\{1 - F_3(t)F_2(t), 1\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les résultats de la comparaison sont représentés dans le tableau (4) et la figure (4.4)

λt	B_L	B_U	Valeur exacte
0.001	0.99501	1.0000	0.99780
0.008	0.96079	0.9996	0.98250
0.009	0.95600	0.9995	0.98033
0.01	0.95123	0.9994	0.97817
0.02	0.90484	0.9977	0.95676
0.05	0.77880	0.9867	0.89499
0.1	0.60653	0.9530	0.79984
1	0.00674	0.1784	0.08186
2	0.00005	0.0207	0.00465
5	0	0	0
7	0	0	0
10	0	0	0

Tableau 4 : Bornes inférieure, supérieure et valeur exacte de la fiabilité d'un système Lin/con/2/3 :G.

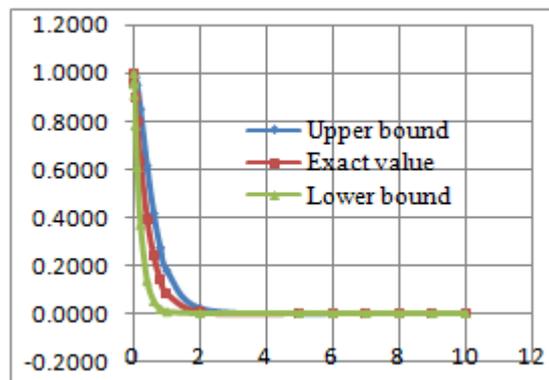


FIGURE 4.4 – Bornes inférieure, supérieure et valeur exacte de la fiabilité d'un système Lin/con/2/3 :G

La figure 4.4 représente les courbes des bornes supérieure et inférieure élaborées selon notre approche proposée et la valeur exacte de la fiabilité calculée par *Jia et al. (2010)*. Nous remarquons clairement qu'il y'a une bonne concordance entre les résultats obtenus par les deux méthodes. Les bornes sont très proches de la valeur exacte de la fiabilité du système étudié. Et lorsque n, k augmentent, notre approche est plus flexible, car elle ne nécessite pas beaucoup de calculs et en plus, le temps pris pour le calcul des bornes est inférieur à celui de l'approche de la copule.

4.4.2 Comparaison avec les bornes de Miziula et Navarro

Comparons la procédure décrite ici et la procédure dérivée de *Miziula and Navarro (2018)* et *Miziula and Navarro (2017)*. Pour cela, nous considérons les exemples suivants : système

linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G et système linéaire 2-consécutifs-sur-4 :G, avec les distributions des durées de vie des composants

$$F_1(t) = 1 - e^{-t}, F_2(t) = 1 - e^{-2t}, F_3(t) = 1 - e^{-3t}, F_4(t) = 1 - e^{-4t}$$

Les résultats de la comparaison des systèmes 2-consécutifs-sur-3 : G (resp. 2-consécutifs-sur-4 : G) sont illustrés dans le tableau 5 et la figure 4.5 (resp. dans le tableau 6 et la figure 4.6).

λt	B_L	B_U	Valeur exacte	B_L (2017 Miziula)	B_U (2017 Miziula)
0.001	0.99501	1.0000	0.99780	0	1.4970035
0.008	0.96079	0.9996	0.98250	0	1.47622247
0.009	0.95600	0.9995	0.98033	0	1.47328133
0.01	0.95123	0.9994	0.97817	0	1.47034702
0.02	0.90484	0.9977	0.95676	0	1.44137632
0.05	0.77880	0.9867	0.89499	0	1.3538741
0.1	0.60653	0.95301	0.79984	0	1.2321932
1	0.00674	0.1784	0.08186	0	0.2765009
2	4.54E-05	0.0207	0.00465	0	0.07806484
9	0	0	0	0	6.1713 E-05
10	0	0	0	0	2.2701 E-05

Tableau 5 : Différentes bornes de fiabilité du système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

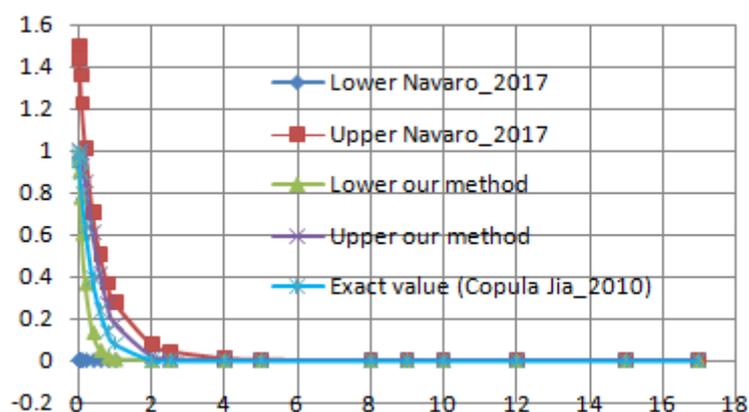


FIGURE 4.5 – Différentes bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

λt	B_L	B_U	B_L (Muziulla 2017)	B_U (Muziulla 2017)
0.001	0.99202893	1	0	1.99500749
0.008	0.93782199	1	0	1.96047576
0.009	0.93030066	1	0	1.95560147
0.01	0.92283381	1	0	1.95074174
0.02	0.85107931	1	0	1.9029345
1	0	0.19578816	0	0.28565872
2	0	0.02108362	0	0.07823257
9	0	1.5223 E-08	0	6.1713 E-05
10	0	2.0612 E-09	0	2.270 E-05

Tableau 6 : Différentes bornes de fiabilité pour un système linéaires 2-consécutifs-sur-4 :G

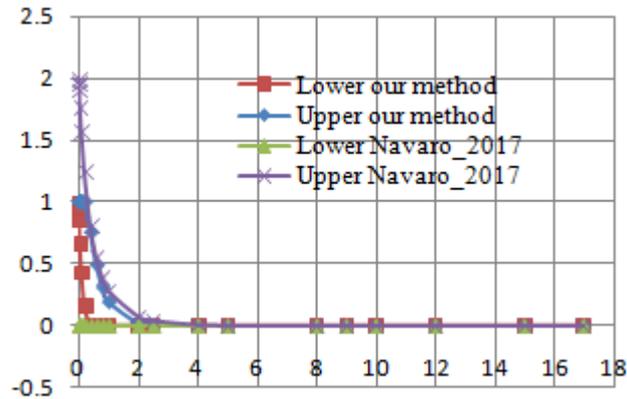


FIGURE 4.6 – Différentes bornes de fiabilité pour un système linéaires 2-consécutifs-sur-4 :G

Les tableaux 5,6 et les figures 4.5 et 4.6 montrent que les bornes obtenues par notre méthode sont meilleures que celles calculées par *Miziula and Navarro (2017)*.

λt	B_L	B_U	Valeur exacte	B_L (2018 Miziula)	B_U (2018 Miziula)
0.001	0.99501	0.999994	0.99780	0.99693	1.993875
0.008	0.96079	0.9996	0.98250	0.975752	1.951505
0.009	0.95600	0.9995	0.98033	0.9727615	1.945523
0.01	0.95123	0.9994	0.97817	0.969779	1.939558
0.02	0.90484	0.9977	0.95676	0.940434	1.880869
0.05	0.77880	0.9867	0.89499	0.85742	1.71485
1	0.00674	0.1784	0.08186	0.045368	0.90736
2	4.54E-05	0.020748	0.00465	0.002338	0.004677
9	0	1.5232E-08	3.7588E-12	1.8795E-12	3.759 E-12
10	0	2.0612E-09	1.8729E-13	9.3481E-14	1.8696 E-13

Tableau 7 : Valeur exacte et différentes bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

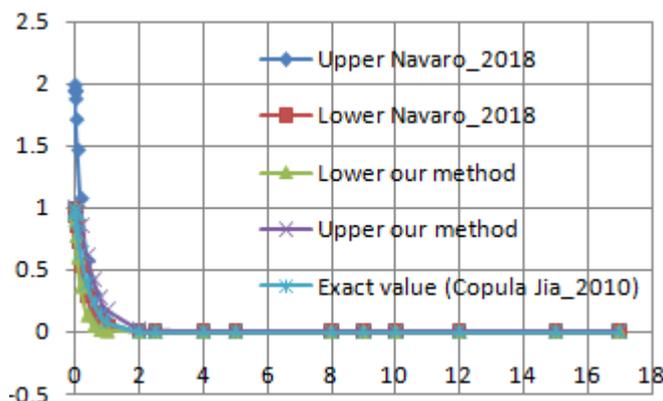


FIGURE 4.7 – Valeur exacte et différentes bornes de fiabilité pour un système linéaire 2-consécutifs-sur-3 :G

Reprenons le système 2-consécutifs-sur-3 :G et faisons, d'une part la comparaison de nos résultats obtenus avec ceux de *Miziula and Navarro (2018)* (en utilisant la fonction $\overline{G_2}$), voir tableau 7, figure 4.7. Et d'autre part la comparaison de nos résultats avec ceux de *Miziula and Navarro (2018)* (en utilisant l'équation 11), voir tableau 8, figure 4.8.

λt	B_L	B_U	B_L (2018 Miziula)	B_U (2018 Miziula)
0.001	0.99501	0.999994	0.99766	0.998002
0.008	0.96079	0.9996	0.98149	0.984127
0.009	0.95600	0.9995	0.979201	0.98216
0.01	0.95123	0.9994	0.976915	0.980198
0.02	0.90484	0.9977	0.954320	0.960789
0.05	0.77880	0.9867	0.889386	0.904837
1	0.00674	0.1784	0.078425	0.135335
2	4.54E-05	0.020748	0.004588	0.018315
8	0	0	7.549E-11	1.1254 E-07
10	0	0	1.8707E-13	2.0612E-09

Tableau 8 : Différentes bornes de fiabilité pour un système 2 consécutifs -sur-3 :G (en utilisant (Equ11) dans Navarro (2018))

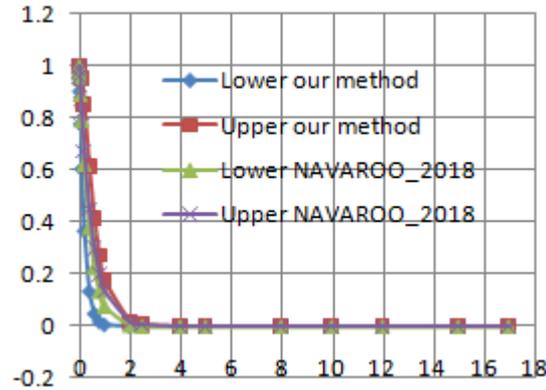


FIGURE 4.8 – Bornes de fiabilité pour un système 2 consécutifs -sur-3 :G (en utilisant (Equ11) dans Navarro (2018))

On constate que leurs bornes sont légèrement meilleures que les nôtres. Toutefois, elles restent très proches et presque confondues.

Dans la partie qui suit, notre intérêt sera porté sur le comportement des bornes inférieure et supérieures de la fiabilité du système k -consécutifs-sur- n :G, suivant les variations de n et k

4.5 Influence des composants du système sur les bornes de fiabilité

On se place dans le cas d'un système k -consécutifs-sur- n :G où tous les composants sont identiquement distribués, i.e

$$F_j(t) = F(t), \forall j$$

on veut déterminer l'influence des variations de n et k sur la différence des deux bornes de la fiabilité du système étudié.

Soit

$$I = B_U - B_L = (n - k + 1) - F(t) - (n - k)F(t)^2 - (n - k + 1)(1 - F(t))^k \quad (4.25)$$

où

$$B_L = \max\{(k - n) + (n - k)F(t) + (n - k + 1)(1 - F(t))^k, 0\}$$

$$= (k - n) + (n - k)F(t) + (n - k + 1)(1 - F(t))^k$$

$$B_U = \min\{1 + (n - k - 1)F(t) - (n - k)F(t)^2, 1\}$$

$$= 1 + (n - k - 1)F(t) - (n - k)F(t)^2$$

Pour illustrer ceci, nous allons considérer différentes valeurs de n et k .

Nous supposons que les durées de vie des composants sont distribuées selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

La figure 4.9 évalue la différence maximale entre B_U et B_L pour différentes valeurs de n et k .

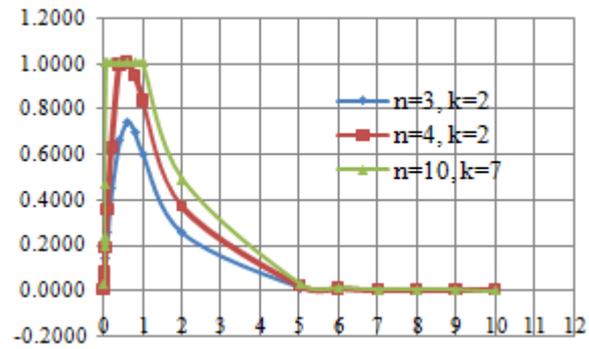


FIGURE 4.9 – Intervalle de différence pour divers systèmes

On conclut, d'une part : qu'avec le temps, les deux bornes tendent à se rapprocher. Et d'autre part, que ce rapprochement est meilleure quand $(n-k)$ diminue.

Conclusion générale

Le concept majeur de ce travail est l'encadrement de la fiabilité des systèmes k -consécutifs-sur- n sous l'hypothèse de dépendance.

Nous avons commencé par une présentation détaillée de notions essentielles de la fiabilité. Puis, nous nous sommes intéressées à la notion de copule, un nouveau concept qui a pris son intérêt en pratique dans plusieurs domaines, notamment en fiabilité. Ensuite, nous avons exposé quelques récents résultats de la fiabilité des systèmes cohérents ayant des composants avec des durées de vie dépendantes.

Enfin, nous nous sommes consacrées à l'objectif principal de cette thèse, à savoir l'encadrement de la fiabilité des systèmes linéaires k -consécutifs-sur- n : G en supposant la dépendance entre les composants du système.

Les résultats inspirés de cette partie sont :

- *Le développement des bornes de la fiabilité d'un système linéaire k -consécutifs-sur- n : G dans lequel k composants consécutifs sont positivement dépendants et répartis de manière arbitraire.*
- *Les résultats obtenus sont valables pour les valeurs de k et n satisfaisant la relation $2k \geq n$.*
- *La fiabilité du système étudié, basée sur l'approche de Copule (Jia et al. (2010)), appartient à l'intervalle des bornes de la fiabilité développées dans notre méthode.*
- *Des comparaisons entre nos résultats obtenus et ceux de Miziula and Navarro (2017) et Miziula and Navarro (2018) ont été faites.*

En conclusion ; notre méthode élaborée est plus efficace, n'a pas de contraintes, ne prend pas beaucoup de temps pour les calculs. Justifiée et prouvée par des comparaisons avec celles des plus récentes méthodes publiées.

Perspectives de recherche

Nous signalons que beaucoup de problèmes utiles et intéressants, dans la théorie de la fiabilité des systèmes cohérents, notamment pour les systèmes k -consécutifs-sur- n , restent en perspective comme :

- *L'encadrement de la fiabilité des systèmes circulaires k -consécutifs-sur- n : G dans le cas où les durées de vie des composants sont dépendantes.*
- *L'estimation de la fiabilité des systèmes linéaires et circulaires k -consécutifs-sur- n : G , en utilisant le concept des fonctions copules.*

Bibliographie

- Balakrishnan, N., Torrado, N., 2016. Comparisons between largest order statistics from multiple-outlier models. *Afrika Statistika* 50, 176–189. (Cited on pages 2 and 31.)
- Barlow R. E, P. F., 1975. *Statistical theory of reliability and life testing. International series in decision processes*, Holt. Rinehart and Wiston : New York. (Cited on pages 31 and 42.)
- Belaloui, S., 2005. *lifetime of multi-state consecutive k-out-of-n : G systems. Colloque Equations aux dérivées partielles non linéaires. Tipaza, Algeria.* (Cited on page 33.)
- Belaloui, S., 2007. *Evaluation de systemes de fiabilité a configuration complexe. THESE DE DOCTORAT DÉTAT.* (Cited on pages 32, 34, 35 and 36.)
- Belaloui, S., Ksir, B., 2007. Reliability of multi-state consecutive k-out-of-n :G systems. *Int.J. Reliab, Qual and Saf. Eng* 14 (4), 336 – 377. (Cited on pages 2 and 51.)
- Berleant, D., Zhang, J., 2004. Bounding the times to failure of 2-component systems. *IEEE Transactions on Reliability* 53 (4), 542–550. (Cited on pages 33 and 36.)
- B.H, L., 2003. Bounds for the reliability of multistate systems with partially ordered state spaces and stochastically monotone markov transitions. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 10 (3), 235 – 248. (Cited on page 33.)
- Boedigheimer, A R. Kapur, K. C., 1994. Customer-driven reliability models for multi-state coherent systems. *IEEE Trans. Reliab* 43, 46–50. (Cited on page 33.)
- Bouloudene, M., Belaloui, S., 2017. Reliability of multi-state consecutive k-out-of-n series and parallel systems. *Afrika Statistika* 12 (1), 1147–1157. (Cited on pages 2, 32, 33 and 51.)
- Chabot, M., 2012. *Concepts de dépendance et copules. CaMUS* 4, 48–71. (Cited on page 18.)
- Chao, M., F. J., Koutras, M., 1995. Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F and related systems. *Reliability, IEEE Transactions on* 44(1), 120–127. (Cited on page 39.)
- Chapouille P, D. R., 1968. *fiabilité des systèmes. Masson et Cie, Editeur.* (Cited on page 1.)
- Chiang, Niu, S., 1981. Reliability of consecutive k-out-of-n :F systems. *IEEE. Trans. Reliability* 30, 87–89. (Cited on pages 2 and 51.)
- Couso, I. Moral, S., Walley, P., 2000. A survey of concepts of independence for imprecise probabilities. *Risk Decision and Policy* 5, 165–181. (Cited on page 36.)
- Derman, Lieberman, J., Ross, R., 1982. On the consecutive k-out-of-n :F systems. *IEEE. Trans. Reliability* R-31, 57–63. (Cited on pages 2 and 51.)

- Destercke, S., Poss, M., Sallak, M., 2014. Reliability analysis with ill-known probabilities and dependencies. *Vulnerability, Uncertainty, and Risk : Quantification, Mitigation, and Management*, 887–894. (Cited on pages 2, 32, 36, 38, 40 and 52.)
- El-Newehi, E. Proschan, F. S. J., 1978. Multi-state coherent systems. *J. Appl.Prob* 15, 675–688. (Cited on page 33.)
- Eryilmaz, S., 2009. Reliability properties of consecutive k -out-of- n systems of arbitrarily dependent components. *Reliability Engineering and System Safety* 94, 350–356. (Cited on pages 2, 51, 52 and 54.)
- Eryilmaz, S., 2010. Review of recent advances in reliability of consecutive k -out-of- n and related systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability* 244(3), 225–237. (Cited on page 39.)
- Eryilmaz, S., Navarro, J., 2012. Failure rates of consecutive k -out-of- n systems. *Journal of the Korean Statistical Society* 41, 1–11. (Cited on pages 2, 51 and 52.)
- Esary, J. D., Proschan, F., Walkup, D. W., et al., 1967. Association of random variables, with applications. *The Annals of Mathematical Statistics* 38 (5), 1466–1474. (Cited on pages 10 and 11.)
- Fréchet, M., 1935. Généralisation du théoreme des probabilités totales. *Fundamenta mathematicae* 25 (1), 379–387. (Cited on page 39.)
- Fréchet, M., 1951. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon Sect. A* 9, 53–77. (Cited on page 18.)
- Fu JC, L. W., 2003. *Distribution theory of runs and patterns and its applications*. Singapore : World Scientific Publishing. (Not cited.)
- Gera, A, E., 2000. A consecutive k -out-of- n : G system with dependent elements a matrix formulation and solution. *Reliability Engineering System Safety* 68 (1), 61 – 67. (Cited on pages 2 and 52.)
- Hoeffding, W., 1940. Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* 5 (3), 179–233. (Cited on page 18.)
- Huang, J., Zuo, M., Fang, Z., 2003. Multi-state consecutively-connected systems. *IIE Trans. on Reliab. Engineering* 35, 527–534. (Cited on pages 2 and 51.)
- Hwang, F., Yao, Y., 1989. Multi-state consecutively-connected systems. *IEEE. Trans. Reliability* 38, 472–474. (Cited on pages 2 and 51.)
- Jasinski, K., Navarro, J., Rychlik, T., 2009. Bounds on variances of lifetimes of coherent and mixed systems. *J Appl Probab* 46, 894 – 908. (Cited on page 1.)

- Jaynes, E., 2003. *Probability theory : The logic of science*. Cambridge University Press. (Cited on page 36.)
- Jia, X., cui, L., yan, J., 2010. A study on the reliability of consecutive k -out-of- n : G systems based on copula. *Communications in statistics-theory and Methods* 39, 2455–2472. (Cited on pages 2, 60, 61 and 67.)
- Kuo, W., Zhang, W., Zuo, M., 1990. A consecutive k -out-of- n : G system : the mirror image of consecutive k -out-of- n : F system. *IIE. Trans. Reliab. Engineering* 39 (2), 244 – 253. (Cited on pages 2 and 51.)
- Lambiris, M., Papastavridis, S., 1985. Exact reliability formulas for linear circular consecutive- k -out-of- n : F systems. *Reliability, IEEE Transactions on* 34(2), 124–126. (Cited on page 39.)
- Levitin, G., 2001. Reliability evaluation for linear consecutively-connected systems with multistate elements and retransmission delays. *Quality and Reliability Eng'g.Int* 17. (Cited on page 33.)
- Levitin G., Podofilini, Z. E., 2003. Generalized importance measures for multi-state elements based on performance level restrictions. *Reliab. Eng. Syst. Saf* 82, 287 – 298. (Cited on page 33.)
- Lindqvist B.H, Samaniego F.J, H. A., 2016. On the equivalence of systems of different sizes, with applications to system comparisons. *Adv Appl Probab* 48, 332 – 348. (Cited on page 31.)
- Miziula, P., Navarro, J., 2016. Bounds for the reliability of coherent systems with heterogeneous components. submitted. (Not cited.)
- Miziula, P., Navarro, J., 2017. Sharp bounds for the reliability of systems and mixtures with ordered components. *Naval Research Logistics* 64, 108–116. (Cited on pages 2, 40, 41, 45, 52, 61, 63 and 67.)
- Miziula, P., Navarro, J., 2018. Bounds for the reliability functions of coherent systems with heterogeneous components. *Applied Stochastic Models Business and Industry* 34, 158–174. (Cited on pages 2, 32, 40, 43, 45, 48, 52, 61, 64 and 67.)
- Myers, A., 2010. *Complex system reliability*. Springer. (Cited on page 38.)
- N, P., 1997. Exact bounds for the expectations of order statistics from nonnegative populations. *Ann Inst Statist Math* 49, 727 – 736. (Not cited.)
- Navarro, J., Ruiz, J, M., Sandoval, C, J., 2007. Properties of coherent systems with dependent components. *Communication in statistics-Theory and Methods* 36 :1, 175–191. (Cited on pages 2 and 52.)

- Navarro, J., Rychlik, T., 2007. Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. *Journal of multivariate analysis* 98, 102–113. (Cited on pages 2, 31 and 52.)
- Navarro, J., Rychlik, T., 2010. Comparisons and bounds for expected lifetimes of reliability systems. *European J Oper Res* 207, 309 – 317. (Cited on pages 2, 31 and 43.)
- Navarro J, E. S., 2003. Mean residual lifetimes of consecutive k -out-of- n systems. *J Appl Probab* 44, 82–98. (Not cited.)
- Navarro J, Aguila M, S. A., A, S.-L., 2016. Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. applications to coherent systems. *Methodol Comput Appl Probab* 18, 529 – 545. (Cited on pages 2 and 31.)
- Nelsen, R., 1999. An introduction to copulas. *Journal of the American Statistical Association* 95, 334–335. (Cited on pages 1 and 60.)
- Nelsen, R. B., 2006. An introduction to copulas. Springer. (Cited on pages 26, 52 and 60.)
- P, C., 2007-2010. Théorie des copules. Notes de cours, École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information (Ensa), Filière Gestion des risques et ingénierie financière. (Not cited.)
- P, M., T, R., 2014. Sharp bounds for lifetime variances of reliability systems with exchangeable components. *IEEE Trans Reliab* 63, 850 – 857. (Cited on page 31.)
- Pagès, A., Gondran, M., 1980. Fiabilité des systèmes. Vol. 39. Eyrolles. (Cited on page 1.)
- Pedroni, N., Zio, E., 2013. Uncertainty analysis in fault tree models with dependent basic events. *Risk Analysis* 33, 2146–1173. (Cited on pages 36 and 39.)
- Ross, M., 1979. Multivalued state components systems. *Ann. Prob* 17, 379–383. (Cited on pages 2 and 51.)
- Salhi, E, T., Asadi, M., Eryilmaz, S., 2011. Reliability analysis of consecutive k -out-of- n systems with non identical component lifetimes. *J Stat Plan and inference*, 2920–2932. (Cited on pages 2 and 52.)
- Schweizer, B., Wolff, E. F., et al., 1981. On nonparametric measures of dependence for random variables. *The annals of statistics* 9 (4), 879–885. (Cited on page 18.)
- Utkin, L. V., 2004. Reliability models of m -out-of- n systems under incomplete information. *Comput. Oper. Res* 31 (10), 1681–1702. (Cited on pages 36 and 39.)
- Walley, P., 1991. *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. New York : Chapman and Hall. (Cited on page 36.)
- Yamamoto, M., Zuo, J., Akiba, T., Tian, Z., 2006. Recursive formulas for the reliability of multi-state consecutive k -out-of- n : G systems. *IEEE. Trans. Reliability* 55(1), 98–104. (Cited on pages 2 and 51.)

Zio E, Podofillini, L., 2004. A monte carlo approach to the estimation of importance measures of multi-state components. *RAMS, IEEE* 82. (Cited on page 33.)

Zuo, M., Fang, Z., Huang, J., Xu, X., 2003. Performance evaluation of decreasing multi-state consecutive k -out-of- n :G systems. *Quality and Safety Engineering* 10(3), 345–358. (Cited on pages 2 and 51.)