REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université **Frères Mentouri –Constantine-**
Faculté des **Sciences Exactes**
Département de **Mathématiques**

N° d'ordre :
N° de série :

THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

En **Mathématiques**

Option :

Mathématiques Appliquée

Présentée par : **KAARER INES**

Intitulée :

«APPLICATION DE LA SENTINELLE AU SYSTEME DYNAMIQUE DE LA DESERTIFICATION »

Soutenu publiquement en **10/12/2018** à l'Université Frères Mentouri devant le **jury** composé de :

Mr M.DENCHE	**PROF**	**Université Frères Mentouri**	**Président**
Mr A.AYADI	**PROF**	**Université d'Oum El Bouaghi**	**Rapporteur**
Mr A.HMIDA	**PROF**	**Université Frères Mentouri**	**Examinateur**
Mr I.REZZOUG	**M.C.A**	**Université d'Oum El Bouaghi**	**Examinateur**
Mr K.BESSILA	**M.C.A**	**Université de Frères Mentouri**	**Examinateur**
Mr A.MERAD	**M.C.A**	**Université d'Oum El Bouaghi**	**Examinateur**

Remerciements

Merci au dieu.
Je voudrais commencer par remercier mon directeur de thèse Abdelhamid Ayadi d'avoir Accepté l'encadrement de ma thèse. Je le remercie pour son soutien constant et pour le temps qu'il m'a dédié à moi tout au long de ces années. Il a été pour moi un exemple à suivre de persévérance et de passion pour la recherche et pour les mathématiques.
Je remercie le professeur Mohamed Deneche d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.
Je remercie chaleureusement les professeurs ; Imed REZZOUG,Ahcen.Merad, bessila Khaled et Ali Hmida me faire l'honneur d'être membres de mon jury.
Je remercie ma collègue Amel Berhail Pour ces interventions, sa contribution et ses encouragements durant la préparation de cette thèse, ainsi je remercie tous les collègues du laboratoire des systèmes dynamique à l'université El Arbi ben Mhidi d'Oum el Bouaghi avec qui j'ai eu l'opportunité de partager ces années.

Je remercie tous les employeurs de l'université Frères Montouri De Constantine en particuliers Madame Soumia benaraba, Souhaila,souad et tout les administratifs.

Je remercie tous mes amis et mes collègues qui m'ont encouragé et m'ont donné l'envie de terminer ce travail surtous Imed rezzoug et A mel berhail pour la 2eme fois.

Mes derniers remerciements sont adressés à ma famille : ma mère ,mon père, mon mari ; ma sœur, mes frères et ma bèlle sœur Rima pour leur soutien constant et inconditionnel.

Title of the thesis: Application of the sentinel to the desertification dynamics system

Abstrat

This work is devoted to find, among all the bounded operators B, the one which gives a maximal controllability, in the sense that the operator image Hu=∫S(T-s)Bu(s)ds is maximal in the state space, following the inclusion order relation, where S is a semi-group defined on the state space of a parabolic system. The proposed method is based on the construction of the order relation, in the space of classes of bounded operators, from the inclusion order relation and also on the application of Zorn's lemma. On the other hand, new actuators that allow us to simplify the conditions of the weak controllability of Al Jai have been choosen. The developping idea consists in a reduction of conditions introduced by Al Jai in such a way that weak controlability properties are reserved**.**

Keywords: Controlability, System theory, Graph theory, Set theory, Parabolic problem, Captor and actuators, Optimal control, Weakly controllability.

AMS: 80A22, 35R35, 49J20, 65M32.

Titre: ***APPLICATION DE LA SENTINELLE AU SYSTEME DYNAMIQUE DE LA DESERTIFICATION***

Résumé

Ce travail consiste à trouver, parmi tous les opérateurs bornés B, celui qui donne une contrôlabilité maximale, dans le sens que l'opérateur Hu = ∫S (Ts) Bu (s) ds soit maximal dans l'espace d'état suivant la relation d'ordre d'inclusion, où S est un semi-groupe défini sur l'espace d'état d'un système parabolique. La méthode proposée est basée sur la construction de la relation d'ordre, dans l'espace des classes d'opérateurs bornés, à partir de la relation d'ordre d'inclusion et aussi sur l'application du lemme de Zorn. D'autre part, de nouveaux actionneurs qui permettent à simplifier les conditions de la contrôlabilité faible d'Al Jai ont été choisis. L'idée principale consiste à réduire les conditions introduites par Al Jai de telle sorte que les propriétés de contrôlabilité faibles soient réservées.

Mots-clés: Contrôlabilité, , Théorie des systèmes , Théorie des graphes, Théorie des ensembles, Problèmes paraboliques, Capteurs et actionneurs, Contrôle optimal, Contrôlabilité faible.

AMS: 80A22, 35R35, 49J20, 65M32.

عنوان الاطروحة: تطبيق الحراس على نظام ديناميكي للتصحر

مــــلــــخــــص

في هذا العمل تم ايجاد من بين المؤثرات المحدودة B, مؤثرا يعطي تحكما أعظميا بحيث أن المؤثر $Hu=\int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$ يكون أعظميا في فضاء الشروط بحسب علاقة الترتيب الاحتواء, حيث s زمرة جزئية معرفة على فضاء الشروط لجملة قطع مكافئ الطريقة المقترحة ترتكز على انشاء علاقة ترتيب في فضاء صنف المؤثرات المحدودة انطلاقا من علاقة الاحتواء و ايضا تطبيق توطئة زورن.

من جهة أخرى تم انشاء محركات جديدة تسمح بتخفيف شروط التحكم الضعيف المقدمة من طرف El jai الفكرة الرئيسية ترتكز على تخفيض شروط El jai مع ضمان الحفاظ على خواص التحكم الضعيف

الكلمات المفتاحية: التحكم, نظرية النظم, نظرية البيان, نظرية المجموعات, نظرية التحكم الأمثل, مسألة القطع المكافئ, الآسر والمشغلات, السيطرة ضعيفة.

Table des matières

Notations générales

1- Opérateurs linéaires
$D(A)$ **:** domaine de A.
$Im(A)$ **:** image de A.
$Ker(A)$ **:** noyau de A.
A^* **:** adjoint de A.
A^T **:** transposé de A.
$\langle .,.\rangle$ **:** produit scalaire dans la dualité.
2-Ensembles
$\bar{A}$ **:** adhérence de A.
$A^{\perp}$ **:** orthogonal de A.
$\rho(A)$: l'ensemble résolvante de A.
Rey **:** partie réelle de y.
Ω **:** ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière.
$\partial\Omega = \Gamma$ **:** frontière de Ω (de classe C_1 par morceaux).
Γ_i :une partie de la frontière, $i = 0, ...n$.
ω **:** un sous domaine non vide de Ω.
supp(g) **:** support de la fonction g.
Q **:** le cylindre de $\Omega\times]0, T[$, T fini.
Σ **:** la frontière latérale.
O : observatoire.
3- Fonctions
Δ **:** laplacien de f, $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}$.
γ_0 : fonction de trace.
$\frac{\partial f}{\partial v}$ **:** dérivé normale extérieure de f.
δ_b **:** la masse de dirac au point b.

4- Espaces fonctionnels
$L(V,E)$ **:** espace des applications linéaires continues de V dans$E$ muni de la norme :
$\|A\| = \sup\limits_{x\in V,\ \|x\|\leq 1} \|Ax\|_E$., $L(E) = L(E,E)$
$E^* = L(E)$ **:** dual topologique de E.
$L^r(0,T,E)$ **:** espace des fonctions intégrables $f :]0,T[\to E$ tel que $t \to |f(t)|^r$ est intégrable sur $]0,T[$.
$L^2(\Omega)$ **:** espace des fonctions de carré intégrable sur Ω, muni de la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u|^2 d_x\right]^{\frac{1}{2}}$.
$L^2(0,T,E) = \left\{u \text{ mesurable de }]0,T[\to x \text{ tel que } \int_0^T \|u\|_E^2 dx < \infty\right\}$,muni de la norme

$$\|u\|_{L^2_{(0,T;E)}} \left[\int_0^T \|u\|_E^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ 1 \leq i \leq n\right\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{H^1_{(\Omega)}} = \left[\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$H_0^1(\Omega)$ **:** est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ où $D(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supportcompact contenu dans Ω.
$H^{-1}(\Omega)$ **:** dual de $H_0^1(\Omega)$.
$W(0,T) = \left\{f \diagup f \in L^2(0,T;E),\ \frac{df}{dt} \in L^2(0,T;E^*)\right\}$, muni de la norme

$$\|f\|_{W(0,T)} = \left[\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \int_0^T \left\|\frac{df}{dt}\right\|_{E^*}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

où E est un espace de Hilbert et E*son dual.
5-Symboles
U **:** espace de contrôle.
$\tau\hat{y}_0$: terme manquan
$\lambda\hat{\xi}$: terme de pollution

0.1 Introduction

Les questions relatives à l'écologie, à l'environnement et au climat sont aujourd'hui au centre des préoccupations de bon nombre des scientifiques, des citoyens, des parties politiques, des entreprises et des états. Il est bien connu que l'air et l'eau constituent de véritables sources de la vie de la flore, de la faune et de l'homme. Ainsi, dés lors que leurs natures sont corrompues par des attaques environnements, ils deviennent des dangers pour les êtres vivants. Il peut s'agir notamment de troubles végétatifs pour la flore et d'intoxication voire des cas de maladies pour l'homme. Les scientifiques s'activent à déterminer les meilleurs palliatifs pour la protection et l'assainissement des dites ressources naturelles. Ils ne sauraient, en conséquence, réussir leur pari sans une coopération interdisciplinaire.
La modélisation de ces problèmes consiste à la possibilité de la compréhension du phénomène et de l'influence des différents paramètres, souvent, on cherche à étudier la possibilité d'agir sur un système afin qu'il fonctionne dans un but désiré.
Cette théorie a vue le jour dans les années 50, principalement mise au point par Bellman, Bertran et Kalman suivis par les travaux de Butkovskii. Donc, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine d'aéronautique et de la dynamique de vol.
L'objectif général de la théorie de la commande optimal [38, 40, 44, 49, 52] est d'améliorer le fonctionnement des systèmes de commande, c'est-à-dire d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques ou plus rapides, par exemple, pour un système biologique, le but du système de commande peut être de réduire la doleur et de prolonger la vie, c'est-à-dire on étudie un régulateur de pression sanguine destiné à maintenir cette pression à un niveau constant et convenable, on peut aussi contrôler une épidémie comme l'étude de la thérapie des tumeurs au cerveau ou réaliser une opération chirugicale au laser.

Si les systèmes distribués que nous allons considérer sont à données incomplète par exemple dans les problèmes de météorologie et d'océanographie, les conditions initiales ne sont pas complètement connues. (Noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilités quant au choix de l'instant initial). Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire,..., etc. Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues, ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière, qui peut, par exemple être inaccessible aux mesures, qu'il s'agisse de situations biomédicales ou de situations correspondant à des accidents.

Jaque- louis Lions [39] a développé une nouvelle méthode dite "méthode des sentinelles" pour résoudre ce jeur de problèmes, elle permet de donner des informations sur un terme cherché indépendamment des variations d'autres termes en passant par un problème de type contrôlabilité. De nombreux chercheurs ont utilisé la méthode des sentinelles dans l'aspect théorique. Voir par exemple ; G. Massengo et O. Nacoulima [2, 5, 8, 10, 11, 15, 16]. Ainsi que pour des applications numériques [12,24, 25, 26, 27].
L'objectif de notre travail est l'etude de la contrôlabilité maximale d'un système parabolique et un nouveau choix d'actionneur pour confirmer la contrôlabilité faible . Alors, ce travail est organisé de la façon suivante :
Dans le premier chapitre, nous donnons quelques rappels et notions sur les principes généraux de la theorie de semi-groups, prôblème d'évolution, ...), puis, nous donnons quelques

définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des contrôle classique : les notions de contrôlabilité, observabilité et contrôle optimal avec quelques théorèmes nécessaires au dimension fini.
Dans le deuxième chapitre, on introduit la problèmatique des systèmes controlé, contrôlabilité et observabilité des systèmes évolutifs
Le chapitre 3, est basée sur la présentation de la théorie des sentinelles des systèmes distribuées à données manquantes où notre objective est l'estimation des " *termes de pollution*".
Dans **le chapitre 4,**nous donnons la définition de la Contrôlabilité maximale d'un système parabolique, de plus,. nous présentons un nouveau choix d'actionnneur pour confirmer la contrôlabilite faible d'un système distribué..

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS PRELIMINAIRES

1.1 Rappel sur la théorie de semi-groupes

Soit E un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \to \|x\|_E$, on désigne par $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E en lui même ; $L(E)$ est un espace de Banach pour la norme $S \to \|S\|$définie par :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Sx\|_E = \sup \frac{\|Sx\|_E}{\|x\|_E}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1 : *Soit E un espace de Hilbert, une famille d'opérateurs linéaires bornés $S(t) : E \to E$ dépendants de paramètre $t \geq 0$, forment un semi-groupe si*

$$i)\ S(0) = I_E.$$
$$ii)\ S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2) \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

Définition 1.2 : *Le semi-groupe $S(t)$ est dit fortement continue à l'origine ou de classe C_0 si :*

$$iii)\forall x \in E,\ \|S(t)x - x\|_E \underset{t\to 0^+}{\to} 0. \tag{1.2}$$

Définition 1.3 : *la famille $\{S(t)\}_{t\in R}$ constitue un groupe de classe C_0, si (i) et (ii) ont lieu avec t_1 et t_2 de signe quelconque.*
Lemme 1.1[6] (de la croissance expontielle du semi-groupe) : *Soit $S(t)$ un semi-groupe fortement continue, alors*

$$\exists M \geq 1 \text{ et } w \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M \exp(w\ t) \quad \forall t \geq 0 . \tag{1.3}$$

Définition 1.4 : *Si $\forall t \geq 0$ où $\|S(t)\| \leq M$ le semi-groupe $S(t)$ est dit borné si $M = 1$ le semi-groupe $S(t)$ est dit semi-groupe de contraction.*

Définition 1.5 : *On appelle générateur infinitisimal de $S(t)$ l'opèrateur A défini par*

$$\begin{aligned} Ax &= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{S(h)x-x}{h}, \forall x \in D(A) \\ \text{tel que } D(A) &= \left\{ x \in E \text{ tel que } \lim_{h\to 0^+} \tfrac{S(h)x-x}{h} \text{ existe} \right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Proposition 1.1 [6] On a

$$\forall x \in D(A), \; S(t)x \in D(A)$$

et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Proposition 1.2 [6] *$D(A)$ un sous espace vectoriel dense dans E c'est-à-dire $\overline{D(A)} = E$.*
Remarque 1.2 : *On a*

$$A \int_0^t S(\sigma)\, x d\sigma = \int_0^t S(\sigma)\, Axd\sigma . \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.1(de Hille Yosida)[6] : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine $D(A)$ dense dans E soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 qu'il existe deux nombres réels M et w tel que si*

$$\lambda \in C : \{Re\lambda > w\} \subset \rho(A)$$

et

$$\left\| (\lambda I - A)^{-n} \right\| < \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose $A_\lambda x = \lambda AR(\lambda, A)(x)$. Pour démontrer ce théorème on a besoin les deux lemmes suivants :
Lemme 1.2[6] On a

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A).$$

Lemme 1.3[6] *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés $A \subset B$ et*

$$\rho(A) \cap \rho(B) = \Phi$$

alors

$$A = B.$$

Exemple 1 :
Soit $E = L^2(\mathbb{R}^n)$ et Soit Δ l'opérateur de Laplace de domaine

$$D(\Delta) = \left\{ V : V \in L^2(\mathbb{R}^n), \; \Delta V \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

alors Δ est le générateur infenitisimal d'un semi groupe de contraction de classe C_0 dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(\Delta)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et Δ est fermé.

1.2 Problème d'évolution

Soit V et E deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On désigne par $|.|$ (resp $\|.\|$) la norme dans (E resp V) et par$(.,.)$ (resp $((.,.))$) les produits scalaires correspondants.On suppose que

$$\begin{cases} V \subset E \text{ l'injection de } V \text{ dans } E \text{ est continue} \\ \text{et } V \text{ est dense dans } E. \end{cases}$$

On identifie à E son dual alors :

$$V \subset E \simeq E^{*} \subset V'.$$

C'est-à-dire chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue. On considère la forme bilinéaire

$$\varphi, \psi \rightarrow a(\varphi, \psi) \text{ défini sur } V \times V$$

tel que

$$\begin{aligned} 1)\ \exists c &> 0,\ \forall \varphi, \psi \in V : |a(\varphi, \psi)| < c\,\|\varphi\|_V\,\|\psi\|_V \\ 2) \exists \alpha &> 0,\ \forall \varphi \in V : |a(\varphi, \varphi)| \geq \alpha\,\|\varphi\|_V^2\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où c, α sont des constantes.
D'après le théorème de représentation de Riez, on peut écrire

$$a(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi)_{V \times V'}\,,\ A \in L(V, V')$$

Exemple 2 :
On considère maintenant le problème d'évolution parabolique. Trouver $y \in W(0,T)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \quad \text{dans }]0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

où f donnée dans $L^2\left(0,T;V'\right)$ et y_0 donnée dans E.
Théorème 1.2[45]
Si l'on suppose que (1) et (2) de (1.5) ont lieu, le problème (1.6) admet une solution unique dans $W(0,T)$ *,en plus l'application*

$$(f, y_0) \rightarrow y$$

est continue de $L^2(0,T;V') \times E$. $[45]$.
Lemme 1.4[45]
Toute fonction $y \in W(0,T)$ *est après motification éventuelle sur un ensemble de mesure nule, continue de* $[0,T]$ *dans* V*, de plus on a* $W(0,T) \subset C([0,T];E)$ *où* $C([0,T];E)$ *est l'espace des fonctions continues de* $[0,T]$ *dans* E.
Théorème 1.3 (Régularité de la solution de (1.6))[50]
On suppose que (1), (2) de(1.5) ont lieu et que $f \in L^2(0,T;E)$, $y_0 \in D(A)$*, alors la solution de problème (1.6) qui était donnée par*
le théorème (1.2) vérifie en plus

$$\begin{aligned} y &\in C^0(0,T;D(A)) \\ y' &\in L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;E) \end{aligned}$$

Théorème 1.4[45]
Les hypothèses étant celles du théorème (1.2), on suppose que
1)- la forme bilinéaire a $(.,.)$ est symétrique.
2)-L'injection canonique de V dans E est compact.
3)- $f \in L^2(0,T;E)$, $y_0 \in V$.
Alors la solution du problème (1.6) qui etait donnée par le théorème (1.2) vérifie aussi :

$$\begin{aligned} y &\in L^2(0,T;D(A)) \cap C^0(0,T;V) \\ y' &\in L^2(0,T;E). \end{aligned}$$

Remarques :
1)- Comme $W(0,T) \subset C^0([0,T];E)$ l'espace des fonctions continue de $[0,T]$ dans E, alors la condition y_0 a un sens. Pour y_0 donnée dans E, le problème *(1.6)* admet une solution faible unique donnée par

$$y(t) = S(t)\, y_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds$$

où $S(t)_{t\geq 0}$ est le semi groupe engendré par l'opérateur A défini sur E.
2)-Soit A^* l'adjoint de A le problème

$$\begin{cases} p \in W(0,T) \\ -\frac{dp}{dt} + A^* p = f \qquad \text{dans } [0,T] \\ p(T) \in E, f \in L^2\left(0,T;V'\right). \end{cases}$$

a une solution unique.
3)- L'adjoint A^* de A engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$l'adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual E^* de E et si $D(A)$ est dense dans E alors $D(A^*)$ est
dense dans E^*.
4)- On fait les hypothèses (1), (3) du théorème (1.4) alors il existe un système orthonormé de vecteurs propres (φ_n) de A associés aux valeurs propres $\lambda_{n,}$ alors le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$engendré par A s'exprime, pour tout y_0 de E, par :

$$S(t)y_0 = \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle y_0, \varphi_n \rangle \varphi_{n.}$$

Si y est une solution du problème (*1.6)*, elle est donnée par

$$y(t) = \sum_{i\geq 1} \left\{ (y_0, \varphi_i) \exp(-\lambda_i t) + \int_0^t (f(s), \varphi_i) \exp(-\lambda_i (t-s)) ds \right\} \varphi_i.$$

Application :
Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et Γ la frontière de Ω assez régulière on pose :

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times]0,T[\\ \Sigma &= \Gamma \times]0,T[\end{aligned}$$

On prend

$$\begin{cases} V \text{ un sous espace fermé de } H^1(\Omega) \text{ avec } H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega) \\ E = L^2(\Omega), \end{cases}$$

on se donne ensuite des fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $\forall i,j = 1,2,...n$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j = 1,2,...n, \\ \exists \alpha > 0, \ \forall e \in \mathbb{R}^n, \ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i e_j \geq \alpha |e|^2 \text{ p.p dans } \Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

et on pose :

$$\begin{aligned} \forall \varphi, \psi &\in V \\ a(\varphi, \psi) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0(x) \varphi \psi dx \end{aligned}$$

la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue d'après Cauchy Schawartz et la définition de la norme de $H^1(\Omega)$, et d'après l'hypothèse (1.7) $a(.,.)$ est symétrique et coersive, alors étant donné des fonctions

$$y_0 \in L^2(\Omega) \text{ et } f \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right),$$

il existe une fonction

$$y \in L^2(0,T;V) \cap C^0\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$

unique solution de

$$\begin{cases} \forall v \in V : \frac{d}{dt}(y(t),v) + a(y(t),v) = (f(t),v) \text{ dans } Q \\ y(0) = y_0 \text{ sur } \Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f & \text{dans } Q \\ y(0) = y_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

où A est l'opérateur diffirentiel elliptique du second ordre donné par

$$A = a_0 - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

en effet, si $v \in V$ on déduit de *(1.8)* et *(1.9)*

$$\frac{d}{dt}(y(t),v) - a(y(t),v) = \int_\Omega \left(\frac{dy}{dt} - Ay\right)(t)\, v dx$$

donc

$$\forall v \in V : a(y(t),v) = \int_\Omega Ay(t)\, v dx$$

en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(t)\, v d\Gamma = 0$$

où

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} V_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et $d\Gamma$ la mesure superficielle sur Γ, alors le problème *(1.8)* équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f & \text{dans } Q \\ y(0) = y_0 & \text{sur } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Considérons trois choix classiques d'espace V.

Problème de Cauchy-Dirichlet[45]

On choisit $V = H_0^1(\Omega)$, donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = Ay + f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

Problème de Cauchy-Neuman[45]

On choisit $V = H^1(\Omega)$, donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = Ay + f & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Et comme $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ compacte, alors pour $y \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ on a d'après le théorème (1.4)

$$y \in L^2(0, T; D(A)) \cap C^0\left(0, T; H^1(\Omega)\right).$$

Problème de Cauchy-Neumann-Dirichlet[45]

Soit Γ_0, Γ_1 une partition de Γ avec mesure $\Gamma_0 > 0$, on choisit

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) \ \text{ tel que } v_{\diagup \Gamma_0} = 0\right\},$$

donc il existe une fonction unique

$$y \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = Ay + f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0,T[\\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0,T[\\ y(.,0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Cas particulier

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

on trouve

$$a(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx,$$

qui donne l'opérateur différentiel elliptique de second ordre $A = -\Delta$, alors il existe une solution unique y telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

et d'après la remarque précédente :

$$y(t) = \sum_{i \geq 1} \left[(y_0, \varphi_i) \exp(-\lambda_i t) + \int_0^t (f(s), \varphi_i) \exp(-\lambda_i (t-s)) ds \right] \varphi_i,$$

où $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ sont les valeurs propres de $-\Delta$ (avec condition de dirichlet) et $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ sont les fonctions propres associées et $S(t)$ pour $t \in]0,T[$, est le semi-groupe défini par :

$$\begin{aligned} S(t) : L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ y_0 &\longmapsto S(t)y_0 = \sum_{i \geq 1} (y_0, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} \exp(-\lambda_i t) \varphi_i, \end{aligned}$$

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t (S(t-s)) f(s) ds.$$

Formule de Green[52]
La Formule de Green s'écrit

$$\int_\Omega (A\psi) \varphi dx - \int_\Omega \psi (A^* \varphi) dx = \int_\Omega \left(\varphi \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \nu_A} - \psi \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \nu_{A^*}} \right) d\xi$$

pour

$$\psi, \ \varphi \in W(0,T) = \left\{ f \in L^2(0,T;E), \ f \in L^2(0,T;E^*) \right\},$$

où E est un espace de Hilbert avec le produit scalaire est noté par $\langle .,. \rangle$ et E^* sont dual, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$|\langle \varphi(t), \psi(t) \rangle|_0^T = \int_0^T [\langle \varphi'(t), \psi(t) \rangle + \langle \varphi(t), \psi'(t) \rangle] dt.$$

1.3 Contrôlabilité et Observabilité

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Dans ce chapitre, on va donner quelques notions liée a la théorie du contrôle : la contrôlabilité, l'observabilité, contrôle optimal...etc pour expliquer et motiver cette théorie, nous allons commencé par quelques exemples.

1.4 Quelques exemples

Dans cette section, nous donnons quelques exemples typiques de la théorie du contrôle d'importance pratiques ou théoriques.

1.4.1 Contrôle d'un ressort

Considérons une masse ponctuelle m, se déplacer le long d'un axe (Ox), attachée à un ressort [40] ..La masse ponctuelle est alors attirée vers l'origine par une force que l'on suppose égale à : $-k_1(x-l)-k_2(x-l)^3$, où l est la longueur du ressort au repos et k_1, k_2 sont des coefficients de raideur. On applique à cette masse ponctuelle une force extérieure horizontale $u(t)\overrightarrow{i}$. Les lois de la physique nous donnent l'équation du mouvement

$$mx''(t) + k_1(x(t) - l) + k_2(x(t) - l)^3 = u(t).$$

De plus, on impose une contrainte à la force extérieure

$$|u(t)| \geqslant 1.$$

Cela signifie que on ne peut pas appliquer n'importe quelle force extérieure horizontale à la masse ponctuelle : le module de cette force est borné, ce qui traduit le fait que notre puissance d'action est limitée et rend ainsi compte des limitations techniques de l'expérience.
Problème de ressort :
Supposons que la position et la vitesse initiales de l'objet soient

$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0.$$

Le problème est d'amener la masse ponctuelle à la position d'équilibre $x = l$ en un temps minimal en contrôlant la force externe $u(t)$ appliquée à cet objet, et en tenant compte de la contrainte $|u(t)| \geqslant 1$.
La fonction u est appelée le contrôle. Des conditions initiales étant données, le but est donc de trouver une fonction $u(t)$ qui permet d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre en un temps minimal.
Problème mathématique :
Nous supposons que $m = 1kg$, $K_1 = 1N.m^{-1}$, $l = 0$ (on se ramène à $l = 0$ par translation)

dans la partie sur le contrôle linéaire nous supposerons que $k_2 = 0$. Dans l'espace des phases (x, x'), le système différentiel correspondant à l'équation du mouvement

$$\left\{\begin{array}{c} x'(t) = y(t), \\ \\ y'(t) = -x(t) - k_2 x(t)^3 + u(t), \\ \\ x(0) = x_0, x'(0) = y_0. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 x^3 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{c} X'(t) = AX(t) + f(X(t)) + Bu(t), \\ \\ X(0) = X_0 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

1.4.2 Stockage de l'eau dans un réservoir

On considère un réservoir. Le flotteur régule le niveau de l'eau. L'eau dans le réservoir est le système ; le Contrôle est la position du flotteur. L'état à chaque instant est un vecteur constitué par la hauteur de l'eau dans le réservoir $h(t)$, le débit d'entrée et le débit de sortie de l'eau.

1.5 Système contrôlé

Du point de vue mathématique, un système contrôlé est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle, habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} x'(t) = f(x(t), u(\cdot)), \\ \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, x(t) \in \mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

En général, le vecteur des états $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles U_{ad}, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans U de $\mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in U_{ad}$ le système (1.13) admet une unique solution $x(t)$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty[$. On notera cette solution par $y_f(t, y_0, u(\cdot))$. Le système (1.13) est dit en boucle ouverte est représenté par le diagramme suivant

$$u(input) \rightarrow \boxed{x' = f(x, u)} \rightarrow x(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail, les notions de la contôlabilité et l'observabilité. On se propose de définir ces notions et de rappeler les principaux résultats.

Soit $T > 0$, considérons un système différentiel linéaire défini sur $[0, T]$

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.14}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $x(t)$ est l'état du système et x_0 la condition initiale. La solution de (1.14) est données par :

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{1.15}$$

Dans le cas des systèmes linéaires gouverné par des EDPs, le système (1.14) est définit comme suit :
Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $T > 0$ fixé, on défini $Q = \Omega \times [0, T]$, $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(y, t) = Ax(y, t) + Bu(t) & Q, \\ x(\zeta, t) = 0 & \sum, \\ x(y, 0) = x_0 & \Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

où A et B sont des opérateurs de $L(\mathbb{R}^n, X = H^1(\Omega))$ et la fonction u dite "*contrôle*" appartient à l'espace $U = L^2(0, T, \mathbb{R}^n)$. Alors la solution de ce système dépend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t - s)Bu(s)ds.$$

Il faut noter que certains problèmes pratiques sont mieux modélisés par des équations aux dérivées partielles ou bien par des systémes à événements discrets.

1.6 Contrôlabilité

La contrôlabilité est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est-à-dire amener (en temps fini) un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle. Alors, cette

propriété donne la réponse au problème suivant : étant donnée un état initial imposé et un état final désiré, existe-il au moins une commande qui amène le sytème d'un état vers l'autre ? Plus précisément , on donne la définition suivante :
Définition 1. [40] On dira que le contrôle u transfère un état a à un état b au temps T > 0 si

$$x(T; a; u) = b$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de a au temps T.
Définition 2. [40] On dit que le système est contrôlable si pour tous les états$(x0; x1)$ dans l'espace d'état, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u \in U$ tel que : $x_1 = x(T; x_0; u())$.
Remarques :
1- Cette définition est traduit que le contrôle u conduit le système de l'état x_0 vers x_1 à l'instant T.
2- Dans le cas où $x_1 = 0$, on dit que le système est " nulle-contrôlable" ou on a une contrôlabilité à zéro.

1.6.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1.6.1 *[40]Le système linéaire (1.14) est contrôlable si et seulement si*

$$rang M = rang\,[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n \tag{1.17}$$

On dit alors que la paire (A, B) est contrôlable.

Preuve : L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

Lemme 1.6.1 *[40] La matrice M est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$H_t : \begin{cases} L^2(0, T, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \displaystyle\int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt \end{cases}$$

est surjective.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème. Si la matrice M est de rang n, alors d'après le lemme l'application H_t est surjective, i.e. $H_t(L^2) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout controle u, l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est donnee par

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t)dt,$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est $Acc(T, x_0) = \mathbb{R}^n$, ce qui montre que le système est contrôlable. Réciproquement si le système est contrôlable, au point x_0 l'ensemble accessible en temps T s'écrit :

$$Acc(T, x_0) = H_T(L^2),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela preuve que H_t est surjective, et donc, d'après le lemme, que la matrice M est de rang n.
Remarques :
1- La matrice M est appelée « Matrice de Kalman » et la condition est appelée « Condition de Kalman. »
2- Cette condition ne dépend ni de temps ni de la donnée initiale. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.
Exemple :
1-On considère un système dynamique décrit par :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

tel que les matrices A et B sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que ce système est contrôlable ?
Le système est contrôlable si la Matrice de contrôlabilité est de rang maximale, on a $detM = 1 \neq 0$ c'est à dire $rangM = 2$. Donc le système est contrôlable.
2-Le problème de ressort donné précédemment est contrôlable car :
On a

$$M = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

et $detM = -1 \neq 0$ c'est à dire $rangM = 2$.
On donne ci-aprés deux résultats permettant de donner une caractérisation de la contrôlabilité :

1.6.2 Caractérisation de la Contrôlabilité

La solution (1.15) peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$ sous la forme :

$$x(t, x_0, u(.)) = X_0 + H_t u,$$

où $H_t u$ est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$H_t : \begin{cases} L^2(0, T, U) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds \\ \end{cases}$$

et $X_0 = e^{tA}x_0$. Pour simplifier les calculs, prenons $X_0 = 0$

Proposition 1.6.1 *[22] Le système (1.13) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur H_T est surjectif i.e*

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U, x(x_0, u)(T) = x_1.$$

Démonstration : :
Soit $a, b \in R^n$ deux états quelconques. L'équation en u :

$$x(T, a, u) = b,$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$ si et seulement si l'équation :

$$H_T u = b - S(T)a,$$

a une solution dans $L^2(0, T; U)$. L'équivalence des deux équations entraine la proposition.

1.7 Observabilité

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x' = f(x, u), \\ \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1.19}$$

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant.

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x' = f(x, u) \\ y = h(x) \end{array}} \longrightarrow y$$

1.7.1 Observabilité d'un système linéaire

On considére un système linéaire donné comme suit :

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.20}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle , C est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'oservation. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ est le contrôle.

Définition 1.7.1 *[49] On dit que le système linéaire (1.20) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, T] \to U$ tel que la connaissance de $x(t)$ pour $t \in [0, T]$ permet de déterminer x_0.*

1.7.2 Critère d'observabilité de Kalman

Dans cette section, on va donner une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire

Théorème 1.7.1 *[40] Le système linéaire (1.20) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, C) est observable.

1.7.3 Dualité (Contrôlabilité, Observabilité)

Soit le système (S) :

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.21}$$

et le système adjoint (S*) :

$$\begin{cases} \varphi^{'} = -A^{*}\varphi, \\ \\ \varphi(T) = \varphi_0 \end{cases} \tag{1.22}$$

On a le résultat suivant :
i) Le système (S) est observable si et seulement si le système adjoint (S*) est contrôlable.
ii) Le système (S) est contrôlable si et seulement si le système adjoint (S*) est observable.

Remarque 1.7.1 *Le système (S) est observable si et seulement le système (S^*) est contrô-lable, c'est la dualité contrôlabilité /observabilité. Ce fait, trés important, permet de transférer au système observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés. On aurait pu prouver cette équivalence directement en utilisant l'application entré-sortie et en remarquant qu'une application linéaire est surjective si et seulement si l'application adjointe est injective.*

Avec la définition de l'opérateur H_t on considère l'adjoint

$$H_t^* : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^2(0, T, U) \\ z \to H_t^*(z) = B^* e^{(T-.)} z \\ \end{cases}$$

tel que

$$(H_t^*(z), u)_{L^2} = (z, H_t u)_{\mathbb{R}^n}, \forall u \in L^2(0, T; U), \forall z \in R^n$$

et on définit la matrice

$$\mathcal{C}_{\mathrm{T}} = H_t H_t^* = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds$$

tel que A^* et B^* désignent les matrices transposées des matrices A et B.
On a la caractérisation suivante :

Corollaire 1.7.1 *[40]Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *L'opérateur H_t est surjectif.*
3. *L'opérateur H_t^* est injectif.*
4. *L'opérateur $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}$ est inversible*

Remarque : L'opérateur H_t^* est injectif si

$$|\varphi^0|^2 \leq C \int_0^T |B^* \varphi(t)|^2 \, dt, \tag{1.23}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^n$ tel que B^* est l'adjoint de l'opérateur du contrôle B.
En d'autres termes, le problème de la controlabilité revient a répondre a la question suivante : " Pour $T > 0$ donnée, exist-il un constant $C > 0$ tel que la solution du système adjoint (S^*) vérifié l'inégalité ci-dessus pour tous $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$." Cette inégalité s'appelle "Inégalité d'observabilité".

1.8 Contrôle Optimal

On se donne à présent un système dont l'état est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = f(t, , u(t)) & t \in]0, +\infty[, \\ x(0) = x_0. & u \in U_{ad} \\ u \in U_{ad} \end{cases} \tag{1.24}$$

L'équation (1.24) a une solution supposée unique (cf Théorème de Cauchy-Lipschitz) notée $x[u, x_0](.)$. Désormais on fixe x_0. On se donne alors une fonctionnelle coût J (ou objectif), et on cherche une fonction de contrôle qui rend minimale cette fonctionnelle. On choisit J de la forme :

$$J(x, u) = \int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt,$$

et on cherche à résoudre : $(\mathcal{P}) \begin{cases} \min J(x, u) & x = x[u, x_0](.) \\ x = x[u, x_0](.) & \text{Equation d'état} \\ u \in U_{ad} \subset \mathcal{U} & \text{Contraintes sur le contrôle.} \end{cases}$ Deux questions se posent alors :

- Prouver l'existence d'un contrôle optimal
- Trouver un moyen de le calculer c'est à dire décrire une méthode constructive de calcul d'un contrôle. Pour cela, on va écrire des conditions d'optimalité.

Remarque : Dans le cas où la paire (A,B) est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de pouvoir en construire un qui "consomme le moins d'énergie". La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds.$$

On notera

$$U_{ad}(x_0, x_1) = \{u \in U, x(T, x_0, u) = x_1\}.$$

Le théorème suivant définit l'unique $u \in U_{ad}(x_0, x_1)$ qui minimise la fonctionnelle J.

Théorème [9] Le contrôle $u()$ qui transfère $x0$ en $x1 = x(T; x0; u(.))$ est simplement donné par :

$$u(s) = B^t \exp(T - s) A^t C_T^{-1} (x1 - \exp(TA) x_0).$$

Chapitre 2

CONTRÔLABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES EVOLUTIFS

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous donnons les principes généraux qui concernent l'analyse des systèmes distribués, plus précisément nous introduisons les notions d'exactes et de faibles controlabilités celle d'actionneur et d'actionneur stratégique en plus nous introduisons la contrôlabilité régionale des systèmes distribués.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ représentant le domaine géométrique du système (2.1)($n = 1, 2, 3$ pour les applications) et soit $T > 0$, on suppose que la frontière Γ est assez régulière.
On considère les systèmes décrits par l'équation différentelle opérationnelle

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y\left(t\right) = Ay\left(t\right) + Bu\left(t\right), \; 0 < t < T \\ \qquad\qquad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

La formulation (2.1) est choisie pour son utilisation directe pour l'automaticien et généralise ce que en dimension finie , on l'appelle de façon classique la représentation par vecteur d'état y. Mathématiquement cette formulation est assez générale et se prête mieux à certaines démonstrations et aux définitions des diverses notions liées à l'analyse des systèmes.
Dans tout ce travail, nous ramènerons systématiquement tous les systèmes étudiés à la formulation (2.1) ci-dessus. Nous allons rappeler diverses notions liées à l'analyse à travers le choix d'opération B c'est à dire encore à travers les divers types d'éxcitation aux quels peut être soumis le système, par exemple nous rappelons dans ce chapitre les excitations de type suivant :
-Zone : sur une partie de Ω ou de sa frontière. Ponctuelle, sur Ω ou sa frontière. Filament : dans Ω ou sa frontière.
Hypothèses :
$\mathbf{H_1}$) E, U sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace d'etat, de contrôle.

$\mathbf{H_2}$) $u \in L^2(0,T;U)$, $B \in L(U,E)$.
H_3) A est auto-adjoint à résolvante compacte, et engendre un semi-groupe fortement contenu $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E.
Sous les hypothèses ci-dessus, (2.1) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0,T]$ et donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \tag{2.2}$$

On considère $H_t : L^2(0,T,U) \to E$ l'opérateur défini par

$$H_t u = \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

H désigne l'opérateur H_T, H sera utilisé par la suite pour diverses définitions et propriétés.
Remarque 2.1
i) *Les hypothèses sur B sont trop fortes, elles seront modifiées dans les cas ponctuel et frontière.*
ii) *La régularité de la solution de (2.1) dépendra du terme Bu et de y_0 en pratique on dispose d'un nombre fini d'actioneurs ainsi B est en général un opérateur compact.*
iii) *Dans la plupart des situations citées nous aurons*

$$E = L^2(\Omega),\ U = \mathbb{R}^p.$$

p désigne en fait le nombre fini d'actionneurs.

2.2 Contrôlabilité

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis (2.1) de dimension infinie, l'état du système ne peut pas être atteint en général. C'est le cas, par exemple, où l'opérateur A n'est pas borné et que $D(A)$ peut être différent de E, mais les éléments qui ne sont pas atteints, peuvent être approchés. ceci nous amène à introduire divers degrés de contrôlabilité.

2.2.1 Contrôlabilité Exacte

Le système considéré est (2.1) et E désigne l'espace d'état $T > 0$.
Définition 2.1
Le système (2.1) est dit exactement contrôlabté sur $[0,T]$si

$$\forall y_d \in E,\ \exists u \in L^2(0,T;U)\ \textit{tel que} : y(T) = y_d \tag{2.4}$$

Remarque 2.2
L'opérateur H étant défini en (2.3), la définition précédente équivaut à

$$Im(H) = E \tag{2.5}$$

Définition 2.2

Soit E_1 *un sous espace vectoriel de* E, *le système* (2.1) *est dit exactement contrôlable dans* E_1 *si :*

$$\forall y_d \in E_1, \exists u \in L^2(0,T,U\ )\ \textit{tel que}\ y(T) = y_d. \tag{2.6}$$

Remarque 2.3 *La définition précédente equivaut à :* $E_1 \subset ImH$, H *étant toujours défini par* (2.3).

Caractérisations :

La définition (2.1) résulte les propriétés de caractérisations suivantes :
Proposition 2.1 *Le système* (2.1) *est exactement contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si* $\exists\gamma > 0$ *tel que*

$$\|y^*\|_{E^*} \leq \gamma \|B^* S^*(.,.) y^*\|_{L^2(0,T,U)}$$

pour tout y^* *dans* E^*
Démonstration. Pour la démonstration voir El Jai [14]. ■
Et elle découle du résultat plus générale suivant :
Lemme 2.1 *Soit* E *et* F *et* G *des espaces de Banach réflexifs, et* $f \in L(E,G), g \in L(F,G)$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) $Imf \subset img$
2) $\exists c > 0$ tel que $\|f^* y^*\|_{E^*} \leq c\,\|g^* y^*\|_{F^*}, \forall y^* \in G^*$.
La propriété de caractérisation donnée ci-dessus est intéressante dans la mesure où on ramène l'exacte contrôlabilité à une inégalité assez facile à expliciter pour un système (2.1) donné, il y a des cas où certaines hypothèses sur les paramètres du système permettent directement de savoir si le système est exactement contrôlable ou non, ainsi nous avons :
Proposition 2.2 [34]*Soit* H_t *L'opérateur linéaire* :
$L^2(0,T,U) \longrightarrow E$ *défini par*

$$H_t u = \int_0^t S(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau$$

si, pour tout $t \geq 0$, H_t *est compact alors le système* (2.1) *n'est* pas *exactement contrôlable.*
Corollaire 2.1 [34]*Si* $S(t)$ *est compact pour tout* $t > 0$, *alors le système* (2.1) *n'est pas exactement contrôlable.*
Corollaire 2.2 [34]*Si* B *est compact alors le système* (2.1) *n'est pas exactement contrôlable.*
Remarquons donc en résume que le système ne peut être exactement contrôlable, au sens de la définition (2.1), si B *ou* $S(t)$ *sont compacts.*
Exemple 2.1 :

$$\begin{cases} y' = Ay + u, & \text{sur } [0,T[\\ y(0) = y_0, & y_0 \in D(A) \end{cases}$$

Ce système dynamique n'est pas exactement contrôlable dans $L^2(\Omega)$ sur $[0,T]$. Cet exemple explique pourquoi, dans la pratique, la plupart des systèmes dynamiques définis dans les espaces de dimension infinis ne sont pas exactement contrôlables, c'est pourquoi nous sommes conduits à définir .

2.2.2 Contrôlabilité Faible

Définition 2.3 *:*
le système (2.1) est dit faiblement contrôlable sur $[0,T]$ si pour tout y_d dans E, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists u \in L^2(0,T,U)$ tel que :

$$\|y(T) - y_d\|_E \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.4 *Dans la définition (2.3) le choix de y_d dans E est important. Nous restreignons à un sous espace vectoriel E_1 de E pour obtenir l'exacte contrôlabilité sur E_1.*

Caractérisation :

Pour les systèmes distribués, la notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée. Nous pouvons la caractériser par la :
Proposition 2.3 [34]*Il y a équivalence entre :*
a) $\overline{(2.1)}$ *faiblement contrôlable sur* $[0,T]$.
b) $\overline{Im(H)} = E$.
c) $\ker(H^*) = \ker(H^*H) = \{0\}$.
d) $\{\langle y, S(s)Bv\rangle = 0,\ \forall s \in [0,T]$ et $\forall v \in E\} \Rightarrow y = 0$.
e) Si le semi-groupe $(S(t))$ est analytique
$\underset{n\in N}{\cup} Im(A^n S(s)B) = E,\ \forall s \in]0,T]$.
Démonstration. voir [34] ■

2.3 Contrôlabilité régionale

Les concepts d'état de système sont attachés un certain nombre qui jouent un rôle fondamental dans la théorie de la commande. Il s'agit en général, d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de Ω.

2.3.1 Définition et caractérisation

Soit $y^d \in L^2(\omega)$ un état désiré donné, le problème de la contrôlabilité régionale consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle $u \in U$ permettant d'amener l'état du système (2.1) de y^0 à y^d sur la région ω.
Définition 2.4 *Le système (2.1) est dit exactement (res-faiblement) régionalement contrôlable sur ω si pour tout $y^d \in L^2(\omega)$, $(\forall\varepsilon \geq 0)$ il existe un contrôle $u \in U$ tel que*

$$y_u(T)_\omega = y^d \left(\left\| y_u(T)|_\omega - y^d \right\|_{L^2(\omega)} \Big| \leq \varepsilon \right),$$

le systéme sera aussi dit $\omega-$exactement (resp.faiblement) contrôlable où $y_u(.)$ est donné par (2.2) et $y\ |_\omega$désigne la restriction de y à ω.
Remarque 2.5 *Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la région ω. Le contrôle u dépend de la variable du temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine ω.*

Plusieurs difficultés sont sous-jacentes à ces définitions. Notons, en partie que l'opérateur B est lié au mode d'excitation du système. Si le système excité par une action ponctuelle ou frontière, l'opérateur B n'est plus borné donc il faut revoir le choix des espaces. Cependant l'étude peut être faite de la même manière. On pose

$$H : L^2(0,T;U) \to E \text{ et } \chi_\omega : L^2(\Omega) \to L^2(\omega)$$

défini par

$$Hu = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds \text{ et } \chi_\omega y = y\mid_\omega \tag{2.7}$$

l'adjoint de χ_ω est $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \to L^2(\Omega)$ défini par :

$$(\chi_\omega^* y)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \diagdown \omega \end{cases} \tag{2.8}$$

L'opérateur H étant défini, les définitions précédentes sont équivalentes à
la contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par
Proposition 2.4 [34]*Si $u \in L^2(0,T;U)$, alors le système* (2.1) *est exactement régionalement contrôlable si et seulement si pour tout $y^* \in L^2(\omega)$ il existe $\gamma > 0$,tel que*

$$\gamma \left\| B^* S^*(.) \chi_\omega^* y^* \right\|_{L^2(0,T;U)} \geq \left\| y^* \right\|_{L^2(\omega)}$$

Démonstration. voir[34] ■
Proposition 2.5 [34]- *Le système* (2.1) *est exactement régionalement contrôlable si et seulement si*

$$Ker\chi_\omega + ImH = L^2(\Omega)$$

Démonstration. Voir[34] ■
Remarque 2.5 *Le système* (2.1) *est faiblement, régionalement contrôlable sur ω si et seulement si :*

$$Ker\,(H^*) \cap Im\chi_\omega^* = \{0\}\,.$$

Corollaire 2.3 [43]*Le système* (2.1) *est faiblement régionalement contrôlable dans $L^2(\omega)$ sur $[0,T]$ si et seulement si* l'une des propriétés suivante est satisfaite
1) $\underline{(\chi_\omega H)\,(\chi_\omega H)^*}$ *est inversible.*
2. $\overline{Im\,(\chi_\omega H)} = L^2(\omega)$.
3.$\ker\,(\chi_\omega H)\ ^* = \ker\,(\chi_\omega H)\,(\chi_\omega H)^* = \{0\}\,.$
4. $(B^* S^*(s)\chi_\omega^*, y) = 0,\ \forall s \in [0,T]) \Rightarrow y = 0$
5. Si le semi-groupe est analytique tel que

$$Im\,(A^n S(s) B) \in H^1\,(\Omega)$$

et

$$\overline{\bigcup_{n\geq 0} [Im\,(\chi_\omega A^n S(s) B)]} = L^2(\omega), \forall s \in [0,T]\,.$$

Démonstration. voir[43] ■

Remarque 2.6 *il est clair que :*

-Un système qui est exactement (resp.faiblement) contrôlable est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable.

- Un système qui est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable sur w_1 est exactement (resp.faiblement) régionalement contrôlable sur w_2 pour tout $w_2 \subset w_1$.

- La définition (2.4) est générale et englobe le cas de la *contrôlabilité classique (cas $w = \Omega$)*

- Si $J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt$ désigne le coût de transfert, alors pour tout $w \subset \Omega$, le coût de transfert régional sur w est inférieur à celui sur tout Ω.En effet

$$W_\Omega = \left\{ u \in L^2(0, T.U) \text{ tel que } y_u(T) = y_d \text{ sur } \Omega \right\} \tag{2.9}$$

et

$$W_w = \left\{ u \in L^2(0, T.U) \text{ tel que } y_u(T) = y_d \text{ sur } w \right\} \tag{2.10}$$

Alors $W_\Omega \subset W_w$ et donc

$$\min_{W_w} J(u) \leq \min_{W_\Omega} J(u)$$

- On peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlables mais qui ne sont pas contrôlables sur tout le domaine. Ceci est illustré par l'exemple suivant :

Contre-exemple :

Considérons le système décrit par l'équation parabolique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = X_{|a,b|}u(t) &]0,1[\times]0,T[\\ y(x,0) = 0 &]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 &]0,T[\end{array} \right. \tag{2.11}$$

avec a et b tels que $(b-a) \in Q$ et $[a,b] \subset]0,1[$. Alors on a le résultat suivant Le système (2.11) n'est pas contrôlable sur $]0,1[$, [34]. Mais il peut être contrôlable sur une région $[\alpha, \beta]$, pour α et β convenablement [34].

Dans la suite on suppose que A admet un système complet de fonction propres $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ .sans perte de généralité, supposées simples. Le semi-groupe engendré par A est donné par

$$S(t)y = \sum_{i\geq 1} \exp \lambda_i t \langle \varphi_i, y \rangle \varphi_i$$

et la solution de (2.1). $y^0 = 0$. s'exprime par :

$$y_u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \exp \lambda_i(t-s) \langle B^* \varphi_i, u(s) \rangle ds \varphi_i$$

On note par

$$I = \{ i \geq 1 / \ B^* \varphi_i = 0 \} \ \text{ et} J = I^c$$

On rappelle ,.El Jai [43]., que (2.1) est faiblement contrôlable si et seulement si $I = \Phi$.Dans le cas de la contrôlabilité régionale nous avons le résultat : :

Théorème 2.1 : *On suppose que* (2.1)*est non contrôlable* $(I \neq \Phi)$. *Alors nous avons l'équivalence entre :*

1. Le système (2.1) *est régionalement faiblement contrôlable sur* w.

2. La famille $\{\chi_w \varphi_i\}_{i\in J}$ *est totale dans* $L^2(w)$.

3. Si $y \in L^2(\Omega)$ *vérifiant* $\int_w y(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$ *pour tout* $i \in J$ *alors* $y = 0$.

4. Si $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i\varphi_i = 0$ *sur* $\Omega\diagdown w \Longrightarrow \alpha_i = 0\ (\forall i \in I)$.

Démonstration. 1. $\Longleftrightarrow$ 2. et 2. $\Leftrightarrow$ 3.
résultent du fait que

$$\overline{Im\chi_w H} = L^2(w) \Longleftrightarrow KerH^*\chi_x^* = \{0\}$$

3. $\Longrightarrow$ 4.
Considérons $(\alpha_i)_{i\in I}$ tel que

$$\sum_{i\in I}\alpha_i\varphi_i = 0 \text{ sur } \Omega\diagdown w$$

soit

$$y = \chi_w\sum_{i\in I}\alpha_i\varphi_i \in L^2(\Omega)$$

On a

$$\int_w y(x)\varphi_i(x)\,dx = 0 \text{ pour tout } i \in J \Longrightarrow y = 0 \text{ par conséquent } \alpha_i = 0\ \forall i \in I.$$

4. $\Longrightarrow$ 3.
Soit $y \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}\int_w y(x)\varphi_i(x)\,dx &= 0\ \forall j \in J.\\ \chi_w^* y &= \sum_{i\geq 1}\alpha_i\varphi_i\end{aligned}$$

où.

$$\alpha_i = \int_\Omega \chi_w^* y(x)\,\phi_i(x)\,dx = \int_w y(x)\,\phi_i(x)\,dx \Longrightarrow \alpha_i = 0.$$

■

Conclusion

1. Si I^c *est fini alors* (2.1) *n'est contrôlable sur aucun* $w \subset \Omega$.

2. Si I *est fini alors* (2.1) *est contrôlable sur tout* $w \subset \Omega$..

2.4 Notion d'actionneur

Les échanges entre un système réel et son environnement se font par l'intermédiaire des actionneurs, ils permettent d'exciter le système. Il peuvent être de nature, de forme, de conception diverses. Les actionneurs que l'on rencontre, dans les système physique, peuvent être de type.

Ponctuel fixe :
tel un brûleur dans un système de diffusion système monodimensionnel excité par deux actionneurs ponctuels

Ponctuel mobile :
C'est un actionneur de type ponctuel , dont la position varie avec le temps. C'est le cas, par exemple, d'un système existé par un rayon laser de direction variable.

Zone :
Tel est le cas, par exemple d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante.

Filament :
Tel un four chauffé par une résistance électrique dans unsystème bidimensionnel.

Définition 2.5 : *Soit Ω_i fermé contenu dans Ω et $g_i \in L^2(\Omega_i)$. On appelle actionneur zone le couple (Ω_i, g_i) où Ω_i représente le support de l'actionneur g_i définit la répartition spatiale de l'actionneur.*

Remarque 2.7 : *dans le cas d'actionneur frontière les définitions restent les mêmes. Nous parlerons d'actionneur zone frontière (Γ_i, g_i) où $\Gamma_i \in \Gamma$ et $g_i \in L^2(\Gamma_i)$ d'actionneur ponctuel frontière (b_i, δ_{b_i}), $b_i \in \Gamma$.*

Application

I) Actionneurs zone dans les systèmes de diffusion : Nous étudierons tout particulièrement le cas des systèmes, notés (S_z) l'indice z pour le cas, décrits par l'équation parapolique :

$$(S_z)\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = \sum\limits_{i=1}^{p} g_i(x)\, u_i(x) & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\,, \\ y(x,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(\varepsilon, t) = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,, \end{cases}$$

(S_z) modélise un système existé par p actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1 \le i \le p}$ avec $g_i \in L^2(\Omega_i)$. Ces actionneurs peuvent avoir des supports non nécessairement disjoints, mais cela correspond à rien réaliste.

Nous supposerons alors que :

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j.$$

Le système(S_z) est un cas particulier du système représenté par vecteur d'état (2.1) en effet il suffit de poser :

$$Ay(t) = \Delta y(t) \text{ pour } y(t) \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

et

$$Bu(t) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x)\, u_i(x) \ \text{ où } u = (u_1, u_2, ..., u_p)$$

B est linéaire, borné et A engendre un semi-groupe fortement continu$(S(t))_{t\geq 0}$. le système (S_z) pourrait aussi être considéré avec des conditions aux limites de Neumann ou mixtes.

II) Actionneurs ponctuels dans les systèmes de diffusion : Considérons le système (S_p), décrits par :

$$(S_p)\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = \sum\limits_{i=1}^{p} \delta(x - x_i)\, u_i(t) & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\,, \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(x, t) = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,. \end{cases}$$

(S_p) est un système existé par p actionneurs ponctuels$(b_i, \delta_{x_i})_{1\leq i\leq p}$ localisés aux points b_i de Ω. (S_p) est également un cas particulier de système (2.1) avec :

$$Ay(t) = \Delta y(t) \quad \text{pour} \quad y(t) \in D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,.$$

et

$$B : R^p \to D(A) \text{ avec } Bu = \sum_{i=1}^{p} \delta(x - x_i)\, u_i(t) \ \text{ où } u = (u_1, u_2, ..., u_p)\,.$$

III)Actionneurs frontières dans les systémes de diffusion : Soit le système :

$$(S_f)\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\,, \\ y(x, 0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(\varepsilon, t) = \sum\limits_{i=1}^{p} g_i(x)\, u_i(x) & \text{dans} \quad \partial\Omega \times]0, T[\,. \end{cases}$$

(S_f) modélise un système excité sur sa frontière, par p actionneurs zones $(\Gamma_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ avec $g_i \in L^2(\Gamma_i)$ et $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, pour tout $i, 1 \leq i \leq p$. (S_f) est un cas particulier du système (2.1) pour cela, on pose $Ay(t) = \Delta y(t)$ et on introduit l'opérateur de Green G, avec :

$$\begin{array}{ccc} G & : & L^2(\partial\Omega) \to L^2(\Omega)\,, \\ h & \to & Gh = y \end{array}$$

avec $\Delta y(t) = 0$ dans Ω et $y = h$ sur $\partial\Omega$
(S_f) admet une solution faible unique donné par :

$$y(t) = -\sum_{i=0.}^{p} \int_0^t AS(t - s) G g_i u_i(s)\, ds$$

La difficulté, dans ce cas ,vient du fait que,en général, pour $u \in L^2(0, T; R^p)$ alors, $y(T) \notin L^2(\Omega)$. Il est possible de choisir des contrôles u plus régulièrs :

Actionneur stratégique

La contrôlabilité d'un systéme peut être affectée par le choix des actionneurs ; que ce soit par la localisation du support des actionneurs, ou par la répartition de l'action sur ces supports.

Nous introduisons les définitions suivantes :
Définition 2.6 *Soit E_1 un sous espace vectoriel de l'espace d'état E. Nous dirons que l'actionneur (Ω_i, g_i) (ou (b, δ_b)) est stratégique dans E_1 si le système qu'il excité est exactement contrôlable dans E_1.*
Définition 2.7 *Nous disons que l'actionneur (Ω_i, g_i) ou (b_i, δ_{b_i}) est stratégique si le système qu'il excité est faiblement contrôlable dans E.*
Ces définitions restent valables pour des actionneurs de type frontière.
Si le système est excite par p actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$(ou ponctuels $(b_i, \delta_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$) alors nous disons que :La suite d'actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ (ou $(b_i, \delta_{bi})_{1 \leq i \leq p}$) est stratégique si le système excité par ces p actionneurs est faiblement contrôlable.
Remarque 2.8 I*l est évident que si le système est excité par p actionneurs et si, pour un certain i_0, $1 \leq i_0 \leq p$, l'actionneur d'indice i_0 est stratégique, alors la suite des p actionneurs est stratégique.*

Caractérisation des actionneurs stratégiques

Considérons le système

$$\left[\begin{array}{c} y' = Ay + Bu \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Supposons que A vérifie l'hypothèse (H_3) et admet un système orthonormé complet de fonctions propres (ϕ_{nj})associées aux valeurs propres (λ_n), λ_n étant de multiplicité r_n.Nous avons alors la propriété de caractérisation suivante :
Proposition 2.6 *La suite d'actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$* est *stratégique si et seulement si :*
i) $p \geq \sup r_n$
ii) $rg(G_n) = r_n$ *pour tout n où G_n est la matrice d'ordre*
(p, r_n) *et d'éléments :*
$(G_n)_{ij} = \langle g_i, \phi_{nj} \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad i = 1, ..., p$ *et* $j = 1, ...r_n$
Cette caractérisation suppose donc, en particulier que le plus grand ordre de multiplicité des valeurs propre de A est fini.

Existence d'actionneurs stratégiques :

Supposons que le système (2.1) est excité par p actionneurs dont les supports $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont fixes. Nous avons le résultat suivant :
Proposition 2.7 *Supposons que $p \geq \sup\limits_n (r_n)$,pour toute suite $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'ouverts contenus dans Ω, il existe des fonctions $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$ telles que :*
i) supp$(g_i) \subset \Omega_i$ et $g_i \in L^2(\Omega_i)$, $\forall i = 1, ..., p$.
ii) La suite d'actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ est stratégique.
Difficultés
Dans ce qui précéde ; au moins deux difficultés d'ordre mathématique ou conceptuel sont à souligner.

2.4.1 Sur le choix de l'espace d'état

Nous avons choisi comme espace d'état $E = L^2(\Omega)$. Ce choix est raisonnable, compte tenu des états qu'on peut considérer et que ceux-ci sont d'énergie finie. Si maintenant, l'actionneur $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ amène le système vers un état $\tilde{y}$ qui est moins régulier. C'est-à-dire $\tilde{y} \in Y$ avec $E \subset Y$, alors on a deux possibilités :
* Ou bien Y est tel qu'on peut le choisir comme espace d'état.
* Ou bien on peut agir sur la régularité du contrôle pour ramener l'état $\tilde{y}$ à E.
Exemple 2.2 : Considérons deux situations nous conduisant
vers cette difficulté. Soit le système de diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \Delta y(x,t) & \Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y^0(x) & \Omega \\ y(\xi,t) = g_1(\xi)\, u(t) & \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{2.12}$$

qu'on suppose excité par un actionneur zone frontière (Γ_0, g)avec $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Dans ce cas, on obtient la même caractérisation avec des états finaux dans $E = L^2(\Omega)$ pour vu que le contrôle $u \in L^r(0,T)$ avec $r > 4$ [43]. Si on considére le même système avec une action ponctuelle exercée sur la frontière au point $b \in \Gamma$.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \Delta y(x,t) & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y^0(x) & \text{sur } \Omega \\ y(\xi,t) = \delta(\xi - b)\, u(t) & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{2.13}$$

On obtient la même caractérisation avec des états finaux dans $X = L^2(\Omega)$ pour vu que $u \in C_0^\infty(0,T)$.

2.4.2 Sur le nombre d'actionneurs

La caractérisation des actionneurs fait apparaître une condition sur le nombre minimum d'actionneurs pouvant ramener le systéme vers des états de E. En fait, cette condition peut être relaxée avec la considération suivante :
Si on suppose que le domaine géométrique Ω du système (2.1) est connu avec une certaine précision, alors de cette précision prés, le choix d'un seul actionneur ($p = 1$) peut suffi pour assurer la contrôlabilité du système moyennant une faible perturbation de la frontière Γ du domaine Ω où Ω'est très voisine de Ω dans le sens que

$$\forall \varepsilon > 0, \sup_{\substack{x\in\Gamma, \\ x'\in\Gamma'}} d(x,x') \leq \varepsilon$$

nous obtenons un système dont les valeurs propres sont simples [43].

2.5 Contrôle assurant le transfert régional

Le but de cette section est de trouver un contrôle assurant le transfert régional et à énergie minimale. Evidemment on peut utiliser les résultats connus sur la contrôlabilité des systèmes dynamiques, mais la difficulté apparaît si l'état désiré est donné uniquement sur la région ω. De plus nous avons montré que le coût de transfert régional est inférieur au coût de transfert globale. Considérons le système.

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

où A génère un semi-groupe fortement continu sur

$$E = L^2(\Omega), B \in (U, E) \text{ et } y(0) \in E$$

Le système (2.1) admet une solution unique tel que $y_u(.) \in L^2(0, T; E)$ .Soit $y^d \in L^2(\omega)$ un état désiré. On se pose le problème de transférer à moindre coût de l'état y^0 du système(2.1) à y^dà l'instant T.
Considérons l'ensemble

$$G = \{g \in E \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \omega\}$$

alors existe-t-il un contrôle à énergie minimale $u \in U$ tel que $y_u(t) - y^d \in G$?
Soit

$$U_{ad} = \{u \in U \mid y_u(T) - y^d \in G\}$$

Alors le problème est de minimiser

$$\begin{cases} \min \|u\|_U^2 \\ u \in U_{ad} \end{cases}$$

Pour cela nous proposons l'approche générale suivante.

2.5.1 Approche générale

Cette approche consiste à considérer le problème du contrôle régional comme un problème particulier de la contrôlabilité
élargie. Considérons le système (2.1) et posons

$$G^0 = \{g \in E^* \text{ tel que } g = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega\}$$

Pour $\varphi^0 \in G^0$, considérons le système

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -A^*\varphi(t) & t \in]0, T[\\ \varphi(T) = \varphi^0 \end{cases}$$

et

$$\|\varphi^0\|_{G^0}^2 = \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2 \, dt$$

Nous considérons aussi le système

$$\begin{cases} \psi'(t) = A\psi(t) + BB^*\varphi(t) & t \in]0, T[\\ \psi(0) = y^0 \end{cases}$$

ensuite on définit l'opérateur M par

$$M\varphi^0 = P\left(\psi\left(T\right)\right).$$

où

$$P = \chi_\omega^* \chi_\omega$$

M est opérateur affine que l'on décompose

$$M\varphi^0 = P\left(\psi_0\left(T\right) + \psi_1\left(T\right)\right)$$

où

$$\begin{cases} \psi_0'(t) = A\psi_0\left(t\right) & t \in]0, T[\\ \psi_0\left(0\right) = y^0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = A\psi_1\left(t\right) + BB^*\varphi\left(t\right) & t \in]0, T[\\ \psi_1\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

On pose

$$\Lambda\varphi^0 = p\left(\psi_1\left(T\right)\right) \tag{2.14}$$

Λ est un opérateur borné et symétrique. En effet pour $\varphi^0, \tilde{\varphi}^0 \in G^0$, nous avons

$$\left\langle \Lambda\varphi^0, \tilde{\varphi}^0 \right\rangle = \left\langle \psi_1\left(T\right), \tilde{\varphi}^0 \right\rangle = \int_0^T B^*\varphi\left(t\right) B^*\tilde{\varphi}\left(t\right) dt.$$

Avec ces notations, le problème de la contrôlabilité régionale conduit à la résolution de l'équation

$$\Lambda\varphi^0 = \chi_\omega^* y^d - p\left(\psi_0\left(T\right)\right).$$

nous avons alors le résultat

Proposition 2.8[34]
Si le système (2.1) *est* ω *faiblement régionalement contrôlable alors l'équation* (2.14) *admet une solution unique* $\varphi^0 \in G^0$. *Le contrôle*

$$u^*\left(t\right) = B^*\varphi\left(T\right)$$

permet le transfert du système (2.1) *dans* G *à l'instant* T, *ou encore*

$$y(T, u^*)\mid_\omega = y^d.$$

De plus ce contrôle minimise la fonction coût

$$J\left(u\right) = \int_0^T \left\|u\left(t\right)\right\|^2 dt \ sur\ U_{ad}.$$

Démonstration. Voir[34] ■

2.5.2 Notion d'observabilité

Connaissant la dynamique du système et la fonction de commande, la reconstruction de l'état du système peut se réduire à la reconstruction de l'état initiale $y(0)$. Par ailleur, les systèmes considérés étant linéaires, la solution du système s'obtient en ajoutant le régime libre avec $y(0) \neq 0$ est le régime contrôlé. Le problème d'observabilité revien donc à celui de l'existence d'un opérateur $G : Y \longrightarrow X$ tel que $y(0) = G_z$. Il s'agit de déterminer y_0 solution de l'équation :

$$z(t) = CS(t)y_0 = Ky_0, \ t \in [0, T] \tag{S}$$

L'équation (S) fait apparaitre l'opérateur K tel que :

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad X \longrightarrow L^2(0, T, O) \\ y \quad &\longmapsto \quad Ky = \int_0^T CS(t)y(t)dt \end{aligned} \tag{2.15}$$

O est l'espace d'observation (ouvert non vide de IR^q).
K est linéaire borné. Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} K^* \quad &: \quad L^2(0, T, O) \longrightarrow X' \\ y \quad &\longmapsto \quad K^*y = \int_0^T S^*(t)C^*y(t)dt \end{aligned}$$

Comme pour la contrôlabilité, on peut voir que sous certaine conditions nous ne pourons pas observer n'importe quel état initiale y_0, mais on peut observer des états aussi proches de y_0 qu'on le souahaite.

Définition 2.5.1 *Le système* (2.1) *augmenté de l'équation de sortie* (S) *est dit exactement observable sur* $[0, T]$ *si* $Im\,(K^*) = X'$.

Définition 2.5.2 *Le système* (2.1) *augmenté de l'équation de sortie* (S) *est dit faible observable sur* $[0, T]$ *si* $KerK = \{0\}$.

Remarque 2.5.1 *On peut également parler de l'exacte observabilité dans* $X_1 \subset X$, *quand* $X_1' \subset Im\,(K^*)$.

2.5.3 Caractérisation d'observabilité exacte

Proposition 2.5.1 [43] *Le système* (2.1) *augmenté de l'équation de sortie* (S) *est exactement observable sur* $[0, T]$ *si :* $\exists \gamma > 0$ *tel que* $\|y_0\|_X < \gamma \|Ky_0\|_{L^2(0,T,IR^q)}$ *pour tout* y_0 *dans* X.

2.5.4 Caractérisation d'observabilité faible

Proposition 2.5.2 [43] *Le système* (2.1) *augmenté de l'équation de sortie* (S) *est faiblement observable sur* $[0, T]$ *ssi* $\overline{Im\,(K^*)} = \overline{Im\,(K^*K)} = X'$.

2.6 Dualité

Il existe une dualité mathématique entre contrôle et observabilité. Cette dualité permet le transfert les résultats établis pour la contrôlabilité à l'observabilité (ou vice versa).
On considère l'opérateur H défini en (2.3) par

$$\begin{aligned} H_T \quad &: \quad L^2(0,T;U) \to X \, . \\ u \quad &\to \quad H_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds. \end{aligned}$$

H c'est l'opérateur de contrôle, il associe, à tout controle u un état $y \in X$. Lorsque $y_0 = 0$ la contrôlabilité consiste à trouver un contrôle u tel que

$$H_T u = y_d \tag{2.16}$$

Où y_d est donnée dans X. comme on a vu précédemment l'adjoint H^* de H est donné par

$$H^* y = B^* S^* (T - .)y \tag{2.17}$$

La formule (2.17) montre que l'adjoint H^* de H peut être vu comme un opérateur de sortie (il a la même forme que l'opérateur d'observation K défini dans (2.15) qui associe à tout y dans X, l'observation

$$H^* y = B^* S^* (T - .)y \in L^2(0,T,U) \tag{2.18}$$

Finalement, on peut commencer indifféremment par l'observation (ou le contrôle) et déduire les résultats sur le contrôle (ou l'observation) en utilisant cette dualité. C'est pourquoi on introduit la définition suivante.

Définition 2.6.1 *le système contrôlé*

$$\begin{cases} y'(t) &= \quad Ay(t) + Bu(t); \quad 0 < t < T \\ y(o) &= \qquad y_0 \end{cases} \tag{2.19}$$

et le système observé

$$\begin{cases} y'(t) &= \quad \tilde{A}y(t); \quad 0 < t < T \\ y(o) &= \quad y_0 \\ z(t) &= \quad Cy(t) \end{cases} \tag{2.20}$$

sont duaux si

$$\tilde{A} = A^* \quad et \quad B^* = C \tag{2.21}$$

Même si cette définition n'a pas d'explication physique, elle est très utile pour obtenir les résultats sur l'observabilité d'un système à partir de ceux établies sur la contrôlabilité de son dual (ou vice versa). A partir de cette définition et de (2.18), on a

$$H^* y = B^* S^* y = CSy = Ky$$

et on obtient immédiatement le résultat suivant.

Proposition 2.6.1 [14] *Si les systèmes (2.19) et (2.20) sont duaux, alors le système (2.20) est faiblement observable si et seulement si le système (2.19) est faiblement contrôlable.*

Démonstration. Voir [14]. ■

2.7 Théorèmes de prolongement unique

La méthode de H.U.M ou Hilbert Uniqueness Method, a été introduite par J. L. lions dans **[40]**, pour l'étude de la contrôlabilité de l'équation des ondes. Elle a ensuite été appliquée à un large éventuel problèmes où on construit l'espace des états atteignable, cette construction est basée sur un théorème de prolongement (ou continuation) unique :Holmgren pour les ondes, Mizohata ou Saut-Scheurer pour la chaleur. Ces théorèmes sont à la base de la plupart des méthodes de résolution de problèmes de contrôle et d'identification.
Nous allons d'abord présenter le théorème d'unicité de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire.

Théorème 2.7.1 [42] *(Unicité de Cauchy)*
Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ une partie non vide du bord, on note $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$, soit $y(x,t)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 & dans \quad Q \\ y = 0 & sur \quad \Sigma_0 \\ \frac{\partial y}{\partial v} = 0 & sur \quad \Sigma_0 \end{cases}$$

alors y est identiquement nulle dans Q.

Considérons la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \tag{2.22}$$

où A est un opérateur elliptique d'ordre 2 sur lesquels les conditions seront précisées pour chaque théorème. Dans tous les cas, l'ouvert Ω doit être connexe et $Q = \Omega \times]0, T[$. Les deux théorèmes qui suivent intervient la notion de la composante horizontale dans un ouvert d'espace-temps.

Définition 2.7.1 *(Composante horizontale)*
Soit O un ouvert inclus dans Q on dit qu'un point $p \in Q$ appartient à la composante horizontale de O, s'il existe une courbe horizontale joignant p à O c'est-à-dire à une ligne dont les points ont tous la même coordonnée en temps.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de S. Mizohata suivant

Théorème 2.7.2 [36] *(S. Mizohata)*
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et A un opérateur elliptique du second ordre dont les coefficients appartiennent à $C^\infty(Q)$. Soit y la solution de (2.22) pour cet opérateur et O un ouvert inclus dans Q. Toute solution de (2.22) qui s'annule dans O s'annule dans la composante horizontale de O.

Théorème 2.7.3 [36] *(J. C. Saut et B. Scheurer)*
Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, A un opérateur elliptique du second ordre défini par

$$Au =_{i,j=1}^{p} a_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} . \frac{\partial}{\partial x_j} u +_{i=1}^{p} b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} u + c(x,t)u,$$

où les coefficients de A vérifient

$$\begin{array}{ccccc} a_{ij} & \in & C^1(Q) & & 1 \leq i, j \leq p \\ b_i & \in & L^\infty_{loc}(Q) & & 1 \leq i \leq p \\ c & \in & L^\infty\left(0, T, L^1_{loc}(\Omega)\right). & & \end{array}$$

Supposons que la solution de (2.22) vérifie $y \in L^2\left(O, T, H^2_{loc}(\Omega)\right)$ et qu'elle s'annule dans un ouvert $O \in Q$. Alors y s'annule dans la composante horifzontale de O.

Chapitre 3

SENTINELLE DES SYSTEMES DISTRIBUES A DONNEES MANQUANTES

Dans ce chapitre on s'interesse à la détection de pollution en milieu fluide (Lac, Rivière, estuaire, …etc). Nous supposerons que la pollution est due à la présence de composés chimiques (Nitrate, Plomb,...) provenant des décharges externes ou sédimentaires. Les sources de Pollution diffusent au cours du temps des déjections toxiques dans l'eau. L'identification de ces polluants peut se traiter en effectuant des observations du phénomène au milieu du domaine. Et par l'application de la méthode des sentinelles

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre on considère des systèmes évolutifs dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3$ dans les applications) de frontière supposée assez régulière $\partial\Omega = \Gamma$. L'état du système est disigné par y, qui est une fonction de $x \in \Omega$ et de $t \in (0, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'état y dépend également d'un certain nombre de paramètres ou fonctions connues ou inconnues, plus précésement l'état satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T). \tag{3.1}$$

Dans (3.1) l'opérateur A est un opérateur différentiel elliptique du 2 ème ordre :

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right). \tag{3.2}$$

$$\exists\alpha > 0, a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\zeta_i\zeta_i, \forall\zeta_i, \zeta_j \in \mathbb{R} \text{ pp dans } Q. \tag{3.3}$$

On suppose que

$$a_{ij} \in L^\infty(Q). \tag{3.4}$$

Les hypothèses sur la fonction f doivent être telles que l'équation (3.1) à laquelle on va ajouter des conditions intiales et aux limites admet au moins une solution globale dans Q.

Dans le deuxième membre de (3.1) ξ est connu dans un espace de Hilbert ou Banach, mais $\lambda\hat{\xi}$ (appelé terme de pollution) n'est pas connu On sait seulement que $\left\|\hat{\xi}\right\| \leq 1$. On suppose aussi que λ est assez petit. On désignera par $y\,(0)$ la fonction $y(x,0)$ Si les conditions initiales sont incomplètes. le système est appelé système à données manquantes. Soit

$$y\,(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 \tag{3.5}$$

y_0 est donnée dans un espace de Hilbert ou de Banach convenable disons. $\|\hat{y}_0\| \leq 1$ avec τ suffisamment petit. Pour fixer les idées on suppose que

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T)\,. \tag{3.6}$$

Dans certains problèmes on peut avoir aussi des termes de pollution et des termes manquants dans les conditions aux limites.

$$\left\{\begin{array}{ccc} y = g_0 + \lambda_0\hat{g}_0 & \text{sur} & \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,, \\ y = g_1 + \tau_1\hat{g}_1 & \text{sur} & \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)\,, \\ y = 0 & \text{sur} & \Sigma\backslash\Sigma_0 \cup \Sigma_1, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

où $\hat{g}_0$ et $\hat{g}_1$ sont dans la boule unité d'un espace de Hilbert ou de Banach convenable et $\lambda_0\hat{g}_0$ et $\tau_1\hat{g}_1$ sont des termes de pollution (resp manquant).
Soit maintenant le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay + f\,(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} & \text{dans} & Q = \Omega \times (0,T)\,, \\ y\,(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{dans} & \Omega, \\ y = 0 & \text{sur} & \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.8}$$

pour λ et τ donnés ainsi que $\hat{\xi}$ et $\hat{y}_0$ le problème (3.8) admet une solution unique que l'on note $y\,(x,t,\lambda,\tau)$.
notre question est la suivante

$$\left\{\begin{array}{c} \text{A partir des mesures disposées sur l'état du système ;} \\ \text{peut on estimer le terme de pollution } \lambda\hat{\xi} \text{ indépendamment du terme manquant } \tau\hat{y}_0 ? \end{array}\right\}$$

Notre objectif est de donner une méthode permettant d'obtenir des informations sur $\lambda\hat{\xi}$ qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de y_0. On établit ainsi une distinction entre le terme de pollution $\lambda\hat{\xi}$ et le terme manquant $\tau\hat{y}_0$ que l'on ne cherche pas à identifier. pour espérer pouvoir obtenir quelques informations il faut observer l'état y.

3.2 Observation de l'état

Le problème d'estimation de données manquantes consiste à observer l'état y du système sur une partie accessible du domaine et de disposer des mesures expérimentales. On suppose que toutes les observations sont effectuées dans un intervalle de temps $(0,T)$ et dans un domaine (supposé arbitrairement petit) appelé observatoire $\omega \subset \Omega$. On pose $O = \omega \times (0,T)$

et $y(x,t,\lambda,\tau) = y_{obs}$ sur O. On peut distinguer plusieurs type d'observations suivant les types d'observatoires :

Observations régionales internes

L'observatoire ω est une petite région de Ω ; c'est le cas par exemple d'un fluide soumis à deux sources de pollution S1 et S2 et dont l'observation est faite dans une petite région ω de ce fluide.

Observations mobiles

C'est le cas d'un observatoire qui dépend du temps $O = O(t)$, par exemple un bateau observatoire, Ω étant alors un océan, un lac, etc...

Observations instantanées

C'est le cas dont on effectue des observations discontinues par rapport au temps.

Remarque 3.2.1 *Dans toute la suite on suppose que les observations sont données sans bruits, i.e.* $y_{obs} = constante$.

Pour résoudre un problème d'identification, une technique trés répondue est la méthode des "*moindres carrés*" par ailleurs, à la fin des années quatre-vingt, une nouvelle méthode a vu le joure :"la méthode des sentinelles" [31].

3.3 Méthode des moindres carrés

La méthodes des moindres carrés est restée la plus populaire des techniques d'identification de paramètres aussi bien pour les equations différentilles ordinaires (EDO) que pour les équations aux dérivées partielles (EDP).

Supposons que v représente le vecteur des paramètres recherchés la technique des moindres carrés consiste à minimiser la distance au carré entre les valeurs observées y_{obs} et les valeurs calculées $y\,(v)$ pour les v parcourant l'espace des paramètres U. Ainsi, le problème d'identification revient à la résolution du problème d'optimisation

$$\min_{v \in U} \|y\,(v) - y_{obs}\|^2$$

où $y\,(v)$ est la solution du système (3.8).

Dans la méthode de moindres carrés tous les paramètres incounnus jouent le même rôle. On ne fait pas de différence entre les paramètres (aux termes de polution et aux termes manquants). Il ya donc risques de ne pas pouvoire séparer nettement les rôles des uns et des autres. De plus, les données disponibles y_{obs} peuvent être insuffisantes par rapport au nombre de paramètres recherchés, ce qui conduit à une infinité de solutions possibles .On a dans ce cas un problème d'unicité de la solution, aussi pour un jeu de données prélevées dans le même domaine, la résolution peut conduire à une fort pertubation de la solution, il s'agit d'un problème de stabilité.

3.4 Méthode des sentinelles

3.4.1 Définition de la sentinelle

Elle répondait d'une part aux préoccupations citées dans le paraghraphe (3.1) et d'autre part à l'élaboration d'un algorithme rapide dans le calcul des paramètres inconnus. Cette théorie à été par ailleurs développée dans des applications en evironnement par son auteur "*J.L lions*" durant quatre années à travers des articles et des conférences pour enfin résumer le tout dans son livre publié en 1992 "sentinelles pour les systèmes distribuées à données incomplètes".
On se place dans le cadre du problème (3.8). Soit $h_0 \in L^2(O)$ une fonction donnée, soit $w \in L^2(O)$ une fonction à determiner. On considère la fonctionnelle :

$$S(\lambda, \tau) = \int_{O\times(0,T)} (h_0 + w)\, y(x, t, \lambda, \tau)\, dxdt \tag{3.9}$$

Définition 3.4.1 *On dira que la fonctionnelle $S(\lambda, \tau)$ est une sentinelle définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu*

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\,|_{\lambda=\tau=0} = 0, \forall \hat{y}_0 \tag{3.10}$$

$$\|w\|_{L^2(O)} = \min. \tag{3.11}$$

Remarque 3.4.1 *1- La condition (3.10) exprime l'insensibilité de la fonction sentinelle par rapport au terme manquant $\tau\hat{y}_0$. Ce qui permettre de déterminer le terme de pollution indépendament du terme manquant.*
2- Si la fonction h_0 vérifie $h_0 \geq 0$ et $\int_{O\times(0,T)} h_0 dxdt = 1$, alors $M(\lambda, \tau) = \int_{O\times(0,T)} h_0 y(x, t, \lambda, \tau)\, dxdt$ est une moyenne et la condition (3.11) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne. Mais, dans la définition de la fonction $M(\lambda, \tau)$ il n'y a aucune raison pour que $\frac{\partial M}{\partial \tau}(\lambda, \tau)\,|_{\lambda=\tau=0} = 0$ et pour cela on introduit les fonctions w pour bien définir la fonction sentinelle.
3- Les deux conditions (3.10) et (3.11) définissent w de manière unique.

3.4.2 Informations données par la fonction sentinelle

Soit y^0 la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^0}{\partial t} + Ay^0 + f(y^0) = \xi & \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0, T), \\ y^0(0) = y_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y^0 = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.12}$$

on suppose que l'on peut calculer y^0. Alors, si w est bien déterminée on peut écrire

$$S(0, 0) = \int_{O\times(0,T)} (h_0 + w)\, y^0 dxdt, \tag{3.13}$$

un dévellopement limité de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $S(\lambda,\tau)$ donne

$$S(\lambda,\tau) = S(0,0) + \lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) + \tau\frac{\partial S}{\partial\tau}(0,0) + o(\|(\lambda,\tau)\|)$$

et comme par définition $\frac{\partial s}{\partial\tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0}= 0$, alors

$$S(\lambda,\tau) = S(0,0) + \lambda\frac{\partial S(0,0)}{\partial\lambda} + o(\|(\lambda,\tau)\|).$$

de sorte que si y_{obs} est connue on remplaçe $S(\lambda,\tau)$ par S_{obs} avec,

$$S_{obs} = \int_{O\times(0,T)} (h+w)\, y_{obs}dxdt \tag{3.14}$$

on obtient l'éstimation

$$\lambda\times\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) = (S_{obs} - S(0,0)). \tag{3.15}$$

Cela donnera une information sur le terme $\lambda\hat{\xi}$ et ça justifie la technique de la sentinelle.

3.4.3 Condition d'insensibilité

On suppose que $\frac{\partial y}{\partial\tau}(0,0) = \lim\limits_{\tau\longrightarrow 0}\frac{y(0,\tau)-y(0,0)}{\tau}$ est calculable, on note $y_\tau = \frac{\partial y}{\partial\tau}(0,0)$.
$y(0,\tau)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(0,\tau)}{\partial t} + Ay(0,\tau) + f(y(0,\tau)) = \xi & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\ y(0,\tau)(0) = y_0 + \tau\hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y(0,\tau) = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.16}$$

et $y(0,0) = y^0$ est la solution du problème (3.12). En soustrayant (3.12) de (3.16) et en multipliant par $\frac{1}{\tau}$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{y(0,\tau)-y^0}{\tau}\right) + A\left(\dfrac{y(0,\tau)-y^0}{\tau}\right) + \left(\dfrac{f(y(0,\tau)) - f(y^0)}{\tau}\right) = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \dfrac{y(0,\tau)(0) - y^0(0)}{\tau} = \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{y(0,\tau) - y^0}{\tau} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.17}$$

un passage à la limite dans (3.17) quand $\tau\longrightarrow 0$ vérifie que y_τ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} + Ay_\tau + f'(y^0)\, y_\tau = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\ y_\tau(0) = \hat{y}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y_\tau = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.18}$$

où $f'(y^0)\, y_\tau$ est la dérivée de $f(y(0,\tau))$ par rapport à τ au point $y^0 = y(0,0)$. Alors la condition d'insensibilité de la sentinelle par rapport à τ (3.10) équivaut à

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}(\lambda,\tau)\mid_{\lambda=\tau=0} = \int_{O\times(0,T)} (h_0+w)\, y_\tau dxdt = 0. \tag{3.19}$$

Dans tous ce qui suit on suppose que

$$y_0, \hat{y}_0 \in L^2(\Omega) \tag{3.20}$$

3.4.4 Passage au problème adjoint

Soit A^* l'opérateur adjoint de l'opérateur A (obtenu en remplaçant les a_{ij} par a_{ji}). On considère le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^*q + f'(y^0)\, q = (h_0 + w)\, \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ q(T) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.21}$$

où χ_O est la fonction caractéristique de O. Le problème (3.21) admet une solution unique q qui dépend de w, sous des hypothèses très générales sur $f'(y^0)$ [41] . Maintenant on multiplie l'équation de (3.21) par y_τ et on intègre sur Q on obtient

$$\int_Q \left(-\frac{\partial q}{\partial t} + A^*q + f'\left(y^0\right) q \right) y_\tau dxdt = \int_Q \left((h_0 + w)\, \chi_O \right) y_\tau dxdt,$$

une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} &\left(-\int_\Omega q(T) y_\tau(T)\, dx + \int_\Omega q(0) y_\tau(0)\, dx + \int_Q \frac{\partial y_\tau}{\partial t} q dxdt \right) + \\ &\left(\int_{O\times(0,T)} (Ay_\tau)\, q dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial y_\tau}{\partial \eta} q d\Gamma dt + \int_\Sigma \frac{\partial q}{\partial \eta} y_\tau d\Gamma dt \right) + \int_Q f'\left(y^0\right) q y_\tau dxdt \\ = &\int_Q \left((h_0 + w)\, \chi_O \right) y_\tau dxdt. \end{aligned}$$

Et avec les conditons des deux problèmes (3.18) et (3.21) on obtient

$$\int_O (h_0 + w)\, y_\tau dxdt = \int_\Omega q(0) \hat{y}_0 dx \tag{3.22}$$

Alors la condition (3.10) devient

$$q(0) = 0. \tag{3.23}$$

Notre problème est donc de trouver $w \in L^2(O)$ telle que l'on ait (3.23) et (3.11). C'est un problème de contrôlabilité à zéro.

Remarque 3.4.2 *Le choix $w = -h_0$ donne une solution pour le problème (3.10), (3.11)et mais cela va annuler la fonction sentinelle et donc ne saurait aucune information.*

3.4.5 Existence du contrôle optimale

Il est assez naturel de séparer les deux composantes

$$q = q_0 + z \tag{3.24}$$

telles que q_0 est solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_0}{\partial t} + A^* q_0 + f'\left(y^0\right) q_0 = h_0 \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ q_0\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ q = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.25}$$

et z est solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = w \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.26}$$

la fonction q_0 est calculable, alors, on cherche à trouver w tel que $z(w)$ vérifie

$$z(0, w) = -q_0(0), \tag{3.27}$$

avec (3.11). En résumé le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P) \left\{ \min_{w \in U} \|w\|_{L^2(O)} \right\}, \tag{3.28}$$

avec

$$U = \left\{ w, \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z = w \chi_O & \text{dans} \quad Q, \\ z\left(T\right) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(0) = -q_0(0). & \end{cases} \right\} \tag{3.29}$$

Proposition 3.4.1 *Le problème (P) admet une solution unique.*

Démonstration. Le domaine U est non vide, fermé et convexe d'autre part l'application $w \longrightarrow \|w\|_{L^2(O)}$ est continue coercive et strictement convexe sur U. Alors, le problème (P) admet une solution unique qu'on note $\hat{w}$.[2] ■
Pour obtenir le système d'optimalité du problème (P) on utilise la méthode de pénalisation.

Pénalisation

Pour $\varepsilon > 0$ on introduit la fonctionnelle

$$J_\varepsilon\left(w, z\right) = \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(O)} + \frac{1}{2\epsilon}\left\| -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z - w\chi_O \right\|^2_{L^2(Q)} \tag{3.30}$$

Soit le problème

$$(P_\varepsilon)\left\{\min_{(w,z)\in U_\varepsilon} J_\varepsilon(w,z)\right\}, \tag{3.31}$$

avec

$$U_\varepsilon=\left\{(w,z),\left\{\begin{array}{lr} -\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^*z+f'(y^0)\,z-w\chi_O\ \in L^2(Q), & \\ z(T)=0 & \text{dans}\quad \Omega, \\ z=0 & \text{sur}\quad \Sigma, \\ z(0)=-q_0(0) & \end{array}\right.\right\} \tag{3.32}$$

Proposition 3.4.2 *Pour tout ε, Le problème (3.31) admet une soution $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ qui converge faiblement vers $(\hat{w},\hat{z})$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$, où $\hat{w}$ est la solution du problème (P) et $\hat{z}$ la solution du problème (3.26) associée à $\hat{w}$.*

Démonstration. Remarquons que pour tout $w\in U$ et z tel que

$$\left\{\begin{array}{lr} -\dfrac{\partial z}{\partial t}+A^*z+f'(y^0)\,z=w\chi_O & \text{dans}\quad Q, \\ z(T)=0 & \text{dans}\quad \Omega, \\ z=0 & \text{sur}\quad \Sigma, \\ z(0)=-q_0(0). & \end{array}\right.$$

le couple $(w,z)\in U_\varepsilon$, et comme U est non vide alors U_ε n'est pas vide de plus il est fermé. D'autre part l'application J_ε est continue coercive et strictement convexe, alors le problème (P_ε) admet une solution unique $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$. Cette solution vérifie alors,

$$J_\varepsilon(w_\epsilon,z_\varepsilon)\leq J_\varepsilon(w,z),\forall(w,z)\in U_\varepsilon. \tag{3.33}$$

En particulier pour $(\hat{w},\hat{z})$, on a

$$\frac{1}{2}\|w_\epsilon\|^2_{L^2(O)}+\frac{1}{2\epsilon}\left\|-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}+A^*z_\varepsilon+f'\left(y^0\right)z_\varepsilon-w_\epsilon\chi_O\right\|^2_{L^2(Q)}\leq\frac{1}{2}\|\hat{w}\|^2_{L^2(O)}=C. \tag{3.34}$$

ce qui implique que

$$\|w_\epsilon\|_{L^2(O)}\leq C \text{ et } \left\|-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t}+A^*z_\varepsilon+f'\left(y^0\right)z_\varepsilon-w_\epsilon\chi_O\right\|_{L^2(Q)}\leq C\sqrt[2]{\varepsilon}. \tag{3.35}$$

La deuxième inégalité de (3.35) nous permet de montrer que dans un espace fonctionnel convenable noté W on peut montrer que (z_ε) est bornée [8]. Par conséquence il existe une sous suite notée encore $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ et deux fonctions $\bar{w}\in L^2(O)$ et $\bar{z}\in L^2(Q)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lll} w_\epsilon\longrightarrow\bar{w} & \text{faiblement dans} & L^2(O) \\ z_\epsilon\longrightarrow\bar{z} & \text{faiblement dans} & W \end{array}\right. \tag{3.36}$$

avec $\bar{z}$ est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lr} -\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial t}+A^*\bar{z}+f'(y^0)\,\bar{z}=-\bar{w}\chi_O & \text{dans}\quad Q, \\ \bar{z}(T)=0 & \text{dans}\quad \Omega, \\ \bar{z}=0 & \text{sur}\quad \Sigma, \\ \bar{z}(0)=-q_0(0). & \end{array}\right. \tag{3.37}$$

et comme J_ε est convexe et continue alors on a [52]

$$J_\varepsilon(\bar{w},\bar{z}) \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon).$$

ce qui implique d'aprés (3.37) que

$$\frac{1}{2}\|\bar{w}\|^2_{L^2(O)} \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon). \tag{3.38}$$

D'autre part et de (3.34) on a

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\|\hat{w}\|^2_{L^2(O)}, \tag{3.39}$$

alors (3.38) et (3.39) donnent

$$\frac{1}{2}\|\bar{w}\|^2_{L^2(O)} \leq \frac{1}{2}\|\hat{w}\|^2_{L^2(O)} \tag{3.40}$$

et d'aprés l'unicité de la solution pour le problème (P) on déduit que $\bar{w} = \hat{w}$. Et d'aprés l'unicité de la solution pour les deux problèmes (3.26) et (3.37) on déduit que les solutions $\bar{z}$ et $\hat{z}$ assocées respectivement à $\bar{w}$ et $\hat{w}$ sont identiques. ■

Système d'optimalité pour le problème (P_ε)

Proposition 3.4.3 *$(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ est solution unique du problème (P_ε), si est seulement s'il existe une fonction $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ telle que $(w_\epsilon, z_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ est solution du système d'optimalité suivant*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + A^* z_\varepsilon + f'(y^0) z_\varepsilon = w\chi_O - \varepsilon\rho_\varepsilon & \textit{dans} \quad Q, \\ z_\varepsilon(T) = 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \\ z_\varepsilon = 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ z_\varepsilon(0) = -q_0(0). \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'(y^0)\rho_\varepsilon = 0, \\ \rho_\varepsilon = 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.42}$$

sans aucune information sur ρ_ε à $t = 0$ ou à $t = T$, et tel que

$$w_\epsilon \chi_O = -\rho_\varepsilon. \tag{3.43}$$

Démonstration. La solution $(w_\epsilon, z_\varepsilon)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon + \lambda z) = 0, \forall (w_\epsilon, z_\varepsilon + \lambda z) \in U_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\varepsilon(w_\epsilon + \lambda w, z_\varepsilon) = 0, \forall (w_\epsilon + \lambda w, z_\varepsilon) \in U_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.44}$$

d'après la linéairité de l'opérateur $-\dfrac{\partial}{\partial t} + A^* + f'(y^0) - w\chi_O$ on peut écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\varepsilon(w_\epsilon, z_\varepsilon + \lambda z) = 0, \forall z \in U_1 \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} J_\varepsilon(w_\epsilon + \lambda w, z_\varepsilon) = 0, \forall w \in L^2(O) \end{cases} \tag{3.45}$$

avec

$$U_1 = \left\{ z, \left\{ \begin{array}{lll} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0) z - w\chi_O & \in L^2(Q), & \\ z(T) = 0 & & \text{dans} \quad \Omega, \\ z = 0 & & \text{sur} \quad \Sigma, \\ z(0) = 0, & & \\ w \in L^2(O), & & \end{array} \right. \right\} \tag{3.46}$$

ce qui entraîne après calcule que

$$\int_Q \rho_\varepsilon \left(-\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'\left(y^0\right) z \right) dxdt = 0, \forall z \in U_1, \tag{3.47}$$

et

$$\int_{O\times(0,T)} w_\epsilon w dxdt - \int_Q \rho_\varepsilon w \chi_O dxdt = 0, \forall w \in L^2(O) \tag{3.48}$$

avec

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} + A^* z_\varepsilon + f'\left(y^0\right) z_\varepsilon - w_\varepsilon \chi_O \right) \tag{3.49}$$

L'équation (3.47) est vérifie pour tout $z \in U_1$, et comme il est claire que $\mathfrak{D}(Q) \subset U_1$, alors, on a

$$\begin{aligned} & {}_Q\rho_\varepsilon \left(-\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0) z \right) dxdt = 0, \forall z \in \mathfrak{D}(Q), \\ \Longrightarrow & \left\langle \rho_\varepsilon, -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0) z \right\rangle = 0, \forall z \in \mathfrak{D}(Q), \\ \Longrightarrow & \left\langle \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'(y^0) \rho_\varepsilon, z \right\rangle = 0, \forall z \in \mathfrak{D}(Q), \end{aligned} \tag{3.50}$$

on déduit alors que

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'\left(y^0\right) \rho_\varepsilon = 0, \text{ dans } Q. \tag{3.51}$$

et comme

$$\rho_\varepsilon \in L^2(Q),$$

et

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + A\rho_\varepsilon + f'\left(y^0\right) \rho_\varepsilon \in L^2(Q),$$

alors en appliquant le théorème de trace [50], on déduit que les fonctions traces $\rho_\varepsilon(0), \rho_\varepsilon(T)$ et ρ_ε sur Σ, existent. En multipliant (3.51) par $z \in U_1$ et en intégrant par parties sur Q on aura

$$\begin{gathered} \int_Q \left(-\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0) z \right) \rho_\varepsilon dxdt + \int_\Omega \rho_\varepsilon(T) z(T) dx - \int_\Omega \rho_\varepsilon(0) z(0) dx + \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \eta} \rho_\varepsilon d\Gamma dt \\ - \int_\Sigma \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \eta} z d\Gamma dt = 0, \forall z \in U_1, \end{gathered}$$

et du fait que $z \in U_1$, on obtient

$$\int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \eta} \rho_\varepsilon d\Gamma dt = 0, \forall z \in U_1,$$

ce qui implique que

$$\rho_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{3.52}$$

les deux équations (3.51) et (3.52) forment le système d'optimalité (3.42).
Maintenant de (3.48) on a

$$\int_{O\times(0,T)} (w_\epsilon - \rho_\varepsilon \chi_O)\, w dxdt = 0, \forall w \in L^2(O),$$

ce qui donne

$$w_\epsilon - \rho_\varepsilon \chi_O = 0 \text{ dans } Q,$$

ainsi

$$w_\epsilon = \rho_\varepsilon \chi_O. \tag{3.53}$$

■

Système d'optimalité pour le problème (p) Dans une topologie convenable on peut montrer que $\rho_\varepsilon \longrightarrow \rho$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$ telle que ρ est solution du système d'optimalité du problème (P) ;

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + A\rho + f'(y^0)\,\rho = 0 & \text{dans} \quad Q, \\ \qquad \rho = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \quad \rho(0) = \rho^0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.54}$$

Où ρ^0 est à determiner dans la suite. D'après (3.43) et la proposition (3.4.2) on déduit que

$$\hat{w} = \rho\chi_O. \tag{3.55}$$

Le problème (3.26) devient

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y^0)\, z = \rho\chi_O \text{ dans } Q, \\ z(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \tag{3.56}$$

finalement le problème d'existance du contrôle optimale $\hat{w}$ devient le suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho^0 \text{ dans un espace convenable,verifiant} \\ \qquad z(0,\rho) = -q_0(0), \\ \qquad \hat{w} = \rho\chi_O. \end{cases} \tag{3.57}$$

Calcule de ρ^0 On définit l'opérateur Λ par

$$\Lambda\rho^0 = z(0,\rho). \tag{3.58}$$

Cet opérateur est défini pour ρ^0 assez régulier par exemple pour $\rho^0 \in L^2(\Omega)$. On doit donc résoudre dans un espace fonctionnel convenable

$$\Lambda\rho^0 = -q_0(0), \tag{3.59}$$

on multiplie (3.56) par $\tilde{\rho}$, où $\tilde{\rho}$ est la solution de (3.54) correspondante à $\tilde{\rho}^0$ et en intégrant par partie on obtient

$$\left\langle \Lambda\rho^0, \tilde{\rho}^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{O\times(0,T)} \rho\tilde{\rho}dxdt, \tag{3.60}$$

en particulier pour $\tilde{\rho}^0 = \rho^0$

$$\left\langle \Lambda\rho^0, \rho^0 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{O\times(0,T)} \rho^2 dxdt. \tag{3.61}$$

On introduit la quantité

$$\left\|\rho^0\right\| = \left(\int_{O\times(0,T)} \rho^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.62}$$

La quantité (3.62) définit une norme pré-hilbertienne sur $L^2(\Omega)$. En effet, si

$$\left\|\rho^0\right\| = 0,$$

alors d'après (3.62)

$$\|\rho\|_{L^2(O)} = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\rho \equiv 0 \text{ dans } O,$$

et si les coefficients de A et $f'(y^0)$ sont assez réguliers, on déduit d'après le théorème d'unicité de Mizohata (1.5.2) que

$$\rho \equiv 0 \text{ dans } Q,$$

ce qui implique que $\rho^0 = 0$. Soit maintenant, F le sous espace de Hilbert complété dans $L^2(\Omega)$ pour la norme (3.62).

Remarque 3.4.3 [41] *l'espace F existe c'est l'espace le plus grand des données intiales ρ^0 pour lesquelles la solution correspondante ρ du problème (3.54) vérifie $\rho\,|_O \in L^2(O)$.*
- Si F' désigne le duale de F, alors, $q_0(0) \in F'$.

Théorème 3.4.1 [41] *L'opérateur Λ est un isomorphisme de F sur F' de plus il est symétrique ; $\Lambda^* = \Lambda$, alors l'équation (3.59) admet une solution unique*

$$\rho^0 = -\Lambda^{-1} q_0(0), \tag{3.63}$$

ce qui montre l'existence et l'unicité d'une sentinelle définie par h_0 et donnée par

$$S(\lambda,\tau) = \int_{O\times(0,T)} (h_0 + \rho)\, y(x,t,\lambda,\tau)\, dxdt. \tag{3.64}$$

Remarque 3.4.4 *Pour que la sentinelle ne soit pas nulle, il suffit de choisir $h_0 \neq \rho$.*

3.4.6 Estimation du terme de pollution

Théorème 3.4.2 *Comme y^0, ρ et ρ^0 sont calculés sur O, alors, le terme de pollution $\lambda\hat{\xi}$ est estimé par la relation*

$$\int_{O\times(0,T)} (q_0 + z)\, \lambda\hat{\xi} dxdt = \int_{O\times(0,T)} (h_0 + \rho) \left(y_{obs} - y^0\right) dxdt. \tag{3.65}$$

où y^0,q_0 et z sont respectivement les solutions de (3.12)*,* (3.25) *et* (3.26) *et y_{obs} est l'état observé sur O pendant l'intrevalle du temps $[0, T]$.*

Démonstration. Soit $S(\lambda, \tau)$ la sentinelle définie par h_0, de l'équation (3.15) on a

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) &= (S_{obs} - S(0,0)) \\
&= \int_{O\times(0,T)} (h+\rho)\, y_{obs}(x,t)\, dxdt - \int_{O\times(0,T)} (h+\rho)\, y^0 dxdt
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_{O\times(0,T)} (h_0+\rho)\, y_\lambda(x,t)\, dxdt$$

où y_λ est solution du problème suivant

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial t} + Ay_\lambda + f(y_\lambda) = \hat{\xi} & \text{dans} \quad Q = \Omega\times(0,T), \\
y_\lambda(0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\
y_\lambda = 0 & \text{sur} \quad \Sigma,
\end{cases} \tag{3.66}$$

on a alors

$$\lambda \int'_{O\times(0,T)} (h_0+\rho) y_\lambda(x,t)\, dxdt = \int_{O\times(0,T)} (h_0+\rho)\left(y_{obs} - y^0\right) dxdt, \tag{3.67}$$

en multipliant (3.21) (avec $w\chi_O = \rho$) par y_λ et en intégrant par partie on obtient

$$\lambda \int_{O\times(0,T)} (h_0+\rho)\, y_\lambda(x,t)\, dxdt = \lambda \int_{O\times(0,T)} q\hat{\xi} dxdt, \tag{3.68}$$

de (3.67) et (3.68) on obtient

$$\lambda \int_{O\times(0,T)} q\hat{\xi} dxdt = \int_{O\times(0,T)} (h_0+\rho)\left(y_{obs} - y^0\right) dxdt.$$

D'où le résultat du théorème. ■

Chapitre 4

LA CONTROLABILITE MAXIMALE &LA CONTRÔLABILITE FAIBLE AVEC UN NOUVEAU CHOIX D'ACTIONNEUR

Dans ce chapitre,on définie une autre notion de la contrôlabilité c'est la contrôlabilité maximale.Puis, nous allons introduire un nouveau choix d'actionneur pour confirmer la contrôlabilité faible.

4.1 Contrôlabilité maximale d'un système parabolique

Nous allons considerer une équation de chaleur linéaire dont la donnée initiale et les conditions frontières sont nulles . Le système comporte un terme de contrôle.

4.1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert de R^n representant le domaine geometrique du système (n=1,2,3 pour les applications) et soit $T \geqslant 0$ on suppose que la frantiere $\partial\Omega$ de Ω est assez regulière.
On considère le système decrit par l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + Ay\,(t) = Bu & \text{sur } Q \\ y\,(0) = 0 & \text{sur } \Omega \\ y\,(t) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.1}$$

où A gènère un semi groupe fortoment continu$(S\,(t))_{t\geq 0}$ sur l'espece d' état $X = L^2\,(\Omega)$, $B \in \mathfrak{L}(U, X)$ et $u \in L^2\,(0, T, U)$,$U = R^p$ étant l'espace des contrôles.
L'opèrateur A fournit la dymanique du système et l'opèrateur B nous reuseigne sur la nature des actionneurs excitant le système et leurs localisations.
Notons $y_u(t)$ la solution du système (4.1).

Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors (4.1) admet une solution faible unique sur $[0, T]$ donnèe par :

$$y_u(t) = S(t)y(0) + \int_0^T S(t-s)Bu(s)ds$$

On considère $H : L^2(0, T, R^p) \to X$ L'opèrateur dèfini par

$$H_B u = \int_0^T S(t-s)Bu(s)ds \quad \forall u \in L^2(0, T, R^p) \tag{4.2}$$

L'adjoint H^*de H est défini par :

$$H^* z^* = B^* S^*(T - .)z^* \quad \forall z^* \in X^*$$

4.1.2 Contrôlabilitè exacte

Le système considéré est (4.1) et X désigne l'espace d'état ; $T > 0$.

Définition 4.1.1 *Le système (4.1) est dit exactement contrôlable sur* $[0, T]$ *si :*

$$\forall y_d \in X, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ telle que } : y(T) = y_d.$$

Remarque 4.1.1 *La définition précédente equivalante à : l'opérateur H_T étant défini en* (4.2) .

Définition 4.1.2 *Soit $X_1 \subset X$ un sous espace de X, le système(4.1) est dit exactement contrôlable dans X_1 si : $\forall y_d \in X_1$, $\exists u \in L^2(0, T; U)$ telle que: $y(T) = y_d$.*

Remarque 4.1.2 *La définition précédente est équivalente à $X_1 \subset ImH_T$.*

4.1.3 Caractérisation de la contrôlabilité exacte

Proposition 4.1.1 *Le système (4.1) est exactement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si :*

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que} : \|y^*\|_{X'} \leq \gamma \|B^* S^*(.)y^*\|_{L^2(0,T;U')}$$

pour tout y^* dans X'.

On utilise le lemme suivant pour montrer la proposition (4.1.1) .

Lemme 4.1.1 [16] *Si X_1, U_1 sont deux espaces de Banach reflexifs et $H_1 \in (U_1, X_1)$ alors , il ya équivalence entre :*
i) $X_1 \subset Im(H_1)$
ii) $\exists \gamma > 0$ tel que :$\|y^*\|_{X_1'} \leq \gamma \|H_1^* y^*\|_{U_1'}$, pour tout y^* dans X_1'

Démonstration. (de La proposition 4.3.1)
On pose $U_1 = L^2(0,T;U)$, $X_1 = X$ et $H_1 = H_T$
$U_1^{'} = L^2(0,T;U)$, $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continue sur $X_1^{'}$
on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle y^*, Hu\rangle & = & \left\langle y^*,_0^T S(T-s)Bu(s)ds\right\rangle \\ & = & {}_0^T \langle y^*, S(T-s)Bu(s)\rangle\, ds \\ & = & {}_0^T \langle B^*S^*(T-s)y^*, u(s)\rangle\, ds \end{array}$$

alors

$$\left\langle_0^T B^*S^*(T-s)y^*ds, u\right\rangle = \langle H_T^*y^*, u\rangle$$

et donc

$$H_T^*y^* = B^*S^*(.)\,y^*$$

Ce qui achève la démonstration. ■
La proposition de caractérisation donnée ci-dessus est intéressante dans la mesure où on a ramené l'exacte contrôlabilité à une inégalité assez facile à expliciter pour un système donné.

Proposition 4.1.2 *Si H_T est compact alors le système* (4.1) *n'est pas exactement contrôlable.*

Démonstration. Le système (4.1) est exactement contrôlable sur $[0,T]$

$$\begin{array}{rl} \Longleftrightarrow & ImH_T = X \\ \Longleftrightarrow & \bigcup_{n\in N} H_T(B_n) = X \end{array}$$

où B_n est la boule centrée à l'origine est de rayon n dans $L^2(0,T;U)$ (i.e. $B_n = B(0,n)$).
1) ${}_{n\in N}H_T(B_n) \subset ImH_T$ (évidente).
2) $ImH_T \subset_{n\in N} H_T(B_n)$?

$$y_0 \in ImH_T \Rightarrow \exists u_0 \in L^2(0,T;U), y_0 = H_T(u_0)$$

$$\begin{array}{rcl} u_0 & \in & L^2(0,T;U) \Rightarrow \exists n_0, (n_0 = E(\|u_0\|)+1), u_0 \in B(0,n_0), \\ y_0 & = & H_T(u_0) \subset H_T(B_{n_0}) \subset_{n\in N} H_T(B_n). \end{array}$$

Alors

$$ImH_T =_{n\in N} H_T(B_n).$$

Ceci implique :

$$\overline{{}_{n\in N}H_T(B_n)} = X$$

H_T est compact alors H_T transforme tout borné à une partie relativement compact. Alors $\overline{H_T(B_n)}$ étant compact (image de la boule bornée par une application compact), alors

$$\overset{\circ}{\overline{H_T(B_n)}} = \varnothing, \forall n \in N,$$

et d'après le théorème de Baire on déduit que

$$\overset{\circ}{\widehat{\overline{{}_{n\in N}H_T(B_n)}}} = \varnothing$$

alors

$$\overset{\circ}{\widehat{X}} = \varnothing,$$

donc

$$X = \varnothing,$$

c'est une contradiction. ■

Corollaire 4.1.1 *Si $S(t)$ est compact, pour tout $t > 0$, alors le système (4.1) n'est pas éxactement contrôlable.*

Démonstration. On pose $T_\varepsilon = T - \varepsilon$, il est facile de voire que :

$$S(\varepsilon) H_{T_\varepsilon} u +_{T-\varepsilon}^{T} S(T-s) Bu(s)ds = Hu.$$

$S(t)$ est compacte pour tout $t > 0$ et H_T est borné alors, $S(s)H_T$ est compact. Quand $\varepsilon \to 0, S(\varepsilon)H_{T_\varepsilon}$ converge uniformément ver H_T alors, H_T est compact. D'ou' le résultat du corollaire. ■

Définition 4.1.3 *Le système (4.1) est dit exactement controlable dans X sur $[0,T]$ si : $ImH = X$*

Proposition 4.1.3 *Si B est compact ou A gènère un semi-groupe fortement continu $(S(T))_{t\geq 0}$ est compact pour tout $t > 0$ alors le système (4.1) n'est pas exactement contrôlable.*

On defini l'opérateur H associe à B par

$$H_B u =_0^T S(t-s)Bu(s)ds \quad \forall u \in L^2(0,T,U)$$

L'operateur H_B est lineaire borné sur l'espace de controle U à valeur dans l'espace d'état X .

On désigne par W l'espace suivant :

$$W = \{\mathfrak{L}(U,X), \text{l 'espace des opérateurs linéaires bornes de } U \text{ dans } X.\}$$

On dèfinit sur cet espace une relation d'équivalence R :

$$\forall B_1, B_2 \in W \ , B_1 R \ B_2 \quad \Longleftrightarrow ImH_{B_1} = ImH_{B_2}$$

" Im" désigne l'image de l'opérateur

La relation R est une relation d'équivalence sur l'espace des opérateur W.On définit une relation d'ordre sur l'espace quottions W/R par

$$\forall B_1, B_2 \in W/R \ , B_1 \leq B_2 \ \ ssi \ ImH_{B_1} \subset ImH_{B_2}$$

Cette relation vérifie les hypothéses du lemme de zorn.
Donc on va démontrer que toute partie $w \subset W$ totalement ordonèe est majoree

Théorème 4.1.1 *L'espace des classes d'opérateurs contrôles possède une classe d'opérateurs maximale.*

Démonstration. Soit $V = \{B_{i\in I}\}$,une famille totalement ordonnée dans l'espace quotient et soit

$$Z =_{B\in V} ImH_B$$

Soit $y \in Z$, il existe au moins un B_i tel que $y \in H_{Bi}$,donc il existe un $u \in U$ tel que $H_{B_i}(u) = y$.
On pose $H_B(u) = H_{B_i}(u)$,cette construction de B n'est pas unique, on prend tous les opérateurs B ayant la même image Z, cette classe d'opérateurs est considére comme un majorant de la famille. Par conséquence, toute partie totalement ordonnée est majorée. Par application du lemme de zorn, il existe un élément maximal dans l"espace des classes d'opérateurs des contrôles. ■

4.1.4 Applications

Dans cette section on va prèsenter un exemple d'application de l'équation de la chaleur ;

$$\begin{aligned} \frac{dy\,(t)}{dt} - \frac{\partial^2}{\partial^2 t} y\,(t) &= Bu \ , \ (t;x) \in [0,1] \times [0,1] \\ y\,(0,x) = 0 \ \text{ sur } \Omega \ , \ x \in [0,1] \\ y\,(t,0) = 0 \ \text{ sur } \Sigma \ \ , \ t \in [0,1] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Les opérateurs compacts B nen sont pas necessairment maximaux dans l'espace d'etat $L^2(0,1)$ car si B est compact, l'opérateur H_B est compact donc s'il est surjectif l'espace d'etat est de dimention fini contradiction avec la dimension de l'espace d'etat. voir Zerrik [34]

4.2 Contrôlabilite faible et nouveau choix d'actionneurs

4.2.1 Formulation mathématiques du problème

Soit Ω un ouvert borné non vide de IR^n (n=1,2,3 pour les applications) de frontière Γassez régulière et $T > 0$. On note $Q = \Omega \times [0,T]$, $\sum = \Gamma \times]0,T[$ et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire dans L_2. Soit $y(x,t;u)$ la solution de système

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) + Ay\,(t) = Bu & \text{dans} Q \\ y\,(0) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \ \ y = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.4}$$

où A gènère un semi-groupe fortement continu$(S\,(t))_{t\geq 0}$ sur l'espece d'état $X = L^2\,(\Omega)$, $B \in \mathfrak{L}(U,X)$ et $u \in L^2\,(0,T,U)$, $U = R^p$ étant l'espace des contrôles. L'opèrateur A fournit la

dymanique du système. L'opèrateur B nous renseigne sur la nature des actionneurs excitant le système et leurs localisations.
Notons $y_u(t)$ la solution du système (4.4).

Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors (4.4) admet une solution faible unique sur $[0, T]$ qui est donnèe par

$$y_u(t) = S(t)y(0) +_0^T S(t-s)B(s)ds =_0^T S(t-s)B(s)ds.$$

On considère $H : L^2(0, T, R^p) \to X$ l'opèrateur dèfini par

$$Hu =_0^T S(t-s)B(s)ds, \quad \forall u \in L^2(0, T, R^p).$$

L'adjoint H^*de H est défini par :

$$H^*z^* = B^*S^*(T-.)z^* \quad \forall z^* \in X^*,$$

4.2.2 Actioneurs strategiques

Définition 4.2.1 *Le systéme (4.4) est dit faiblement contrôlable sur $[0, T]$ si pour tout y_d dans X*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ telle que } : \|y(T) - y_d\| \leq \varepsilon.$$

Définition 4.2.2 *Une suite d'actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{i=1,p}$ est dite stratégique si le système qu'ils excitent est faiblement contrôlable sur Ω.*

Pour les systèmes distribués, la notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée, nous pouvons la caractériser par :

Définition 4.2.3 *Soit ω_i fermé contenu dans Ω et $g_i \in L^2(\omega_i)$,on appelle actionneur zone le couple (ω_i, g_i) ou'*
i) ω_i représente le support de l'actionneur.
ii) g_i définit la répartition spatial de l'actionneur.

On suppose que le système (4.4) posède une base complete des fonctions propres $(\varphi_{nj})_{n\geq 1, j=1,r_n}$ de $L^2(\Omega)$ et λ_n les valeurs propres associées de multiplicité r_n .
Alors le semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sera prèsenté par :

$$S(t) =_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t}{}_{j=1}^{r_n} \langle ., \varphi_{nj} \rangle \varphi_{nj}. \tag{4.5}$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat de caractérisation suivant :

4.2.3 Caractérisation de la contrôlabilitè faible

Théorème 4.2.1 *On suppose que* $supr_i = r < \infty$ *,alors le système (4.4) est faiblement controlable sur* Ω *ssi :*

$$\begin{aligned} 1. \qquad p &\geq r \\ 2.rang\ G_n &= r_n, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

où $G_n = (G_n)_{i,j}$, $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r_n$ *dèfini par :*

$$(G_n)_{i,j} = \langle \varphi_{nj}, g_i \rangle_{\Omega_i}.$$

Démonstration. Rappelons que la contrôlabilité est équivalente à

$$\ker H^* = \{0\} \quad pour \quad z^* \in L_2(\Omega),$$

les (φij) étant complet dans $L_2(\Omega)$, nous avons

$$(H^* z^*)(t) = \left({}_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (T-t) r_n}_{j=1} \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{\Omega_k} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle \right)_{k=1,p}.$$

Si le systéme (4.4) n'est pas controlable sur Ω, il existe $z^* \neq 0$ tel que

$$H^* z^* = 0 \Leftrightarrow {}_{j=1}^{r_n} \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{\Omega_k} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle = 0, \forall n \geq 1, 1 \leq k \leq p.$$

Posons z_n défini par

$$z_n = \begin{bmatrix} \langle \varphi_{n1}, z^* \rangle \\ \cdots \\ \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle \end{bmatrix},$$

alors

$$G_n z_n = 0, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow rang G_n \neq r_n.$$

Inversement, soit n tel que $rang G_n \neq r_n$ alors il existe $z_n = \begin{bmatrix} z_{n1} \\ \cdots \\ z_{nr_n} \end{bmatrix} \neq 0$ tel que $G_n z_n \neq 0$.

Considérons $z^* \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\langle z^*, \varphi_{jk} \rangle = 0 si\ j \neq n, 1 \leq k \leq r_n,$$

il vient

$${}_{j=1}^{r_j} \langle g_k, \varphi_{ji} \rangle_{\Omega_k} \langle z^*, \varphi_{ji} \rangle = 0, \forall j \neq n, 1 \leq k \leq p$$

et par suite

$${}_{j=1}^{r_n} \langle g_k, \varphi_{ni} \rangle_{\Omega_k} \langle z^*, \varphi_{ni} \rangle = 0, 1 \leq k \leq p,$$

autrement dit il existe $z^* \neq 0 \in L^2(\Omega)$ tel que $H^* z^* = 0$, c'est à dire que le système n'est pas contrôlable sur Ω.

Notons que le résultat du théorème implique que le nombre d'actionneurs est au moins égal à $r = \sup r_n$. ■

4.2.4 Le nouveau Choix d'actionneurs

Si on choisi les g_k defini par

$$g_k =_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} \alpha_{nj}^{k-1} \varphi_{nj} \ , k = 1, p \ , 0 \leq \alpha_{nj} \leq 1$$

on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.2.2 *On suppose que* $supr_n = r < \infty$, *alors le système (4.4) est faiblement controlable sur* Ω *ssi :*

$$p \geq r$$

où $G_n = (G_n)_{k,j}$, $1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq r_n$ dèfini par :

$$(G_n)_{k,j} = \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{\Omega_k}.$$

.

Démonstration. Le systeme (4.4) est faiblement contrôlable ssi $\ker H^* z^* = \{0\}$.
On a

$$\ker H^* z^* = \{0\} \Leftrightarrow_{n=1}^{\infty} e_{j=1}^{\lambda_n (T-t) r_n} \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{\Omega_k} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle = 0,$$

et comme $\{e^{\lambda_n}\}$ forme une base dans $L^2(\Omega)$ alors,

$$ {}_{j=1}^{r_n} \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{\Omega_k} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle = 0 \quad k = 1, p \ , \forall n,$$

pour

$$g_k =_{n=1}^{\infty} {}_{j=1}^{r_n} \alpha_{nj}^{k|-1} \varphi_{nj} \ , k = 1, p \ , 0 \leq \alpha_{nj} \leq 1,$$

on obtient

$$ {}_{j=1}^{r_n} \langle \varphi_{nj}, {}_{n=1}^{\infty} {}_{j+1}^{r_n} \alpha_{nj}^{k-1} \varphi_{nj} \rangle_{\Omega_k} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle = 0 \quad k = 1, p \ , 0 \leq \alpha_{nj} \leq 1, \forall n,$$

$$\Longrightarrow_{j=1}^{r_n} \alpha_{nj}^{k-1} \langle \varphi_{nj}, z^* \rangle = 0 \quad k = 1, p \ , , 0 \leq \alpha_{nj} \leq 1 \forall n.$$

pour $k = 1$

$$\langle \varphi_{n_1}, z^* \rangle + \langle \varphi_{n_2}, z^* \rangle + ... + \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle = 0,$$

pour $k = 2$

$$\alpha_{n_1}^1 \langle \varphi_{n_1}, z^* \rangle + \alpha_{n_2}^1 \langle \varphi_{n_2}, z^* \rangle + ... + \alpha_{nr_n}^1 \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle = 0,$$

pour $k = p$

$$\alpha_{n_1}^{p-1} \langle \varphi_{n_1}, z^* \rangle + \alpha_{n_2}^{p-1} \langle \varphi_{n_2}, z^* \rangle + ... + \alpha_{nr_n}^{p-1} \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle = 0,$$

qui est équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nrn} \\ . & & \\ . & & \\ \alpha_{n1}^{p-1} & \alpha_{n2}^{p-1} & \alpha_{nrn}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_{n1}, z^* \rangle \\ \langle \varphi_{n2}, z^* \rangle \\ \\ \\ \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle \end{pmatrix} = 0.$$

De la forme matracielle

$$AX = 0,$$

où A est une matrice de P ligne et r_n colone .
où A est une matrice de P ligne et r_n colone de polynôme de degré P,
ainssi que les vecteurs sont lineairement independament
on a

$$AX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

$$X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle \varphi_{n_1}, z^* \rangle \\ \langle \varphi_{n_2}, z^* \rangle \\ \\ \\ \langle \varphi_{nr_n}, z^* \rangle \end{pmatrix} = 0 \quad , \forall n$$

z^*est orthogonal à la base (φ_{nr_n})

$$\Longrightarrow z^* = 0 \Longrightarrow \ker H^* z^* = \{0\}.$$

D'ou le resultat . ■

4.3 Conclusion

Dans cette thèse, un nouveau opérateur borné qui permit de definir une nouvelle notion de la controlabilité qui s'appelle la contrôlabilité maximle à travers la construction d'une relation d'ordre et l'application du lemme de zorn a été proposé.
De plus, un nouveau résultat de controlabilité faible est obtenu en simplifiant les conditions de controlabilité faibles introduites par Al Jai. L'idée principale consiste à réduire les conditions d'Al Jai de sorte que les propriétés de controlabilité faible soient réservées.

Bibliographie

[1] Kaarer I, Ayadi,A. Weak Controllability and the New Choice of Actuators . Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 14, Number 2, pp. 325-330, 2018.

[2] Sandel S, Ayadi,A. La théorie de la sentinelle et problème d'identification, Thèse de Doctorat ; université de Constantine 1, Constantine, 2018.

[3] Kaarer I , Ayadi,A. Controlabilite maximale d'un système parabolique. science & Technologie A-N 43,pp.63-65, juin 2016.

[4] Berhail A, A, Omrane. Optimal Control of the Ill-Posed Cauchy Elliptic Problem, Int. J. Differ. Equ.Volume 2015, Article ID 468918, 2015.

[5] Berhail A, Ayadi A. Etude des systèmes Hyperboliques à données manquantes, Thèse de doctorat. université de Constantine 1, Constantine, 2013.

[6] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer Science & Business. Media, 2012.

[7] Lui Y, Analyse et contrôle de quelques problèmes d'interaction. Fluide-Structures, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2011.

[8] Miloudi Y. Sentinelles des systeme dissipatifs. Thèse de doctorat, Université Ahmed Ben Bella d'Oran 1 Es Senia, algeria, 2011.

[9] Cindea N. Problèmes inverses et contrôlabilité avec applications en élasticité et IRM. Thèse doctorat, Université de Nancy, 2010.

[10] Berhail A, Ayadi A, Estimation of pollution term in Petrowski system with incomplete data, Int. J. Open Problems Comp, Math., Vol 3, N 4, 2010.

[11] Massengo G, Puel JP. Boundary sentinels with given sensitivity. Rev Mat Complut,22 : 165-185, 2009.

[12] Miloudi Y, Nakoulima O, Omrane A. On the instantaneous sentinels in pollution problems of incomplete data. Inverse Probl Eng ; 17 : 451-459, 2009.

[13] Mophou GM, Velin J. Null controllability problem with constraint on the control deriving from boundary discriminating sentinels. Nonlinear Anal ; 71 : e910-e924 ; 2009.

[14] El Jai, Zerrik E, Afifi A. Systèmes dynamiques : Analyse régionale des systèmes linéaires distribués. Tome 2, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.

[15] Hinze M, Pinnau R, Ulbrich M, Ulbrich S. Optimization with PDE constraints. Springer Science & Business Media, 2008.

[16] Massengo G, Nakoulima O. Sentinels with given sensitivity. Eur J Appl Math ; 19 : 21-40, 2008.

[17] Nakoulima O. A revision of J. L. Lions' notion of sentinels. Portugal Math ; 65 : 1-22, 2008.

[18] Nakoulima O. Optimal control for distributed systems subject to null controllability. Application to discriminating sentinels, Esaim Contr Op Ca V ; 13 : 623-638, 2007.

[19] Velin J. Discriminating distributed sentinel involving a navier stokes problem and parameter identification. in : Esaim, Proseedings : EDP Sciences, pp. 143-166, 2007,.

[20] Burger M. Parameter identification, Lecture Note. Winter School Inverse Problèmes, 2005.

[21] Kaarar I, Ayadi A. Sentinelles ponctuelles. mémoire Magistère, Université mentouri de Constantine, Constantine 2005.

[22] Puel JP. Contrôlabilité approchée et contrôlabilité exacte. Notes de cours de DEA Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.

[23] Mose R, Stoeckel ME, Poulardc C, Ackerer P, Lehmann F. Transport paremeters identification : application of the sentinel method, Computational. Geoscience ; 4(3) : 251-273, 2000.

[24] Naicase S. Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles. Paris, France : Dunod, 2000.

[25] Paulin JS, Vanninathan J. Boundary pollution and sentinels in thin domain. C R Acad Sci ; 326 : 1299-1304, 2000.

[26] Bodart O, Demeestere P. Contrôle frontière de l'explosion en temps fini de la solution d'une équation de combustion. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics ; 325(8) : 841-845, 1997.

[27] Demeestere P. Méthode des sentinelles, Etude comparative et application à l'identification d'une frontière, contrôle du temps d'explosion d'une équation de combution. Thèse de Doctorat, Université de Thechnologie de Compiègne, 1997.

[28] Kernevez JP. The Sentinel Method and its Application in the Enviromental Pollution Problem. Boca Raton, Florida, USA : CRC Press, 1997.

[29] Lions JL, Controllability, penalty and stiffness. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze ; 25(3-4) : 597-610, 1997.

[30] Paulin JS, Vanninathan M. Sentinelles et pollutions frontières dans des domaines minces. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics ; 325(12) : 1299-1304, 1997.

[31] El Jai, Simon MC, Zerrik E, Pritchard AJ, Regional Controlability of distributed Parameter Systems. International Journal of Control ; 62(6) : 1351-1365, 1995.

[32] Ainseba BE, Kernevez JP, Luce R. Application des sentinelles a l'identification des pollutions dans une rivière. Esaim-Math Model Num ; 28 : 297-312, 1994.

[33] Bodart O, Fabre C. Contrôle insensibilisant la norme de la solution d'une équation de la chaleur semi-linéaire. Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série 1, Mathématique ; 316(8) : 789-794 ,1993.

[34] Zerrik E. Analyse Régionale des systèmes distribués. Thèse doctorat. Université Mohamed V Rabat, Maroc, 1993.

[35] Lions JL. Sentinelles pour les Systèmes Distribuées a Données Incomplètes. Paris, France : Masson, 1992.

[36] Simon J. Domain variation for drag in stokes flow. In : Control theory of distributed parameter systems and applications. Inf. Springer, , pp. 28-42, 1991.

[37] Lions JL. Furtivité et sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes. C R Acad Sci ; 311 : 691-695, 1990.

[38] Boutoulout A, El Jai A, Zerrik E. Actuators and Regional Boundary Controlability of Parabolic Systems, 1989.

[39] Lions JL, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 2. Masson, 1988.

[40] Lions JL, Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribuès, Vol 1. Masson, 1988.

[41] Lions JL. Sur les sentinells des systèmes distribués, Le cas des conditions initiales incompletes. C R Acad Sci ; 307 : 819-823, 1988.

[42] Saut JS, Scheurer B. Unique continuation for some evolution equations. Journal of differential equations ; 66(1) : 118-139, 1987.

[43] A. El Jai - A. J. Pritchard : Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués. Masson. RMA 3. Paris. 1986.

[44] Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. New York, NY, USA : Springer-verlag, 1984.

[45] Brezis H. Analyse Fonctionnelle, Théorie et application. Masson, 1983.

[46] Ekeland I, Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam, The Netherlands : North-Holland Publ Company, 1976.

[47] Chavent G. Estimation de paramètres distribués dans les équations aux dérivées partielles. in : computing method in Applied Sciences and Enginneering, part 2, Lecture notes in Computer Sciences 11, Springer- Verlag, New york, pp. 361-390 ; 1974.

[48] Chavent G. Analyse Fonctionnelle et identification de coefficients repartis dans les équations aux dérivées partielles. Thèse Doctorat, Paris, 1971.

[49] Butkovski AG, Egorov AI, Luries KA. Optimal control of distributed systems, Saim J Cont ; 6(3) ; 1968.

[50] Lions JL, Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications vol 1. Paris, France : Dunod, 1968.

[51] Lions JL, Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications vol 2. Paris, France : Dunod, 1968.

[52] Lions JL, Lelong P. Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. 1968.

[53] Mizohata Z. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A : Mathematic ; 31(3) : 219-239, 1958.