REPUPLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES FRÉRES MENTOURI CONSTANTINE 1

Faculté Sciences Exactes

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

N° d'ordre : 182/Ds/2018
N° série : 09/Math/2018

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Sur les bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles

Option :
Algèbre
Par :

ZOHEIR CHEBEL

Devant le jury :

Président:	**S.DJEZZAR**	**Prof**	**Université. Constantine1**
Rapporteur:	**A.MAKHLOUF**	**Prof**	**Université. Mulhouse. Fr**
Examinateurs:	**N.MEBARKI**	**Prof**	**Université. Constantine1**
	T.BOUGJEDAA	**Prof**	**Université. Jijel**
	N.TARABELSI	**Prof**	**Université. Sétif**
	A.BERKANE	**M.C.A**	**Université. Constantine1**

En collaboration avec le Laboratoire des Mathématiques
Université de Haute Alsace FRANCE

Soutenue publiquement le 21 Octobre 2018

Table des matières

0.1 Introduction

L'intérêt pour les structures algébriques a été impulsé par des théories en physique qui ont pour objectif de modéliser par des théories mathématiques des phénomènes physiques. De nombreuses structures algébriques sont apparues naturellement dans les concepts de physique.
Il s'agit essentiellement de la structure d'algèbre associative, algèbre de Lie, algèbre de Poisson et algèbre de Hopf ou groupe quantique ; l'algèbre régissant les observables est une algèbre de Poisson dans le cas de la mécanique classique, c'est à dire formée d'une structure commutative et associative, et une structure de Lie avec une compatibilité entre les deux opérations. C'est une algèbre non-commutative dans le cas de la mécanique quantique. Par ailleurs, les structures de Poisson émergent naturellement de l'étude des systèmes intégrables en mécanique classique. Les systèmes intégrables quantiques sont basés essentiellement sur la méthode de diffusion inverse quantique (QISM, Quantum inverse scattering method). Cette approche développée par L.D. Faddeev et ses collaborateurs a conduit à mettre en évidence les groupes quantiques en mathématiques. Ces structures algèbriques sont liées directement aux algèbres de Hopf. Elles ont été vulgarisées par Drinfel'd dans les années 80/90. Il s'en est suivi un grand intérêt pour les bialgèbres et les algèbres de Hopf, qui a conduit à un nombre important de publications sur ce sujet. La définition d'une algèbre de Hopf ou encore d'un groupe quantique nécessite la dualité des applications de multiplication de l'algèbre et son unité. Elle fait intervenir une deuxième opération appelée comultiplication, qui est le "dual" de la multiplication, ainsi qu'une counité et une antipode. Un groupe quantique est une algèbre de Hopf munie d'une R-matrice ou d'une structure quasi-triangulaire (version duale). Une R-matrice est une solution de la fameuse équation de Yang-Baxter. Ceci n'est autre qu'un automorphisme c de $V \otimes V$ (V étant l'espace vectoriel sous-jacent de l'algèbre) obéissant à l'équation :

$$(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)(c \otimes id_V) = (id_V \otimes c)(c \otimes id_V)(id_V \otimes c) \tag{0.1.1}$$

Notons aussi que les groupes quantiques peuvent être vus comme une déformation non commutative et non cocommutative des algèbres de Hopf. Les algèbres de Hopf sont apparues également en théorie quantique des champs. Ceci grâce au travail de Dirk Kreimer, en étudiant du point de vue algébrique la renormalisation des divergences en théorie de perturbation des champs.
La renormalisation est une procédure de soustraction des infinis qui interviennent en théorie quantique des champs. En théorie de perturbation l'amplitude de Feynman, associée à un diagramme de Feynman, est une intégrale divergente qu'on essaie de la ramener à une quantité finie au moyen de la procédure de Bougoliubov de renormalisation. Kreimer a établi un lien entre la constante de renormalisation et l'antipode d'une algèbre de Hopf sur les diagrammes de Feynman. Cette algèbre a été précisée dans son travail avec Alain Connes. Il s'agit de l'algèbre dite de Connes-Kreimer qui admet une présentation comme algèbre des arbres enracinés. C'est l'algèbre libre engendrée par l'ensemble des arbres munis d'une racine, cette algèbre est graduée et commutative. Sa multiplication est définie par l'union disjointe, et sa comultiplication est définie à l'aide des "coupes d'arbres ou coupes admissibles". Son antipode

joue un rôle particulièrement important dans les applications aux problèmes de renormalisation. Ils ont également noté l'intérêt de la décomposition de Birkhoff, du groupe des caractères et son rôle crucial dans le processus de renormalisation. Ainsi, le processus de renormalisation se ramène à un problème de factorisation qui se traduit en termes algébriques à l'aide des algèbres de Rota-Baxter [18]. Un autre concept mathématique de base, très utilisé en physique, est la notion de déformation. La déformation d'objets mathématiques est une technique très ancienne, elle permet de construire de nouveaux objets ou d'avoir plus d'informations sur l'objet lui même. L'approche la plus populaire en mathématique est la théorie des déformations formelles introduite par M. Gerstenhaber en 1964.

Soient $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour chaque $\mathbb{K}$-espace vectoriel V on note $V[[t]]$ le $\mathbb{K}[[t]]$-module de toutes les séries formelles à coefficients dans V. Soit $A = (V, \mu_0)$ une $\mathbb{K}$-algèbre associative. Alors $A[[t]] := (V[[t]], \mu_0)$ est une $\mathbb{K}[[t]]$-algèbre associative. On appelle déformation associative de A une $\mathbb{K}[[t]]$-algèbre associative $(V[[t]], \mu_t)$ avec $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \cdots + t^n\mu_n$ où $\mu_n \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes_{\mathbb{K}} V, V)$. La théorie des déformations est intimement liée à la cohomologie de l'algèbre, en l'occurrence, celle-ci est la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives. Cette théorie de déformation et ses liens avec la cohomologie s'étendent naturellement aux algèbres de Hopf. Notons que, généralement en physique, la notion de déformation la plus utilisée est la déformation formelle infinitésimale, c'est à dire d'ordre 1, et sans les considérations cohomologiques.

Dans cette thèse, Le travail est partagé en six chapitres chacune couvre une structure algébrique différente de concept et de formalisme dans une finalité bien déterminée.

Le premier chapitre de cette thèse présente les définitions et les notions préliminaires de base concernant les algèbres, coalgèbres, bialgèbres et bialgèbres faibles, algèbres de Hopf, algèbres de Hopf faibles illustrés par des exemples et quelques propriétés générales, ainsi que les outils fondamentaux qui nous intéressent.

Le deuxième chapitre est consacré aux constructions des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles de type Kaplansky. De nombreux exemples illustrent ces constructions. Le contenu correspond essentiellement aux résultats obtenus dans [12].

Le troisième chapitre introduit les nouveaux concepts de Hom-bialgèbres faibles et d'algèbres Hom-Hopf faibles qui sont des généralisations inspirées de la théorie des Hom-algèbres. ils trouvent leurs origine dans les q-déformations en physique. On fournit des constructions de type Twist et des constructions de type Kaplansky, ceci permet de produire de nombreux exemples, comme dans le cas d'une généralsiation de la familles des algèbres de Hopf de Taft-Sweedler. Le contenu provient du deuxième article [13].

Le quatrième chapitre met en évidence la structure de la variété algébrique de l'ensemble des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles de dimension n fixée. On établit la classification, à isomorphisme près, des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles dont la dimension de l'espace vectoriel est inférieur où égale à 3. On calcule, par ailleurs, les groupes d'automorphismes de chaque classe, voir [11].

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de l'extension d'Ore dans le cas des algèbres de Hopf faibles. On y étudie, en particulier, la classe obtenue en ajoutant une seconde unité à une algèbre de Hopf, et on donne l'équivalent du théorème de l'extension d'Ore de A.A.Panov dans le cas des algèbres faibles.

Le dernier chapitre présente les éléments d'algèbre homologique et de l'algèbre de cohomologique ainsi le lien naturel avec la théorie des déformations. Il est à noter qu'il y a quelques observations qui ont été faites sur les déformations des bialgèbres faibles.

Chapitre 1

Généralités sur les bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0, à l'exception de quelque exemples.

Dans ce qui suit, nous décrivons brièvement les généralités sur la théorie algébrique des algèbres, des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles, voir [15, 24, 27], puis les morphismes d'algèbre, de bialgèbre faible et d'algèbre de Hopf faible, ainsi, on termine avec les notion de groupe like et les éléments primitives qui sont important pour la classification de ces algèbres de Hopf faibles.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans la suite, nous utilisons la notation de Sweedler pour un comultiplication Δ, soit $\Delta(x) = \sum_{(1)(2)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, $\forall x \in V$. Le signe de sommation est omis quand il n'y a pas d'ambiguïté.

La bialgèbre faible est un K-espace vectoriel V équipé d'une structure d'algèbre donnée par un multiplication m , une unité η, une structure de coalgèbre donnée par un comultiplication Δ et un counité ε de sorte qu'il existe un problème de compatibilité entre ces deux structures exprimées par le fait que Δ et ε sont des homomorphismes d'algèbres, qui ont pour tout :

$$x, y \in V, \Delta(m(x \otimes y)) = \Delta(x) \bullet \Delta(y) \quad \text{et} \quad \varepsilon(m(x \otimes y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

La multiplication $\bullet$ sur $V \otimes V$ est la multiplication habituelle sur le produit des tenseurs,

$$(x \otimes y) \bullet (x' \otimes y') = m\,(x \otimes x') \otimes m\,(y \otimes y')\,.$$

L'unité η est complètement déterminée par $\eta(1)$, que nous désignons par 1. On suppose également que l'unité 1 est préservée par la comultiplication, qui est de $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Une bialgèbre est dit être une *algèbre de Hopf* si l'application identité sur V a un inverse pour le produit de convolution définie par :

$$f \star g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \tag{1.0.1}$$

L'unité pour le produit de convolution étant $\eta \circ \varepsilon$. Pour plus de simplicité, la multiplication μ est notée par un point quand il n'y a pas de confusion. Dans ce qui suit, nous rappelons la définition des bialgèbres faibles.

1.0.1 Algèbre

Définition 1.0.1. Une $\mathbb{K}$-algèbre associative sur V (ou simplement une algèbre) est la donnée d'une application bilinéaire $\mu : V \times V \to V$, appelée multiplication, vérifiant les conditions suivantes :

1. μ est associative, c'est à dire

$$\forall x, y, z \in V, \mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)) = 0. \tag{1.0.2}$$

2. La multiplication μ possède un élément neutre. Ce qui est équivalent à l'existence d'élément $e \in V$ tel que :

$$\forall x \in V, \mu(x, e) = \mu(e, x) = x. \tag{1.0.3}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, l'élément neutre est noté par 1 où $1_{\mathbb{A}}$ et la multiplication par un point "$\cdot$". Une algèbre est de dimension finie si l'espace vectoriel sous-jasent est de dimension finie, la dimension de l'algèbre est la dimension de son espace vectoriel. En utilisant le langage des algèbres de Hopf, une algèbre associative unitaire $\mathbb{A}$ sur V est le triplet (V, μ, η) oú μ et η sont des applications linéaires :

$$\mu : \begin{array}{c} V \otimes V \to V \\ x \otimes y \to \end{array} et \ \ \eta : \begin{array}{c} \mathbb{K} \to V \\ a \to \eta(a) = a \cdot \eta(1) \end{array}$$

vérifiant l'associativité et l'unité. Ces deux conditions se traduisent par la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} & \xrightarrow{\mu \otimes id} & \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \\ \downarrow^{id \otimes \mu} & & \downarrow^{\mu} \\ \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathbb{A} & \xrightarrow{\eta \otimes id} & \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} & \xleftarrow{id \otimes \eta} & \mathbb{A} \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow^{\mu} & \swarrow^{\cong} & \\ & & \mathbb{A} & & \end{array}$$

Exemple 1.0.2. *Voici quelques exemples d'algèbres.*

1. C^n *et* R^n.

2. *Anneaux des polynômes* $\mathbb{K}[x]$ *et* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$.

3. *Si* I *est un idéal engendré par une famille finie de polynômes de* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *alors, le quotient* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]/I$ *détermine une algèbre.*

4. *Algèbre des matrices* $M_n(\mathbb{K})$.

   La multiplication étant la multiplication matricielle. L'algèbre correspondante est non commutative.

5. *Anneaux des polynômes non commutatifs* $\mathbb{K} < x_1, ..., x_n >$ *et leurs quotients.*

6. *Algèbre de groupe.*
   Soit G *un groupe dont les éléments sont* $\{\alpha_i\}_i$. *On considère le* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathbb{KG}$ *engendré par la base* $\{e_{\alpha_i}\}_i$.
   La multiplication est définie par :

$$e_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_j} = e_{\alpha_i \cdot \alpha_j} \tag{1.0.4}$$

7. *Produit tensoriel d'algèbres.*
   Soient $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *deux algèbres sur* $\mathbb{K}$. *Le produit tensoriel* $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ *est défini par :*
   La bilinéarité implique pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{A} v_1, v_2 \in \mathbb{B}, \alpha, \beta \in \mathbb{B}$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha u_1 + \beta u_2) \otimes v_1 & = & \alpha u_1 \otimes v_1 + \beta u_2 \otimes v_1 \\ u_1 \otimes (\alpha v_1 + \beta v_2) & = & \alpha u_1 \otimes v_1 + \beta u_1 \otimes v_2 \end{array}$$

La multiplication est $(u_1 \otimes v_1) \cdot_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}} (u_2 \otimes v_2) := u_1 \cdot_{\mathbb{A}} u_2 \otimes v_1 \cdot_{\mathbb{B}} v_2$. *L'élément neutre étant* $1_{\mathbb{A}} \otimes 1_{\mathbb{B}}$.
Le produit tensoriel vérifie la propriété universelle : il existe une application bilinéaire :

$$\imath : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \qquad (a, b) \longmapsto a \otimes b \tag{1.0.5}$$

telle que pour tout $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* C *et toute application bilinéaire* f *de* $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ *dans* C *il existe une unique application linéaire*
$\widetilde{f} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \to C$ *telle que :* $f = \widetilde{f} \circ \imath$ *:*

1.0.2 Morphisme d'algèbres

Si R est un anneau, la classe des R-algèbres forme une catégorie où les morphismes sont simultanément les homomorphismes d'anneaux et de modules préservant l'unité, on les appelle morphismes d'algèbres.

Définition 1.0.3. Soient (V, μ, η) et(V', μ', η') deux algèbres.
L'application linéaire $f : V \to V'$ est un morphisme d'algèbres si :

$$\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu \qquad \text{et} \qquad f \circ \eta = \eta'. \tag{1.0.6}$$

En particulier, (V, μ, η) et (V, μ', η') sont isomorphes s'il existe une application linéaire bijective f telle que :

$$\mu = f^{-1} \circ \mu' \circ (f \otimes f) \qquad \text{et} \quad \eta = f^{-1} \circ \eta. \tag{1.0.7}$$

Définition 1.0.4. Une coalgèbre est un triplet (V, Δ, ε) où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\Delta : V \to V \otimes V$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{K}$ sont deux applications linéaires satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{array}{rcll} (id \otimes \Delta) \circ \Delta & = & (\Delta \otimes id) \circ \Delta & \text{(coassociativité),} \\ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta & = & id \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id & \text{(co-unité).} \end{array}$$

Les conditions de coassociativité et de co-unité précédentes peuvent se traduire par la commutativité de diagrammes en considérant les diagrammes de l'associativité et de l'unité dans lesquels on inverse les flèches et on remplace μ par Δ et η par ε.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & V \otimes V \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ V \otimes V \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & V \otimes V \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes V \arrow[dr, "\cong"] & V \otimes V \arrow[l, "\varepsilon \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes \varepsilon"] & V \otimes \mathbb{K} \arrow[dl, "\cong"'] \\ & V \arrow[u, "\Delta"] & \end{tikzcd}$$

1. *Soient* (V, Δ, ε) *et* $(V', \Delta', \varepsilon')$ *deux coalgèbres.* Une application linéaire $f : V \to V'$*est un morphisme de coalgèbres si* :

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \varepsilon' \circ f \tag{1.0.8}$$

2. *Si $V = V'$, les deux coalgèbres précédentes sont isomorphes, s'il existe une application linéaire bijective $f : V \to V$ telle que :*

$$\Delta' = (f \otimes f) \circ \Delta \circ f^{-1} \quad \text{et} \qquad \varepsilon' = \varepsilon \circ f^{-1} \tag{1.0.9}$$

3. *La coalgèbre opposée d'une coalgèbre (V, Δ, ε) est la coalgèbre $(V, \Delta^{op}, \varepsilon)$ où $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$ avec $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$.*
4. *Une coalgèbre est dite cocommutative, si elle est égale à sa coalgèbre opposée.*
5. *Un sous-ensemble $I \subset V$ est un coidéal si $\Delta(I) \subseteq I \otimes V + V \otimes I$ et $\varepsilon(I) = 0$.*
6. *Si I est un coidéal d'une coalgèbre $C = (V, \Delta, \varepsilon)$ alors, le quotient C/I est une coalgèbre.*

Proposition 1.0.5. *Le dual d'une coalgèbre est une algèbre.*

Démonstration. Soit (V, Δ, ε) *une coalgèbre et* V^* *son espace dual* ($V^* = \mathbf{Hom}(V, K)$).
On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \lambda & : & V^* \otimes V^* \longrightarrow (V \otimes V)^* \\ f \otimes g & \longrightarrow & \lambda(f \otimes g) \end{array}$$

tel que : $\lambda(f \otimes g)(v_1 \otimes v_2) = f(v_1) \otimes g(v_2)$. *On pose* $\lambda = \lambda \circ \tau_{V^* \otimes V^*}$ *où* $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ *et on définit*

$$\mu := \Delta^* \circ \overline{\lambda} \qquad \eta := \varepsilon^* \tag{1.0.10}$$

L'étoile $*$ indique la transposée de l'application linéaire.
Le triplet (V^*, μ, η) est alors une algèbre. □

Corollaire 1.0.6. *Le dual d'une algèbre de dimension finie est une coalgèbre.*

Ceci n'est pas vraie en dimension infinie.
En effet, si l'espace vectoriel n'est pas de dimension finie, $V^* \otimes V^*$ *est un sous-espace de* $(V \otimes V)^*$. *D'où l'image de* μ^* *est dans* $(V \otimes V)^*$ *mais pas forcément dans* $V^* \otimes V^*$.

Remarque : *Si la coalgèbre est cocommutative alors son dual est une algèbre commutative.*

1.0.3 Bialgèbres et bialgèbres faibles

Maintenant, on donne la définition d'une bialgèbre faible et d'une bialgèbre.

Définition 1.0.7. Une bialgèbre faible est un quintuplet $\mathcal{B} = (V, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$, où $m : V \otimes V \to V$ (multiplication), $\eta : \mathbb{K} \to V$ (unité), $\Delta : V \to V \otimes V$ (comultiplication) et $\varepsilon : V \to \mathbb{K}$ (counité) sont des applications linéaires satisfaisant :

1. Le triplet (V, m, η) est une algèbre associative unitaire, c'est à dire qu'il vérifie les conditions (1.0.2) et (1.0.3),

2. le triplet (V, Δ, ε) est une coalgèbre, c'est à dire

$$(\Delta \otimes id)\Delta(x) = (id \otimes \Delta)\Delta(x), \quad \forall x \in V, \tag{1.0.11}$$

et

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(x) = (id \otimes \varepsilon)\Delta(x) = id(x), \quad \forall x \in V, \tag{1.0.12}$$

3. la condition de compatibilité est exprimée par les trois identités suivantes :

$$\Delta(m(x \otimes y)) = \sum_{(1)(2)} m(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) \otimes m(x_{(2)} \otimes y_{(2)}), \quad \forall x, y \in V, \tag{1.0.13}$$

$$(\Delta \otimes id)\Delta(1) = (\Delta(1) \otimes 1) \bullet (1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1)) \bullet (\Delta(1) \otimes 1), \tag{1.0.14}$$

$$\varepsilon(m(m(x \otimes y) \otimes z)) = \varepsilon(m(x \otimes y_{(1)}))\ \varepsilon(m(y_{(2)} \otimes z)), \quad \forall x, y, z \in V. \tag{1.0.15}$$

Remarque 1.0.8. La condition (1.0.13) signifie que Δ est un morphisme d'algèbre. Mais la condition (1.0.15) veut dire que Δ ne préserve pas nécessairement l'unité 1. Si on a $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, alors, la condition (1.0.14) est satisfaite.

L'identité (1.0.15) est la version faible que ε est un homomorphisme d'algèbre dans le cas des bialgèbres. En effet, si ε est un homomorphisme alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon(m(x \otimes y_{(1)}))\ \varepsilon(m(y_{(2)} \otimes z)) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y_{(1)})\varepsilon(y_{(2)})\varepsilon(z) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y_{(1)}\varepsilon(y_{(2)}))\varepsilon(z) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z) \\
&= \varepsilon(m(m(x \otimes y) \otimes z)).
\end{aligned}$$

Remarque 1.0.9. Quand $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, alors, cette condition aboutit au fait que la counité est un homomorphisme d'algèbre. En effet,

$$\varepsilon(m(x \otimes y)) = \varepsilon(m(m(x \otimes 1) \otimes y)) = \varepsilon(m(x \otimes 1))\varepsilon(m(1 \otimes y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

Ainsi, une bialgèbre est toujours une bialgèbre faible.

1.0.4 Exemples de bialgèbres faibles

Exemple 1.0.10 (Extension de la bialgèbre de Sweedler de dimension 4). *On suppose que* $char(\mathbb{K}) \neq 2$. *Soit* $\mathcal{H}$ *la bialgèbre de Sweedler de dimension 4 donnée par générateurs et les relations qui suivent :* $\mathcal{H}$ *est engendrée par* c *et* x *en tant que* $\mathbb{K}$*-algèbre et les relations sont :*

$$c^2 = e,\ x^2 = 0,\ x \cdot c = -c \cdot x, \qquad \text{où} \quad e \text{ est l'unité}. \tag{1.0.16}$$

Soit $\mathcal{H}'$ *l'algèbre obtenue en lui ajoutant une nouvelle unité* 1 *à* $\mathcal{H}$. *Alors,* $\mathcal{H}'$ *est une bialgèbre faible de dimension 5 définie comme une* $\mathbb{K}$*-algèbre, avec la base* $\{1, e, x, c, c \cdot x\}$ *et les relations (2.1.1) et* $e \cdot c = c \cdot e = c,\ e \cdot x = x \cdot e = x,\ e \cdot e = e$. *la structure de coalgèbre est définie par :*

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = (1 - e) \otimes (1 - e) + e \otimes e, \\
&\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(e) = e \otimes e,\ \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes e, \\
&\varepsilon(1) = 2,\ \varepsilon(e) = 1,\ \varepsilon(c) = 1,\ \varepsilon(x) = 0,
\end{aligned}$$

Cette bialgèbre faible n'est ni commutative et ni cocommutative.

Exemple 1.0.11 (Extension des bialgèbres de Taft de dimension n). *Soit $n \geq 2$ un nombre entier et λ est un élément primitive de racine n^{ime} de l'unité. On considère l'algèbre de Taft $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$, qui est la généralisation de l'algèbre de Hopf de Sweedler, définie par les générateurs c et x ou e est l'unité, avec les relations :*

$$c^n = e, \; x^n = 0, \; x \cdot c = \lambda \; c \cdot x. \tag{1.0.17}$$

Soit $\mathcal{H}'$ l'algèbre obtenue en lui ajoutant une nouvelle unité 1 à $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$.

En mettant une structure de coagèbre définie par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e,\\
&\Delta(e) = e \otimes e, \; \Delta(c) = c \otimes c, \; \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes e,\\
&\varepsilon(1) = 2, \; \varepsilon(e) = 1, \; \varepsilon(c) = 1, \; \varepsilon(x) = 0.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{H}'$ devient une bialgèbre faible de dimension (n^2+1), ayant pour base $\{1, c^i x^j, 0 \leq i, j \leq n-1\}$.

Remarque 1.0.12. Ces exemples de bialgèbres faibles ne sont pas bialgèbres car $\Delta(1) \neq 1 \otimes 1$, et la counité dans cas n'est pas un homomorphisme d'algèbre.

Définition 1.0.13. Produit de convolution

Soit $(\mathcal{H}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bialgèbre faible. On définit alors la convolution $\star$ par :

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta \tag{1.0.18}$$

où $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ et $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sont deux applications linéaires. Si l'identité est inversible par le produit de convolution, on dit que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf faible et l'antipode est notée S.

EIle vérifie par la définition du produit de convolution :

$$id \star S = S \star id = \eta \circ \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\mu \circ (id_{\mathcal{H}} \otimes S) \circ \Delta = \mu \circ (id_{\mathcal{H}} \otimes S) = \eta \circ \varepsilon$. Autrement dit, $\forall x \in \mathcal{C}$: $(f \star g)(x) = f(x_1)g(x_2)$.

Proposition 1.0.14. *L'espace des applications linéaires de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ muni de $\star$ est une algèbre associative unitaire d'unité l'application $\eta \circ \varepsilon$.*

Démonstration. Soient $f, g, h \in Hom(\mathcal{C}, \mathcal{A}), \forall x \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
(f \star g) \star h(x) &= \sum_x f \star g(x_1) h(x_2)\\
&= \sum_x \sum_{x_1} f((x_1)_1) g((x_1)_2) h(x_2)\\
&= \sum_x \sum_{x_1} f(x_1) g((x_2)_1) h((x_2)_2)\\
&= \sum_x f(x_1)(g \star h(x_2))\\
&= (f \star g) \star h(x).
\end{aligned}$$

□

D'autre part, si $f \in Hom(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et $x \in \mathcal{C}$ on a : $\eta \circ \varepsilon \star f(x) = f(\sum_x \varepsilon(x_1)x_2) = f(x)$.

De même, on vérifie que : $f \star \eta \circ \varepsilon = f$.

Ainsi, $(Hom(\mathcal{C}, \mathcal{A}), \star, \eta \circ \varepsilon)$ est une algèbre associative unitaire.

1.0.5 Algèbres de Hopf faibles

Définition 1.0.15. Une algèbre de Hopf faible est le sextuple $\mathcal{H} = (V, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$, où $(V, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une bialgèbre faible et S est l'antipode qui est un endomorphisme de V vérifiant :
$\forall x \in V$,

$$m(id \otimes S)\Delta(x) = (\varepsilon \otimes id)\Delta(1)(x \otimes 1), \tag{1.0.19}$$

$$m(S \otimes id)\Delta(x) = (id \otimes \varepsilon)(1 \otimes x)\Delta(1), \tag{1.0.20}$$

$$m(m \otimes id)(S \otimes id \otimes S)(\Delta \otimes id)\Delta(x) = S(x). \tag{1.0.21}$$

Lemme 1.0.16. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf faible. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf ;*
2. *$\Delta(1) = 1 \otimes 1$;*
3. *$\varepsilon(x.y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$;*
4. *$S(x_1).x_2 = 1\varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathcal{H}$;*
5. *$x_1.S(x_2) = 1\varepsilon(x), \quad \forall x \in \mathcal{H}$.*

On définit sur ces algèbres de Hopf faibles les applications $\sqcap^L, \sqcap^R : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ formulées par :
$\sqcap^L(x) = \varepsilon(1_1 x)1_2, \forall x \in \mathcal{H} \quad et \quad \sqcap^R = 1_1\varepsilon(x1_2), \forall x \in \mathcal{H}$.

On introduit la notion $\mathcal{H}^L = \sqcap^L(\mathcal{H}), \mathcal{H}^R = \sqcap^R(\mathcal{H})$, et d'une manière analogue, on définit ces objets dans la bialgèbre dual $\widehat{\mathcal{H}}$, et seront notés respectivement par : $\widehat{\sqcap}^L$ et $\widehat{\sqcap}^R$.

Lemme 1.0.17. *De ce qui précède on a les propriétés suivantes :*

$$\varepsilon(x \sqcap^L (y)) = \varepsilon(x.y), \forall x, y \in \mathcal{H},$$

$$\varepsilon(\sqcap^R(x)y) = \varepsilon(x.y), \forall x, y \in \mathcal{H},$$

$$\sqcap^L \circ \sqcap^L = \sqcap^L, \quad et \quad \sqcap^R \circ \sqcap^R = \sqcap^R.$$

On en déduit que : $1_1 \otimes \sqcap^L(1_1) = 1_1 \otimes 1_2 = \sqcap^R(1_1) \otimes 1_2$.

On conclue de ces égalités que l'image de l'unité par la comultiplication vérifie : $\Delta(1) \in A^R \otimes A^L$.

Remarque 1.0.18. La counité définit une forme bilinéaire non dégénérée comme suit : $x^L \in A^L, y^R \in A^R \mapsto \varepsilon(y^R x^L) \in \mathbb{K}$. Ainsi, on peut établir l'isomorphisme suivant : $A^L \cong A^{R}$.

Proposition 1.0.19. *On peut établir aussi :*

$$x_1 \otimes \sqcap^L(x_2) = 1_1 x \otimes 1_2, \forall x \in \mathcal{H} \quad et \quad \sqcap^R(x_1) \otimes x_2 = 1_1 \otimes x 1_2, \forall x \in \mathcal{H}.$$

1.0.6 Propriétés de la counité et des groupoïdes quantiques

Les applications linéaires définies dans (1.0.19) et (1.0.20) sont appelées respectivement applications counitaires target et source. On les notent respectivement par : ε_t et ε_s.

Dans la suite nous donnons les plus importantes propriétés des applications counitaires target et source [35]

Proposition 1.0.20. *Les applications target et source vérifient pour tout $h \in \mathcal{H}$:*

1. *Ces applications counitaires sont idempotentes dans $End_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$:*
$$\varepsilon_t(\varepsilon_t(h)) = \varepsilon_t(h) \quad et \quad \varepsilon_s(\varepsilon_s(h)) = \varepsilon_s(h),$$
2. *Les relations entre $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ et la comultiplication sont :*
$$(id \otimes \varepsilon_t)\Delta(h) = 1_1 h \otimes 1_2 \quad et \quad (\varepsilon_s \otimes id)\Delta(h) = 1_1 \otimes h 1_2,$$
3. *Les images des applications counitaires sont caractérisées par :*
$\varepsilon_t(h) = h$ si et seulement si, $\Delta(h) = 1_1 h \otimes 1_2$ et $\varepsilon_s(h) = h$ si et seulement si, $\Delta(h) = 1_1 \otimes h 1_2$,
4. *Les éléments $\varepsilon_t(\mathcal{H})$ et $\varepsilon_s(\mathcal{H})$ commutent.*
5. *On a aussi les identités duales à 2 :*
$h\varepsilon_t(g) = \varepsilon(h_1 g) h_2, \quad et \quad \varepsilon_s(h) g = h_1 \varepsilon(g h_2)$.

Remarque 1.0.21. Les propriétés de l'antipode d'une algèbre de Hopf faible sont similaires à celle d'une algèbre de Hopf de dimension finie.

Proposition 1.0.22. *L'antipode S est unique et bijective. Elle est aussi à la fois un anti-morphisme d'algèbre et de coalgèbre.*

Démonstration. Soit le produit de convolution $f * g = \mu \circ (f \star g) \circ \Delta, \forall f, g \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$, alors on a : $S * id = \varepsilon_s$, $id * S = \varepsilon_t$ et aussi, $S * id * S = S$.
Si maintenant S' une autre antipode de $\mathcal{H}$ alors,

$$S' = S' * id * S' = S' * id * S = S * id * S = S.$$

Montrons maintenant que S est un anti-homomorphisme d'algèbre,

$$\begin{array}{rcl} S(1) & = & S(1_1)1_2S(1_3) \\ & = & S(1_1)\varepsilon_s(1_2) \\ & = & \varepsilon_t(1) \\ & = & 1. \end{array}$$

Soit $h, g \in \mathcal{H}$,

$$\begin{array}{rcl} S(hg) & = & S(h_1g_1)\varepsilon_t(h_2g_2), \\ & = & S(h_1g_1)h_2\varepsilon_t(g_2)S(h_3), \\ & = & \varepsilon_s(h_1g_1)S(g_2)S(h_2), \\ & = & S(g_1)\varepsilon_s(h_1)\varepsilon_t(g_2)S(h_2), \\ & = & S(g)S(h). \end{array}$$

$\square$

Proposition 1.0.23. *On a les propriétés suivantes entre la counité et de l'antipode et aussi entre la comultiplication et l'antipode :*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(S(h)) & = & \varepsilon(h), \\ \Delta(S(h)) & = & S(h_2) \otimes S(h_1). \end{array}$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(S(h)) & = & \varepsilon(S(h_1))\varepsilon_t(h_2), \\ & = & \varepsilon(S(h_1)h_2), \\ & = & \varepsilon(\varepsilon_t(h)), \\ & = & \varepsilon(h). \end{array}$$

Et aussi,

$$\begin{array}{rcl} \Delta(S(h)) & = & \Delta(S(h_1)\varepsilon_t(h_2)), \\ & = & \Delta(S(h_1)h_2S(h_4) \otimes \varepsilon_t(h_3), \\ & = & \Delta(\varepsilon_s(h_1)(S(h_3) \otimes S(h_2), \\ & = & S(h_3) \otimes \varepsilon_s(h_1)S(h_2), \\ & = & S(h_2) \otimes S(h_1). \end{array}$$

$\square$

Définition 1.0.24. [38] *Éléments groupe-like*
Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf faible, un élément $g \in \mathcal{H}$ est dit groupe-like, s'il est inversible dans $\mathcal{H}$, et il satisfait en plus les deux égalités suivantes :

$$\Delta(g) = (g \otimes g)\Delta(1) \quad et \quad \Delta(g) = \Delta(1)(g \otimes g).$$

On note l'ensemble des éléments groupe-like par : $G(\mathcal{H})$.

Proposition 1.0.25. *Tout élément groupe-like g de $G(\mathcal{H})$ vérifie :*

$$\varepsilon_t(g) = \varepsilon_s(g) = 1 \quad et \quad S(g) = g^{-1}.$$

Définition 1.0.26. *Éléments primitifs*
Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf faible. On dit qu'un élément x dans $\mathcal{H}$ est primitif, si et seulement si, $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.
De manière générale, si g un élément groupe-like de $\mathcal{H}$. On dit qu'un élément x dans $\mathcal{H}$ est g-primitif, si et seulement si, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$.
On note l'ensemble des éléments primitifs par :

$$P(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} : \ \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}.$$

Proposition 1.0.27. *Si $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf faible de dimension finie alors,*
$(V^\star, \Delta^\star, \varepsilon^\star, \mu^\star, \eta^\star, S^{-1})$ est son algèbre duale qui est aussi une algèbre de Hopf faible.

Chapitre 2

Constructions de Type Kaplansky de bialgèbres faibles

2.1 Constructions de Type Kaplansky de bialgèbres faibles

Dans ce cette partie, nous proposons de construire en dimension finie des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles, voir l'article [12], à partir d'une algèbre ou d'une bialgèbre quelconque illustré d'expemples. Ces constructions s'inspirent des résultats de Kaplansky sur les bialgèbres, L'idée de Kaplansky est investie dans plusieurs sens de réfléxion, voir [23], qu'on rappelle dans les deux théorèmes de Kaplansky suivants :

Theorem 2.1.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire d'unité e et $\mathcal{B}$ est le résultat d'adjonction à $\mathcal{A}$ d'une autre unitè 1. On définit :* $\varepsilon(\mathcal{A}) = 0$, $\varepsilon(1) = 1$,
$\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a - e \otimes a, \quad \forall a \in \mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{B}$ est une bialgèbre.

Theorem 2.1.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre quelconque (non nécessairement unitaire). Soit $\mathcal{B}$ est le résultat d'adjonction successive à $\mathcal{A}$ deux éléments unitaires e et 1. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}$ engendré par $\mathcal{A}$ et les générateurs $\{1,\ e\}$, nous considérerons la comultiplication Δ et la counité ε définies par :*

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\
\Delta(e) &= e \otimes 1 + 1 \otimes e - e \otimes e, \\
\Delta(a) &= (1-e) \otimes a + a \otimes (1-e), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \\
\varepsilon(a) &= 1, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \\
\varepsilon(1) &= 1,\ \varepsilon(e) = 1.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}$ est une bialgèbre cocommutative.

Theorem 2.1.3. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre quelconque (non nécessairement unitaire) et $\mathcal{B}$ est le résultat d'adjonction successive à $\mathcal{A}$ de deux éléments unitaires e et 1. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}$ engendré par $\mathcal{A}$ et les générateurs $\{1,\ e\}$, nous considérerons la comultiplication Δ et la counité ε définit par :*

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e, \\
\Delta(a) &= a \otimes a, \quad \forall a \in \mathcal{B} \setminus \{1\}, \\
\varepsilon(a) &= 1, \quad \forall a \in \mathcal{B} \setminus \{1\}, \\
\varepsilon(1) &= 2.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}$ devient une bialgèbre faible.

Démonstration. Les identités (1.0.11),(1.0.12) sont satisfaites. Dans ce qui suit, nous vérifierons les identités restantes dans la définition 1.0.7. En premier, nous prouverons que Δ est coassociative (1.0.11).

soit $a \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$, nous avons,

$(\Delta\otimes id)\Delta(a) = a\otimes a\otimes a = (id\otimes\Delta)\Delta(a)$. Nous avons également, $(\Delta\otimes id)\Delta(1) = (id\otimes\Delta)\Delta(1)$, de même

$$\begin{aligned}
(\Delta\otimes id)\Delta(1) &= \Delta(1)\otimes 1 - \Delta(1)\otimes e - \Delta(e)\otimes 1 + 2\Delta(e)\otimes e,\\
&= 1\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes e\otimes 1 - e\otimes 1\otimes 1 + 2e\otimes e\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes e + 1\otimes e\otimes e\\
&\quad + e\otimes 1\otimes e - 2e\otimes e\otimes e - e\otimes e\otimes 1 + 2e\otimes e\otimes e + e\otimes 1\otimes e - 2e\otimes e\otimes e\\
&\quad - e\otimes e\otimes 1 + 2e\otimes e\otimes e,\\
&= 1\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes e\otimes 1 - e\otimes 1\otimes 1 + e\otimes e\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes e + 1\otimes e\otimes e +\\
&\quad e\otimes 1\otimes e,\\
&= (1-e)\otimes(1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e\otimes e.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(id\otimes\Delta)\Delta(1) &= 1\otimes\Delta(1) - 1\otimes\Delta(e) - e\otimes\Delta(1) + 2e\otimes\Delta(e),\\
&= 1\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes e\otimes 1 - e\otimes 1\otimes 1 + e\otimes e\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes e + 1\otimes e\otimes e\\
&\quad + e\otimes 1\otimes e,\\
&= (1-e)\otimes(1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e\otimes e.
\end{aligned}$$

l'identité (1.0.12) est également satisfaite. En effet, soit $a\in\mathcal{B}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\otimes id)\Delta(a) &= \varepsilon(a)a = a = id(a),\\
(id\otimes\varepsilon)\Delta(a) &= \varepsilon(a)a = a = id(a),\\
(\varepsilon\otimes id)\Delta(1) &= \varepsilon(1)1 - \varepsilon(1)e - \varepsilon(e)1 + 2\varepsilon(e)e = id(1),\\
(id\otimes\varepsilon)\Delta(1) &= \varepsilon(1)1 - \varepsilon(e)1 - \varepsilon(1)e + 2\varepsilon(e)e = id(1).
\end{aligned}$$

La comultiplication Δ est un homomorphisme d'algèbre (1.0.13). En effet, soit $a_1, a_2\in\mathcal{B}\setminus\{1\}$, aussi $a_1\cdot a_2\in\mathcal{A}$ nous avons,

$$\Delta(a_1)\bullet\Delta(a_2) = (a_1\otimes a_1)\bullet(a_2\otimes a_2) = a_1\cdot a_2\otimes a_1\cdot a_2 = \Delta(a_1\cdot a_2).$$

Aussi, pour $a\in\mathcal{B}\setminus\{1\}$ nous avons,

$$\begin{aligned}
\Delta(a)\bullet\Delta(1) &= (a\otimes a)\bullet(1\otimes 1 - 1\otimes e - e\otimes 1 + 2.\ 1\otimes 1)\\
&= a\otimes a - a\otimes a - a\otimes a + 2a\otimes a = a\otimes a = \Delta(a).
\end{aligned}$$

Nous vérifions la condition de compatibilité (1.0.14). En effet, les éléments e et $1-e$ sont idempotents et orthogonaux, à savoir $e\cdot e = e$, $(1-e)\cdot(1-e) = 1-e$ et $(1-e)\cdot e = e\cdot(1-e) = 0$, nous avons,

$$(1\otimes\Delta(1))\bullet(\Delta(1)\otimes 1) = (1-e)\otimes(1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e\otimes e = (\Delta\otimes id)\Delta(1).$$

Et de façon similaire,

$$(\Delta(1)\otimes 1)\bullet(1\otimes\Delta(1)) = (1-e)\otimes(1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e\otimes e = (\Delta\otimes id)\Delta(1).$$

Enfin, nous vérifions que l'identité (1.0.15) est satisfaite pour tout élément dans $\mathcal{B}$.

En effet, soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{B}$ avec $a_2 \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$. De même $a_1 \cdot a_2 \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ (resp. $a_2 \cdot a_3 \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$), alors $(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ (resp. $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$). Donc, $\varepsilon(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) = 1$ et $\varepsilon(a_1 \cdot a_2)\varepsilon(a_2 \cdot a_3) = 1$.

Supposons maintenant que : $a_2 = 1$, puis le côté gauche devient, $\varepsilon(a_1 \cdot 1 \cdot a_3) = \varepsilon(a_1 \cdot a_3)$ et estimons le côté droit $\varepsilon(a_1 \cdot 1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)} \cdot a_3) = \varepsilon(a_1 \cdot (1-e))\varepsilon((1-e) \cdot a_3) + \varepsilon(a_1 \cdot e)\varepsilon(e \cdot a_3)$. Nous considérons que les cas particuliers suivants :

1. $a_1 = 1$ et $a_3 = 1$,
   $\varepsilon(1 \cdot 1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)} \cdot 1) = \varepsilon(1-e)\varepsilon(1-e) + \varepsilon(e)\varepsilon(e) = 2 = \varepsilon(1)$.
2. $a_1 = 1$ et $a_3 \neq 1$,
   $\varepsilon(1 \cdot 1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)} \cdot a_3) = \varepsilon(1-e)\varepsilon((1-e) \cdot a_3) + \varepsilon(e)\varepsilon(e \cdot a_3) = \varepsilon(a_3) = 1$.
3. $a_1 \neq 1$ et $a_3 = 1$,
   $\varepsilon(a_1 \cdot 1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)} \cdot 1) = \varepsilon(a_1 \cdot (1-e))\varepsilon(1-e) + \varepsilon(a_1 \cdot e)\varepsilon(e \cdot 1) = \varepsilon(a_1) = 1$.
4. $a_1 \neq 1$ et $a_3 \neq 1$,
   $\varepsilon(a_1 \cdot 1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)} \cdot a_3) = \varepsilon(a_1 \cdot (1-e))\varepsilon((1-e) \cdot a_3) + \varepsilon(a_1 \cdot e)\varepsilon(e \cdot a_3) = \varepsilon(a_1)\varepsilon(a_3) = 1$,
   qui est égale à $\varepsilon(a_1 \cdot a_3)$ parce que $a_1 \cdot a_3 \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$.

Ceci termine la preuve que $\mathcal{B}$ est dotée d'une structure de bialgèbre faible. □

Remarque 2.1.4. La bialgèbre faible obtenue ci-dessus n'est pas une bialgèbre car elle vérifie uniquement la condition faible. En effet, pour tout : $a \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$, nous $\varepsilon(a \cdot 1) = 1$ et $\varepsilon(a)\, \varepsilon(1) = 2$.

Corollaire 2.1.5. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unitaire d'unité 1. Si $\mathcal{A} \setminus \{1\}$ est une sous-algèbre et s'il existe un élément e dans $\mathcal{A} \setminus \{1\}$ sachant que :*

$e \cdot e = e$ et $e \cdot a = a \cdot e = a$, $\forall\ a \in \mathcal{A} \setminus \{1\}$, alors, il existe une structure de bialgèbre faible dans $\mathcal{A}$ exprimée par :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) & = & (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e, \\ \Delta(a) & = & a \otimes a, \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \{1\}, \\ \varepsilon(1) & = & 2, \\ \varepsilon(a) & = & 1, \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \{1\}. \end{array}$$

Remarque 2.1.6. La bialgèbre faible $\mathcal{B}$ du théorème 2.1 n'est pas toujours une algèbre de Hopf faible avec l'antipode $S = id$.

Les identités (1.0.19),(1.0.20),(1.0.21) sont remplies pour $x = 1$. Mais pour $x \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$, les identités (1.0.19),(1.0.20) conduisent à la condition $x \cdot x = e$ tandis que l'identité (1.0.20) conduit à $(x \cdot x) \cdot x = x$.

Exemple 2.1.7. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative bidimensionnelle avec une unité 1. Nous supposons que : e est un élément idempotent ($e \cdot e = e$) différent de 1 dans $\mathcal{A}$. Alors, il existe une structure de bialgèbre faible dans $\mathcal{A}$ donnée par :*

$$\Delta(1) = (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e, \quad \Delta(e) = e \otimes e, \quad \varepsilon(1) = 2, \quad \varepsilon(e) = 1.$$

En outre, si $S = id$, la bialgèbre $\mathcal{A}$ devient une structure d'algèbre de Hopf faible.

Exemple 2.1.8. *Soit $\mathcal{A} = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ une algèbre unitaire de dimension n. On suppose que : $\mathfrak{b} = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}$ sachant que : $e_1 = 1$ et $\{e_i\}_{2 \leq i \leq n}$ sont des éléments indépendants et orthogonaux. Alors, il existe pour chaque entier $k \in \{2, \cdots n\}$ fixé, une famille de structures de bialgèbres faibles dans $\mathcal{A}$ donnée par :*

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= (1 - e_k) \otimes (1 - e_k) + e_k \otimes e_k, \\
\Delta(e_i) &= e_i \otimes e_i, \quad i \in \{2, \cdots n\}, \\
\varepsilon(1) &= 2, \\
\varepsilon(e_i) &= 1, \quad i \in \{2, \cdots n\}.
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous proposons le résultat plus général suivant.

Theorem 2.1.9. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unitaire de dimension finie avec l'unité $e_1 = 1$. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{b}_2$ une base de $\mathcal{A}$ avec $\mathfrak{b}_1 = \{e_i\}_{i=1,\cdots p}$. On suppose que : $span(\mathfrak{b}_2)$ est une sous algèbre de $\mathcal{A}$ et*

$$\begin{aligned}
&e_i \cdot e_j = e_{max(i,j)}, \quad \forall i, j = 1, \cdots, p, \\
&e_i \cdot f = f \cdot e_i = f, \quad \forall f \in \mathfrak{b}_2.
\end{aligned}$$

On définit la comultiplication Δ et la counité ε par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_p) = e_p \otimes e_p, \\
&\Delta(e_i) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \Delta(e_{i+1}), \quad \forall i, \ i = 1, \cdots, p-1, \\
&\Delta(f) = f \otimes f, \quad \forall f \in \mathfrak{b}_2, \\
&\varepsilon(e_i) = p - i + 1, \quad \forall i, \ i = 1, \cdots, p, \\
&\varepsilon(f) = 1, \quad \forall f \in \mathfrak{b}_2,
\end{aligned}$$

Alors, dans ce cas, $\mathcal{A}$ est munie d'une structure de bialgèbre faible.

Démonstration. L'image d'un élément par Δ est un élément $e_{p-i} \in \mathfrak{b}_1$, $i = 1, \cdots, p-1$, elle peut s'écrire sous la forme :
$\Delta(e_i) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) \otimes (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p$.
Ceci conduit à $i = 1, \cdots, p-1$ que $\Delta(e_i - e_{i+1}) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1})$ et $\varepsilon(e_i - e_{i+1}) = 1$.
Montrons que Δ est coassociative. Pour $i = 1, \cdots, p-1$, nous avons,
$(id \otimes \Delta)\Delta(e_i) = (id \otimes \Delta)[(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = (e_i - e_{i+1}) \otimes (\Delta(e_i) - \Delta(e_{i+1})) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (\Delta(e_{p-1}) - \Delta(e_p)) + e_p \otimes \Delta(e_p) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p \otimes e_p$,

$(\Delta \otimes id)\Delta(e_i) = (\Delta \otimes id)[(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = (\Delta(e_i) - \Delta(e_{i+1})) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (\Delta(e_{p-1}) - \Delta(e_p)) \otimes (e_{p-1} - e_p) + \Delta(e_p) \otimes e_p = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p \otimes e_p$.

Alors, $(id \otimes \Delta)\Delta(e_i) = (\Delta \otimes id)\Delta(e_i)$.
Évidemment, on a la coassociativité pour e_p et pour tout $f \in \mathfrak{b}_2$.

Nous montrons que ε est la counité. Pour $i = 1, \cdots, p-1$, nous avons,

$(id \otimes \varepsilon)\Delta(e_i) = (id \otimes \varepsilon)[(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = (e_i - e_{i+1})(\varepsilon(e_i) - \varepsilon(e_{i+1})) + \cdots + (e_{p-1} - e_p)(\varepsilon(e_{p-1}) - \varepsilon(e_p)) + e_p\varepsilon(e_p) = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} - e_{i+2} + e_{i+2} + \cdots - e_{p-1} + e_{p-1} - e_p + e_p = id(e_i)$,

$(\varepsilon \otimes id)\Delta(e_i) = (\varepsilon \otimes id)[(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = (\varepsilon(e_i) - \varepsilon(e_{i+1}))(e_i - e_{i+1}) + \cdots + (\varepsilon(e_{p-1}) - \varepsilon(e_p))(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_p)e_p = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} - e_{i+2} + e_{i+2} + \cdots - e_{p-1} + e_{p-1} - e_p + e_p = id(e_i)$.

Alors, $(id \otimes \varepsilon)\Delta(e_i) = (\varepsilon \otimes id)\Delta(e_i) = id(e_i)$. La coassociativité est évidemment satisfaite pour les éléments groupe-like.

La comultiplication Δ est compatible avec la multiplication. En effet, soit $e_i, e_k \in \mathfrak{b}_1$, $i, k = 1 \cdots p-1$, et $f \in \mathfrak{b}_2$,
$\Delta(e_i) \bullet \Delta(f) = [(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p].(f \otimes f) = e_p \cdot f \otimes e_p \cdot f = f \otimes f = \Delta(e_i \cdot f)$.

D'une manière similaire nous avons $\Delta(f) \bullet \Delta(e_i) = \Delta(f \cdot e_i)$.

Supposons que $i \geq k$, par un calcul direct nous avons,
$\Delta(e_i) \bullet \Delta(e_k) = [(e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] \bullet [(e_k - e_{k+1}) \otimes (e_k - e_{k+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p = \Delta(e_i) = \Delta(e_i \cdot e_k)$.

Également, pour tout $f_1, f_2 \in \mathfrak{b}_2$, nous avons $\Delta(f_1) \bullet \Delta(f_2) = (f_1 \otimes f_1) \bullet (f_2 \otimes f_2) = f_1 \cdot f_2 \otimes f_1 \cdot f_2 = \Delta(f_1 \cdot f_2)$.

Dans ce qui suit, nous vérifions les identités(1.0.14). Nous avons

$[\Delta(e_1) \otimes e_1] \cdot [e_1 \otimes \Delta(e_1)] = [(e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \otimes e_1 + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes e_1 + e_p \otimes e_p \otimes e_1] \cdot [e_1 \otimes (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + \cdots + e_1 \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_1 \otimes e_p \otimes e_p] = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p \otimes e_p$,

et

$[e_1 \otimes \Delta(e_1)] \cdot [\Delta(e_1) \otimes e_1] = [e_1 \otimes (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + \cdots + e_1 \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_1 \otimes e_p \otimes e_p].[(e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \otimes e_1 + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes e_1 + e_p \otimes e_p \otimes e_1] = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + \cdots + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p \otimes e_p$.

Alors, $[e_1 \otimes \Delta(e_1)] \bullet [\Delta(e_1) \otimes e_1] = [\Delta(e_1) \otimes e_1] \bullet [e_1 \otimes \Delta(e_1)] = (\Delta \otimes id)\Delta(e_1)$.

Maintenant, nous vérifions l'identité : (1.0.15). Nous considérons d'abord un triplet (e_i, e_j, e_k). Supposons que $j \leq k$, dans ce cas $\varepsilon(e_i \cdot e_j \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot e_k) = p - \max(i, k) + 1$.

D'autre part, nous avons

$\varepsilon(e_i \cdot (e_j)_{(1)})\varepsilon((e_j)_{(2)} \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot (e_j - e_{j+1}))\varepsilon((e_j - e_{j+1}) \cdot e_k)) + \cdots + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p))\varepsilon((e_{p-1} - e_p) \cdot e_k) + \varepsilon(e_i \cdot e_p)\varepsilon((e_p \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot (e_k - e_{k+1}))\varepsilon(e_k - e_{k+1}) + \cdots + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p))\varepsilon(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_i \cdot e_p)\varepsilon(e_p) = \varepsilon(e_i \cdot (e_k - e_{k+1})) + \varepsilon(e_i \cdot (e_{k+1} - e_{k+2})) + \cdots + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p)) + \varepsilon(e_i \cdot e_p) = \varepsilon(e_i \cdot e_k) - \varepsilon(e_i \cdot e_{k+1}) + \varepsilon(e_i \cdot e_{k+1}) - \varepsilon(e_i \cdot e_{k+2}) + \varepsilon(e_i \cdot e_{k+2}) + \cdots - \varepsilon(e_i \cdot e_{p-1}) + \varepsilon(e_i \cdot e_{p-1}) - \varepsilon(e_i \cdot e_p) + \varepsilon(e_i \cdot e_p) = \varepsilon(e_i \cdot e_k) = p - \max(i, k) + 1$.

Si $j > k$, alors, $\varepsilon(e_i \cdot e_j \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot e_j) = p - \max(i,j) + 1$.

Aussi,
$\varepsilon(e_i \cdot (e_j)_{(1)})\varepsilon((e_j)_{(2)} \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot (e_j - e_{j+1}))\varepsilon((e_j - e_{j+1}) \cdot e_k) + \cdots + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p)\varepsilon((e_{p-1} - e_p) \cdot e_k) + \varepsilon(e_i \cdot e_p)\varepsilon(e_p \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot (e_j - e_{j+1}))\varepsilon(e_j - e_{j+1}) + \varepsilon(e_i \cdot (e_{j+1} - e_{j+2}))\varepsilon(e_{j+1} - e_{j+2}) + \cdot s + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p))\varepsilon(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_i \cdot e_p)\varepsilon(e_p) = \varepsilon(e_i \cdot (e_j - e_{j+1})) + \cdot s + \varepsilon(e_i \cdot (e_{p-1} - e_p)) + \varepsilon(e_i \cdot e_p) = \varepsilon(e_i \cdot e_j) - \varepsilon(e_i \cdot e_{j+1}) + \varepsilon(e_i \cdot e_{j+1}) + \cdot s - \varepsilon(e_i \cdot e_{p-1}) + \varepsilon(e_i \cdot e_{p-1}) - \varepsilon(e_i \cdot e_p) + \varepsilon(e_i \cdot e_p) = \varepsilon(e_i \cdot e_j) = p - \max(i,j) + 1$.

Pour le triplet (f, e_i, e_j), on obtient : $\varepsilon(f \cdot e_i \cdot e_j) = \varepsilon(f) = 1$ et d'autre part :
$\varepsilon(f \cdot (e_i)_{(1)})\varepsilon((e_i)_{(2)} \cdot e_j) = \varepsilon(f \cdot (e_i - e_{i+1}))\varepsilon((e_i - e_{i+1}) \cdot e_j)) + \cdots + \varepsilon(f \cdot (e_{p-1} - e_p))\varepsilon((e_{p-1} - e_p) \cdot e_j) + \varepsilon(f \cdot e_p)\varepsilon((e_p \cdot e_j) = \varepsilon(f \cdot e_p)\varepsilon(e_p \cdot e_j) = \varepsilon(f)\varepsilon(e_p) = 1$.

Pour un triplet (a_1, f, a_2) où $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ nous obtenons $\varepsilon(a_1 \cdot f \cdot a_2) = \varepsilon(f) = 1$, parce que $a_1 \cdot f$ et $f \cdot a_2$ appartiennent à $\mathfrak{b}_2$), qui est un idéal. D'autre part, nous avons $\varepsilon(a_1 \cdot (f)_{(1)})\varepsilon((f)_{(2)} \cdot a_2) = \varepsilon(f)\varepsilon(f) = 1$.

□

Nous montrons dans ce qui suit que l'algèbre commutative $\mathcal{A} = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ porte une structure d'algèbre de Hopf faible. À cette fin, nous écrivons l'algèbre dans une base appropriée.

Proposition 2.1.10. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'unité e_2 sachant que dans la base $\{e_i\}_{i=2,\cdots,n}$ de $\mathcal{A}$ la multiplication est donnée par : $m(e_i \otimes e_j) = e_{max(i,j)}$, $\quad i, j = 2, \cdots, n$. Soit $\mathcal{B}$ le résultat de l'algèbre obtenue en lui ajoutant une deuxième unité $e_1 = 1$ à $\mathcal{A}$.*

On définit sur cette structure une comultiplication Δ, une counité ε et une antipode S données par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_n) = e_n \otimes e_n,\\
&\Delta(e_i) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \Delta(e_{i+1}), \quad \forall i,\ i = 1 \cdots n-1,\\
&\varepsilon(e_i) = n - i + 1, \quad \forall i,\ i = 1 \cdots n,\\
&S = id.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}$ devient une algèbre de Hopf faible.

Démonstration. La structure de bialgèbre faible résulte du théorème précédent. Il reste à vérifier uniquement l'identité de l'antipode (1.0.19), (1.0.20), (1.0.21). Nous avons pour $i = 1, \cdots, n-1$.
$m(id \otimes S)\Delta(e_i) = m(\Delta(e_i)) = m((e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{n-1} - e_n) \otimes (e_{n-1} - e_n) + e_n \otimes e_n) = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} + \cdot s - e_{n-1} + e_{n-1} - e_n + e_n = e_i$,

$(\varepsilon \otimes id)[\Delta(e_1) \bullet (e_i \otimes e_1)] = (\varepsilon \otimes id)([(e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + \cdots + (e_{n-1} - e_n) \otimes (e_{n-1} - e_n) + e_n \otimes e_n] \cdot (e_i \otimes e_1)) = \varepsilon(e_i - e_{i+1})(e_i - e_{i+1}) + \cdots + \varepsilon(e_{n-1} - e_n)(e_{n-1} - e_n) + \varepsilon(e_n)e_n = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} + \cdots - e_{n-1} + e_{n-1} - e_n + e_n = e_i$,

et de même $(id \otimes \varepsilon)[(e_1 \otimes e_i) \bullet \Delta(e_1)] = e_i$.

Ainsi, on a : (1.0.19), (1.0.20).

L'identité (1.0.21) est également satisfaite. Nous utilisons un calcul précédent de $(\Delta \otimes id)(\Delta(e_i))$ et $m((e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1})) = e_i - e_{i+1}$, alors,
$m(m\otimes id)(S\otimes id\otimes S)(\Delta\otimes id)(\Delta(e_i)) = m(m\otimes id)(id\otimes id\otimes id)(\Delta\otimes id)(\Delta(e_i)) = m(m\otimes id)(\Delta\otimes id)(\Delta(e_i)) = m(m\otimes id)((e_i - e_{i+1})\otimes(e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{n-1} - e_n)\otimes(e_{n-1} - e_n) + e_n\otimes e_n) = m((e_i - e_{i+1})\otimes(e_i - e_{i+1}) + \cdots + (e_{n-1} - e_n)\otimes(e_{n-1} - e_n) + e_n\otimes e_n) = e_i = S(e_i)$.

La preuve pour e_n découle d'un calculs directs. □

Remarque 2.1.11. De même, nous pouvons munir l'algèbre engendrée par n éléments idempotents et orthogonaux avec la structure d'algèbre de Hopf faible. La structure d'algèbre est isomorphe à la structure d'algèbre considérée dans la proposition 2.1.10, on peut considérer la même comultiplication et la même counité que dans cette proposition.

Maintenant, nous fournissons des constructions de bialgèbres faibles à partir de n'importe quelle bialgèbre. Nous montrons que toute bialgèbre de dimension n peut être étendue à une bialgèbre faible de dimension $(n+1)$.

Theorem 2.1.12. *Soient $\mathcal{B}$ une bialgèbre et e_2 son unité. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{B}'$ résultant de l'adjonction d'une seconde unité e_1 à $\mathcal{B}$ en respectant la loi de la multiplication. Nous étendons la comultiplication Δ et la counité ε de la façon suivante,*

$$\Delta(e_1) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + e_2 \otimes e_2,$$
$$\varepsilon(e_1) = 2.$$

Alors, $\mathcal{B}'$ devient une bialgèbre faible.

Démonstration. La vérification des identitées (1.0.11)-(1.0.14) sont similaire à la preuve du théorème 2.1. En utilisant $\Delta(e_2) = e_2 \otimes e_2$ et $\varepsilon(e_2) = 1$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une bialgèbre ayant une unité e_2. Il reste à vérifier la compatibilité de la counité avec la comultiplication. L'identité (1.0.15) est satisfaite en considérant 3 éléments de $\mathcal{B}$.

Pour le triplet (e_1, a, b), nous avons,

$$\varepsilon(e_1 \cdot a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)} \cdot b) = \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)} \cdot b) = \varepsilon(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} \cdot b) = \varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(e_1 \cdot a \cdot b).$$

Le cas du triplet (a, b, e_1) est similaire. Voyons maintenant le triplet (a, e_1, b). Le côté gauche de (1.0.15) devient $\varepsilon(a \cdot e_1 \cdot b) = \varepsilon(a \cdot b)$. On estime le côté droit $\varepsilon(a \cdot e_{1(1)})\varepsilon(e_{1(2)} \cdot b) = \varepsilon(a \cdot (e_1 - e_2))\varepsilon((e_1 - e_2) \cdot b) + \varepsilon(a \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot b)$. Nous considérons seulement les cas particuliers suivants :

1. $a = e_1$ et $b = e_1$ $\varepsilon(e_1 \cdot e_{1(1)})\varepsilon(e_{1(2)} \cdot e_1) = \varepsilon(e_1 - e_2)\varepsilon(e_1 - e_2) + \varepsilon(e_2)\varepsilon(e_2) = 2 = \varepsilon(e_1)$.
2. $a = 1$ et $b \neq e_1$
   $\varepsilon(e_1 \cdot e_{1(1)})\varepsilon(e_{1(2)} \cdot b) = \varepsilon(e_1 - e_2)\varepsilon((e_1 - e_2) \cdot b) + \varepsilon(e_2)\varepsilon(e_2 \cdot b) = \varepsilon(b)$.

3. $a \neq e_1$ et $b = e_1$
$\varepsilon(a \cdot e_{1(1)})\varepsilon(e_{1(2)} \cdot e_1) = \varepsilon(a \cdot (e_1 - e_2))\varepsilon(e_1 - e_2) + \varepsilon(a \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot e_1) = \varepsilon(a)$.
4. $a \neq 1$ et $b \neq 1$
$\varepsilon(a \cdot e_{1(1)})\varepsilon(e_{1(2)} \cdot b) = \varepsilon(a \cdot (e_1 - e_2))\varepsilon((e_1 - e_2) \cdot b) + \varepsilon(a \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(a \cdot b)$ parce que $a, b \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est une structure de bialgèbre.

□

La dimension de $\mathcal{B}'$ est $dim\mathcal{B}' = dim\mathcal{B} + 1$.

Remarque 2.1.13. La counité de $\mathcal{B}$ n'est pas un homomorphisme algèbre. En effet, $\varepsilon(e_1 \cdot e_2) = \varepsilon(e_2) = 1$ alors que, $\varepsilon(e_1)\varepsilon(e_2) = 2$.

Le théorème suivant fournit un moyen pour l'extension d'une algèbre Hopf faible de dimension n en une algèbre de Hopf faible de dimension $(n + 1)$.

Theorem 2.1.14. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et e_2 son unité. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{H}'$ résultant de l'adjonction d'une seconde unité e_1 à $\mathcal{H}$ en respectant la multiplication. Nous étendons la comultiplication Δ, la counité ε et l'antipode S de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_1) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + e_2 \otimes e_2, \\
&\varepsilon(e_1) = 2 \\
&S(e_1) = e_1.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{H}'$ devient une algèbre de Hopf faible.

Démonstration. La structure de bialgèbre faible résulte du théorème 2.1.12. Les identités restantes sont données pour e_1 par des calculs simples. □

Exemple 2.1.15 (L'algèbre de Hopf faible de Sweedler en dimension 5). *On suppose que $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Sweedler en dimension 4 donnée par les générateurs et les relations qui suivent : $\mathcal{H}$ est engendré par c et x en tant qu'une $\mathbb{K}$-algèbre satisfaisant les relations :*

$$c^2 = e, \; x^2 = 0, \; x \cdot c = -c \cdot x,$$

où e est l'unité. Soit $\mathcal{H}'$ l'algèbre obtenue on lui ajoutant une nouvelle unité 1 à $\mathcal{H}$. Alors, $\mathcal{H}'$ est une algèbre de Hopf faible de dimension 5 définie comme une $\mathbb{K}$-algèbre, avec la base $\{1, e, x, c, c \cdot x\}$ et les relations (2.1.1) et $e \cdot c = c \cdot e = c, \; e \cdot x = x \cdot e = x, \; e \cdot e = e$. La structure de coalgèbre est définie par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = (1 - e) \otimes (1 - e) + e \otimes e, \\
&\Delta(c) = c \otimes c, \; \Delta(e) = e \otimes e, \; \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes e, \\
&\varepsilon(1) = 2, \; \varepsilon(e) = 1, \; \varepsilon(c) = 1, \; \varepsilon(x) = 0,
\end{aligned}$$

L'antipode est donnée par :

$$S(1) = 1, \; S(e) = e, \; S(c) = c, \; S(x) = -c \cdot x.$$

Cette algèbre de Hopf faible n'est ni commutative et ni cocommutative.

Exemple 2.1.16 (L'algèbre de Hopf faible de Taft et Sweedler). *Soit* $n \geq 2$ *un nombre entier et* λ *est un élément primitif de racine* n^{ime} *de l'unité. On considère l'algèbre de Taft* $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$*, qui est la généralisation de l'algèbre de Hopf Sweedler, définie par les générateurs* c *et* x *ou* e *est l'unité, avec les relations :*

$$c^n = e, \ x^n = 0, \ x \cdot c = \lambda \ c \cdot x.$$

Soit $\mathcal{H}'$ *l'algèbre obtenue en lui ajoutant une nouvelle unité* 1 *à* $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$*.*

En mettant une structure de coalgèbre définie par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e,\\
&\Delta(e) = e \otimes e, \ \Delta(c) = c \otimes c, \ \Delta(x) = c \otimes x + x \otimes e,\\
&\varepsilon(1) = 2, \ \varepsilon(e) = 1, \ \varepsilon(c) = 1, \ \varepsilon(x) = 0.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{H}'$ *devient une bialgèbre faible de dimension* (n^2+1)*, ayant pour base* $\{1, c^i x^j, 0 \leq i, j \leq n-1\}$*.*

Elle possède une structure d'algèbre de Hopf faible avec une antipode définie par :

$$S(1) = 1, \ S(e) = e, \ S(c) = c^{-1}, \ S(x) = -c^{-1} \cdot x.$$

Les deux propositions suivantes donnent d'autres constructions des bialgèbres faibles à partir de bialgèbres, les preuves sont semblables aux précédentes.

Proposition 2.1.17. *Soit* $\mathcal{B}$ *une bialgèbre et* u *son unité. Soit* $\mathcal{B}'$ *le résultat de l'adjonction successivement de deux élément unitaires* e *et* 1 *à* $\mathcal{B}$ *en respectant la multiplication. Nous étendons la comultiplication* Δ *et la counité* ε *de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = 1 \otimes (e-u) + u \otimes (1 - 2e + 2u),\\
&\Delta(e) = e \otimes (e-u) + u \otimes (2u - e),\\
&\varepsilon(1) = 2, \ \varepsilon(e) = 2.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}'$ *est une bialgèbre faible.*

Proposition 2.1.18. *Soit* $\mathcal{B}$ *une bialgèbre et* u *son unité. Soit* $\mathcal{B}'$ *le résultat de l'adjonction successivement de deux éléments unitaires* e *et* 1 *à* $\mathcal{B}$ *en respectant la multiplication et sachant que la comultiplication* Δ*, la counité* ε *sont étendues de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
&\Delta(1) = (1-e) \otimes (1-e) + (e-u) \otimes (e-u) + u \otimes u,\\
&\Delta(e) = (e-u) \otimes (e-u) + u \otimes u,\\
&\varepsilon(1) = 3, \ \varepsilon(e) = 2.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}'$ *est une bialgèbre faible.*

Remarque 2.1.19. Dans les propositions précèdentes, si les bialgèbres $\mathcal{B}$ sont des algèbres de Hopf alors $\mathcal{B}'$ devient une algèbre de Hopf faible en prenant $S(1) = 1$ et $S(e) = e$.

Chapitre 3

Hom-bialgèbres faibles et Hom-algèbres de Hopf faibles

Dans cette partie, on introduit et étudie une version Hom des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles. Les structures algébriques de type Hom sont apparues pour la première fois dans des travaux de physiciens dans les q-déformations d'algèbres de champs de vecteurs. Une q-deformation consiste à remplacer la dérivation usuelle par une σ-dérivation qui vérifit la condition de Leibniz modifiée, $d(fg) = d(f)g + \sigma(f)dg$. Les premiers exemples ont utilisé la dérivation de Jackson. La structure mise en évidence généralise la structure des algèbres de Lie. La condition de Jacobi étant modifiée par un homomorphisme. Des généralisations de plusieurs structures comme les bialgèbres ont été proposées dans [29], [30], [31], [32]. Dans ce chapitre, on définit les Hom-bialgèbres faibles et les algèbres de Hom-Hopf faibles. On donne leurs propriétés et on propose de nombreuses façon de les constructions. Ces résultats sont le fruit d'un travail publié dans l'article [13].

Définition 3.0.1. Une algèbre Hom-associative est un triplet $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$, d'une application bilinéaire $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et d'un linéaire homomorphisme $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaisant

1.
$$m(\alpha(x), m(y,z)) = m(m(x,y), \alpha(z)), \qquad \forall x, y, z \in \mathcal{A} \tag{3.0.1}$$

2.
$$\alpha(m(x,y)) = m(\alpha(x), \alpha(y)), \qquad \forall x, y \in \mathcal{A} \tag{3.0.2}$$

La seconde égalité veut dire que α est multiplicative.

Une algèbre Hom-associative est dite unitaire s'il existe un élément $u \in \mathcal{A}$, telle que : $\alpha(u) = u$, et $m(u,x) = m(x,u) = \alpha(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Soit $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ et $(\mathcal{A}', m', \alpha')$ deux algèbres Hom-associatives, nous disons que l'application linéaire $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est un morphisme de Hom-algèbres si

$$f \circ m = m' \circ (f \otimes f), \tag{3.0.3}$$
$$f \circ \alpha = \alpha' \circ f. \tag{3.0.4}$$

Maintenant, on introduit la structure de Hom-bialgèbre faible.

Définition 3.0.2. Une Hom-bialgèbre faible est un sextuplé $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$, où $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (multiplication), $\eta : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ (unité), $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (comultiplication), $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ (counité), $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et avec $\eta(1) = 1$, sont des applications linéaires satisfaisant :

1. le quadruplé $(m, \mathcal{A}, \eta, \alpha)$ soit une algèbre multiplicative, Hom-associative, et unitaire c.à.d :
$$\alpha \circ m = m \circ (\alpha \otimes \alpha), \tag{3.0.5}$$

2.
$$m \circ (m \otimes \alpha) = m \circ (\alpha \otimes m), \tag{3.0.6}$$

3.
$$m(x \otimes 1) = m(1 \otimes x) = \alpha(x), \qquad \forall x \in \mathcal{A} \quad et \quad \alpha(1) = 1. \tag{3.0.7}$$

4. le quadruplé $(\mathcal{A},\Delta,\varepsilon,\alpha)$ soit une Hom-coalgèbre, c.à.d :

$$(\Delta\otimes\alpha)\circ\Delta=(\alpha\otimes\Delta)\circ\Delta, \tag{3.0.8}$$

$$(\varepsilon\otimes id)\Delta=(id\otimes\varepsilon)\Delta=\alpha,\quad \varepsilon\circ\alpha=\varepsilon, \tag{3.0.9}$$

5. la condition de compatibilité est exprimée par les trois identités suivantes :

(a)

$$\Delta(m(x\otimes y))=\sum_{(1)(2)}m(x_{(1)}\otimes y_{(1)})\otimes m(x_{(2)}\otimes y_{(2)}),\qquad \forall x,y\in\mathcal{A}, \tag{3.0.10}$$

(b)

$$(\Delta\otimes\alpha)\Delta(1)=(\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes\Delta(1))=(1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1), \tag{3.0.11}$$

(c)

$$\varepsilon(m(m(x\otimes y)\otimes\alpha(z))=\varepsilon(m(\alpha(x)\otimes y_{(1)}))\,\varepsilon(m(y_{(2)}\otimes\alpha(z)).\quad \forall x,y,z\in\mathcal{A}. \tag{3.0.12}$$

Notant que : si $\alpha=id$, on retrouve la définition usuelle d'une bialgèbre faible.

Remarque 3.0.3. La condition (3.0.10) signifie que : Δ est un morphisme de Hom-algèbre. Mais la condition (3.0.11) Montre que Δ ne conserve pas nécessairement l'unité 1. Si $\Delta(1)=1\otimes 1$, alors condition (3.0.11) est satisfaite. Ainsi :

$$(\Delta\otimes\alpha)\Delta(1)=\Delta(1)\otimes\alpha(1)=1\otimes 1\otimes 1.$$

D'une autre manière,

$$(\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes\Delta(1))=(1\otimes 1\otimes 1).(1\otimes 1\otimes 1)=1\otimes 1\otimes 1.$$

L'identité (3.0.12) est la version faible que ε est un morphisme de Hom-algèbres dans le cas d'une Hom-bialgèbre faible.
Quand $\Delta(1)=1\otimes 1$ et l'application α est multiplicative, alors, on peut déduire que la counité est un morphisme de Hom-algèbre, En effet :

$$\varepsilon(m(x\otimes y))=\varepsilon(\alpha(m(x\otimes y)))=\varepsilon(m((\alpha(x)\otimes\alpha(y))))=\varepsilon(m(m(x\otimes 1)\otimes\alpha(y)))=$$
$$\varepsilon(m(\alpha(x)\alpha^2(x)))\varepsilon(\alpha^2(y))=\varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

L'application α, dans ce cas, constitue une structure de Hom-bialgèbre faible qui est toujours multiplicative.

Définition 3.0.4. Soit $(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,\alpha)$ et $(\mathcal{A}',m',\eta',\Delta',\varepsilon',\alpha')$ deux Hom-bialgèbres faibles, nous disons que l'application linéaire $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ est un morphisme de Hom-bialgèbre faible, si on a les égalités suivantes :

$$f\circ m = m'\circ(f\otimes f), \tag{3.0.13}$$
$$(f\otimes f)\circ\Delta = \Delta'\circ f, \tag{3.0.14}$$
$$f\circ\eta = \eta', \tag{3.0.15}$$
$$\varepsilon'\circ f = \varepsilon, \tag{3.0.16}$$
$$f\circ\alpha = \alpha'\circ f. \tag{3.0.17}$$

Définition 3.0.5. Une algèbre Hom-Hopf faible est un sextuplé $\mathcal{H} = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \alpha)$, où $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ est une Hom-bialgèbre faible et S est une antipode qui est un endomorphisme de $\mathcal{A}$ vérifiant :
$\forall x \in \mathcal{A}$,

$$m(id \otimes S)\Delta(x) = (\varepsilon \otimes \alpha)(\Delta(1)(x \otimes 1)), \tag{3.0.18}$$

$$m(S \otimes id)\Delta(x) = (\alpha \otimes \varepsilon)(1 \otimes x)\Delta(1), \tag{3.0.19}$$

$$m(m \otimes \alpha)(S \otimes id \otimes S)(\Delta \otimes \alpha)\Delta = S \circ \alpha^4, \tag{3.0.20}$$

$$\alpha \circ S = S \circ \alpha. \tag{3.0.21}$$

On note que la définition d'une algèbre Hom-Hopf faible provient de [47].

Exemple 3.0.6. *Soit $\mathcal{A}$ un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $\{e_1, e_2\}$. On peut définir une structure Hom-bialgèbre avec les données suivantes :*

$$m(e_1, e_1) = e_1,\ m(e_1, e_2) = e_1 - e_2,\ m(e_2, e_1) = e_1 - e_2,\ m(e_2, e_2) = e_1 - e_2,\ \eta(e_1) = e_1,$$

$$\Delta(e_1) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + e_2 \otimes e_2,\ \Delta(e_2) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2),$$

$$\varepsilon(e_1) = 2,\ \varepsilon(e_2) = 1,$$

$$\alpha(e_1) = e_1,\ \alpha(e_2) = e_1 - e_2.$$

Cette structure devient une algèbre Hom-Hopf faible, si on prend l'antipode S=id.

Exemple 3.0.7. *Soit $\mathcal{A}$ un espace vectoriel de dimension 3 engendré par : $\{e_1, e_2, e_3\}$. On peut définir une structure Hom-bialgèbre avec les données suivantes :*

$$\begin{aligned} &m(e_1, e_1) = e_1,\ m(e_1, e_2) = e_1 - e_3, m(e_2, e_1) = e_1 - e_3,\ m(e_2, e_2) = e_1 - e_3,\\ &m(e_1, e_3) = e_2 - e_3,\ m(e_3, e_1) = e_2 - e_3, m(e_3, e_2) = e_2 - e_3,\ m(e_2, e_3) = e_2 - e_3,\\ &m(e_3, e_3) = e_2 - e_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Delta(e_1) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3) + e_3 \otimes e_3,\\ &\Delta(e_2) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3),\ \Delta(e_3) = (e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3), \end{aligned}$$

$$\eta(e_1) = e_1,\ \varepsilon(e_1) = 3,\ \varepsilon(e_2) = 2,\ \varepsilon(e_3) = 1,$$

$$\alpha(e_1) = e_1,\ \alpha(e_2) = e_1 - e_3,\ \alpha(e_2) = e_1 - e_3.$$

Cette structure devient une algèbre Hom-Hopf faible, si on prend l'antipode $S = id$.

3.1 Construction par Twist

On montre que les Hom-bialgèbres faibles combinées avec les morphismes de Hom-bialgèbres donnent de nouvelles structures de Hom-bialgèbres faibles. En particulier, on peut construire des Hom-bialgèbres en utilisant les bialgèbres faibles usuelles et les morphismes de bialgèbres faibles.

Theorem 3.1.1. *Soit $B = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre et $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un morphisme de Hom-bialgèbre alors,*

$$B_\beta = (\mathcal{A}, m_\beta = \beta \circ m, \eta, \Delta_\beta = \Delta \circ \beta, \varepsilon, \beta \circ \alpha),$$

est une Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. Il suffit de vérifier les identitées (3.0.18)-(3.0.12) :
1. *Hom-associativité*

$$\begin{aligned}
m_\beta(\beta \circ \alpha(x) \otimes m_\beta(y \otimes z)) &= \beta \circ m(\beta \circ \alpha(x) \otimes \beta \circ m(y \otimes z)),\\
&= \beta^2 \circ m(\alpha(x) \otimes m(y \otimes z)),\\
&= \beta^2 \circ m(m(x \otimes y) \otimes \alpha(z)),\\
&= m_\beta(m_\beta(x \otimes y) \otimes \beta \circ \alpha(z)).
\end{aligned}$$

2. *Unité*

$$\eta \circ \beta \circ \alpha(1) = \eta \circ \beta(1) = \eta(1).$$

3. *Hom-coassociativité*

$$\begin{aligned}
(\Delta_\beta \otimes \beta \circ \alpha)\Delta_\beta(x) &= (\beta \otimes \beta \otimes \beta)(\Delta \otimes \alpha)\Delta_\beta(x),\\
&= (\beta \otimes \beta \otimes \beta)(\alpha \otimes \Delta)\Delta_\beta(x),\\
&= ((\beta \circ \alpha) \otimes \Delta_\beta)\Delta_\beta(x).
\end{aligned}$$

4. *Counité*

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon)\Delta_\beta(x) &= \beta(x_1)\varepsilon(\beta(x_2)),\\
&= \beta(x_1)\varepsilon(x_2) = \beta(x_1)\varepsilon(\alpha(x_2)),\\
&= \beta(x_1\varepsilon(\alpha(x_2)) = \beta \circ \alpha(x).
\end{aligned}$$

De manière similaire on a :

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta_\beta(x) = \beta(\varepsilon(\alpha(x_1))x_2) = \beta \circ \alpha(x).$$

5. *Compatibilité de la coassociativité* (a)

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta(m_\beta(x \otimes y)) &= \Delta(\beta^2(x).\beta^2(y)),\\
&= (\beta^2 \otimes \beta^2)\Delta(x.y),\\
&= (\beta^2 \otimes \beta^2)(\Delta(x).\Delta(y)),\\
&= (\beta \otimes \beta)(\Delta_\beta(x).\Delta_\beta(y)),\\
&= \Delta_\beta(x)._\beta\Delta_\beta(y).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(\Delta_\beta \otimes \beta\circ\alpha)\Delta_\beta(1) &= (\beta\otimes\beta)(\Delta\otimes\alpha)\Delta(1),\\ &= (\Delta_\beta(1)\otimes 1)._\beta(1\otimes\Delta(1)),\\ &= (\beta\otimes\beta)\Big[(\Delta(1)\otimes 1).(1\otimes\Delta(1))\Big].\end{aligned}$$

(c) ε *Condition faible*

$$\begin{aligned}\varepsilon(m_\beta(m_\beta(x\otimes y)\otimes\beta\circ\alpha(z))) &= \varepsilon\circ\beta^2\circ(m(m(x\otimes y)\otimes\alpha(z))),\\ &= \varepsilon\circ(m(m(x\otimes y)\otimes\alpha(z))),\\ &= \varepsilon(\beta\circ m((\beta\circ\alpha(x)\otimes\beta(y_1))\varepsilon(\beta\circ m(\beta(y_2)\otimes\beta\circ\alpha(z))),\\ &= \varepsilon\circ\beta^2(m(\alpha(x)\otimes y_1))\varepsilon\circ\beta^2(m(y_2\otimes\alpha(z))),\\ &= \varepsilon(m(\beta\circ\alpha(x)\otimes\beta(y_1)))\varepsilon(m(\beta(y_2)\otimes\beta\circ\alpha(z))).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.2. *Soit $B=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon)$ une bialgèbre faible et β un morphisme de Hom-bialgèbre faible alors,*

$$B_\beta=(\mathcal{A},m_\beta=\beta\circ m,\eta,\Delta_\beta=\Delta\circ\beta,\varepsilon,\beta),$$

est une Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. De façon simple, on voit qu'une bialgèbre faible est une Hom-bialgèbre faible $B_{id}=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,id)$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 3.1.1. On obtient $B_\beta=(\mathcal{A},\beta\circ m,\eta,\Delta\circ\beta,\varepsilon,id\circ\beta)$. □

Corollaire 3.1.3. *Soit $B=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,\alpha)$ une Hom-bialgèbre faible multiplicative, alors, pour tout entier n, nous avons :*

$$B_{\alpha^n}=(\mathcal{A},m_{\alpha^n}=\alpha^n\circ m,\eta,\Delta_{\alpha^n}=\Delta\circ\alpha^n,\varepsilon,\alpha^{n+1})$$

est une Hom-bialgèbre faible.

Theorem 3.1.4. *Soit $B=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,S,\alpha)$ une algèbre Hom-Hopf faible et β est un morphisme d'algèbre Hom-Hopf faible, tel que $S\circ\beta=\beta\circ S$. Alors,*

$$B_\beta=(\mathcal{A},m_\beta=\beta\circ m,\eta,\Delta_\beta=\Delta\circ\beta,\varepsilon,S,\beta\circ\alpha)$$

est une algèbre Hom-Hopf faible.

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions de l'antipode (3.0.18), (3.0.19), (3.0.20)

$$\begin{aligned}1)\quad m_\beta\circ(id\otimes S)\circ\Delta_\beta(x) &= \beta\circ m\circ(id\otimes S)\circ\Delta\circ\beta(x),\\ &= \beta^2\circ m\circ(id\otimes S)\circ\Delta(x),\\ &= \beta^2\circ(\varepsilon\otimes\alpha)\circ(m(1_1\otimes h)\otimes m(1_2\otimes 1)),\\ &= (\varepsilon\otimes\beta\circ\alpha)\circ(\beta\otimes\beta)\circ(m(1_1\otimes x)\otimes m(1_2\otimes 1)),\\ &= (\varepsilon\otimes\beta\circ\alpha)\circ(m_\beta(1_1\otimes x)\otimes m_\beta(1_2\otimes 1)).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2) \quad m_\beta(S\otimes id)\Delta_\beta(x) &= \beta\circ m(S\otimes id)\Delta\circ\beta(x),\\
&= \beta^2\circ m(S\otimes id)\Delta(x),\\
&= \beta^2\circ(\alpha\otimes\varepsilon)(m(1_1\otimes x)\otimes m(1_2\otimes 1)),\\
&= (\beta\circ\alpha\otimes\varepsilon)\circ(\beta\otimes\beta)\circ(m(1_1\otimes x)\otimes m(1_2\otimes 1)),\\
&= (\beta\circ\alpha\otimes\varepsilon)\circ(m_\beta(1_1\otimes x)\otimes m_\beta(1_2\otimes 1)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3) \qquad & m_\beta(m_\beta\otimes\beta\circ\alpha)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ(\Delta_\beta\otimes\beta\circ\alpha)\Delta_\beta(x),\\
&= \beta\circ m\circ(\beta\circ m\otimes\beta\circ\alpha)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ(\Delta\circ\beta\otimes\beta\circ\alpha)\circ\Delta\circ\beta(x),\\
&= \beta\circ m\circ(\beta\circ\beta)\circ(m\otimes\alpha)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ(\beta^2\otimes\beta^2\circ\beta^2)\circ\Delta(x),\\
&= \beta\circ m\circ(\beta\otimes\beta)\circ(m\otimes\alpha)\circ(\beta^2\otimes\beta^2\circ\beta^2)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ\Delta(x),\\
&= \beta\circ m\circ(\beta\otimes\beta)\circ(\beta^2\otimes\beta^2)\circ(m\otimes\alpha)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ\Delta(x),\\
&= \beta^4\circ m\circ(m\otimes\alpha)\circ(S\otimes id\otimes S)\circ\Delta(x),\\
&= \beta^4\circ S\circ\alpha^4(h),\\
&= (\beta\circ\alpha)^4\circ S(h).
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 3.1.5. *Soient $B=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ une algèbre de Hopf faible et β un morphisme d'algèbre Hom-Hopf faible tel que $\beta\circ S=S\circ\beta$, Alors*

$$B_\beta=(\mathcal{A},m_\beta=\beta\circ m,\eta,\Delta_\beta=\Delta\circ\beta,\varepsilon,S,\beta),$$

est une algèbre Hom-Hopf faible.

Corollaire 3.1.6. *Soit $B=(\mathcal{A},m,\eta,\Delta,\varepsilon,S,\alpha)$ une algèbre Hom-Hopf faible. Alors, pour un entier quelconque n,*

$$B_{\alpha^n}=(\mathcal{A},m_{\alpha^n}=\alpha^n\circ m,\eta,\Delta_{\alpha^n}=\Delta\circ\alpha^n,\varepsilon,S,\alpha^{n+1}),$$

est une algébre Hom-Hopf faible.

Exemple 3.1.7 (Algèbres Hom-Hopf faibles de Sweedler et Taft). *Soient $n\geq 2$ un nombre entier et λ est un élément primitif de la racine n^{ime} de l'unité. On considère l'algèbre de Taft $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$ qui est la généralisation de l'algèbre de Hopf Sweedler définie par les générateurs c et x où e est l'unité avec les relations :*
$c^n=e,\ x^n=0,\ x\cdot c=\lambda\, c\cdot x.$

Soit $\mathcal{H}'$ l'algèbre obtenue en adjoignant une nouvelle unité 1 à $\mathcal{H}_{n^2}(\lambda)$. On définit l'application linéaire $\beta:\mathcal{H}'\to\mathcal{H}'$, donnée par :

$$\beta(1)=1,\beta(e)=e,\beta(c)=c,\beta(x)=tx,\quad \text{où}\quad t\in\mathbb{K}.$$

On remarque que c'est un morphisme d'algèbre Hom-Hopf faible. Alors, on applique le théorème 3.1.1, on obtient alors la structure définit comme suit :
La multiplication est donnée par :$m_\beta(x,y)=\beta(x.y)=\beta(x)\beta(y)$,

La coalgèbre est donnée par :

$$\Delta_\beta(1) = (1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e,$$
$$\Delta_\beta(e) = e\otimes e,\ \Delta_\beta(c) = c\otimes c,\ \Delta_\beta(x) = c\otimes x + x\otimes e,$$
$$\varepsilon(1) = 2,\ \varepsilon(e) = 1,\ \varepsilon(c) = 1,\ \varepsilon(x) = 0.$$

Alors, $\mathcal{H}'$ devient une Hom-bialgèbre faible de dimension (n^2+1), qui a pour base $\{1, c^i x^j, 0 \leq i, j \leq n-1\}$.
On peut rendre cette structure de Hom-bialgèbre faible, une algèbre Hom-Hopf faible, si on choisit l'antipode donnée par :

$$S(1) = 1,\ S(e) = e,\ S(c) = c^{-1},\ S(x) = -c^{-1}\cdot x.$$

Cette nouvelle structure d'algèbre s'appelle l'algèbre Hom-Hopf faible de Sweedler et Taft.

3.2 Constructions de Kaplansky de type-Hom

Dans cette section, nous proposons des constructions des Hom-bialgèbres faibles et des algèbres Hom-Hopf faibles construites à partir d'une algèbre Hom-associative voir l'article [12]. Ces constructions sont inspirées par les bialgèbres construites par Kaplansky voir [23].

Theorem 3.2.1. *Soit $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ une algèbre Hom-associative quelconque (non nécessairement unitaire) avec une base $\mathfrak{b}$. Soit $\mathcal{B}$ le résultat de l'adjonction successive à $\mathcal{A}$ de deux éléments unitaires e et 1, tels que : $m(1\otimes 1) = 1$, $m(e\otimes e) = e$, $m(1\otimes a) = m(a\otimes 1) = m(e\otimes a) = m(a\otimes e) = \alpha(a)$, $\forall a \in \mathfrak{b}$ et, $\alpha(1) = 1$, $\alpha(e) = e$. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}$ engendré par l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ et les genérateurs $\{e, 1\}$, on définit les opérations données par :*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) & = & (1-e)\otimes(1-e) + e\otimes e, \\ \Delta(a) & = & \alpha(a)\otimes\alpha(a), \quad \forall a \in \mathfrak{b}, \\ \varepsilon\circ\alpha(a) & = & \varepsilon(a) = 1, \quad \forall a \in \mathfrak{b}, \\ \varepsilon(1) & = & 2. \end{array}$$

Alors, l'extension par linéarité nous permet d'affirmer que les applications Δ et ε sont bien définies pour tout élément de $\mathcal{B}$. Si on suppose de plus que :

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{b} \text{ on a : } m(a\otimes b) \in \mathfrak{b},$$

$$\Delta(\alpha(a)) = \alpha^2(a)\otimes\alpha^2(a), \quad \varepsilon(\alpha(a)) = \varepsilon(\alpha^2(a)) = \varepsilon(a) = 1, \quad \text{et } \varepsilon(m(m(a\otimes b)\otimes\alpha(c))) = 1. \tag{3.2.1}$$

Alors, $\mathcal{B}$ deviendra une Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. Nous vérifions que Δ est Hom-coassociative : $\quad \forall a \in \mathfrak{b}$.

$$(\Delta \otimes \alpha)\Delta(a) = (\Delta \otimes \alpha)(\alpha(a) \otimes \alpha(a)) = \Delta(\alpha(a)) \otimes \alpha^2(a) = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a),$$

$$(\alpha \otimes \Delta)\Delta(a) = (\alpha \otimes \Delta)(\alpha(a) \otimes \alpha(a)) = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a), \quad \forall a \in \mathfrak{b} \setminus \{1\}.$$

Nous avons aussi,

$$\begin{array}{rcl}(\Delta \otimes \alpha)\Delta(1) & = & \Delta(1) \otimes 1 - \Delta(1) \otimes e - \Delta(e) \otimes 1 + 2\Delta(e) \otimes e, \\ & = & 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes e \otimes 1 - e \otimes 1 \otimes 1 + 2e \otimes e \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes e + 1 \otimes e \otimes e, \\ & + & e \otimes 1 \otimes e - 2e \otimes e \otimes e - e \otimes e \otimes 1 + 2e \otimes e \otimes e, \\ & = & 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes e \otimes 1 - e \otimes 1 \otimes 1 + e \otimes e \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes e + 1 \otimes e \otimes e, \\ & + & e \otimes 1 \otimes e, \\ & = & (1-e) \otimes (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e \otimes e.\end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl}(\alpha \otimes \Delta)\Delta(1) & = & 1 \otimes \Delta(1) - 1 \otimes \Delta(e) - e \otimes \Delta(1) + 2e \otimes \Delta(e), \\ & = & 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes e \otimes 1 - e \otimes 1 \otimes 1 + e \otimes e \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes e + 1 \otimes e \otimes e \\ & + & e \otimes 1 \otimes e, \\ & = & (1-e) \otimes (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e \otimes e.\end{array}$$

Alors,

$$(\Delta \otimes \alpha)\Delta(1) = (\alpha \otimes \Delta)\Delta(1).$$

Nous montrons la condition de compatibilité (3.0.11). En effet :

$$\begin{array}{rcl}(1 \otimes \Delta(1)) \cdot (\Delta(1) \otimes 1) & = & (\Delta(1) \otimes 1) \cdot (1 \otimes \Delta(1)), \\ & = & (1-e) \otimes (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e \otimes e.\end{array}$$

En faisant les calculs prévues, on obtient que la relation (3.0.11) est satisfaite. Maintenant, nous affirmons les identitées $\quad \forall a \in \mathfrak{b}$

$$\begin{array}{rcl}(\varepsilon \otimes id)\Delta(1) & = & \varepsilon(1)1 - \varepsilon(1)e - \varepsilon(e)1 + 2\varepsilon(e)e = \alpha(1), \\ (id \otimes \varepsilon)\Delta(1) & = & \varepsilon(1)1 - \varepsilon(e)1 - \varepsilon(1)e + 2\varepsilon(e)e = \alpha(1), \\ (\varepsilon \otimes id)\Delta(e) & = & \varepsilon(e)e = e = \alpha(e), \\ (id \otimes \varepsilon)\Delta(e) & = & \varepsilon(e)e = e = \alpha(e), \\ (\varepsilon \otimes id)\Delta(a) & = & \varepsilon(a)a = a = \alpha(a), \\ (id \otimes \varepsilon)\Delta(a) & = & \varepsilon(a)a = a = \alpha(a).\end{array}$$

La comultiplication Δ est dans ce cas un morphisme algèbre (3.0.8). En effet : $\Delta(a) \cdot \Delta(1) = (\alpha(a) \otimes \alpha(a)) \cdot (1 \otimes 1 - 1 \otimes e - e \otimes 1 + 2 \otimes 1 \otimes 1) = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) - \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) - \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) + 2\alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) = \Delta(\alpha(a)) = \Delta(a \cdot 1)$.

$$\Delta(a) \cdot \Delta(e) = (\alpha(a) \otimes \alpha(a)) \cdot (e \otimes e) = \alpha(a) \cdot e \otimes \alpha(a) \cdot e = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a) = \Delta(a \cdot e).$$

Soit $a_1, a_2 \in \mathfrak{b}$, $\Delta(a_1) \cdot \Delta(a_2) = (\alpha(a_1) \otimes \alpha(a_1)) \cdot (\alpha(a_2) \otimes \alpha(a_2)) = \alpha(a_1) \cdot \alpha(a_2) \otimes \alpha(a_1) \cdot \alpha(a_2) = \alpha(a_1 \cdot a_2) \otimes \alpha(a_1 \cdot a_2) = \Delta(a_1 \cdot a_2)$.
De la même manière, on vérifie que ε satisfait la condition faible (3.0.12).

$\square$

Proposition 3.2.2. *Ètant donnée la Hom-bigèbre faible définie dans le théorème* (3.2.1). *Alors, elle ne peut être doter d'une structure d'algèbre Hom-Hopf faible.*

Démonstration. Si on suppose que c'est vrai, nous aurons

$$m \circ (\alpha S)\Delta(x) = m \circ (id \otimes S)(\alpha(x) \otimes \alpha(x)) = m(\alpha(x) \otimes S(\alpha(x))), \qquad \forall x \in \mathcal{A},$$

et

$$(\varepsilon\otimes\alpha)\Delta(1)(x\otimes 1) = (\varepsilon\otimes\alpha(1-e)\otimes\alpha(1-e)\cdot(x\otimes 1)+(e\otimes e)\cdot(x\otimes 1) = (\varepsilon\otimes\alpha)(\alpha(x)\otimes e) = \varepsilon(\alpha(x)e = e.$$

Alors, dans ce cas on doit avoir

$$\alpha(x) \cdot S(\alpha(x)) = e.$$

Cette égalité n'est pas vraie pour tout x dans $\mathcal{A}$, donc, c'est une contradiction avec les hypothèses.

□

Corollaire 3.2.3. *Soit* $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ *une algèbre Hom-associative multiplicative et unitaire où 1 est son unité et soit* $\mathfrak{b}$ *une base de* $\mathcal{A}$. *Nous supposons que pour tout élément* $a, b \in \mathcal{A}$ *on a* $m(a \otimes b) \in \mathfrak{b}$, *et qu'il existe un élément e dans* $\mathcal{A}$ *tel que :* $m(e\otimes a) = m(e\otimes a) = \alpha(a)$, $\forall a \in \mathfrak{b}$, *et* $\alpha(e) = e$. *Considérons les opérations définies par :*

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) &=& (1-e)\otimes(1-e)+e\otimes e, \\ \Delta(a) &=& \alpha(a)\otimes\alpha(a), \forall a \in \mathfrak{b}, \\ \varepsilon(1) &=& 2, \\ \varepsilon\circ\alpha(a) &=& \varepsilon(a) = 1, \forall a \in \mathfrak{b}, a \neq 1, \end{array}$$

et $\quad \forall a, b, c \in \mathfrak{b}$ *nous avons,*

$$\Delta(\alpha(a)) = \alpha^2(a) \otimes \alpha^2(a), \quad \varepsilon(\alpha(a)) = \varepsilon(\alpha^2(a)) = 1, \quad \varepsilon(m(m(a \otimes b) \otimes \alpha(c))) = 1.$$

Alors, $(\mathcal{A}, m, 1, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ *possède la structure de Hom-bialgèbre faible.*

Démonstration. Il suffit de prouver que Δ est un homomorphisme d'algèbre (voir la preuve du théorème 3.2.1 :
$\Delta(1) \cdot \Delta(1) = \Delta(1 \cdot 1) = \Delta(1)$,
$\Delta(1) \cdot \Delta(g) = [(1-e)\otimes(1-e)+e\otimes e] \bullet [\alpha(a)\otimes\alpha(a)] = \Delta(1\cdot a) = \Delta(\alpha(a))$, $\forall a \in \mathfrak{b}$
$\Delta(a_1) \cdot \Delta(a_2) = \Delta(a_1 \bullet a_2) = \alpha(a_1)\cdot\alpha(a_2)\otimes\alpha(a_1)\cdot\alpha(a_2)$, $\forall a_1, a_2 \in \mathfrak{b}$. □

Corollaire 3.2.4. *Soit* $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ *une algèbre Hom-associative multiplicative et unitaire de dimension n et* 1 *est son unité. Nous supposons qu'il existe une base* $\mathfrak{b} = \{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ *de* $\mathcal{A}$ *ou* $e_1 = 1$ *et les éléments* $\{e_i\}_{2\leq i\leq n}$ *sont nilpotents d'ordre* 2 *qui engendrent l'hyperplan avec une base orthogonale. Alors, il existe une structure de Hom-bialgèbre sur* $\mathcal{A}$ *donnée par : pour tout entier fixé,* $k \in \{2, \cdots n\}$, *sur la base orthogonale de l'hyperplan,* $\{e_i\}_{2\leq i\leq n}$,

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) &=& (1-\alpha(e_k))\otimes(1-\alpha(e_k))+\alpha(e_k)\otimes\alpha(e_k), \\ \Delta(e_i) &=& \alpha(e_i)\otimes\alpha(e_i), \quad \Delta(\alpha(e_i)) = \alpha^2(e_i))\otimes\alpha^2(e_i), \quad i \in \{2, \cdots n\}, \\ \varepsilon(1) &=& 2, \\ \varepsilon(e_i) &=& \varepsilon(\alpha(e_i)) = \varepsilon(\alpha^2(e_i)) = 1, \quad i \in \{2, \cdots n\} \end{array}$$

Démonstration. Un simple calcul de routine. □

Dans ce qui suit, on présente un résultat plus général.

Theorem 3.2.5. *Soit $(\mathcal{A}, m, \alpha)$ une algèbre Hom-associative multiplicative et unitaire d'unité $e_1 = 1$ et de dimension finie n. On fixe un entier p telle que : $p \leq n$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{b}_2$ est une base de $\mathcal{A}$ avec, $\mathfrak{b}_1 = \{e_i\}_{i=1,\cdots,p}$. On suppose que :*

$$\begin{aligned}
&m(e_i \otimes e_j) = e_{max(i,j)}, \quad \forall i, j = 2, \cdots, p \\
&m(e_i \otimes g) = m(g \otimes e_i) = \alpha(g), \quad \forall g \in \mathfrak{b}_2. \\
&\alpha(e_i) = e_i, \forall j = 1, \cdots, p, \\
&\alpha(g) \in \mathfrak{b}_2.
\end{aligned}$$

La comultiplication Δ est la counité ε sont définies par :

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_p) = e_p \otimes e_p, \\
&\Delta(e_i) = (e_i - e_{i+1}) \otimes (e_i - e_{i+1}) + \Delta(e_{i+1}), \quad \forall i, \ i = 1, \cdots, p-1, \\
&\Delta(g) = \alpha(g) \otimes \alpha(g), \quad \forall g \in \mathfrak{b}_2, \\
&\varepsilon(e_i) = p - i + 1, \quad \forall i, \ i = 1, \cdots, p, \\
&\varepsilon(g) = 1, \quad \forall g \in \mathfrak{b}_2,
\end{aligned}$$

Ces hypothèses confèrent à $\mathcal{A}$ une structure de Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. La sous Hom-bialgèbre engendrée par $\mathfrak{b}_1$ est une Hom bialgèbre faible, voir 3.0.8. Il suffit de vérifier dans ce cas uniquement les conditions pour les éléments g de $\mathfrak{b}_2$. On remarque que $\Delta(\alpha(a)) = \alpha^2(g) \otimes \alpha^2(a), \forall g \in \mathfrak{b}_2$. Il suffit dans ce cas de montrer que Δ est compatible avec la multiplication. En effet, un simple calcul nous assure que pour tout : $g \in \mathfrak{b}_2$ que Δ est compatible avec la multiplication :
$\Delta(e_{p-i})\cdot\Delta(g) = [(e_{p-i}-e_{p-i+1})\otimes(e_{p-i}-e_{p-i+1})+(e_{p-i+1}-e_{p-i+2})\otimes(e_{p-i+1}-e_{p-i+2})+ ... + (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) \otimes (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) + ... + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] \cdot (\alpha(g) \otimes \alpha(g)) = e_p \cdot \alpha(g) \otimes e_p \cdot \alpha(g) = \alpha(g) \otimes \alpha(g) = \Delta(e_{p-i} \cdot g), \forall g \in b_2, \forall i = 0...p-1.$
Nous supposons que : $i < k$,
$\Delta(e_{p-i}) \cdot \Delta(e_{p-k}) = [(e_{p-i} - e_{p-i+1}) \otimes (e_{p-i} - e_{p-i+1}) + (e_{p-i+1} - e_{p-i+2}) \otimes (e_{p-i+1} - e_{p-i+2}) + ... + (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) \otimes (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) + ... + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] \cdot [(e_{p-k} - e_{p-k+1}) \otimes (e_{p-k} - e_{p-k+1}) + (e_{p-k+1} - e_{p-k+2}) \otimes (e_{p-k+1} - e_{p-k+2}) + ... + (e_{p-k+t} - e_{p-k+t+1}) \otimes (e_{p-k+t} - e_{p-k+t+1}) + ... + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p] = \Delta(e_{p-i}) \cdot \Delta(e_{p-k}) = [(e_{p-i} - e_{p-i+1}) \otimes (e_{p-i} - e_{p-i+1}) + (e_{p-i+1} - e_{p-i+2}) \otimes (e_{p-i+1} - e_{p-i+2}) + ... + (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) \otimes (e_{p-i+j} - e_{p-i+j+1}) + ... + (e_{p-1} - e_p) \otimes (e_{p-1} - e_p) + e_p \otimes e_p = \Delta(e_{p-i}) = \Delta(e_{p-i} \cdot e_{p-k}), \forall\ i, k = 0...p-1.$

Montrons que ε satisfait la version faible :
Supposons que : $j \leq k$
$\varepsilon(e_i \cdot e_j \bullet e_k) = \varepsilon(e_i \cdot e_k) = p - \max(i, k) + 1,$
D'autre façon :
$\varepsilon(e_i \cdot (e_j)_{(1)})\varepsilon((e_j)_{(2)} \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot (e_j - e_{j+1}))\varepsilon((e_j - e_{j+1}) \cdot e_k)) + \varepsilon(e_i \cdot (e_{j+1} - e_{j+2}))\varepsilon((e_{j+1} - e_{j+2}) \cdot e_k) + \varepsilon(e_i \cdot (e_{j+2} - e_{j+3}))\varepsilon((e_{j+2} - e_{j+3}) \cdot e_k)) + ... + \varepsilon(e_i. \cdot (e_k -$

$e_{k+1}))\varepsilon((e_k - e_{k+1})\cdot e_k) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p))\varepsilon((e_{p-1} - e_p)\cdot e_k) + \varepsilon(e_i\cdot e_p)\varepsilon((e_p\cdot e_k) = \varepsilon(e_i\cdot(e_k - e_{k+1}))\varepsilon(e_k - e_{k+1}) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{k+1} - e_{k+2}))\varepsilon(e_{k+1} - e_{k+2}) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p))\varepsilon(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_i\cdot e_p)\varepsilon(e_p) = \varepsilon(e_i\cdot(e_k - e_{k+1})) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{k+1} - e_{k+2})) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_i\cdot e_p) = \varepsilon(e_i\cdot e_k) - \varepsilon(e_i\cdot e_{k+1}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{k+1}) - \varepsilon(e_i\cdot e_{k+2}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{k+2}) + ... - \varepsilon(e_i\cdot e_{p-1}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{p-1}) - \varepsilon(e_i\cdot e_p) + \varepsilon(e_i\cdot e_p) = \varepsilon(e_i\cdot e_k) = p - \max(i,k) + 1.$
Si $j > k$, alors,
$\varepsilon(e_i\cdot e_j\cdot e_k) = \varepsilon(e_i\cdot e_j) = p - \max(i,j) + 1,$
$\varepsilon(e_i\cdot(e_j)_{(1)})\varepsilon((e_j)_{(2)}\cdot e_k) = \varepsilon(e_i\cdot(e_j - e_{j+1}))\varepsilon((e_j - e_{j+1})\cdot e_k) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{j+1} - e_{j+2}))\varepsilon((e_{j+1} - e_{j+2})\cdot e_k) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{j+2} - e_{j+3}))\varepsilon((e_{j+2} - e_{j+3})\cdot e_k) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p)\varepsilon((e_{p-1} - e_p)\cdot e_k) + \varepsilon(e_i\cdot e_p)\varepsilon(e_p\cdot e_k) = \varepsilon(e_i\cdot(e_j - e_{j+1}))\varepsilon(e_j - e_{j+1}) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{j+1} - e_{j+2}))\varepsilon(e_{j+1} - e_{j+2}) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p))\varepsilon(e_{p-1} - e_p) + \varepsilon(e_i\cdot e_p)\varepsilon(e_p) = \varepsilon(e_i\cdot(e_j - e_{j+1})) + \varepsilon(e_i\cdot(e_{j+1} - e_{j+2})) + ... + \varepsilon(e_i\cdot(e_{p-1} - e_p)) + \varepsilon(e_i\cdot e_p) = \varepsilon(e_i\cdot e_j) - \varepsilon(e_i\cdot e_{j+1}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{j+1}) - \varepsilon(e_i\cdot e_{j+2}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{j+2}) + ... - \varepsilon(e_i\cdot e_{p-1}) + \varepsilon(e_i\cdot e_{p-1}) - \varepsilon(e_i\cdot e_p) + \varepsilon(e_i\cdot e_p) = \varepsilon(e_i\cdot e_j) = p - \max(i,j) + 1.$
Les autres conditions sont obtenues par des calculs directs. □

Theorem 3.2.6. *Soit $(\mathcal{A}, m)$ une algèbre unitaire d'unité e_2 et α est un endomorphisme d'algèbre défini sur $\mathcal{A}$. On suppose que la multiplication est donnée relativement à la base $\{e_i\}_{i=2,\cdots,n}$ par : $m(e_i \otimes e_j) = e_{max(i,j)}$, $i,j = 2,\cdots,n$ et $\alpha(e_2) = e_2$.*

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel résultant de l'adjonction d'une seconde unité $e_1 = 1$ à $\mathcal{A}$. On suppose que la comultiplication et la counité ont pour expression

$$\begin{aligned}
\Delta(e_n) &= \alpha(e_n) \otimes \alpha(e_n),\\
\Delta(e_i) &= (\alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1})) \otimes (\alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1})) + \Delta(e_{i+1}), \quad \forall i,\ i = 1,\cdots n-1,\\
\varepsilon(e_i) &= n - i + 1, \quad \forall i,\ i = 1,\cdots n,
\end{aligned}$$

alors, sous ces hypothèses, $\mathcal{B}$ a une structure de Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. Il est facile de voir que α est un morphisme d'algèbre. $m(e_i \otimes e_1) = m(e_1 \otimes e_i) = \alpha(e_{max(i,1)}) = \alpha(e_i)$,
$m(\alpha(e_i) \otimes m(e_j \otimes e_k)) = m(\alpha(e_i) \otimes \alpha(e_{max(j,k)})) = \alpha \circ m(e_i \otimes e_{max(j,k)}) = \alpha^2(e_{max(i,j,k)})$.
D'autre part,
$m(m(e_i \otimes e_j) \otimes \alpha(e_k)) = m(\alpha(e_{max(i,j)}) \otimes \alpha(e_k)) = \alpha \circ m(e_{max(i,j)} \otimes e_k) = \alpha^2(e_{max(i,j,k)})$.
Ainsi, m est Hom-associative en respectant la multiplicativité avec α. Maintenant, montrons par induction la Hom-coassociativité.
$(\Delta \otimes \alpha)\Delta(e_n) = (\Delta \otimes \alpha)(\alpha(e_n) \otimes \alpha(e_n)) = \alpha^2(e_n) \otimes \alpha^2(e_n) \otimes \alpha^2(e_n)$,
On suppose que la propriété est vraie au rang i+1 et prouvons qu'elle est vraie aussi au rang i.

$$\begin{aligned}
&(\alpha \otimes \Delta)\Delta(e_i) = (\alpha \otimes \Delta)(\alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1})) \otimes (\alpha(e_i) - \alpha(e_{i+1})) + (\alpha \otimes \Delta)\Delta(e_{i+1}),\\
&= (\alpha^2(e_i) - \alpha^2(e_{i+1})) \otimes (\Delta(\alpha(e_i)) - \Delta(\alpha(e_{i+1}))) + (\Delta \otimes \alpha)\Delta(e_{i+1}),\\
&= (\alpha^2(e_i) - \alpha^2(e_{i+1})) \otimes (\alpha^2(e_i) - \alpha^2(e_{i+1})) \otimes (\alpha^2(e_i) - \alpha^2(e_{i+1})) + (\Delta \otimes \alpha)\Delta(e_{i+1}),
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
(\Delta\otimes\alpha)\Delta(e_i) &= (\Delta\otimes\alpha)(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))\otimes(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))+(\Delta\otimes\alpha)\Delta(e_{i+1}),\\
&= (\Delta(\alpha(e_i))\otimes(\alpha^2(e_i)-\alpha^2(e_{i+1}))-\Delta(\alpha(e_{i+1})))+(\Delta\otimes\alpha)\Delta(e_{i+1}),\\
&= (\alpha^2(e_i)-\alpha^2(e_{i+1}))\otimes(\alpha^2(e_i)-\alpha^2(e_{i+1}))\otimes(\alpha^2(e_i)-\alpha^2(e_{i+1}))+(\Delta\otimes\alpha)\Delta(e_{i+1}),\\
&= (\alpha\otimes\Delta)\Delta(e_i),
\end{aligned}
$$

Ce qui confirme que Δ est Hom-coassociative.
Nous prouvons dans ce qui suit que la multiplication m est compatible avec la structure de Hom-coalgèbre.
On suppose que $i<k$,
$\Delta(e_{p-i})\cdot\Delta(e_{p-k}) = [(\alpha(e_{p-i})-\alpha(e_{p-i+1}))\otimes(\alpha(e_{p-i})-\alpha(e_{p-i+1}))+(\alpha(e_{p-i+1})-\alpha(e_{p-i+2}))\otimes(\alpha(e_{p-i+1})-\alpha(e_{p-i+2}))+...+(\alpha(e_{p-i+j})-\alpha(e_{p-i+j+1}))\otimes(\alpha(e_{p-i+j})-\alpha(e_{p-i+j+1}))+...+(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))\otimes(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))+\alpha(e_p)\otimes\alpha(e_p)]\cdot[(\alpha(e_{p-k})-\alpha(e_{p-k+1}))\otimes(\alpha(e_{p-k})-\alpha(e_{p-k+1}))+(\alpha(e_{p-k+1})-\alpha(e_{p-k+2}))\otimes(\alpha(e_{p-k+1})-\alpha(e_{p-k+2}))+...+(\alpha(e_{p-k+t})-\alpha(e_{p-k+t+1}))\otimes(\alpha(e_{p-k+t})-\alpha(e_{p-k+t+1}))+...+(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))\otimes(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))+\alpha(e_p)\otimes\alpha(e_p)] = (\alpha(e_{p-i})-\alpha(e_{p-i+1}))\otimes(\alpha(e_{p-i})-\alpha(e_{p-i+1}))+(\alpha(e_{p-i+1})-\alpha(e_{p-i+2}))\otimes(\alpha(e_{p-i+1})-\alpha(e_{p-i+2}))+...+(\alpha(e_{p-i+j})-\alpha(e_{p-i+j+1}))\otimes(\alpha(e_{p-i+j})-\alpha(e_{p-i+j+1}))+...+(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))\otimes(\alpha(e_{p-1})-\alpha(e_p))+\alpha(e_p)\otimes\alpha(e_p) = \Delta(e_{p-i}) = \Delta(e_{p-i}\cdot e_{p-k}),\quad \forall i,k=0,\ldots,p-1.$

Maintenant, nous prouvons la compatibilité avec la counité :
$(id\otimes\varepsilon)\Delta(e_n) = (id\otimes\varepsilon)(\alpha(e_n)\otimes\alpha(e_n)) = \varepsilon(e_n)\alpha(e_n) = \alpha(e_n)$. Une autre fois par induction, on suppose que la propriété vraie pour $i+1$ et donnons la preuve pour i.
$(id\otimes\varepsilon)\Delta(e_i) = (id\otimes\varepsilon)[(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1})\otimes\alpha(e_i-\alpha(e_{i+1}))]+(id\otimes\varepsilon)\Delta(e_{i+1}) = (\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))(\varepsilon(e_i)-\varepsilon(e_{i+1}))+\alpha(e_{i+1})) = \alpha(e_i)$.

$(\varepsilon\otimes id)\Delta(e_i) = (\varepsilon\otimes id)[(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1})\otimes\alpha(e_i-\alpha(e_{i+1}))]+(\varepsilon\otimes id)\Delta(e_{i+1}) = (\varepsilon(e_i)-\varepsilon(e_{i+1}))(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))+\alpha(e_{i+1})) = \alpha(e_i)$.
La condition faible de la counité se vérifie facilement. □

Proposition 3.2.7. *Sous les hypothèses du corollaire* (3.2.6)*, il existe $n-1$ structures de bialgèbre associées à $\mathcal{A}$ deux à deux non isomorphes. On prend j tel que $j=2,\cdots,n$. La structure de la Hom-coalgèbre est définie par :*
$\Delta(e_1) = (\alpha(e_1)-\alpha(e_2))\otimes(\alpha(e_1)-\alpha(e_2))+(\alpha((e_2)-\alpha(e_3))\otimes(\alpha((e_2)-\alpha(e_3))+...+(\alpha((e_{j-1})-\alpha(e_j))\otimes(\alpha(e_{j-1})-\alpha(e_j))+\alpha(e_j)\otimes\alpha(e_j)$,
Si i<j,
$\Delta(e_i) = (\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1})\otimes(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))+...+(\alpha(e_{j-1})-\alpha(e_j)\otimes(\alpha(e_{j-1})-\alpha(e_j)+\alpha(e_j)\otimes\alpha(e_j)$.
Si i=j,
$\Delta(e_j) = \alpha(e_j)\otimes\alpha(e_j)$.
Si $p\geq i>j$,
$\Delta(e_i) = (\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))\otimes(\alpha(e_j+\alpha(e_j))\otimes(\alpha(e_i)-\alpha(e_{i+1}))$,
et $\varepsilon(e_i) = \alpha\circ\varepsilon(e_i) = j-i+1,\quad i=1,\cdots,j-1$.
$\varepsilon(e_j) = \alpha\circ\varepsilon(e_j) = 1$ *et* $\varepsilon(e_i) = \alpha\circ\varepsilon(e_i) = 0,\quad i=j+1,\cdots,n$.

Démonstration. Pour tout j tel que $j = 2, \cdots, n$, on considère la structure de Hom-bialgèbre faible définie ci-dessus. La vérifcation est similaire au thèoréme 3.2.6. $\square$

Corollaire 3.2.8. *Il existe une structure de Hom-bialgèbre faible pour une Hom-algèbre associative quelconque engendré par n éléments orthogonaux nilpotents d'ordre deux.*

Theorem 3.2.9. *Soient $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre et e_2 est l'unité. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{B}$ résultant de l'adjonction de l'unité e_1 à $\mathcal{A}$ qui respecte la multiplication. Supposons que,*

$$\begin{aligned}
&\alpha(e_1) = e_1, \alpha(e_2) = e_2,\\
&m(e_1 \otimes e_1) = e_1, m(e_1 \otimes e_2) = m(e_2 \otimes e_1) = m(e_2 \otimes e_2) = e_2,\\
&\Delta(e_1) = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) + e_2 \otimes e_2,\\
&\varepsilon(e_1) = 2.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Alors, $\mathcal{B}$ devient une Hom-bialgèbre faible.

Démonstration. La condition (1.7) est satisfaite, voir Théorème 2.1.9. Ainsi, nous avons,
$(\varepsilon \otimes id)\Delta(e_1) = \varepsilon(e_1)e_1 - \varepsilon(e_1)e_2 - \varepsilon(e_2)e_2 + 2\varepsilon(e_1)e_1 = 1,$

$(id \otimes \varepsilon)\Delta(e_1) = \varepsilon(e_1)e_1 - \varepsilon(e_1)e_2 - \varepsilon(e_2)e_2 + 2\varepsilon(e_2)e_2 = 1,$

$\varepsilon(e_1 \cdot e_1 \cdot e_1) = \varepsilon(e_1 \cdot e_1)\varepsilon(e_1 \cdot e_1) - \varepsilon(e_1 \cdot e_1)\varepsilon(e_2 \cdot e_1) - \varepsilon(e_1 \cdot e_2)\varepsilon(e_1 \cdot e_1) + \varepsilon(e_1 \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot e_1) = \varepsilon(e_1)\varepsilon(e_1) - \varepsilon(e_1)\varepsilon(e_2) - \varepsilon(e_2)\varepsilon(e_1) + 2\varepsilon(e_2)\varepsilon(e_2) = 4 - 2 - 2 + 2 = 2,$

$\varepsilon(e_i \cdot e_1 \cdot e_1) = \varepsilon(e_i \cdot e_1)\varepsilon(e_1 \cdot e_1) - \varepsilon(e_i \cdot e_1)\varepsilon(e_2 \cdot e_1) - \varepsilon(e_i \cdot e_2)\varepsilon(e_1 \cdot e_1) + 2\varepsilon(e_i \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot e_1) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_1) - \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_2) - \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_1) + 2\varepsilon(e_i)\varepsilon(e_2) = 2\varepsilon(e_i) - \varepsilon(e_i) - 2\varepsilon(e_i) + 2\varepsilon(e_i) = \varepsilon(e_i),$
$\varepsilon(e_1 \cdot e_i \cdot e_1) = \varepsilon(e_i \cdot e_1) = \varepsilon(e_i),$

$\varepsilon(e_1 \cdot e_i \cdot e_1) = \varepsilon(e_2 \cdot e_i \cdot e_2) = \varepsilon(e_2 \cdot e_{i_{(1)}})\varepsilon(e_{i_{(2)}} \cdot e_2) = \varepsilon(e_1 \cdot e_{i_{(1)}})\varepsilon(e_{i_{(2)}} \cdot e_1) = \varepsilon(e_1 \cdot e_{i_{(2)}})\varepsilon(e_{i_{(1)}} \cdot e_1).$

On suppose que : $i, k \neq 1$,

$\varepsilon(e_i \cdot e_1 \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot e_k) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k),$
$\varepsilon(e_i \cdot e_1 \cdot e_k) = \varepsilon(e_i \cdot e_1)\varepsilon(e_1 \cdot e_k) - \varepsilon(e_i \cdot e_1)\varepsilon(e_2 \cdot e_k) - \varepsilon(e_i \cdot e_2)\varepsilon(e_1 \cdot e_k) + 2\varepsilon(e_i \cdot e_2)\varepsilon(e_2 \cdot e_k) = 2\varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k) - \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k) - \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k) + 2\varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k) = \varepsilon(e_i)\varepsilon(e_k).$ $\square$

Remarque 3.2.10. La counité de $\mathcal{B}$ n'est pas un morphisme algèbre et $dim\mathcal{B} = dim\mathcal{A} + 1$.

Corollaire 3.2.11. *Soient $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre faible et u est son unité. Soit $\mathcal{B}$ le résultat de l'adjonction successive à $\mathcal{A}$ des éléments unitaires e et 1*

respectant la multiplication qui peut s'étendre par linéarité dans $\mathcal{B}$.
On suppose que :

$$\begin{aligned}
&\alpha(1) = 1, \alpha(e) = e, \alpha(u) = u,\\
&m(1 \otimes 1) = 1, m(e \otimes 1) = m(1 \otimes e) = m(e \otimes e) = e,\\
&m(1 \otimes u) = m(u \otimes 1) = m(u \otimes e) = m(e \otimes u) = m(u \otimes u) = u,\\
&\Delta(1) = 1 \otimes (e - u) + u \otimes (1 - 2e + 2u),\\
&\Delta(e) = e \otimes (e - u) + u \otimes (2u - e),\\
&\varepsilon(1) = 2,\ \varepsilon(e) = 2.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}$ est une Hom-bialgèbre faible.

La counité de $\mathcal{B}$ obtenue dans le corollaire n'est pas un morphisme d'algèbre.

Corollaire 3.2.12. *Soient $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre faible et u est son unité. Soit $\mathcal{B}$ le résultat de l'adjonction successive à $\mathcal{A}$ de deux èlèment e et 1 pour la multiplication. On pose :*

$$\begin{aligned}
&\alpha(1) = 1, \alpha(e) = e, \alpha(u) = u,\\
&m(1 \otimes 1) = 1, m(e \otimes 1) = m(1 \otimes e) = m(e \otimes e) = e,\\
&m(1 \otimes u) = m(x \otimes 1) = m(u \otimes e) = m(e \otimes u) = m(u \otimes u) = u,\\
&\Delta(1) = (1 - e) \otimes (1 - e) + (e - u) \otimes (e - u) + u \otimes u,\\
&\Delta(e) = (e - u) \otimes (e - u) + u \otimes u,\\
&\varepsilon(1) = 3,\ \varepsilon(e) = 2.
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{B}$ est une structure de Hom-bigèbre faible.

Remarque 3.2.13. La counité de la bigébre $\mathcal{B}$ n'est pas un morphisme d'algèbre.

Theorem 3.2.14. *Soient $\mathcal{B}$ une bialgèbre et $\mathcal{B}' = span\{\mathcal{B}, e, 1\}$ une bialgèbre faible obtenue par la construction du théorème de Kaplansky. En appliquant la construction Twist à $\mathcal{B}$, alors, La construction version Hom de type Kaplansky obtenue est équivalente à la Hom-algèbre obtenue en appliquant la construction Twist à la structure bialgèbre $\mathcal{B}'$.*

Démonstration. Si $\mathcal{B}$ est la structure de bialgèbre alors, la structure de bialgèbre faible $\mathcal{B}' = span\{\mathcal{B}, e, 1\}$ est obtenue en ajoutant $\Delta(1) = (1 - e) \otimes (1 - e) + e \otimes e, \Delta(e) = e \otimes e, \varepsilon(1) = 2, \varepsilon(e) = 1$.
Maintenant, nous construirons la structure Hom-bialgèbre à partir du morphisme de bialgèbre β. En fixant

$$\beta(1) = 1, \beta(e) = e, m_\beta(x, y) = \beta(x) \cdot \beta(y), \Delta_\beta(x) = \Delta \circ \beta(x), \forall x \in \mathcal{B},$$

ce qui mène à la structure de Hom-bialgèbre $(\mathcal{B}', m_\beta, \eta, \varepsilon, \Delta_\beta)$.
D'autre part, on prend $\mathcal{B}$ et on applique la construction Twist avec β. On obtient la structure de Hom-bialgèbre $(\mathcal{B}, m_\beta, \eta, \varepsilon, \Delta_\beta, \beta)$, avec $m_\beta(x \cdot y) = \beta(x) \cdot \beta(y)$ et

$\Delta_\beta = \Delta \circ \beta$, $\varepsilon \circ \beta = \varepsilon$. Pour la dernière structure, nous effectuons la construction Kaplansky, voir le Théorème 2.1. Par conséquent,

$$\begin{gathered}\mathcal{B}' = span\{\mathcal{B}, e, 1\}, \beta(1) = 1, \beta(e) = e,\\ \Delta_\beta(1) = \Delta \circ \beta(1) = \Delta(1) = (1-e) \otimes (1-e) + e \otimes e,\\ \Delta_\beta(e) = \Delta \circ \beta(e) = \Delta(e) = e \otimes e,\\ \varepsilon \circ \beta = \varepsilon.\end{gathered}$$

Ce qui montre qu'on a la même structure de la Hom-bialgèbre faible donnée ci-dessus. $\square$

Chapitre 4

Classification

Dans cette partie, on décrit les variétés algébriques des bialgèbres faibles et algèbres Hopf faibles par l'action du groupe linéaire. On établit la classification en dimension 2 et 3. De plus nous calculons pour chaque classe son groupe d'automorphisme à un isomorphisme prés.

4.1 Variété algèbrique de bialgèbres faibles

Soit $\mathcal{A}$ un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{b} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base associée à $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{H} = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ (resp. $\mathcal{H} = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$) une bialgèbre faible (resp. une algèbre Hopf faible), où m représente la multiplication, η l'unité , Δ la comultiplication, ε la counité et enfin S l'antipode, exprimés, respectivement dans la base $\mathfrak{b}$, par :

$$m(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k,\ \ \Delta(e_k) = \sum_{i,j=1}^{n} D_k^{i,j} e_i \otimes e_j,\ \ \varepsilon(e_k) = f_k,\ \ S(e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i,j} e_j.$$

La collection $\{C_{i,j}^k, D_k^{i,j}, f_k \ : \ i,j,k = 1, \cdots, n\}$ définit l'ensemble des constantes de structure d'une bialgèbre faible H, respectivement d'une algèbre de Hopf faible dans la base $\mathfrak{b}$.

Chaque bialgèbre faible de dimension n, respectivement une algèbre de Hopf faible de dimension n s'identifie à un point de $\mathbb{K}^{2n^3+n}$, déterminée par la collection $\{C_{i,j}^k, D_k^{i,j}, f_k \ : \ i,j,k = 1, \cdots, n\} \in \mathbb{K}^{2n^3+n}$, en satisfaisant pour $i, j, k, s \in \{1, .., n\}$ les équations suivantes :

$$\sum_{\ell=1}^{n} C_{i,j}^{\ell} C_{\ell,k}^{s} - C_{i,\ell}^{s} C_{j,k}^{l} = 0, \tag{4.1.1}$$

$$C_{1,i}^{j} = C_{i,1}^{j} = \delta_{ij} \tag{4.1.2}$$

ou δ_{ij} est le symbole de Kronecker,

$$\sum_{\ell=1}^{n} D_s^{\ell,k} D_{\ell}^{i,j} - D_s^{i,\ell} D_{\ell}^{j,k} = 0, \tag{4.1.3}$$

$$D_i^{k,j} f_k = D_i^{j,k} f_k = \delta_{i,j}, \tag{4.1.4}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (C_{i,j}^{\ell} D_{\ell}^{s,k} - \sum_{p,q,m=1}^{n} D_i^{\ell m} D_j^{p,q} C_{\ell,p}^{s} C_{m,q}^{k}) = 0, \tag{4.1.5}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (D_1^{\ell,j} D_{\ell}^{s,k} - \sum_{m=1}^{n} D_1^{\ell,j} D_1^{s,m} C_{\ell,m}^{k}) = 0, \tag{4.1.6}$$

$$\sum_{\ell,m=1}^{n} (C_{i,j}^{\ell} C_{\ell,k}^{m} f_m - \sum_{p,q=1}^{n} D_j^{\ell,m} C_{i,\ell}^{p} C_{m,k}^{q} f_p f_q) = 0. \tag{4.1.7}$$

Nous notons par $\mathcal{BF}_n$ l'ensemble des bialgèbres de dimension n. Le système d'équations de $\mathcal{BF}_n$ le dote d'une structure de variété algébrique affine plongée dans $\mathbb{K}^{2n^3+n}$.

De façon similaire, une algèbre de Hopf faible de dimension n donnée par : $\mathcal{H} = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est déterminée, dans une base donnée, par la collection des constantes de structure suivantes.

$\{C_{i,j}^k, D_k^{i,j}, f_k, s_{i,j} \ : \ i,j,k = 1, \cdots, n\} \in \mathbb{K}^{2n^3+n^2+n}$, satisfaisant les équations (4.1.1)-(4.1.7), et en plus, on a les équations suivantes :

pour $\quad i,j \in \{1,..,n\}$

$$\sum_{t,r,k=1}^{n} D_i^{t,k} s_{k,r} C_{t,r}^j - \sum_{t,k=1}^{n} D_1^{t,j} C_{t,i}^k f_k = 0, \tag{4.1.8}$$

$$\sum_{t,r,k=1}^{n} D_i^{k,t} s_{k,r} C_{r,t}^j - \sum_{t,k=1}^{n} D_1^{j,t} C_{i,t}^k f_k = 0, \tag{4.1.9}$$

$$\sum_{p,q,k,r,m,\ell,t=1}^{n} D_i^{p,q} D_p^{k,r} s_{r,m} s_{q,\ell} C_{m,r}^t C_{t,\ell}^j - s_{i,j} = 0. \tag{4.1.10}$$

Nous notons par : $\mathcal{HF}_n$ l'ensemble des algèbres de Hopf faibles de dimension n. On définit l'action du groupe linéaire sur la variété algébrique des bialgèbres faibles $\mathcal{BF}_n$ et de même sur la variété algébrique des algèbres de Hopf faibles $\mathcal{HF}_n$ par :

$$GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{BF}_n \to \mathcal{BF}_n,$$
$$(g, \mathcal{H}) \longmapsto g \cdot \mathcal{H}.$$

Cette action est déterminée pour tout x, y dans $\mathcal{H}$ par :

$$\begin{array}{l} (g \cdot m)(x \otimes y) = g^{-1}(m(g(x) \otimes g(y))), \\ (g \cdot \Delta)(x) = g^{-1} \otimes g^{-1}(\Delta g(x)), \\ (g \cdot \varepsilon)(x) = \varepsilon(g(x)). \end{array}$$

L'action sur l'antipode est donnée par :

$$g \cdot S = g^{-1} \circ S \circ g.$$

L'orbite de la bialgèbre faible (resp. l'algèbre de Hopf faible) $\mathcal{H}$ décrit à un isomorphisme prés la classe :

$$\vartheta(\mathcal{H}) = \{g \cdot \mathcal{H} : g \in GL_n(\mathbb{K})\}.$$

le stabilisateur de $\mathcal{H}$ est donné par :

$$stab(\mathcal{H}) = \{g \in GL_n(\mathbb{K}) : g \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H}\},$$

ce qui correspond au groupe automorphisme de $\mathcal{H}$.

Nous avons : $dim\ \vartheta(\mathcal{H}) = n^2 - dim\ Aut(\mathcal{H})$.

4.2 Classifications et groupes d'automorphismes

Dans cette section, on établit la classification, à isomorphisme prés, des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles de dimension 2 et 3. Ce travail a été publier dans les Actes des journées scientifiques Algéro-Françaises en physique théorique et mathématiques en 2006 Voir [11].

4.2.1 Classification des algèbres associatives

La classification des algèbres associatives de dimension n est connue pour : $n \leq 5$, ([18], [33]). Nous rappelons les résultats dans les dimensions 2 et 3. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de l'espace vectoriel sous-jasent.

Proposition 4.2.1. *Toute algèbre associative de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$m_1^2(e_1, e_1) = e_1,\ m_1^2(e_1, e_2) = e_2,\ m_1^2(e_2, e_1) = e_2,\ m_1^2(e_2, e_2) = 0,$$
$$m_2^2(e_1, e_1) = e_1,\ m_2^2(e_1, e_2) = e_2,\ m_2^2(e_2, e_1) = e_2,\ m_2^2(e_2, e_2) = e_2.$$

Proposition 4.2.2. *Toute algèbre associative de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

$$m_1^3(e_1, e_1) = e_1,\ m_1^3(e_1, e_2) = e_2,\ m_1^3(e_2, e_1) = e_2,\ m_1^3(e_2, e_2) = e_2,\ m_1^3(e_1, e_3) = e_3,$$
$$m_1^3(e_3, e_1) = e_3,\ m_1^3(e_2, e_3) = e_3,\ m_1^3(e_3, e_2) = e_3,\ m_1^3(e_3, e_3) = e_3,$$

$$m_2^3(e_1,\ e_1) = e_1,\ m_2^3(e_1, e_2) = e_2,\ m_2^3(e_2, e_1) = e_2,\ m_2^3(e_2, e_2) = e_2,\ m_2^3(e_1, e_3) = e_3,$$
$$m_2^3(e_3, e_1) = e_3,\ m_2^3(e_2, e_3) = e_3,\ m_2^3(e_3, e_2) = e_3,\ m_2^3(e_3, e_3) = 0,$$

$$m_3^3(e_1, e_1) = e_1,\ m_3^3(e_1, e_2) = e_2,\ m_3^3(e_2, e_1) = e_2, m_3^3(e_2, e_2) = e_2,\ m_3^3(e_1, e_3) = e_3,$$
$$m_3^3(e_3, e_1) = e_3,\ m_3^3(e_2, e_3) = 0,\ m_3^3(e_3, e_2) = 0,\ m_3^3(e_3, e_3) = 0,$$

$$m_4^3(e_1, e_1) = e_1,\ m_4^3(e_1, e_2) = e_2,\ m_4^3(e_2, e_1) = e_2,\ m_4^3(e_2, e_2) = 0,\ m_4^3(e_1, e_3) = e_3,$$
$$m_4^3(e_3, e_1) = e_3,\ m_4^3(e_2, e_3) = 0,\ m_4^3(e_3, e_2) = 0,\ m_4^3(e_3, e_3) = 0,$$

$$m_5^3(e_1, e_1) = e_1,\ m_5^3(e_1, e_2) = e_2,\ m_5^3(e_2, e_1) = e_2,\ m_5^3(e_2, e_2) = e_2,\ m_5^3(e_1, e_3) = e_3,$$
$$m_5^3(e_3, e_1) = e_3,\ m_5^3(e_2, e_3) = e_3,\ m_5^3(e_3, e_2) = 0,\ m_5^3(e_3, e_3) = 0.$$

4.2.2 Classification des algèbres de Hopf

Les orbites de $Hopf_n$ correspondent aux classes d'isomorphisme. La classification complète des algèbres de Hopf n'est pas connue. Néanmoins, il y a de nombreux résultats de classification en dimensions finies. Pour une dimension de l'algèbre n fixée, la classification est établie pour

$-n = p$ (p premier),

$-n = p^2$ (p premier),

– Pour de petites dimensions $n, n < 14, n = 15, 21, 35$.

De plus, des résultats substantiels sont connus pour certaines classes comme les algèbres de Hopf pointées, et les algèbres de Hopf triangulaires (Etingof voir [17]).

Dans la suite, nous allons utiliser les notations suivantes : Z_n désigne le groupe cyclique à n éléments, D_n le groupe diédral, S_n le groupe symétrique , H_4 le groupe des quaternions et Al le groupe alterné. On note aussi $\mathbb{KG}$ l'algèbre de Hopf du groupe fini G et $(\mathbb{KG})^*$ son algèbre de Hopf duale.

Theorem 4.2.3. *([61]) Toute algèbre de Hopf de dimension p, où p est un nombre premier, est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{K}[\mathbb{Z}_p]$.*

Theorem 4.2.4. *Toute algèbre de Hopf de dimension p^2, où p est un nombre premier, est isomorphe à l'une des algèbres de Hopf suivantes :*

1. $\mathbb{K}[Z_{p^2}]$
2. $\mathbb{K}[Z_p] \times \mathbb{K}[Z_p]$
3. *T_{p^2} algèbre de Hopf de Taft-Sweedler.*

Theorem 4.2.5. *Si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf de dimension $n \leq 13$, alors $\mathcal{H}$ est isomorphe à l'une des algèbres de Hopf suivantes :*

– $n \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Comme la dimension est un nombre premier alors il y a que l'algèbre de groupe $\mathbb{K}Z_n$.

– ***n=4***

Il y a 3 classes d'isomorphisme, l'algèbre de Hopf semi-simple $\mathbb{K}Z_4$ et $\mathbb{K}(Z_2 \times Z_2)$, l'algèbre de Taft-Sweedler T_4.

– ***n = 6***

KZ_6, KS_3 *et* $(KS_3)^*$.

– ***n = 8***

les algèbres de Hopf semi-simples sont : $K(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$, $K(Z_2 \times Z_4)$, KZ_8, KD_4, $KD_4)^*$, $K\ H_4$, $(K\ H_4)^*$ et A_8, où A_8 est définie par :

$$\frac{K < x, y, z >}{< x^2 - 1, y^2 - 1, z^2 - \frac{1}{2}(1 + x + y - xy),\ xy - yx, \quad zx - yz, \quad zy - xz >}. \qquad (4.2.1)$$

la structure de coalgèbre Δ, ε et l'antipode S sont déterminées par

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= x \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes y, \quad \Delta(z) = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes x + y \otimes 1 - y \otimes x)(z \otimes z),\\
\varepsilon(x) &= \varepsilon(y) = \varepsilon(z) = 1,\\
S(x) &= x, \quad S(y) = y, \quad S(z) = z.
\end{aligned}$$

Les algèbres de Hopf qui ne sont pas semi-simples sont :
1.

$$A_{C_2} = \frac{K < x, y, g >}{< g^2 - 1,\ x^2,\ y^2,\ gx + xg,\ yg + gy,\ xy + yx >}, \tag{4.2.2}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes g + 1 \otimes y, \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon(y) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1. \\ S(x) &= -gx, \quad S(y) = -gy, \quad S(g) = g. \end{aligned}$$

2.

$$A'_{C_4} = \frac{K < x, g >}{< g^4 - 1, \quad x^2, \quad gx + xg >}, \tag{4.2.3}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \\ \varepsilon(x) &= 0, \quad \varepsilon(g) = 1, \\ S(x) &= -xg^3, \quad S(g) = g^3. \end{aligned}$$

3.

$$A_{\rm J C_4} = \frac{K < x, g >}{< g4 - 1, x2 - g2 + 1, gx + xg >}, \tag{4.2.4}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \\ \varepsilon(x) &= 0, \quad \varepsilon(g) = 1, \\ S(x) &= -xg^3, \quad S(g) = g^3. \end{aligned}$$

4.

$$A'''_{C_4,q} = \frac{K < x, g >}{< g4 - 1, x2, gx - qxg >}, \tag{4.2.5}$$

où q est la racine primitive de l'unité d'ordre 4.
la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes g^2 + 1 \otimes x, \\ \varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = 1, \\ S(x) &= -xg^3, S(g) = g^3. \end{aligned}$$

5. $(A_{\rm J} C_4)^*$.
6.

$$A_{C^2\times C^2} = \frac{K<g,h,x>}{<g^2-1,h^2-1,x^2,gx+xg,hx+xh,gh-hg>}, \tag{4.2.6}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g\otimes g, \Delta(h) = h\otimes h, \Delta(x) = x\otimes g + 1\otimes x,\\
\varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = \varepsilon(h) = 1,\\
S(g) &= g, S(h) = h, S(x) = -xg.
\end{aligned}$$

– ***n = 9***

$KZ_9, K(Z_3\times\ Z_3)$ *et l'algèbre de Taft* T_9.

– ***n = 10***

$KZ_{10},\ KD_5$ *et* $(KD_5)^*$.

– ***n = 12***

Les algèbres de Hopf semi-simples sont : KZ_{12} , $K(Z_6\times Z_2)$, $K(Z_4\times Z_3)$, KD_6, $(KD_6)^*$,Al_4, $(Al_4)*$,A_+ *et* A_-,

où A_+ *et* A_- *sont définies comme des* KS_3*-anneaux engendrés par* v *et les relations :*

$$v^2 = v, \qquad av = va \qquad (a\in KS_3), \tag{4.2.7}$$

la structure de coalgèbre Δ, ε *et l'antipode* S *de* A_+ *(resp.* A_- *) sont déterminées par :*

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma) &= \sigma v\otimes\sigma + \sigma(1-v)\otimes\sigma 2,\\
\Delta(\tau) &= \tau\otimes\tau(resp.\Delta(\tau) = \tau v\otimes\tau + \tau(1-v)\otimes\tau(2v-1)),\\
\Delta(v) &= v\otimes v + (1-v)\otimes(1-v),\\
\varepsilon(\sigma) &= \varepsilon(\tau) = \varepsilon(v) = 1,\\
S(\sigma) &= \sigma(1-v) + \sigma 2v, S(\tau) = \tau(resp.S(\tau) = \tau(2v-1)), S(v) = v.
\end{aligned}$$

Les algèbres de Hopf qui ne sont pas semi-simples sont :

1.

$$A_0 = \frac{K<x,g>}{<g6-1,x2,gx+xg>}, \tag{4.2.8}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g\otimes g, \Delta(x) = x\otimes 1 + g\otimes x,\\
\varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = 1.\\
S(g) &= g-1, S(x) = -xg
\end{aligned}$$

2.

$$A_1 = \frac{K<x,g>}{<g6-1,x2+g2-1,gx+xg>}, \tag{4.2.9}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \\
\varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = 1, \\
S(g) &= g - 1, S(x) = -xg.
\end{aligned}$$

3.

$$B_0 = \frac{K < x, g >}{< g6 - 1, x2, gx + xg >}, \tag{4.2.10}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes 1 + g3 \otimes x, \\
\varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = 1, \\
S(g) &= g - 1, S(x) = -xg.
\end{aligned}$$

4.

$$B_1 = \frac{K < x, g >}{< g^6 - 1, x^2, gx - qxg >}, \tag{4.2.11}$$

où q est la racine primitive de l'unité d'ordre 6.
La structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par :

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= g \otimes g, \Delta(x) = x \otimes 1 + g^3 \otimes x, \\
\varepsilon(x) &= 0, \varepsilon(g) = 1, \\
S(g) &= g - 1, S(x) = -x.g.
\end{aligned}$$

4.2.3 Composantes irréductibles

Une composante de la variété algébrique $Hopf_n$ est dite irréductible si elle ne se décompose pas comme une réunion de deux sous-variétés algébriques. Les résultats suivants précisent les composantes irréductibles dans les variétés algébriques correspondantes aux classifications citées ci-dessus.

Theorem 4.2.6. *Toute algèbre de Hopf dans $Hopf_p$ ou $Hopf_{p^2}$, p premier, est rigide, c'est à dire que son orbite pour l'action du groupe linéaire est un ouvert de Zariski. De plus, la variété $Hopf_p$ est formée d'une seule orbite et $Hopf_{p^2}$ est une union de $(p + 1)$ orbites ouvertes de Zariski.*

Dans la suite, nous allons construire en dimension 2 et 3 les bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles en se basant sur la classification des algèbres associatives précédentes. Tous les calculs sont faits en utilisant un logiciel de calcul formel, ici Mathematica.

4.2.4 Classification en dimension 2 des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles

Soient $\{e_1, e_2\}$ une base de $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2$.

Proposition 4.2.7. *Toutes bialgèbre faible de dimension 2 est isomorphe, à un isomorphisme prés, à l'une des bialgèbres faibles suivantes :*

1. $$\begin{aligned}&m_2^2(e_1,e_1)=e_1, m_2^2(e_1,e_2)=e_2, m_2^2(e_2,e_1)=e_2, m_2^2(e_2,e_2)=e_2,\\&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\&\varepsilon(e_1)=1,\varepsilon(e_2)=1.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}&m_2^2(e_1,e_1)=e_1, m_2^2(e_1,e_2)=e_2, m_2^2(e_2,e_1)=e_2, m_2^2(e_2,e_2)=e_2,\\&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\&\Delta(e_2)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)\otimes+e_2\otimes e_2,\\&\varepsilon(e_1)=1,\varepsilon(e_2)=1.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}&m_2^2(e_1,e_1)=e_1, m_2^2(e_1,e_2)=e_2, m_2^2(e_2,e_1)=e_2, m_2^2(e_2,e_2)=e_2,\\&\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,\\&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\&\varepsilon(e_1)=2,\varepsilon(e_2)=1.\end{aligned}$$

De la classification précédente, nous tirons les classes des algèbres de Hopf faibles.

Proposition 4.2.8. *Il existe, à un isomorphisme près, deux classes d'algèbres de Hopf faibles en dimension 2 dont leurs expressions sont :*

1. $$\begin{aligned}&m_2^2(e_1,e_1)=e_1, m_2^2(e_1,e_2)=e_2, m_2^2(e_2,e_1)=e_2, m_2^2(e_2,e_2)=e_2,\\&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\&\Delta(e_2)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,\\&\varepsilon(e_1)=1,\varepsilon(e_2)=1,\\&S(e_1)=e_1,S(e_2)=e_2.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}&m_2^2(e_1,e_1)=e_1, m_2^2(e_1,e_2)=e_2, m_2^2(e_2,e_1)=e_2, m_2^2(e_2,e_2)=e_2,\\&\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,\\&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\&\varepsilon(e_1)=2,\varepsilon(e_2)=1,\\&S(e_1)=e_1,S(e_2)=e_2.\end{aligned}$$

4.2.5 Classification des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles tridimensionnelles

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}^3$ un espace vectoriel tridimensionnel dont la base est : $\{e_1, e_2, e_3\}$. Nous exhibons toutes les bialgèbres faibles tridimensionnelles. Ensuite, nous spécifions celles d'entre elles correspondantes à une algèbre de Hopf faible.

Proposition 4.2.9. *Toute bialgèbre faible tridimensionnelle est isomorphe à l'une des bialgèbres faibles suivantes, à un isomorphisme prés.*

1.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes(e_1-e_3)+e_2\otimes(2e_3-e_2)+e_3\otimes(2e_2-e_3-e_1),\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes(e_2-e_3)+e_2\otimes(e_1-2e_2+e_3)+e_3\otimes(e_2+e_3-e_1),\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=(e_2-e_3)\otimes e_3+e_3\otimes(e_2-e_3),\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=(e_2-e_3)\otimes e_3+e_3\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2+(e_1-e_2)\otimes e_3,\\
&\Delta(e_3)=(e_1-e_3)\otimes e_3+e_3\otimes e_2,\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
&m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2+e_3\otimes(e_1-e_2),\\
&\Delta(e_3)=e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1-e_3\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.
\end{aligned}
$$

7.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,$
$\Delta(e_2)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.$

8.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=2, \varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=1.$

9.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=(e_2-e_3)\otimes e_3+e_3\otimes(e_2-e_3),$
$\varepsilon(e_1)=2, \varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0.$

10.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+(e_2-e_3)\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_2)=(e_2-e_3)\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=3, \varepsilon(e_2)=2, \varepsilon(e_3)=1.$

11.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes(e_1-2e_2+2e_3),$
$\Delta(e_2)=(e_2-e_3)\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=2, \varepsilon(e_2)=2, \varepsilon(e_3)=1.$

12.

$m_2^3(e_1,e_1)=e_1, m_2^3(e_1,e_2)=e_2, m_2^3(e_2,e_1)=e_2, m_2^3(e_2,e_2)=e_2, m_2^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_2^3(e_3,e_1)=e_3, m_2^3(e_2,e_3)=e_3, m_2^3(e_3,e_2)=e_3, m_2^3(e_3,e_3)=0,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,$
$\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3+e_3\otimes e_1-e_3\otimes e_2,$
$\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.$

13.

$$
\begin{aligned}
&m_2^3(e_1,e_1)=e_1, m_2^3(e_1,e_2)=e_2, m_2^3(e_2,e_1)=e_2, m_2^3(e_2,e_2)=e_2, m_2^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_2^3(e_3,e_1)=e_3, m_2^3(e_2,e_3)=e_3, m_2^3(e_3,e_2)=e_3, m_2^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3-e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1-e_3\otimes e_2+e_3\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

14.

$$
\begin{aligned}
&m_2^3(e_1,e_1)=e_1, m_2^3(e_1,e_2)=e_2, m_2^3(e_2,e_1)=e_2, m_2^3(e_2,e_2)=e_2, m_2^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_2^3(e_3,e_1)=e_3, m_2^3(e_2,e_3)=e_3, m_2^3(e_3,e_2)=e_3, m_2^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3-e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1,\\
&\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

15.

$$
\begin{aligned}
&m_2^3(e_1,e_1)=e_1, m_2^3(e_1,e_2)=e_2, m_2^3(e_2,e_1)=e_2, m_2^3(e_2,e_2)=e_2, m_2^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_2^3(e_3,e_1)=e_3, m_2^3(e_2,e_3)=e_3, m_2^3(e_3,e_2)=e_3, m_2^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3-e_3\otimes e_2+e_3\otimes e_1-e_2\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

16.

$$
\begin{aligned}
&m_3^3(e_1,e_1)=e_1, m_3^3(e_1,e_2)=e_2, m_3^3(e_2,e_1)=e_2, m_3^3(e_2,e_2)=e_2, m_3^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_3^3(e_3,e_1)=e_3, m_3^3(e_2,e_3)=e_3, m_3^3(e_3,e_2)=0, m_3^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,\\
&\varepsilon(e_1)=2, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=1.
\end{aligned}
$$

17.

$$
\begin{aligned}
&m_3^3(e_1,e_1)=e_1, m_3^3(e_1,e_2)=e_2, m_3^3(e_2,e_1)=e_2, m_3^3(e_2,e_2)=e_2, m_3^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_3^3(e_3,e_1)=e_3, m_3^3(e_2,e_3)=e_3, m_3^3(e_3,e_2)=0, m_3^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2,\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3+e_3\otimes e_1-e_2\otimes e_3-e_3\otimes e_2,\\
&\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

18.

$$
\begin{aligned}
&m_3^3(e_1,e_1)=e_1, m_3^3(e_1,e_2)=e_2, m_3^3(e_2,e_1)=e_2, m_3^3(e_2,e_2)=e_2, m_3^3(e_1,e_3)=e_3,\\
&m_3^3(e_3,e_1)=e_3, m_3^3(e_2,e_3)=e_3, m_3^3(e_3,e_2)=0, m_3^3(e_3,e_3)=0,\\
&\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,\\
&\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2-e_3\otimes e_3,\\
&\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3-e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1-e_3\otimes e_2,\\
&\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0.
\end{aligned}
$$

19.

$m_3^3(e_1,e_1)=e_1, m_3^3(e_1,e_2)=e_2, m_3^3(e_2,e_1)=e_2, m_3^3(e_2,e_2)=e_2, m_3^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_3^3(e_3,e_1)=e_3, m_3^3(e_2,e_3)=e_3, m_3^3(e_3,e_2)=0, m_3^3(e_3,e_3)=0,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,$
$\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_2,$
$\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0.$

20.

$m_5^3(e_1,e_1)=e_1, m_5^3(e_1,e_2)=e_2, m_5^3(e_2,e_1)=e_2, m_5^3(e_2,e_2)=e_2, m_5^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_5^3(e_3,e_1)=e_3, m_5^3(e_2,e_3)=e_3, m_5^3(e_3,e_2)=0, m_5^3(e_3,e_3)=0,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,$
$\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_3)=e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_2,$
$\varepsilon(e_1)=\varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0.$

Les algèbres de Hopf faibles tridimensionnelles sont données par la proposition qui suit :

Proposition 4.2.10. *Toute algèbre de Hopf faible est isomorphe à l'une des algèbres de Hopf faibles suivantes, à un isomorphisme prés.*

1.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=e_1\otimes e_1,$
$\Delta(e_2)=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2-e_2\otimes e_3-e_3\otimes e_2+2e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_3)=e_1\otimes e_3+e_2\otimes e_2-2e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1-2e_3\otimes e_2+e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=1, \varepsilon(e_2)=\varepsilon(e_3)=0,$
$S(e_1)=e_1, S(e_2)=e_2, S(e_3)=e_2-e_3.$

2.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_2)=e_2\otimes e_2,$
$\Delta(e_3)=(e_2-e_3)\otimes e_3+e_3\otimes(e_2-e_3),$
$\varepsilon(e_1)=2, \varepsilon(e_2)=1, \varepsilon(e_3)=0,$
$S(e_1)=e_1, S(e_2)=e_2, S(e_3)=e_3.$

3.

$m_1^3(e_1,e_1)=e_1, m_1^3(e_1,e_2)=e_2, m_1^3(e_2,e_1)=e_2, m_1^3(e_2,e_2)=e_2, m_1^3(e_1,e_3)=e_3,$
$m_1^3(e_3,e_1)=e_3, m_1^3(e_2,e_3)=e_3, m_1^3(e_3,e_2)=e_3, m_1^3(e_3,e_3)=e_3,$
$\Delta(e_1)=(e_1-e_2)\otimes(e_1-e_2)+(e_2-e_3)\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_2)=(e_2-e_3)\otimes(e_2-e_3)+e_3\otimes e_3,$
$\Delta(e_3)=e_3\otimes e_3,$
$\varepsilon(e_1)=3, \varepsilon(e_2)=2, \varepsilon(e_3)=1,$
$S(e_1)=e_1, S(e_2)=e_2, S(e_3)=e_3.$

4.2.6 Groupes d'automorphismes

Dans cette partie, on calcule les groupes d'automorphisme des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles bidimensionnelles et tridimensionnelles données ci-dessus.

Tout d'abord, nous écrivons les conditions qui doivent être remplies pour que deux bialgèbres faibles se trouvent dans la même orbite.

Soient $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{A}, m, \Delta_1, \varepsilon_1)$ et $\mathcal{H}_2 = (\mathcal{A}, m, \Delta_2, \varepsilon_2)$ deux bialgèbres faibles qui sont dans la même orbite, alors, il existe une application linéaire bijective $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui assure le transport de la structure.

Soit $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ une base, on pose :

$$\begin{aligned}
&g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} T_{i,j} e_j, \quad m(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^{k} e_k, \\
&\Delta_1(e_i) = \sum_{j,k=1}^{n} D_{1,i}^{j,k} e_j \otimes e_k, \quad \Delta_2(e_i) = \sum_{j,k=1}^{n} D_{2,i}^{j,k} e_j \otimes e_k, \\
&\varepsilon_1(e_i) = f_{1,i}, \quad \varepsilon_2(e_i) = f_{2,i}.
\end{aligned}$$

Deux bialgèbres faibles $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont isomorphes si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{p=1}^{n} T_{i,p} D_{1,p}^{s,r} - \sum_{p,q=1}^{n} D_{2,i}^{p,q} T_{p,s} T_{q,r} = 0 \quad i, s, r = 1, \cdots, n, \tag{4.2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} T_{i,j} f_{1,j} - f_{2,i} = 0 \quad i = 1, \cdots, n, \tag{4.2.13}$$

$$\sum_{t=1}^{n} T_{t,k} C_{i,j}^{t} - \sum_{s,r=1}^{n} T_{i,s} T_{j,r} C_{s,r}^{k} = 0 \quad i, j, k = 1, \cdots, n. \tag{4.2.14}$$

Groupes d'automorphismes des bialgèbres bidimensionnelles

Les groupes automorphismes des bialgèbres faibles bidimensionnelles sont d'ordre 2, ils sont donnés par :

$$G =< \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} > .$$

On obtient le même groupe pour les algèbres de Hopf faibles bidimensionnelles.

Groupes des automorphismes des bialgèbres faibles tridimensionnelles

Les groupes automorphismes des bialgèbres faibles

Pour les classes $(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11)$, sont isomorphes à un seul groupe d'ordre 6 donné par :

$$G =< \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\} > .$$

Le groupes d'automorphismes des bialgèbres pour les classes :(12), (13), (14), (15), (16), (17), (19) sont isomorphes à un seul groupe donné par :

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{C}^{*} \}.$$

Le groupe d'automorphismes de la bialgèbre (18) est le groupe :

$$G =< \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r/2 & \pm 1/2 \sqrt[2]{(4e-r^2)} \end{pmatrix}, 4e - r^2 \neq 0, r, e \in \mathbb{C} \} > .$$

Le groupe d'automorphismes de bialgèbre (20) est le groupe :

$$G =< \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r/2 & \pm 1/2 \sqrt[2]{(4e+r^2)} \end{pmatrix}, 4e + r^2 \neq 0, r, e \in \mathbb{C} \} > .$$

Le groupe d'automorphisme d'une algèbre de Hopf faible tridimensionnelle est isomorphe au groupe d'ordre 6 donné par :

$$G =< \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \} > .$$

Chapitre 5

Extensions d'Ore

5.1 Extensions d'Ore des algèbres de Hopf faibles

Dans ce chapitre on étudie la généralisation du théorème d'extension d'Ore des algèbres de Hopf à certaines classes d'algèbres de Hopf faibles obtenues en ajoutant une seconde unité à une algèbre de Hopf. Ce travail est inspiré de l'article de A.N.Panov publié en 2003 voir [1].

5.1.1 Généralités

Soit R une algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ et R[t] un module libre gauche qui est formé des polynômes de la forme $P = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i$ prenant ses coefficients dans l'algèbre R.

Si $a_{n \neq 0}$, on définit le degré du polynôme P par $deg(P) = n$; On prend conventionnellement que le degré d'un polynôme nul sera donné par : $deg(0) = -\propto$.

Définition 5.1.1. Soit α une application $\mathbb{K}$-linéaire de l'algèbre R. On dit qu'un endomorphisme δ de R est une τ-dérivation si et seulement si :

$$\delta(a.b) = \tau(a)\delta(b) + \delta(a).b, \forall a, b \in R. \tag{5.1.1}$$

Il s'ensuit de cette définition que : $\delta(1) = 0$.

5.1.2 Généralisation de la notion d'extension d'Ore

La généralisation de la notion d'extension d'Ore d'une algèbre de Hopf à l'extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible est possible grâce au le théorème de généralisation suivant valable même si l'anneau admet des diviseurs de zéro voir [14].

5.1.3 Théorème d'extension d'Ore

Theorem 5.1.2. *(i) On suppose que R[t] a une structure d'algèbre telle que l'inclusion naturelle de R dans R[t] soit un morphisme d'algèbre et tel que :* $deg(P, Q) \leq deg(P) + deg(Q)$ *pour toute paire* (P, Q) *d'éléments de R[t]. Alors, il existe un unique endomorphisme d'algèbre injective* τ *de R et une seule* τ*-dérivation* δ *de R telle-que :*

$$t.a = \tau(a).t + \delta(a), \forall, a \in R. \tag{5.1.2}$$

(ii) Inversement, étant donné un endomorphisme α *et une* α*-dérivation de R, alors il existe une unique structure d'algèbre sur R[t] telle que l'injection canonique de R dans R[t] soit un morphisme d'algèbre et telle que* (5.1.2) *est vérifiée.*

Démonstration. (i) On prend un élément quelconque de $0 \neq a \in R$ et on considère le produit $t.a$. nous avons : $deg(t.a) \leq deg(t) + deg(a) = 1$.

De la définition de R[t], il existe des éléments déterminés d'une manière unique $\tau(a)$ et $\delta(a)$ de R tels qu'on a : (5.1.2).

Ce qu'il permettra de définir les applications τ et δ d'une manière unique.

La multiplication gauche par t étant linéaire, τ et δ le sont également.

Le développement des deux membres de l'égalité $(t.a).b = t(a.b) \in R[t]$ et en utilisant (5.1.2) nous donne,

$$\tau(a)\alpha(b)t + \tau(a)\delta(b) + \delta(a)b = \tau(ab)t + \delta(ab).$$

Il s'ensuit que : $\tau(a)\tau(b) = \tau(ab)$ et $\delta(ab) = \tau(a)\delta(b) + \delta(a)b$,

$\tau(1)t + \delta(1) = t1 = t$. Ainsi, $\tau(1) = 1$ et $\delta(1) = 0$.

Par ailleurs, on sait que τ est un endomorphisme et δ est une τ dérivation.

L'unicité de τ et de δ découle de l'indépendance de R[t] par rapport R.

(ii) Nous avons besoin de construire une multiplication sur R[t] qui est une extension de la loi d'algèbre dans R définie par :(1.0.15). Pour cela, il suffit de déterminer la multiplication $t.a$, $\forall a \in R$.

Soit $M = (f_{ij})_{i,j\geq 1}$; $f_{i,j} \in End_k R$ chaque diagonale et chaque colonne étant uniquement déterminée par $f_{i,j} \neq 0$ et

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix} \text{ est l'identité de M.}$$

Pour a $\in R$, soit $\widehat{a} : R \to R$ satisfaisant $\widehat{a}(r) = ar$. Alors, $\widehat{a} \in End_k R$;
$\forall r \in R$, $(\tau\widehat{a})(r) = \tau(ar) = \tau(a)\tau(r) = \widehat{\tau(a)}\tau(r)$,

$(\delta\widehat{a})(r) = \delta(ar) = \tau(a)\delta(r) + \delta(a)r = \widehat{\tau(a)}\delta + (\widehat{\delta(a)})(r)$,
donc, $\tau\widehat{a} = \widehat{\tau(a)}\tau$, $\delta\widehat{a} = \widehat{\tau(a)}\delta + \widehat{\delta(a)}$ dans $\in End_k R$,

et ainsi, $\forall a, b \in R$, $\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b}$, $\widehat{a+b} = \widehat{a} + \widehat{b}$.

Soit $T = \begin{pmatrix} \tau & \delta & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \tau & \delta & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \tau & . & . & . \\ . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \delta \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \tau \end{pmatrix}$

$\in M$ et on définit $\phi : R[t] \longrightarrow M$ qui a pour image $\phi(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{n} (\widehat{a}_i I) T^i$.

Il apparait que ϕ est une application K-linéaire.

□

Lemme 5.1.3. *L'application ϕ est injective.*

Démonstration. Soit $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$. Considérons $\phi(p) = 0$.

pour $e_i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ . \\ . \\ 0_{i-1} \\ 1_i \\ 0_{i+1} \\ . \\ . \\ . \\ 0_n \end{pmatrix}$, évidemment, $\{e_i\}_{i \geq 1}$ sont linéairement indépendants.

Comme $\delta(1) = 0$ et $\tau(1) = 1$, on a :

$Te_i = \begin{pmatrix} 0_1 \\ . \\ . \\ 0_{i-1} \\ \delta(1)_i \\ \alpha(1)_{i+1} \\ 0_{i+2} \\ . \\ . \\ 0_n \end{pmatrix} = e_{i+1}$

et $T^i e_1 = e_{i+1}$,$\forall, i \geq 0$. D'autre part :
$0 = \Phi(p)e_1 = \sum_{i=0}^{n} \widehat{a}_i T^i e_1 = \sum_{i=0}^{n} \widehat{a}_i e_{i+1}$.

Ainsi :$\widehat{a}_i = 0$, $\forall, i \geq 0$,

Alors, $a_i = a_i 1 = \widehat{a}_i 1 = 0$. Ce qui donne $p = 0$.

□

Lemme 5.1.4. *On a l'égalité suivante :$T(\widehat{a}I) = (\widehat{\tau(a)}I)T + \widehat{\delta(a)}I$.*

Démonstration. Nous avons : $T(\widehat{a}I) = \begin{pmatrix} \tau & \delta & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \tau & \delta & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \tau & . & . & . \\ . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \delta \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \widehat{a} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & \widehat{a} \end{pmatrix} =$
$\widehat{\tau(a)}T + \widehat{\delta(a)}I = (\widehat{\tau(a)}I)T + \widehat{\delta(a)}I.$ □

Maintenant, nous allons compléter la démonstration du (5.1.2).

Soit S la sous-algèbre engendrée par T et par $\widehat{a}I$ (pour tout $a \in R$) dans M.

Ci-dessus, on voit que chaque élément de S peut être engendré linéairement par quelques éléments sous la forme $(\widehat{a}I)T^n$ ($a \in R$, $n \geq 0$).

Mais, $\Phi(at^n) = (\widehat{a}I)T^n$, alors $\Phi(R[t]) = S$, c-à-d : Φ est surjective.

Ensuite suivant le lemme (5.1.4), Φ est bijective. Il s'ensuit que R[t] et S sont linéairement isomorphes.

On définit $t.a = \Phi^{-1}(T(\widehat{a}I))$, puis on peut étendre cette formule pour définir la multiplication dans R[t] avec

$f.g = \Phi^{-1}(xy), \forall f, g \in R[t]$ et $x = \Phi(f), y = \Phi(g)$.

Avec cette définition, R[t] devient une algèbre et Φ est un isomorphisme d'algèbre de R[t] vers S.

Et, $t.a = \Phi^{-1}(T(\widehat{a}I)) = \Phi^{-1}((\widehat{\tau(a)}I)T + \widehat{\delta(a)}I) = \tau(a)t + \delta(a), \forall a \in R.$

Évidemment, l'inclusion de R dans R[t] est un morphisme d'algèbre.

Remarque 5.1.5. Il y a lieu de noter que le théorème 1.3 [1] dans le cas d'une algèbre de Hopf peut être généraliser dans le cas d'une algèbre de Hopf faible, cela ce fait sans peine grâce au travail cité dans la bibliographie voir (I.7.1[14]) même si une algèbre R n'est pas nécessairement sans diviseurs de zéro, alors le théorème d'extension Ore reste toujours valable voir [24], dans ces conditions τ n'est pas forcément injective et on a seulement inégalité (5.1.2).

Définition 5.1.6. On appelle l'algèbre construite à partir de τ et δ une *extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible* de R, notée $R[t, \tau, \delta]$.

Soit $S_{n,k}$ l'endomorphisme linéaire de R défini comme la somme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ de tout les combinaisons possibles de k copies de δ et de n-k copies de α.

Par induction n, à partir de (5.1.2) sous la condition du théorème (5.1.2),

on obtient : $t^n.a = \sum_{i=0}^{n} S_{n,k}(a).t^{n-k}$

et par suite, $(\sum_{i=0}^{n} a_i.t^i)(\sum_{i=0}^{n} b_i.t^i = \sum_{i=0}^{n} c_i.t^i$ où

$c_i = \sum_{p=0}^{i} a_p \sum_{k=0}^{p} S_{n,k}(a).b^{i-p+k}$. .

Corollaire 5.1.7. *Sous la condition du Théorème 5.1.2, on déduit les résultats suivants :*

(i) Si R est un R-module gauche, $R[t,\tau,\delta]$ est une base libre $\{t^i\}, i \geq 0$;

(ii) Si τ est un automorphisme, alors $R[t,\tau,\delta]$ est aussi un R-module libre droit avec la même base $\{t^i\}, i \geq 0$.

Démonstration. (i) Il résulte du fait que $R[t,\tau,\delta]$ est juste R[t] en tant que R-module gauche.

(ii) A priori, on peut montrer que $R[t,\tau,\delta] = \sum_{i\geq 0} t^i R$, *c-à-d : pour toutp* $\in R[t,\tau,\delta]$, il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n \in R tels\ que \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.
Par équivalence, on montre par induction sur n que pour tout $b \in R$, $b.t^n$ peut prendre la forme $\sum_{i=0}^{n} t^i.a_i$.

Quand $n = 0$, il est clair.

Supposons que pour $n \leq k-1$ la proposition est vraie.

Considérons le cas : $n = k$. Comme α est surjective, il existe $a \in R$ tel que : $b = \tau^n(a) = S_{n,0}(a)$.
Mais $t^n.a = \sum_{i=0}^{n} S_{n,k}(a).t^{n-k}$,

on obtient : $b.t^n.a = t^n.a - \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}(a).t^{n-k} = \sum_{i=0}^{n} t^i.a^i$ par hypothèse d'induction pour a_i
avec $a^n = a$. et $\forall a, b \in R$, $(t^i a)b = t^i(ab)$ comme $R[t,\tau,\delta]$ est une algèbre.

Alors, $R[t,\tau,\delta]$ est un R-module droit.
Supposons que $f(t) = t^n a_n + \cdots + ta_1 + a_0 = 0, \forall, a_i \in Ret a_n \neq 0$.
Alors, $f(t)$ peut s'écrire comme un élément de R[t] par la formule $t^n.a = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}(a).t^{n-k}$ dont le terme au degré le plus élevé est
$t^n.a_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}(a_n).t^{n-k}$, c-à-d : $\tau^n(a_n)t^n$.
De (i) découle, $\tau^n(a_{n)}t^n = 0$, ce qui implique que : $a_n = 0$.
Ce qui est contradictoire. De ce fait, $R[t,\tau,\delta]$ est un R-module libre droit. □

Nous aurons besoin de ce qui suit :

Lemme 5.1.8. *Soit R une algèbre, τ un automorphisme d'algèbre et δ une τ-dérivation de R. Si R est un Noetherian gauche (resp. droit), il en est de même pour l'extension d'Ore faible $R[t,\tau,\delta]$.*

Démonstration. La preuve peut être établie de manière similaire à celle du théorème 5.1.2 dans la référence [1]. □

5.2 Théorème d'extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible

Définition 5.2.1. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf faible sur le corps $\mathbb{K}$.

L'algèbre de Hopf faible $R = [y; \tau, \delta]$ est nommée *extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible de* $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$\Delta(y) = y \otimes r_1 + r_2 \otimes y, \ \forall r_1, r_2 \in \mathcal{A}, \tag{5.2.1}$$

avec $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de Hopf faible de R.

Proposition 5.2.2. *Dans une extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible les éléments* r_1 *et* r_2 *sont des éléments groupe-like.*

Démonstration. Dans ce qui suit, quand on applique la coassociativité à l'expression de (5.2.1), on aboutit à

$$(1 \otimes \Delta)\Delta(y) = y \otimes \Delta(r_1) + r_2 \otimes y \otimes r_1 + r_2 \otimes r_2 \otimes y,$$
$$(\Delta \otimes 1)\Delta(y) = y \otimes r_1 \otimes r_1 + r_2 \otimes y \otimes r_1 + \Delta(r_2) \otimes y,$$

En effet, en comparant ces deux expressions on obtient par identification :

$$y \otimes (r_1 \otimes r_1 - \Delta(r_1)) = (\Delta(r_2) - r_2 \otimes r_2) \otimes y,$$

d'où : $\Delta(r_i) = r_i \otimes r_i$,
On suppose que chaque élément r_i commute avec $S(r_i)$, donc on peut poser :

$$r_i.S(r_i) = S(r_i).r_i = e, avec \quad e \in \mathcal{A}.$$

On suppose aussi que l'élément e est une deuxième unité pour les lois d'algèbres définies par $\mathcal{A}$ et R.

En remplaçant l'élément générateur y par $\grave{y}.S(r_1)$, on voit que :

$$\Delta(\grave{y}.S(r_1)) = \Delta(\grave{y}).\Delta(S(r_1)) = (\grave{y}\otimes r_1 + r_2\otimes\grave{y}).S(r_1)\otimes S(r_1)\grave{y}.S(r_1)\otimes r_1.S(r_1) + r_2.S(r_1)\otimes\grave{y}.S(r_1).$$

□

Compte tenue des remarques faites avant, nous considérons dans ce qui suit que l'élément y dans une extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible satisfaisant la relation

$$\Delta(y) = y \otimes e + r \otimes y, \forall r \in \mathcal{A}. \tag{5.2.2}$$

Comme convenue,

$$Ad_r(a) = r.a.S(r) \tag{5.2.3}$$

et

$$Ad_l(a) = S(r).a.r. \tag{5.2.4}$$

Lemme 5.2.3. *Si R est une extension Ore d'une algèbre de Hopf faible, alors*

$$\varepsilon(y^n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5.2.5}$$

$$\varepsilon(a.y^n) = \varepsilon(y^n.a) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathcal{A} \tag{5.2.6}$$

$$S(y^n) = (-1)^n (S(r).y)^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5.2.7}$$

Et en plus si :

$$\Delta(h) = h \otimes e, \tag{5.2.8}$$

alors, $h \in \mathbb{K} \subset \mathcal{A}$

Démonstration. En utilisant la propriété principale de la counité,
$a = a_1\varepsilon(a_2)$,
on voit que : $y = \varepsilon(y)e + \varepsilon(r)y = \varepsilon(y) + y$. Ceci implique que : $\varepsilon(y) = 0$.

$\varepsilon(y^n) = \varepsilon(y.e.y^{n-1}) = \varepsilon(y.e)\varepsilon(e.y^{n-1}) = \varepsilon(y)\varepsilon(y^{n-1}) = 0.$
$\varepsilon(a.y^n) = \varepsilon(a.e.y^n) = \varepsilon(a.e)\varepsilon(e.y^n) = \varepsilon(a)\varepsilon(y^n) = 0.$
$\varepsilon(y^n.a) = \varepsilon(y^n.e.a) = \varepsilon(y^n.e)\varepsilon(e.a) = \varepsilon(y^n)\varepsilon(a) = 0.$
En utilisant la condition de l'antipode,

$m(m \otimes id)(S \otimes id \otimes S)(\Delta \otimes id)\Delta(y) = m(m \otimes id)(S \otimes id \otimes S)(y \otimes e \otimes e + r \otimes y \otimes e + r \otimes r \otimes y) = S(y).e.S(e) + S(r).y.S(e) + S(r).r.S(y) = S(y).$

Finalement, nous obtenons : $S(y) = -S(r).y$.

$S(y^n) = S(y).S(y).S(y)...S(y) = (-S(r).y).(-S(r).y)...(-S(r).y) = (-1)^n(S(r).y)^n.$

De manière, la propriété de la counité donne
$a = a_1\varepsilon(a_2)$, *et aussi* $h.e = h = \varepsilon(h)e$, *alors* $h \in \mathbb{K}$. □

Theorem 5.2.4. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf faible construite à partir d'une algèbre de Hopf qui possède deux unités 1 et e. $R[\mathcal{A}, y, \tau, \delta]$ sera une extension d'Ore d'une algèbre de Hopf faible si et seulement si :*

(1) il existe un caractère $\chi : \mathcal{A} \longmapsto \mathbb{K}$ tel que :

$$\tau(a) = \chi(a_1)a_2 \tag{5.2.9}$$

pour tout $a \in \mathcal{A}$ (c.à.d, τ est l'automorphisme twist de $\mathcal{A}$) ;

La relation suivante résulte :

$$\chi(a_1)a_2 = Ad_r(a_1)\chi(a_2); \tag{5.2.10}$$

La τ-dérivation δ obéit à la relation

$$\Delta\delta(a) = \delta(a_1) \otimes a_2 + r.a_1 \otimes \delta(a_2). \tag{5.2.11}$$

Démonstration. Nous allons présenter cette preuve en trois grandes parties.

5.3 Première partie : Comultiplication.

Le but cette partie est de démontrer que la comultiplication Δ peut être prolonger de $\mathcal{A}$ à $R = [y; \tau, \delta]$. On voit que l'homomorphisme Δ conserve la relation (5.1.2) ceci nous ramène à dire que,

$\Delta(y).\Delta(a) = \Delta(\tau(a)).\Delta(y) + \Delta(\delta(a))$.

$\Delta(y).\Delta(a) = (y \otimes e + r \otimes y) a_1 \otimes a_2 = (\tau(a_1.y + \delta(a_1)) \otimes a_2 + r.a_1 \otimes (\tau(a_2).y + \delta(a_2) = (\tau(a_1) \otimes a_2)(y \otimes e) + (r.a_1.S(r) \otimes \tau(a_2))(r \otimes y) + \delta(a_1) \otimes a_2 + r.a_1 \otimes \delta(a_2)$,

$\Delta(\tau(a)).\Delta(y) + \Delta(\delta(a)) = \Delta(\tau(a))(y \otimes e + r \otimes y) + \Delta(\delta(a))$,

$= \Delta(\tau(a))(y \otimes e) + \Delta(\tau(a))(r \otimes y) + \Delta(\delta(a))$.

Il est clair que Δ sous la condition(5.1.2) en tenant compte de (5.2.2), elle admet un prolongement si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\Delta(\tau(a)) = \tau(a_1) \otimes a_2, \tag{5.3.1}$$

$$\Delta(\tau(a)) = Ad_r(a_1) \otimes a_2, \tag{5.3.2}$$

$$\Delta(\delta(a)) = \delta(a_1) \otimes a_2 + r.a_1 \otimes \delta(a_2), \tag{5.3.3}$$

Nous allons prouver que les relations (5.3.1) et (5.3.2) impliquent (5.2.9) et (5.2.10).

Posons : $\chi(a) = \tau(a_1.S(a_2) \in \mathcal{A}$. Des calculs directs donnent

$\Delta(\chi(a)) = \Delta(\tau(a_1))\Delta(S(a_2)) = (\tau(a_1) \otimes a_2)(S(a_{22}) \otimes S(a_{21})) = \tau(a_{11})S(a_{22}) \otimes a_{12}S(a_{21}) = \tau(a_1)S(a_4) \otimes a_2S(a_3) = \tau(a_1)S(a_3) \otimes \varepsilon(a_2)e = \chi(a) \otimes e = \chi(a)e \otimes e = \chi(a)\Delta(e)$.

On conclut du lemme (5.2.8) que $\chi(b) \in \mathcal{A}$.

On peut considérer l'application $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$. Avec τ est un endomorphisme et χ est caractère, il s'ensuit que :

$\chi(ab) = \tau(a_1b_1)S(a_2b_2) = \tau(a_1)\tau(b_1)S(a_2)S(b_2) = \tau(a_1)\chi(b)S(a_2) = \chi(a)\chi(b)$,

$\chi(a+b) = \tau((a+b)_1)S((a+b)_2) = \tau(a_1)S(a_2) + \tau(b_1)S(b_2) = \chi(a) + \chi(b)$.

En effet, χ est un caractère

$\chi(a_1)a_2 = \tau(a_1)S(a_2)a_3 = \tau(a_1)\varepsilon(a_2) = \tau(a_1)\varepsilon(a_2) = \tau(a)$.

Ceci prouve (5.2.9).

En substituant τ dans (5.3.2), nous obtenant :
$\Delta(\chi(a_1)a_2 = Ad_r(a_1) \otimes \chi(a_2)a_3,\ \chi(a_1)\Delta(a_2)Ad_r(a_1)\chi(a_2) \otimes a_3,$

$$\chi(a_1)a_2 \otimes a_3 = Ad_r(a_1)\chi(a_2) \otimes a_3.$$

D'autre part :

$$\chi(a_1)a_2a_3S(a_4) = Ad_r(a_1)(\chi(a2)a_3S(a_4),\ \chi(a_1)a_2\varepsilon(a_3) = Ad_r(a_1)(\chi(a2)\varepsilon(a_3),$$

$$\chi(a_1)a_2 = Ad_r(a_1\chi(a_2)$$

Ceci prouve (5.2.10). Inversement si les égalités (5.2.9)-(5.2.11) sont réalisées alors :

$$\Delta(\tau(a)) = \chi(a_1)a_2 \otimes a_3 = \tau(a_1) \otimes a_2,$$

et

$$\Delta(\tau(a)) = \Delta(Ad_r a_1\chi(a_2)) = Ad_{\Delta(r)}(a_1 \otimes a_2)\chi(a_3) = Ad_r(a_1) \otimes Ad(a_2)\chi(a_3) = Ad_r(a_1) \otimes \tau(a_2)).$$

Ce qui prouve que $\Delta|_{\mathcal{A}}$ peux être prolonger en un homomorphisme unique
$\Delta : R \longrightarrow R \otimes R.$

En effet : $(id \otimes \Delta)\Delta(a) = (\Delta \otimes id)\Delta(a), \forall, a \in \mathcal{A}$ et $(id \otimes \Delta)\Delta(y) = (\Delta \otimes id)\Delta(y)$, ainsi, Δ est coassociative.

5.4 Deuxième partie :*Counité*

Supposons que R admet une comultiplication (c.à.d les relations ((5.2.9)-(5.2.11)) sont satisfaites). L'existence de la counité sur R dépend du prolongement de l'homomorphisme $\varepsilon|_{\mathcal{A}}$ en une version plus faible et vérifiant l'égalité suivante :
$\varepsilon(y.a) = \varepsilon(\tau(a).y) + \varepsilon(\delta(a)).$
Dans ce cas ε admet un prolongement si et seulement si

$$\varepsilon(\delta(a)) = 0 \tag{5.4.1}$$

En appliquant l'action $m(id \otimes \varepsilon)$ à((5.2.11)) on obtient :

$m(id \otimes \varepsilon)(\Delta\delta(a) = m(id \otimes \varepsilon)(\delta(a_1 \otimes a_2 + r.a_1\varepsilon(\delta(a_2)).$

$\delta(a) = \delta(a_1)\varepsilon(a_2) + r.a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = \delta(a) + r.a_1\varepsilon(\delta(a_2)).$

Ainsi : $r.a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = 0.$

Comme r est un élément groupe-like d'ordre fini n pour la loi d'algèbre, en multipliant cette expression par r^{n-1} on obtient :
$a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = 0.$

En appliquant ε à cette expression, nous aurons :

$\varepsilon(a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = \varepsilon(0) = 0,$

donc : $\varepsilon(\delta(a_2))\varepsilon(a_1) = \varepsilon(\delta(a_2))\varepsilon(a_1) = \varepsilon\delta(\varepsilon(a_1)a_2)) = \varepsilon(\delta(a)).$

□

La condition (5.4.1) et en posant $b = \sum c_i.y^i$ conduisent à dire que $\varepsilon : R \to \mathbb{K}$ peut être prolonger en une application linéaire qui réalise la version faible.

5.5 Troisième partie : Antipode

On veut dans cette étape trouver les conditions pour qu'une antipode d'une algèbre faible peut être prolonger en une extension d'Ore admettant une antipode. On applique S à (5.1.2), on conclue que :

$$S(a)S(y) = S(y)S(\tau(a)) + S(\delta(a)). \tag{5.5.1}$$

D'autre part : si la relation ci-dessous est établie alors S peux se prolonger en un antiautomorphisme de $\mathcal{A}$ à R par l'égalité (5.2.5). Il suffit de prendre un élément quelconque $b = \Sigma c_i y_i$ de R, et voir que l'application $S : R \longrightarrow R$ à une antipode. Ceci nous ramène à conclure à l'existence de S, l'équivalence de (5.2.6) et (5.5.1).

$$-S(a)S(r)y = -S(r)yS(\tau(a)) + S(\delta(a)),$$
$$-S(a)S(r)y = -S(r)\tau(S(\tau(a)))y - S(r)\delta(S(\tau(a))) + S(\delta(a)).$$

La condition (5.5.1) est satisfaite si et seulement si :

$$S(a)S(r) = S(r)\tau(S(\tau(a))), \tag{5.5.2}$$

$$S(\delta(a)) = S(r)\delta(S(\tau(a))). \tag{5.5.3}$$

Montrons (5.5.2), nous avons :

$$\begin{aligned} \tau(S(\tau(a))) &= \tau(S\chi(a_1))a_2, \\ &= \tau(\chi(a_1)S(a_2)), \\ &= \chi(a_1)\tau(S(a_2)). \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

$$= \chi(a_1)Ad_r(S(a_3)\chi(S(a_2))) = \chi(a_1S(a_2))Ad_rS(a_3) = Ad_rS(a). \tag{5.5.5}$$

Maintenant, notre objectif est de prouver (5.5.3).

De l'égalite (5.2.9), on a :

$S(\tau(a)) = S(\chi(a_1)a_2) = \chi(a_1)S(a_2)$.

D'autre part : (5.5.3) sera équivalente à la forme suivante :

$$rS(\delta(a)) = \chi(a_1)\delta(S(a_2)) \tag{5.5.6}$$

On pose : $L = rS(\delta(a))$ et $M = \chi(a_1)\delta(S(a_2))$.

L'action de $m(id \otimes S)$ appliquée à l'égalité ((5.2.11)), donne :

$m(id \otimes S)\Delta(\delta(a)) = m(id \otimes S)(\delta(a_1)) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)$,

$\varepsilon(\delta(a)) = \delta(a_1)S(a_2) + ra_1S(\delta(a_2)) = 0$,

On en déduit que : $a_1S(\delta(a_2)) = -S(r)\delta(a_1)S(a_2)$.
Alors :

$$\begin{aligned} L = rS(\delta(a)) = r\varepsilon(a_1)S(\delta(a_2)) &= rS(a_1)a_2S(\delta(a_3)), \\ &= -rS(a_1)S(r)\delta(a_2)S(a_3), \\ &= -Ad_r(a_1)\delta(a_2)S(a_3). \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

L'action de δ sur les deux membres de l'égalité $\varepsilon(a) = a_1S(a_2)$, nous donne :

$$\delta(a_1)S(a_2) + \tau(a_1)\delta(S(a_2)) = 0, \text{ c-à-d } \delta(a_1)S(a_2) = -\tau(a_1)\delta(S(a_2)), \tag{5.5.8}$$

$$M = \chi(a_1)\delta(S(a_2)) = \chi(a_1)\varepsilon(a_2)\delta(S(a_3)) = \chi(a_1)\tau(S(a_2))a_3\delta(S(a_4)). \tag{5.5.9}$$

En tenant compte de (5.5.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \chi(a_1)\tau(S(a_2))a_3\delta(S(a_4)) &= \chi(a_1)\tau(S(a_2))\tau(a_3)\delta(S(a_4)), \qquad (5.5.10) \\ &= -\chi(a_1)\tau(S(a_2))\delta(a_3)S(a_4), \\ &= -\chi(a_1)Ad_r(S(a_3))\chi(S(a_2))\delta(a_4)S(a_5), \\ &= -Ad_r(S(a_1)\delta(a_2)S(a_3). \end{aligned}$$

En comparant (5.5.7) et (5.5.10), on conclue que : L=M. Ce qui confirme (5.5.6). D'où l'existence de l'antipode.

Chapitre 6

Déformation

Dans ce chapitre, on décrit la théorie des déformations formelles à un paramètre, introduite par Gerstenhaber pour les algèbres associatives. Cette théorie est intimement liée à une cohomologie de l'algèbre. On fera quelques observations concernant les déformations bialgèbres faibles et les algèbres de Hopf faibles.

6.1 Suites exactes

Soit R un anneau (associatif mais pas nécessairement commutatif). Pour M et N deux R-modules à gauche, on a que $Hom_R(M,N)$ est un groupe additif. Soit $f \in Hom_R(M,N)$, on pose

— $ker\ f = \{m \in M : f(m) = 0\}$ (noyau),

— $Im\ f = f(M) = \{f(m) : m \in M\}$ (image),

— $coker\ f = N/f(M)$ (co-noyau).

Définition 6.1.1. Une suite de R-modules est d'homomorphismes

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

est exacte en M_i si $Ker\ f_i = Im\ f_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n-1$.

Elle est dite exacte, si elle exacte en tout M_i avec $2 \leq i \leq n-1$.

Une suite exacte est dite courte si elle est de la forme

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Une suite exacte courte est équivalente à

1. f injective,
2. $Im\ f = Ker\ g$,
3. g surjective.

Elle induit un isomorphisme $M/f(L) \simeq N$.

Proposition 6.1.2. *1. Pour tout R-module X et pour toute suite exacte de R-modules*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N,$$

on associe la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Hom_R(X,L) \xrightarrow{f_*} Hom_R(X,M) \xrightarrow{g_*} Hom_R(X,N).$$

2. Pour tout R-module Y et pour toute suite exacte de R-modules

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

on associe la suite exacte de groupes additifs

$$0 \longrightarrow Hom_R(N,Y) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,Y) \xrightarrow{f^*} Hom_R(L,Y).$$

Définition 6.1.3. Soit R un anneau. Un *complexe* (C,d) pour R est un ensemble indéxé par $\mathbb{Z}$ de R-modules $C = (C_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et un ensemble de R-homomorphismes $d_i : C_i \to C_{i-1}$, $d = \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$ tels que pour tout i, $d_{i-1}d_i = 0$.

Soient (C,d) et (C',d') deux complexes, un homomorphisme de C dans C' est un ensemble $\alpha = \{\alpha_i : i \in \mathbb{Z}\}$ d'homomorphismes $\alpha_i : C_i \to C_{i-1}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_i & \overset{d_i}{\longrightarrow} & C_{i-1} \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i-1} \\ C'_i & \underset{d'_i}{\longrightarrow} & C'_{i-1} \end{array}$$

soit commutatif.

Exemple 6.1.4.
1. *Tout module M définit un complexe (C,d), avec $C_i = M$ et $d_i = 0$.*
2. *Soit M un module à droite sur R et $\delta : M \to M$ une différentielle ($\delta^2 = 0$). On pose $C_i = 0$ pour $i \leq 0$, $C_1 = C_2 = C_3 = M$ et $C_j = 0$ pour $j > 3$, $d_2 = d_3 = \delta$ et $d_i = 0$ pour $i \neq 2,3$.*
3. *Toute suite exacte courte définit un complexe.*

On note par R-comp la catégorie des complexes sur un anneau R où les objets sont de la forme (C,d) et les morphismes sont α. C'est une catégorie abélienne : $hom(C,C')$ est un groupe abélien.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième foncteur d'homologie allant de la catégorie R-comp dans la catégorie des R-modules. Pour un complexe (C,d), on pose

$$Z_n := Z_n(C) = Ker\ d_n, \quad \text{et} \quad B_n := B_n(C) = d_{n+1}(C_{n+1}).$$

Les éléments de Z_n sont appelés *n-cycles* (Z_n est un sous-module de C_n), et les éléments de B_n sont appelés *n-bords*. On a $d_n d_{n+1}(C_{n+1}) = 0$, donc B_n est un sous-module de Z_n.
Le n-ième module d'homologie de (C,d) est

$$H_n = H_n(C) = Z_n/B_n.$$

On appelle complexe positif (resp. negatif) tout complexe (C,d) tel que $C_n = 0$ pour tout $n < 0$ (resp. $n > 0$). En général, on considère soit des complexes positifs, appelés complexes de chaînes, ou bien des complexes négatifs, appelés complexes de cochaînes.

Soit (C,d) un complexe négatif. En posant $C_{-n} = C^n$ et $d_{-n} = d^n$, on obtient un complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \longrightarrow \cdots .$$

On définit
— $Z^n := Ker\ d^n$,
— $B^n := d^{n-1}(C^{n-1})$.

Les éléments de Z^n sont appelés *n-cocycles* et les éléments de B^n sont appelés *n-cobords* et d qui est déterminé par les d^n est appelé opérateur cobord.
On a $d^{n+1}d^n(C^n) = 0$, B^n est un sous-module de Z^n et $H^n = H^n(C) = Z^n/B^n$ est le n-ième groupe de cohomologie de (C, d).

En terme de *foncteurs dérivés*, Ext est le foncteur dérivé de $hom(-, N)$ et Tor est le foncteur dérivé de $hom(M, -)$.

La cohomologie (resp. l'homologie) d'une algèbre $\mathcal{A}$ à valeurs dans un module M sont définies par :

$$\begin{aligned} H^n(\mathcal{A}, M) &= Ext^n_{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A}, M), \quad \mathcal{A}^e = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}, \\ H_n(\mathcal{A}, M) &= Tor_n^{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A}, M). \end{aligned}$$

6.1.1 (Co)homologie de Hochschild

On rappelle dans ce paragraphe la définition de l'homologie (resp. la cohomologie) de Hochschild. Elles concernent les algèbres associatives et s'étendent naturellement aux algèbres de Hopf.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur le corps $\mathbb{K}$, μ sa multiplication (on note parfois $\mu(x, y)$ par xy) et M un $\mathcal{A}$-bimodule ($\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-bimodule qui est équivalent à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$-module à droite et un $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$-module à gauche).

Homologie de Hochschild

On considère, pour $n > 0$, les modules $\mathcal{C}_n(\mathcal{A}, M) := M \otimes \mathcal{A}^{\otimes n}$. Un bord de Hochschild est donné par des $\mathbb{K}$-homomorphismes $d : M \otimes \mathcal{A}^{\otimes n} \to M \otimes \mathcal{A}^{\otimes n-1}$ définies par

$$\begin{aligned} d(m, a_1, \cdots a_n) := (ma_1, a_2, \cdots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (m, a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_n) \\ +(-1)^n (a_n m, a_1, \cdots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

On définit le complexe de Hochschild par $\mathcal{C}(\mathcal{A}, M) = \mathcal{C}_*(\mathcal{A}, M)$ et

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_n(\mathcal{A}, M) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{n-1}(\mathcal{A}, M) \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}_1(\mathcal{A}, M) \xrightarrow{d} M.$$

Les groupes d'homologie (qui sont en fait des $\mathbb{K}$-modules) sont définis par $H_n = Z_n/B_n$, avec $Z_n = Ker(d : \mathcal{C}_n(\mathcal{A}, M) \to \mathcal{C}_{n-1}(\mathcal{A}, M))$ et $B_n = Im(d : \mathcal{C}_{n+1}(\mathcal{A}, M) \to \mathcal{C}_n(\mathcal{A}, M))$.

En particulier, on a

$$H_0(\mathcal{A}, M) = M_{\mathcal{A}} = M/[\mathcal{A}, M] = M/\{am - ma : a \in \mathcal{A},\ m \in M\},$$

qui est appelé module des coinvariants de M par $\mathcal{A}$.

Cohomologie de Hochschild

Une cochaîne de degré n (ou une n-cochaîne) est une application multilinéaire de $\mathcal{A}^{\otimes n}$ dans M. Pour $n \geq 1$, on pose $\mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M) = Hom(\mathcal{A}^{\otimes n}, M)$. En particulier, $\mathcal{C}^0(\mathcal{A}, M) = M$. On pose, pour $n < 0$, $\mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M) = \{0\}$.

L'espace des cochaînes de $\mathcal{A}$ à valeurs dans M est défini par $\mathcal{C}(\mathcal{A}, M) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M)$.

L'opérateur cobord d est défini par ses restrictions d^n aux espaces des n-cochaînes $(n \geq 0)$. Il est donné par les homomorphismes

$$d^n : \begin{array}{c} \mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M) \to \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{A}, M) \\ \varphi \to \delta^n\varphi \end{array}$$

définis pour tout $(a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M)$ par

$$d^n\varphi(a_1, \cdots, a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2, \cdots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(a_1, \cdots, \mu(a_i, a_{i+1}), \cdots, a_p)$$
$$+(-1)^{n+1}\varphi(a_1, \cdots, a_n)a_{n+1}.$$

et $d^0\varphi(a) = a\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A}, M) = M$ et $a \in \mathcal{A}$.

Ces opérateurs vérifient $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Les espaces des cobords sont

$$B^n(\mathcal{A}, M) = \{\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M) : \ \varphi = d^{n-1}(f), f \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{A}, M)\}.$$

Les espaces des cocycles sont

$$Z^n(\mathcal{A}, M) = \{\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathcal{A}, M) : d^n(\varphi) = 0\}.$$

On a $B^n(\mathcal{A}, M) \subset Z^n(\mathcal{A}, M)$ car $d^2 = 0$.

L'espace quotient $H^n(\mathcal{A}, M) = Z^n(\mathcal{A}, M)/B^n(\mathcal{A}, M)$ est appelé $n^{\text{i ème}}$ groupe de la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à valeurs dans M.

On note la somme directe par $H(\mathcal{A}, M) = \oplus_{n\geq 0}H^n_H(\mathcal{A}, M)$. En particulier, on a

$$H^0(\mathcal{A}, M) = M^{\mathcal{A}} = \{m \in M : am = ma, \ \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

Pour $n = 1$, les 1-cocycles sont les homomorphismes de $\mathbb{K}$-modules $D : \mathcal{A} \to M$ vérifiant

$$D(a_1a_2) = a_1D(a_2) + D(a_1)a_2, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}.$$

On note $Z^1(\mathcal{A}, M)$ par $Der(\mathcal{A}, M)$ et ses éléments sont appelés dérivations.

$$H^1(\mathcal{A}, M) = Der(\mathcal{A}, M)/\{\text{dérivations intérieures}\}.$$

Le groupe $H^1(\mathcal{A}, M)$ est parfois appelé groupe des dérivations extérieures.

Cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre

La cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre joue un rôle important dans la théorie des déformations formelles. On spécifie les formules dans ce cas particulier $M = \mathcal{A}$.

Les opérateurs cobord de Hochschild $d^n : \begin{array}{c} \mathcal{C}^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \\ \varphi \to d^n\varphi \end{array}$ sont définis pour tout $(a_1, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{\otimes(n+1)}$ par

$$d^n\varphi\left(a_1, ..., a_{n+1}\right) = \mu\left(a_1, \varphi\left(a_2, ..., a_{n+1}\right)\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^i\varphi\left(a_1, ..., \mu\left(a_i, a_{i+1}\right), ..., a_n\right) + \left(-1\right)^{n+1}\mu\left(\varphi\left(a_1, ..., a_n\right), a_{n+1}\right)$$

Le noyau de d^n dans $\mathcal{C}^n(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est le groupe des n-cocycles :

$$Z^n(\mathcal{A},\mathcal{A}) = Kerd^n = \left\{\varphi \ : \ \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A} \ : \ d^n\varphi = 0\right\}.$$

L'image par d^{n-1} de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{A},\mathcal{A})$ est le groupe des n-cobords, qui est nul pour $n=0$:

$$B^n(\mathcal{A},\mathcal{A}) = Imd^{n-1} = \left\{\varphi \ : \ \mathcal{A}^{\otimes n} \to \mathcal{A} \ : \ \varphi = d^{n-1}f, \ f \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{A},\mathcal{A})\right\}$$

L'espace quotient $H^n(\mathcal{A},\mathcal{A}) = Z^n(\mathcal{A},\mathcal{A})/B^n(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est le n-ième groupe de cohomologie de Hochschild de l'algèbre $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

En particulier,

— $H^0(\mathcal{A},\mathcal{A})$ (centre de l'algèbre) :

$$Z(mathbbA) = H^0(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \ : \mu(a,b) = \mu(b,a), \ \forall b \in \mathcal{A}).$$

— $H^1(\mathcal{A},\mathcal{A})$ L'algèbre des dérivations :

$$Der(\mathcal{A})) = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \ f(\mu(a,b)) = \mu(f(a),b) + \mu(a,f(b)), \quad \forall a,b \in \mathcal{A}\}$$

On définit deux applications

$$\circ_G : C^m(\mathcal{A},\mathcal{A}) \times C^n(\mathcal{A},\mathcal{A}) \to C^{m+n-1}(\mathcal{A},\mathcal{A})$$

$$(\varphi \circ_G \psi)(a_1,\cdots,a_{m+n-1}) = \textstyle\sum_{i\geqslant 0}(-1)^{i(n-1)}\varphi(a_1,\cdots,a_i,\psi(a_{i+1},\cdots,a_{i+n}),\cdots)$$

et

$$[.,.]_G : C^m(\mathcal{A},\mathcal{A}) \times C^n(\mathcal{A},\mathcal{A}) \to C^{m+n-1}(\mathcal{A},\mathcal{A})$$

$$[\varphi,\psi]_G = \varphi \circ_G \psi - (-1)^{(n-1)(m-1)}\psi \circ_G \varphi.$$

Remarque 6.1.5. L'espace $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),\circ_G)$ est une algèbre preLie et $(C(\mathcal{A},\mathcal{A})[.,.]_G)$ est une algèbre de Lie graduée. Le crochet $[.,.]_G$ est appelé crochet de Gerstenhaber. Le carré de $[\mu,.]_G$ s'annule et définit un opérateur 2-cobord. La multiplication μ de $\mathcal{A}$ est associative si $[\mu,\mu]_G = 0$.

Les groupes de cohomologie suivants interviennent en théorie des déformations formelles.

— $B^2(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{\varphi \ : \ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to mathbbA \ : \ \varphi = d^1 f, \ f \in End(\mathcal{A})\}$
$\forall a,b \in \mathcal{A}$

$$d^1 f(a,b) = \mu(f(a),b) + \mu(a,f(b)) - f(\mu(a,b)).$$

— $Z^2(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A},\mathcal{A}) \ : \ d^2\varphi = 0\}$,
$\forall a_1,a_2,a_3 \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} d^2\varphi(a_1,a_2,a_3) = \mu(\varphi(a_1,a_2),a_3) - \mu(a_1,\varphi(a_2,a_3)) + \\ \varphi(\mu(a_1,a_2),a_3) - \varphi(a_1,\mu(a_2,a_3)). \end{aligned}$$

— $B^3(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{\Psi \ : \ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A} \ : \ \Psi = d^2\varphi, \ \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A},\mathcal{A})\}.$

— $Z^3(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathcal{A},\mathcal{A}) \, et \ : \ d^3\varphi = 0\}$,
$\forall a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} & d^3\varphi(a_1,a_2,a_3,a_4) = \mu(a_1,\varphi(a_2,a_3,a_4)) - \varphi(\mu(a_1,a_2),a_3,a_4) \\ & +\varphi(a_1,\mu(a_2,a_3),a_4) - \varphi(a_1,a_2,\mu(a_3,a_4)) + \mu(\varphi(a_1,a_2,a_3),a_4). \end{aligned}$$

6.2 Anneau des séries formelles et espaces formels

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les séries formelles sont une généralisation des polynômes. On rappelle qu'il suffit de considérer la suite de nombres $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ dans $\mathbb{K}$ pour étudier le polynôme $f(t) = a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$, qui correspond à la fonction génératrice de la suite. Étant donnée une suite infinie $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$, on peut écrire $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n + \cdots$. L'expression est appelée série formelle. L'ensemble des séries formelles à une variable t en $\mathbb{K}$ est noté par $\mathbb{K}[[t]]$

$$\mathbb{K}[[t]] = \{\sum_{i\geq 0} a_it^i \quad a_i \in \mathbb{K}\}.$$

On suppose que les éléments de $\mathbb{K}$ commutent avec le paramètre t. L'ensemble des polynômes correspond aux sommes finies et se note $\mathbb{K}[[t]]$.

Deux séries formelles $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n + \cdots$ et $g(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n + \cdots$ de $\mathbb{K} = [[t]]$ sont égales si $a_i = b_i$ pour tout $i \geq 0$. Les opérations addition, multiplication sont définies de la même manière que les polynômes. Soient $f(t) = \sum_{i\geq 0} a_it^i$ et $g(t) = \sum_{i\geq 0} b_it^i$ deux séries formelles dans $\mathbb{K}[[t]]$. La somme est la série formelle définie par $f(t) + g(t) = \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i)t^i$ et la multiplication est la série formelle $f(t)g(t) = \sum_{k\geq 0} (\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i})t^k$. L'ensemble $\mathbb{K}[[t]]$ est un anneau et l'élément neutre est la série formelle constante 1.

6.2.1 Propriétés des séries formelles

On montre à quelle condition une série formelle dans $\mathbb{K}[[t]]$ admet un inverse.

Theorem 6.2.1. *Toute série formelle $f(t) = \sum_{i\geq 0} a_it^i$ dans $\mathbb{K}[[t]]$ telle que le terme constant a_0 est non nul admet une série formelle inverse $f(t)^{-1}$.*

Démonstration. On cherche une série formelle $g(t) = \sum_{i\geq 0} b_it^i$ telle que $f(t)g(t) = 1$. On obtient $\sum_{k\geq 0} (\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}t^k) = 1$. Ceci conduit à $a_0b_0 = 1$ et $\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} = 0$ pour tout $k > 0$. Alors $b_0 = a_0^{-1}$ puisque $a_0 \neq 0$. L'équation suivante $a_0b_1 + a_1b_0 = 0$ implique $b_1 = a_0^{-2}a_1$. Supposons qu'on ait les coefficients de $1, t, t^2, \cdots, t^{n-1}$ et $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ déjà déterminés. Le coefficient de t^n correspond à l'équation

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = 0.$$

D'où $b_n = -a_0^{-1}(a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)$. Puisque $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ sont déjà déterminés, on en déduit la valeur b_n. □

Toute fraction $\frac{f(t)}{g(t)}$ de deux séries formelles de $\mathbb{K}[[t]]$ est une série formelle dans $\mathbb{K}[[t]]$ si le terme constant b_0 de $g(t)$ est non nul. En particulier, une fraction rationnelle de deux polynômes peut être représentée par une série formelle.

Remarque 6.2.2. Le Théorème 6.2.1 traduit le fait que $\mathbb{K}[[t]]$ est un anneau local dont l'idéal maximal est $t\mathbb{K}[[t]]$, c'est à dire l'idéal engendré par t.

Theorem 6.2.3. *Soit $f(t) = \sum_{i\geq 0} a_it^i$ une série formelle de $\mathbb{K}[[t]]$ telle que $a_0 \neq 0$. Pour tout b_0 vérifiant $b_0^k = a_0$, il existe une série formelle $g(t) = \sum_{i\geq 0} b_it^i$ telle que $(g(t))^k = f(t)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 6.2.1. □

Soit $n > 0$. L'ensemble des polynômes de degrés inférieurs où égaux à n, notée $\mathbb{K}_n[t]$, peut s'obtenir comme le quotient of $\mathbb{K}[t]$ par l'ideal engendré par t^n.

Il existe un morphisme associant à toute série formelle $\sum_{i\geq 0} a_i t^i$ sa classe $\sum_{i\geq 0}^{n-1} a_i t^i$ modulo (t^n).

Soit

$$\begin{array}{rccc} \pi_n : & \mathbb{K}[[t]] & \to & \mathbb{K}_n[t] \\ & \sum_{i\geq 0} a_i t^i & \to & \sum_{i\geq 0}^{n-1} a_i t^i \end{array}$$

L'application π_n est surjective et son noyau est engendré par $t^n\mathbb{K}[[t]]$. Il induit l'isomorphisme suivant

$$\mathbb{K}[[t]]/t^n \cong \mathbb{K}[t]/t^n.$$

Proposition 6.2.4. *L'application $\pi_n : \mathbb{K}[[t]] \to \varprojlim \mathbb{K}[t]/(t^n)$ est un isomorphisme d'algèbre.*

Remarque 6.2.5. L'ensemble $\mathbb{K}[[t]]$ peut être muni de la topologie t-adique. Les sous-espaces $t^n\mathbb{K}[[t]]$ forment une base de voisinage de 0. Il s'ensuit que $\mathbb{K}[[t]]$ est un espace de Hausdorff complet.

6.2.2 Espaces formels

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On désigne par $V[[t]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans V, $V[[t]] = \{\sum_{i\geq 0} x_i t^i \quad x_i \in V\}$. L'espace $V[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module avec l'action définit par $(\sum_{i\geq 0} a_i t^i, \sum_{j\geq 0} x_j t^j) \to \sum_{p\geq 0} \sum_{i+j=p} a_i x_j t^p$, où $a_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in V$.

Notons que V est un sous-module de $V[[t]]$. La structure d'espace vectoriel de V est étendue naturellement à $V[[t]]$, en remplaçant le domaine des coefficients $\mathbb{K}$ par $\mathbb{K}((t))$, le corps des séries formelles de $\mathbb{K}[[t]]$.

On désigne par $V[[t]]$ la limite projective des espaces $V[[t]]_n := V[[t]]/(t^{n+1}V[[t]])$.

Soit f un $\mathbb{K}[[t]]$-morphisme, $f : V \otimes \mathbb{K}[[t]] \to V[[t]]$, défini par $f(x \otimes \lambda) = \lambda x$.

Proposition 6.2.6.
1. *f est injectif.*
2. *Si V est de dimension finie, alors f est surjectif. Il s'ensuit que $V \otimes \mathbb{K}[[t]]$ et $V[[t]]$ sont isomorphes.*
3. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de V, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base topologique de $V[[t]]$.*

$(e_i)_{i\in I}$ est une base topologique de $V[[t]]$ signifie que les éléments de $V[[t]]$ sont de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ où λ_i parcourt $\mathbb{K}[[t]]$ et tend vers 0 suivant le filtre des compléments de sous-espaces finis de I.

6.3 Déformations formelles

Dans cette section on décrit les déformations formelles d'une algèbre et leurs liens avec la cohomologie. L'objectif est d'étudier les structures voisines d'une structure fixée, par exemple, pour montrer des résultats de stabilité, de classification, de calculs d'invariants, ou encore pour construire de nouveaux objets.

La théorie la plus populaire pour les déformations de structures algébriques a été introduite par Gerstenhaber pour les anneaux et algébres associatives. Les articles fondateurs de M. Gerstenhaber [20] fournissent l'outil de ces déformations sur la base des séries formelles. Ensuite, cette théorie a été relancée, dans les années 80, par la théorie de quantification par déformation et dans les années 90 par l'intérêt porté aux groupes quantiques, introduits par Drinfel'd, et qui proviennent naturellement d'une déformation d'algèbre de Hopf (par exemple de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie).

Pour la clarté de la présentation, on se restreint ici aux algèbres associatives. La même approche reste valable pour toute structure algébrique dont on connait une cohomologie à valeurs dans l'algèbre, adaptée à cette théorie.

6.3.1 Définitions

Soit $(\mathcal{A}, \mu_0)$ une algèbre associative et $\mathcal{A}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathcal{A}$.

Étant donnée une application $\mathbb{K}$-bilinéaire $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, elle admet naturellement une extension en une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire $f : \mathcal{A}[[t]] \times \mathcal{A}[[t]] \to \mathcal{A}[[t]]$, c'est à dire, si $x = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ et $y = \sum_{j \geq 0} b_j t^j$ alors $f(x, y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} t^{i+j} f(a_i, b_j)$.

Définition 6.3.1. Soit $\mathcal{A}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{A}, \mu_0)$ une algèbre associative. Une *déformation formelle* de $\mathcal{A}_0$ est donnée par une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire $\mu_t : \mathcal{A}[[t]] \times \mathcal{A}[[t]] \to \mathcal{A}[[t]]$ de la forme

$$\mu_t = \sum_{i \geq 0} \mu_i t^i,$$

où μ_i est une application $\mathbb{K}$-bilinéaire, $\mu_i : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (étendue en une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire), telle que pour $x, y, z \in \mathcal{A}$, la condition formelle d'associativité :

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) - \mu_t(\mu_t(x, y), z)) = 0. \tag{6.3.1}$$

soit satisfaite.

On notera la déformation formelle de $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{A}, \mu_0)$ par $\mathcal{A}_t = (\mathcal{A}, \mu_t)$. La restriction de $\mathcal{A}_t$ à $\mathcal{A}$, au lieu de considérer $\mathcal{A}[[t]]$, est justifiée par la $\mathbb{K}[[t]]$-linéarité de μ_t.

Proposition 6.3.2. *La multiplication $\mu_t = \sum_{i \geq 0} \mu_i t^i$ est associative si et seulement si $[\mu_t, \mu_t]_G = 0$.*

Démonstration. on a $[\mu_t, \mu_t]_G(x, y, z) = 2(\mu_t(x, \mu_t(y, z)) - \mu_t(\mu_t(x, y), z))$. □

6.3.2 Équation de déformation

Le premier problème consiste à donner des conditions sur les μ_i de sorte que μ_t soit associative, c'est à dire, pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$ on a

$$\mu_t\left(\mu_t\left(x, y\right), z\right) - \mu_t\left(x, \mu_t\left(y, z\right)\right) = 0.$$

En développant l'équation et en regroupant les termes suivant les puissance de t, on obtient le système infini suivant

$$\left\{ \sum_{i+j=k \quad i,j\geq 0} \mu_i\left(\mu_j\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_j\left(y,z\right)\right)=0 \qquad k=0,1,2,\cdots \right. \tag{6.3.2}$$

Ce système est appelé *équation de déformation* et il est équivalent à

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \mu_i\left(\mu_{k-i}\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_{k-i}\left(y,z\right)\right)=0 \qquad k=0,1,2,\cdots \right. \tag{6.3.3}$$

La première équation ($k=0$) correspond à l'associativité de μ_0. La deuxième équation montre que μ_1 est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild ($\mu_1 \in Z^2\left(\mathcal{A},\mathcal{A}\right)$). Plus généralement, supposons que μ_p soit le premier coefficient non nul après μ_0 dans la déformation μ_t.

Theorem 6.3.3. *L'application bilinéaire μ_p est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$.*

Démonstration. On considère (6.3.3), avec $k=p$ et $\mu_1=\cdots=\mu_{p-1}=0$. □

Définition 6.3.4. Le cocycle μ_p est dit intégrable si c'est le premier terme, après μ_0, d'une déformation associative.

L'intégrabilité de μ_p implique une suite infinie de relations qui peuvent être interprétées comme des obstructions à l'intégrabilité de μ_p.

6.3.3 Obstructions

En regroupant le premier et le dernier termes de la $k^{\text{ième}}$ équation de (6.3.3), pour k quelconque, $k>1$, L'équation s'écrit

$$d^2\mu_k\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i\left(\mu_{k-i}\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_{k-i}\left(y,z\right)\right).$$

Supposons que la déformation tronquée, à l'ordre $m-1$, c'est à dire $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2+....t^{m-1}\mu_{m-1}$, satisfasse l'équation de déformation. La déformation s'étend en une déformation d'ordre m, $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2+....t^{m-1}\mu_{m-1}+t^m\mu_m$ satisfaisant l'équation de déformation si

$$d^2\mu_m\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i\left(\mu_{m-i}\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_{m-i}\left(y,z\right)\right). \tag{6.3.4}$$

Le terme de droite de l'équation (6.3.4) s'appelle *obstruction* pour déterminer μ_m.

En utilisant l'opération "$\circ_G$" : $\mu_i\circ\mu_j\left(x,y,z\right)=\mu_i\left(\mu_j\left(x,y\right),z\right)-\mu_i\left(x,\mu_j\left(y,z\right)\right)$, l'obstruction peut s'écrire

$$\Psi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i\circ\mu_{m-i} \quad \text{ou encore } \Psi(x,y,z)=\sum_{i+j=m \ i,j\neq m}\mu_i\circ\mu_j.$$

Lemme 6.3.5. *Soient f et g deux applications bilinéaires sur $\mathcal{A}$, alors*

$$d^3(f \circ g) = d^2 f \circ g - f \circ d^2 g.$$

Démonstration. Calcul direct. □

Theorem 6.3.6. *Les obstructions sont des 3-cocycles de la cohomologie de Hochschild .*

Démonstration.

$$\begin{aligned} d^3\left(\sum_{i+j=m,\ i,j\neq m} \mu_i \circ \mu_j\right) &= \sum_{i+j=m\ i,j\neq m} d^3(\mu_i \circ \mu_j) \\ &= \sum_{i+j=m\ i,j\neq m} d^2\mu_i \circ \mu_j - \mu_i \circ d^2\mu_j \\ &= \sum_{i+j+k=m\ i,j,k\neq m} \mu_i \circ \mu_j \circ \mu_k - \mu_i \circ \mu_j \circ \mu_k = 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3.7.

1. La classe de cohomologie de l'élément $\sum_{i+j=m,\ i,j\neq m} \mu_i \circ \mu_j$ est la première obstruction à l'intégrabilité de μ_m.
   Supposons $m = 1$ et $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2$. L'équation de déformation est équivalente à
   $$\begin{cases} \mu_0 \circ \mu_0 = 0 & (\mu_0 \text{ est associative}) \\ d^2\mu_1 = 0 & (\mu_1 \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})) \\ \mu_1 \circ \mu_1 = d^2\mu_2. \end{cases}$$
   On a $\mu_1 \circ \mu_1$ est la première obstruction à l'intégrabilité de μ_1 et $\mu_1 \circ \mu_1 \in Z^3(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.
   Les éléments $\mu_1 \circ \mu_1$ qui sont des cobords permettent d'étendre la déformation d'ordre 1 à une déformation d'ordre 2. Mais les éléments de $H^3(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ donnent des obstructions à l'intégrabilité de μ_1.
2. Si μ_m est intégrable, alors la classe de cohomologie de $\Psi = \sum_{i+j=m\ i,j\neq m} \mu_i \circ \mu_j$ dans $H^3(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ doit être nulle.
   Dans l'exemple précédant μ_1 est intégrable implique, $\mu_1 \circ \mu_1 = d^2\mu_2$, ce qui signifie que la classe de cohomologie de $\mu_1 \circ \mu_1$ est nulle.

Corollaire 6.3.8. *Si $H^3(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ alors toutes les obstructions s'annulent et tout élément $\mu_m \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est intégrable.*

D'où le théorème suivant :

Theorem 6.3.9. *Soit $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \dots t^{m-1}\mu_{m-1}$ une déformation d'order $m-1$ de l'algèbre $(\mathcal{A}_0, \mu_0)$. Alors elle s'étend en une déformation d'ordre m si et seulement si la classe de cohomologie de $\sum_{i+j=m\ i,j\neq m} \mu_i \circ \mu_j$ est nulle.*

6.3.4 Déformations équivalentes et triviales

Le problème suivant consiste à caractériser les déformations équivalentes et déformations triviales. Étant données deux déformations μ_t et $\mu_t^{'}$ de μ_0, on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe un isomorphisme formel f_t, qui est une application $\mathbb{K}[[t]]$-linéaire de la forme

$$f_t = Id + tf_1 + t^2 f_2 + \cdots \qquad \text{où} \quad f_i \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}),$$

tel que $\mu_t = f_t \cdot \mu_t^{'}$, c'est à dire

$$\mu_t(x,y) = f_t^{-1} \circ \mu_t' \circ (f_t(x), f_t(y)) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathcal{A}. \tag{6.3.5}$$

Une déformation μ_t de μ_0 est dite *triviale* si et seulement si μ_t est équivalente à μ_0.

La condition 6.3.5 peut s'écrire

$$f_t(\mu_t(x,y)) = \mu_t'(f_t(x), f_t(y)) \quad \textit{pour tout } x, y \in \mathcal{A}. \tag{6.3.6}$$

Par identification des coefficients de t on obtient $\mu_1 = df_1$.

En général, les déformations μ_t et μ_t' de μ_0 sont équivalentes si $\mu_1' = \mu_1 + df_1$. D'où la proposition suivante :

Proposition 6.3.10. *L'intégrabilité de μ_1 dépend seulement de sa classe de cohomologie.*

Rappelons que deux éléments sont cohomologues si leur différence est un cobord.

$d\mu_1 = 0$ implique $d\mu_1' = d(\mu_1 + df_1) = d\mu_1 + d(df_1) = 0$.
Si $\mu_1 = dg$ alors $\mu_1' = dg - df_1 = d(g - f_1)$.

Remarque 6.3.11. Les éléments de $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ déterminent les déformations infinis d'ésimales $(\mu_t = \mu_0 + t\mu_1)$.

Proposition 6.3.12. *Soit $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{A}, \mu_0)$ une algèbre associative. Il existe sur $\mathbb{K}[[t]]/t^2$, une correspondance biunivoque entre les éléments de $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et les déformations infinis d'ésimales de $\mathcal{A}_0$ définies par*

$$\mu_t(x,y) = \mu_0(x,y) + \mu_1(x,y)t, \quad \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{6.3.7}$$

Démonstration. L'équation de déformation est équivalente à $d^2\mu_1 = 0$, c'est à dire $\mu_1 \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. □

Supposons maintenant que $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \cdots$ soit une famille de déformation à un paramètre de μ_0 telle que $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$.
L'équation de déformation implique $d\mu_m = 0$ $(\mu_m \in Z^2(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0))$. Si de plus $\mu_m \in B^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ (c'est à dire $\mu_m = dg$), en considérant le morphisme formel $f_t = Id + tf_m$, on obtient pour tout $x, y \in \mathbb{A}$

$$\mu_t'(x,y) = f_t^{-1} \circ \mu_t \circ (f_t(x), f_t(y)) = \mu_0(x,y) + t^{m+1}\mu_{m+1}(x,y) \cdots$$

Ainsi $\mu_{m+1} \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Theorem 6.3.13. *Soit μ_t une déformation formelle à un paramètre de μ_0. Alors μ_t est équivalente à $\mu_t = \mu_0 + t^p \mu'_p + t^{p+1} \mu'_{p+1} + \cdots$ où $\mu'_p \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $\mu'_p \notin B^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.*

Corollaire 6.3.14. *Si $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$, alors toute déformation de $\mathcal{A}$ est équivalente à une déformation triviale.*

En effet, supposons qu'il existe une déformation non triviale de μ_0. D'après le théorème 6.3.13, cette déformation est équivalente à $\mu_t = \mu_0 + t^p \mu'_p + t^{p+1} \mu'_{p+1} + \cdots$ où $\mu'_p \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $\mu'_p \notin B^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. Ce qui est impossible car $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$.

6.3.5 Déformations des algèbres unitaires

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux déformations des algèbres unitaires. Le résultat principal montre que toute déformation d'une algèbre unitaire est une algèbre unitaire.

Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mu_0)$ une algèbre associative unitaire d'élément neutre $1 \in \mathcal{A}$, c'est à dire que $\mu_0(x, 1) = \mu_0(1, x) = x$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Dans le langage des algèbres de Hopf, cela veut dire qu'il existe une application linéaire $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ telle que $\mu \circ (\eta \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \eta) = id$.

Theorem 6.3.15.

1. *L'élément neutre 1 de $\mathcal{A}$ est aussi l'élément neutre de toute déformation formelle $\mathcal{A}_t = (\mathcal{A}, \mu_t)$ de $\mathcal{A}$ si et seulement si*

$$\mu_n(x, 1) = \mu_n(1, x) = 0 \quad \forall n > 0, x \in \mathcal{A}. \tag{6.3.8}$$

   Dans le langage des algèbres de Hopf, si η est l'unité de $\mathcal{A}$, alors l'unité η_t de la déformation $\mathcal{A}_t$ est définie par

$$\eta_t(\sum_n a_n t^n) = \sum_n a_n 1 t^n.$$

2. *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire, alors tout élément inversible dans $\mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}_t$.*
3. *Toute déformation formelle $\mathcal{A}_t = (\mathcal{A}, \mu_t)$ d'une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ est équivalente à une déformation formelle $\mathcal{A}_t = (\mathcal{A}, \mu'_t)$ avec la même unité que $\mathcal{A}$.*

Démonstration. La première assertion découle d'un calcul direct. L'élément 1 est un élément unité pour μ_t si

$$\mu_t(x, 1) = x = x + \sum_{n>0} \mu_n(x, 1) t^n.$$

Par identification, on obtient : $\mu_n(x, 1) = 0, \quad \forall n > 0, x \in \mathcal{A}$.

(2) Soit a un élément inversible dans $\mathcal{A}$. On considère les endomorphismes v_t et w_t, sur $\mathbb{K}[[t]]$, définis pour $x \in \mathcal{A}$ par

$$v_t(x) = \mu_t(x, a) \quad \text{et} \quad w_t(x) = \mu_t(a, x).$$

Les endomorphismes v_t et w_t sont inversibles puisque v_0 et w_0 sont inversibles.

(3) Deux déformations formelles sont équivalentes s'il existe un isomorphisme formel f_t, qui soit une application $\mathbb{K}\,[[t]]$-linéaire s'écrivant sous la forme

$$f_t = Id + tf_1 + t^2 f_2 + \cdots \qquad \text{où} \quad f_i \in End_{\mathbb{K}}\,(\mathcal{A})$$

tel que (6.3.6) soit satisfaite. Ce qui est équivalent à

$$\mu'_n(x,y) = \mu_n(x,y) + f_n(\mu_0(x,y)) - \mu_0(f_n(x),y) - \mu_0(x,f_n(y)) \tag{6.3.9}$$

D'autre part, on considère la $n^{ième}$ équation de (6.3.2),

$$\sum_{i+j=n} \mu_i\left(\mu_j\left(x,y\right),z\right) - \mu_i\left(x,\mu_j\left(y,z\right)\right) = 0$$

dans laquelle on pose $y = z = 1$ respectivement $x = y = 1$ et $z = x$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mu_n(x,1) &= \mu_0(x,\mu_n(1,1)) \\ \mu_n(1,x) &= \mu_0(\mu_n(1,1),x) \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

On considère l'isomorphisme formel vérifiant

$$f_1(1) = \mu_1(1,1), \quad f_n = 0 \;\; pour n \geq 2.$$

En utilisant (6.3.9) et (6.3.10), la multiplication équivalente conduit à une nouvelle multiplication déformée vérifiant

$$\begin{aligned} \mu'_1(x,1) &= \mu_1(x,1) + f_1(\mu_0(x,1)) - \mu_0(f_1(x),1) - \mu_0(x,\mu_1(1,1)) \\ &= \mu_1(x,1) + f_1(x) - f_1(x) - \mu_1(x,1) = 0 \end{aligned}$$

De manière similaire on obtient : $\mu'_1(1,x) = 0$. Par induction, on montre que pour tout n, $\mu'_n(1,x) = \mu'_n(x,1) = 0$. En effet, on suppose $\mu'_k(1,x) = \mu'_k(x,1) = 0$ pour $k = 1,\cdots,n-1$. On considère un isomorphisme f_t vérifiant $f_n(1) = \mu_n(1,1)$ et $f_k = 0\ \forall k \neq n$. Alors, à l'aide de (6.3.9) et (6.3.10), on obtient $\mu'_n(1,x) = \mu'_n(x,1) = 0$. Notons que le produit $(1+f_n t^n)\cdots(1+f_n t^n)$ converge quand n tend vers l'infini. $\square$

La théorie des déformations des coalgèbres se fait naturellement par dualité.

Définition 6.3.16. Soit $\mathcal{A}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $C_0 = (\mathcal{A},\Delta_0)$ une coalgèbre coassociative. Une *déformation formelle* de C_0 est donnée par une application $\mathbb{K}[[t]]$ linéaire $\Delta_t : \mathcal{A}[[t]] \to \mathcal{A}[[t]] \times \mathcal{A}[[t]]$ de la forme

$$\Delta_t = \sum_{i\geq 0} \Delta_i t^i,$$

où Δ_i est une application $\mathbb{K}$-linéaire, $\Delta_i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ (étendue en une application $\mathbb{K}[[t]]$-linéaire), telle que pour $x \in \mathcal{A}$, la condition formelle de coassociativité :

$$(id \otimes \Delta_t)\Delta_t(x) - (\Delta_t \otimes id)\Delta_t(x) = 0. \tag{6.3.11}$$

soit vérifié.

En développant l'équation et en regroupant les termes suivants les puissance de t, on obtient le système infini suivant :

$$\left\{ \sum_{i+j=k \quad i,j\geq 0} (\Delta_i \otimes id)\Delta_j(x) - (id \otimes \Delta_i)\Delta_j(x) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots \right. \tag{6.3.12}$$

Ce système est appelé *équation de déformation de la coagèbre* et il peux être représenté par :

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} (\Delta_i \otimes id)\Delta_{k-i}(x) - (id \otimes \Delta_i)\Delta_{k-i}(x) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots \right. \tag{6.3.13}$$

Dans cette récurrence l'équation $(k = 0)$ correspond à la coassociativité de Δ_0. La deuxième pour la valeur $(k = 1)$ montre que Δ_1 est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild $(\Delta_1 \in Z^2(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$.

Définition 6.3.17. Soit $C_0 = (\mathcal{A}, \Delta_0)$ une coalgèbre counitaire et $C_t = (\mathcal{A}, \Delta_t)$ la déformation de cette coalgèbre, on définit la déformation de sa counité par l'application linéaire $\varepsilon_t : \mathcal{A}[[t]] \mapsto \mathbb{K}$, donnée par la série formelle : $\varepsilon_t = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t_2 + \varepsilon_3 t_3 + ... + \varepsilon_i t_i + ...+$ *où* $\varepsilon_0 = \varepsilon$ *et* ε_i des applications linéaires de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$ et ε_t vérifie la condition de compatibilité avec la coalgèbre et la condition faible suivante :

$$\varepsilon_t(x.y.z) = \varepsilon_t(x.y_1)\varepsilon_t(y_2.z), \forall x, y, z \in \mathcal{A}.$$

Définition 6.3.18. Soit $B = (\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bialgèbre faible, on définit la déformation de cette bialgèbre faible la structure de bialgèbre faible notée par :$B_t = (\mathcal{A}[[t]], m_t, \eta_t, \Delta_t, \varepsilon_t)$, la déformation de sa multiplication μ, sa unité η, sa coalgèbre Δ, sa counité ε.

Remarque 6.3.19. La déformation d'une bialgèbre faible ne donne pas automatiquement une bialgèbre faible, comme dans le cas des bialgèbre. Une étude approfondie des déformations sera faite ultérieurement.

Bibliographie

[1] A. N. Panov., *Ore Extensions of Hopf Algebras*, Mathematical Notes, vol. **74**,no.3, 2003, pp. 401–410. Translated from Matematicheskie Zametki, vol. **74**, no. 3, 2003, pp.425–434..

[2] Alonso Álvarez J. N., Fernández Vilaboa J. M. and González Rodríguez R. *Weak Hopf algebras and weak Yang-Baxter operators.* J. Algebra **320**, no. 5 (2008), 2101–2143.

[3] Alonso Álvarez J. N., Fernández Vilaboa J. M. and González Rodríguez R. *Weak braided bialgebras and weak entwining structures,* Bull. Aust. Math. Soc. **80**, no. 2 (2009), 306–316.

[4] Brouder Ch.. On the trees of quantum fields, Eur. Phys. J. C 12 (2000), pp 535-549.

[5] Brouder Ch. and Frabetti A. QED Hopf algebra on planar binary trees, Journal of Algebra 267 (2003), pp 298-322.

[6] Böhm G. and Szlachányi K., *Weak C^*-Hopf algebras and multiplicative isometries*, J. Operator Theory **45**, no. 2 (2001), 357–376.

[7] Böhm G., Nill F. and Szlachányi K., *Weak Hopf algebra I Integral theory and C^*-structure*, J. Algebra, **221** (1999), 385-438.

[8] Caenepeel S., Wang D., Yin Y., *Yetter-Drinfeld modules over weak bialgebras*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) **51** (2005), 69–98.

[9] Caenepeel S. and De Groot E., *Galois theory for weak Hopf algebras*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **52** , no. 2 (2007), 151–176.

[10] Caenepeel, S. and De Groot E., *Modules over weak entwining structures*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), 31–54, Contemp. Math., 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[11] Chebel Z. and Makhlouf A., *Sur les bialgèbre faibles et les algèbres de Hopf faibles de dimension inférieur ou égele à qutre*, Actes des journées scientifiques Algéro-Françaises en physique théorique et mathématiques. Publication de l'université de Haute Alsace. (2006), 210-218.

[12] Chebel Z. and Makhlouf A., *Kaplansky's Type Constructions for Weak bialgebras and Weak Hopf algebras*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, S1 : 008 DOI : 10.4172/1736-4337.S1-008 (2015).

[13] Chebel Z. and Makhlouf A., *Weak Hom-bialebras and weak Hom-Hopf algebras*, Bull. Math. Soc.Math. Roumanie. Tome 61 (109) No, 1, 2018, 23–38.

[14] Duplij S. and Li F., *Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation* Comm. Math. Phys., **225** (2002), 192–217

[15] Dascalescu S., Nastasescu C. and Raianu S., *Hopf algebras : an Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **235**, Marcel Dekker, 2001.

[16] Ebrahimi-Fard K. and Guo L. Rota-Baxter algebras in renormalization of perturbative quantum field theorey arXiv :hep-th/0604116)

[17] Etingof P. and Varchenko A., *Exchange dynamical Quantum groups*, Comm.Math. Phys.,**205** (1999), 19-52.

[18] Gabriel P., *Finite representation type is open*, Lect. Notes in Math. 488, Springer Verlag (1974) 132–155.

[19] Gaberdiel M. R. An algebraic approach to logarithmic conformal field theory Int. J. Mod. Phys A 18 (2003) pp 4593-4638. Hep-Th/0111260.

[20] Gerstenhaber M. On the deformations of rings and algebras, Ann. of Math 79, 84, 88 (1964, 66, 68).

[21] GerstenhaberM. and S.D. Schack Algebras, bialgebras, Quantum groups and algebraic deformations Contemporary mathematics Vol. 134, (1992).

[22] Kadison L. and Nikshych D., *Frobenius extensions and weak Hopf algebra.* J. Algebra, **244**, (2001), 312–342.

[23] Kaplansky I., *Bialgebras*, University of Chicago, 1975.

[24] Kassel C., *Quantum groups*, Graduate texts in Mathematics, vol **155**, Springer-Verlager, New York, 1995.

[25] Li, F., *Weak Hopf algebras and some new solutions of quantum Yang-Baxter equation,* J. Algebra, **208** (1998), 72–100.

[26] Mack G. and Schomerus V., *Quasi Hopf quantum symmetry in quantum theory*, Nucl. Phys. **B370** (1992)

[27] Makhlouf A., *Degeneration, rigidity and irreducible component of Hopf algebras*, Algebra Colloquium **12**(2) (2005), 241–254.

[28] Makhlouf S. and Silvestrov S., *Hom-algebra structures*, J. Gen. Lie Theory Appl. **2**(2), 51–64 (2008).

[29] Makhlouf S. and Silvestrov S., *Notes on formal deformations of Hom-associative and Hom-Lie algebras*, Forum Math. **22**(4), 715–759 (2010).

[30] Makhlouf S. and Silvestrov S., *Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras*, Published as Chapter 17, pp. 189–206, in "Generalized Lie theory in Mathematics, Physics and Beyond" (Eds. S. Silvestrov, E. Paal, V. Abramov, A. Stolin), Springer-Verlag, Berlin (2008).

[31] Makhlouf S. and Silvestrov S., *Hom-algebras and Hom-coalgebras*, J. Algebra Appl. **9**(4), 553–589 (2010).

[32] Makhlouf A. and Panaite F., *Yetter-Drinfeld modules for Hom-bialgebras*, J. Math. Phys. **55**, 013501 (2014).

[33] Mazzola G., *The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five*Manuscripta Math **27**, (1979).

[34] Montgomery S., *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics vol. **82**, American Mathematical Society, 1992.

[35] Nikshych D. and Vainerman L., *Finite Quantum groupoids and their applications*, New directions in Hopf algebras, 211-262, Math. Sci. Res. Inst Publ., **43** Cambridge University Press(2002).

[36] Nikschych D. and Vainerman L., A*algebraic versions of a finite dimensional Quantum groupoid*, Lectures Notes in Pures end Appl. Math. **209** (2000), 189-221.

[37] Nill F., *Axioms for weak bilagebras*, Math., Arxiv QA/9805104

[38] Nikshych D., *On the structure of weak Hopf algebras*, Adv. Math. **170** (2002) 257-286.

[39] Schauenburg P., *Weak Hopf algebras and quantum groupoids,* Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001), 171–188, Banach Center Publ., 61, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.

[40] Schomerus V., *Constructions of field algebras with quantum symmetry from local observables*, Comm. Math. Phys. **169** no. 1 (1995), 193–236.

[41] Vallin J.-M., *Groupoïdes quantiques finis,* J. Algebra **239**, no. 1 (2001), 215–261.

[42] Vecsernyés P., *Larson-Sweedler theorem and the role of grouplike elements in weak Hopf algebras*, J. Algebra **270**, no. 2 (2003), 471–520.

[43] Van Suijlekom W. The Hopf algebras of Feynman graphs in QED arXiv :hepth/ 0602126, (2006).

[44] Wisbauer R., *Weak corings,* J. Algebra **245** , no. 1 (2001), 123–160.

[45] Yau D., *Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras*, Int. E. J. Algebra. **8**, 45–64 (2010).

[46] Yau D., *Hom-algebras and homology*, J. Lie Theory **19**, 409–421 (2009).

[47] Zhang X. And Wang S. *Weak Hom-Hopf algebras and their (co)representations*, Journal of Geometry and Physics. Volume **94**, 50-71 (2015)

Abstract

In this thesis, we study the structure of weak bialgebras and weak Hopf algebras. These structures appeared in Physics, in particular in renormalization in quantum fields theory and q-deformations of oscillator algebras. They are generalization of bialgebras and Hopf algebras obtained by relaxing the condition that the comultiplication and the counit are algebra maps with respect to the unit element.

In this work, we provide a complete study of weak bialgebra and weak Hopf algebras structures. We recall definitions and properties. Moreover a classification in dimension 2 and 3 are given. The main results deal with Kaplansky-type constructions. Indeed we show various constructions providing weak bialgebras and weak Hopf algebras, starting by an associative algebra. A second part of this thesis is dedicated to twisted structures, which are Hom-type algebras. We introduce weak hom-bialgebras and weak Hom-Hopf algebras for which we obtain similar results. In the last part of the thesis, we explore Ore extensions and deformations of weak bialgebras and weak Hopf algebras.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 16W30.

Key words and phrases. weak bialgebra, weak Hopf algebra, construction, classification, automorphism group, Hom-associative algebra, weak Hom-bialgebra, weak Hom-Hopf algebra.

ملخص

في هذه الرسالة ، نقدم دراسة حول بنية جبرية معقدة تسمى bialgebras الضعيف وجبر Hopf الضعيف. ظهرت هذه التراكيب في القوانين الفيزيائية ، ولا سيما قوانين تشويه q وقوانين إعادة التشكيل من الديناميكا الكهربائية الكمية. في بعض الأحيان كأداة لحل الكثير من المشاكل المادية مثل حل معادلة يانغ باكستر Yang Baxter، وإعطاء فكرة حول تشوه الفضاء. نقدم دراسة تفصيلية لهياكل bialgebras الضعيفة وجيوب Hopf الضعيفة مع التعريفات التي تترافق معها ، وبالتالي توفر تركيبات من نوع Twist ومنشورات من نوع Kaplansky مقترحة بحدس خوارزمي لتكون قادرة على الحصول عليها. يتم تمييز تصنيف في أبعاد صغيرة 2 و 3. ننتهي من دراسة هذه الهياكل باستخدام لغة هومHom ، وتعميم هياكل الجبر Lie المكبر والجسور بواسونPoison.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 16W30.
Key words and phrases. weak bialgebra, weak Hopf algebra, construction, classification, automorphisms group, Hom-associative algebra, weak Hom-bialgebra, weak Hom-Hopf algebra.

Résumé

Dans cette thèse, on présente une étude de la structure des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles. Ces structures sont apparues en physique, en particulier en renormalisation dans la théorie des champs et dans les q-déformation de l'algèbre des oscillateurs. Dans ce travail, on présente une étude approfondie des bialgèbres faibles et des algèbres de Hopf faibles. On rappelle les définitions et propriétés. On a établi une classification de ces structures en dimensions 2 et 3. Les principaux résultats de la thèse concernent les constructions de type Kaplansky. On s'inspire de l'idée de Kaplansky pour construire une bialgèbre à partir d'une algèbre associative pour établir de nombreuses constructions de bialgèbres faibles et d'algèbres de Hopf faibles. Cela permet par exemple de construire une version faible des algèbres de Taft-Sweedler. Par ailleurs, on introduit les notions de Hom-bialgèbre et algèbres Hom-Hopf faible pour lesquelles des constructions analogues sont données en considérant les algèbres Hom-associatives. De plus dans ce travail nous examinons les extensions d'ore et les déformations de ces algèbres.

2000 Mathematics Subject Classification. 16W30.

Mots clef et phrases: bialgèbre faible, algèbre de Hopf faible, construction, classification, groupe d' automorphismes, algèbre Hom-associative, Hom-bialgèbre faible, algèbre Hom-Hopf faible.