

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI -CONSTANTINE 1-
Faculté des sciences exactes
Département des Mathématiques

N° d'ordre:.....

Série:.....

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur en sciences en Mathématiques

Option: Probabilités statistiques

Par

Rabah Bououden

Intitulée

Systemes dynamiques chaotiques : Application à l'optimisation

Soutenue le: .02/05/2019

Devant le jury

Président: K. Bessila *Maître de conférences, Université Constantine 1*

Rapporteur: M-S. Abdelouahab *Maître de conférences, Centre Universitaire de Mila*

Examineurs:

- A. Berkane *Maître de conférences, Université Constantine 1*
- A. Hmieda *Maître de conférences, Université Constantine 1*
- O. Zehrouer *Professeur, Université de Oum El Bouaghi*
- M. Tidjani *Maître de conférences, Université de Biskra*

Année Universitaire 2018-2019

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de thèse Dr. Mohamed Salah Abdelouahab, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je suis reconnaissant au Docteur Bessila Khaled pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de bien vouloir présider ce jury.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude au docteur Hmieda Ali, au docteur Berkane Abdelhak, au docteur Tidjani Menacer et au docteur Okba Zehrour pour leur volonté de lire et d'examiner ma thèse et pour leur aide pendant la réalisation de ce travail.

Une deuxième fois je suis reconnaissant au docteur Bessila Khaled pour son aide et son soutien apprécié.

J'adresse également mes remerciements envers Madame F. Zid, pour avoir relu et corrigé ma thèse. Ses conseils de rédaction ont été très précieux.

Je remercie également mes collègues, mes amis qui m'ont encouragé et aidé lors de la réalisation de cette thèse, en particulier M. Missili, K. Sannoune et S. benbelkassem.

Je suis reconnaissant à mes parents et mes enfants pour leur patience, leur compréhension, leur amour et leur soutien quotidiens.

A celles et ceux qui m'ont conseillée et que je n'ai pas cités ici, mais le cœur y est !

Enfin, mais non des moindres, tous mes remerciements à ma femme bien aimée, sans laquelle cette thèse n'aurait jamais vu le jour, pour sa patience et sa tendresse dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse.

Dédié à mes parents, ma femme et mes enfants.

Table des matières

REMERCIEMENTS	i
Liste des figures	4
Introduction générale	6
1 Systèmes Dynamiques Discrets	10
1.1 Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques Discrets	10
1.1.1 Définitions	10
1.1.2 Points Fixes et Orbites Périodiques	11
1.1.2.1 Points fixes et leurs stabilités	11
1.1.2.2 Orbites périodiques (p -cycle) et leurs stabilités . . .	12
1.1.3 Points limites, ensembles limites et orbites aperiodiques . .	14
1.1.4 Équivalence topologique des systèmes	15
1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles de premier ordre .	16
1.2.1 Étude graphique des systèmes dynamiques unidimensionnelles	17
1.2.2 Systèmes linéaires	19
1.2.3 Systèmes dynamiques unidimensionnelles non-linéaires	20
1.2.3.1 Existence des points fixes et orbites périodiques . .	21
1.2.3.2 Attracteurs et Sources	23
1.3 Systèmes dynamiques discrets bi-dimensionnelles de premier ordre .	33
1.3.1 Systèmes dynamiques linéaires bi-dimensionnelles de pre-	
mier ordre	33
1.3.1.1 Matrice de Jardon	35
1.3.1.2 Caractérisation des solutions d'un système dyna-	
mique linéaire	36
1.3.1.3 Caractérisation des solutions en fonction de trace	
de A et $\det(A)$	42
1.3.2 Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires discrets bi-	
dimensionnelles	43
2 Bifurcations et chaos	56
2.1 Théorie des bifurcations	56
2.2 Chaos	58
2.2.1 Systèmes dynamiques chaotiques	58

2.2.2	Attracteurs, bassins d'attraction et frontières	59
2.2.3	Exposants de Lyapunov	60
2.2.4	Dimension fractale	62
2.2.5	Routes vers le chaos	64
2.2.5.1	Cascade de doublements de période	65
2.2.5.2	Par intermittence	66
2.2.5.3	Scénario de Ruelle et Takens	66
3	Introduction à l'optimisation	74
3.1	Types d'optima	75
3.2	Méthodes d'optimisation classiques	76
3.2.1	Optimisation unidimensionnelle	76
3.2.1.1	Méthode de la section dorée	76
3.2.1.2	Méthode de Fibonacci	78
3.2.2	Optimisation multidimensionnelle	80
3.2.2.1	Méthode de Gradient	80
3.2.2.2	Méthode de Newton	82
3.3	Méthodes méta-heuristiques	83
3.3.1	L'optimisation par essaims particulaires (OEP).	83
3.3.2	Optimisation par Colonie d'abeilles	85
3.3.2.1	Les abeilles dans la nature	85
3.3.2.2	Algorithme d'abeilles	86
4	Applications à l'optimisation	88
4.1	Algorithme d'optimisation chaotique basé sur la partition de l'ensemble de données dans l'étape de recherche globale	88
4.1.1	L'algorithme ICOLM	90
4.1.2	Algorithme d'optimisation chaotique pure	93
4.1.3	Exemples numériques et discussion	96
4.1.3.1	Quelques fonctions de test	97
4.1.3.2	Simulation numériques	98
4.1.4	Conclusion	100
4.2	Algorithme d'optimisation chaotique basé sur la densité de probabilité modifiée de l'application de Lozi	100
4.2.1	L'idée principale	100
4.2.2	Méthode d'optimisation chaotique (ICOLM)	101
4.2.3	Exemples numériques et discussion	102
4.2.3.1	Quelques transformations	102
4.2.4	Résultats numériques	103
4.2.5	Conclusion	103
	Conclusion générale	110

Bibliographie	111
Résumé en arabe	116
Résumé	117
Abstract	118

Table des figures

1	L'attracteur de Lorenz.	7
1.1	Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$	12
1.2	Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$	13
1.3	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$	17
1.4	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4x(1 - x)$	18
1.5	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4495x(1 - x)$	18
1.6	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 4x(1 - x)$	19
1.7	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$	30
1.8	Le diagramme cobweb du système dynamique (1.21)	30
1.9	Le diagramme cobweb de l'application $f(x) = \arctan(x)$	32
1.10	Le diagramme cobweb de l'application $f(x) = \cos(x)$	33
1.11	Portrait de phase du (1.26) si $ \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ (a) Nœud stable de type 1 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. (b) Nœud stable de type 2 $0 < \lambda_1$ et $\lambda_2 < 0$. (c) Nœud stable de type 3 $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$	46
1.12	Portrait de phase du (1.26) si $ \lambda_1 > \lambda_2 > 1$ (a) Nœud instable de type 1 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. (b) Nœud instable de type 2 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. (c) Nœud instable de type 3 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	47
1.13	Portrait de phase du (1.26) si $ \lambda_2 < 1, \lambda_1 > 1$ (a) Col de type 1 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. (b) Col de type 2 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. (c) Col de type 3 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	48
1.14	Portrait de phase du (1.26) si $ \lambda_1 = \lambda_2 < 1$ nœud étoile stable (a) de type 1 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (b) de type 2 $\lambda_1 = -\lambda_2$. (c) de type 3 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	49
1.15	Portrait de phase du (1.26) si $ \lambda_1 = \lambda_2 > 1$ nœud étoile instable (a) de type 1 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (b) de type 2 $\lambda_1 = -\lambda_2$. (c) de type 3 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	50
1.16	Portrait de phase du (1.26) si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (a) Nœud impropre stable $0 < \lambda < 1$. (b) Nœud impropre instable $1 < \lambda < \infty$	51
1.17	Représentation géométrique des valeurs propres $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$	51
1.18	Point fixe centre $r = 1$. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$	52
1.19	Foyer stable. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$	53
1.20	Foyer stable. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$	54
1.21	Caractérisation des solutions en fonction de $tr(A)$ et $det(A)$	55
2.1	Le graphe de l'application $f_c(x) = x^2 + x + c$ pour (a) $c = 0.5$. (b) $c = 0$. (c) $c = -0.5$	67
2.2	Bifurcation pli.	68

2.3	Bifurcation pli.	68
2.4	Bifurcation de Neimark-Sacker super-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée stable $\mu > \mu_0$	69
2.5	Bifurcation de Neimark-Sacker sous-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée instable $\mu > \mu_0$	70
2.6	Lozi attractor obtained for $a = 1.7$ and $b = 0.5$	71
2.7	Exposant de Lyapunov de l'application logistique (2.6) en fonction du paramètre a	71
2.8	Exposant de Lyapunov de l'application de Hénon pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$	72
2.9	Bifurcation vers le chaos par doublement de période (ex : l'application logistique pour $2.5 < a \leq 4$).	72
2.10	Pour $\mu = 0.025$ et $A = 0.5$ les itérés successifs ont lieu entre le graphe de g_μ et la bissectrice. La trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\mu < 0$	73
3.1	Fonction comportant plusieurs minima locaux près de l'origine (mais il est très difficile d'identifier son optimum globale).	76
3.2	Graphe d'une fonction réelle présentant un unique minimum sur un intervalle $[a_0, b_0]$	77
3.3	Méthode de la section dorée.	77
3.4	Méthode de Fibonacci.	79
4.1	(a) L'attracteur de Lozi et son bassin d'attraction obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$. (b) La densité de probabilité $\rho(s)$ des valeurs itérées $x(k)$	89
4.2	Exemple de tomber dans le piège de minimum locale.	93
4.3	(a) La transformation T . (b) Densité de probabilité $T(L_1)$	95
4.4	(a) La fonction de Styblinski-Tang f_1 . (b) Agrandissement de la fonction Styblinski-Tang f_1 . (c) La fonction f_2 . (d) Agrandissement de la fonction f_2 . (e) La fonction de Goldstein-Price f_3 . (f) La fonction de Bukin f_4	107
4.5	La transformation S	108
4.6	Dansité de probabilité de $S(L_1)$	108
4.7	La densité de $S_1(L_1)$	108
4.8	La densité de $S_2(L_1)$	109
4.9	La densité de $S_3(L_1)$	109
4.10	La densité de $S_4(L_1)$	109

Introduction générale

Bien que l'étude des systèmes dynamiques soit un sujet interdisciplinaire aujourd'hui, c'était à l'origine une branche de la physique. Le sujet a commencé vers le milieu du 17^{ème} siècle, lorsque Newton a inventé les équations différentielles, découvert ses lois du mouvement et de la gravitation universelle, et les a combinées pour expliquer les lois du mouvement planétaire de Kepler. Plus précisément, Newton résolut le problème à deux corps, celui du calcul du mouvement de la terre autour du soleil, étant donné la loi inverse de l'attraction gravitationnelle entre eux. Les générations suivantes de mathématiciens et de physiciens ont essayé d'étendre les méthodes analytiques de Newton au problème des trois corps (par exemple, le soleil, la terre et la lune) mais curieusement, ce problème s'est révélé beaucoup plus difficile à résoudre. Après des décennies d'efforts, on s'est finalement rendu compte que le problème à trois corps était essentiellement impossible à résoudre, dans le sens d'obtenir des formules explicites pour les mouvements des trois corps. À ce point, la situation semblait sans espoir.

La percée a eu lieu avec le travail de Poincaré à la fin du 18^{ème} siècle. Il a présenté un nouveau point de vue mettant l'accent sur des questions qualitatives plutôt que quantitatives. Par exemple, au lieu de demander à tout moment la position exacte des planètes, il a demandé : (Le système solaire est-il stable pour toujours, ou certaines planètes finiront-elles par voler à l'infini ?) Poincaré a développé une approche géométrique puissante pour analyser de telles questions. Cette approche est devenue le sujet moderne de la dynamique, avec des applications allant bien au-delà de la mécanique céleste. Poincaré a également été la première personne à entrevoir la possibilité d'un chaos, dans lequel un système déterministe présente un comportement aperiodique qui dépend de manière sensible aux conditions initiales, rendant ainsi la prédiction à long terme impossible [1].

Mais le chaos est resté à l'arrière-plan dans la première moitié de ce siècle ; au lieu de cela, les chercheurs ont été intéressés à cet époque par la dynamique concernait

principalement aux oscillateurs non linéaires et leurs applications en physique et en ingénierie.

L'invention du ordinateur à grande vitesse dans les années 1950 marque un tournant dans l'histoire de la dynamique. L'ordinateur permettait d'essayer des équations d'une manière auparavant impossible et de développer ainsi une certaine intuition sur les systèmes non linéaires. De telles expériences ont conduit à la découverte par Lorenz en 1963 [2] d'un mouvement chaotique sur un attracteur étrange. Il a étudié un modèle simplifié de convection dans l'atmosphère pour mieux comprendre l'imprévisibilité de la météo. Lorenz a constaté que les solutions à ses équations ne se convergent jamais vers un point d'équilibre ni vers un état périodique, mais qu'elles continuaient à osciller de manière irrégulière et aperiodique. De plus, s'il commençait ses simulations à partir de deux conditions initiales légèrement différentes, les comportements résultants deviendraient bientôt totalement différents. L'implication était que s'il y a des erreurs qui ne peuvent pas être prédites lors de l'évaluation de l'état actuel, ces erreurs seraient amplifiées rapidement, aboutissant finalement à des prévisions incertaines. Mais Lorenz a également expliqué qu'il existait une structure dans le chaos - les solutions à ses équations, tracées en trois dimensions, tombaient sur un ensemble de points en forme de papillon (Figure 1).

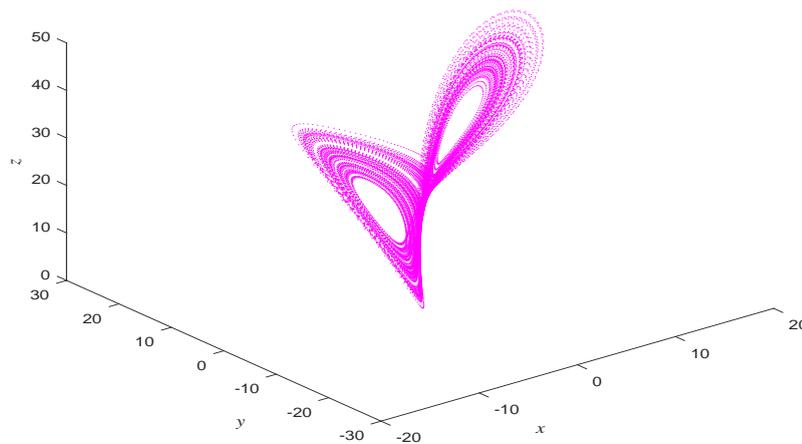


FIGURE 1: L'attracteur de Lorenz.

Le travail de Lorenz n'a eu que peu d'impact jusque dans les années 1970, les années de boum du chaos. En 1971, Ruelle et Takens [3] ont proposé une nouvelle

théorie pour l'apparition de la turbulence dans les fluides, fondée sur des considérations abstraites concernant les attracteurs étranges. Quelques années plus tard, May trouva des exemples de chaos dans l'application itérative en biologie [4]. Vient ensuite la découverte la plus surprenante de toutes, due au physicien Feigenbaum [5]. Il a découvert qu'il existe certaines lois universelles régissant la transition d'un comportement régulier à un comportement chaotique ; En gros, des systèmes complètement différents peuvent devenir chaotiques de la même manière. Enfin, des expérimentateurs tels que Gollub, Libchaber, Swinney, Linsay, Moon et Westervelt ont testé les nouvelles idées sur le chaos lors d'expériences sur les fluides, les réactions chimiques, les circuits électroniques, les oscillateurs mécaniques et les semi-conducteurs [6–11].

Il existe deux principaux types de systèmes dynamiques : les équations différentielles et les applications itérées. Les équations différentielles décrivent l'évolution des systèmes en temps continu, alors que les applications itérées le sont par problèmes où le temps est discret. Cette thèse traite que la classe de systèmes dynamiques dans lesquels le temps est discret et l'application de ce type des systèmes à l'optimisation.

Revenons au mot optimisation qui est le deuxième axe de cette thèse. Pour les problèmes d'optimisation de certaines fonctions usuelles qui sont différentiables, certains algorithmes d'optimisation classiques tels que la méthode de Newton, la méthode du gradient et la méthode Hessiens [49, 50], peuvent obtenir leurs points globaux optimaux avec l'avantage d'une vitesse de convergence et de la haute précision. Cependant, ces algorithmes d'optimisation traditionnels convergent facilement à optimum local lors de la résolution des problèmes d'optimisation de certaines fonctions multi-dimensionnelles.

En raison de plusieurs caractéristiques dynamiques importantes du chaos, à savoir : la sensibilité aux conditions initiales, l'ergodicité, le pseudo-aléatoire et l'attracteur étrange avec une dimension fractal, de nombreux chercheurs utilisent les applications chaotiques dans l'algorithme d'optimisation afin d'éviter de tomber dans optimum local [56, 57].

Récemment, les chercheurs se sont concentrés sur le développement d'algorithmes hybrides en combinant des algorithmes heuristiques avec les techniques de recherche chaotiques pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires et des problèmes d'optimisation tels que l'optimisation de Monte Carlo chaotique, la

BFGS chaotique, l'optimisation chaotique d'essaims de particules, les algorithmes génétiques chaotiques, recuit simulé chaotique, etc [52–54].

Cette thèse est composée de quatre chapitres : Dans le Chapitre 1 nous présentons des notions de base des systèmes dynamiques discrets (notions, définitions, théorèmes, et critères de stabilité). Dans le chapitre 2 la théorie des bifurcations est chaos qui s'intéresse à l'étude des changements subits par une application lorsque le paramètre de contrôle change et traverse des valeurs critiques. Dans le chapitre 4 nous donnons une introduction à l'optimisation. Dans le dernier chapitre nous exposons notre contributions dans l'application du chaos à l'optimisation.

Chapitre 1

Systemes Dynamiques Discrets

Le but de ce premier chapitre est d'introduire de nombreuses notions et techniques de base de la théorie des systèmes dynamiques dans un cadre aussi simple que possible.

1.1 Notions Générales sur les Systemes Dynamiques Discrets

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. [16]

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté (D, \mathbb{N}, f) est une relation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.1}$$

Ainsi, si \circ représente la composition des applications, on a

$$x_n = f^n(x_0) \tag{1.2}$$

où

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^0 = Id.$$

L'application f est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité 1.2 reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.2. (Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes)

Lorsque la fonction f dans (1.1) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Définition 1.3. (Trajectoires)

Étant donné le point initial x_0 , on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1.1) la suite

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n)), \dots\}.$$

1.1.2 Points Fixes et Orbites Périodiques

Les points fixes et les orbites périodiques sont des trajectoires particulièrement simples mais qui jouent un rôle central dans l'étude des systèmes dynamiques.

1.1.2.1 Points fixes et leurs stabilités

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition 1.4. (Points fixes)

Un point x^* est un point fixe du système (1.1) (ou de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

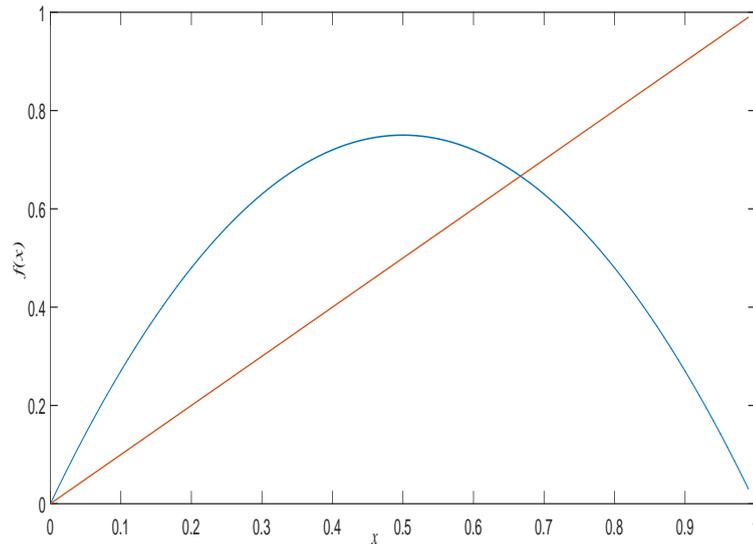
Parfois, ces points sont appelés points stationnaires ou points d'équilibres.

Exemple 1.1.

Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ ($0 < a \leq 4$) sont les solutions de l'équation $x = ax(1 - x)$. Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^ = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$. Graphiquement les points fixes de $f(x) = ax(1 - x)$ sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droite $y = x$ comme le montre la Figure (1.1).*

Remarque 1.5.

Une orbite qui a le point fixe comme condition initiale reste à ce point. Cette situation est possible en théorie, mais pas en pratique, puisque chaque processus subit de petites perturbations qui ne sont normalement pas prises en compte dans un modèle. Cette observation motive l'introduction de l'idée de stabilité.

FIGURE 1.1: Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$.**Définition 1.6.**

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \quad (1.3)$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition 1.7.

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

1.1.2.2 Orbites périodiques (p -cycle) et leurs stabilités**Définition 1.8.** (p -cycles)

Par définition, un p -cycle est un p -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, on a $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_{p-1}) = x_p = x_0$; p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p -périodique.

Remarque 1.9.

1. Un point fixe est un point périodique de période 1.

2. Un point x est dit point p -périodique d'une transformation f , s'il est point fixe de f^p , sans être un point fixe de f^l , $1 \leq l < p$, (l et p entiers).

Exemple 1.2.

Soit le système dynamique gouverné par l'application logistique $f(x) = ax(1 - x)$ ($0 < a \leq 4$). Les points 2-périodiques sont solutions du système

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

Si $2 < a \leq 4$ ce système à deux solutions

$$x_1 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a},$$

qui sont les points d'un cycle de période 2. Graphiquement les points d'un cycle de période 2 sont l'intersection entre le graphe de $f^2 = f \circ f$ et la droite $y = x$ tel que $f(x) \neq x$ comme le montre la Figure (1.2).

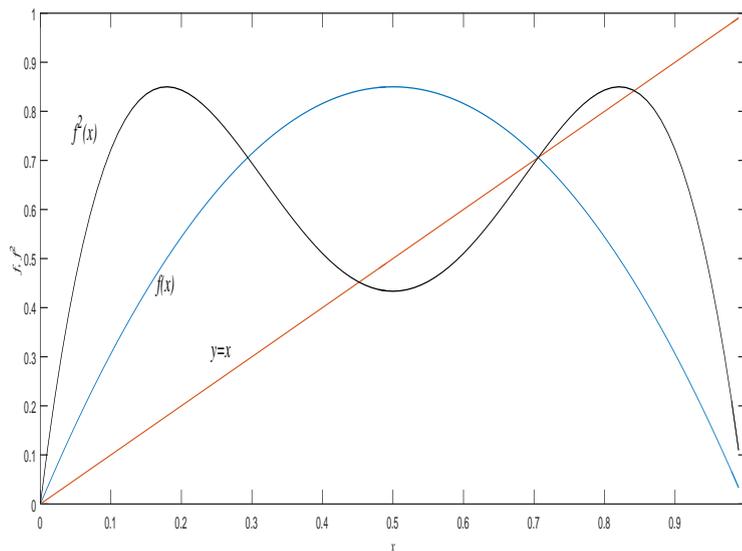


FIGURE 1.2: Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$.

Définition 1.10.

Une orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ d'un système dynamique gouverné par une application f est stable si tous point x_i , $i = 0, 1, \dots, p - 1$ est un point fixe stable du système dynamique gouverné par l'application f^p .

Définition 1.11.

Une orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ qui n'est pas stable est dite instable.

1.1.3 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques

Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ une orbite d'un système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.4)$$

x_0 est une condition initiale donnée.

Définition 1.12.

Un point z est dit point limite de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'il existe une sous suite $\{x_{n_k} : k = 0, 1, \dots\}$ de $\mathcal{O}(x_0)$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - z\| = 0 \quad (1.5)$$

Remarque 1.13.

1. Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).
2. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ p -périodique a exactement p points limites : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

Définition 1.14.

L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0)$$

Définition 1.15.

1. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.
2. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.3.

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition 1.16.

Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite **apériodique** si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans \mathbb{R} .

Théorème 1.17. (*Théorème de Li-Yorke [35]*)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une application continue. Supposons que f a une orbite périodique de période 3. Alors f a des orbites périodiques de période p pour tout $p \geq 1$ et il y a un ensemble infini S contenu dans I telle que chaque orbite issu à partir d'un point de S est apériodique.

Le théorème 1.17 semble simple, mais son application à des cas spécifiques peut être difficile.

1.1.4 Équivalence topologique des systèmes

Nous allons aborder dans cette sous section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.

Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \rightarrow D$, $g : E \rightarrow E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition 1.18.

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \rightarrow E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Théorème 1.19.

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme $h : D \rightarrow E$. Alors

1. *L'application $h^{-1} : E \rightarrow D$ vérifie aussi la définition et assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes (D, f) et (E, g) .*
2. *$h \circ f^n = g^n \circ h$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $x^* \in D$ est un point périodique de f de période fondamentale p alors $h(x^*) \in E$ est un point périodique de g de période fondamentale p .*

Remarque 1.20.

1. L'application $h : D \rightarrow E$ correspond tout simplement à un changement de variables qui transforme f en g .
2. Selon ce concept, et pour un point fixe hyperbolique, nous pouvons donner une description approximative du comportement local du système dynamique. Ceci est précisé par le théorème de Hartman-Grobman [12].

1.2 Systèmes dynamiques discrets unidimensionnelles de premier ordre

On dit que le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.6}$$

est de dimension 1 si la variable d'état x est une scalaire, i.e. $x \in \mathbb{R}$. Souvent f dépend d'un ou de plusieurs paramètres que nous appellerons paramètres de bifurcations. Dans ce cas le système (1.6) devient

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \tag{1.7}$$

où $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$.

1.2.1 Étude graphique des systèmes dynamiques unidimensionnelles

Nous décrivons maintenant une méthode graphique pour analyser les trajectoires d'un système dynamique, appelée méthode de Koenigs Lemeray ou Cobweb. Rappelons que les points fixes d'une application f sont les abscisses des points d'intersection entre le graphe de f et la droite $y = x$. Supposons que le paramètre a dans (1.7) est fixé. La trajectoire $\mathcal{O}(x_0)$ peut être visualisée dans le plan en dessinant un segment vertical du point $(x_0, 0)$ vers $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$ sur le graphe de f , puis un segment vers la droite $y = x$ au point (x_1, x_1) , et une autre fois vers (x_1, x_2) sur le graphe de f . Continuez ce processus jusqu'à l'obtention des informations suffisantes sur le comportement d'orbite $\mathcal{O}(x_0)$. L'image qui fournit cette information est appelée **le diagramme cobweb** figures (1.3,1.4,1.6, 1.5).

Par exemple, lorsque l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ converge vers un point fixe x^* , le diagramme cobweb qui démarre à partir du point $(x_0, 0)$ sera une séquence de vertical et horizontal segments en spirale vers (x^*, x^*) . Cette situation est illustrée dans la figure (1.3), par un diagramme cobweb de l'application logistique

$$f(x) = 2.9x(1 - x).$$

Le point fixé de f est $x^* = \frac{19}{29}$ et la condition initiale est $x_0 = 0.1$.

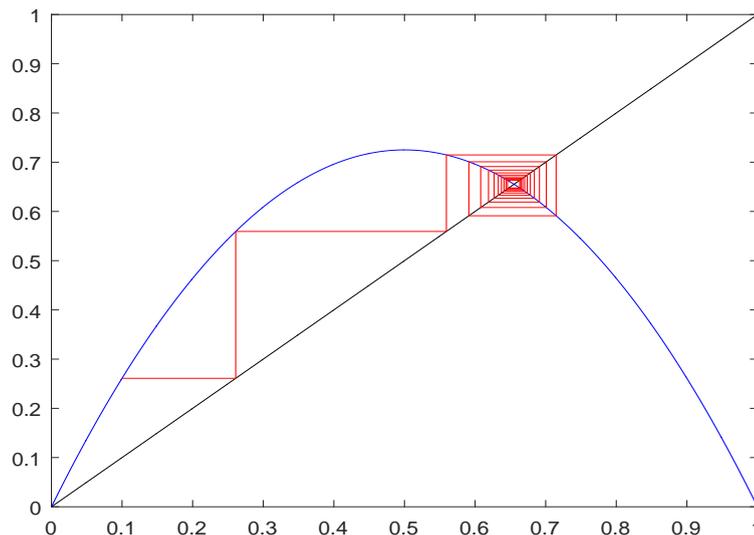


FIGURE 1.3: Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$.

De façon analogue, lorsque l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ converge vers une orbite périodique de période p $(z_0, z_1, \dots, z_{p-1})$, le diagramme cobweb démarre de $(x_0, 0)$ et s'approche

du cycle fermé $\{(z_0, z_0), (z_0, z_1), \dots, (z_{p-1}, z_{p-1}), (z_{p-1}, z_0)\}$. La figure (1.4) illustre cette situation en utilisant l'application logistique $f(x) = 3.4x(1-x)$. Dans ce cas, $\mathcal{O}(0.1)$ converge vers une orbite 2-périodique.

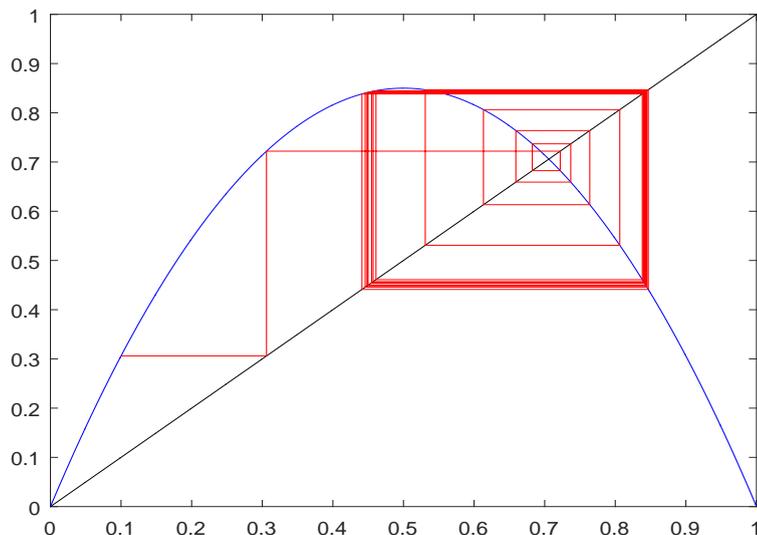


FIGURE 1.4: Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4x(1-x)$.

La figure (1.5) montre que la trajectoire du système dynamique

$$f(x) = 3.4495x(1-x),$$

converge vers une orbite périodique de période 4.

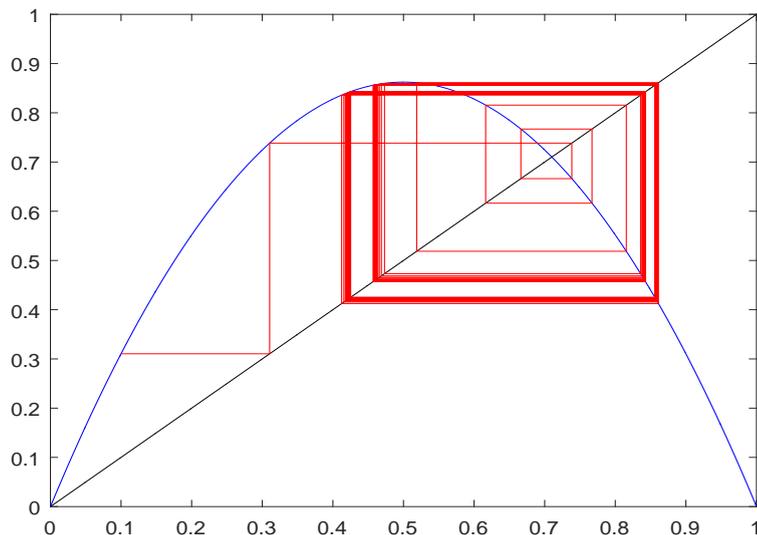


FIGURE 1.5: Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 3.4495x(1-x)$.

Finalement la figure (1.6) décrit le comportement chaotique de la trajectoire $\mathcal{O}(0.1)$ du système dynamique $f(x) = 4x(1 - x)$.

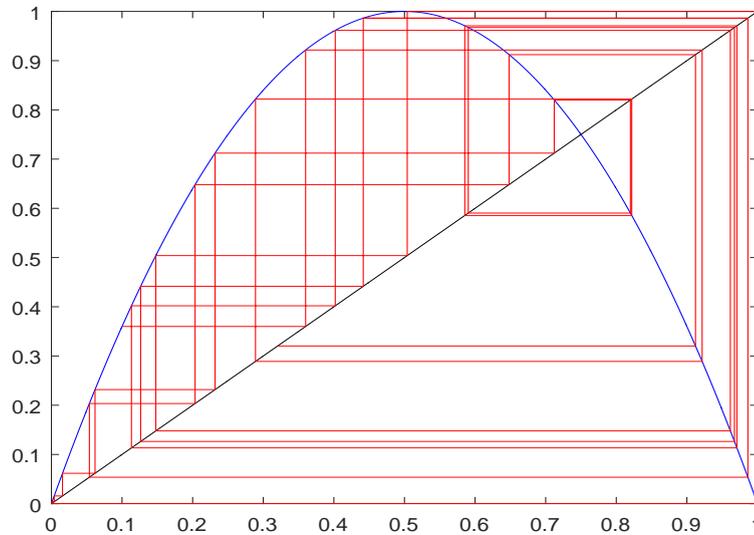


FIGURE 1.6: Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 4x(1 - x)$.

1.2.2 Systèmes linéaires

Après une translation d'origine, un système dynamique linéaire d'ordre un, de dimension un, peut toujours être mise sous la forme :

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.8)$$

On est dans un cas où le second nombre permet l'obtention de la solution sous forme explicite, pour une condition initiale x_0 quelconque.

$$x_n = S^n x_0. \quad (1.9)$$

L'origine ($x = 0$) de l'axe des x , est le seul point fixe et d'après (1.8) et (1.9), on voit que la nature de ce point est complètement déterminée par le nombre réel S , appelé *multiplicateur* du point fixe $x = 0$. En effet

1. Si $|S| < 1$, quel que soit x_0 l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ du système (1.8) tend vers le point fixe $x = 0$. Ce point 0 est dit **attractif**, ou encore **asymptotiquement stable**.

2. Si $|S| > 1$, quel que soit x_0 l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ du système (1.8) s'éloigne de 0 quand n augmente. Ce point 0 est alors dit ***répulsif*** ou ***instable***.

La nature du point fixe 0 dépend aussi du signe du multiplicateur S . En effet,

1. si S est positif la suite des points engendrés par (1.8) et telle que x_n a toujours le même signe que x_0 . 0 est appelé dans ce cas ***point de type 1*** ;
2. par contre si S est négatif la suite des points engendrée par (1.8) et telle que le signe de x_n dépend de n . Cette suite oscille autour du point fixe 0. 0 est alors appelé ***point de type 2***

Dans le contexte linéaire, $|S| = 1$ correspond à un cas banal, car si $S = 1$ tout point de l'axe des x est un point fixe, et si $S = -1$, tout point de l'axe des x est un point fixe de

$$x_{n+1} = S^2 x_n. \quad (1.10)$$

Lorsque 0 est attractif, le domaine d'attraction de 0, est l'ensemble des points x_0 qui donne une suite tendant vers 0. Il est ici constitué par tout l'axe des x .

Étant donné un point initial x_0 , le point x_1 obtenu à partir de (1.8) est appelé le conséquent de x_0 . En écrivant (1.8) sous la forme :

$$x_n = S^{-1} x_{n+1}, \quad (1.11)$$

on définit la récurrence inverse, (1.8) étant la récurrence directe. Au point x_0 correspond un point x_{-1} donné par (1.11), qui est appelé antécédent de rang un de x_0 . Si (1.8) correspond à une transformation ponctuelle f , (1.11) correspond à la transformation inverse f^{-1} . Dans le cas linéaire, il est évident que f^{-1} est toujours uniforme, c'est-à-dire, un point x_0 possède un antécédent de rang n et un seul. Le point x_{-n} issu de x_0 est l'antécédent de rang n .

Remarque 1.21.

Notons que si on a un système dynamique linéaire défini par l'application $f(x) = Sx$ donc le multiplicateur du point fixe $x^* = 0$ est donné par $S = f'(x^*)$.

1.2.3 Systèmes dynamiques unidimensionnelles non-linéaires

Soit le système dynamique non-linéaire défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \quad (1.12)$$

$a \in \mathbb{R}^m$ est le paramètre de bifurcation et $f(x)$ étant une fonction uniforme de classe C^1 de la variable réelle x , ne pouvant être ramenée à la forme (1.8) par un changement linéaire de variables.

La question principale qui se pose ici est de savoir si le système (1.12) possède un seul point fixe, ou plusieurs et quelle est la nature de ces points, ou s'il a des orbites périodiques et de quelles périodes et de quelle nature. Il s'agit donc de décrire le comportement du système (1.12). La discussion suivante aide à répondre à ces questions.

1.2.3.1 Existence des points fixes et orbites périodiques

Rappelons que les points fixes du système dynamique (1.12) sont les solutions de l'équation

$$x = f(x), \quad (1.13)$$

Similairement, les points périodiques de période p sont les solutions de l'équation

$$x = f^p(x), \quad (1.14)$$

qui ne sont pas solutions de l'équation

$$x = f^m(x), \quad (1.15)$$

pour tous $m < p$.

Théorème 1.22.

Supposons que l'application $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Alors l'image de h est un intervalle fermé et borné.

Lemme 1.23.

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue au point $x_0 \in I$. Supposons que $|f(x_0)| < 1$. Soit $k \in (|f(x_0)|, 1)$. Alors il existe $r > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq k \text{ pour tout } x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap I.$$

Remarque 1.24.

Le lemme (1.23) reste vrai si on remplace $<$ et \leq par $>$ et \geq respectivement.

Des autres notions importantes du calcul élémentaire est le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires sont données ci-dessus.

Théorème 1.25. (Théorème des accroissements finis)

Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a et b réels tels que $a < b$), supposée continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un réel c dans $]a, b[$ vérifiant :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (1.16)$$

Théorème 1.26. (Théorème des valeurs intermédiaires.)

Pour toute application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Les deux théorèmes qui suivent peuvent être utilisés pour analyser l'existence des points fixes des systèmes.

Théorème 1.27.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle et soit $f : I \rightarrow I$ une application continue. Alors f a au moins un point fixe dans I .

Démonstration.

Soit $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur I . Supposons que $f(a) > a$ et $f(b) < b$ (sinon a ou b est un point fixe). Donc $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$. D'après le théorème (1.26) il existe c entre a et b tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = c$. \square

Théorème 1.28.

Soit $f : I \rightarrow I$ et supposons que $|f'(x)| < 1$ pour tout x dans I . Alors il existe un point fixe unique pour f dans I . De plus

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

pour tout $x, y \in I$, $x \neq y$.

Démonstration.

Le théorème (1.27) garantit au moins un point fixe pour f . Nous supposons que x et y sont des points fixes, $x \neq y$. Par le théorème (1.25), il y a un c entre x et y tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

Contradiction. Donc $x = y$. Pour établir la deuxième affirmation du théorème, nous utilisons une deuxième fois le théorème des accroissements finis pour affirmer

que pour tous $x, y \in I$, $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < f'(c)|x - y| < |x - y|.$$

□

Remarque 1.29.

1. L'existence de points périodiques de période p peut être établie en utilisant les théorèmes (1.27), (1.28) et en remplaçant f par f^p .
2. L'existence d'une orbite périodique de période 2 implique l'existence d'un point fixe. En fait, soit $x_1 = f(x_2)$ et $x_2 = f(x_1)$, avec $x_1 \neq x_2$. Nous pouvons évidemment supposer que $x_1 < x_2$. Alors, $f(x_1) > x_1$ et $f(x_2) < x_2$ d'où l'existence d'un point fixe dans $[x_1, x_2]$

Un autre résultat concernant l'existence des orbites périodiques est donné par le théorème de Sarkovskii.

Théorème 1.30. (*Charkovski*)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ continu. Si f admet un point périodique de période n , alors pour tout m succédant à n dans l'ordre de Sharkovski, f admet un point périodique de période m .

1.2.3.2 Attracteurs et Sources

◆ Attracteurs

Au chapitre 1, nous avons introduit la notion de stabilité des points fixes et des orbites périodiques. Nous présentons ici une condition qui assure la stabilité, avec quelques autres notions et résultats strictement liés à la stabilité et à l'instabilité des points fixes et des orbites périodiques.

Théorème 1.31. [16]

Soit I un intervalle ouvert et x^ un point fixe d'une fonction continue $f : I \rightarrow I$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f soit différentiable sur $]x^* - r, x^* + r[$ sauf possiblement à x^* et $|f'(x)| \leq 1$. Alors x^* est stable.*

Démonstration.

Soit $x_0 \in I$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c entre x_0 et x^*

tel que $f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*)$, de plus

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Alors

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| \leq |x_0 - x^*|,$$

d'où

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \leq |x_n - x^*| \leq \dots \leq |x_0 - x^*|.$$

Donc, le point fixe x^* est stable. □

Rappelons qu'un point périodique de période p est un point fixe de f^p . D'où le théorème suivant.

Théorème 1.32. [16]

Soit I un intervalle ouvert et $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ une orbite périodique de période p d'une fonction continue $f : I \rightarrow I$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $j = 0, 1, \dots, p-1$, f est différentiable sur $]x_j - r, x_j + r[$, sauf possiblement à x_j de plus

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x) \right| \leq 1.$$

Alors l'orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ est stable.

Nous allons discuter ici deux cas extrêmes de stabilité et d'instabilité.

Définition 1.33.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Un point fixe x^* s'appelle **attractif** s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall x_0 \in B_\epsilon(x^*), x_n = f^n(x_0) \longrightarrow x^* \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Une orbite périodique de période p $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ de f est dite **attractive** si chacun de ses points est un point fixe attractif de l'application f^p .

Cette définition, n'est pas toujours facile à appliquer. Voici un critère.

Théorème 1.34. [16]

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe x^* . Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Alors $\left| \frac{d}{dx} f(x^*) \right| < 1$ implique que le point x^* est attractif.

Démonstration. Soit $k \in \{|f'(x^*)|, 1\}$. Par le lemme (1.23), il y a un nombre positif $r < \epsilon$ tel que $|f'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in [x^* - r, x^* + r] = J$. Soit une condition initiale $x_0 \in J$. Ensuite, par le théorème des accroissements finis, il existe un c entre x_0 et x^* tel que

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*).$$

Par conséquent,

$$|x_1 - x^*| \leq k|x_0 - x^*|.$$

Cette inégalité montre que $x_1 \in J$ et on peut appliquer à x_1 la même argument utilisé pour x_0 . On obtient

$$|x_2 - x^*| \leq k|x_1 - x^*| \leq k^2|x_0 - x^*|.$$

En continuant de la même manière, on arrive, après n étapes, à l'inégalité

$$|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Comme $k \in [0, 1[$, on déduit que $|x_n - x^*| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. □

Le nombre $S = f'(x^*)$ est appelé le multiplicateur du point fixe x^* .

Pour donner une condition suffisante pour la quelle une orbite périodique de période p sera un attracteur il suffit de remarquer qu'un point périodique de période p est un point fixe de f^p . En appliquant la règle de chaîne on trouve

$$\frac{d}{dx}f^p(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}), \quad (1.17)$$

d'où

$$\frac{d}{dx}f^p(x_i) = \frac{d}{dx}f^p(x_j), \quad 0 \leq i, j \leq p-1. \quad (1.18)$$

Théorème 1.35.

Soit I un intervalle ouvert et $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ une orbite périodique de période p d'une fonction continue $f : I \rightarrow I$. Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^ - \epsilon, x^* + \epsilon$ du point x_j et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_j pour tout $j = 1, 2, \dots, p-1$. Alors*

$$\left| \frac{d}{dx}f^p(x_0) \right| < 1, \quad (1.19)$$

implique que l'orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ est attractive.

Démonstration.

Rappelons que chaque point x_j , $j=1,2,\dots,p-1$ est un point fixe de f^p . L'inégalité (1.19) et le théorème (1.34) entraîne que le point x_0 est un attracteur pour f^p . L'égalité (1.18) avec l'inégalité (1.19) impliquent que tout point x_j , $j=1,2,\dots,p-1$ est un attracteur du système dynamique défini par f^p . donc l'orbite périodique est un attracteur. \square

Le nombre

$$S = \frac{d}{dx} f^p(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}),$$

est appelé le multiplicateur de l'orbite périodique $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$.

Parfois, la dérivée de la fonction f satisfait une inégalité plus faible que celle dans le théorème (1.19). Il se peut arriver qu'il existe un $d > 0$ tel que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in]x^* - d, x^* + d[$, sauf à x^* où la dérivée peut ne pas exister ou $|f'(x^*)| = 1$. Sous ces hypothèses plus faibles, nous pouvons prouver que x^* est un attracteur. Pour montrer ce résultat, et d'autres résultats présentés plus tard dans ce chapitre, nous avons besoin d'introduire le lemme suivante.

Lemme 1.36.

1. *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Théorème 1.37.

Soit I un intervalle. Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe x^ . Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ sauf possiblement à x^* et $|f'(x)| < 1$. Alors le point x^* est attractif.*

Démonstration.

Soit $x_0 \in]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| < |x_0 - x^*|.$$

Ceci montre que la suite $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, \dots\}$ est strictement décroissante. Selon le lemme (1.36), elle doit converger vers $c \in [0, r[$. Nous montrons que $c = 0$. L'ensemble des points limites $L(x_0)$ de $\mathcal{O}(x_0)$ est contenu dans (et peut coïncider

avec) l'ensemble $]x^* - c, x^* + c[$. D'autre part $f(L(x_0)) = L(x_0)$. Le théorème des accroissements finis implique que

$$|f(x^* + c) - f(x^*)| < |(x^* + c) - x^*| = c \text{ et } |f(x^* - c) - f(x^*)| < |x^* - c - x^*| = c.$$

Donc les deux nombres $f(x^* + c)$ et $f(x^* - c)$ sont très proche de x^* que c . Contradiction avec l'égalité $f(L(x_0)) = L(x_0)$, donc $c = 0$. \square

Le théorème (1.37) peut facilement être étendu aux orbites périodiques de période p en remplaçant f par f^p .

◆ Sources

Définition 1.38.

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow I$ une application continue. Un point fixe x^* de f est une source appelé aussi un point répulsif s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in I$, $0 < |x_0 - x^*| \leq \epsilon$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$|x_n - x^*| > \epsilon.$$

Définition 1.39.

On dit qu'une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)$ de période p de f est une source (ou répulsive) si chaque point de l'orbite est une source pour le système dynamique généré par f^p .

Voici un critère pour qu'un point fixe soit une source.

Théorème 1.40.

Soit I un intervalle ouvert et x^ un point fixe d'une fonction continue $f : I \rightarrow I$. Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ du point x^* et que la dérivée de la fonction f est continue au point x^* . Alors $|\frac{d}{dx}f(x^*)| > 1$ implique que le point x^* est répulsif.*

Démonstration.

Choisissons un nombre $k \in (1, |f'(x^*)|)$. Par la remarque (1.24) il existe $0 < r < \epsilon$ tel que $|f'(x)| \geq k$ pour tout $x \in [x^* - r, x^* + r] = J$. Soit $x_0 \in J$, $x_0 \neq x^*$. Par le théorème des accroissements finis on a

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*),$$

avec c entre x_0 et x^* . Donc

$$|x_1 - x^*| \geq k|x_0 - x^*|.$$

Si $|x_1 - x^*| > r$ on a fini. Sinon le raisonnement ci-dessus peut être répété pour x_1 et on a

$$|x_2 - x^*| \geq k|x_1 - x^*| \geq k^2|x_0 - x^*|.$$

Tant que x_1, x_2, \dots, x_{j-1} restent dans l'intervalle $[x^* - r, x^* + r]$ on obtient

$$|x_j - x^*| \geq k^j|x_0 - x^*|.$$

Comme $k > 1$, l'orbite quittera finalement l'intervalle $[x^* - r, x^* + r]$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m > 1$ tel que

$$|x_m - x^*| \geq k^m|x_0 - x^*| > r.$$

Donc, x^* est un point répulsif. □

Pour les orbites périodiques de période p , la condition d'être une source est établie en utilisant f^p à la place de f .

Théorème 1.41.

Soit I un intervalle ouvert et $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ une orbite périodique de période p d'une fonction continue $f : I \rightarrow I$. Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^ - \epsilon, x^* + \epsilon[$ du point x_j et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_j pour tout $j = 1, 2, \dots, p-1$. Alors*

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| > 1, \tag{1.20}$$

implique que l'orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)$ est répulsive.

Démonstration.

Par le théorème (1.40) chaque point x_j est un répulsif pour le système dynamique défini par f^p . Par conséquent, l'orbite périodique est une source (répulsive). □

Un résultat similaire au théorème (1.37) assure qu'un point fixe x^* est une source (répulsif) dans des conditions moins exigeantes que celles du théorème (1.40).

Théorème 1.42.

Soit I un intervalle et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point

fixe x^* . Supposons qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ sauf possiblement à x^* et $|f'(x)| > 1$. Alors le point x^* est répulsif.

Démonstration.

Soit $x_0 \in [x^* - r, x^* + r]$. Par le théorème des accroissements finis on déduit que la suite $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est strictement croissante tant que les distances entre les points de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ et x^* ne sont pas plus grand que r . En fait

$$|x_{i+1} - x^*| = |f(x_i) - f(x^*)| = |f'(c_i)||x_i - x^*|.$$

Supposons que $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ne dépasse jamais r . Par le lemme (1.36), la suite est convergente, c'est-à-dire, $|x_n - x^*| \rightarrow c \leq r$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ converge vers $x^* - c$ ou vers $x^* + c$ ou vers l'orbite périodique $\{x^* - c, x^* + c\}$. Les inégalités $|f(x^* - c) - x^*| > c$ et $|f(x^* + c) - x^*| > c$ donne une contradiction avec $f(L(x_0)) = L(x_0)$. Donc il existe $m \geq 1$ tel que $|x_m - x^*| > r$ d'où x^* est une source (répulsive). \square

Le théorème (1.42) peut facilement être étendu aux orbites périodiques de période p en remplaçant f par f^p . Au chapitre 1 nous avons introduit la notion d'instabilité pour un point fixe x^* ou une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)$ de période p . Les points fixes répulsifs ou les orbites périodiques répulsives sont évidemment instable. L'inverse n'est pas vrai, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1.4.

Soit $f(x) = x - x^2$. Le seul point fixe est $x^* = 0$ (voir figure (1.27)). Pour $0 < x < 1$ on a $|f'(x)| < 1$ et $0 < f(x) < 1$. Ainsi chaque orbite $\mathcal{O}(x_0)$ avec $x_0 \in [0, 1]$ converge vers 0. Pour tout $x_0 < 0$ nous avons $f'(x) > 1$ et $f(x) < 0$. Chaque orbite $\mathcal{O}(x_0)$ avec $x_0 < 0$ tend vers $-\infty$. L'origine est un point instable, mais n'est pas répulsif (source). Dans ce cas, certains auteurs appellent 0 un point fixe semi-stable.

Exemple 1.5.

Soit

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -0.5x + 0.5 & \text{si } -1 < x \leq -0.25 \\ -2.5x & \text{si } -0.25 < x \leq 0.25 \\ -0.5x - 0.5 & \text{si } 0.25 < x \leq 1 \\ -2x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad (1.21)$$

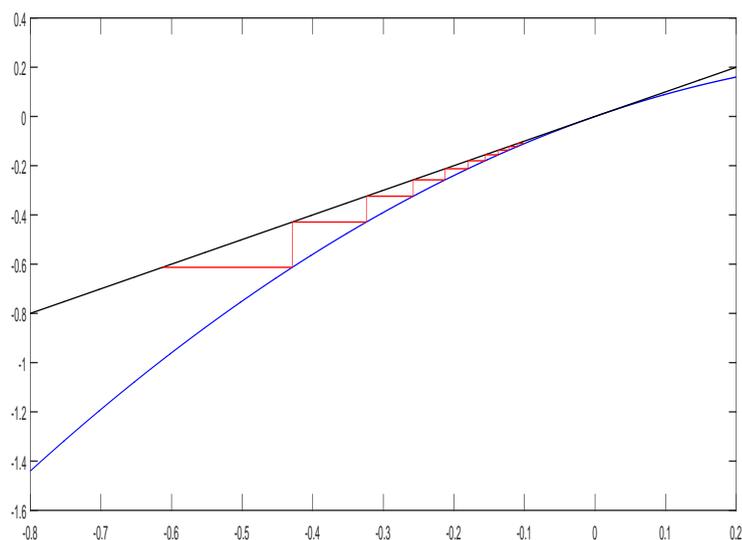


FIGURE 1.7: Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1-x)$.

On a $f([-1, 1]) = [-1, 1]$, $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$ figure (1.8). Pour toute condition initiale $x_0 \in [-1, 1]$ (sauf $x_0 = 0$) l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ converge vers l'orbite périodique $\{-1, 1\}$. Pour toute condition initiale $|x_0| > 1$ l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ tend à l'infini.

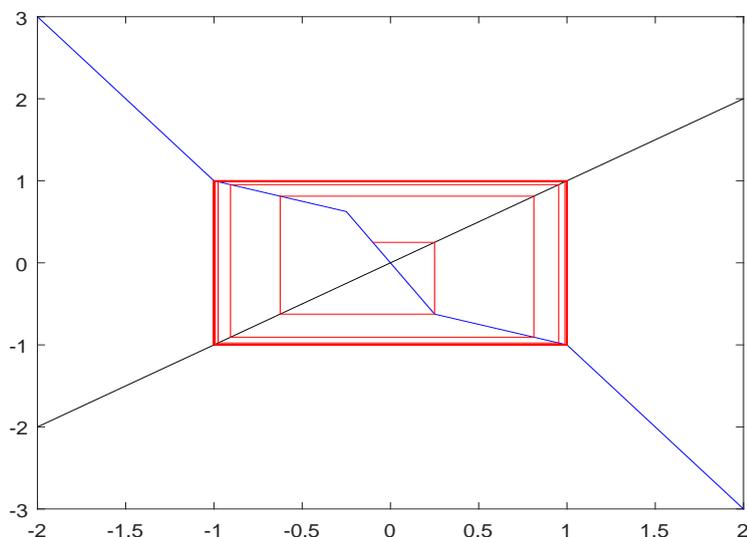


FIGURE 1.8: Le diagramme cobweb du système dynamique (1.21)

◆ Attracteurs globales

Jusqu'à présent, nous avons concentré notre attention sur le comportement local du système dynamique unidimensionnelle, dans le sens où notre étude de la stabilité des points fixes et des orbites périodiques a été limitée au voisinage de

ces points. Nous donnons maintenant des résultats pour obtenir des informations sur le comportement global d'un système dynamique, au moins dans quelques cas simples.

Le théorème (1.44) ci-dessous donne des conditions suffisantes pour l'existence d'un point fixe x^* unique tel que toutes les trajectoires convergent vers ce point x^* . Le résultat est assez général et sera étendu aux systèmes dynamiques multidimensionnelles avec des petits changements. La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant

Lemme 1.43.

Soit I un intervalle et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I et différentiable à chaque point dans l'intérieur de I . Supposons que $h'(x) \geq 0$. Alors h est croissante sur I . Si de plus, h' est nul seulement pour un nombre fini de points sur tout intervalle borné $J \subset I$, alors h est strictement croissante sur I .

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.44.

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une application continue sur I et différentiable à chaque point dans l'intérieur de I . Supposons que

1. *f a un point fixe x^* .*
2. *$|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in I$*
3. *Il existe un intervalle ouvert $J \subset I$, $x^* \in J$, tel que $|f'(x)| < 1$, pour tout $x \in J$, $x \neq x^*$.*

Alors x^ est le seul point fixe de f et chaque orbite $\mathcal{O}(x_0)$ converge vers x^* .*

Démonstration.

On pose $h(x) = x - f(x)$. Donc $h(x) = 0$ si et seulement si x est un point fixe de f . D'où $h(x^*) = 0$. L'inégalité $|f'(x)| \leq 1$ implique que $h'(x) = 1 - f'(x) \geq 0$ sur I et $h'(x) > 0$ sur J sauf éventuellement à x^* . Alors, la fonction h est croissante sur I et strictement croissante sur J . Comme $h(x^*) = 0$ alors $h(x) < 0$ ($x < f(x)$) pour tout $x < x^*$ et $h(x) > 0$ ($x > f(x)$) pour tout $x > x^*$. Donc x^* est le seul point fixe de f .

Nous montrons maintenant que chaque orbite converge vers x^* . Soit $x_0 < x^*$ et $y \in (x_0, x^*) \cap J$. Alors par le théorème des accroissements finis on a

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f(x_0) - f(y) + f(y) - f(x^*) = f'(d)(x_0 - y) + f'(c)(y - x^*),$$

avec $d \in (y, x_0)$ et $c \in (x^*, y)$. Par conséquent

$$|x_1 - x^*| < |x_0 - y| + |y - x^*| = |x_0 - x^*|.$$

car $y \in (x_0, x^*)$. Similairement on montre que $|x_1 - x^*| < |x_0 - x^*|$ si $x_0 > x^*$. D'où, la suite $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, \dots\}$ est strictement décroissante et à partir de ce point nous pouvons suivre le même raisonnement comme dans la preuve du théorème (1.37). \square

Exemple 1.6.

Soit $f(x) = \arctan(x)$. Alors $x^* = 0$ est un point fixe de f . De plus $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $0 < f'(x) \leq 1$, avec $f'(0) = 1$. D'où, toutes les orbites convergent vers 0 (figure (1.9)).

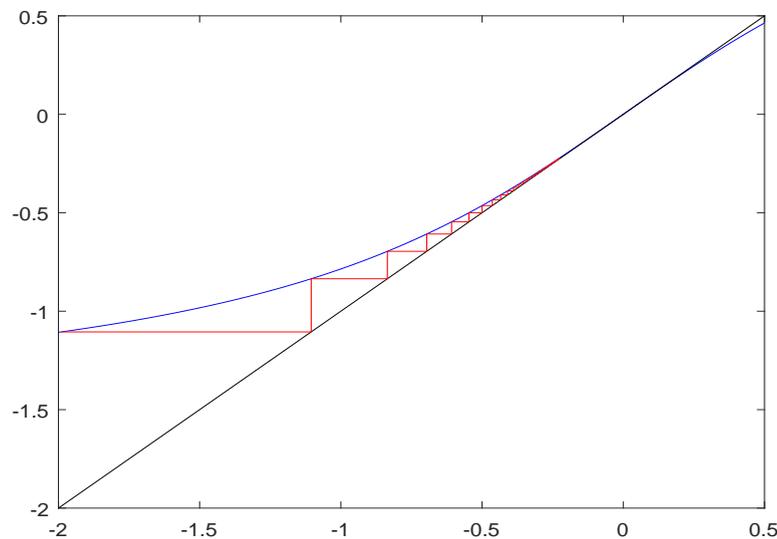


FIGURE 1.9: Le diagramme cobweb de l'application $f(x) = \arctan(x)$.

Exemple 1.7.

Soit $f(x) = \cos(x)$. Il existe $x^* \in (0, 1)$ tel que $f(x^*) = x^*$ (voir figure (1.10)). La fonction satisfait toutes les hypothèses du théorème (1.44). Par conséquent, toutes les orbites convergent vers x^* .

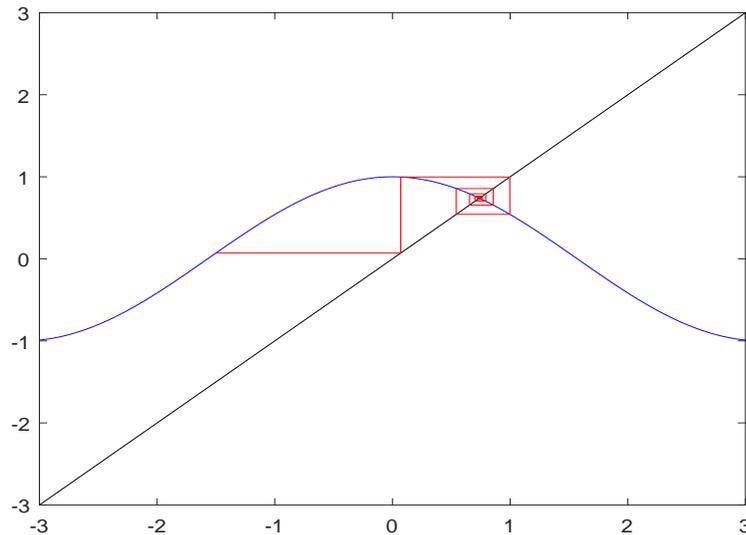


FIGURE 1.10: Le diagramme cobweb de l'application $f(x) = \cos(x)$.

1.3 Systèmes dynamiques discrets bi-dimensionnelles de premier ordre

Dans cette section, nous étudions des systèmes dynamiques de dimension plus grande a un. Pour simplifier les choses nous ne traiterons que les systèmes dynamiques dimension deux. Les systèmes de dimensions supérieures sont, bien sûr, importants mais la plupart des résultats restent valables au dimensions supérieures sans aucune difficulté.

1.3.1 Systèmes dynamiques linéaires bi-dimensionnelles de premier ordre

La caractérisation des trajectoires dans les systèmes linéaires autonomes bidimensionnels de premier ordre fournit les fondements conceptuels de la généralisation de l'analyse pour les systèmes dynamiques non linéaires, de rang supérieur, non autonomes.

Soit le système dynamique discret linéaire suivant

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} \end{cases}, \quad -\infty < x_{1,n}, x_{2,n} < +\infty. \quad (1.22)$$

avec la condition initiale (x_{10}, x_{20}) . Où $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont des constantes réelles. Le système (1.22) peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. L'origine O est le seul point fixe de l'application f (si $\det(I - A) \neq 0$) définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} \\ a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} \end{pmatrix}.$$

Une solution du système linéaire (1.23), est une trajectoire $\{X_n\}_{n \geq 0}$ où $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$ pour tout entier positif n . Donc la valeur de X_n dans les périodes $1, 2, 3, \dots, n$ est

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0, \\ X_2 &= AX_1 = A^2 X_0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= AX_{n-1} = A^n X_0. \end{aligned}$$

Exemple 1.8.

Considérons le système dynamique discret bidimensionnel suivant $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, avec une condition initiale $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Comme la matrice A est une matrice diagonale donc l'évolution de chacune des variables d'état x_n, y_n sont indépendantes l'une de l'autre. De plus

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (0.5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\begin{aligned}x_n &= 2^n x_0, \\y_n &= (0.5)^n y_0.\end{aligned}$$

Le point fixe de ce système est $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $x_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et $y_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ l'origine est appelé point **selle (col)**.

Donc si la matrice A est une matrice diagonale, alors il n'existe pas d'interdépendance entre les différentes variables d'état. La matrice A^n est aussi une matrice diagonale et l'évolution de chacune des variables d'état peuvent être analysées séparément selon la méthode développée pour les systèmes dynamiques unidimensionnelles.

Dans le cas où la matrice A n'est pas une matrice diagonale et qu'il existe l'interdépendance dans l'évolution des variables d'état, ils existent des méthodes d'algèbre linéaire (Forme normale de Jordon) qui permettent de transformer le système à variables d'état interdépendantes à un système à variables d'état indépendantes ou partialement indépendantes.

1.3.1.1 Matrice de Jordon

Cette sous section résume les propositions fondamentales de l'algèbre linéaire utilisée dans la dérivation et l'analyse qualitative des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels.

Lemme 1.45.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice 2×2 , tel que $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tous i et j .

1. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q et une matrice diagonale D , telle que $A = QDQ^{-1}$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et Q est une matrice 2×2 inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice A .

2. Si la matrice A a deux valeurs propres réelles répétées $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors il existe une matrice 2×2 non singulière Q , telle que $A = QDQ^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Si la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ et $w = u \pm iv$ sont les vecteurs propres associés alors il existe une matrice 2×2 non singulière, Q , telle que $A = QDQ^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et Q est une matrice 2×2 inversible de plus $Q = (v, u)$.

Démonstration. Voir Hirsch et Smale (1974). □

1.3.1.2 Caractérisation des solutions d'un système dynamique linéaire

Pour caractériser les solutions du système dynamique bidimensionnel

$$X_{n+1} = AX_n, \tag{1.24}$$

avec $X \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée 2×2 on s'intéresse dans un premier temps au système

$$Y_{n+1} = DY_n, \tag{1.25}$$

avec $X = QY$ et $D = Q^{-1}AQ$ (D et Q sont les matrices définies dans le lemme (1.45) et on déduit la caractérisation des solutions du système (1.24) en utilisant la relation $X = QY$. Pour simplifier la notation dans ce qui vient on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

◆ Valeurs propres réelles distincts

Soit le système dynamique

$$Y_{n+1} = DY_n, \tag{1.26}$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Donc $Y_n = D^n Y_0$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ i.e.

$$\begin{cases} x_n = (\lambda_1)^n x_0, \\ y_n = (\lambda_2)^n y_0, \end{cases} \tag{1.27}$$

avec $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est une condition initiale du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, en éliminant n entre les deux relations on obtient l'équation d'une famille de courbes :

$$y = cx^{\ln(\lambda_1)/\ln(\lambda_2)}, \quad c = \text{constante fixée par } x_0, y_0, \quad (1.28)$$

qui sont invariantes par application de la transformation T défini par (1.26), c'est-à-dire le changement de x en $\lambda_1 x$ et y en $\lambda_2 y$ ne modifie pas (1.28).

★ Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ ces courbes invariantes ont une allure parabolique avec pour tangente commune l'axe ox , et pour direction asymptotique commune oy figure (1.11).

★ Si $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ces courbes invariantes ont une allure hyperbolique, les asymptotes étant ox , oy figure (1.13). Dans les deux cas, l'axe des x et l'axe des y sont des courbes invariantes particulières.

★ Si l'un des multiplicateurs λ_1 , λ_2 est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs, les courbes 1.28 sont alors invariantes par application de T^2 qui a ses deux multiplicateurs positifs.

1. **Si** $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$

Les courbes invariantes par application de T ou T^2 , ont donc l'allure de la figure (1.11). A partir d'un point initial $M_0(x_0, y_0)$, la suite des points engendrée par (1.26), c'est-à-dire la trajectoire discrète issue de M_0 est située sur la courbe invariante passant par M_0 , si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, et sur deux courbes invariantes, celle qui passe par M_0 et celle qui passe par M_1 , si l'un des multiplicateurs est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs. cette suite est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

Le point 0 est un point fixe attractif, ou asymptotiquement stable (**un nœud stable**).

(a) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 sans oscillation autour de l'un des axes OX , OY . 0 est appelé **nœud stable de type 1** figure (1.11) (a).

(b) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 en oscillant autour de OY dans le premier cas,

et auteur de OX dans le second. 0 est appelé ***nœud stable de type 2*** figure (1.11) (b).

(c) Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, la suite des points générée à partir de $M_0(x_0, y_0)$ tend vers 0 en oscillant autour des deux axes OX, OY . 0 est appelé ***nœud stable de type 3*** figure (1.11) (c).

2. Si $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$, les trajectoires discrètes sont encore situées sur les mêmes courbes à allure parabolique, mais la suite des points obtenue à partir d'un point initial $M_0(x_0, y_0)$ s'éloigne de 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \pm\infty.$$

0 est appelé ***nœud instable*** qui selon les signes de λ_1, λ_2 peut être de type 1, 2, ou 3. On dit aussi que 0 est un ***nœud répulsif*** figure (1.12).

3. Si $|\lambda_2| < 1, |\lambda_1| > 1$, les trajectoires discrètes sont situées sur les courbes invariantes à allure hyperbolique figure (1.13), et l'origine 0 est un point fixe instable qui sera appelé un ***col***. Pour des conditions initiales $M_0(x_0 = 0, y_0)$ prises sur l'axe OY , la suite des points M_n reste sur OY et tend vers 0, et pour $M_0(x_0, y_0 = 0)$ la suite des points M_n reste sur OX et s'éloigne de 0. Les axes OX, OY correspondent à deux courbes invariantes qui passent par 0, ce sont les seules courbes invariantes qui passent par le point fixe. Le signe de λ_1, λ_2 permet encore de distinguer ***les cols de type 1, 2 ou 3*** figure (1.13).

4. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, les courbes invariantes de la transformation T pour $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, de la transformation T^2 pour $\lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_1 = \lambda_2 < 0$, issues de différents points M_0 , sont des droites passant par 0. Les trajectoires discrètes se situent sur ces courbes invariantes, et le point fixe 0 est appelé un ***nœud étoile de type 1*** ($\lambda_1 = \lambda_2 > 0$), de ***de type 2*** ($\lambda_1 = -\lambda_2$) ou ***de type 3*** ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$) attractif (figure (1.14)), ou répulsif (figure (1.15)), selon $|\lambda_1| < 1$, ou $|\lambda_1| > 1$.

◆ **Valeurs propres réelles égales**

Considérons le système dynamique (1.26) avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $Y_n = D^n Y_0$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$ i.e.

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n x_0 \\ y_n = n\lambda^{n-1} x_0 + \lambda^n y_0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Pour $\lambda > 0$ et $\frac{x}{x_0} > 0$ les trajectoires sont situées sur les courbes invariantes d'équation

$$y = \frac{y_0}{x_0}x + \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{\lambda \ln(\lambda)}x. \quad (1.30)$$

1. Si $\lambda > 1$ Le point fixe 0 est alors appelé **un nœud impropre attractif** figure (1.16) (a).
2. Si $0 < \lambda < 1$ Le point fixe 0 est alors appelé **un nœud impropre répulsif** figure (1.16) (b).

◆ Valeurs propres complexes

Considérons le système dynamique (1.26) avec $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la représentation géométrique des valeurs propres, en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$ avec $0 < \theta < \pi$ alors $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$ (figure 1.17). D'où

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

et

$$D^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

donc le vecteur Y_n est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= r^n \begin{pmatrix} x_0 \cos n\theta - y_0 \sin n\theta \\ x_0 \sin n\theta + y_0 \cos n\theta \end{pmatrix} \\ &= r^n \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos n\theta - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin n\theta \\ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin n\theta + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + n\theta) \\ \sin(\varphi_0 + n\theta) \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

où $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $x_0 = \rho_0 \cos(\varphi_0)$ et $y_0 = \rho_0 \sin(\varphi_0)$.

1. Si $r = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + n\theta) \\ \sin(\varphi_0 + n\theta) \end{pmatrix},$$

ou après élimination de n

$$x_n^2 + y_n^2 = \rho_0^2, \tag{1.34}$$

Les cercles centrés en 0 sont des courbes invariantes pour le système (1.26). Le point fixe 0 est appelé *centre* (un point fixe *centre* est *stable* mais n'est pas *asymptotiquement stable*). Si $\theta \neq \frac{2k\pi}{q}$ (k et q entiers sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ est formée d'une suite de points dense sur le cercle de rayon ρ_0 . Si $\theta = \frac{2k\pi}{q}$ (k et q entiers sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ est formée par les q points d'un cycle d'ordre q situés sur le cercle de rayon ρ_0 . Dans les deux cas précédents la dynamique des points est au sens *trigonométrique* si $b > 0$ et au sens *anti-trigonométrique* si $b < 0$ figure (1.18).

2. Si $r \neq 1$, en introduisant les coordonnées polaires $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, donc le système devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{n+1} \cos \varphi_{n+1} \\ \rho_{n+1} \sin \varphi_{n+1} \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n \cos \varphi_n \\ \rho_n \sin \varphi_n \end{pmatrix} \\ &= \rho_n r \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_n) \\ \sin(\theta + \varphi_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \rho_{n+1} = r \rho_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta \end{cases}$$

d'où la solution est

$$\begin{cases} \rho_n = r^n \rho_0 \\ \varphi_n = n\theta + \varphi_0 \end{cases} \tag{1.35}$$

alors

$$\rho = r^{(\varphi - \varphi_0)/\theta} \rho_0$$

ou bien dans les coordonnées cartésien

$$x^2 + y^2 = \rho_0^2 r^{2(\varphi - \varphi_0)/\theta}. \tag{1.36}$$

Les spirales logarithmiques (1.36) sont des courbes invariantes pour le système (1.26). De plus

- (a) Si $|r| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0$ et φ_n augmente lorsque n augmente si $b > 0$, et diminue lorsque n augmente si $b < 0$. Donc les trajectoires s'approchent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée *foyer stable* et la dynamique des trajectoires issue d'un point $M_0(x_0, y_0)$ est

au sens *trigonométrique* si $b > 0$ et au sens *anti-trigonométrique* si $b < 0$ figure (1.19).

- (b) Si $|r| > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = +\infty$ et φ_n augmente lorsque n augmente si $b > 0$, et diminue lorsque n augmente si $b < 0$. Donc les trajectoires s'éloignent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée *foyer instable* et la dynamique des trajectoires issue d'un point $M_0(x_0, y_0)$ est au sens *trigonométrique* si $b > 0$ et au sens *anti-trigonométrique* si $b < 0$ figure (1.20).

Remarque 1.46.

1. Pour tous les points fixes considérés, tels que $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, le domaine de stabilité est constitué par tout le plan (y_1, y_2) sauf les points à l'infini.
2. Lorsque l'un des valeurs propres est un module égal 1, $|\lambda_1| = 1$ par exemple, alors l'équation 1.25 montre que l'axe des X est une courbe constituée par une infinité de points fixes si $\lambda_1 = 1$, ou une infinité de cycles d'ordre 2 (sauf le point fixe 0) si $\lambda_1 = -1$, attractif quand $|\lambda_2| < 1$, répulsifs quand $|\lambda_2| > 1$.

1.3.1.3 Caractérisation des solutions en fonction de trace de A et $\det(A)$.

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel $X_{n+1} = AX_n$. Les propriétés qualitatives de ce système peuvent être classées en fonction des valeurs $tr(A)$, $\det(A)$. Les valeurs propres de la matrice A sont obtenues comme solutions de l'équation caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

1. Si $(tr(A))^2 > 4 \det(A)$ les valeurs propres sont réelles.
2. Si $(tr(A))^2 < 4 \det(A)$ les valeurs propres sont complexes.

Proposition 1.47. *Figure (1.21).*

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel $X_{n+1} = AX_n$ et soit $\lambda_{1,2}$ les valeurs propres de A .

1. Si $(tr(A))^2 > 4 \det(A)$ alors $\lambda_{1,2}$ sont réels ($\lambda_1 > \lambda_2$) de plus
 - (a) 0 est un point col (i.e. ($\lambda_1 > 1$ et $|\lambda_2| < 1$) ou ($|\lambda_1| < 1$ et $\lambda_2 < -1$))

ssi

$$\begin{cases} P(1) < 0 \text{ et } P(-1) > 0 \\ \text{ou} \\ P(1) > 0 \text{ et } P(-1) < 0 \end{cases}$$

i.e. ssi

$$\begin{cases} -tr(A) - 1 < \det(A) < tr(A) - 1 \\ \text{ou} \\ tr(A) - 1 < \det(A) < -tr(A) - 1 \end{cases}$$

- (b) 0 est un noeud stable ($|\lambda_{1,2}| < 1$) ssi

$$P(1) > 0 \text{ et } P(-1) > 0,$$

i.e. ssi

$$\det(A) > \operatorname{tr}(A) - 1 \text{ et } \det(A) > -\operatorname{tr}(A) - 1.$$

(c) 0 est un noeud instable ($|\lambda_{1,2}| > 1$) ssi

$$P(1) < 0 \text{ et } P(-1) < 0,$$

i.e. ssi

$$\det(A) < \operatorname{tr}(A) - 1 \text{ et } \det(A) < -\operatorname{tr}(A) - 1.$$

2. Si $(\operatorname{tr}(A))^2 < 4\det(A)$ alors $\lambda_{1,2}$ sont complexes de plus

(a) 0 est un foyer stable ssi $\det(A) < 1$.

(b) 0 est un foyer instable ssi $\det(A) > 1$.

1.3.2 Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires discrets bi-dimensionnelles

Un système non-linéaire discret de dimension 2 est donné par

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (1.37)$$

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ étant des fonctions continues, uniformes, non-linéaires, des variables réelles x , y . Les propriétés des solutions du système (1.37) sont très complexes par rapport à celles de la récurrence (1.22). En particulier, les solutions ne s'expriment pas, sauf cas exceptionnel, à l'aide des fonctions transcendentes connues, sous forme finie, et il est nécessaire de les caractériser à travers les singularités du système (1.37).

1. *Points fixes :*

Le cas non-linéaire conduit donc à la possibilité d'existence de plusieurs points fixes. Soit X^* un point fixe pour le système (1.37), alors si $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sont au moins une fois différentiables (classe C_1) au point $X^* =$

(x^*, y^*) , un développement de Taylor au voisinage de X^* donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(X^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{X} \\ y_{n+1} = f_2(X^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{Y} \end{cases}$$

\bar{X} et \bar{Y} sont les termes non linéaires. Lorsque X est très proche de X^* les termes non-linéaires deviennent négligeables devant le terme linéaire et le système non-linéaire est approximé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x^* = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \\ y_{n+1} - y^* = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \end{cases} \quad (1.38)$$

Après un changement des variables $X' = X - X^*$ le point fixe se ramène à l'origine 0 et (1.38) devient

$$\begin{cases} x'_{n+1} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)x'_n + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)y'_n \\ y'_{n+1} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)x'_n + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)y'_n \end{cases}$$

i.e.

$$X'_{n+1} = JX'_n$$

où

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*) \end{pmatrix}$$

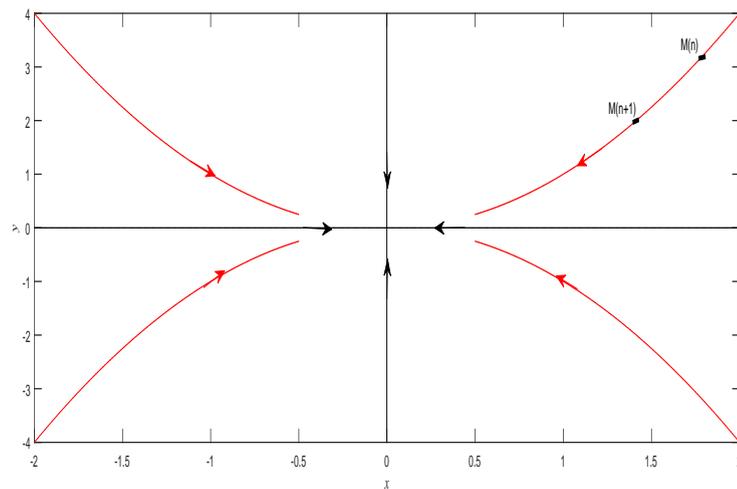
est la matrice *Jacobienne* de f en X^* . Comme dans le cas linéaire, en général, les multiplicateurs (valeurs propres de J) λ_1, λ_2 fixent le comportement des trajectoires de notre système, mais ici seulement pour des conditions initiales prises dans un voisinage (suffisamment petit) au point fixe X^* . Les cas où un multiplicateur (ou les deux) est (ou sont) de module égal à un, qui se présentent dans le cas linéaire comme des cas frontières séparant deux structures de trajectoires discrètes différentes, ne permettent plus de définir l'allure des courbes invariantes à partir de l'approximation linéaire de (1.37). En effet si $|\lambda_1| = 1$, ou $|\lambda_2| = 1$, ou $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, cette caractéristique de frontière, entre deux comportements qualitatifs différents, entraîne que les trajectoires de l'approximation linéaire ne sont pas en général conservées, aussi petit que soit le voisinage \mathcal{D} du point fixe X^* . Ce sont les non-linéarités \bar{X}, \bar{Y} , qui fixent l'allure de ces trajectoires à l'intérieur de \mathcal{D} . On dit alors qu'il y a *cas critique au sens de Liapunov*.

Théorème 1.48.

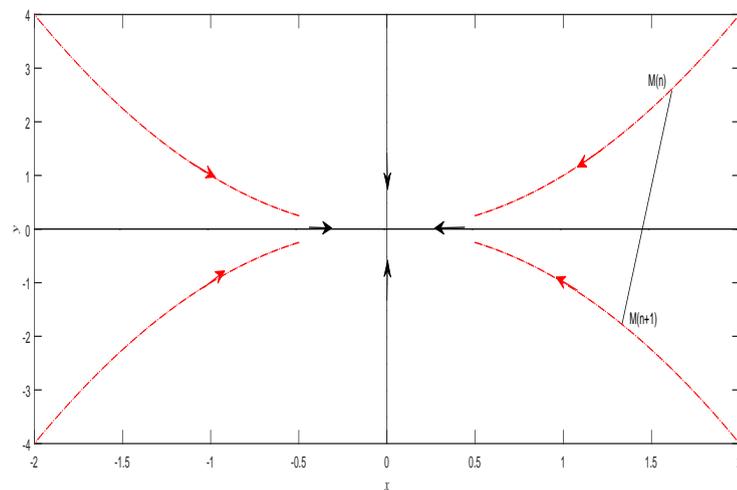
- (a) *Si tous les valeurs propres de la matrice Jacobien J ont des modules strictement inférieurs à l'unité, alors le point fixe X^* du système (1.37) est localement asymptotiquement stable.*
- (b) *Si la matrice Jacobien J admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, alors le point fixe X^* est instable.*
- (c) *Si certaines valeurs propres de la matrice J sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur, on ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe X^* .*

2. m -cycles :

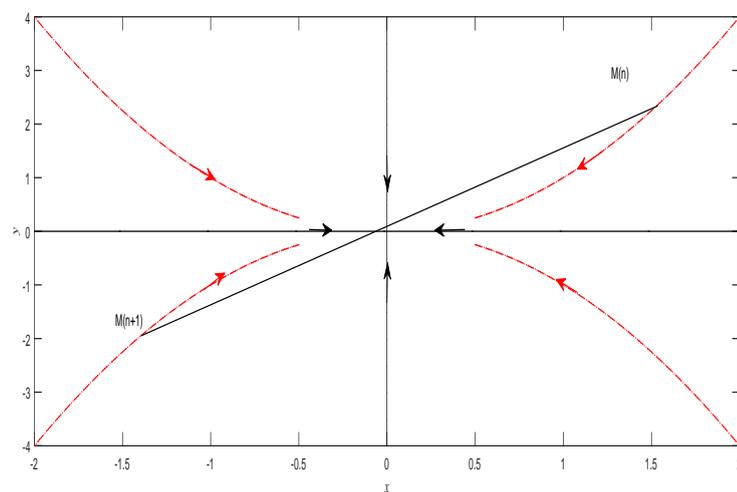
Un m -cycle est défini comme point fixe de f^m qui n'est pas point fixe de f^k , $1 \leq k < m$, (k, m entiers). Il est donc constitué par m points dans le plan (x, y) , et possède, comme un point fixe, deux multiplicateurs λ_1, λ_2 .



(a)

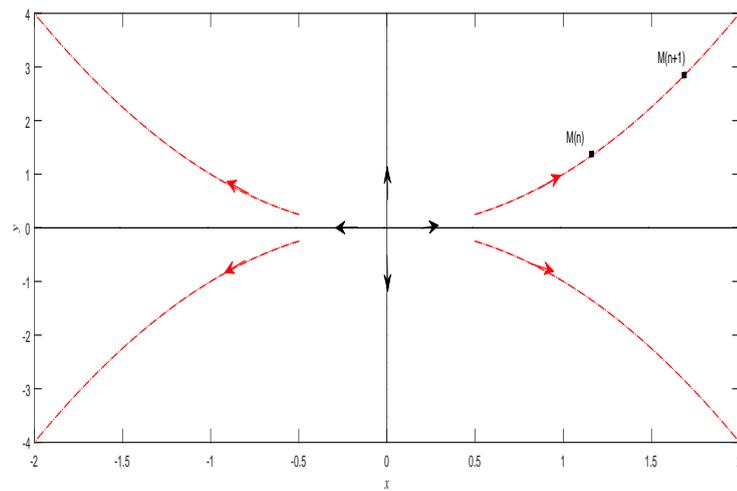


(b)

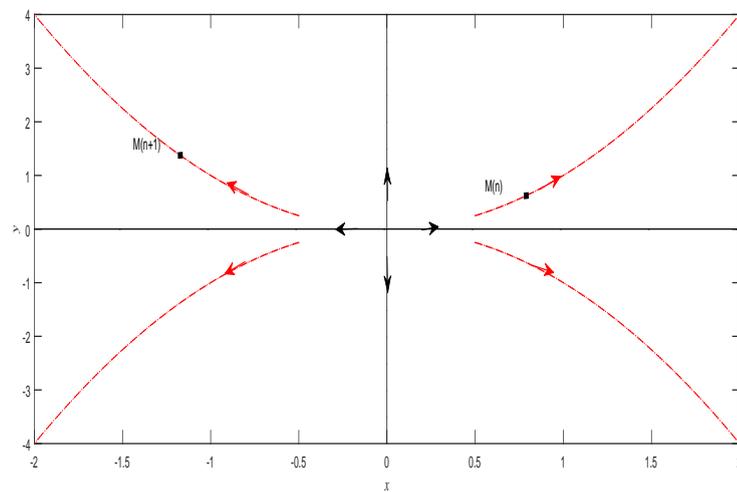


(c)

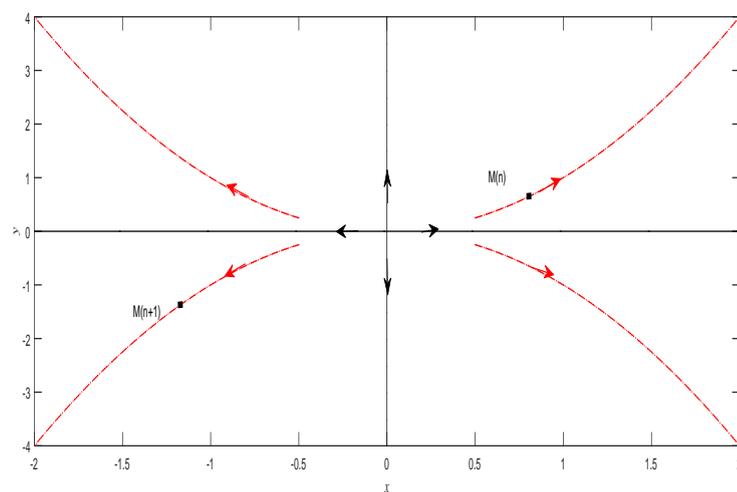
FIGURE 1.11: Portrait de phase du (1.26) si $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$ (a) Nœud stable de type 1 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. (b) Nœud stable de type 2 $0 < \lambda_1$ et $\lambda_2 < 0$. (c) Nœud stable de type 3 $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.



(a)

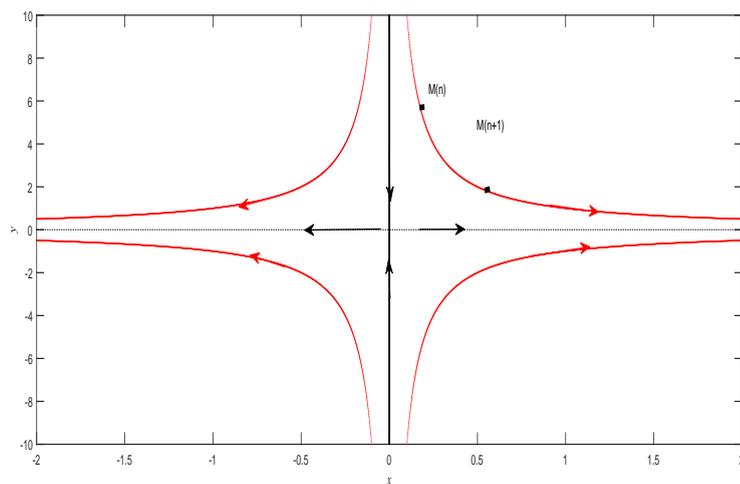


(b)

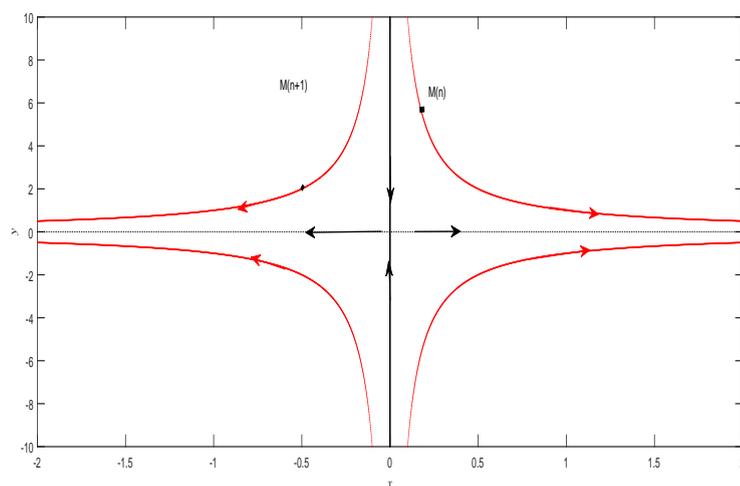


(c)

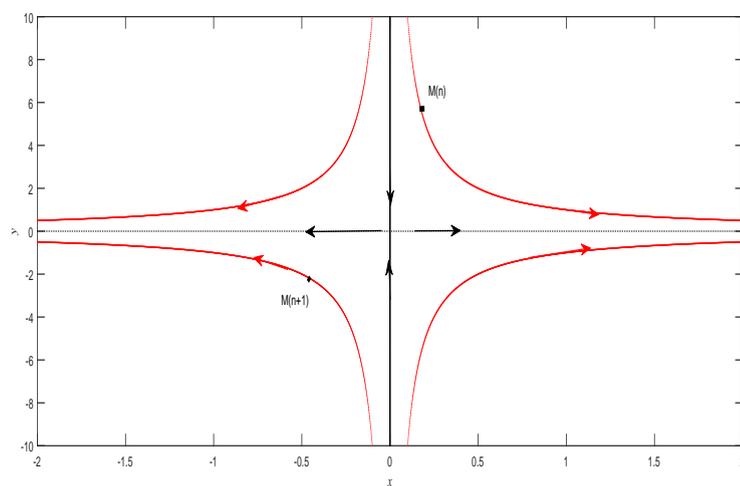
FIGURE 1.12: Portrait de phase du (1.26) si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$ (a) Nœud instable de type 1 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. (b) Nœud instable de type 2 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. (c) Nœud instable de type 3 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.



(a)

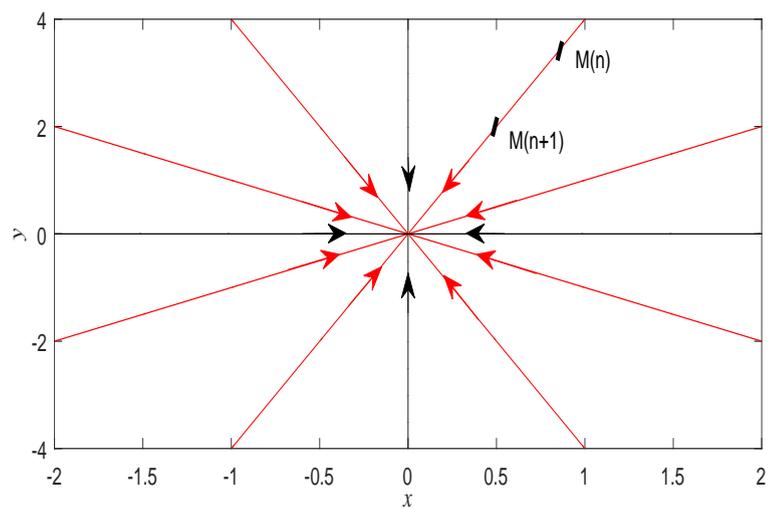


(b)

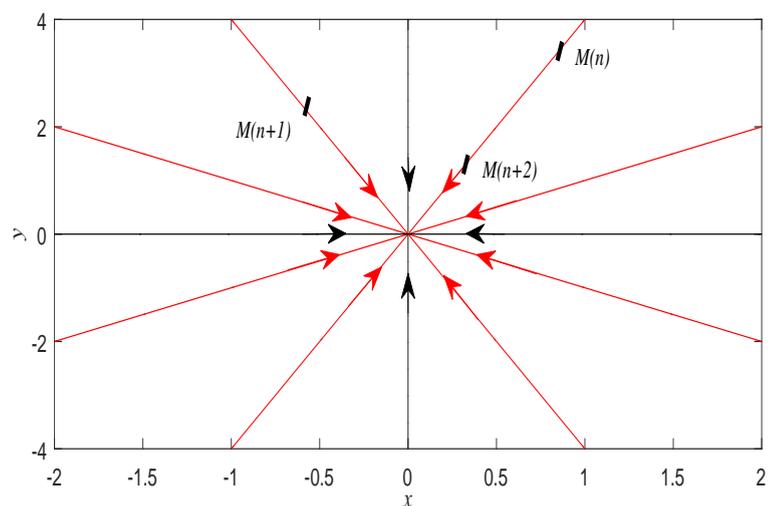


(c)

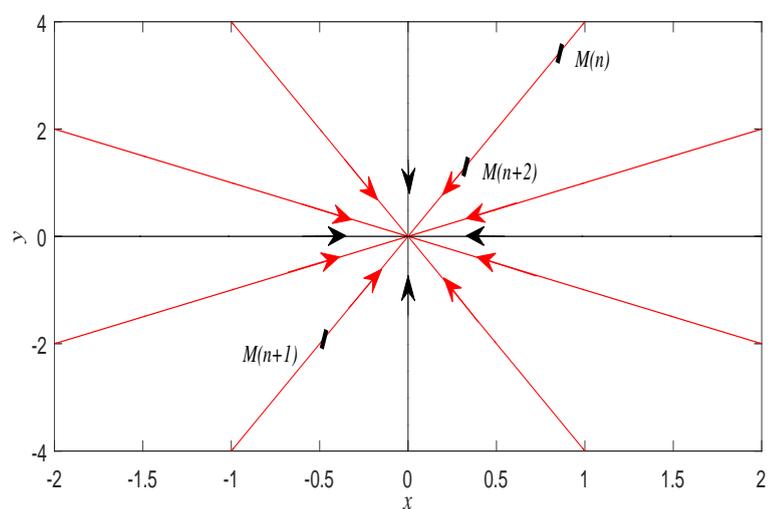
FIGURE 1.13: Portrait de phase du (1.26) si $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| > 1$ (a) Col de type 1 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. (b) Col de type 2 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. (c) Col de type 3 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.



(a)

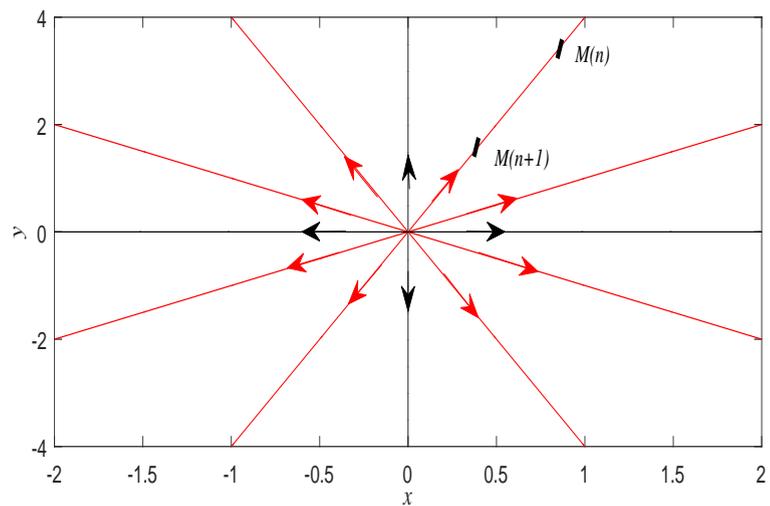


(b)

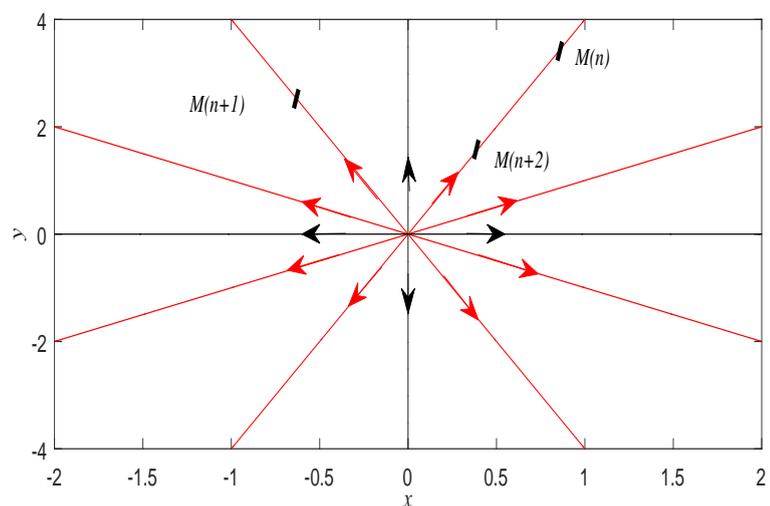


(c)

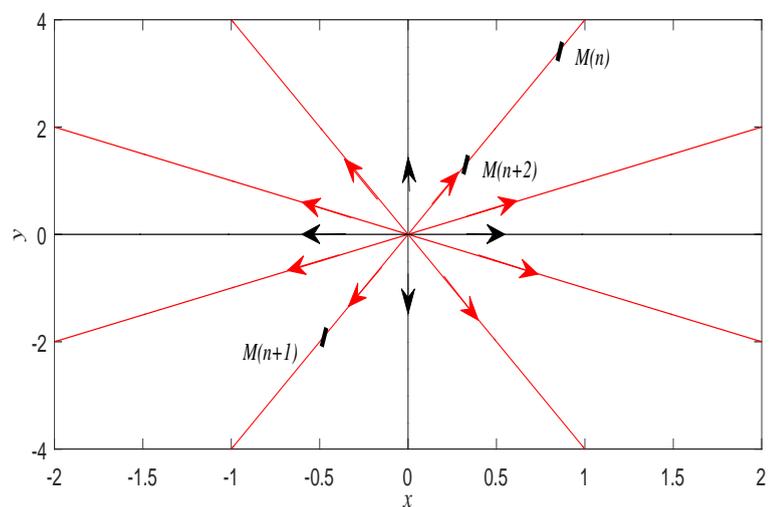
FIGURE 1.14: Portrait de phase du (1.26) si $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ nœud étoile stable
 (a) de type 1 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (b) de type 2 $\lambda_1 = -\lambda_2$. (c) de type 3 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.



(a)

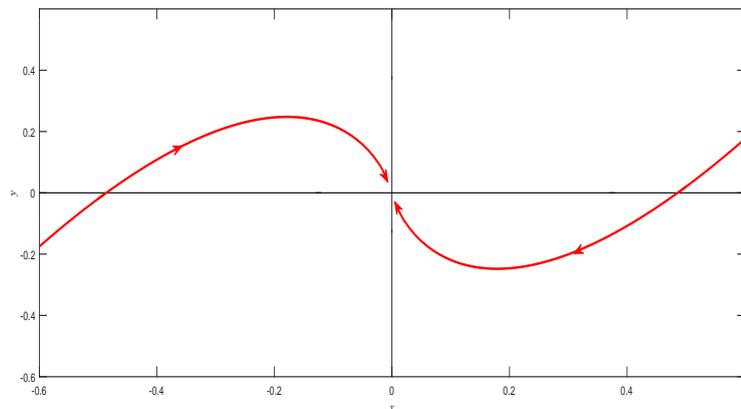


(b)

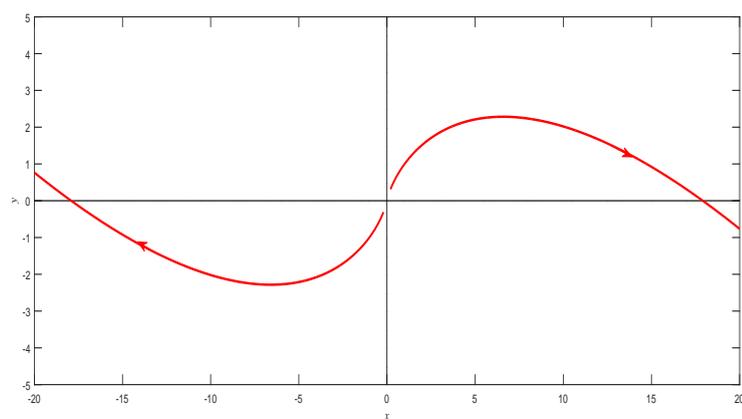


(c)

FIGURE 1.15: Portrait de phase du (1.26) si $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ nœud étoile instable
 (a) de type 1 $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. (b) de type 2 $\lambda_1 = -\lambda_2$. (c) de type 3 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.



(a)



(b)

FIGURE 1.16: Portrait de phase du (1.26) si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (a) Nœud impropre stable $0 < \lambda < 1$. (b) Nœud impropre instable $1 < \lambda < \infty$.

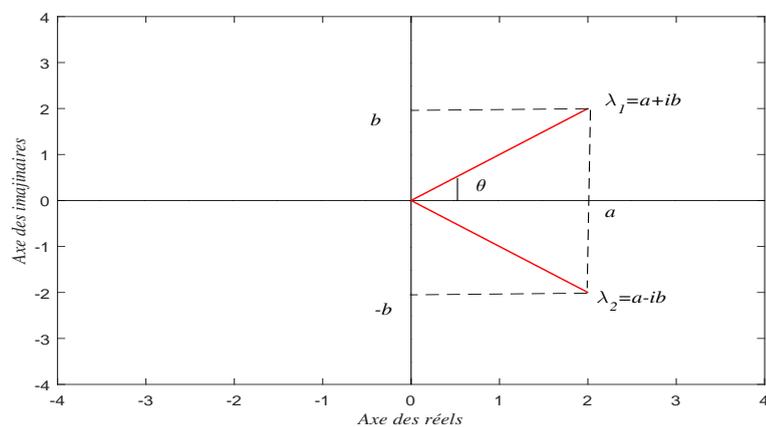
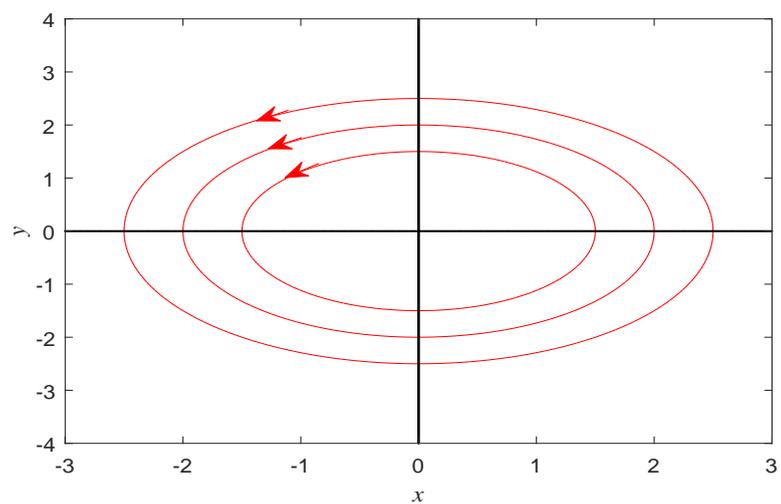
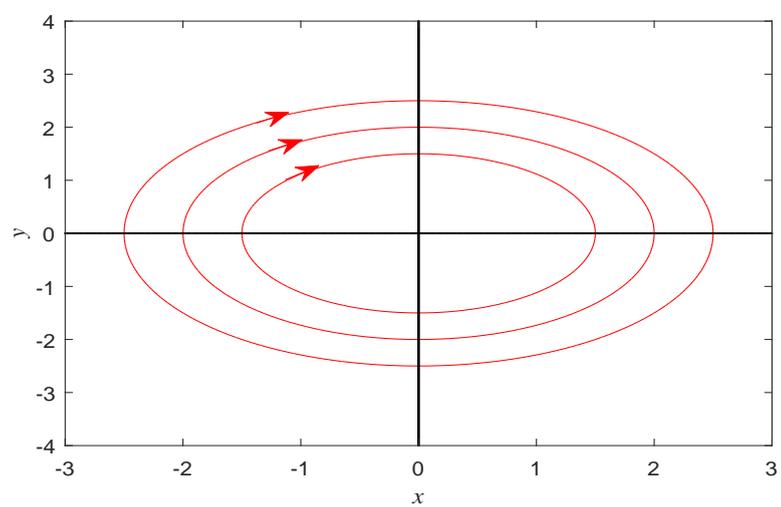


FIGURE 1.17: Représentation géométrique des valeurs propres $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$.

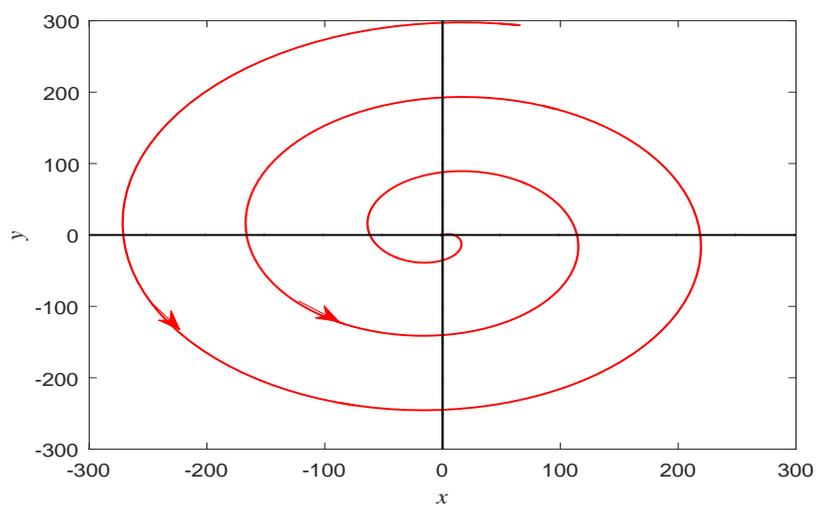


(a)

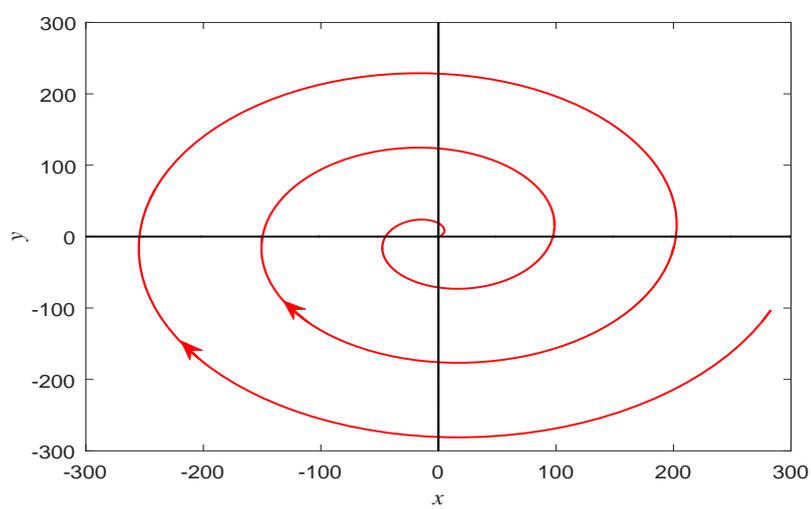


(b)

FIGURE 1.18: Point fixe centre $r = 1$. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$.

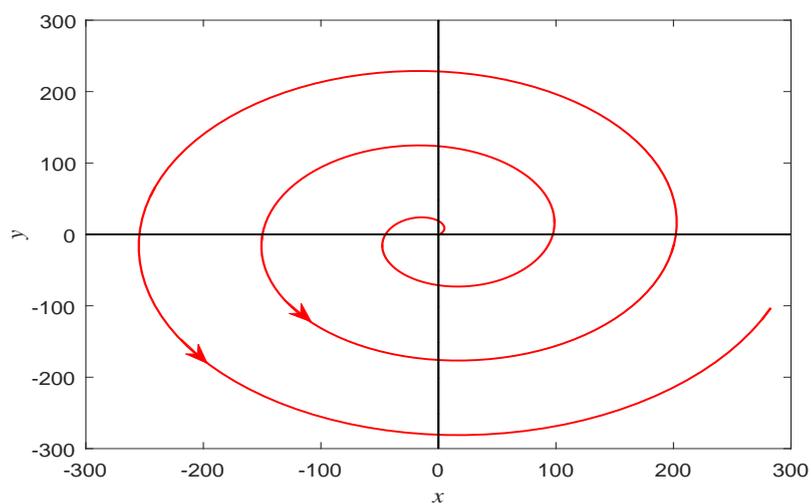


(a)

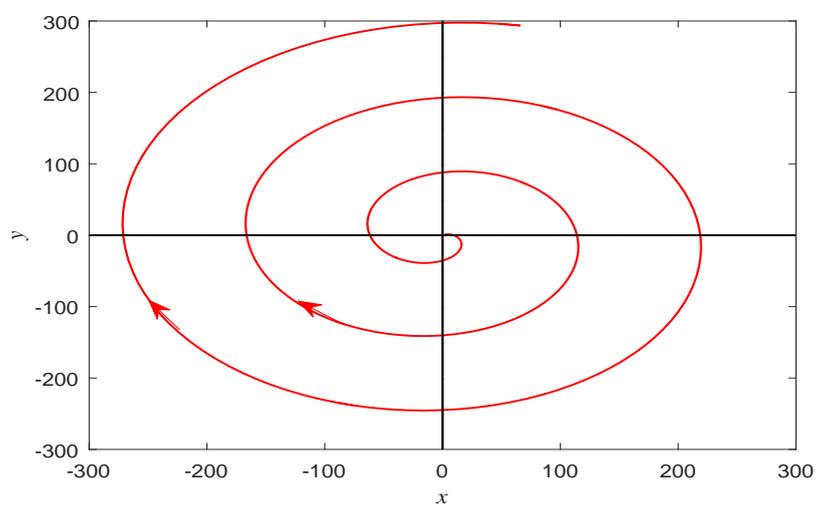


(b)

FIGURE 1.19: Foyer stable. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$.



(a)



(b)

FIGURE 1.20: Foyer stable. (a) $b > 0$. (b) $b < 0$.

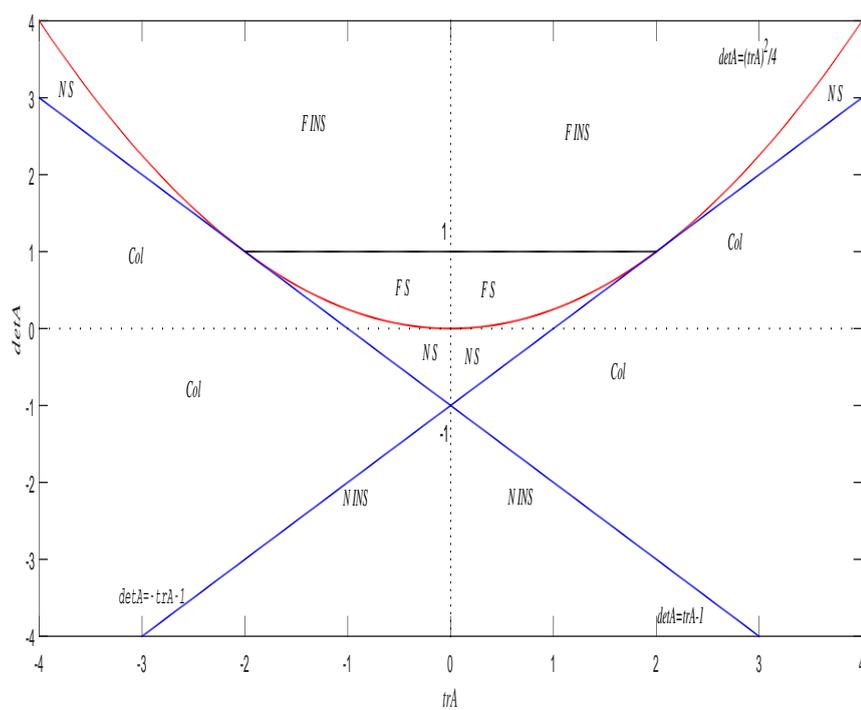


FIGURE 1.21: Caractérisation des solutions en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

Chapitre 2

Bifurcations et chaos

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques très sensibles aux conditions initiales. Le comportement chaotique est à la base de nombreux systèmes naturels, tels que la météo ou le climat. Ce comportement peut être étudié grâce à l'analyse par des modèles mathématiques chaotiques, ou par des techniques analytiques de récurrence et des applications de Poincaré. D'autre part l'objet de la théorie de la bifurcation est d'étudier les changements que subissent les systèmes dynamiques lorsque les paramètres changent. Dans ce chapitre nous donnons quelques détails sur ces deux notions.

2.1 Théorie des bifurcations

On dit qu'une solution d'un système dynamique correspond à une bifurcation sous l'effet d'une variation de paramètre, lorsqu'elle est une frontière entre deux comportements qualitatifs différents de solutions. Plus précisément, soit le système dynamique :

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \quad (2.1)$$

μ étant un paramètre réel, $f(x, \mu)$ une fonction continue de la variable réelle x (le cas générale x vecteur dans \mathbb{R}^m) et de μ . S'il existe un $\epsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, tel que la structure des singularités (points fixes, orbites périodiques) de (2.1) est différente pour $\mu < \mu_0$, $\mu > \mu_0$, ($|\mu - \mu_0| < \epsilon$), la valeur μ_0 du paramètre μ est appelée *point de bifurcation*.

Dans cette section on présentera trois types de bifurcations qui sont : la bifurcation fold, bifurcation flip et la bifurcation de Neimark-Sacker.

1. Bifurcation fold ou pli :

La bifurcation pli est une bifurcation catastrophique. Ça signifie que, quand le paramètre de contrôle varie, on a une apparition de deux cycles d'ordre k , de stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur S égal à 1. Pour comprendre le mécanisme de cette bifurcation, passons maintenant à un exemple spécifique.

Exemple 2.1.

Soit le système dynamique défini par l'application (2.2),

$$f_c(x) = x^2 + x + c, \quad (2.2)$$

c est le paramètre de bifurcation. Les graphes des applications f_c quand $c > 0$, $c = 0$ et $c < 0$ sont donnés dans la Figure (2.1).

Les points fixes de (2.2) sont solutions de l'équation $x^2 + x + c = x$. Pour $c > 0$, il n'y a pas de point fixe. Pour $c = 0$, il y a un seul point fixe $x_1 = 0$. Pour $c < 0$, il y a deux points fixes $x_{1,2} = \mp\sqrt{-c}$. L'itération (2.2) présente une bifurcation pli à $c = 0$ au point fixe $x = 0$ avec un multiplicateur $f'_0(0) = 1$. Pour $c < 0$, les multiplicateurs des points $x_1 = \sqrt{-c}$ et $x_2 = -\sqrt{-c}$ sont $2\sqrt{-c} + 1 > 1$ (x_1 est répulsif) et $0 < -2\sqrt{-c} + 1 < 1$ (x_2 est attractif) respectivement. Le diagramme de bifurcation dans l'espace (c, x) est présenté sur la figure (2.2).

2. Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu, lorsqu'un cycle d'ordre k stable a un multiplicateur qui passe par la valeur $S = -1$. Ce cycle devient alors instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$ stable. Afin de clarifier ce genre de bifurcation nous traitons l'exemple suivant :

Exemple 2.2.

Soit l'application logistique f définie par :

$$f_a(x) = ax(1 - x), \quad (2.3)$$

a est le paramètre de bifurcation. L'application f présente une bifurcation de doublement de période en $a = 3$ au point fixe $x_1 = \frac{a-1}{a}$ avec un multiplicateur $S = -1$. Le diagramme de bifurcation dans l'espace (a, x) est donné par la figure (2.3).

3. Bifurcation de Neimark-Sacker

La bifurcation de Neimark-Sacker est définie pour un système de dimension plus grand que 1, cette bifurcation est caractérisé par la naissance (quand le paramètre de bifurcation μ dépasse le point de bifurcation μ_0) d'une courbe invariante fermée à partir d'un point fixe, lorsque le point fixe change de stabilité via une paire de valeurs propres complexes avec un module unitaire. La bifurcation peut être super-critique figure (2.4) ou sous-critique figure (2.5), donnant lieu à une courbe invariante fermée stable ou instable, respectivement.

2.2 Chaos

Le monde qui nous entoure parait souvent imprévisible, désordonné, hasardeux et chaotique. Un système chaotique est un système simple ou complexe, sensible aux conditions initiales et qui présente un caractère répétitif, une forte récurrence. Une petite perturbation peut entraîner une instabilité ou un déséquilibre gigantesque non prédictible à long terme. Ainsi les dispositifs simples peuvent donner lieu à des phénomènes complexes. Un système chaotique est l'inverse d'un système parfaitement régulier. Nous essayons dans la section suivante de donner une définition du chaos, due à R.L Devaney [13].

2.2.1 Systèmes dynamiques chaotiques

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner une définition du chaos, due à R.L Devaney [13], quelques définitions de base sont nécessaires.

Définition 2.1.

$f : J \rightarrow J$ est dite topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$ il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 2.2.

$f : J \rightarrow J$ a une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in J$ et tout voisinage N_x de x , il existe $y \in N_x$ et $n > 0$ tels que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Intuitivement, une application possède une sensibilité aux conditions initiales si il existe des points arbitrairement proches de x qui finissent par s'éloigner de x par au moins δ sous l'itération de f . Nous passons maintenant à l'un des thèmes principaux dans les systèmes dynamiques, la notion du chaos. Nous présentons ici une définition particulière donnée par Devaney [13], car elle s'applique à un grand nombre d'exemples et généralement il est facile à vérifier.

Définition 2.3.

Soit V un ensemble. L'application $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales,
2. f est topologiquement transitive,
3. les points périodiques sont denses dans V .

Pour résumer, une application chaotique possède trois propriétés : l'imprévisibilité, elle est indécomposable et elle a un élément de régularité. Un système chaotique est imprévisible en raison de la sensibilité aux conditions initiales. Il ne peut pas être décomposé en deux sous-systèmes (deux sous-ensembles ouverts et invariants) qui ne se chevauche pas sous f en raison de la transitivité topologique. Et, au milieu de ce comportement aléatoire, nous avons quand même un élément de régularité, ce sont les points périodiques denses.

2.2.2 Attracteurs, bassins d'attraction et frontières

L'analyse du comportement à long terme d'un système dynamique nécessite une définition de l'attracteur, qui s'applique aux ensembles plus généraux que les points fixes et les orbites périodiques.

Définition 2.4.

Soit $U \supset \mathbb{R}^q$ un ouvert et soit l'application $f : U \rightarrow U$. Un ensemble fermé et borné $A \subset U$ est un **attracteur** si $f(A) = A$ et s'il existe $r > 0$ tel que $d(x_0, A) < r$ implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

Les attracteurs jouent un rôle fondamental dans l'étude du comportement à long terme d'un système dynamique. Certains de ces attracteurs ont une géométrie très compliquée au point que certains d'entre eux ont été appelés **attracteurs étranges** [36]. Les attracteurs peuvent être classés dans trois catégories [17] :

1. Point fixe (un seul point),

2. orbite périodique (un ensemble fini des points),
3. un attracteur chaotique (attracteur étrange) est tout autre type d'attracteurs.

Définition 2.5.

Étant donné un attracteur A , nous appelons **le bassin d'attraction** de A l'ensemble de toutes les conditions initiales x_0 , telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A) = 0$.

Différents bassins d'attraction sont séparés par des frontières des bassins. La géométrie de ces frontières est souvent aussi complexe que la géométrie des attracteurs eux-mêmes.

La figure (2.6) présente l'attracteur de l'application de Lozi défini par (4.1) :

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a |x| + by \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

où a et b sont les paramètres de bifurcation.

2.2.3 Exposants de Lyapunov

Dans l'analyse d'un système dynamique, l'exposant de Lyapunov [20] permet de quantifier la stabilité ou l'instabilité de ses mouvements. Un exposant de Lyapunov est : soit un nombre réel (fini), soit vaut $+\infty$ ou $-\infty$. Un mouvement instable a un exposant de Lyapunov positif, un mouvement stable, a un exposant de Lyapunov négatif. Les mouvements bornés d'un système linéaire ont un exposant de Lyapunov négatif ou nul. L'exposant de Lyapunov peut servir à étudier la stabilité (ou l'instabilité) des points d'équilibre des systèmes non linéaires. Nous allons définir dans cette sous-section la notion de l'exposant de Lyapunov et montrer comment on s'en sert pour étudier des systèmes chaotiques et même détecter la présence du chaos dans des systèmes.

1. Cas d'un système dynamique de dimension 1 :

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \epsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel μ tel que après n itérations :

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \simeq \epsilon \exp(n\mu),$$

d'où

$$\log \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| \simeq n\mu,$$

En faisant ϵ tendre vers zéro, on trouve :

$$\mu \simeq \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

on obtient :

$$\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|. \quad (2.5)$$

μ est appelé exposant de Lyapunov. Par sa définition, l'exposant de Lyapunov caractérise la stabilité d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$. Si $\mu > 0$ l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est instable. Si $\mu < 0$, elle est stable. La figure (2.7) donne l'exposant de Lyapunov de l'application logistique (2.6) pour $3 < a \leq 4$.

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (2.6)$$

2. Cas d'un système dynamique de dimension 2 :

Donnons maintenant une généralisation de la notion de l'exposant de Lyapunov dans le cas multi-dimensionnel. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et soit

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.7)$$

le système dynamique défini par f .

Commençons par préciser qu'un système m -dimensionnel possédera m exposant de Lyapunov μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système. Pour chaque $n \geq 1$ considérons la matrice jacobien de l'application f^n (notons le $J_n(x_0)$) évalué en un point x_0 . Tout comme dans le cas de dimension 1 nous avons :

$$J_n(x_0) = \prod_{i=1}^n J(x_i), \quad (2.8)$$

où $x_i = f^i(x_0)$ sont les points de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ et $J(x)$ est la matrice jacobien de l'application f évaluée en un point x . Pour calculer les μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$,

nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \epsilon$ et opérons un développement limite d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 :

$$x_n - x'_n = J_n(x_0)(x_0 - x'_0),$$

Si $J_n(x_0)$ est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_t telle que : $D_n(x_0) = P_t^{-1}J_n(x_0)P_t$, où $D_n(x_0)$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de $J_n(x_0)$. Notons ces valeurs propres par θ_i , $i = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\mu_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\theta_i^n), \quad i = 1, \dots, m.$$

La figure (2.8) donne les deux exposants de Lyapunov de l'application de Hénon définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2.9)$$

pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$. Les exposants de Lyapunov d'une orbite périodique attractive sont également négatifs. Si l'un des exposants est nul on a un point de bifurcation. Si l'un des exposants est positif alors on a la sensibilité aux conditions initiales, c'est-à-dire il y a le chaos.

2.2.4 Dimension fractale

L'étude d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^q$ invariant, fermé et borné (attracteur) d'un système dynamique gouverné par une application f comprend souvent la détermination d'un nombre représentant la dimension de A selon une définition appropriée de cette propriété. Ce nombre peut être assez important surtout quand A est un attracteur chaotique.

Par exemple, un point a la dimension 0, un segment a la dimension 1, un carré plein (intérieur et bord) a la dimension 2, un cube plein (intérieur et limite) a la dimension 3, etc. Cette idée intuitive n'est pas assez sophistiquée pour les objets géométriques complexes, y compris les attracteurs étranges.

Il peut arriver que différentes définitions de dimension attribuent différents nombres à l'un des sous-ensembles complexes de \mathbb{R}^q , pour lesquels l'idée intuitive de dimension a échoué. De plus, ces nombres ne peuvent pas être des nombres entiers. Un objet géométrique dont la dimension (dans une définition appropriée) n'est pas un entier s'appelle une fractale [21]. Quelques définitions différentes de dimension fractales seront abordées dans cette section [15].

1. Dimension de Hausdorff :

Soit l'espace A . On recouvre l'espace A au moyen d'une réunion dénombrable de parties notées A_i , chacune étant de diamètre inférieur à r . Pour tout s réel positif ou nul, on considère la quantité $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s$. On introduit la quantité :

$$H_r^s(A) = \inf_{\text{diam}(A_i) < r} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s / A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

La fonction H_r^s est décroissante, ce qui assure l'existence d'une limite (éventuellement infinie) quand on fait tendre r vers 0. D'où la définition :

$$H^s(X) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^s(X).$$

H^s s'appelle mesure de Hausdorff s -dimensionnelle. La dimension de Hausdorff s'appuie sur la mesure de Hausdorff. La dimension de Hausdorff de $A \subset \mathbb{R}^n$ est définie par [37] :

$$D_H = \sup \{s, H^s(A) = +\infty\} = \inf \{s, H^s(A) = 0\},$$

où $H^s(A)$ est la mesure de Hausdorff de l'ensemble A : Ce type de dimension dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble.

2. Dimension de capacité :

L'idée de la dimension de capacité est la suivante. Supposons que A soit un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^n . Choisissez $\epsilon > 0$ et sélectionnez des hyper-cubes (segments dans \mathbb{R} , carrés dans \mathbb{R}^2 , cubes dans \mathbb{R}^3 , etc.) du rayon ϵ . Notons par $N(\epsilon)$ le plus petit nombre nécessaire pour couvrir A . Posons

$$D_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)}{-\ln(\epsilon)}.$$

D_C est appelé la dimension de capacité de l'ensemble A [15].

3. Dimension de corrélation :

Soit $\mathcal{O}(x_1)$ une trajectoire d'un système dynamique (la condition initiale est notée x_1). La dimension de corrélation de l'ensemble $\mathcal{O}(x_1)$ est calculée de la manière suivante :

Étant donné un nombre réel positif r , nous formons l'intégrale de corrélation donné par :

$$C(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - n} \sum_{i \neq j}^n H(r - \|x_i - x_j\|), \quad (2.10)$$

où

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

est la fonction caractéristique de l'ensemble \mathbb{R}^+ .

La somme compte le nombre de paires de vecteurs plus proches que r lorsque $l < i, j < n$ et $i \neq j$, où $n^2 - n$ est le nombre total de paires avec $i \neq j$.

Par conséquent, le rapport entre les deux représente le ratio des paires qui sont plus proches que r , et $C(r)$ mesure la densité de paires de vecteurs distincts qui sont plus proches que r .

Définition 2.6.

La dimension de corrélation D_{Cor} de $\mathcal{O}(x_1)$ est définie par :

$$D_{Cor} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(C(r))}{\ln(r)}. \quad (2.12)$$

4. Dimension Kaplan et Yorke (Lyapunov) :

Soit $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, les n exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j \geq 0$. Alors la dimension de Kaplan et Yorke (Lyapunov) [38] est donnée par :

$$D_{KY} = \frac{\sum_{i=1}^j \mu_i}{|\mu_{j+1}|}.$$

Si aucun j existe alors $D_{KY} = 0$ (comme le cas d'un point hyperbolique stable); et si l'attracteur est chaotique alors $D_{KY} > 0$ est un nombre fractionnaire.

2.2.5 Routes vers le chaos

Une route vers le chaos est une séquence spécifique de bifurcations menant d'une évolution totalement prévisible (possède par exemple un point fixe stable) à une

évolution chaotique. Une caractéristique remarquable, découverte dans les années 1980s, est que ces séquences sont souvent qualitativement identiques, même si les systèmes physiques sont totalement différents. C'est ce qu'on appelle l'universalité des routes du chaos. On a pu mettre en évidence trois grands scénarios de passage d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre.

Trois routes typiques ont été mises en évidence pour les systèmes dissipatifs, chacune associée à un type de bifurcation : la route de doublement de période associée à la bifurcation flip ou doublement de période, la route d'intermittence associée à la bifurcation fold ou nœud col et la route de Ruelle-Takens associée à la bifurcation de Neimark-Sacker.

2.2.5.1 Cascade de doublements de période

Cette route décrit le passage d'une situation où le système dynamique atteint un état d'équilibre (c'est-à-dire un point fixe stable) à un régime chaotique par une succession de bifurcations de type doublement de périodes. Lorsque le paramètre de bifurcation μ augmente, le point fixe stable est remplacé en $\mu = \mu_0$ par un 2-cycle stable (le point fixe existe toujours pour $\mu > \mu_0$ mais il est instable). Ensuite, en $\mu = \mu_1$, ce cycle perd sa stabilité et est remplacé par un 4-cycle stable. Et ainsi de suite : l'orbite périodique de période 2^{j-1} observée pour $\mu < \mu_j$ perd sa stabilité pour $\mu = \mu_j$ et est remplacée par une orbite périodique de période 2^j stable. La suite croissante $(\mu_j)_{j \geq 0}$ des valeurs de bifurcation tend vers une limite μ_C . En $\mu = \mu_C$, un régime chaotique apparaît. Les valeurs de bifurcation $(\mu_j)_{j \geq 0}$ sont spécifiques au système considéré, ainsi que leur valeur limite μ_C . Par contre, leur accumulation en μ_C suit une progression géométrique :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{\mu_{j+2} - \mu_{j+1}} = \delta, \quad (2.13)$$

où δ est un nombre universel : $\delta = 4.66920\dots$. Cela signifie que l'exposant δ est identique dans tous les systèmes où une telle séquence de doublements de périodes conduisant au chaos est observée : une similitude qualitative entre comportements asymptotiques implique une identité quantitative.

Ce scénario est observé par exemple dans l'application logistique (2.6) avec $3 < a \leq 4$, comme le montre la figure (2.9).

2.2.5.2 Par intermittence

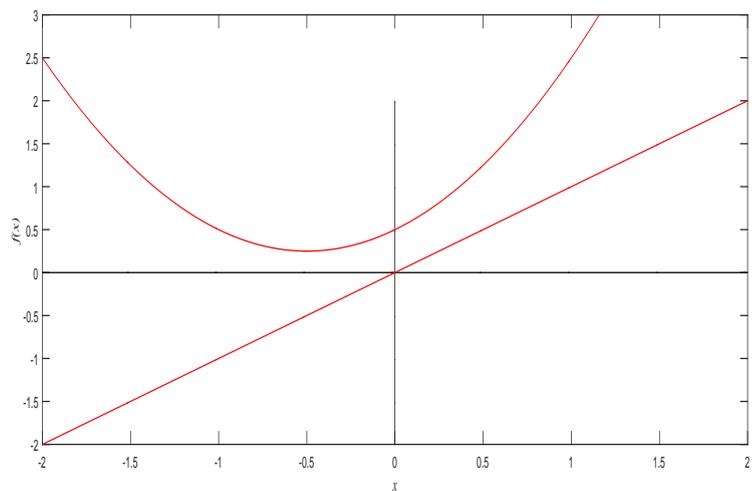
La route appelée intermittence décrit la persistance de phases régulières et prévisibles dans une dynamique globalement chaotique. L'idée principale est qu'après la disparition d'un point fixe stable x_μ^* via une bifurcation nœud-col pour $\mu = 0$, la dynamique reste lente au voisinage de x_μ^* , comme si elle connaissait la présence d'un fantôme du point fixé [22]. L'exemple typique est le système discret :

$$x_{n+1} = g_\mu(x_n) = -\mu + x_n - Ax_n^2, \quad (2.14)$$

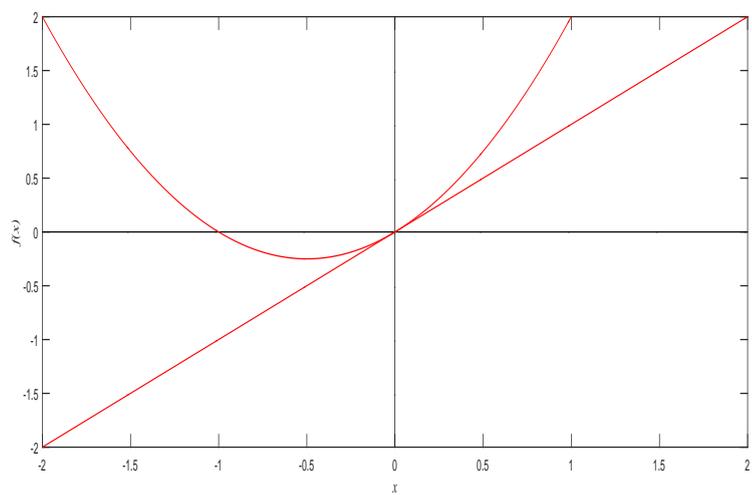
où $A > 0$ et μ est le paramètre de bifurcation. Pour $\mu = 0$ le système (2.14) a un seul point fixe $x^* = 0$; pour $\mu < 0$ il y a deux points fixes $\pm \sqrt{\frac{-\mu}{A}}$ l'un est stable l'autre est instable; pour $\mu > 0$ il n'y a plus de points fixes. Cependant, $g_\mu(x) \simeq x$ au voisinage de 0, de sorte que la trajectoire reste longtemps dans cette région et qu'un régime régulier et lent est observé, qui suit grossièrement la loi d'évolution $x_{n+1} = x_n - \mu$ tant que $Ax_n \ll 1$ et $Ax_n^2 \ll \mu$ figure (2.10).

2.2.5.3 Scénario de Ruelle et Takens

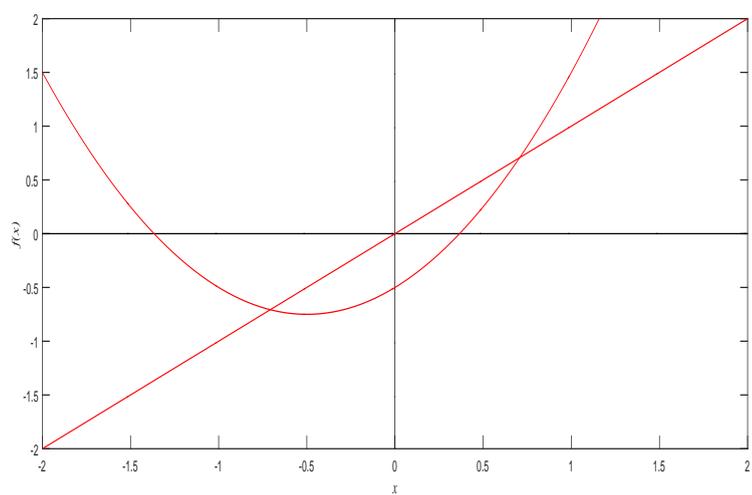
L'énoncé exact de cette route est assez technique car il faut introduire une topologie sur l'espace des champs de vecteurs, afin de définir la proximité de deux systèmes dynamiques continus. Sa formulation approximative est écrite : un système dynamique continu connaissant trois bifurcations de Hopf successives possède généralement un attracteur étrange. Chaque bifurcation de Hopf correspond à l'apparition d'un mode instable. La déclaration ci-dessus peut être reformulée : *La perte de stabilité de 3 modes avec des fréquences dont les rapports de paires sont irrationnels mène au chaos.* Ce résultat a profondément modifié l'image que les scientifiques ont sur le chaos : la vision qui prévalait auparavant, due à Landau, nécessitait la perte de stabilité d'une infinité de modes pour que l'évolution devienne apparemment erratique et imprévisible. En conséquence, on pensait que le chaos ne surviendrait que dans des systèmes à une infinité de degrés de liberté. Le scénario de Landau s'est révélé beaucoup trop restrictif : le couplage non linéaire de trois modes dont les rapports de fréquence par paire sont irrationnels suffit à générer un attracteur étrange [22].



(a)

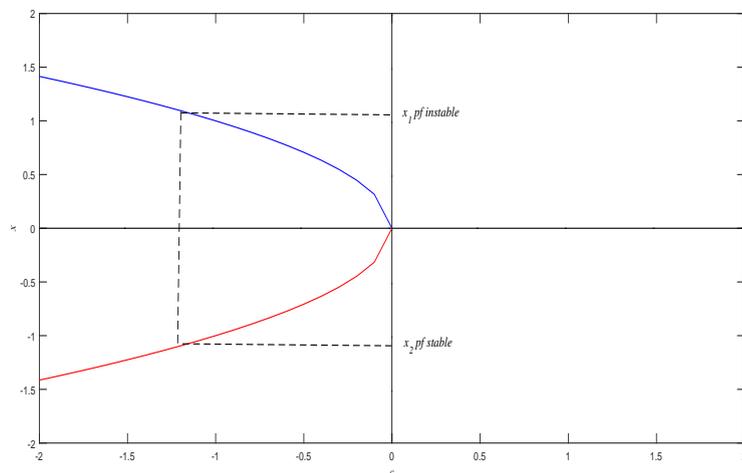


(b)



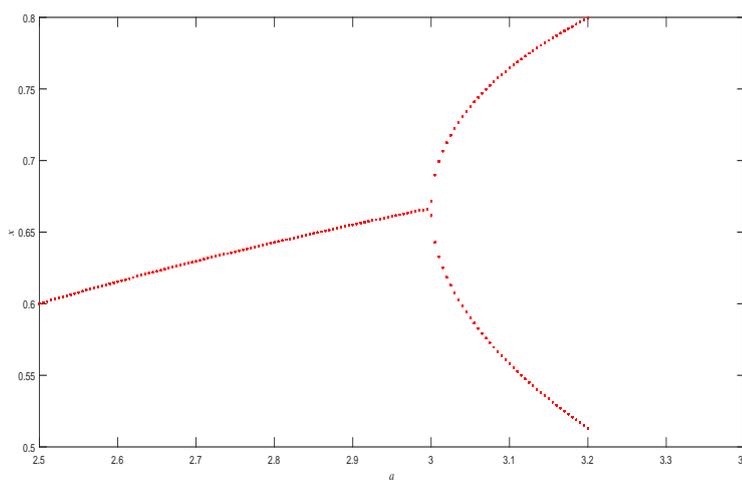
(c)

FIGURE 2.1: Le graphe de l'application $f_c(x) = x^2 + x + c$ pour (a) $c = 0.5$. (b) $c = 0$. (c) $c = -0.5$.



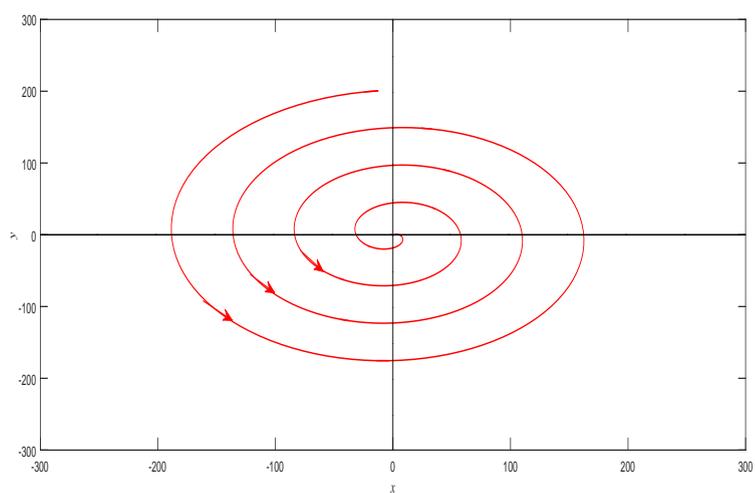
(a)

FIGURE 2.2: Bifurcation pli.

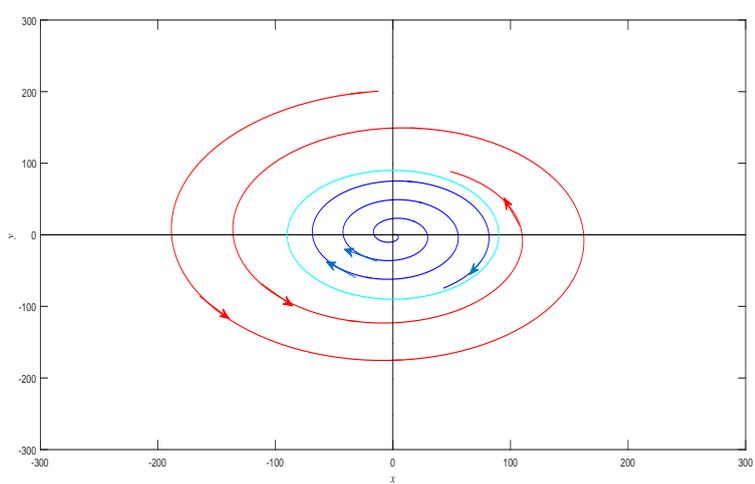


(a)

FIGURE 2.3: Bifurcation pli.

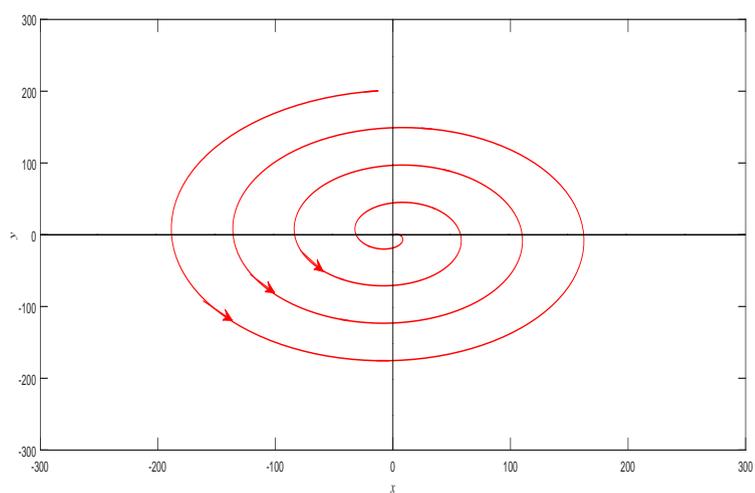


(a)

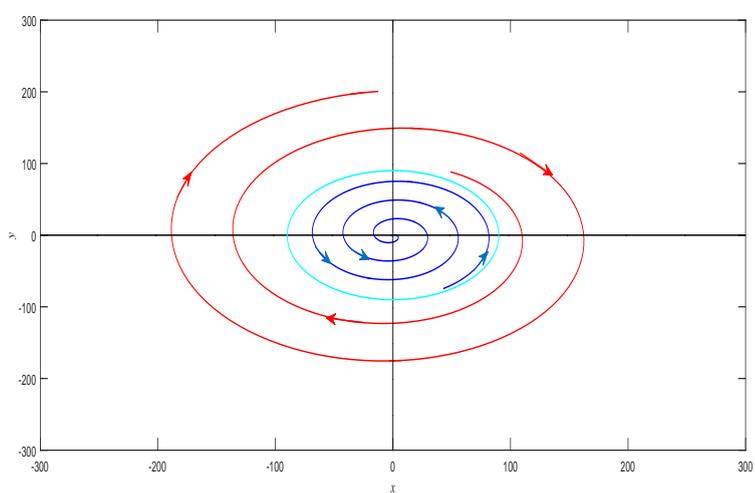


(b)

FIGURE 2.4: Bifurcation de Neimark-Sacker super-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée stable $\mu > \mu_0$.

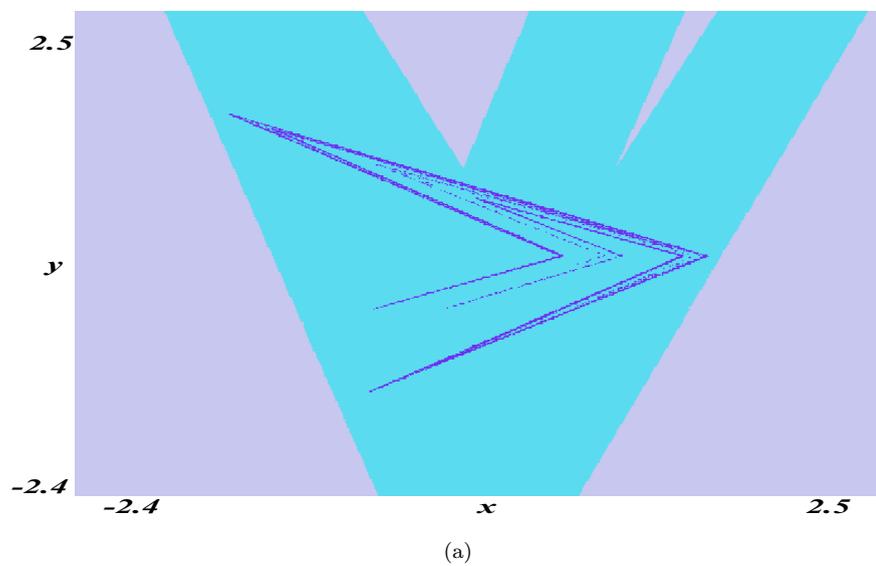
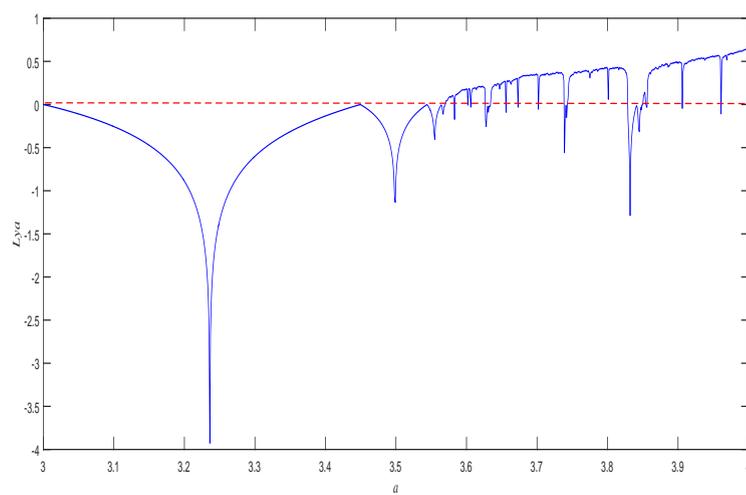


(a)



(b)

FIGURE 2.5: Bifurcation de Neimark-Sacker sous-critique. (a) Foyer stable pour $\mu < \mu_0$. (b) Courbe invariante fermée instable $\mu > \mu_0$.

FIGURE 2.6: Lozi attractor obtained for $a = 1.7$ and $b = 0.5$.FIGURE 2.7: Exposant de Lyapunov de l'application logistique (2.6) en fonction du paramètre a .

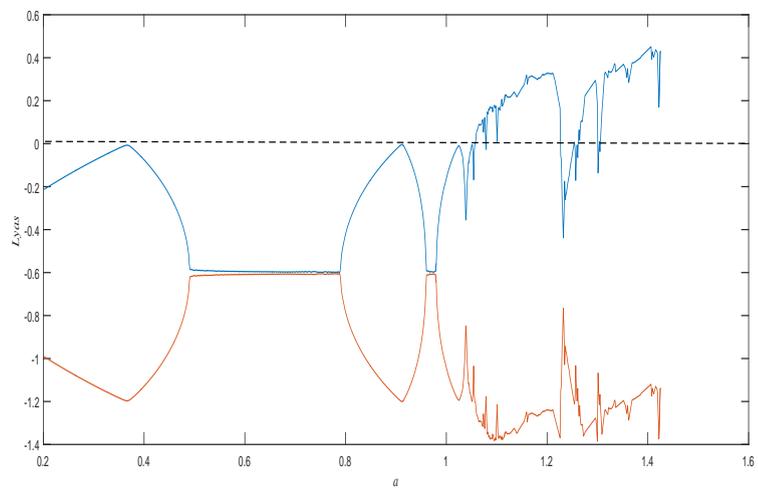


FIGURE 2.8: Exposant de Lyapunov de l'application de Hénon pour $b = 0.3$ et $0.2 < a \leq 1.5$.

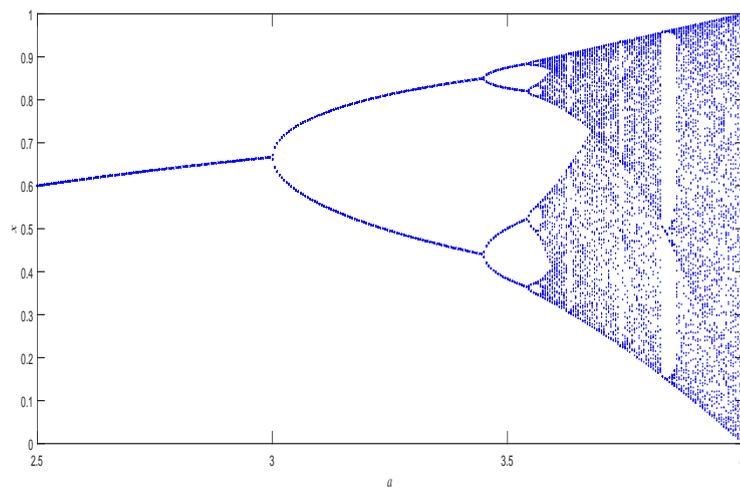


FIGURE 2.9: Bifurcation vers le chaos par doublement de période (ex : l'application logistique pour $2.5 < a \leq 4$).

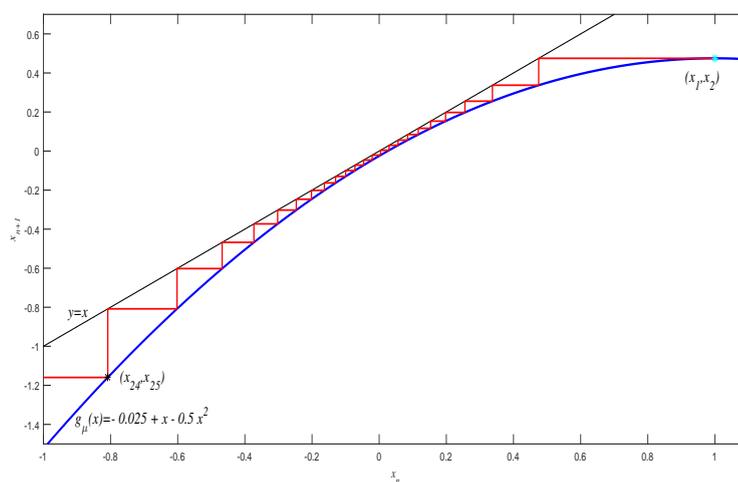


FIGURE 2.10: Pour $\mu = 0.025$ et $A = 0.5$ les itérés successifs ont lieu entre le graphe de g_μ et la bissectrice. La trajectoire passe lentement près des fantômes des points fixes qui existaient pour $\mu < 0$

Chapitre 3

Introduction à l'optimisation

L'optimisation consiste à obtenir le meilleur résultat dans des circonstances données. Dans la conception, la construction et la maintenance de tout système d'ingénierie, les ingénieurs doivent prendre de nombreuses décisions en matière de technologie et de gestion à plusieurs étapes. Le but ultime de toutes ces décisions est de minimiser l'effort requis ou de maximiser les avantages souhaités. Puisque l'effort requis ou le bénéfice souhaité dans toute situation pratique peut être exprimé en fonction de certaines variables de décision, l'optimisation peut être définie comme le processus de recherche des conditions donnant la valeur maximale ou minimale d'une fonction. Si un point x^* correspond à la valeur minimale d'une fonction f , le même point correspond également à la valeur maximale de la fonction, $-f$.

Il n'existe pas de méthode unique permettant de résoudre efficacement tous les problèmes d'optimisation. C'est pourquoi de nombreuses méthodes d'optimisation ont été développées pour résoudre différents types de problèmes d'optimisation. Les méthodes de recherche optimales sont également appelées techniques de programmation mathématique.

Un problème d'optimisation ou un problème de programmation mathématique peut être énoncé comme suit.

$$\text{Trouver } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \text{ qui minimise } f(X), \quad (3.1)$$

sous réserve des contraintes

$$g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$l_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

où X est un vecteur à n dimension appelée vecteur de conception, $f(X)$ est appelée fonction objective et $g_j(X)$ et $l_j(X)$ sont respectivement contraintes d'inégalité et d'égalité. Certains problèmes d'optimisation n'imposent aucune contrainte et peuvent être définis comme suit :

$$\text{Trouver } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \text{ qui minimise } f(X), \quad (3.2)$$

Ce genre de problèmes sont appelés problèmes d'optimisation sans contrainte. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux problèmes d'optimisation sans contrainte.

Pour arriver à étudier les problèmes d'optimisation, nous allons classifier les optima selon différents critères.

3.1 Types d'optima

Il y a plusieurs types de points optimum parmi eux

1. Optima locaux et globaux

Si le point x^* dans le domaine de définition D_f de la fonction f vérifié

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in D_f, \quad (3.3)$$

on dit que x^* est un optimum global de la fonction f .

D'autre part s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x) \geq f(x^*), \quad \forall x \in D_f \cap V_\epsilon(x^*), \quad (3.4)$$

où $V_\epsilon(x^*)$ dénote un voisinage de diamètre ϵ centré en x^* ; alors x^* est dite optimum locale de la fonction f (Figure 3.1).

2. Optima stricts

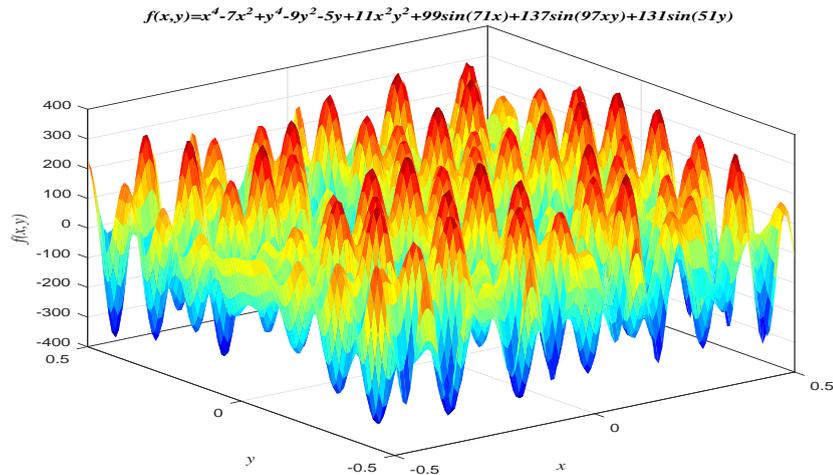


FIGURE 3.1: Fonction comportant plusieurs minima locaux près de l'origine (mais il est très difficile d'identifier son optimum globale).

Définition 3.1.

Un minimum local x^* est dit strict s'il existe une valeur $\epsilon > 0$ telle que quel que soit $x \in V_\epsilon(x^*)$, $x \neq x^*$, $f(x) > f(x^*)$, (l'inégalité est stricte).

Nous discutons dans les deux sections suivantes deux classes des méthodes d'optimisation, la première classe inclue les méthodes d'optimisation classiques (méthode de la section dorée, méthode de Fibonacci,...) ; la deuxième classe inclue les méthodes méta-heuristiques (optimisation par essais particuliers, optimisation des colonies de fourmis,...).

3.2 Méthodes d'optimisation classiques

Les méthodes classiques d'optimisation sont utiles pour trouver la solution optimale des fonctions continues et différentiables. Ces méthodes sont analytiques et utilisent les techniques du calcul différentiel pour localiser les points optimaux.

3.2.1 Optimisation unidimensionnelle

3.2.1.1 Méthode de la section dorée

Cette méthode est valable uniquement pour des fonctions à valeurs réelles, dont on connaît un intervalle $[a_0, b_0]$ sur lequel elle admet un unique minimum x^* figure (3.2). Considérons une fonction unidimensionnelle f et l'intervalle $[a_0, b_0]$. Cette

méthode consiste à évaluer f à deux points intermédiaires, comme illustré à la figure 3.3. Nous choisissons les points intermédiaires de telle sorte que la réduction

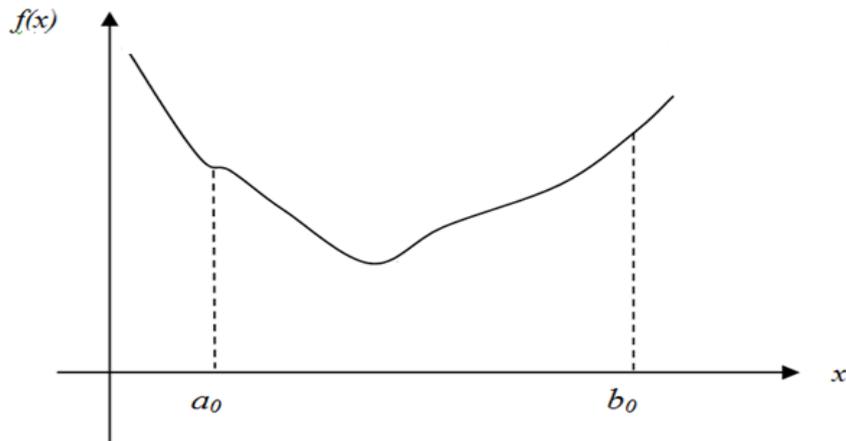


FIGURE 3.2: Graphe d'une fonction réelle présentant un unique minimum sur un intervalle $[a_0, b_0]$.

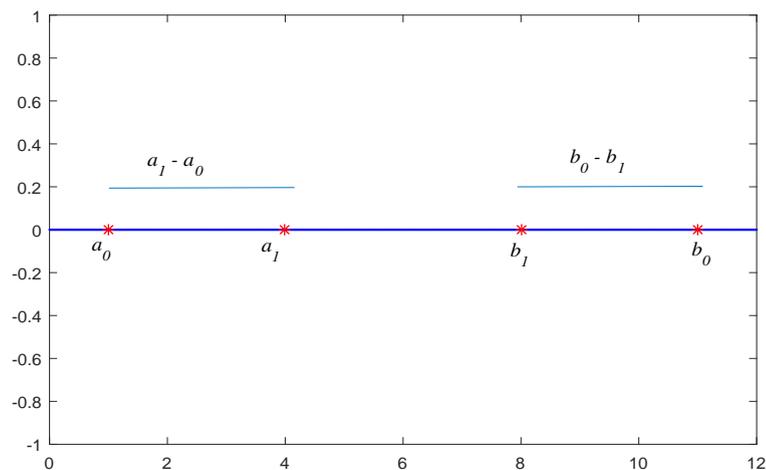


FIGURE 3.3: Méthode de la section dorée.

de l'intervalle soit symétrique, en sens que

$$a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = \rho(b_0 - a_0),$$

avec $\rho < \frac{1}{2}$. Nous évaluons ensuite f aux points intermédiaires. Si $f(a_1) < f(b_1)$, x^* doit être compris dans l'intervalle $[a_0, b_1]$. Si, au contraire, $f(a_1) > f(b_1)$, x^* est situé dans l'intervalle $[a_1, b_0]$. Nous pouvons répéter le processus et trouver deux nouveaux points, par exemple a_2 et b_2 en utilisant la même valeur de $\rho < \frac{1}{2}$ comme avant. Bien sûr nous aimerions minimiser le nombre d'évaluations de la fonction

objective tout en réduisant la largeur de l'intervalle d'incertitude. Supposons, par exemple, que $f(a_1) < f(b_1)$. Donc, nous savons que $x^* \in [a_0, b_1]$. Puisque a_1 est déjà dans l'intervalle d'incertitude et que $f(a_1)$ est déjà connu, nous pouvons faire coïncider un a_1 avec b_2 . Ainsi, une seule nouvelle évaluation de f en a_2 serait nécessaire. Nous devons trouver la valeur de ρ pour laquelle nous évaluons f une seule fois. Sans perte de généralité, nous supposons que l'intervalle $[a_0, b_0]$ est de longueur unitaire. Ensuite, pour avoir une seule nouvelle évaluation de f il suffit de choisir ρ pour que :

$$\rho(b_1 - a_0) = b_1 - b_2,$$

Parce que $b_1 - a_0 = 1 - \rho$ et $b_1 - b_2 = 1 - 2\rho$, on a

$$\rho(1 - \rho) = 1 - 2\rho,$$

d'où

$$\rho^2 - 3\rho + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Les solutions sont $\rho_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $\rho_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et comme $\rho < \frac{1}{2}$, nous prenons $\rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.382$.

Remarquons que $1 - \rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1 - \rho}{1}.$$

3.2.1.2 Méthode de Fibonacci

Rappelons que la méthode de la section dorée utilise la même valeur de ρ partout. Supposons maintenant que nous sommes autorisés à faire varier la valeur ρ d'une étape à l'autre, de sorte qu'à la k^{me} étape nous utilisons une valeur ρ_k , et à l'étape suivante, nous utilisons une valeur ρ_{k+1} , etc. Comme dans la méthode de la section dorée, notre objectif est de sélectionner les valeurs successives de ρ_k , $0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}$, de sorte qu'une seule nouvelle évaluation de la fonction f est requise à chaque étape. Pour dériver la stratégie de sélection des points d'évaluation, considérons la figure (3.4). On voit qu'il suffit de choisir le ρ_k tel que

$$\rho_{k+1}(1 - \rho_k) = 1 - 2\rho_k.$$

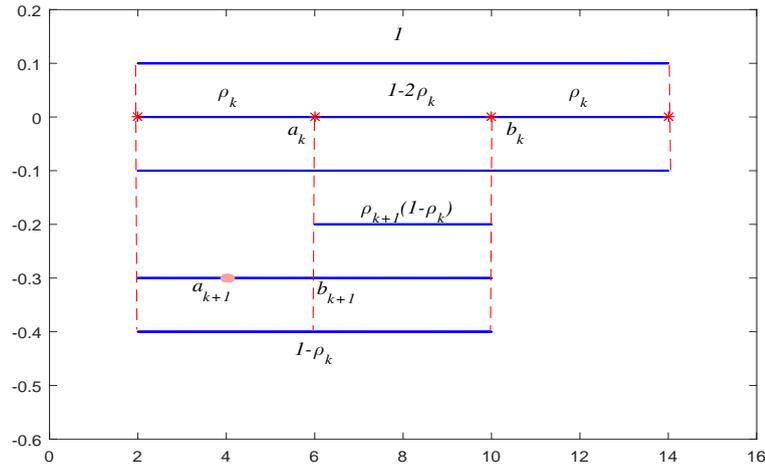


FIGURE 3.4: Méthode de Fibonacci.

D'où

$$\rho_{k+1}(1 - \rho_k) = 1 - 2\rho_k. \quad (3.6)$$

Il existe de nombreuses suites ρ_1, ρ_2, \dots qui satisfont l'équation (3.6) et la condition $0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}$. Par exemple, la séquence $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ satisfait les conditions ci-dessus et donne lieu à la méthode de la section dorée. Supposons que nous obtenions une suite ρ_1, ρ_2, \dots qui satisfait les conditions ci-dessus et que nous utilisons cette suite dans notre algorithme de recherche. Donc, après N itérations de l'algorithme, l'intervalle d'incertitude est réduite d'un facteur de

$$(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\dots(1 - \rho_N).$$

En fonction de la suite ρ_1, ρ_2, \dots , nous obtenons un facteur de réduction différent. La question naturelle est la suivante : Quelle suite ρ_1, ρ_2, \dots minimise le facteur de réduction ci-dessus ? Ce problème est un problème d'optimisation avec contrainte qui peut être formulé comme suit :

$$\text{minimiser } (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\dots(1 - \rho_N).$$

$$\text{tel que } \rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

$$\text{et } 0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Avant de donner la solution au problème d'optimisation ci-dessus, nous devons d'abord introduire la suite de Fibonacci, F_1, F_2, \dots . Cette suite est définie comme

suit : posons $F_{-1} = 0$ et $F_0 = 1$ par convention. Puis pour $k \geq 0$ on a

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

Certaines valeurs des éléments de la suite de Fibonacci sont les suivantes :

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.$$

Il s'avère que la solution au problème d'optimisation ci-dessus est la suivante :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 - \frac{F_N}{F_{N+1}}, \\ \rho_2 &= 1 - \frac{F_{N-1}}{F_N}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \rho_k &= 1 - \frac{F_{N-k+1}}{F_{N-k+2}}, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \rho_N &= 1 - \frac{F_1}{F_2}. \end{aligned}$$

où F_1, F_2, \dots sont les éléments de la suite de Fibonacci. L'algorithme résultant est appelé méthode de recherche de Fibonacci. Pour la preuve de l'optimalité de la méthode de recherche de Fibonacci voir [23].

Pour une étude approfondie d'autres types de méthodes d'optimisation unidimensionnelle (méthode de Newton, méthode de Secant,...) voir [23, 24].

Nous présentons dans la sous section suivante quelques méthodes d'optimisation classiques multidimensionnelles

3.2.2 Optimisation multidimensionnelle

3.2.2.1 Méthode de Gradient

Rappelons qu'une surface de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points x satisfaisant $f(x) = c$ pour une constante c .

Le gradient de la fonction f en x_0 , noté $\nabla f(x_0)$, s'il n'est pas un vecteur nul, est orthogonal au vecteur tangent à une courbe lisse arbitraire passant par x_0 au surface de niveau $f(x) = c$. Ainsi, la direction du taux de croissance maximal d'une fonction différentiable à valeurs réelles en un point est orthogonale au surface de niveaux de la fonction passant par ce point.

Ainsi, la direction dans laquelle $\nabla f(x_0)$ pointe est la direction du taux de croissance maximal de f en x . La direction dans laquelle $-\nabla f(x_0)$ pointe est la direction du taux maximum de décroissance de f en x . Par conséquent, la direction du gradient négatif est une bonne direction de recherche si nous voulons trouver un minimum de la fonction f . Basé sur ce qui précède, soit un point de départ x_0 et considérons le point $x_0 - \alpha \nabla f(x_0)$. Ensuite, par le théorème de Taylor, nous obtenons

$$f(x_0 - \alpha \nabla f(x_0)) = f(x_0) - \alpha \|\nabla f(x_0)\|^2 + o(\alpha). \quad (3.7)$$

Ainsi, si $f(x_0) \neq 0$, alors pour un $\alpha > 0$ assez petit, nous avons

$$f(x_0 - \alpha \nabla f(x_0)) < f(x_0). \quad (3.8)$$

Cela signifie que le point $x_0 - \alpha \nabla f(x_0)$ est une amélioration par rapport au point x_0 si nous cherchons un minimum de la fonction f .

Pour formuler un algorithme qui implémente l'idée ci-dessus, supposons qu'un point x_k soit donné. Pour trouver le prochain point x_{k+1} , nous commençons à x_k et nous nous déplaçons d'un montant $-\alpha_k \nabla f(x_k)$, où α_k est un scalaire positif appelé le pas. La procédure ci-dessus conduit à l'algorithme (algorithme de gradient) itératif suivant :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k). \quad (3.9)$$

Nous avons le choix de prendre de très petites pas et de réévaluer le gradient à chaque étape, ou nous pouvons faire de grands pas à chaque fois.

* Méthode de gradient à pas constant

On utilise le plus souvent la méthode du gradient à pas constant $\alpha_k = \alpha$. Comme on peut varier le pas α_k à chaque itération et on obtient alors la méthode du gradient à pas variable. Parmi les nombreuses méthodes du gradient à pas variable, la plus populaire est la méthode du gradient à pas optimal.

* Méthode du gradient à pas optimal

La méthode du gradient à pas optimal est un algorithme de gradient dans lequel la taille de pas α_k est choisie pour atteindre le maximum de diminution de la fonction

objectif à chaque pas individuel. Plus précisément, un α_k est choisi pour minimiser $f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$. En autre mots dit

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)). \quad (3.10)$$

Pour plus de détail voir [23, 24].

3.2.2.2 Méthode de Newton

La méthode du gradient à pas optimal utilise uniquement les premières dérivées (gradients) pour sélectionner une direction de recherche appropriée. Cette stratégie n'est pas toujours la plus efficace. Si les dérivées supérieures sont utilisées, l'algorithme itératif résultant peut donner de meilleurs résultats que La méthode du gradient à pas optimal. La méthode de Newton (parfois appelée méthode de Newton-Raphson) utilise des première et seconde dérivées et donne même de meilleurs résultats que La méthode du gradient à pas optimal si le point initial est proche du minimum. L'idée de cette méthode est la suivante. À partir d'un point de départ, nous construisons une approximation quadratique de la fonction objectif qui correspond aux valeurs de la première et la deuxième dérivées à ce point. Nous minimisons ensuite la fonction approximative (quadratique) au lieu de la fonction objectif d'origine. Nous utilisons l'optimum de la fonction approximative comme point de départ à l'étape suivante et répétons la procédure de manière itérative. Si la fonction objective est quadratique, alors l'approximation est exacte et la méthode donne le vrai optimum dans une étape. si, au contraire, la fonction objective n'est pas quadratique, alors l'approximation ne fournira qu'une estimation de la position du vrai optimum. Nous pouvons obtenir une approximation quadratique de la fonction objective deux fois continument différentiable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en utilisant le développement en série de Taylor de f autour du point actuel x_k , en négligeant les termes d'ordre plus grand ou égal 3. On obtient

$$f(x) \simeq f(x_k) + (x - x_k)' \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)' F(x_k) (x - x_k) = q(x),$$

$F(x_k)$ est la matrice hessienne. Soit x_{k+1} l'optimum de q , alors il vérifie $\nabla q(x_{k+1}) = 0$, d'où :

$$0 = \nabla q(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + F(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Si la matrice $F(x_k)$ est définie positive, alors :

$$x_{k+1} = x_k - (F(x_k))^{-1} \nabla f(x_k). \quad (3.11)$$

Cette formule récursive représente la méthode de Newton.

Pour une étude approfondie de cette méthode et d'autres types de méthodes d'optimisation multidimensionnelle (méthode de quasi-Newton, méthode de gradient conjugué, l'algorithme DFP, l'algorithme BFGS,...) voir [23, 24].

3.3 Méthodes méta-heuristiques

Une méta-heuristique est un algorithme d'optimisation visant à résoudre des problèmes d'optimisation difficiles pour lesquels on ne connaît pas de méthode classique plus efficace. Les méta-heuristiques sont souvent inspirées par des systèmes naturels, qu'ils soient pris en physique (cas du recuit simulé [33]), en biologie de l'évolution (cas des algorithmes génétiques [32]) ou encore en éthologie (cas des algorithmes de colonies de fourmis ou de l'optimisation par essais particulaires). Plusieurs ouvrages et articles ont été publiés sur ce sujet [25–28]. Dans la suite nous donnons quelques exemples de ce type des méthodes.

3.3.1 L'optimisation par essais particulaires (OEP).

L'optimisation par essais de particules (OEP) a été initialement introduite par Eberhart et Kennedy [39]. Le OEP est un algorithme de recherche basé sur la simulation du comportement social des oiseaux, des abeilles ou d'un bancs de poissons...etc [39].

Soit f : désignée la fonction objective à minimiser.

L'essaim est défini comme un ensemble : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, de N particules (solutions candidates). Chaque particule est caractérisée par :

1. $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$: la position actuelle de la particule.
2. $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n})$: Les particules sont supposées se déplacer dans l'espace de recherche \mathbb{A} de manière itérative. Ceci est possible en ajustant les positions en utilisant ses vitesses v_i . La vitesse est également adaptée de manière itérative pour rendre les particules capables de visiter potentiellement

toute région de \mathbb{A} . La vitesse est réinitialisée en fonction des informations obtenues lors des étapes précédentes de l'algorithme. Ceci est implémenté en termes de mémoire, où chaque particule peut stocker la meilleure position qu'elle ait visitée au cours de sa recherche. Donc l'essaim S , conserve également un ensemble : $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$.

3. $p_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,n})$: est la meilleure position visitée par la particule i . OEP est basé sur des modèles de simulation du comportement social ; ainsi, un mécanisme d'échange d'informations doit exister pour permettre aux particules de communiquer mutuellement leur expérience. L'algorithme se rapproche d'optimum global avec la meilleure position visitée par toutes les particules. Par conséquent, il est judicieux de partager cette information importante.
4. $p_g(t)$: Soit g l'indice de la meilleure position dans P à une itération donnée t , c'est-à-dire

$$p_g(t) = \arg \min_i f(p_i(t)). \quad (3.12)$$

Alors, la première version de OEP est définie par les équations (3.13) et (3.14) [39] :

$$v_{i,j}(t+1) = v_{i,j}(t) + c_1 R_1(p_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 R_2(p_{g,j}(t) - x_{i,j}(t)), \quad (3.13)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1), \quad (3.14)$$

où $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, n$ et t désigne l'itération en cours ; R_1 et R_2 sont des variables aléatoires uniformément réparties dans $[0, 1]$ et c_1 , c_2 sont des facteurs de pondération, également appelés paramètres cognitifs et sociaux, respectivement. À chaque itération, après la mise à jour et l'évaluation des particules, les meilleures positions (mémoire) sont également mises à jour. Ainsi, la nouvelle meilleure position de x_i à l'itération $t+1$ est définie comme dans l'équation (3.15) :

$$p_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t+1) & \text{si } f(x_i(t+1)) \leq f(p_i(t)), \\ p_i(t) & \text{si } f(x_i(t+1)) > f(p_i(t)). \end{cases} \quad (3.15)$$

Le code de l'algorithme OEP est donné dans le tableau (3.1). Pour une étude approfondi sur cette algorithm voir [31].

Entrée :	nombre de particules N de l'essaim S ; les meilleures positions, P .
Étape 1.	posé $t = 0$
Étape 2.	Initialiser S et posez $P = S$.
Étape 3.	Évaluer S et P et définit l'indice g de la meilleure position.
Étape 4.	While (critère de résiliation non rempli)
Étape 5.	Mettre à jour S en utilisant les équations (3.13) et (3.14).
Étape 6.	Évaluer S .
Étape 7.	Mettez à jour P et redéfinit l'indice g .
Étape 8.	Poser $t = t + 1$.
Étape 9.	Fin de while.
Étape 10.	Imprimer la meilleure position trouvée.

TABLE 3.1: Le code de l'algorithme OEP.

3.3.2 Optimisation par Colonie d'abeilles

3.3.2.1 Les abeilles dans la nature

Comme les fourmis, les abeilles sont des insectes sociaux. Elles sont obligées de vivre en colonie très organisée, formée d'ouvrières, de faux-bourdon et d'une seule reine, et où chacune a un travail bien précis à faire. Les abeilles se nourrissent essentiellement de pollen et de miel. Elles vont butiner les fleurs pour prendre le nectar.

Les abeilles adultes (âgées de 20 à 40 jours) deviennent habituellement des butineuses. Les abeilles butineuses jouent en général l'un des trois rôles suivants : butineuses actives, butineuses éclaireuses et butineuses inactives.

Une colonie d'abeilles mellifères peut s'étendre sur de longues distances (plus de 10 km) et dans plusieurs directions simultanément pour exploiter un grand nombre de sources de nourriture. En principe, les abeilles visitent plus de parcelles de fleurs contenant beaucoup de nectar ou de pollen qui peuvent être récoltés avec moins d'effort, alors que les parcelles de fleurs contenant moins de nectar ou de pollen doivent recevoir moins d'abeilles [34]. Dans le processus de recherche, l'emplacement de la source de nourriture représente la solution possible au problème, et la quantité du nectar et de pollen de cette source correspond à une valeur objective dite fitness.

Le processus de recherche de nourriture commence dans une colonie par l'envoi des butineuses éclaireuses aux différentes sources de nourriture. Les butineuses éclaireuses se déplacent au hasard d'un champ de fleurs à un autre.

Quand les butineuses éclaireuses (qui ont trouvé une source de nourriture et qui ont évalué (fitness) au-dessus d'un certain seuil de qualité (mesuré à la combinaison de certains constituants, tels que la teneur en sucre)) retournent dans la ruche, déposent leur nectar ou pollen et commencent à danser. Cette danse mystérieuse est essentielle à la communication entre les abeilles et contient trois informations concernant un source de nourriture : la direction dans laquelle il sera trouvé, sa distance par rapport à la ruche et son indice de qualité [34]. Ces informations aide la colonie à envoyer ses abeilles à cette source avec précision, sans utiliser de guides. Après avoir dansé, les danseuses (c'est-à-dire les butineuses éclaireuses) retournent au source de nourriture avec des abeilles qui attendaient à l'intérieur de la ruche. Plus d'abeilles sont envoyées dans des sources plus prometteuses. Cela permet à la colonie de rassembler les aliments rapidement et efficacement. Lors de la récolte dans une source, les abeilles surveillent le niveau de nourriture. Cela est nécessaire pour choisir le type de la prochaine danse à leur retour dans la ruche.

3.3.2.2 Algorithme d'abeilles

L'algorithme des colonies d'abeilles [41] est une méthode basée sur la population pour trouver une solution optimale aux problèmes de recherche. Elle est inspirée du comportement des abeilles dans la nature [41, 42].

L'algorithme nécessite la définition d'un certain nombre de paramètres :

1. n : nombre de butineuses éclaireuses,
2. m : nombre de sources sélectionnées sur n sources visitées,
3. e : nombre de meilleurs sources sur m champs sélectionnés,
4. nep : nombre d'abeilles recrutés pour les e meilleurs sources,
5. nsp : nombre d'abeilles recrutées pour les autres sources sélectionnées,
6. ngh : taille initiale des sources,
7. critère d'arrêt.

Le tableau 3.2 montre le code de l'algorithme dans la plus simple forme.

À l'étape 4, les abeilles qui ont les plus grand fitness sont choisies comme « abeilles sélectionnées » et les sources visités par celles-ci sont choisies pour une recherche au voisinage. Ensuite, aux étapes 5 et 6, l'algorithme effectue des recherches au voisinage des sources sélectionnées, affecter plus d'abeilles pour rechercher près de e meilleurs sources. À l'étape 7, les abeilles restantes de la population sont affectées

Étape 1.	Initialiser la population avec des solutions aléatoires.
Étape 2.	Évaluer la fitness de la population.
Étape 3.	While (critère d'arrêt non rempli) Formation d'une nouvelle population.
Étape 4.	Sélectionnez les sources pour une recherche au voisinage.
Étape 5.	Recrutez des abeilles pour les sources sélectionnés (plus d'abeilles pour les meilleurs sources) et évaluer les fitness.
Étape 6.	Sélectionnez l'abeille correspond à $\max(\text{fitness})$ de chaque source.
Étape 7.	Affecter aux abeilles restantes une recherche aléatoire et évaluer leurs fitness.
Étape 8.	Fin While.

TABLE 3.2: Le code de l'algorithme d'abeilles.

de manière aléatoire autour de l'espace de recherche à la recherche de nouvelles solutions potentielles. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit rempli.

Chapitre 4

Applications à l'optimisation

La théorie du chaos connaît un grand succès depuis ses débuts grâce à de nombreuses applications dans les autres sciences telles que la physique, la mécanique, l'électronique, la biologie, l'économie, l'astronomie, la météorologie, l'optimisation, ... ect [43–47]. Dans le ce chapitre nous exposons notre contributions dans l'application du chaos à l'optimisation.

4.1 Algorithme d'optimisation chaotique basé sur la partition de l'ensemble de données dans l'étape de recherche globale

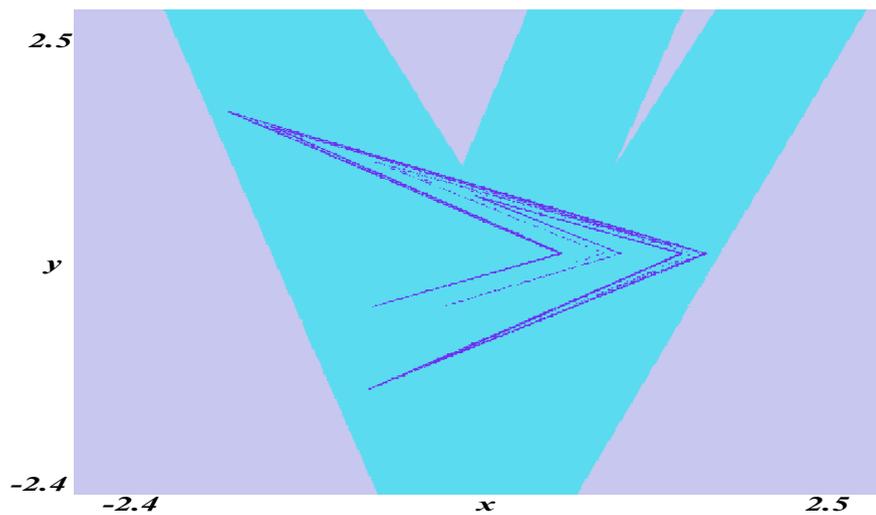
La grande difficulté à laquelle sont confrontés les algorithmes d'optimisation classiques est la facilité de tomber dans des optima locaux. De nombreux chercheurs ont bénéficié de bonnes caractéristiques d'applications chaotiques pour surmonter cette difficulté, mais le problème persiste pour certaines fonctions complexes.

Parmi ceux qui ont essayé de trouver une solution à ce problème sont L. S. Coelho dans [59] et T. Hamaizia et R. Lozi dans [67]. Ils ont résolu ce problème pour un grand nombre de fonctions, mais le problème persiste pour certaines fonctions complexes, comme nous l'expliquerons plus tard. Dans cette section, nous rappelons l'algorithme proposé par T. Hamaizia et R. Lozi dans [67] et nous proposons quelques modifications pour améliorer cet algorithme.

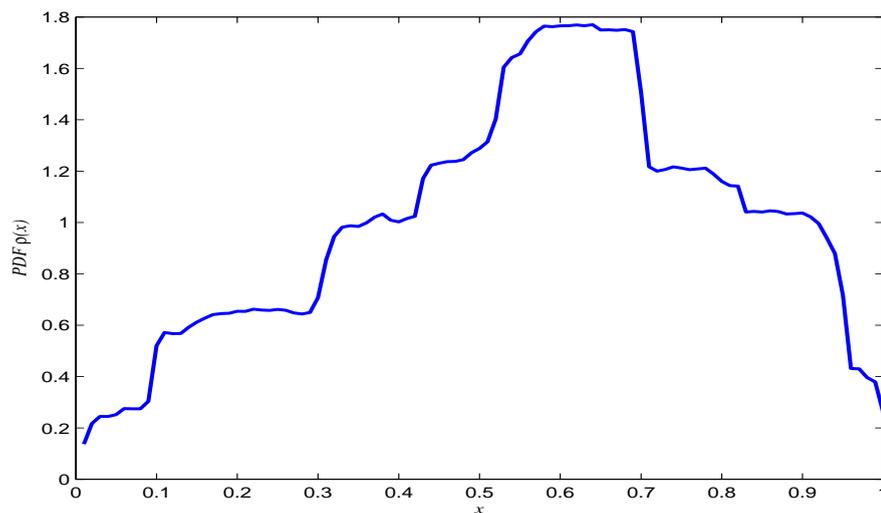
Dans cette section les suites chaotiques sont générées en utilisant l'application de Lozi [66] définie par la fonction L comme suit :

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ L_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a |x| + by \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

C'est une application itérative inversible de dimension 2 qui donne un attracteur chaotique appelé l'attracteur de Lozi obtenu pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$, comme le montre la figure (4.1) (a). Le calcul numérique de la densité de probabilité $\rho(s)$



(a)



(b)

FIGURE 4.1: (a) L'attracteur de Lozi et son bassin d'attraction obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$. (b) La densité de probabilité $\rho(s)$ des valeurs itérées $x(k)$.

des valeurs itérées $x(k)$ est présentée dans la figure 4.1 (b). Dans cette figure, les valeurs itérées $x(k)$ sont normalisées dans l'intervalle $[0, 1]$ c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \rho(x) dx = 1,$$

et nous remarquons que la valeur la plus élevée de $\rho(x)$ est d'environ 1.8 lorsque x se situe autour de 0,6.

4.1.1 L'algorithme ICOLM

Dans [67], T. Hamaizia et R. Lozi ont utilisé un mécanisme d'échantillonnage pour coordonner les méthodes de recherche basées sur la théorie du chaos et ils ont affiné la solution finale à l'aide d'une deuxième méthode de recherche locale. Les résultats obtenus montrent que l'algorithme ICOLM est rapide et converge vers le bon optimum. Mais pour certaines fonctions complexes, l'algorithme tombe dans les minimum locaux. Afin d'éviter ce problème, nous allons apporter quelques modifications à cette méthode dans les prochaines sections pour l'améliorer. Cet algorithme peut être décrit comme suit :

Premièrement, nous choisissons une application (l'application de Lozi) et on l'adopte de manière chaotique afin de l'utiliser pour générer plusieurs séquences de points en utilisant différentes conditions initiales.

Deuxièmement, chaque séquence $\{y(i), i = 1, 2, \dots, n\}$ est normalisée dans l'intervalle $[0, 1]$ comme suit :

$$z(i) = \frac{y(i) - \alpha}{\beta - \alpha},$$

pour tous $i = 1, 2, \dots, n$, où $\alpha = \min\{y(i), i \geq 1\}$, $\beta = \max\{y(i), i \geq 1\}$.

Le reste est

Algorithm 4.1.

Entrés :

M_g : nombre maximal d'itérations dans la recherche chaotique globale.

M_{gl_1} : nombre maximal d'itérations dans la première recherche chaotique locale dans la recherche globale (g-locale).

M_{gl_2} : nombre maximal d'itérations dans la deuxième recherche chaotique locale dans la recherche globale (g-locale).

M_l : nombre maximal d'itérations dans la recherche chaotique locale.

$M_t = M_g(M_{gl_1} + M_{gl_2}) + M_l$: critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ_{gl_1} : taille de pas dans la première recherche g-locale.

λ_{gl_2} : taille de pas dans la deuxième recherche g-locale.

λ : taille de pas dans la recherche chaotique locale.

Sorties :

\bar{x} : Meilleure point optimum.

\bar{f} : $\min(f)$.

Étape 1 : Initialisation des nombres M_g , M_{gl_1} , M_{gl_2} , M_l , initialisation des paramètres λ_{gl_1} , λ_{gl_2} , λ et conditions initiales. Posons $k = 1$, $y_1(1)$, $y_2(1)$, $a = 1.7$ and $b = 0.3$. Posons $\bar{f} = +\infty$.

Étape 2 : Algorithme de la recherche chaotique globale :

while $k \leq M_g$ **do**

$x_i(k) = L_i + z_i(k)(U_i - L_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

if $f(x(k)) < \bar{f}$, **then**

$\bar{x} = x(k)$, $\bar{f} = f(x(k))$

end if

Étape 2-1 : Sous algorithme de la première recherche chaotique g-locale :

while $j \leq M_{gl_1}$ **do**

for $i = 1$ to n **do**

if $r \leq 0.5$ **then** (où r est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$)

$x_i(j) = \bar{x}_i + \lambda_{gl_1} z_i(j)(U_i - \bar{x}_i)$

else

$x_i(j) = \bar{x}_i - \lambda_{gl_1} z_i(j)(\bar{x}_i - L_i)$

end if

end for

if $f(x(j)) < \bar{f}$, **then**

$\bar{x} = x(j)$, $\bar{f} = f(x(j))$

end if

$j = j + 1$

end while

Étape 2-2 : Sous algorithme de la deuxième recherche chaotique g-locale :

while $s \leq M_{gl_2}$ **do**

for $i = 1$ to n **do**

```

if  $r \leq 0.5$  then
 $x_i(s) = \bar{x}_i + \lambda_{gl_2} z_i(s)(U_i - \bar{x}_i)$ 
else
 $x_i(s) = \bar{x}_i - \lambda_{gl_2} z_i(s)(\bar{x}_i - L_i)$ 
end if
end for
if  $f(x(s)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(s)$ ,  $\bar{f} = f(x(s))$ 
end if
 $s = s + 1$ 
end while
 $k = k + 1$ 
end while

```

Étape 3 : Algorithme de recherche chaotique locale :

```

while  $k \leq M_l$  do
for  $i = 1$  to  $n$  do
if  $r \leq 0.5$  then
 $x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k)(U_i - \bar{x}_i)$ 
else
 $x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k)(\bar{x}_i - L_i)$ 
end if
end for
if  $f(x(k)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(k)$ ,  $\bar{f} = f(x(k))$ 
end if
 $k = k + 1$ 
end while.

```

Bien que cette méthode a été développée pour trouver une solution au piège de l'optimum locale lors de la résolution de problèmes d'optimisation de certaines fonctions multimodales, le succès a été partiel, car si la fonction objectif n'est pas lisse, cette méthode tombe facilement dans le piège des minima locaux comme nous allons l'expliquer.

Si à l'étape k dans la recherche globale la solution optimale de notre problème est $f(x^*)$, alors tous les points $x(s)$, $s > k$ dans la partie rouge de la figure (4.2) ont ignorés pendant la recherche ; mais il est possible que le minimum global se situe au voisinage d'un point de la partie rouge. Pour résoudre ce problème, nous

suggérons de diviser le nombre d'itérations de la recherche globale en packs et de poser au début de chaque pack $\bar{f} = +\infty$. D'autre part, en raison de la non-

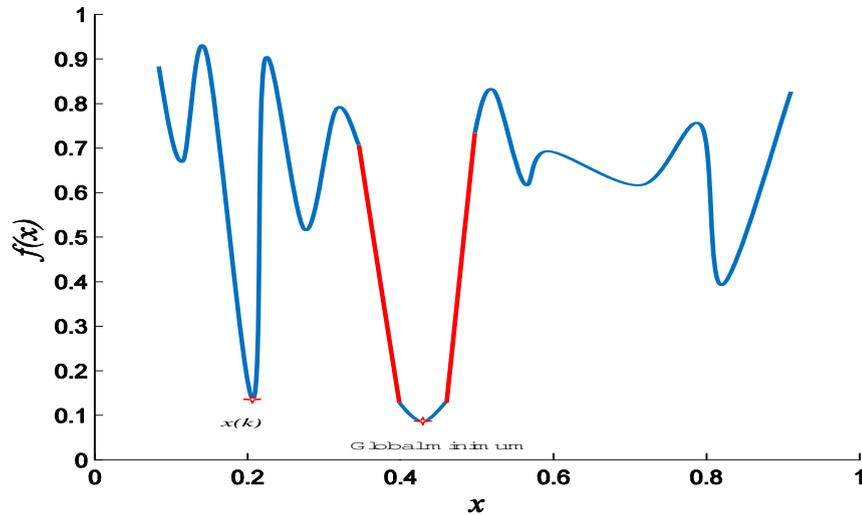


FIGURE 4.2: Exemple de tomber dans le piège de minimum locale.

répétition du chaos, la recherche chaotique peut effectuer des recherches globales à une vitesse supérieure à celle des recherches stochastiques qui dépendent de probabilités. Motivés par cette idée, nous allons remplacer l'étape de recherche locale (étape aléatoire) par une recherche locale chaotique, comme nous l'expliquerons plus tard. C'est pourquoi nous appellerons cette nouvelle méthode l'algorithme d'optimisation chaotique pure (PCOA).

4.1.2 Algorithme d'optimisation chaotique pure

Comme mentionné dans la section précédente, les changements fondamentaux qui seront apportés à l'ICOLM sont les suivants :

Au début, nous divisons l'ensemble de données qui sera utilisé dans la recherche globale en packs et au début de chaque pack, nous définissons la meilleure fonction objectif $\bar{f} = +\infty$ afin de sortir des minima locaux.

Le deuxième changement concerne la recherche g-locale et la recherche locale, où nous utilisons la recherche chaotique au lieu de la recherche aléatoire. Pour appliquer la recherche g-locale, nous utilisons une transformation linéaire pour projeter les points de séquences chaotiques au voisinage du point de recherche globale et la même idée sera utilisée dans la recherche locale. Nous donnons dans la suite un exemple pour illustrer cette idée.

Exemple 4.1.

Pour faciliter le processus, supposons que le domaine de recherche soit $[l, u] = [0, 1]$ et nous devons effectuer une recherche locale dans le voisinage du point $x^* = 0.5$ (c'est-à-dire l'intervalle de recherche locale est $[x^* - \lambda, x^* + \lambda]$, mais si $x^* - \lambda < l$ (resp $x^* + \lambda > u$), l'intervalle de recherche locale est $[l, x^* + \lambda]$ (resp $[x^* - \lambda, u]$). Pour projeter tous les points au voisinage du point $x^* = 0.5$, nous utilisons la transformation linéaire suivante :

$$T(x) = \frac{2\lambda}{u-l}x + (x^* - \lambda).$$

La figure (4.3) (a) montre le graphe de la transformation T où nous voyons que tous les points de l'intervalle $[l, u]$ sont transformés dans l'intervalle $[x^* - \lambda, x^* + \lambda]$ ($\lambda = 0.01$) et la figure (4.3) (b) montre la densité de probabilité de $T(L_1)$.

Dans ce qui suit, nous allons décrire l'algorithme d'optimisation chaotique pur.

Algorithm 4.2.**Entrés :**

N : Nombre maximum d'itérations dans la recherche chaotique globale.

N_p : Nombre maximum de paquets dans la recherche globale.

M_g : Nombre maximum d'itérations dans la recherche chaotique globale pour chaque paquet.

M_{gl} : Nombre maximum d'itérations dans la recherche chaotique g-locale.

M_l : Nombre maximum d'itérations dans la recherche chaotique locale.

$M_t = N_p(M_g M_{gl} + M_l)$: Critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ_{gl} : Largeur de l'intervalle dans la recherche chaotique g-locale.

λ : Largeur de l'intervalle dans la recherche chaotique locale.

Sorties :

\bar{x} : Meilleure point optimum.

\bar{f} : $\min(f)$.

Étape 1 : Initialisation des nombres M_g , M_{gl} , M_l , initialisation des paramètres λ_{gl} , λ et les conditions initiales. L'application de Lozi (4.1) est adoptée pour avoir un comportement chaotique afin de l'utiliser pour générer plusieurs séquences de points en utilisant différentes conditions initiales. chaque sequence $\{y(i), i = 1, 2, \dots, n\}$ est normalisé dans l'intervalle $[0, 1]$ comme suit :

$$z(i) = \frac{y(i) - \alpha}{\beta - \alpha},$$

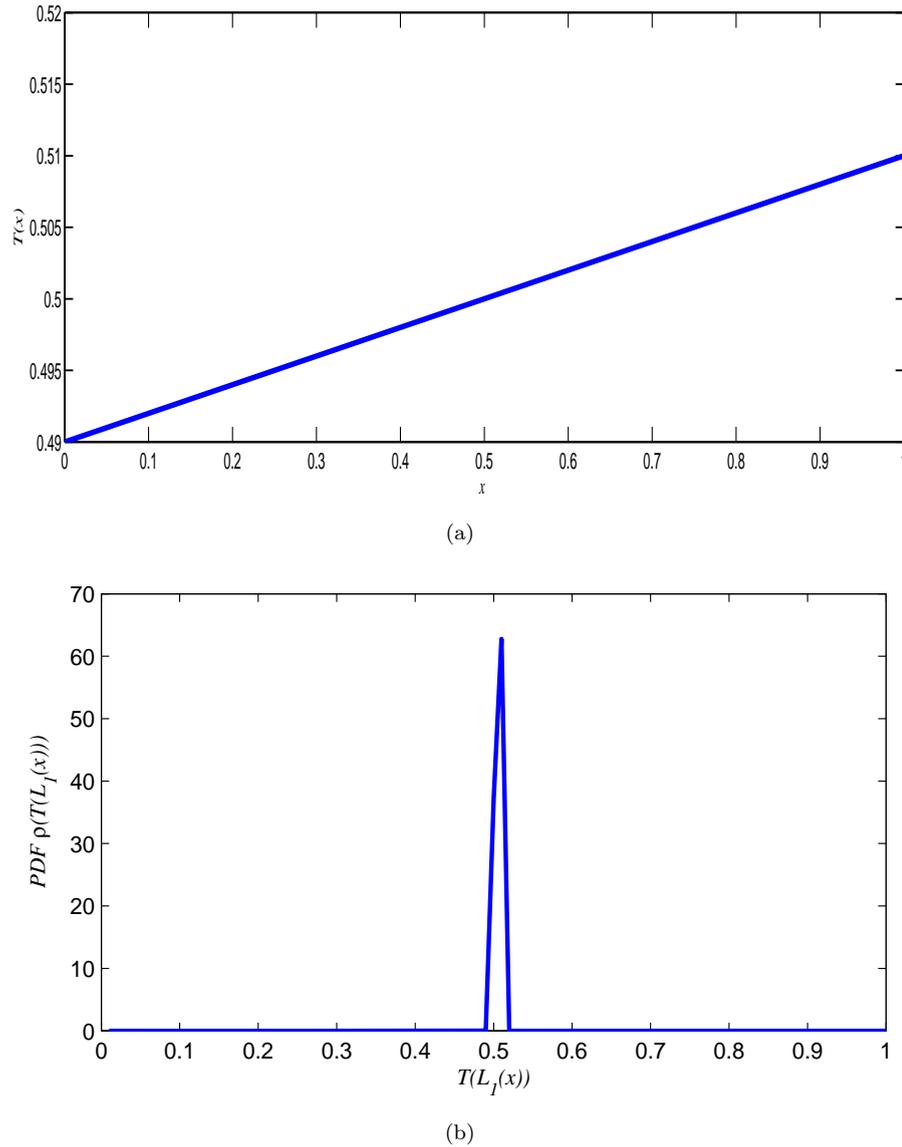


FIGURE 4.3: (a) La transformation T . (b) Densité de probabilité $T(L_1)$.

pour tous $i = 1, 2, \dots, n$, où $\alpha = \min\{(y(i), i \geq 1)\}$, $\beta = \max\{(y(i), i \geq 1)\}$.

Étape 2-1 : Algorithme de la recherche chaotique globale :

for $t = 1 : N_p$

Posons $\bar{f}(t) = +\infty$.

while $k \leq M_g$ **do**

$x_i(k) = L_i + z_i(k)(U_i - L_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

if $f(x(k)) < \bar{f}$, **then**

$\bar{x} = x(k)$, $\bar{f} = f(x(k))$

Étape 2-2 : Sous algorithme de la recherche chaotique g-locale :

Transformez les points générés par l'application de Lozi au voisinage du point \bar{x} et nous commençons la recherche

```

while  $j \leq M_{gl}$  do
if  $f(x(j)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(j)$ ,  $\bar{f} = f(x(j))$ 
end if
 $j = j + 1$ 
end while
end if
 $k = k + 1$ 
end while
end for

```

Étape 3 : Algorithme de la recherche chaotique locale :

Transformez les points générés par l'application de Lozi au voisinage du point \bar{x} et nous commençons la recherche

```

while  $k \leq M_l$  do
if  $f(x(k)) < \bar{f}$ , then
 $\bar{x} = x(k)$ ,  $\bar{f} = f(x(k))$ 
end if
 $k = k + 1$ 
end while.

```

Au cours de la recherche chaotique locale, la taille du pas λ (resp λ_{gl}) est un paramètre important du comportement de convergence de la méthode d'optimisation qui ajuste les petites intervalles autour de X^* . Les pas λ et λ_{gl} sont utilisées pour contrôler l'impact de la meilleure solution actuelle sur la génération d'une nouvelle solution.

4.1.3 Exemples numériques et discussion

Afin de tester cette nouvelle méthode par rapport à la précédente dans des conditions très difficiles, les résultats de la simulation sont obtenus avec les quatre fonctions objectives suivantes.

4.1.3.1 Quelques fonctions de test

1.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)}{2},$$

où $-5 \leq x_i \leq 5$ pour $1 \leq i \leq n$.

2.

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^4 - 7x_1^2 + x_2^4 - 9x_2^2 - 5x_2 + 11x_1^2x_2^2 + 99 \sin(71x_1) \\ + 137 \sin(97x_1x_2) + 131 \sin(51x_2),$$

où $-10 \leq x_1 \leq 10$ et $-10 \leq x_2 \leq 10$.

3.

$$f_3(x_1, x_2) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)] \times \\ [30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)],$$

où $-2 \leq x_1 \leq 2$ et $-2 \leq x_2 \leq 2$.

4.

$$f_4(x_1, x_2) = 100\sqrt{|x_2 - 0.01x_1^2|} + 0.01|x_1 + 10|,$$

où $-15 \leq x_1 \leq -5$ et $-3 \leq x_2 \leq 3$.

Les figures 4.4 (a, b) montrent les graphes 3-D de la fonction de Styblinski-Tang f_1 , qui est une fonction d -dimensionnelle, généralement évaluée sur l'hypercube $x_i \in [-5, 5]$, pour tout $i = 1, \dots, d$. Elle a un minimum global

$$-39.16617 \times d \leq f_4(-2.903534, \dots, -2.903534) \leq -39.16616 \times d.$$

Concernant la fonction f_2 dans les figures 4.4 (c, d), elle possède plusieurs minima locaux [67], mais son minimum global n'est pas encore théoriquement connu.

f_3 est la fonction Goldstein-Price généralement évaluée sur le rectangle

$$(x_1, x_2) \in [-2, 2] \times [-2, 2],$$

elle a beaucoup de minima locaux et un minimum global $f_3(0, -1) = 3$ et le graphe 3-D de cette fonction est donné par la figure (4.4) (e). f_4 est la fonction Bukin

qui est habituellement évaluée sur le rectangle

$$(x_1, x_2) \in [-15, -5] \times [-3, 3],$$

elle a beaucoup de minima locaux et un minimum global $f_4(-10, 1) = 0$, voir la Figure (4.4) (f).

4.1.3.2 Simulation numériques

Afin d'enrichir notre étude, nous allons utiliser différentes valeurs de tailles de pas et différentes valeurs du nombre d'itérations pour les deux méthodes présentées dans les tableaux (4.1) et (4.2). Chaque méthode d'optimisation a été implémentée dans Matlab (MathWorks). Tous les codes étaient exécutés sur un *i3* processeur à 2.53 GHz avec une ram 4 GB. Puisque l'algorithme ICOLM donne des résultats aléatoires, alors chaque code est exécuté 50 fois indépendantes et chaque exécution utilise 50 conditions initiales différentes et tous les résultats sont résumés dans le tableau (4.3); Cependant, l'algorithme d'optimisation chaotique pur est une méthode déterministe, par conséquent, une analyse est effectuée avec 50 conditions initiales différentes et tous les résultats sont résumés dans le tableau (4.4).

	λ	λ_{gl_1}	λ_{gl_2}	M_g	M_{gl_1}	M_{gl_2}	M_l
C1	0.01	0.04	0.01	30	5	5	20
C2	0.01	0.04	0.01	100	5	5	50
C3	0.001	0.04	0.01	500	10	10	100

TABLE 4.1: L'ensemble des valeurs des paramètres pour chaque exécution de l'algorithme ICOLM.

	λ	λ_{gl}	N_p	M_g	M_{gl}	M_l
C1	0.001	0.01	100	10	100	100
C2	0.002	0.05	100	100	200	200
C3	0.005	0.08	1000	100	200	200

TABLE 4.2: L'ensemble des valeurs des paramètres pour chaque exécution de l'algorithme PCOA .

Nous pensons que chaque fois que nous utilisons un grand nombre d'itérations, nous nous rapprochons de la solution (point optimum). Mais ce n'est pas vrai pour l'algorithme ICOLM comme le montre le tableau 4.3 en raison du piège des

F.T	Cas	Solu.Optim	Pt.Optim	Val.Moy	Ecar.Typ	T/s
f_1	C1	-103.3610	(2.7455, -2.8977,-2.9069)	-103.3383	0.0136	6.461655
	C2	-117.4956	(-2.8970,2.9005,-2.8926)	-117.4806	0.0114	20.458741
	C3	-117.4983	(-2.9046, -2.9000,-2.9038)	-117.4867	0.0082	180.311540
f_2	C1	-392.9923	(0.2443,2.0614)	-383.8462	7.6147	7.619080
	C2	-395.8094	(0.2434,2.0632)	-389.7800	5.6617	27.695888
	C3	-395.7769	(0.2434,2.0640)	-387.4540	6.1347	253.251734
f_3	C1	3.0669	(0.0108,-1.0068)	3.7525	0.2849	3.561953
	C2	3.0004	(-0.0007, -1.0010)	3.0064	0.0052	11.280039
	C3	3.0001	(0.0006, -1.0001)	3.0039	0.0026	105.905089
f_4	C1	0.1027	(-9.4415,0.8914)	0.7547	0.4245	3.562340
	C2	0.02794	(-9.4132,0.8861)	0.4295	0.1159	12.257843
	C3	0.0487	(-9.5870,0.9191)	0.3587	0.2091	109.698371

TABLE 4.3: Résultats d'optimisation pour 50 exécutions de 3 ensembles des paramètres utilisant l'algorithme ICOLM.

F.T	Cas	Solo.Optim	Pt.Optim	T/s
f_1	C1	-117.4772	(-2.8830, -2.8759, -2.9111)	2.648436
	C2	-117.4924	(-2.8869,-2.8949,-2.9014)	8.289850
	C3	-117.4985	(-2.9034, -2.9026,-2.8952)	47.761714
f_2	C1	-390.2672	(0.0622,1.8189)	2.237673
	C2	-395.8622	(0.2433,2.0638)	5.072239
	C3	-395.8742	(0.2432,2.0636)	49.7400
f_3	C1	3.0000	(-0.0001,-0.9999)	1.202800
	C2	3.0000	(-0.0000, -1.0000)	3.343877
	C3	3.0000	(-0.0000, -1.0000)	18.763473
f_4	C1	0.0322	(-10.7807,1.1622)	1.122277
	C2	0.0108	(-9.6809, 0.9372)	2.754711
	C3	0.0086	(-10.2723,1.0552)	25.725318

TABLE 4.4: Résultats d'optimisation pour une exécution de 3 ensembles des paramètres en utilisant l'algorithme PCOA.

minima locaux mentionnés dans la section 4.2.1.

En ce qui concerne les résultats d'optimisation en utilisant le PCOA, nous avons :

- Pour la fonction f_3 , le minimum global est facilement atteint en quelques étapes et peu de temps par rapport à l'algorithme ICOLM, comme le montre les tableaux (4.3) et (4.4).
- En ce qui concerne f_1 , le minimum global est obtenu à l'aide du configuration C_3 .
- Pour f_2 qui possède certaines minimums locaux, le meilleur résultat est obtenu à l'aide de configuration C_3 et le minimum global n'est pas encore connu théoriquement.

- Enfin, le meilleur résultat pour f_4 est obtenu à l'aide de la configuration C_3 .

Nous notons que la PCOA converge plus rapide que l'ICOLM, comme indiqué dans les tableaux (4.3) et (4.4).

4.1.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté une nouvelle technique d'optimisation chaotique (PCOA) inspirée de la méthode ICOLM [67]. Afin de tester les performances numériques de cette nouvelle technique, quatre fonctions multi-dimensionnelle non linéaires ont été utilisées.

4.2 Algorithme d'optimisation chaotique basé sur la densité de probabilité modifiée de l'application de Lozi

Différents types d'itérations chaotiques ont été considérés dans la littérature pour des applications au méthodes d'optimisation. L'application logistique et d'autres applications, telles que l'application tente, l'application de Gauss, l'application de Lozi, l'application de Hénon, ...ect, ont été adoptées au lieu des variables aléatoires et ont donné de bons résultats [54, 60–65].

L'inconvénient de cette méthode est que si la densité de séquences chaotiques générées par l'application sélectionnée n'est pas élevée au voisinage du point optimal global, il est fort probable que nous ne retrouverons pas ce point. Motivés par cette raison, nous allons proposer notre idée principale.

4.2.1 L'idée principale

Comme mentionné ci-dessus, la densité de probabilité des séquences chaotiques générées par des applications chaotiques influence évidemment l'efficacité des algorithmes d'optimisation chaotiques. Si de nombreux points d'échantillonnage se trouvent au voisinage de l'optimum global, le taux de réussite pour trouver l'optimum global dans l'espace de recherche est élevé. En d'autres termes, si la densité de probabilité des séquences chaotiques est élevée au voisinage du point optimal

global, le taux de réussite pour trouver le point optimal global est élevé. Cela a donné naissance à l'idée sur laquelle nous travaillons ; ce qui indique qu'au lieu de changer l'application utilisée dans l'algorithme d'optimisation, nous choisissons une application qui présente un bon comportement chaotique, puis nous utilisons certaines transformations pour modifier la densité de cette application. Après cela, pour toute fonction de test, nous utilisons la transformation qui donne les meilleurs résultats. Nous utilisons dans cette section l'application de Lozi [66] définie par l'équation 4.1. La figure (4.1) (a) montre l'attracteur de Lozi obtenu pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$. La densité de probabilité de l'application de Lozi est donnée par la figure (4.1) (a). Pour plus d'explications, nous suggérons l'exemple suivant :

Exemple 4.2.

Soit la transformation S figure (4.5) défini sur l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même tel que

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{si } 0 \leq x \leq 0.75 \\ 3x - 2 & \text{si } 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

alors la densité des valeurs itérées de S est indiquée dans la figure (4.6).

Comme le montre la figure figure (4.6), la majorité des valeurs de $S(L_1)$ sont au voisinage de 0.2 ; donc, si la fonction de test a son point optimal dans cette région, il est tout à fait possible de le trouver. Mais si le point optimal global est au voisinage de 1, il est peu probable que nous le trouvions car la densité de la séquence chaotique est très faible dans cette région.

4.2.2 Méthode d'optimisation chaotique (ICOLM)

Afin de tester l'efficacité de cette idée, nous allons la combiner avec la méthode d'optimisation chaotique proposée par Coelho dans [?] et améliorée par T. Hamazia et R. Lozi in [67] et nous l'utilisons pour trouver la solution optimale de certaines fonctions de test. Donc l'algorithme ICOLM (4.1) devient comme suit : Premièrement, l'application de Lozi est adoptée pour avoir un comportement chaotique utilisé pour générer plusieurs séquences de points en utilisant différentes conditions initiales.

Deuxièmement, nous utilisons une transformation pour modifier la densité de l'application de Lozi, comme dans l'exemple ci-dessus. Le reste est comme dans l'algorithme (4.1).

Afin d'enrichir notre étude, nous allons utiliser différentes valeurs de tailles de pas et différentes valeurs du nombre d'itérations pour chaque transformation comme dans le tableau (4.5).

	λ	λ_{gl_1}	λ_{gl_2}	M_g	M_l	M_{gl_1}	M_{gl_2}	M_t
C1	0.01	0.04	0.01	50	10	5	5	510
C2	0.01	0.4	0.01	50	10	5	5	510
C3	0.01	0.04	0.01	100	50	5	5	1050
C4	0.001	0.04	0.01	200	100	5	5	2100

TABLE 4.5: L'ensemble des valeurs des paramètres pour chaque exécution de l'algorithme ICOLM.

4.2.3 Exemples numériques et discussion

4.2.3.1 Quelques transformations

Dans cette section, nous allons suggérer quelques transformations afin de les utiliser pour changer la densité de probabilité de l'application de Lozi.

1.

$$S_1(x) = x^2 + 3x \quad (4.3)$$

2. Soit m le minimum de la séquence générée par l'application de Lozi et M son maximum et soit α et β deux nombres réelles. Nous définissons la transformation S_2 comme suit :

$$S_2(x) = \frac{-2\alpha}{m - M}x + \beta - \alpha - \frac{-2\alpha}{m - M}m. \quad (4.4)$$

Nous notons que si on pense que le point optimal est x^* on peut choisir α et β de sorte que la majorité des points $S_2(x)$ sont dans le voisinage de x^* . Dans cette section, nous choisissons $\alpha = 0.001$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

3.

$$S_3(x) = \tan(x) \quad (4.5)$$

4.

$$S_4(x) = \log(|x|) \sin(x) \quad (4.6)$$

Figure (4.7) montre la densité de probabilité ρ_1 de $S_1(L_1)$ à travers lequel on voit que la fonction ρ_1 diminue sur l'intervalle $[0.5, 1]$ qui contient moins de points de $S_1(L_1)$ que l'intervalle $[0, 0.5]$. La densité ρ_2 de $S_2(L_1)$ est montrée à la figure (4.8)

où nous remarquons que la majorité des points sont dans le voisinage de 0.5 donc si le point optimal est proche de 0.5, il est très probable de le trouver (ou de bien l'approcher), mais si le minimum global est loin de 0,5, cette transformation n'est pas appropriée. La densité ρ_3 de $S_3(L_1)$ montré à la figure (4.9) ressemble à la densité normale. Enfin, la densité de $S_4(L_1)$ est comme celle de l'application logistique, voir figure (4.10). Dans cette section, nous allons utiliser les fonctions de test f_1 , f_2 , f_3 et f_4 défini dans la section (4.1).

4.2.4 Résultats numériques

La méthode d'optimisation a été implémentée dans Matlab (MathWorks). Tous les codes étaient exécutés sur un i3 processeur à 2.53 GHz avec une ram 4 GB. D'autre part, puisque l'algorithme ICOLM donne des résultats aléatoires, alors chaque code est exécuté 50 fois indépendantes et chaque exécution utilise 50 conditions initiales différentes.

Le tableau (4.6) montre les résultats numériques de la recherche des minima globales de la fonction de Styblinski-Tang f_1 dans lequel nous remarquons que la transformation la plus appropriée utilisée pour trouver la solution optimale de f_1 est S_4 . Les meilleurs résultats concernant f_2 sont obtenus en utilisant les transformations S_3 et S_4 mais le premier est meilleur puisque son écart type est inférieure à celle de S_4 , voir tableau (4.7). Le tableau (4.8) représente les résultats numériques du problème d'optimisation de la fonction de Goldstein-Price f_3 où nous voyons que toutes les transformations de la sous section (4.2.3.1) sont appropriées pour trouver les minima globaux de f_3 mais le plus approprié de tous est S_4 . Enfin, les résultats numériques du problème d'optimisation de la fonction f_4 sont montrés dans le tableau (4.9) à partir de le quelle nous voyons que la transformation la plus appropriée utilisée pour trouver la solution optimale de la fonction de Bukin f_4 est S_1 parce que les minima globaux numériques se situent au voisinage de minimaux théoriques et que l'écart type est proche de zéro.

4.2.5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle technique d'optimisation chaotique en utilisant certaines transformations pour modifier la densité de l'application de Lozi. Afin de tester les performances numériques de cette nouvelle technique, quatre fonctions de multi-dimensionnelles non linéaires sont utilisées.

F.T	Trans	Cas	Solu.Optim	Pt.Optim	Val.Moy	Ecar.Typ
f_1	S_1	C1	-117.4985	(-2.9045,-2.9044,-2.9026)	-117.4980	0.0003
		C2	-117.4969	(-2.9108,-2.9044,-2.8972)	-117.4532	0.0294
		C3	-117.4985	(-2.9031,-2.9041,-2.9023)	-117.4982	0.0001
		C4	-117.4985	(-2.9033,-2.9035,-2.9043)	-117.4984	0.0001
	S_2	C1	-117.4970	(-2.9095,-2.9059,-2.9103)	-117.4888	0.0061
		C2	-117.4584	(-2.9356,-2.9020,-2.9390)	-116.5590	0.5693
		C3	-117.4980	(-2.9047,-2.9049,-2.9085)	-117.4939	0.0025
		C4	-117.4984	(-2.9050,-2.9016,-2.9031)	-117.4949	0.0029
	S_3	C1	-117.4947	(-2.9022,-2.8920,-2.8941)	-117.4773	0.0105
		C2	-116.5576	(-2.7716,-3.0596,-3.0117)	-114.5126	1.2206
		C3	-117.4979	(-2.9040,-2.8978,-2.9018)	-117.4805	0.0103
		C4	-117.4958	(-2.9132,-2.9113,-2.9055)	-117.4816	0.0082
	S_4	C1	-117.4985	(-2.9035,-2.9037,-2.9037)	-117.4985	0.0000
		C2	-117.4985	(-2.9039,-2.9039,-2.9030)	-117.4980	0.0002
		C3	-117.4985	(-2.9034,-2.9034,-2.9038)	-117.4985	0.0000
		C4	-117.4985	(-2.9035,-2.9036,-2.9035)	-117.4985	0.0000

TABLE 4.6: Résultats d'optimisation de f_1 pour chaque transformation.

F.T	Trans	Cas	Solu.Optim	Pt.Optim	Val.Moy	Ecar.Typ
f_2	S_1	C1	-395.6748	(0.1533,2.4332)	-389.4862	7.8471
		C2	-395.4022	(0.1535,2.4322)	-384.5009	4.5688
		C3	-395.8736	(0.2433,2.0636)	-389.2662	8.1911
		C4	-395.8498	(0.2433,2.0632)	-377.1366	7.8063
	S_2	C1	-395.8338	(0.2433,2.0641)	-378.3163	8.2958
		C2	-395.7457	(0.2431,2.0644)	-378.7449	6.2101
		C3	-395.7776	(0.2434,2.0640)	-381.5902	9.5200
		C4	-395.7475	(0.2435,2.0634)	-381.9671	8.9664
	S_3	C1	-395.8474	(0.2432,2.0636)	-393.0928	1.4983
		C2	-388.3178	(0.0661,1.6989)	-385.7685	0.3642
		C3	-395.7612	(0.2431,2.0635)	-393.6255	1.0753
		C4	-395.7959	(0.2432,2.0642)	-387.6166	7.0161
	S_4	C1	-385.1566	(1.9246,0.0925)	-373.0012	3.1790
		C2	-395.6758	(0.2432,2.0647)	-389.1207	5.6259
		C3	-395.8349	(0.2432,2.0641)	-392.9497	2.1407
		C4	-395.8751	(0.2433,2.0635)	-393.5276	1.2457

TABLE 4.7: Résultats d'optimisation de f_2 pour chaque transformation.

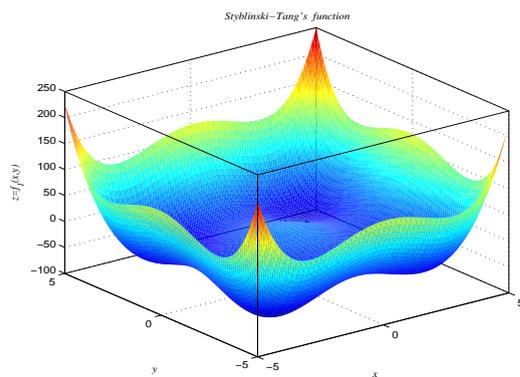
F.T	Trans	Cas	Solu.Optim	Pt.Optim	Val.Moy	Ecar.Typ
f_3	S_1	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C2	3.0003	(-0.0011,-0.9998)	3.0028	0.0021
		C3	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C4	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
	S_2	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0002)	3.0008	0.0012
		C2	3.0003	(-0.0002,-0.9992)	3.0639	0.0689
		C3	3.0000	(-0.0003,-1.0000)	3.0004	0.0003
		C4	3.0000	(-0.0003,-0.9997)	3.0005	0.0003
	S_3	C1	3.0000	(-0.0002,-0.9999)	3.0042	0.0038
		C2	3.0574	(-0.0100,-0.9933)	3.1461	0.0501
		C3	3.0002	(-0.0003,-0.9995)	3.0045	0.0041
		C4	3.0001	(0.0004,-0.9997)	3.0045	0.0034
	S_4	C1	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C2	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C3	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000
		C4	3.0000	(-0.0000,-1.0000)	3.0000	0.0000

TABLE 4.8: Résultats d'optimisation de f_3 pour chaque transformation.

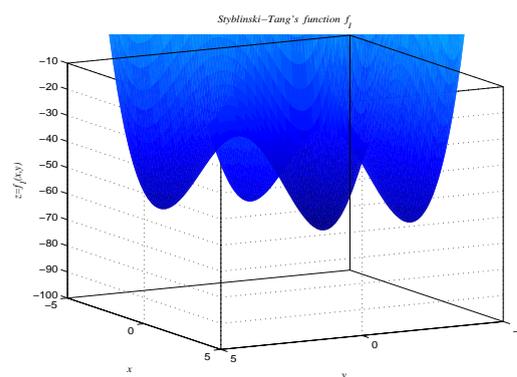
F.T	Trans	Cas	Solu.Optim	Pt.Optim	Val.Moy	Ecar.Typ
f_4	S_1	C1	0.0173	(-10.7026,1.1455)	0.1600	0.0720
		C2	0.0247	(-11.4549,1.3121)	0.4569	0.2221
		C3	0.0058	(-9.6433,0.9299)	0.0916	0.0517
		C4	0.0054	(-10.3195,1.0649)	0.0764	0.0423
	S_2	C1	0.0126	(-10.1153,1.0232)	0.2494	0.1133
		C2	0.0440	(-9.3116,0.8671)	0.6132	0.3021
		C3	0.0138	(-10.2609,1.0529)	0.1403	0.0776
		C4	0.0103	(-10.4391,1.0897)	0.1029	0.0532
	S_3	C1	0.0203	(-10.0553,1.0111)	0.2316	0.01306
		C2	0.0821	(-12.3331,1.5211)	0.8963	0.4186
		C3	0.0185	(-9.9977,0.9995)	0.1903	0.1097
		C4	0.0100	(-10.2287,1.0463)	0.1183	0.0615
	S_4	C1	0.0291	(-12.6313,1.5955)	0.0911	0.0338
		C2	0.0220	(-9.3076,0.8663)	0.2144	0.1155
		C3	0.0247	(-12.4120,1.5406)	0.0780	0.0212
		C4	0.0299	(-12.9314,1.6722)	0.0665	0.0200

TABLE 4.9: Résultats d'optimisation de f_4 pour chaque transformation.

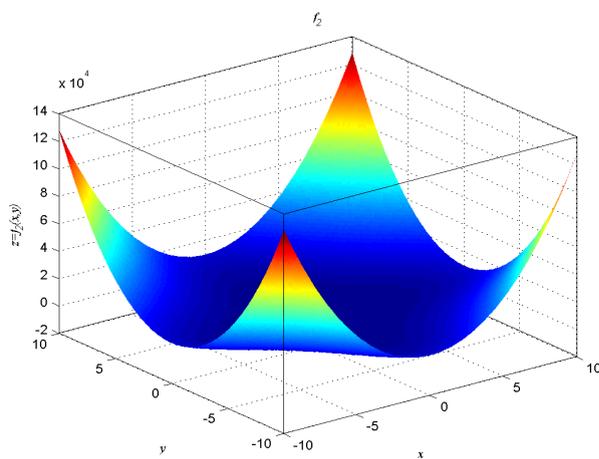
Comme résultat de cette étude, aucune application chaotique n'offre la meilleure solution de problème d'optimisation pour toutes les fonctions de test. Ainsi, pour obtenir un minimum global d'une fonction, nous devons choisir une applications qui présente un bon comportement chaotique et sélectionner la transformation qui correspond à la forme de la fonction de test sous étude.



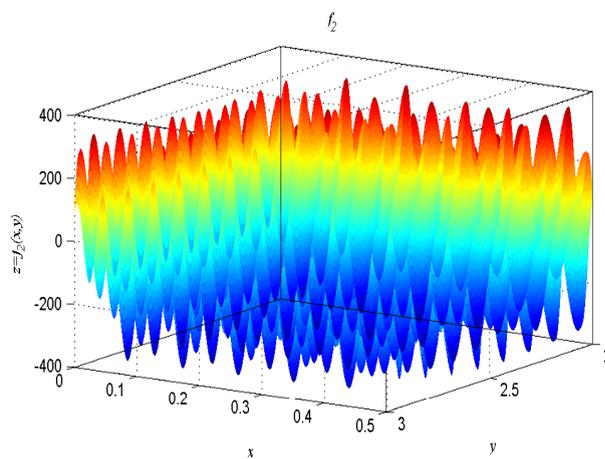
(a)



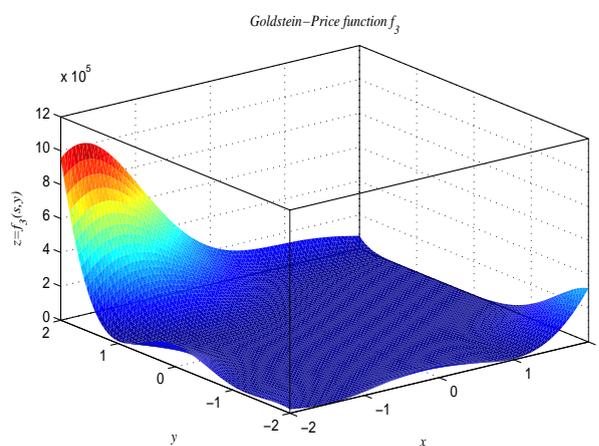
(b)



(c)

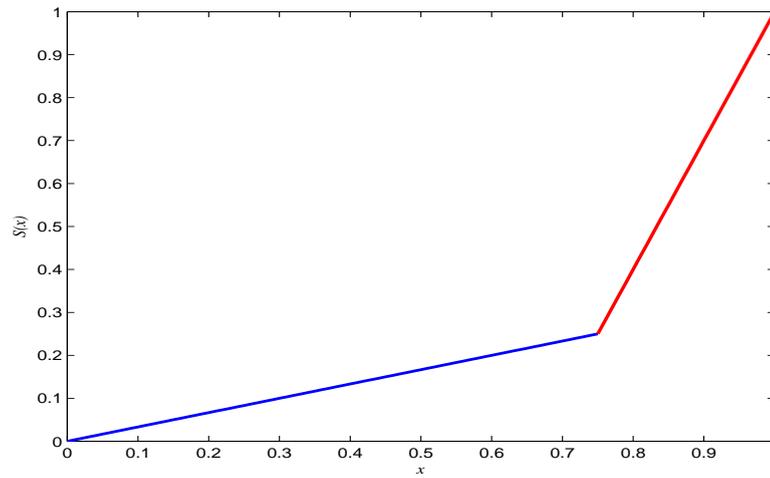
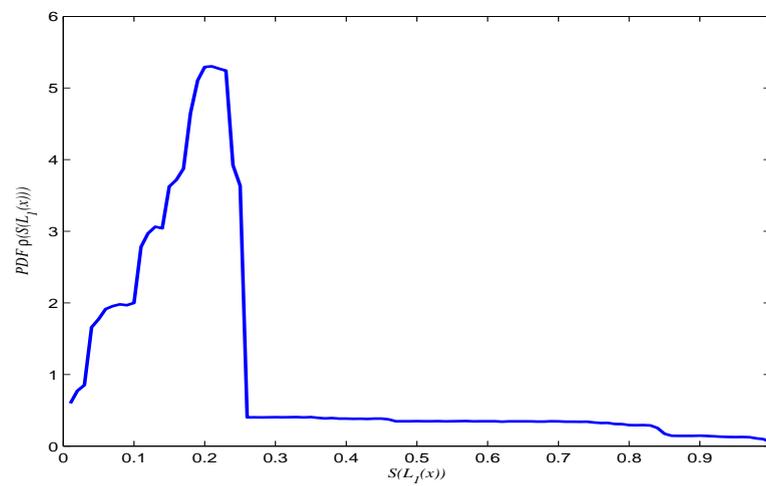
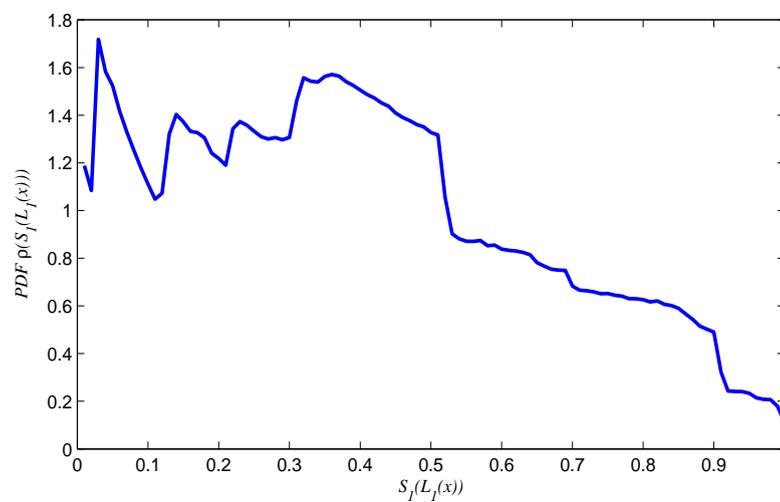


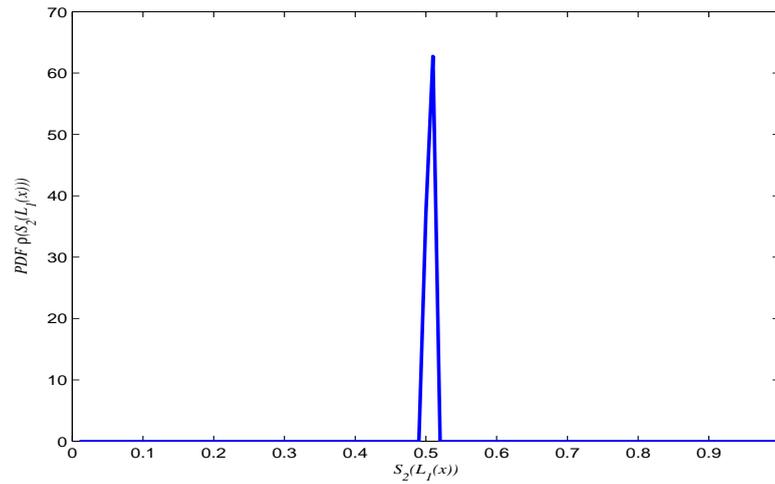
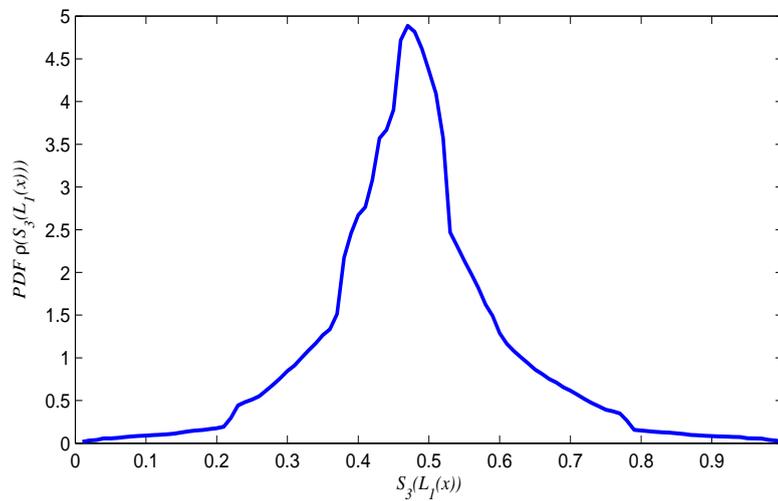
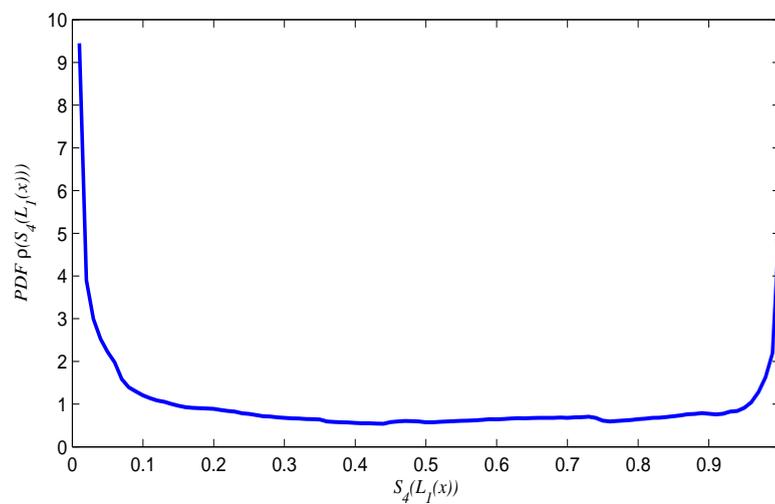
(d)



(e)

Bukin's function f_4

FIGURE 4.5: La transformation S .FIGURE 4.6: Densité de probabilité de $S(L_1)$.FIGURE 4.7: La densité de $S_1(L_1)$.

FIGURE 4.8: La densité de $S_2(L_1)$.FIGURE 4.9: La densité de $S_3(L_1)$.FIGURE 4.10: La densité de $S_4(L_1)$.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié deux axes majeurs en mathématiques.

Le premier axe est les systèmes dynamiques discrets et chaos. Ce fut le sujet des deux premiers chapitres.

Le deuxième axe est l'optimisation. Ce fut le sujet du troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est dédié aux applications des systèmes dynamiques à l'optimisation. Dans ce chapitre, nous avons exposé nos contributions à ce sujet.

Dans la première section, nous avons apporté des modifications sur une méthode d'optimisation chaotique dans le but d'améliorer les résultats de cette méthode. Deux modifications ont été introduites sur cette méthode, la première est au but d'éviter de tomber dans un piège des minima locaux, la deuxième est pour éviter la répétition dans les suites aléatoires. Bien sûr qu'après l'amélioration, la méthode a donné des résultats beaucoup mieux que l'ancienne méthode.

De nombreux chercheurs utilisent les applications chaotiques (l'application de Gauss, l'application de Lozi, l'application de Hénon, ...ect) pour générer des nombres aléatoires à utiliser dans les algorithmes d'optimisation. L'inconvénient de cette méthode est que si la densité de séquences chaotiques générées par l'application sélectionnée n'est pas élevée au voisinage du point optimal global, il est fort probable que nous ne retrouverons pas ce point (ou nous ne l'approchons pas bien). Ce problème est le sujet de la deuxième section présentée dans cette thèse. L'idée principale de cet article est au lieu de changer l'application utilisée dans l'algorithme d'optimisation, nous choisissons une application qui présente un bon comportement chaotique, puis nous utilisons certaines transformations pour modifier la densité de cette application. Après cela, pour toute fonction de test, nous utilisons la transformation qui donne les meilleurs résultats.

Bibliographie

- [1] S.H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley Pub, 1994.
- [2] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130–141.
- [3] D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, *Commun. math. Phys.* 20 (1971) 167–192.
- [4] R.M. May, Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics, *Nature*. 261(1976) 459–467.
- [5] M.J. Feigenbaum, The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, *Journal of Statistical Physics*. 21(1979) 669–706.
- [6] A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 1980.
- [7] J. Rinzel and G.B. Ermentrout, Analysis of neural excitability and oscillations, *Neural Science Mathematics*. (1989) 135–169.
- [8] A. Libchaber, C. Laroche and S. Fauve, Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement, *J. Physique Lett.* 43(1982) 211–216.
- [9] P. Linsay, Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Phys. Rev. Lett.* 47(1981) 1949–1352.
- [10] F.C. Moon and G.X. Li, Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential, *Phys. Rev. Lett.* 55(1985) 1439–1442.
- [11] S.H. Strogatz, C.M. Marcus, R.M. Westervelt, and R.E. Mirollo, Collective dynamics of coupled oscillators with random pinning, *Physica D*. 36(1989) 23–50.
- [12] W. Tucker, L. Kocarev, Z. Galias, S. Lian, *Intelligent Computing Based on Chaos*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

- [13] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*. In Addison-wisley, Redwood City, CA 37, 2003.
- [14] I. Gumowski and C. Mira, *Recurrences and discrete dynamic systems*. Springer- verlag, 1980.
- [15] O. Galor, *Discrete dynamical systems and chaos*. Longman Scientific, 1992.
- [16] M. Martelli, *Discrete Dynamical Systems*. Springer, 2007.
- [17] R. Abraham, L. Gardini and C. Mira, *Chaos in discrete dynamical systems*. Springer, 1997.
- [18] J.L. Pac, *Systèmes dynamiques : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2016.
- [19] H. Dang-Vu and C. Delcarte, *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Ellipses, 2000.
- [20] M. Viana, *Lectures on Lyapunov exponents*. Cambridge Univ. Press, 2014.
- [21] M. Barnsley, *Fractals everywhere*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [22] D. Stauffer, H.E. Stanley and A. Lesne, *From Newton to Mandelbrot : A Primer in theoretical physics*. Springer, 2017.
- [23] E.K.P. Chong, S.H. Zak, *An Introduction to Optimization*. Wiley, 2001.
- [24] S.S. Rao, *Engineering Optimization Theory and Practice*. Wiley, 2009.
- [25] T. El-Ghazali, *Metaheuristics : from design to implementation*. Wiley, 2009.
- [26] K.F. Doerner, M. Gendreau, P. Greistorfer, W. Gutjahr, R.F. Hartl, M. Reimann, *Metaheuristics : Progress in Complex Systems Optimization*. Springer, 2007.
- [27] T. Ibaraki, K. Nonobe, M. Yagiura, *Metaheuristics : Progress as Real Problem Solvers*. Springer, 2005.
- [28] J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, E. Taillard, *Metaheuristics for Hard Optimization : Methods and Case Studies*. Springer, 2005.
- [29] M. Clerc, *Particle swarm optimization*. ISTE, 2006.
- [30] A. Lazinica, *Particle swarm optimization*. InTech, 2009.

- [31] K.E. Parsopoulos, M.N. Vrahatis, *Particle Swarm Optimization and Intelligence : Advances and Applications*. Information Science Publishing, 2010.
- [32] D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional, 1989.
- [33] R. Chibante, *Simulated Annealing, Theory with Applications*. Springer Netherlands, 1987.
- [34] E. Bonabeau, M. Dorigo and G. Theraulaz, *Intelligence : from Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, New York, 1999.
- [35] T. Yien Li and J.A. Yorke, Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly*. 82 (1975) 985–992.
- [36] D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, *Commun. math. Phys.* 20(1971) 167–192.
- [37] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Cambridge Philos.Soc.* 42(1946) 15–23.
- [38] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke and J. A. Yorke, The Liapunov Dimension of Strange Attractors, *J. Diff. Eq.* 49(1983) 185–207.
- [39] J. Kennedy and R. Eberhart, Particle Swarm Optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. IV(1995) 1942–1948.
- [40] J.H. Holland, Outline for a logical theory of adaptive systems, *Journal of the ACM*. 3(1962) 297–314.
- [41] D.T. Pham, E. Koc, A. Ghanbarzadeh, S. Otri, S. Rahim, M. Zaidi, The Bees Algorithm—a novel tool for complex optimisation problems, *Proceedings of the Second International Virtual Conference on Intelligent Production Machines and Systems*. (2006) 454–461.
- [42] D.T. Pham, M. Castellani, The Bees Algorithm : modelling foraging behaviour to solve continuous optimization problems, *Proceeding of Institute Mechanical Engineering, C : Journal of Mechanical Engineering and Science*. 223(2009) 2919–2938.
- [43] G.Q. Zhong, F. Ayrom, Experimental confirmation of chaos from Chua’s circuit, *International Journal of Circuit Theory and Applications*. (1985)vol.13, no.1, 93-98.

- [44] L. Illing, Digital communication using chaos and non linear dynamics, *Non-linear Anal.* 71(2009) 2958-2964.
- [45] G.I. Bischi, L. Gardini, M. Kopel, Analysis of global bifurcations in a market share attraction model, *J. Econ. Dyn. Control* 24(5), (2000) 855-879.
- [46] H.N. Agiza, A.S. Hegazi, A.A. Elsadany, The dynamics of Bowley's model with boundedInternational Journal of Circuit Theory and Applications. 13(1) (1985) 93-98.
- [47] Q. Lin, K.W. Wong, J. Chen, An enhanced variable-length arithmetic coding and encryption scheme using chaotic maps, *J. Syst. Softw.* 86 (2013) 1384-1389.
- [48] Z. Povalej, Quasi-Newton's method for multi objective optimization, *J. Comput. Appl. Math.* 255 (2014) 765-777.
- [49] J. Liu, S. J. Li, New hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization, *Appl. Math. Comput.* 245 (2014) 36-43.
- [50] T.W.C. Chen, V. S. Vassiliadis, Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/ modified barrier method with the use of exact Hessians, *Comput. Chem. Eng.* 27(4) (2003) 501-525.
- [51] E. Canale, F. Robledo, P. Romero, P. Sartor, Monte Carlo methods in diameter-constrained reliability, *Opt. Switch. Netw.* 14(2)(2014) 134-148.
- [52] J. A.T. Machado, Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms, *Nonlinear Dyn.* 62(12)(2010) 447-452.
- [53] D. Bunnag, M. Sun, Genetic algorithm for constrained global optimization in continuous variables, *Appl. Math. Comput.* 171(1)(2005) 604-636.
- [54] R. Bououden, M-S. Abdelouahab, *On Efficient Chaotic Optimization Algorithm Based on Partition of Data Set in Global Research Step.* *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 18 (1) (2018) 42-52.
- [55] L. Chen, K. Aihara, Optimization by chaotic simulated annealing, *Proceedings of International Conference of Sino-Japanese Young Scientist.* 3 (1995) 57-59.
- [56] Y. Hu, Y.C. Li, J.X. Yu, H.D. Chao, Steeped-up chaos optimization algorithm and its application, *J. System Eng.* 17 (1) (2002) 41-44.

- [57] V.T. Jovanovic, Chaotic descent method and fractal conjecture, *Internat. J. Numer. Methods Eng.* 48 (2000) 137-152.
- [58] B. Li, W.S. Jiang, Optimizing complex function by chaos search, *Cybernetics and Systems* 29 (4) (1998) 409-419.
- [59] L. S. Coelho, "Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach", *Chaos, Solitons and Fractals.* 39 (2009) 1504-1514.
- [60] B. Li, W.S. Jiang, Chaos optimization method and its application, *Journal of Control Theory and Application* 14 (4) (1997) 613-615.
- [61] C. Choi, J.J. Lee, Chaotic local search algorithm, *Artificial Life and Robotics* 2 (1) (1998) 41-47.
- [62] C. Zhang, L. Xu, H. Shao, Chaos optimization algorithm based on linear search and its application to nonlinear constraint optimization problems, *Chinese Journal of Control and Decision* 16 (1) (2001) 123-128.
- [63] M.L. Hung, J.S. Lin, J.J. Yan, T.L. Liao, Optimal PID control design for synchronization of delayed discrete chaotic systems. *Chaos, Solitons Fractals.* 35(4) (2008) 781-5.
- [64] H. Pan, L. Wang, B. Liu, Chaotic annealing with hypothesis test for function optimization in noisy environments. *Chaos, Solitons Fractals* 35(5) (2008) 888-894.
- [65] D. Yang, Z Liu, J Zhou, Chaos optimization algorithms based on chaotic maps with different probability distribution and search speed for global optimization, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19 (2014) 1229–1246
- [66] R. Lozi, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *Journal de Physique. Colloque C5, Supplément au* 8(39) (1978) 9-10.
- [67] T. Hamaizia, R. Lozi, N. Hamri, Fast chaotic optimization algorithm based on locally averaged strategy and multifold chaotic attractor, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012) 188–196.

ملخص

تركز هذه الأطروحة على الأنظمة الديناميكية الفوضوية المنفصلة. توجد في هذه الأطروحة دراسة تفصيلية حول مفاهيم الأنظمة الديناميكية المنفصلة مثل مفهوم الاستقرار والتشعب والفوضى. في هذه الأطروحة هناك أيضا مقدمة موجزة لأساليب التحسين.

بالإضافة إلى ذلك، يتم تطوير بعض أنواع تطبيقات الفوضى للتحسين مثل خوارزمية التحسين الفوضوي على أساس تقسيم مجموعة البيانات في خطوة البحث الكلية و خوارزمية التحسين العشوائية على أساس كثافة الاحتمال المعدلة لتطبيق لوزي. تستخدم الدراسة العددية للتحقق من صحة النتائج المقترحة.

الكلمات المفتاحية: خوارزمية التحسين الفوضوي، كثافة الاحتمال، التشعب، حل دوري، فوضى، تطبيق لوزي.

Résumé

Cette thèse porte sur les systèmes dynamiques discrets chaotiques. Une étude détaillée sur les notions des systèmes dynamiques discrets tels que la notion de stabilité, bifurcations et chaos sont disponible dans cette thèse. Dans cette thèse il y a aussi une brève introduction aux méthodes d'optimisation.

En outre, quelque types d'application du chaos à l'optimisation sont développés telles que algorithme d'optimisation chaotique basé sur la partition de l'ensemble de données dans l'étape de recherche globale et algorithme d'optimisation chaotique basé sur la densité de probabilité modifiée de l'application de Lozi. Les simulations numériques sont utilisées pour valider les résultats proposés.

Mots clés : Algorithme d'optimisation chaotique, Densité de probabilité, Bifurcation, Orbite périodique, Chaos, Application de Lozi.

Abstract

This thesis focuses on chaotic discrete dynamical systems. A detailed study on the notions of discrete dynamical systems such as the notion of stability, bifurcations and chaos are available in this thesis. In this thesis there is also a brief introduction to optimization methods.

In addition, some types of chaos application to optimization are developed such as on efficient chaotic optimization algorithm based on partition of data set in global research step and chaotic optimization algorithm based on the modified probability density function of Lozi map. Numerical simulations are used to validate the proposed results.

Keywords : Chaos optimization algorithm, Probability density function, Bifurcation, Periodic orbit, Chaos, Lozi map.