

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université des Frères Mentouri Constantine 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

N° d'ordre : 3 0 / D s / 2 0 1 8

Série : 0 2 / M a t / 2 0 1 8

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences.

Thème :

L'évaluation des bornes du système hyper-chaotique de Lorenz-Haken

Option : Mathématiques Appliquées

Présentée par

Mr. DIAR AHMED

Membres du jury :

Président	Mr Deghdak Messaoud	Prof	Université Constantine 1
Rapporteur	Mr Denche Mohamed	Prof	Université Constantine 1
Examineur	Mr Ayadi Abdelhamid	Prof	Université Larbi ben M'hidi
Examineur	Mr Zehrou Okba	MCA	Université Larbi ben M'hidi

Année Universitaire 2017/2018

Remerciements

Je tiens à présenter mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé à élaborer ce travail.

J'exprime toute ma profonde reconnaissance et ma gratitude à Monsieur le Professeur Mohamed Denche de m'avoir proposé ce sujet de recherche et dirigé cette thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et mes remerciements les plus sincères.

Monsieur le professeur Messaoud Deghdak m'a honoré en acceptant de présider le jury de soutenance de cette thèse, je le remercie vivement .

Mes remerciements vont aussi à mes Professeurs : Mrs Ayadi Abdelhamid et Nasseridine Kechkar ainsi qu'à mes collègues : les professeurs Berkane Abelhak et Zehrour Okba pour le temps accordé à examiner cette thèse et de faire partie du jury de soutenance.

Enfin je ne saurais oublier l'aide et l'encouragement de mes chers collègues du département de Mathématiques, qu'ils en soient tous remerciés. Un remerciement particulier à messieurs Bragdi Mabrouk et Bessila Khaled.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

À la mémoire de ma très chère mère

À mon très cher père

À ma très chère épouse

À mes enfants Omar, Anes, Mohamed Idriss

et à toute ma famille.

Table des matières

1	Systèmes Dynamiques	4
1.1	Introduction générale	4
1.2	Systèmes dynamiques chaotiques.	5
1.2.1	Représentations mathématiques des systèmes dynamiques	5
1.2.2	Espace des phases	6
1.2.3	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	7
1.3	Systèmes Dynamiques Continus	7
1.3.1	Points fixes :	7
1.3.2	Points limites :	8
1.3.3	Attracteurs et bassin d'attraction	8
1.3.4	Etude qualitative des systèmes dynamiques	10
1.3.5	Classification des points fixes	11
1.3.6	Etude de la stabilité	12
1.3.7	Bifurcations	16
1.4	Systèmes dynamiques discrets	20
1.4.1	Systèmes dynamiques discrets	20
1.4.2	Orbites ou trajectoires	21
1.4.3	Points fixes	21
1.4.4	Points périodiques et p-cycles	21
1.4.5	Etude de la stabilité	22
1.4.6	Bifurcations	24

2	Théorie du chaos	26
2.1	Caractéristiques du chaos	26
2.1.1	Routes vers le chaos	28
2.2	Système de Lorenz	29
3	Modèle mathématique d'un type de système financier.	34
3.1	Introduction	34
3.2	Préliminaires	35
3.3	Bornes absolues du sytème financier	37
3.4	Le système financier complexe	42
3.5	La Bornitude ultime du système financier complexe	44
4	Evaluation des bornes du système hyper-chaotique de Lorenz-Haken	50
4.1	Introduction	50
4.2	Evaluation des bornes du système hyperchaotique de Lorenz-Haken	51
4.3	Conclusion	56

Chapitre 1

Systemes Dynamiques

Ce chapitre est consacré à des rappels mathématiques concernant les systèmes dynamiques chaotiques qui seront utilisés de près ou de loin dans cette thèse.

1.1 Introduction générale

L'estimation de la borne supérieure d'un système chaotique est assez difficile à réaliser techniquement. La bornitude des systèmes dynamiques à temps continu, en particulier les systèmes quadratiques 4-D ont fait l'objet de nombreux travaux[7,9,11,18]. En fait, la bornitude du système de Lorenz et la bornitude du système de Chen[20,21] ont fait l'objet de plusieurs études. Récemment, une meilleure borne supérieure pour le système de Lorenz pour toutes les valeurs positives des paramètres a été établie et a donné de bons résultats dans la littérature actuelle, car l'estimation surmonte quelques problèmes liés à l'existence de singularités découlant de la valeur de la borne supérieure, et l'étude des systèmes dynamiques hyper-chaotiques ont attiré l'attention de nombreux ingénieurs, physiciens et mathématiciens. Une grande quantité de littérature développée sur les solutions bornées des systèmes dynamiques de quatre dimensions existe.

Un système chaotique est borné, en ce sens que son attracteur chaotique est borné dans l'espace des phases et l'estimation de sa borne est importante dans le contrôle du chaos, la

synchronisation du chaos et de leurs applications.

1.2 Systèmes dynamiques chaotiques.

La définition qui suit est utilisée en littérature mathématiques, physique et en ingénierie.

Définition 1 *Un système dynamique est un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :*

- *Causale (c.à.d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent)*
- *Déterministe (c.à.d qu'à une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "un et un seul état futur" possible).*

Finalement, un système dynamique peut être défini de la façon suivante :

Définition 2 *On définit un système dynamique par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'états X , du domaine temporel T et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.*

1.2.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles, généralement exprimées sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus ou flots car les points du système évoluent en "flottant" sur des courbes continues.

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : variables dynamiques et variables statiques. Les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, et les variables statiques, encore appelées paramètres du système, sont fixes.

- Dans le cas où la composante "temps" est continue le système dynamique est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

- Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est représenté par une application itérative.

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

où p est un paramètre et $t \in T$ le domaine temporel.

Lorsque le temps t ou l'indice k apparaissent explicitement dans les relations (1.1) et (1.2) le système est dit non-autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.

Remarque : Par un changement de variables, on peut transformer un système non-autonome avec $X \in \mathbb{R}^n$ en un système autonome avec $X \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1.2.2 Espace des phases

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace des phases.

L'espace des phases est fondamental, on le retrouve au coeur de la formulation de la mécanique quantique et de la mécanique statistique.

Cet espace a été introduit, initialement dans les problèmes de la mécanique céleste, pour décrire de manière unifiée les équations de la mécanique des points matériels dans un potentiel et les trajectoires des rayons lumineux dans des milieux non homogènes d'indices variables.

Schrödinger en fera l'usage pour construire la mécanique ondulatoire. De même, Poincaré utilisera cet espace pour introduire des raisonnements géométriques en mécanique céleste et pour étudier le problème des trois corps. Ses travaux seront à la base de la théorie du chaos.

Ainsi pour décrire l'évolution d'un système dynamique, il est souvent commode d'en faire une représentation géométrique. A chaque état du système dynamique est associé un vecteur \vec{x} . Suivre la dynamique du système correspond à observer l'évolution du vecteur \vec{x} dans un espace vectoriel E appelé espace des phases. Cette évolution est décrite par n équations différentielles munies de conditions initiales. L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace des phases, traçant ainsi une trajectoire de phase.

1.2.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement. Par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système est déterministe, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\begin{aligned}\phi & : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \\ (x, t) & \rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t)\end{aligned}$$

qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0) & = x_0 \\ \phi_{t+s}(x_0) & = \phi_t(\phi_s(x_0)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système (voir p10).

1.3 Systèmes Dynamiques Continus

1.3.1 Points fixes :

Un point fixe (ou critique, singulier, d'équilibre ou stationnaire) de l'équation $\dot{x} = F(x)$ est un point \bar{x} de l'espace des phases vérifiant $F(\bar{x}) = 0$ où F est une application $C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}^n$.

Par un changement de variable $z = x - \bar{x}$ on peut ramener le point fixe à l'origine 0.

1.3.2 Points limites :

Un point $a \in I$ est un point ω -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $(t_n)_n$; $t_n \rightarrow +\infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n}(x_0) = a$$

où φ_t est le flot du système $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(I)$, $I \subset \mathbb{R}^n$ et $x(x_0, t)$ est une solution de ce système avec $x(0) = x_0$.

De même, un point $b \in I$ est un point α -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $(t_n)_n$; $t_n \rightarrow -\infty$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi_{t_n}(x_0) = b$$

L'ensemble des points α -limite (resp. ω -limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp. $\omega(x)$) et on définit l'ensemble limite de $x(x_0; t)$ par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x)$$

1.3.3 Attracteurs et bassin d'attraction

Ensemble invariant

Un ensemble $M \subset I$ est dit invariant par un champs de vecteur si toute solution $x(t)$ du système différentiel associée au champs de vecteurs issue de M vérifie $x(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.

Attracteurs

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lequel évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ reste dans U si $x_0 \in V$.

- $\cap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.

- Il existe une orbite dense dans A .

Un attracteur A possède les propriétés suivantes :

1) C'est un sous ensemble borné A de l'espace, de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .

2) Il existe un ensemble B ($A \subset B$), tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Cette "zone d'influence" est dite bassin d'attraction, c'est l'ensemble :

$$W = \cup \varphi_t(V), t < 0$$

3) Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

Différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, qui peuvent être de trois sortes :

- **Un point fixe** : C'est le plus simple attracteur, car le système évolue vers un état de repos (point).

- **Un cycle limite périodique** : Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes. Dans un système physique dissipatif, cela exige la présence d'un terme de forçage dans les équations qui vient compenser en moyenne les pertes par dissipation.

- **Un cycle limite pseudo-périodique** : C'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).

2-Attracteurs étranges

Il s'agit d'ensembles compacts dans l'espace des phases dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques. Leur caractéristique essentielle est la sensibilité aux conditions initiales : SCI (les trajectoires issues des conditions initiales proches s'écartent exponentiellement). La coexistence de l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la SCI, qui implique leur écartement, s'explique par le concept d'hyperbolicité de l'attracteur : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes est appelée variété stable. Leur dimension est non entière et leur structure est fractale. Par exemple, l'attracteur de Rössler, l'attracteur de Lorenz, l'attracteur de Chen et l'attracteur de Chua sont tous des attracteurs chaotiques.

1.3.4 Etude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative d'une équation différentielle permet de s'affranchir de la détermination explicite de la solution et consiste à analyser le comportement des solutions particulièrement au voisinage des points d'équilibres.

Linéarisation des systèmes dynamiques :

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$x' = F(x), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

et soit x_0 un point fixe (d'équilibre) de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point fixe. La fonction F peut être développée en série de Taylor au voisinage du point x_0 à l'ordre 1 comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}_0 = F(x_0 + \varepsilon(t)) \simeq F(x_0) + J_F(x_0)\varepsilon(t) \quad (1.4)$$

où $J_F(x_0)$ est la matrice Jacobienne de la fonction F définie par :

$$J_F(x_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_0} \quad (1.5)$$

Comme $F(x_0) = 0$, alors l'équation (1.4) redevient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_F(x_0)\varepsilon(t) \quad (1.6)$$

L'écriture (1.6) signifie que le système (1.3) est linéarisé.

Théorème de Hartmann-Grobman

Considérons le système dynamique (1.3). Soient x_0 un point d'équilibre du système (1.3) et $J_F(x_0)$ la matrice Jacobienne au point x_0 , alors on a le théorème de Hartman-Grobman :

Théorème :

Si $J_F(x_0)$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage U de x_0 .

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.3) à la dynamique du système linéarisé (1.6).

1.3.5 Classification des points fixes

Il s'agit de distinguer ces points fixes par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.5) du système linéarisé (1.6) associé au système différentiel initial (1.3) en ce point. Pour cette raison, on va supposer que les valeurs propres de la matrice (1.5) sont définies par :

$$\lambda_i = \omega_i + j\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

- Lorsque $\omega_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ le point fixe est dit hyperbolique. La solution $y(t)$ du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} V^i$$

où V^i représente le vecteur propre associé à λ_i et $C_i \in \mathbb{R}$, dépendent des conditions initiales. Donc les valeurs propres λ_i définissent l'état de stabilité, et on va citer les natures de ces points fixes suivant les valeurs des λ_i .

1- Si $\omega_i < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, le point fixe est asymptotiquement stable : $\lim y(t) = 0, t \rightarrow +\infty$. On dit que le point fixe est un "puit" (foyer) si $\sigma_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, un "noeud" si $\sigma_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

2- Si $\omega_i > 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, le point fixe est instable. On dit que le point est une "source" si $\sigma_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et un "noeud" si $\sigma_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

3- Si $\omega_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, p$, avec $p < n$ et $\omega_i < 0$ pour $i \neq j$, la solution est instable et le point est un "col". S'il n'y a pas de valeurs propres nulles, on a un point "selle".

1.3.6 Etude de la stabilité

Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1.7}$$

où f est une fonction non linéaire.

Le point d'équilibre x_0 du système (1.7) est :

- Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \tag{1.8}$$

- Asymptotiquement stable si :

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0$$

- Exponentiellement stable s'il est asymptotiquement stable et :

$$\exists \varepsilon, \beta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon \|x(t_0) - x\| \exp(-\beta t), \forall t \geq t_0$$

- Instable si l'équation (1.8) n'est pas satisfaite.

Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x_0 du système (1.7). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x_0 s'expriment comme suit :o

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x_0 est exponentiellement stable.

- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x_0 est instable.

Remarque :

Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice jacobienne, et la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode de Lyapunov.

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

Le point d'équilibre x_0 du système (1.7) est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable ayant les propriétés suivantes :

- 1) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x_0 \in D$:
- 2) $V(x) > V(x_0), \forall x \neq x_0$ dans D .
- 3) $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq x_0$ dans D .

Si de plus pour $x \neq x_0, \dot{V}(x) < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x_0 , tendent vers x_0 (on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable), mais si $\dot{V}(x) > 0$ pour $x \neq x_0$ alors x_0 est instable.

Il n'y a aucune méthode pour construire une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

Théorème de la variété centrale

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \tag{1.9}$$

un système dynamique non linéaire, x_0 son point d'équilibre qu'on peut ramener à l'origine par le changement de variable :

$$\xi = x - x_0$$

et soit J la matrice jacobienne d'ordre n associée au système (1.9) après sa linéarisation au

voisinage du point fixe (après avoir considéré une petite perturbation au voisinage du point fixe).

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi$$

Soient :

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de la matrice jacobienne J dont la partie réelle est négative.

u_1, u_2, \dots, u_i les valeurs propres de la matrice J dont la partie réelle est positive.

s_1, s_2, \dots, s_c les valeurs propres dont la partie réelle est nulle, avec $s + i + c = n$.

Et soient :

E^s le sous espace vectoriel de dimension s engendré par $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

E^i le sous espace vectoriel de dimension i engendré par $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$.

E^c le sous espace vectoriel de dimension c engendré par $\{s_1, s_2, \dots, s_c\}$.

avec

$$E^s \oplus E^i \oplus E^c = E^n$$

On a le théorème suivant :

Théorème :

Il existe des variétés de classe C^r : stable W^s , instable W^i et centrale W^c tangentes respectivement à E^s , E^i et E^c en x_0 . Ces variétés sont invariantes, par rapport au flot du système (1.9).

Variété centrale dépendant d'un paramètre

On applique "une petite perturbation " sur le système (1.9), donc le résultat sera un système dynamique dépendant d'un paramètre et supposons que par une certaine transformation on peut ramener le système (1.9) à un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = A_1x + f(x, y, z, \varepsilon) \\ y' = A_2y + g(x, y, z, \varepsilon) \\ z' = A_3 + m(x, y, z, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La variété centrale au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ est alors donnée par :

$$y = h_1(x, \varepsilon), z = h_2(x, \varepsilon)$$

Après un simple calcul, et après avoir appliqué le développement de Taylor sur h_1 et h_2 , on peut alors écrire le système (1.10) sous la forme :

$$\begin{cases} x' = A_1x + f(x, h_1(x, \varepsilon), h_2(x, \varepsilon), \varepsilon) \\ \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique du système (1.11) à celle du système (1.10).

Si l'origine $x_0 = 0$, du système (1.10) est asymptotiquement stable (resp instable), alors l'origine du système (1.10) est aussi asymptotiquement stable (resp instable).

1.3.7 Bifurcations

Les changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant des paramètres sont appelés bifurcations. Pour les systèmes continus dérivant d'un potentiel, le mathématicien René Thom emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a connu une grande importance. Pour les valeurs des paramètres pour lesquels de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation et la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. L'étude des bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret repose sur la théorie de Landau et en s'appuyant sur le diagramme de bifurcation, sur la méthode de la sous-variété centrale qui permet d'isoler la partie non hyperbolique, dite centrale du système, et sur

la méthode des formes normales de Poincaré où ne subsistent que les vraies non linéarités, c'est à dire celles que l'on ne peut pas faire disparaître par changement régulier de coordonnées.

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.12)$$

où $x \in I \subset \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k, f \in C^r$.

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution du système (1.12) lorsqu'on modifie le paramètre μ et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.

Les bifurcations de codimension sont de quatre types qui correspondent toutes à des comportements génériques.

Bifurcation noeud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre est le polynôme quadratique $f(x) = \mu - x^2$.

Considérons le système (1.12), et prenons pour f la fonction :

$$f(x) = \mu - x^2 \quad (1.13)$$

nous appelons la fonction (1.13) la forme normale de la bifurcation noeud-col. Etudions le comportement de l'équation (1.13), les points fixes de cette dernière sont :

$$\tilde{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$$

qui existent seulement pour $\mu > 0$, leur stabilité est déterminée par :

$$f'(\tilde{x}_{\pm}) = -2\tilde{x}_{\pm} = -2(\pm\sqrt{\mu}) = (\pm\sqrt{\mu})$$

selon les signes de $f'(\tilde{x})$, on voit que $\bar{x}_+ = \sqrt{\mu}$ est stable, tandis que $\bar{x}_- = -\sqrt{\mu}$ est instable.

Si $\mu < 0$, l'équation (1.13) n'admet pas de solution et donc pas de point fixe.

Si $\mu = 0$ le seul point fixe est le point $x = 0$ et par une intégration de l'équation (1.13), on

trouve $x(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{x_0}} \Rightarrow x = 0$ est semi-stable (stable à droite et instable à gauche).

Bifurcation fourche

Si on peut réduire $f(x, \mu)$ à un polynôme cubique de l'un de ces quatre cas :

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &= \mu x - x^3 \\ f(x, \mu) &= \mu x + x^3 \\ f(x, \mu) &= -\mu x + x^3 \\ f(x, \mu) &= -\mu x - x^3 \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'équation (1.14) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique.

Ses points fixes sont :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \text{ pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} \text{ pour } \mu > 0 \end{cases}$$

Stabilité de ces points fixes :

$$f'(\bar{x}) = \mu - 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu \text{ pour } \bar{x} = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu \text{ pour } \bar{x} = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \tag{1.15}$$

Le point fixe $\bar{x} = 0$ est donc stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les nouveaux points fixes $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ sont créés. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent (i.e pour $\mu > 0$).

Pour (1.15) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche souscritique, le même calcul conduit à :

$$\bar{x}(\mu + \bar{x}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \text{ pour tout } \mu \\ \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} \text{ pour } \mu < 0 \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = \mu + 3\bar{x}^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } \bar{x} = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe $\bar{x} = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$.

Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes $\pm\sqrt{-\mu}$ existent dans la région où $\bar{x} = 0$ est stable, et sont toujours instables.

Bifurcation transcritique

Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique.

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

L'analyse usuelle donne :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \mu \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = \mu - 2\bar{x} = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ -\mu & \text{pour } \bar{x} = \mu \end{cases}$$

Donc $\bar{x} = 0$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$, tandis que $\bar{x} = \mu$ fait le contraire, ces points fixes échangent simplement leur stabilité.

Bifurcation de Hopf

Contrairement aux bifurcations précédentes qui conduisent à des solutions stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes ; l'espace des phases a maintenant deux composantes et s'écrit dans le plan complexe.

$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - |Z|^2 Z$$

En posant $\mu = \mu_r + i\mu_I$ et $Z = X e^{i\theta}$, on obtient alors $|Z| = X$ et

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu_r X - X^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_I \end{cases}$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse μ_I . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf peut être également sous critique si le coefficient du terme $|Z|^2 Z$ est de signe positif, il faut alors un terme négatif en $|Z|^4 Z$ afin obtenir une saturation non-linéaire.

Selon Landau[16] la bifurcation d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constitue les premières étapes de la transition vers la turbulence, et le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dits chaotiques, et ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y'ait de l'équilibre dans le déséquilibre, et de l'organisation dans la désorganisation.

1.4 Systèmes dynamiques discrets

1.4.1 Systèmes dynamiques discrets

Soit $f : D \rightarrow D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ une application continue (ou une transformation), f^k désigne la k^{ieme} itérée de f , c'est-à-dire :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

Dans la pratique $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots$ représentent les valeurs d'une certaine quantité aux temps $0, 1, 2, \dots$

Ainsi la valeur de la quantité au temps $k + 1$ est fonction de sa valeur au temps k .

L'application f est appelée un système dynamique discret.

1.4.2 Orbites ou trajectoires

L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_f^+ = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par :

$$O_f = \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

ainsi que l'orbite négative :

$$O_f^- = \{f^{-k}(x), k \in \mathbb{N}\}$$

1.4.3 Points fixes

Un point $x \in D$ est un point fixe d'ordre k de f si :

$$f^k(x) = x, k = 1, 2, 3, \dots$$

Si de plus la matrice jacobienne $Df(x)$ n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à un, x est un point fixe hyperbolique. Si tous les modules des valeurs propres de $Df(x)$ sont égaux à un, x est point fixe elliptique.

1.4.4 Points périodiques et p -cycles

S'il existe $n \geq 1$, tel que $f^n(x) = x$, on dit que x est un point périodique. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que :

$$f^n(x) = x$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$f(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p-1, \text{ et } f(x_{p-1}) = x_0$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p , où $f^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$, n'est pas un point fixe pour f^k si $k < p$.

1.4.5 Etude de la stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

Maintenant on va étudier la stabilité des points fixes.

Stabilité des points fixes :

- Un sous ensemble A de D est invariant par f si $f(A) = A$.
- Un sous ensemble compact A de D est attractif ou est un attracteur si A est invariant par f , et s'il existe un voisinage V de A tel que pour $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une suite qui converge vers A . Le voisinage V est appelé le bassin d'attraction de A et on a :

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V)$$

- Le sous ensemble A est répulsif ou instable s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de façon équivalente : si A est un attracteur pour f^{-1}).

- Un attracteur A est fractal (ou un attracteur étrange) si l'orbite de x est dense dans A pour tout $x \in A$ et est sensible aux conditions initiales.

L'attracteur le plus simple est le point fixe, il peut être attractif ou répulsif.

Définition :

Un point fixe $\bar{x} \in D$ de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est stable, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x_0 - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \forall k \geq 0, |x_k - \bar{x}| < \varepsilon$$

La stabilité du point fixe est déterminée par la pente $m = f'(\bar{x})$ de la tangente au point fixe \bar{x} à la courbe représentant f . Nous avons les quatre cas suivants :

Définitions :

- 1) le point fixe est attractif (ou stable) si $|m| < 1$.

- 2) le point fixe est répulsif (ou instable) si $|m| > 1$.
- 3) le point fixe est indifférent si $|m| = 1$.
- 4) le point fixe est super attractif (ou super stable) si $m = 0$.

m s'appelle le multiplicateur de f au point \bar{x} .

En dimension n , pour décider si un point fixe \bar{x} est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x) = J(x)$. Plus précisément si toutes les valeurs propres de $Df(x) = J(x)$ sont à l'intérieur du disque unité, x est stable. Si au moins une de ces valeurs propres a un module plus grand que un, x est instable.

Stabilité des points périodiques :

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur. Comme les points périodiques d'ordre p sont des points fixes de f^p , alors le théorème suivant est une généralisation du théorème précédent .

Théorème :

Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p : Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable ; si une des valeurs propres a un module plus grand que 1, le cycle est instable.

En dimension un, si $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est un cycle d'ordre p ; les dérivées $(f^p)'(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ sont égales. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_0) = f'(f(\dots f(x_0))) \dots f'(f(x_0)) f'(x_0) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$$

et comme $f(x_i) = x_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p - 2$ et $f(x_{p-1}) = x_0$, on peut déduire que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$:

$$m_p = (f^p)'(x_0) = \dots = (f^p)'(x_{p-1})$$

Cette valeur commune m_p est appelée le multiplicateur du cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$, cette dernière détermine le type du cycle.

Théorème :

Pour $f : R \rightarrow R$, le cycle $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ est :

1-Attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$.

- 2-Répulsif si $|m_p| > 1$.
- 3-Indifférent si $|m_p| = 1$.
- 4-Super-attractif (ou super stable) si $m_p = 0$.

1.4.6 Bifurcations

Ce type de système dynamique possède trois types de bifurcations à un paramètre : doublement de période, noeud-col et Neimark-Sacker.

1- lorsqu' une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre) dans le cercle unité à -1 , on a alors une bifurcation fourche (ou doublement de période, ou flip).

2- lorsqu' une valeur propre réelle de $Df(x)$ quitte (ou rentre) dans le cercle unité à $+1$, on a alors une bifurcation noeud-col (ou tangente, ou pli).

3- lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(x)$ quittent (ou rentrent dans) le cercle unité simultanément à $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$, on a alors une bifurcation de Neimark-Sacker.

Section de Poincaré :

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques.

Considérons le système autonome d'ordre n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

Soit une trajectoire représentant la solution du système (1.16) muni de la condition initiale $x(0) = x_0$.

Le système (1.16) n'ayant généralement pas de solution analytique, on doit étudier chaque solution en considérant sa trajectoire dans l'espace des phases que l'on peut obtenir par une intégration numérique, mais la dimension élevée de l'espace complique cette étude. C'est pour cela que la section de Poincaré est intéressante, car elle transforme un système continu en un système discret.

La méthode de Poincaré permet simultanément de discrétiser le système et de réduire sa dimension en conservant les mêmes propriétés topologiques, plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension n par celle de la suite des points d'intersections successives p_0, p_1, \dots d'une trajectoire $\phi(t, x_0)$ avec un

hyperplan Σ_p de dimension $(n - 1)$ ce dernier peut être quelconque. Mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan Σ_p est appelé la section de Poincaré.

On note par π la transformation qui conduit un point au point suivant sur la section, π est une application continue de Σ_p dans lui-même.

On a pour une trajectoire quelconque, la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \pi(p_k), k > 0$$

Pour une solution périodique $x(t, x_0, t_0) = \phi_t(x_0)$ de période T :

$$\phi_{t+T}(x_0) = \phi(x_0)$$

du système (1.16) la transformation est équivalente à l'identité puisque la trajectoire se renferme sur elle-même. p^* est alors un point fixe de l'application π , soit :

$$p_0^* = \pi(p_0^*) = \pi(\pi(p_0^*)) = \dots$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_p &\rightarrow \Sigma_p \\ x &\rightarrow \pi(x) = \phi_T(x) \end{aligned}$$

où la période T représente le temps nécessaire pour atteindre la section. L'application π est appelée application de Poincaré.

Chapitre 2

Théorie du chaos

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions sur la théorie du chaos dans les systèmes dynamiques (système de Lorenz), pour plus de détails voir[17]

2.1 Caractéristiques du chaos

1- **Sensibilité aux conditions initiales** : Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz, du MIT, qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère.

Après avoir modélisé, par des relations de thermodynamique et de mécanique des fluides, le mouvement des masses d'air, il programmait son ordinateur de façon à obtenir une simulation numérique. À l'époque, cela prenait beaucoup de temps. Un jour de l'hiver 1961, pour ne pas recommencer les calculs depuis le début, il décida de reprendre son listing et de rentrer en tant que conditions initiales des valeurs prises au cours de la simulation de la veille. L'ordinateur (un Royal McBee LGP-300 [64]) lui donnait une précision à 6 chiffres, cependant 3 chiffres significatifs lui semblaient largement suffisants pour ce genre de mesures physiques. Comme tout scientifique, Lorenz était convaincu que de petites incertitudes au départ ne peuvent engendrer que de petites incertitudes à l'arrivée. Il tronqua donc ces nombres et reprit le calcul.

Les résultats qui suivirent furent le "délic". Dans un premier temps, la simulation semblait redonner les mêmes valeurs, mais au bout d'un moment rien ne concordait, tout se passait

comme si le mouvement représenté par ces valeurs changeait complètement de trajectoire et ce, à cause d'une approximation de l'ordre de 10^{-4} !. E. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes.

Pour un système chaotique, une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial x_0 dans l'espace des phases va se trouver (presque toujours) rapidement amplifiée. D'un point de vue mathématique, on dit que $f : I \rightarrow I$ montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in I, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in I : |x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \varepsilon$$

2- Attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'opérations d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétés un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est infinie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Alors on peut donner cette définition.

Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et inclus dans R vérifiant les propriétés suivantes :

- Attraction : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.
- Il est inclus dans un espace fini, avec un volume nul. Sa dimension est fractale (non entière).
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.
- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

3- Spectre de puissance

Une façon simple de caractériser le chaos consiste à calculer le spectre de Fourier de l'évo-

lution temporelle d'une des variables du système. Lorsque le système est intégrable c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace de phases, ce système est dit intégrable, les trajectoires étant la composition de mouvements d'oscillation ayant chacun une pulsation w_i .

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalle régulier, c'est ce qu'on appelle la série temporelle.

2.1.1 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle "bifurcations". Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

1- L'intermittence vers le chaos : un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

2- Le doublement de période : qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

3- La quasi-périodicité : qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasipériodique.

2.2 Système de Lorenz

Le système donné par Lorenz [19] est l'exemple le plus simple de type Lorenz :

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = -bz + xy \end{cases} \quad \sigma > 0, r > 0 \text{ et } b > 0. \quad (2.1)$$

qui présente le premier cas connu d'un attracteur étrange qui n'est pas hyperbolique [Lorenz (1963)].

Evidemment ce système possède deux non linéarités, les termes quadratiques xy et xz .

Nous rappelons ici quelques propriétés essentielles du système de Lorenz.

Propriétés simples du système de Lorenz

Symétrie

Il y'a une importante symétrie dans les équations de Lorenz. Si on fait le changement

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ dans le système (2.1), le système reste inchangé. Par conséquent, si $(x(t), y(t), z(t))$ est une solution, alors $(-x(t), -y(t), z(t))$ l'est aussi. En d'autres termes, toutes les solutions sont soit symétriques elles mêmes ou bien possèdent un partner symétrique.

Contraction des volumes

Le système de Lorenz est dissipatif : Dans l'espace des phases les volumes se contractent sous l'effet du flot.

Points fixes

Le système de Lorenz possède deux types de points fixes. L'origine $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ qui est un point fixe pour toutes les valeurs des paramètres σ, r et b . Pour $r > 1$ on a aussi deux paires de points fixes symétriques : $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$. Lorenz les nota C^+ et C^- . Quand $r \rightarrow 1^+$, C^+ et C^- se fusionnent avec l'origine dans une bifurcation de type pitchfork.

Stabilité linéaire de l'origine

La linéarisation à l'origine est donnée par

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y \\ z' = -bz \end{cases}$$

l'équation en z est découplée est montre alors que $z(t) \rightarrow 0$ exponentiellement. Les deux autres directions sont gouvernées par le système :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

dont la trace est $\tau = -\sigma - 1 < 0$ et le determinant est $\Delta = \sigma(1 - r)$.

si $r > 1$ l'origine est un point selle car $\Delta < 0$.

Si $r < 1$ toutes les directions sont dirigées vers l'origine est dans ce cas l'origine est un puit.

Plus précisément, comme $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$

alors l'origine est un noeud stable pour $r < 1$.

Stabilité globale de l'origine :

En réalité, pour $r < 1$, on peut montrer que toute trajectoire s'approche de l'origine quand $t \rightarrow \infty$; l'origine est donc globalement stable et par conséquent il n'y a pas de cycle limite ni de chaos quand $r < 1$.

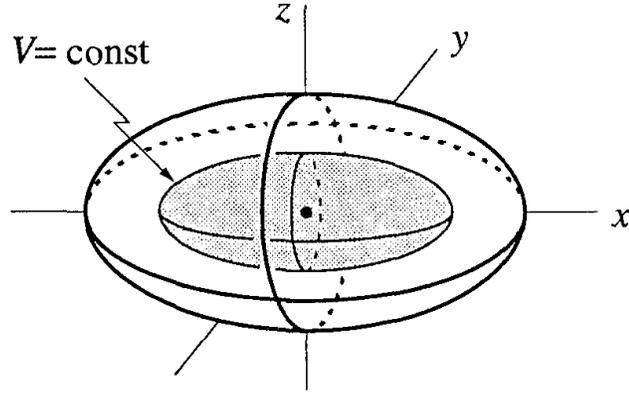
Pour prouver ce résultat on passe par la construction d'une fonction de Lyapunov, une fonction définie positive décroissante le long des trajectoires. Notons qu'il n'y'a pas de méthode générale permettant la construction d'une telle fonction.

Considérons $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$. Les surfaces où V est constante sont des ellipsoïdes concentriques de centre l'origine $O(0, 0, 0)$.

L'idée est de montrer que si $r < 0$ et $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, alors $V' < 0$ le long des trajectoires. Ceci implique que les trajectoires pénètrent dans des ellipsoïdes de plus en plus petits quand $t \rightarrow \infty$. Comme V est minorée par 0, alors $V(x(t)) \rightarrow 0$ et donc aussi $x(t) \rightarrow 0$ comme prévu.

On a

$$\frac{1}{2}V' = \frac{1}{\sigma}xx' + yy' + zz' = (xy - x^2) + (rxy - y^2 - xyz) + (xyz - bz^2)$$



$$\begin{aligned}
 &= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2 \\
 &= -\left[x - \frac{r+1}{2}y\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right]y^2 - bz^2
 \end{aligned}$$

On voit alors que le second membre est strictement négatif si $r < 0$ et $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Le résultat est $V' = 0$ implique $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et $V' \neq 0$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ce qui veut dire que l'origine est globalement stable pour $r < 1$.

Stabilité de C^+ et C^-

Supposons $r > 1$, alors C^+ et C^- existent et il s'avère qu'elles sont linéairement stables pour :

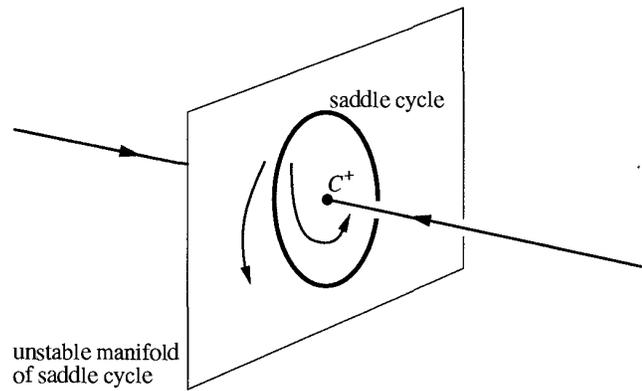
$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

(en supposant aussi que $\sigma - b - 1 > 0$). On a utilisé la lettre H car C^+ et C^- perdent leurs stabilités dans une bifurcation du type Hopf pour $r = r_H$.

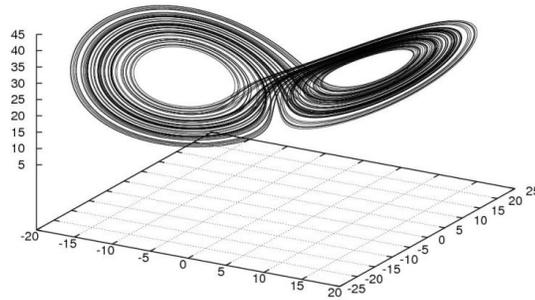
Immédiatement après la bifurcation, pour r légèrement plus grand que r_H , on peut supposer que C^+ et C^- seraient chacune entourées par un petit cycle limite stable. Cela se produirait dans la bifurcation de Hopf qui était supercritique. Mais dans notre cas elle est sous critique (les cycles limites sont instables et existent uniquement pour $r < r_H$). Voir Mardsen and McCracken[15] ou bien Drazin[16].

La figure ci-après donne une idée intuitive du portrait de phase au voisinage de C^+ .

Le point fixe est stable et est encerclé par un cycle-selle, un nouveau type de cycle limite instable qui est possible uniquement dans l'espace de phase de trois dimensions ou plus. Le cycle possède une variété instable à deux dimensions et une variété stable à deux dimensions. Quand



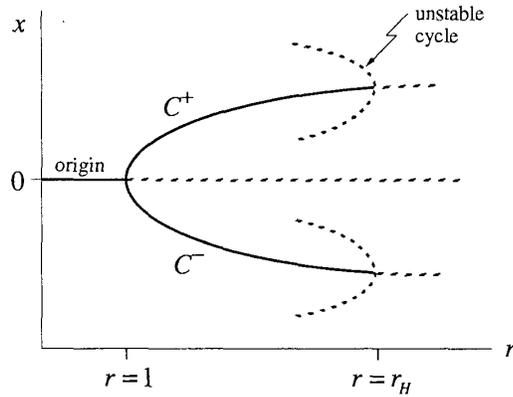
attracteur de Lorenz



$r \rightarrow r_H$ par valeurs inférieures, le cycle se rétrécit autour du point fixe. Dans la bifurcation de Hopf, le point fixe absorbe le cycle-selle et change en un point selle. Pour $r > r_H$ il n'y a pas d'attracteurs dans le voisinage.

Donc pour $r > r_H$ les trajectoires doivent s'envoler vers un attracteur lointain. On peut montrer que toutes les trajectoires entrent et restent dans un certain ellipsoïde. Peut-il y avoir des cycles limites stables que nous ignorons ?.

Lorenz a donné un argument persuasif selon lequel pour un r un peu plus grand que r_H , tous les cycles limites devraient être instables. Les trajectoires sont repoussées d'un objet instable après un autre et en même temps elles sont confinées dans un ensemble borné de volume nul. Pourtant elles parviennent à se déplacer sur cet ensemble sans se croiser.



Pour toutes les variations suffisamment petites des paramètres $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ et $r = 28$ où le système (2.1) a un attracteur chaotique, dans lequel les orbites périodiques et homoclines sont partout denses et structurellement instables.

Généralement, pour $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, le système de Lorenz affiche les attracteurs suivantes :

Pour $r \in]0, 1]$, le point $(0, 0, 0)$ est un point d'équilibre.

Pour $r \in [1, 13.93]$ les deux autres points d'équilibres sont symétriques et l'origine est instable.

Pour $r \in [13.93, 24.06]$ il y'a un passage au chaos, c'est à dire il y'a des orbites chaotiques, mais pas d'attracteurs chaotiques.

Pour $r \in [24.06, 24.74]$ il existe un attracteur chaotique attirant les deux équilibres symétriques.

Pour $r \in [24.74, ?]$ il existe un attracteur chaotique, mais les deux équilibres symétriques ne sont plus attirant. Les équations (2.1) se sont révélés être très résistantes à l'analyse rigoureuse et aussi des obstacles à l'étude numérique.

Chapitre 3

Modèle mathématique d'un type de système financier.

3.1 Introduction

Lors de l'utilisation de la méthode de la dynamique systématique pour créer et tester un modèle financier composé des parties du produit, de l'argent, et de la main-d'œuvre, on a constaté que certains comportements à long terme que le modèle fournit ont une irrégularité et une sensibilité extrême par rapport aux valeurs initiales de l'état et des changements de paramètres.

L'apparition de ces propriétés n'est pas entièrement causée par l'effet du circuit principal, il est donc nécessaire de faire une étude plus approfondie dans les raisons et le mécanisme de l'aspect structurel de ce type de modèle de comportement chaotique.

Pour résoudre le problème facilement, la partie clé du modèle a été simplifiée. Grâce à une analyse minutieuse et à de nombreuses expériences, il est décidé d'utiliser la variable x pour représenter le taux d'intérêt dans le modèle précédent, la variable y pour représenter la demande d'investissement, la variable z pour représenter l'exposant des prix.

La sensibilité étant concernée dans le problème discuté, les trois variables ci-dessus dont l'évolution des taux par rapport au temps sont des nouvelles variables d'état, à savoir : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$. Par conséquent, en choisissant un système de coordonnées approprié et en

définissant une variable appropriée à chaque variable d'état, nous pouvons obtenir le modèle plus simplifié suivant (voir [1-2]) avec seulement trois paramètres ; les plus importants : x, y, z qui emploie le modèle de groupe d'équations différentielles dans le système financier chaotique. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a \geq 0$ est le montant d'épargne, $b \geq 0$ est le coût par investissement et $c \geq 0$ est l'élasticité de la demande des marchés commerciaux. Ce système a été étudié dans [1-2] pour déterminer la structure topologique locale et les bifurcations. L'estimation des bornes d'un système chaotique est en général un travail difficile mais intéressant, voir [4-11]. Les limites absolues du système chaotique jouent un rôle important dans le contrôle du chaos, la synchronisation du chaos et dans d'autres applications. Si on peut montrer qu'un système chaotique ou hyperchaotique admet un ensemble attracteur globale, alors le système ne possède pas d'attracteur caché en dehors de l'ensemble attracteur globale. Depuis que Fowler et al [3] ont introduit les équations de Lorenz complexes, plusieurs systèmes chaotiques complexes ont été proposés et étudiés au cours des dernières décennies. Par exemple, Mahmoud et al. voir [12] ont introduit les systèmes chaotiques complexes de Chen et al [1-2].

Le travail de ce chapitre se situe dans la mouvance des travaux [1-2]. On étudie l'évaluation des bornes des solutions du système (3,3,1) dans le cas réel et complexe. La méthode de démonstration utilise les multiplicateurs de Lagrange. Ce travail a fait l'objet d'une publication [13].

3.2 Préliminaires

Considérons le système

$$\dot{X} = f(X) \quad (3.2)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $t_0 \geq 0$ est la valeur initiale du temps et $X(t, t_0, X_0)$ est la solution du système (3.2) satisfaisant $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$ qu'on note par

simplification $X(t)$.

Soit Ω un ensemble compact, définissons la distance entre la solution $X(t, t_0, X_0)$ et l'ensemble Ω par :

$$\rho(X(t, t_0, X_0), \Omega) = \inf_{Y \in \Omega} \|X(t, t_0, X_0) - Y\|$$

et notons $\Omega_\varepsilon = \{X \mid \rho(X, \Omega) < \varepsilon\}$, il est clair que $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$.

Définition 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. Ω est appelé ensemble positivement invariant pour le système (3.2) si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), \Omega) = 0$ et borne absolue pour

le système (3.2) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > t_0$, tel que pour tout $t \geq T$, $x(t, t_0, x_0) \in \Omega_\varepsilon$.

Puisque les fonctions de Lyapunov de type polynôme quadratique sont simples dans les applications, nous étudions principalement les limites des systèmes chaotiques en utilisant des fonctions polynômiales .

Choisissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$p(X) = X^T P X + uX + a_0$$

où $P = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_0 \in \mathbb{R}$ sont des paramètres à déterminer.

Dérivons p suivant le système (3.2) et négligeons les termes de degrés supérieur ou égale à trois, supposons qu'on trouve :

$$\dot{p} = X^T Q X + vX + b_0$$

Si on peut trouver $p(X)$ telle que p soit définie positive et Q soit définie négative, alors $\dot{p} = 0$ doit être une sphère bornée dans \mathbb{R}^n . Puisque les systèmes chaotiques sont bornés, elles atteindront leurs valeurs maximales ou minimales suivant l'ensemble des solutions du système (3.2), alors il est nécessaire d'avoir $\dot{p} = 0$. A cet effet, pour estimer les bornes absolues du système (3.2), on devrait seulement résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$Max(\text{ ou } Min)p(X) = X^T P X + uX + a_0, \text{ s.t. } X^T Q X + vX + b_0 = 0.$$

Le problème d'optimisation ci-dessus a une solution si les conditions précédemment décrites sont satisfaites. Supposons que nous obtenons $p_{\min} \leq p(X) \leq p_{\max}$ alors l'ensemble

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n / p_{\min} \leq p(X) \leq p_{\max}\}$$

sera les limites ultimes que nous désirions.

3.3 Bornes absolues du sytème financier

Dans cette section, nous considérons le modèle dyamique des finances, composé de trois équations différentielles du premier ordre. Ce système est défini par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} x' = z + (y - a)x \\ y' = 1 - by - x^2 \\ z' = -x - cz \end{cases} \quad (3.3)$$

où $a \geq 0$ est le montant de l'épargne, $b \geq 0$ le coût par investissement et $c \geq 0$ l'élasticité de la demande des marchés commerciaux.

Le système (3.3) affiche un attracteur chaotique pour $a = 3, b = 0.1$ et $c = 1$.

Nous discuterons la bornitude du système chaotique (3.3). Avant d'entrer dans les détails, introduisons le lemme 3.1 suivant :

Lemme 3.1

Définissons l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0 \right\}$$

et $G = x^2 + (y - 2b)^2 + z^2$, $H = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \Gamma$. Alors nous avons :

$$G_1 = \max_{(x,y,z) \in \Gamma} G = H_1 = \max_{(x,y,z) \in \Gamma} H = \begin{cases} \frac{a^4}{a^2 - b^2}, a \geq c, a \geq b\sqrt{2} \\ 4b^2, a < b\sqrt{2}, c < b\sqrt{2} \\ \frac{c^4}{c^2 - b^2}, c > a, c \geq b\sqrt{2} \end{cases}$$

Preuve :

Facile, il suffit d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3.1

Pour $a > 0, b > 0, c > 0$ l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad (3.4)$$

où

$$R^2 = \begin{cases} \frac{1}{4a(b-a)} & \text{si } c \geq a, b \geq 2a \\ \frac{1}{b^2} & \text{si } b < 2c, b < 2a \\ \frac{1}{4c(b-c)} & \text{si } 0 < c < a, b \geq 2c \end{cases} \quad (3.5)$$

est l'ensemble positivement invariant et la borne absolue pour le système (3.3).

Preuve :

Définissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(X) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.6)$$

où $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Alors, sa dérivée par rapport au temps le long des orbites du système (3.3) est donnée par :

$$\frac{1}{2} \dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = -ax^2 - b\left(y - \frac{1}{2b}\right)^2 - cz^2 + \frac{1}{4b} \quad (3.7)$$

Posons $\dot{V} = 0$, ainsi nous pouvons définir l'ellipsoïde a trois dimensions suivant :

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) / \frac{x^2}{\frac{1}{4ab}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2b}\right)^2}{\frac{1}{4b^2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{4cb}} = 1 \right\}$$

A l'exterieur de Γ , $\dot{V} < 0$, alors qu'à l'interieur de Γ , $\dot{V} > 0$. Puisque la fonction $V = x^2 + y^2 + z^2$ est continue dans l'ensemble fermé Γ , V peut atteindre son maximum sur la surface

Γ . Dans la suite, on va calculer le maximum de V sur la surface Γ .

Par le lemme 3.1, on peut déduire facilement :

$$\max V = R^2 = \begin{cases} \frac{1}{4a(b-a)} & \text{si } c \geq a, b \geq 2a \\ \frac{1}{b^2} & \text{si } b < 2c, b < 2a \\ \frac{1}{4c(b-c)} & \text{si } 0 < c < a, b \geq 2c \end{cases} \quad (3.8)$$

On voit facilement que $\Gamma \subset \Omega$. Ensuite, en utilisant un raisonnement par l'absurde, nous allons montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t), \Omega) = 0 \quad (3.9)$$

Si (8) n'a pas lieu, on peut conclure que les orbites du système (3.3) sont à l'extérieur de Ω de façon permanente, ainsi $\dot{V} < 0$. Par conséquent $V(X(t))$ est strictement décroissante à l'extérieur de Ω . Ce qui conduit au résultat suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t)) = V^* > l$$

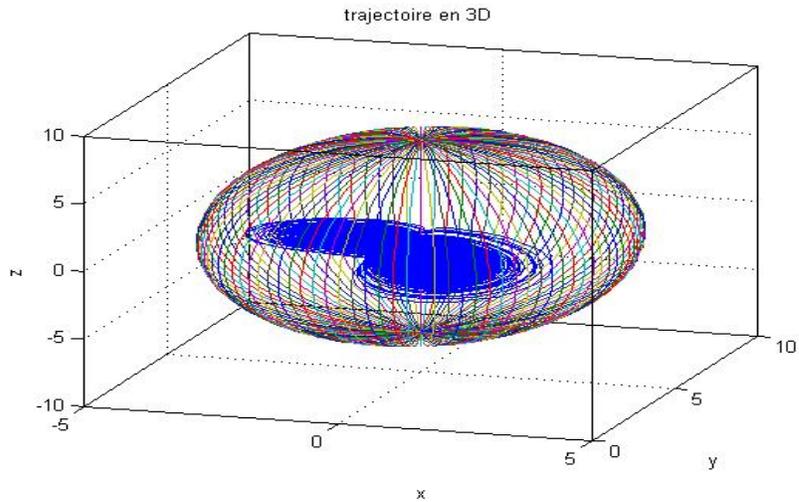
Posons $s = \inf_{X \in D} \left(-\dot{V}(X(t)) \right)$ où $D = \{X(t) / V^* \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0))\}$, avec t_0 est le temps initiale. Par conséquent nous avons que s, V^* sont des constantes positives et $\frac{dV(X(t))}{dt} \leq -s$. Quand $t \rightarrow \infty$, on a :

$$0 \leq V(X(t)) \leq V(X(t_0)) - s(t - t_0) \rightarrow -\infty$$

Ce qui est absurde. Donc (3.9) a lieu, ce qui veut dire que l'ensemble Ω est la borne absolue du système (3.3).

Finalement, pour voir que l'ensemble Ω est aussi positivement invariant, raisonnons comme suit :

Supposons que V atteint sa valeur maximale sur la surface Γ au point $P_0(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$. Comme $\Gamma \subset \Omega$, pour tout point $X(t)$ sur Ω et $X(t) \neq P_0$ nous avons $\dot{V}(X) < 0$. Donc toute orbite $X(t)$ ($X(t) \neq P_0$) du système (3.3) entrera dans Ω .



Quand $X(t) = P_0$, par le théorème de continuité, $X(t)$ entrera aussi dans Ω .

En résumant ce qui précède on conclut que Ω est un ensemble positivement invariant du système (3.3).

Théorème 3.2.

Pour $a > 0, b > 0, c > 0$, le plus petit intervalle contenant chaque variable d'état dans le système (3.3) est donné comme suit :

$$\begin{cases} |x| \leq R \\ |y| \leq \frac{1}{b} \\ |z| \leq \frac{R}{c} \end{cases} \quad (3.10)$$

Preuve :

A partir de (3.4), on obtient :

$$|x| \leq R, \quad |y| \leq R, \quad |z| \leq R \quad (3.11)$$

et en même temps, la troisième équation de la formule (3.2) et (3.11) donnent :

$$z' = -x - cz \leq -cz + |x| \leq -cz + R \quad (3.12)$$

en intégrant les membres de la formule (3.12), on obtient :

$$z(t) \leq z(t_0)e^{-c(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-c(t-\tau)} R d\tau = z(t_0)e^{-c(t-t_0)} + \frac{R}{c}(1 - e^{-c(t-t_0)}),$$

$$z(t) \leq \frac{R}{c} + \left(z(t_0) - \frac{R}{c} \right) e^{-c(t-t_0)}$$

alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) \leq \frac{R}{c} \quad (3.13)$$

Donc, des formules (3.11) et (3.13) on peut conclure que la borne la plus précise pour z est :

$$|z| \leq \min\left(\frac{R}{c}, R\right) = \frac{R}{c} \quad (3.14)$$

De même, comme $1 - x^2 \leq 1$ et selon la deuxième équation de la formule (3.2), on obtient :

$$y' = 1 - by - x^2 \leq 1 - by \quad (3.15)$$

L'intégration des deux membres de (3.15) donne :

$$y(t) \leq y(t_0)e^{-b(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-b(t-\tau)} d\tau = y(t_0)e^{-b(t-t_0)} + \frac{1}{b}(1 - e^{-b(t-t_0)}),$$

$$y(t) \leq \frac{1}{b} + \left(y(t_0) - \frac{1}{b} \right) e^{-b(t-t_0)}$$

Donc, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \frac{1}{b} \quad (3.16)$$

Alors, des formules (3.11) et (3.16) on peut conclure que la borne la plus précise pour y est

$$|y| \leq \min\left(\frac{1}{b}, R\right) \quad (3.17)$$

Comme $(b - 2a)^2 \geq 0$, alors $\frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4a(b-a)} = R^2$, pour $c \geq a$ et $b \geq 2a$;c'est à dire $\frac{1}{b} \leq R$ pour $c \geq a$ et $b \geq 2a$.

Pour $b < 2c, b < 2a$,on a $R = \frac{1}{b}$.

On conclut donc que : $\frac{1}{b} \leq R$ pour $a > 0, b > 0, c > 0$ et la borne la plus précise pour y est

$$|y| \leq \frac{1}{b}$$

Ce qui complète la preuve du théorème.

Exemple 3.1 :

Pour $a = 3, b = 0.1, c = 1$;on peut obtenir que

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{(0.1)^2} = 10^2 \right\} \quad (3.18)$$

est l'ensemble positivement invariant et la borne ultime du système financier chaotique (3.3).

Les bornes de chacune de ses variables d'état sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \leq 10 \\ |y| \leq 10 \\ |z| \leq 10 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

3.4 Le système financier complexe

Dans la suite, on va discuter de la bornitude du système financier complexe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_1 = z_3 + z_2 z_1 - a z_1 \\ z'_2 = 1 - b z_2 - z_1 \bar{z}_1 \\ z'_3 = -z_1 - c z_3 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

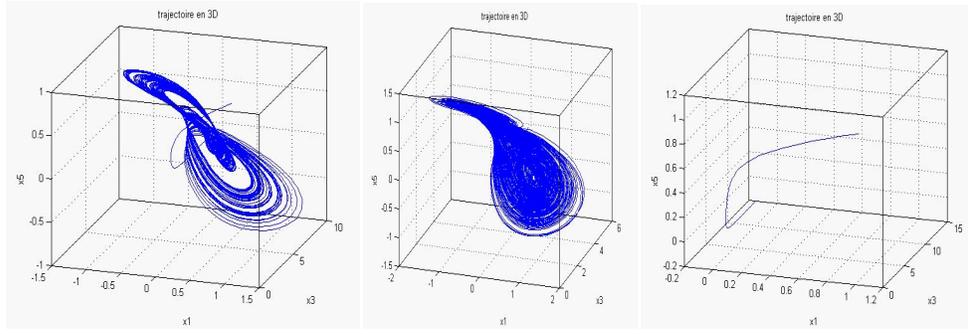


FIG. 3-1 – 3D projections of attractors of Financial complex system for (a) $a = 3$, $b = 0$, $c = 1$, (b) $a = 7$, $b = 0 :1$, $c = 1$ and (c) $a = 9$, $b = 0 :1$, $c = 1$

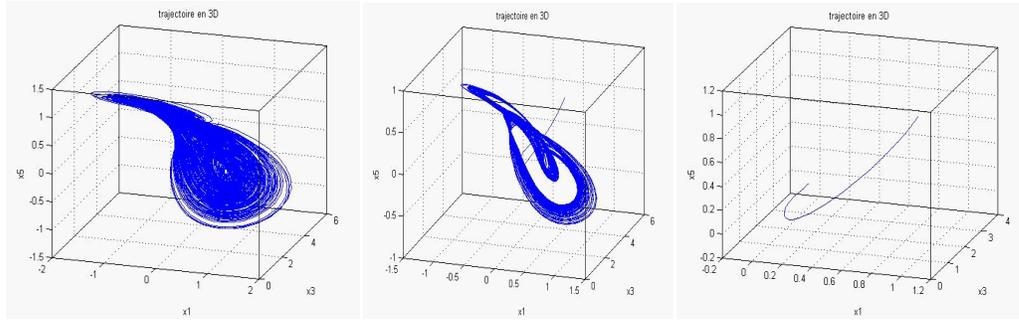


FIG. 3-2 – 3D projections of attractors of Financial complex system for (a) $a = 3$, $b = 0 :1$, $c = 1$, (b) $a = 7$, $b = 0 :1$, $c = 1$ and (c) $a = 9$, $b = 0 :1$, $c = 1$

où $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_4 + ix_5$, $i = \sqrt{-1}$, \bar{z}_1 est le conjugué de z_1 .

Remplaçons les variables complexes dans le système (3.20) par leurs formes algébriques ; on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_4 + x_3x_1 - ax_1 \\ x'_2 = x_5 + x_3x_2 - ax_2 \\ x'_3 = 1 - bx_3 - x_1^2 - x_2^2 \\ x'_4 = -x_1 - cx_4 \\ x'_5 = -x_2 - cx_5 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

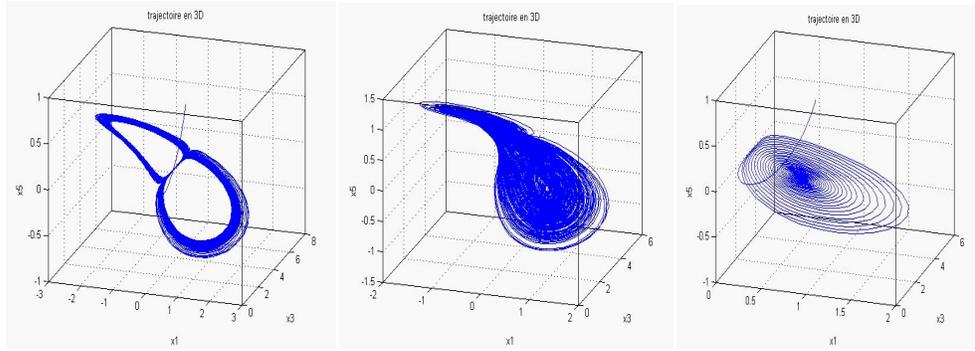


FIG. 3-3 – 3D projections of attractors of Financial complex system for (a) $a = 3, b = 0 :1, c = 1$, (b) $a = 3, b = 0 :19, c = 1$ and (c) $a = 3, b = 0 :3, c = 1$

3.5 La Bornitude ultime du système financier complexe

Lemme 3.2.

Définissons l'ensemble :

$$\Psi = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{(x_3 - c)^2}{c^2} + \frac{x_4^2}{d^2} + \frac{x_5^2}{e^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0 \right\}$$

et

$$G_1 = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2c)^2 + x_4^2 + x_5^2$$

$$H_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

et cela pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Psi$. Alors on a :

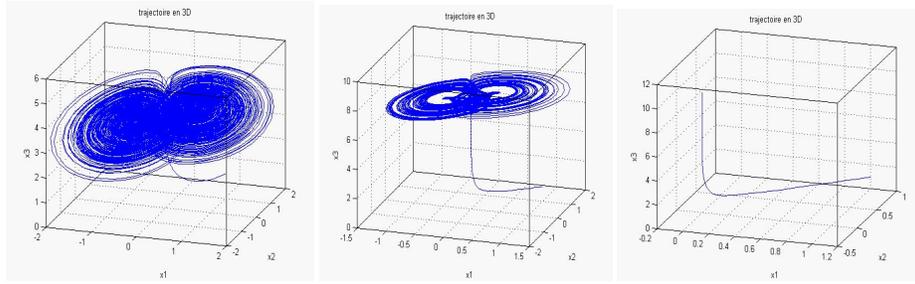


FIG. 3-4 – 3D projections of attractors of Financial complex system for (a) $a = 3$, $b = 0 :1$, $c = 1$, (b) $a = 7$, $b = 0 :1$, $c = 1$ and (c) $a = 9$, $b = 0 :1$, $c = 1$

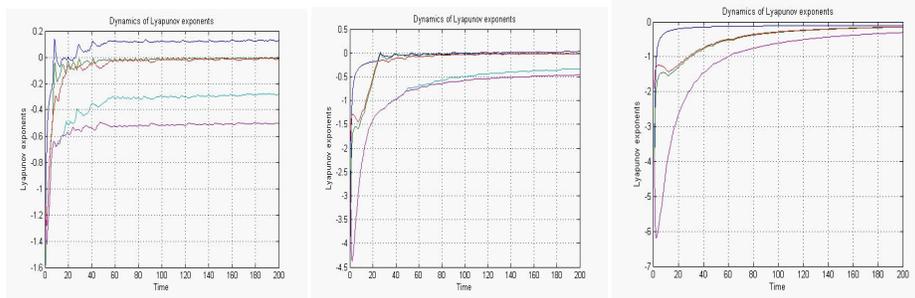


FIG. 3-5 – The Lyapunov exponent of Financial complex system for (a) $a = 3$, $b = 0 :1$, $c = 1$, (b) $a = 7$, $b = 0 :1$, $c = 1$ and (c) $a = 9$, $b = 0 :1$, $c = 1$

$$\max_{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Psi} G_1 = \max_{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Psi} H_1 = \begin{cases} \frac{a^4}{a^2 - c^2}, a \geq b, a \geq d, a \geq e, a \geq c\sqrt{2} \\ \frac{b^4}{b^2 - c^2}, b \geq a, b \geq d, b \geq e, b \geq c\sqrt{2} \\ \frac{d^4}{d^2 - c^2}, d > a, d > b, d \geq e, d \geq c\sqrt{2} \\ \frac{e^4}{e^2 - c^2}, e > a, e \geq d, e > b, e \geq c\sqrt{2} \\ 4c^2, a < c\sqrt{2}, b < c\sqrt{2}, d < c\sqrt{2}, e < c\sqrt{2}. \end{cases}$$

$a = 3$, $b = 0 :1$, $c = 1$, (b) $a = 7$, $b = 0 :19$, $c = 1$ and (c) $a = 9$, $b = 0 :3$, $c = 1$

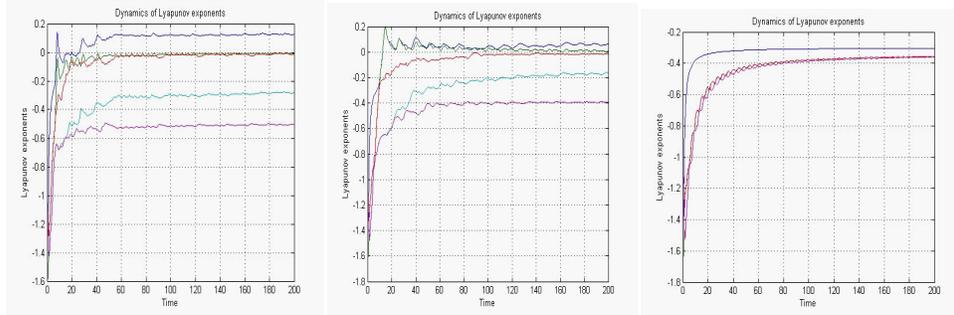


FIG. 3-6 – The Lyapunov exponent of Financial complex system for (a)

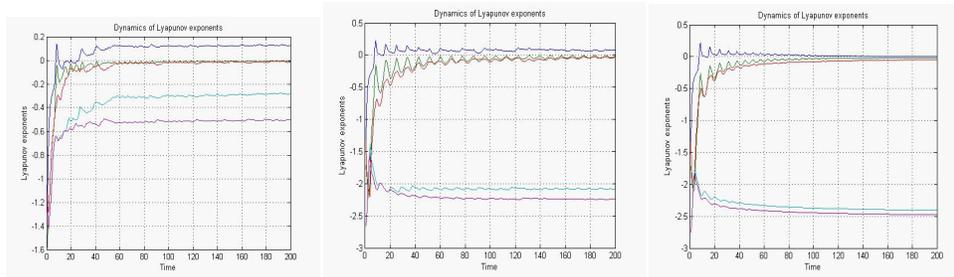


FIG. 3-7 – The Lyapunov exponent of Financial complex system for (a)

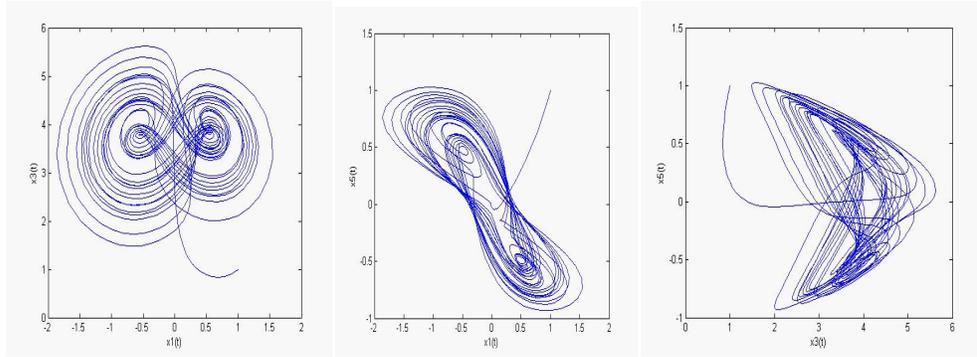


FIG. 3-8 – Projections of the phase portraits of Financial complex system into planes

$$a = 3, b = 0 :1, c = 1,$$

(b) $a = 3, b = 0 :1, c = 2 :7$ and (c) $a = 3, b = 0 :1, c = 2 :8$

Preuve :

Elle découle sans difficultés de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3.3.

Pour $a > 0, b > 0, c > 0$ l'ensemble suivant :

$$\Theta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq R_1^2\} \quad (3.22)$$

où

$$R_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{4a(b-a)} & \text{si } c \geq a, b \geq 2a \\ \frac{1}{b^2} & \text{si } b < 2c, b < 2a \\ \frac{1}{4c(b-c)} & \text{si } 0 < c < a, b \geq 2c \end{cases}, \quad (3.23)$$

est l'ensemble positivement invariant et est l'ultime borne du système (3.21).

Preuve :

Définissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2. \quad (3.24)$$

Alors,sa dérivée par rapport au temps le long des orbites du système (3.21) est :

$$\frac{1}{2}\dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4 + x_5\dot{x}_5 = -ax_1^2 - ax_2^2 - b(x_3 - \frac{1}{2b})^2 - cx_5^2 + \frac{1}{4b} \quad (3.25)$$

$\dot{V}_1 = 0$,signifie que la surface :

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / \frac{x_1^2}{\frac{1}{4ab}} + \frac{x_2^2}{\frac{1}{4ab}} + \frac{(x_3 - \frac{1}{2b})^2}{\frac{1}{4b^2}} + \frac{x_4^2}{\frac{1}{4cb}} + \frac{x_5^2}{\frac{1}{4cb}} = 1 \right\} \quad (3.26)$$

est un ellipsoïde dans l'espace a cinq dimensions pour certaines valeurs de a, b, c . A l'exterieur de Γ_1 , $\dot{V}_1 < 0$ alors qu'à son interieur on a $\dot{V}_1 > 0$. Comme la fonction $V_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$ est continue sur l'ensmble fermé Γ_1 , V_1 peut atteindre son maximum sur la surface Γ_1 .

Dans ce qui suit nous allons calculer le maximum de V_1 sur la surface Γ_1 .

Par le lemme 3.2, on trouve facilement :

$$\max V = R_1^2 = \begin{cases} \frac{1}{4a(b-a)} & \text{si } c \geq a, b \geq 2a \\ \frac{1}{b^2} & \text{si } b < 2c, b < 2a \\ \frac{1}{4c(b-c)} & \text{si } 0 < c < a, b \geq 2c \end{cases} .$$

Finalement, en utilisant la même argumentation que précédement, on montre que Θ est l'ensemble positivement invariant et l'ultime borne pour le système (3.21).

Conclusion :

Dans ce travail on a introduit un nouveau système financier complexe et étudié ses propriétés dynamiques incluant l'invariance , les exposants de Lyapunov, son comportement chaotique et ses attracteurs étranges.

La bornitude absolue d'un système chaotique est très importante dans la théorie du contrôle et ses applications.

Dans ce travail, la bornitude des solutions du système financier complexe a été étudiée. Des simulations numériques sont proposées pour montrer l'efficacité des résultats exposés. Les

résultats théoriques obtenus dans ce travail trouveront une large application dans le contrôle du chaos et dans sa synchronisation.

Chapitre 4

Evaluation des bornes du système hyper-chaotique de Lorenz-Haken

4.1 Introduction

Dans les dernières années, l'étude des systèmes dynamiques hyper-chaotiques a attiré l'attention de nombreux scientifiques. Une grande quantité de littérature est développée sur les solutions bornées de systèmes dynamiques de trois et quatre dimensions. Un système chaotique est bornée, en ce sens que son attracteur chaotique est bornée dans l'espace des phases et l'estimation de sa borne est importante dans le contrôle du chaos, la synchronisation de chaos et de leurs applications.

Ce travail suit les études faites dans[18], mais utilise une approche différente. On utilise la méthode de la fonction de Lyapunov et des multiplicateurs de Lagrange pour estimer les bornes supérieures du système hyper-chaotique de Lorenz-Haken. Considérons le système hyper-chaotique de Lorenz-Haken

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -kx + ky \\ y' = r_1x - y - ez + k\frac{z^2}{x} - xu \\ z' = r_2x + ey - z - k\frac{yz}{x} \\ u' = -bu + xy \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où k, r_1, r_2, b, e sont des paramètres du système réel. Le système (4.1) affiche un attracteur lorsque $k = 6, r_1 = 91, r_2 = -1.5, b = 1.2, e = 2.5$.

$(x(0), y(0), z(0), u(0)) = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ est la valeur initiale.

4.2 Evaluation des bornes du système hyperchaotique de Lorenz-Haken

Lemme :

Soit

$$V = \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2$$

et

$$\Gamma = \{(x, y, z, u) : r_1x^2 + y^2 + z^2 - r_2xz + b(u - r_1)^2 = br_1^2\}$$

alors

$$l = \max_{(x,y,z,u) \in \Gamma} V = 4r_1^2$$

où l est la valeur maximale de V sur Γ , pour $k > 0, r_1 > 0, r_2 < 0, b > 0$ et $e > 0$.

Preuve :

Γ est un ensemble fermé et V est continue sur Γ , les valeurs extrêmes de V peuvent être atteintes sur Γ . Nous avons

$$\begin{aligned} V &= \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 \\ \Gamma &= \{(x, y, z, u) : r_1x^2 + y^2 + z^2 - r_2xz + b(u - r_1)^2 = br_1^2\} \end{aligned}$$

Soit

$$F = \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 + \lambda [(x, y, z, u) : r_1x^2 + y^2 + z^2 - r_2xz + b(u - r_1)^2 - br_1^2]$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{2r_1}{k}x + 2\lambda r_1x - \lambda r_2z = 0 \\ F_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ F_z = 2z + 2\lambda z - \lambda r_2x = 0 \\ F_u = 2(u - 2r_1) + 2\lambda b(u - r_1) = 0 \\ r_1x^2 + y^2 + z^2 - r_2xz + b(u - r_1)^2 = br_1^2 \end{array} \right.$$

on a

$$(x, y, z, u, \lambda) = (0, 0, 0, 2r_1, 0) \text{ ou } (x, y, z, u, \lambda) = (0, 0, 0, 0, -\frac{2}{b})$$

Ainsi l peut être obtenue par comparaison, nous avons

$$l = \left[\frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 \right]_{/(0,0,0,0,-\frac{2}{b})} = 4r_1^2$$

Théorème :

Pour $k > 0, r_1 > 0, r_2 < 0, b > 0$ et $e > 0$, la solution du système (4.1) est bornée par les conditions

$$\begin{aligned} \min \left\{ -2\sqrt{kr_1}, -\sqrt{\frac{k}{r_1}}\sigma \right\} &\leq x \leq \max \left\{ 2\sqrt{kr_1}, \sqrt{\frac{k}{r_1}}\sigma \right\}, \forall t \geq 0 \\ \min \left\{ -2r_1, -\sqrt{\sigma} \right\} &\leq y \leq \max \left\{ 2r_1, \sqrt{\sigma} \right\}, \forall t \geq 0 \\ \min \left\{ -2r_1, -\sqrt{\sigma} \right\} &\leq z \leq \max \left\{ 2r_1, \sqrt{\sigma} \right\}, \forall t \geq 0 \\ \min \left\{ 0, 2r_1 - \sqrt{\sigma} \right\} &\leq u \leq \max \left\{ 4r_1, 2r_1 + \sqrt{\sigma} \right\}, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

où

$$\sigma = \frac{r_1}{k}x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + (u_0 - 2r_1)^2$$

Preuve :

Soit

$$V = \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 \quad (4.2)$$

$$S = \left\{ (x, y, z, u) : \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 \leq (2r_1)^2 \right\} \quad (4.3)$$

$$W = \left\{ (x, y, z, u) : r_1x^2 + y^2 + z^2 - r_2xz + b(u - r_1)^2 \leq br_1^2 \right\} \quad (4.4)$$

De toute évidence, il peut être obtenu que

$$\max_{s_2 \in W} d(s_1, s_2) = 2r_1 \quad (4.5)$$

où $d(s_1, s_2)$ désigne la distance entre les points $s_1 = (0, 0, 0, 2r_1)$ et s_2 . De 4.2-4.5, nous avons

$$W \subset S \quad (4.6)$$

La dérivée de V le long des trajectoires du système (4.1) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dV}{dt} &= \frac{r_1}{k}xx' + yy' + zz' + (u - 2r_1)u' \\ &= -r_1x^2 + r_1xy + r_1xy - y^2 - eyz + k\frac{yz^2}{x} - xyu + r_2xz \\ &\quad + eyz - z^2 - k\frac{yz^2}{x} - bu^2 + xyu + 2r_1bu - 2r_1xy \\ &= -r_1x^2 - y^2 - z^2 + r_2xz - b(u - r_1)^2 + br_1^2 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{dt} = -r_1x^2 - y^2 - z^2 + r_2xz - b(u - r_1)^2 + br_1^2 \quad (4.7)$$

Dans ce qui suit, nous séparons deux cas et discuter des bornes de (x, y, z, u) .

Cas 1 :

$(x_0, y_0, z_0, u_0) \in S$. De 4.2, 4.6 et 4.7, on a $(x, y, z, u) \in S, \forall t \geq 0$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{k}x^2 &\leq (2r_1)^2 \\
y^2 &\leq (2r_1)^2 \\
z^2 &\leq (2r_1)^2 \\
(u - 2r_1)^2 &\leq (2r_1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, il en résulte

$$\begin{aligned}
-2\sqrt{kr_1} &\leq x \leq 2\sqrt{kr_1} \\
-2r_1 &\leq y \leq 2r_1 \\
-2r_1 &\leq z \leq 2r_1 \\
0 &\leq u \leq 4r_1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Cas 2 :

$(x_0, y_0, z_0, u_0) \notin S$. A partir de 4.2, 4.6 et 4.7, il est facile d'en déduire que $(x, y, z, u) \in S$, $\forall t \geq 0$. Ce qui donne

$$V = \frac{r_1}{k}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 2r_1)^2 \leq V(0), \forall t \geq 0$$

où

$$\begin{aligned}
V(0) &= \frac{r_1}{k}x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + (u_0 - 2r_1)^2 \\
&= \sigma
\end{aligned}$$

nous avons $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{k}x^2 &\leq \sigma \\
y^2 &\leq \sigma \\
z^2 &\leq \sigma \\
(u - 2r_1)^2 &\leq \sigma
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Donc on a

Par conséquent, de 4.8 à 4.9, nous concluons que $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\min \left\{ -2\sqrt{kr_1}, -\sqrt{\frac{k}{r_1}\sigma} \right\} &\leq x \leq \max \left\{ 2\sqrt{kr_1}, \sqrt{\frac{k}{r_1}\sigma} \right\} \\
\min \{ -2r_1, -\sqrt{\sigma} \} &\leq y \leq \max \{ 2r_1, \sqrt{\sigma} \} \\
\min \{ -2r_1, -\sqrt{\sigma} \} &\leq z \leq \max \{ 2r_1, \sqrt{\sigma} \} \\
\min \{ 0, 2r_1 - \sqrt{\sigma} \} &\leq u \leq \max \{ 4r_1, 2r_1 + \sqrt{\sigma} \}
\end{aligned}$$

Exemple :

Considérons le système (4.1), où $k = 6, r_1 = 91, r_2 = -1.5, b = 1.2, e = 2.5$, et $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 0, 0, 182)$

nous avons

$$V = \frac{91}{6}x^2 + y^2 + z^2 + (u - 182)^2$$

$$\Gamma = \{ (x, y, z, u) : 91x^2 + y^2 + z^2 + 1.5xz + 1.2(u - 91)^2 = 1.2 \times 91^2 \}$$

$$\sigma = \frac{91}{6}x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + (u_0 - 182)^2 = 0$$

on a

$$l = \max_{(x,y,z,u) \in \Gamma} V_{(x,y,z,u)} = (2r_1)^2 = 182^2$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \leq 2\sqrt{546} = 46.73 \\ |y| \leq 182 \\ |z| \leq 182 \\ 0 \leq u \leq 364 \end{array} \right.$$

4.3 Conclusion

Dans ce travail, le système hyper-chaotique de Lorenz-Haken est considéré et les bornes de la solution d'un tel système sont étudiées. Pour ce faire, nous avons adapté une fonction de Lyapunov pour le système hyper-chaotique de Lorenz-Haken puis nous avons utilisé les multiplicateurs de Lagrange pour déterminer les bornes de ce système. Un exemple est fourni pour illustrer le résultat principal.

Bibliographie

- [1] Ma Jun-hai, Che Yu-shu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non linear finance system. *App. Math. and Mechanics*. Vol 22, No11, Nov 2001.
- [2] Ma Jun-hai, Che Yu-shu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non linear finance system(II). *App. Math. and Mechanics*. Vol 22, No12, Dec 2001.
- [3] A.C. Fowler, J.D. Gibbon, M.J. McGuinness, The complex Lorenz equations, *Physica D* 4 (2) (1982) 139–163.
- [4] H. Saberi Nik, S. Effati b, J. Saberi-Nadjafi, New ultimate bound sets and exponential finite-time synchronization for the complex Lorenz system, *Journal of Complexity*. 31 (2015) 715–730.
- [5] Fuchen Zhang, Guangyun Zhang, Boundedness solutions of the complex Lorenz chaotic system, *Applied Mathematics and Computation*. 243 (2014) 12–23.
- [6] Gamal M. Mahmoud, Shaban A. Aly, M. A. AL-Kashif, Dynamical properties and chaos synchronization of a new chaotic complex nonlinear system, *Nonlinear Dyn.* (2008) 51 :171–181.
- [7] S.Effati, J.Saberi-Nadjafi, H. Saberi Nik, Optimal and adaptive control for a kind of 3D chaotic and 4D hyper-chaotic systems, *Appl. Math. Model.* 38 (2014) 759–774.
- [8] J. Jian, Z. Zhao, New estimations for ultimate boundary and synchronization control for a disk dynamo system, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 9 (2013) 56–66.

- [9] O. Zehrou, Solution bounds of hyper-chaotic Lorenz-Stenflo system, *Nonlinear Studies*, Vol 20, No 3 (2013).
- [10] O. Zehrou, A. Diar, M. Denche, Solution bounds of the hyper-chaotic Lorenz-Haken system, *Nonlinear Studies*, Vol 21, No 1 (2014).
- [11] S. Rezzag, O. Zehrou, A. Aliouche, Estimating the Bounds for the General 4-D Continuous-Time Autonomous System, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol 15, No 3, (2015).
- [12] G.M. Mahmoud, E.E. Mahmoud, Basic properties and chaotic synchronization of complex Lorenz system, *Internat. J. Modern Phys.* 18 (2) (2007) 253–265.
- [13] Diar Ahmed, Zehrou Okba , Rezzag Samia, Ultimate bound and dynamical behavior for a new complex financial chaotic system. *Nonlinear Studies*, Vol. 24, No. 2, pp. 1-12, 2017
- [14] A.C. Fowler, J.D. Gibbon, M.J. McGuinness, The complex Lorenz equations, *Physica D* 4 (2) (1982)139–163.
- [15] Drazin, P.G (1992) *Nonlinear Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, England).
- [16] Marsden, J. E., and McCracken, M.(1976) *The Hopf Bifurcation and its Applications*(Springer, New York).394-402 (1997).
- [17] Strogatz, Steven H, *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biologie, chemistry, and engineering*. Perseus Books, Massachusetts, (U. S. A).
- [18] Li, D., Wu, X., Lu, J. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the hyperchaotic Lorenz Haken system. *Chaos Soliton Fract.* 39, 1290-1296 (2009).
- [19] Lorenz, E. N. (1963) Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130.
- [20] G.Chen, Wen-Xing Qin. On the boudedness of solutions of the chen system.*J. Math. Anal. Appl.* 329(2007) 445-451.
- [21] G.Chen et al. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system. *J. Math. Anal. Appl.* 323(2006) 844-853.