



**République Algérienne Démocratique et Populaire**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Frères Mentouri **Constantine -1**

Faculté des **Sciences Exactes**

Département de **Mathématiques**

N° d'ordre : 03/DS/2018

Série : 01/MATH/2018

## **T H È S E**

Pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

Mention : **MATHÉMATIQUE**

Option : **Analyse (E.D.O et E.D.P)**

Présentée et soutenue par

**Brahim Tellab**

**Intitulée:**

**Résolution des équations différentielles fractionnaires**

**Jury:**

|                     |              |                                    |                   |
|---------------------|--------------|------------------------------------|-------------------|
| <b>M S. Djeddar</b> | <b>Prof</b>  | <b>Université de Constantine 1</b> | <b>Président</b>  |
| <b>M K. Haouam</b>  | <b>Prof</b>  | <b>Université de Tebessa</b>       | <b>Rapporteur</b> |
| <b>M M. Dalah</b>   | <b>Prof</b>  | <b>Université de Constantine 1</b> | <b>Examineur</b>  |
| <b>M N. Hamri</b>   | <b>Prof</b>  | <b>C.U. de Mila</b>                | <b>Examineur</b>  |
| <b>M K. Saoudi</b>  | <b>M.C.A</b> | <b>Université de Khenchela</b>     | <b>Examineur</b>  |
| <b>M B. Rebiai</b>  | <b>Prof</b>  | <b>Université de Tebessa</b>       | <b>Examineur</b>  |

Soutenue publiquement le 11/01/2018

# Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse **Kamel Haouam**, pour la confiance qu'il m'a témoigné en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissant de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Soyez Monsieur assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré par la présence à mon jury de thèse de doctorat et que je remercie beaucoup :

Professeur **Salah Diezzar**, Pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président de mon jury de thèse. je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Professeur **Mohamed Dalah**, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail et pour toutes ses remarques intéressantes.

Professeur **Nasr-eddine Hamri**, pour sa participation à mon jury de thèse, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour ses suggestions et ses remarques judicieuses.

Docteur **Khaled Saoudi**, qui a bien voulu examiner ce travail et je le remercie pour le temps consacré à la lecture de cette thèse ainsi que pour ses commentaires.

Enfin et spécialement je tiens à exprimer ma reconnaissance au Docteur **Belgacem Rebiai**, pour son soutien permanent aussi bien pour ses travaux de recherches.

À titre personnel, je tiens à remercier chaleureusement ma mère, ma femme, mes enfants, mes frères, mes soeurs et tous mes amis.  
Très spécialement, je dédie ce modeste travail à l'esprit de mon père.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Table des figures</b>   | <b>IV</b> |
| <b>Introduction générale</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Méthodes opérationnelles . . . . .                                       | 4         |
| 1.1.1 Eléments sur la transformée de Laplace . . . . .                       | 4         |
| 1.1.2 Eléments sur la transformée de Fourier . . . . .                       | 6         |
| 1.2 La fonction Gamma . . . . .  | 6         |
| 1.2.1 Définition de la fonction Gamma . . . . .                              | 7         |
| 1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma . . . . .                     | 7         |
| 1.2.3 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite . . . . .  | 9         |
| 1.3 La fonction Bêta . . . . .   | 11        |
| 1.4 La fonction Mittag-Leffler . . . . .                                     | 15        |
| 1.4.1 Transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres | 16        |
| 1.5 La fonction d'erreur . . . . .   | 17        |
| 1.6 La fonction Mellin-Ross . . . . .  | 18        |
| <b>2 Dérivées et intégrales fractionnaires</b>                               | <b>19</b> |
| 2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov . . . . .           | 19        |
| 2.1.1 Dérivée fractionnaire de $(t - a)^\alpha$ . . . . .                    | 20        |
| 2.1.2 Dérivée fractionnaire d'une constante . . . . .                        | 21        |
| 2.1.3 Composition avec les dérivées d'ordre entier . . . . .                 | 22        |
| 2.1.4 Composition avec les dérivées fractionnaires . . . . .                 | 22        |
| 2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .           | 23        |
| 2.2.1 Intégrales d'ordre arbitraire . . . . .                                | 23        |
| 2.2.2 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles . . . . .     | 24        |
| 2.2.3 Dérivées d'ordre arbitraire . . . . .                                  | 27        |
| 2.2.4 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles . . . . .       | 27        |
| 2.2.5 Compositions . . . . .   | 28        |
| 2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .                      | 32        |
| 2.3.1 Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .  | 33        |
| 2.3.2 Propriétés . . . . .   | 33        |
| 2.4 Approche complexe des intégrales non entières . . . . .                  | 34        |
| 2.5 Propriétés des dérivées fractionnaires . . . . .                         | 36        |
| 2.5.1 Linéarité . . . . .  | 36        |
| 2.5.2 Règle de Leibniz . . . . .   | 37        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.5.3    | Intégration par parties . . . . .   | 38         |
| 2.6      | Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires . . . . .  | 40         |
| 2.6.1    | Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov . . . . .                         | 40         |
| 2.6.2    | Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .                         | 40         |
| 2.6.3    | Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo . . . . .                                    | 42         |
| 2.7      | Interprétations des dérivées fractionnaires . . . . .   | 43         |
| <b>3</b> | <b>Quelques méthodes de résolutions explicites d'équations différentielles fractionnaires</b>             | <b>45</b>  |
| 3.1      | Exemples d'équations différentielles fractionnaires . . . . .   | 45         |
| 3.2      | Exemples d'équations intégrales fractionnaires . . . . .  | 53         |
| 3.2.1    | Equation intégrale d'Abel . . . . .   | 53         |
| 3.2.2    | Quelques équations réductibles à l'équation d'Abel . . . . .  | 54         |
| <b>4</b> | <b>Survey de quelques résultats d'existence et d'unicité</b>  | <b>60</b>  |
| 4.1      | Existence et unicité de solutions . . . . .   | 60         |
| 4.1.1    | Introduction . . . . .  | 60         |
| 4.1.2    | Résultats d'existence et d'unicité . . . . .  | 64         |
| <b>5</b> | <b>Résultats de non-existence de solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires</b> | <b>69</b>  |
| 5.1      | Non-existence de solutions d'un problème de Cauchy de type parabolique . . . . .                          | 69         |
| 5.1.1    | Introduction . . . . .  | 70         |
| 5.1.2    | Préliminaires . . . . .   | 71         |
| 5.1.3    | Enoncés des résultats . . . . .   | 72         |
| 5.2      | Non-existence de solutions d'un problème de Cauchy de type hyperbolique . . . . .                         | 79         |
| 5.2.1    | Introduction . . . . .  | 80         |
| 5.2.2    | Organisation et objectif . . . . .  | 81         |
| 5.2.3    | Préliminaires . . . . .   | 82         |
| 5.2.4    | Enoncés des résultats . . . . .   | 83         |
|          | <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>90</b>  |
|          | <b>Annexes</b>  | <b>91</b>  |
| <b>A</b> | <b>Quelques théorèmes du point fixe</b>   | <b>91</b>  |
| A.1      | Théorème du point fixe de Banach . . . . .  | 91         |
| A.2      | Théorème du point fixe de Brouwer . . . . .   | 93         |
| A.3      | Théorème du point fixe de Schauder . . . . .  | 93         |
| A.4      | Théorème du point fixe de Krasnoselskii . . . . .   | 96         |
| <b>B</b> | <b>Fiches B</b>   | <b>97</b>  |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>100</b> |

# Table des figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Courbe représentative de la fonction Gamma . . . . .                                    | 7  |
| 1.2 | Contour L . . . . .   | 14 |
| 1.3 | La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre . . . . .                             | 16 |
| 1.4 | La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres . . . . .                               | 16 |
| 2.1 | Coube $\mathcal{C}$ . . . . .   | 35 |
| 3.1 | Solutions de l'équation (3.5), pour $\beta = 1, \beta = 0.9$ et $\beta = 0.4$ . . . . . | 52 |
| 3.2 | Solutions de l'équation (3.6), pour $\beta = 1, \beta = 0.9$ et $\beta = 0.6$ . . . . . | 52 |
| B.1 | Georg Friedrich Bernhard Riemann . . . . .  | 97 |
| B.2 | <b>Joseph Liouville</b> . . . . .   | 99 |

# Introduction générale

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17-ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : Est ce que la dérivée d'ordre entier  $\frac{d^n f}{dx^n}$  peut être étendue à avoir un sens lorsque  $n$  est une fraction ? Plus tard, la question est devenue :  $n$  peut être n'importe quel nombre : Fractionnel, irrationnel ou complexe ? Parce que cette dernière question a été répondu par l'affirmative, le calcul fractionnaire est devenu un terme mal approprié et pourrait mieux être appelé intégration et différenciation d'ordre fractionnaire.

Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour désigner la dérivée  $n$ -ième d'une fonction  $f$ . Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hôpital en 1695, L'Hôpital a répondu : Que signifie  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$  ?

Aujourd'hui, cette lettre est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hôpital a demandé spécifiquement pour  $n = \frac{1}{2}$ , (c'est-à-dire un nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie mathématique.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différentes types d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

J. L. Lagrange a contribué au calcul fractionnaire indirectement. En 1772, il a développé la loi des exposants (indices) pour les opérateurs différentiels d'ordre entier et a écrit :

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} f.$$

Dans la notation moderne, le point est omis, car ce n'est pas la multiplication. Plus tard, lorsque la théorie du calcul fractionnaire est développée, les mathématiciens sont intéressés à savoir ce que les restrictions devaient être imposées à  $f(x)$  de sorte qu'une règle analogue était vraie pour  $m$  et  $n$  arbitraires.

En 1812, P. S. Laplace a défini une dérivée fractionnaire à l'aide d'une intégrale, en 1819, la première mention d'une dérivée d'ordre arbitraire apparaît dans un texte.

S. F. Lacroix a consacré moins de deux pages de ce texte de 700 pages à ce sujet. Il a développé un exercice mathématique simple généralisé à partir d'un cas d'ordre entier. En commençant par  $f(x) = x^m$ , ( $m$  est un entier positif), Lacroix a développé facilement la dérivée  $n$ -ième.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Grâce à l'utilisation du symbole de Legendre pour la factorielle généralisée (la fonction Gamma), il a obtenu

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Il a donné alors l'exemple de  $f(x) = x$  et  $n = \frac{1}{2}$ , et a obtenu :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Maintenant, nous citons quelques mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-ième siècle :

P.S. Laplace(1812), J.B.J. Fourier(1822), N.H. Abel(1823 – 1826), J. Liouville(1832-1873), B. Riemann(1847), H. Holmgren(1865-1867), A.K. Grunwald(1867-1872), A.V. Letnikov(1868-1872), H. Laurent(1884), P.A. Nekrassov(1888), A. Krug(1890), J. Hadamard(1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle(1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood(1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy(1923), A. Marchaud(1927), H.T. Davis(1924-1936), A. Zygmund(1935-1945), E.R. Amour(1938-1996), H. Kober(1940), D.V. Widder(1941), M. Riesz(1949)

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire ([1], [23], [28]).

Au cours des dernières années un intérêt considérable est donné aux applications des dérivées fractionnaires dans plusieurs domaines. Nous citons maintenant quelques exemples sur ce sujet :

- Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement à la viscoélasticité des matières ([60], [69]).
- Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégral-différentielles fractionnaires ([49], [46]).
- Les échauffements de la conductance comme un processus dynamique peut être modéliser aussi par des modèles d'ordre fractionnaire ([70]).
- En économie, quelques systèmes de finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire ([?]).
- En biologie, il a été déduit que les membranes des cellules de l'organisme biologique ont la

conductance électrique d'ordre fractionnaire ([16]).

- En traitement du signal ([48]) et le traitement d'image ([55]), clarifient parfaitement l'importance de considération et l'analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques équations et systèmes différentiels fractionnaires non linéaires, en utilisant plusieurs techniques de résolution suivant le problème à étudier.

Cette thèse se décompose de cinq chapitres partagés de la façon suivante :

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils de base sur les transformées de Laplace et de Fourier et quelques définitions des fonctions spéciales utiles tout au long de notre thèse telles que : la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta, la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes.

**Chapitre 2 :** Le chapitre 2 est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires ainsi que leurs transformées de Laplace.

**Chapitre 3 :** Ce chapitre est dédié à la résolution explicite de quelques équations différentielles et intégrales fractionnaires, pour une bonne compréhension et une bonne manipulation du calcul opérationnel fractionnaire.

**Chapitre 4 :** Le chapitre 4 à pour but, l'étude de l'existence et l'unicité de solutions de quelques équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des conditions intégrales aux limites, en utilisant les techniques du point fixe.

**Chapitre 5 :** Ce chapitre est consacré à l'étude de la non-existence globale de solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires hyperboliques non linéaires basé sur la méthode des fonctions tests à la recherche des exposants critiques de type Fujuta.



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Méthodes opérationnelles

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable, notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base sur la transformée de Laplace et la transformée de Fourier dans le cas entier que nous allons par la suite l'étendre au cas fractionnaire.

#### 1.1.1 Éléments sur la transformée de Laplace

**Définition 1.1.1** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  existe, alors elle s'appelle transformée de Laplace de la fonction  $f$  et on note :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.1)$$

la fonction  $f(t)$  est appelée fonction originale.

**Exemples :**

1.  $\mathcal{L}(e^{kt}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \int_0^{\epsilon} e^{(k-s)t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \frac{1}{k-s} [e^{(k-s)\epsilon} - 1] = \frac{-1}{k-s}$ , si  $s > k$ .

En particulier, pour  $k = 0$  on a  $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ ,  $s > 0$ .

2.  $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt$ , une intégration par parties donne :  $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1})$ , si  $s > 0$ , par récurrence on aboutit à  $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \mathcal{L}(t^0) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ .

3.  $\mathcal{L}(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2 + k^2}$ ,  $s > 0$ . En utilisant la définition et une double intégration par partie.

3.  $\mathcal{L}(t^2 + t + 2 + e^{2t} + \cos(kt)) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2 + 1}$ ,  $s > 2$ . Grâce à la linéarité de l'opérateur  $\mathcal{L}$  et les exemples précédents.

**Définition 1.1.2** Une fonction  $f(t)$  est dite sectionnellement continue sur  $[a, b]$ , si elle est continue sauf en un nombre fini de points, et la discontinuité en ces points est de première espèce.

**Définition 1.1.3** On dit que  $f(t)$  est d'ordre exponentiel quand  $t \rightarrow +\infty$ , s'il existe des constantes positives  $M, b$  et  $t_0$  telles que :  $|f(t)| \leq Me^{bt}$  pour  $t > t_0$ . On dit alors que  $f(t)$  est de l'ordre de  $e^{bt}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.1.1** Si  $f(t)$  est sectionnellement continue sur chaque intervalle fini  $[0, a]$ ,  $a > 0$ , et est de l'ordre de  $e^{bt}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , la transformée de Laplace existe pour  $s > b$ .

L'originale  $f(t)$  peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace  $F(s)$  à l'aide de la transformée de Laplace inverse.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0, \quad (1.2)$$

où  $c_0$  se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.2).

Le calcul direct de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (1.2) est "souvent compliqué", cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale  $f(t)$  qu'on cherche.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1.3)$$

de deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ , qui sont égales à zéro pour  $t < 0$ , est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (1.4)$$

sous l'hypothèse que  $F(s)$  et  $G(s)$  existent.

Une propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(t)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \end{aligned} \quad (1.5)$$

qui peut être obtenue de la définition (1.1) par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

### 1.1.2 Eléments sur la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction continue  $h(t)$ , absolument intégrable dans  $(-\infty, +\infty)$  est définie par

$$F_e\{h(t); \omega\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} h(t) dt \quad (1.6)$$

et l'originale  $h(t)$  peut être reconstituée à partir de sa transformée de Fourier  $H_e(\omega)$  à l'aide de sa transformée de Fourier inverse :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.7)$$

La transformée de Fourier de la convolution

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (1.8)$$

de deux fonctions  $h(t)$  et  $g(t)$ , définies sur  $(-\infty, +\infty)$ , est égale au produit de leurs transformées de Fourier :

$$F_e\{h(t) * g(t); \omega\} = H_e(\omega) G_e(\omega) \quad (1.9)$$

sous l'hypothèse  $H_e(\omega)$  et  $G_e(\omega)$  existent.

Une autre propriété utile de la transformée de Fourier, qui est fréquemment utilisée dans la résolution de problèmes appliqués est la transformée de Fourier des dérivées de  $h(t)$ . A savoir si  $h(t), h'(t), \dots, h(t)^{(n-1)}$  tendent vers zéro quand  $t \rightarrow \pm\infty$ , alors la transformée de Fourier de la n-ième dérivée de  $h(t)$  est

$$F_e\{h^{(n)}(t); \omega\} = (-i\omega)^n H_e(\omega). \quad (1.10)$$

La transformée de Fourier est un outil très puissant pour plusieurs domaines des systèmes dynamiques linéaires.

## 1.2 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendentes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres... Pour plus de détails sur cette fonction (voir [12], [38]).

## 1.2.1 Définition de la fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$ . La fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (1.11)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(0_+) = +\infty$ ,  $\Gamma(z)$  est une fonction strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ .

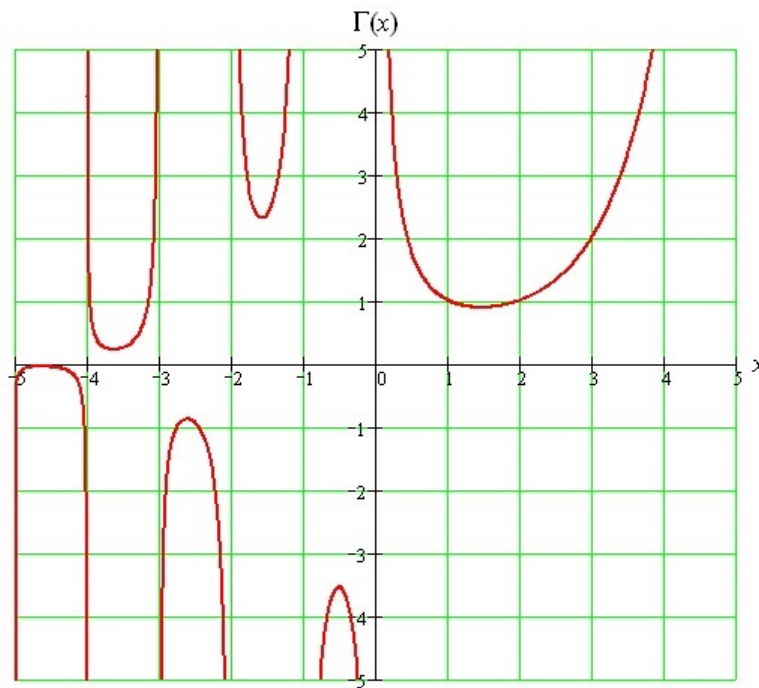


FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

## 1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.12)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[ -t^z e^{-t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , en effet

$\Gamma(1) = 1$ , et en utilisant (1.12) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\
 \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
 \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Nous montrons maintenant que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .  
De la définition (1.11), nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons  $t = y^2$ , alors  $dt = 2ydy$ , et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.14}$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.15}$$

Si nous multiplions ensemble (1.14) et (1.15) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \tag{1.16}$$

L'équation (1.16) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi. \tag{1.17}$$

Ainsi,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

L'équation fonctionnelle (1.12) entraîne pour les entiers relatifs positifs  $n$  (voir [34])

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \\
 \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\
 \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9\dots(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),
 \end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

Aucune expression de base est connue pour  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$  ou  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ , mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Le Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

Maximum de chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 1.77245385090551602729816748334114518279754945612238\dots \\ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2.67893853470774763365569294097467764412868937795730\dots \\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 3.62560990822190831193068515586767200299516768288006\dots \\ \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) &= 4.590843711998803053200475827592915200343410999829340\dots\end{aligned}$$

### 1.2.3 Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (1.18)$$

où nous supposons que  $Re(z) > 0$ .

Pour prouver (1.18), nous introduisons la fonction auxiliaire suivante :

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (1.19)$$

Effectuant maintenant la substitution  $\tau = \frac{t}{n}$ , puis en répétant l'intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)}.\end{aligned} \quad (1.20)$$

En exploitant la limite connue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \quad (1.21)$$

nous arrivons à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.22)$$

ce qui termine la preuve de la représentation (1.18) de la fonction Gamma, si la relation (1.22) est justifiée. Pour ce faire, nous estimons la différence

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt - f_n(z) \\ &= \int_0^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Prenons un  $\epsilon > 0$  arbitraire. En raison de la convergence de l'intégrale (1.11), il existe un  $N$  tel que pour  $n \geq N$ , on a

$$\left| \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3}, \quad (x = \operatorname{Re}(z)). \quad (1.24)$$

Fixons maintenant  $N$  et considérons  $n > N$ , nous pouvons écrire  $\Delta$  comme une somme de trois intégrales :

$$\Delta = \left( \int_0^N + \int_N^n \right) \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.25)$$

Le dernier terme est inférieur à  $\frac{\epsilon}{3}$ . Pour la seconde intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_N^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| &\leq \int_N^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \\ &< \int_N^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

où, comme ci-dessus, ( $x = \operatorname{Re}(z)$ ).

Pour l'estimation de la première intégrale dans (1.25) nous avons besoin de l'inégalité auxiliaire suivante :

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}, \quad (0 < t < n), \quad (1.27)$$

qui découle, des relations

$$1 - e^{-t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^{-\tau} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau \quad (1.28)$$

et

$$0 < \int_0^t e^\tau \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n \frac{\tau}{n} d\tau < \int_0^t e^\tau \frac{\tau}{n} d\tau = e^t \frac{t^2}{2n}. \quad (1.29)$$

(La relation (1.28) peut être vérifiée en différenciant les deux cotés).

En utilisant l'inégalité auxiliaire (1.27), nous obtenons pour  $n$  assez grand et  $N$  fixé :

$$\left| \int_0^N \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1} dt < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.30)$$

En tenant compte des inégalités (1.24), (1.26) et (1.30) et que  $\epsilon$  est arbitraire, nous concluons que (1.22) est justifiée.

Ceci termine certainement la preuve de la formule (1.18) pour  $Re(z) > 0$ .

À l'aide de (1.12), la condition  $Re(z) > 0$  peut être affaiblie pour  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  de la manière suivante.

Si  $-m < Re(z) < -m + 1$ , où  $m$  est un nombre entier positif, alors

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)\dots(z+m+n)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m)^{z+m} (n-m)!}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Par conséquent, la représentation (1.18) est vraie pour tout  $z, z \neq 0, -1, -2, \dots$

### 1.3 La fonction Bêta

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{\omega-1} d\tau, \quad (Re(z) > 0, Re(\omega) > 0). \quad (1.32)$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta nous allons utiliser la transformée de Laplace.



Considérons l'intégrale suivante

$$h_{z,\omega}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1} d\tau. \quad (1.33)$$

Évidemment,  $h_{z,\omega}(t)$  est une convolution des fonctions  $\tau^{z-1}$  et  $\tau^{\omega-1}$  et on a  $h_{z,\omega}(1) = B(z, \omega)$ .

Puisque la transformée de Laplace de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, nous obtenons :

$$H_{z,\omega}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(\omega)}{s^\omega} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}}, \quad (1.34)$$

où  $H_{z,\omega}(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $h_{z,\omega}(t)$ .

D'autre part, puisque  $\Gamma(z)\Gamma(\omega)$  est une constante, il est possible de reconstituer la fonction originale  $h_{z,\omega}(t)$  par la transformer de Laplace inverse, du côté droit de (1.34). En raison de l'unicité de la transformée de Laplace, nous obtenons donc :

$$h_{z,\omega}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} t^{z+\omega-1}, \quad (1.35)$$

si on prend  $t = 1$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \quad (1.36)$$

qui nous donne

$$B(z, \omega) = B(\omega, z). \quad (1.37)$$

La définition de la fonction Bêta (1.32), n'est valable que pour  $Re(z) > 0$ ,  $Re(\omega) > 0$ . La relation (1.36) fournit le prolongement analytique de la fonction Bêta pour tout le plan complexe, si nous avons la fonction analytique continue Gamma.

Grâce à la fonction Bêta, nous pouvons établir les deux relations importantes suivantes pour la fonction Gamma.

La première relation est :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (1.38)$$

nous obtiendrons la formule (1.38) sous la condition  $0 < Re(z) < 1$  et ensuite nous montrons qu'elle est valable pour  $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

En utilisant (1.32) et (1.36), nous pouvons écrire :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^1 \left( \frac{t}{1-t} \right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}, \quad (1.39)$$

où l'intégrale converge si  $0 < \text{Re}(z) < 1$ . Effectuant la substitution  $\tau = \frac{t}{1-t}$  nous obtenons :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{z-1}}{1+\tau} d\tau. \quad (1.40)$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_L f(s)ds, \quad f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s},$$

le long du contour de la figure 1.2

La fonction  $f(\tau)$  a un pôle simple en  $s = e^{\pi i}$ . Donc, pour  $R > 1$  on a

$$\int_L f(s)ds = 2\pi i \left[ \text{Res}f(s) \right]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{\pi iz}.$$

D'autre part, les intégrales le long des circonférences  $|s| = \epsilon$  et  $|s| = R$  sont nulles quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow +\infty$ , et l'intégrale le long du bord inférieur est différente de l'intégrale le long du bord supérieur par le facteur  $-e^{2\pi iz}$ . Pour cette raison, pour  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\int_L f(s)ds = 2\pi i \left[ \text{Res}f(s) \right]_{s=e^{\pi i}} = -2\pi i e^{\pi iz} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) \left( 1 - e^{2\pi iz} \right)$$

et

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (0 < \text{Re}(z) < 1).$$

Si  $m < \text{Re}(z) < m+1$ , alors nous pouvons mettre  $z = \alpha + m$ , où  $0 < \text{Re}(z) < 1$ . En exploitant la relation (1.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= (-1)^m \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \\ &= \frac{(-1)^m \pi}{\sin(\pi(\alpha+m))} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la relation (1.38) est vraie pour  $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

En prenant  $z = \frac{1}{2}$ , on obtient à partir de (1.38) une valeur particulière de la fonction Gamma

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.41)$$

La seconde relation importante pour la fonction Gamma, facilement obtenue à l'aide de la fonction bêta, est la formule de Legendre

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z), \quad (2z \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (1.42)$$

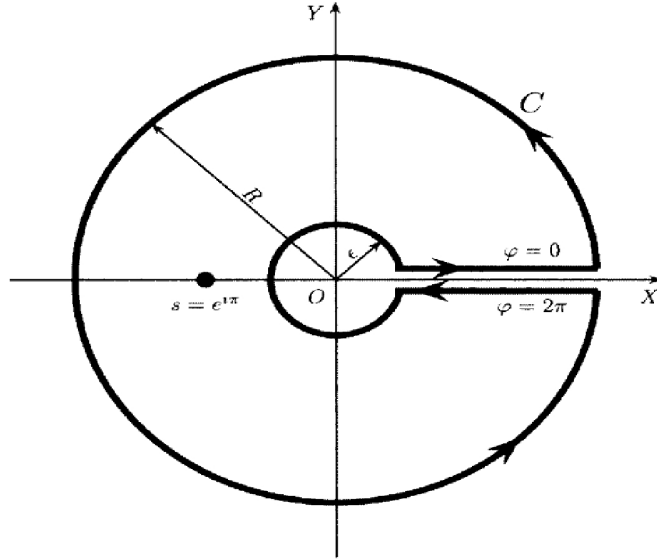


FIGURE 1.2 – Contour L

Pour prouver la relation (1.42), nous considérons

$$B(z, z) = \int_0^1 \left[ \tau(1 - \tau) \right]^{z-1} d\tau, \quad (\text{Re}(z) > 0). \quad (1.43)$$

En tenant compte de la symétrie de la fonction  $y(\tau) = \tau(1 - \tau)$ , et en effectuant la substitution  $s = 4\tau(1 - \tau)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} B(z, z) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \tau(1 - \tau) \right]^{z-1} d\tau \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1} \left( 1 - s \right)^{-\frac{1}{2}} ds = 2^{1-2z} B\left(z, \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

et en utilisant la relation (1.36), on obtient à partir de la relation (1.44), la formule de Legendre (1.41).

En prenant  $z = n + \frac{1}{2}$  dans (1.42), nous obtenons un ensemble de valeurs particulières de la fonction Gamma

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2n + 1)}{2^{2n} \Gamma(n + 1)} = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!} \quad (1.45)$$

contenant également (1.41).

## 1.4 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle  $\exp(z)$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 (voir [56]) et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (1.46)$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, joue un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953 – 1954 et elle est définie par un développement en serie suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.47)$$

A partir de la relation (1.47), on trouve les relations suivantes :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z). \quad (1.48)$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.49)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (1.50)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k + 2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (1.51)$$

et en général

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (1.52)$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.47) :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (1.53)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k + 1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (1.54)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. Les deux figure ci-dessous montrent le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre pour différentes valeurs de  $\alpha$  et à deux paramètres pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

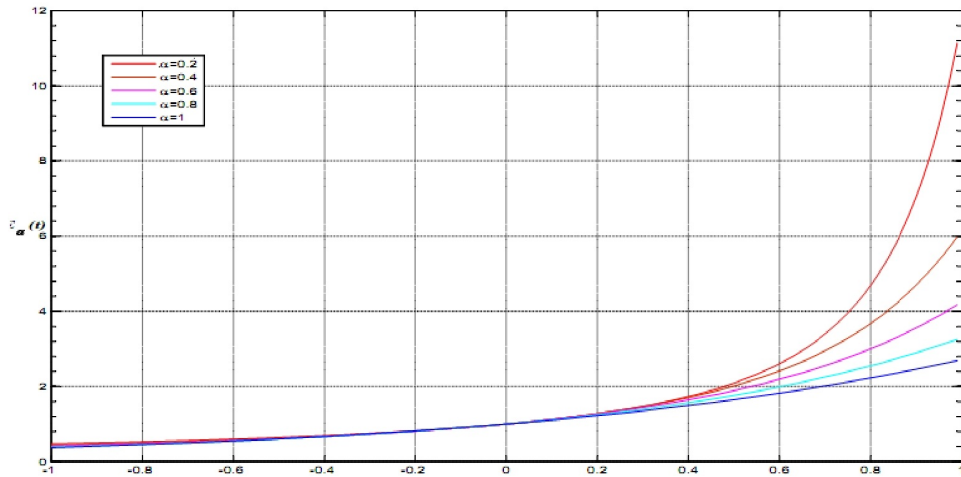


FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

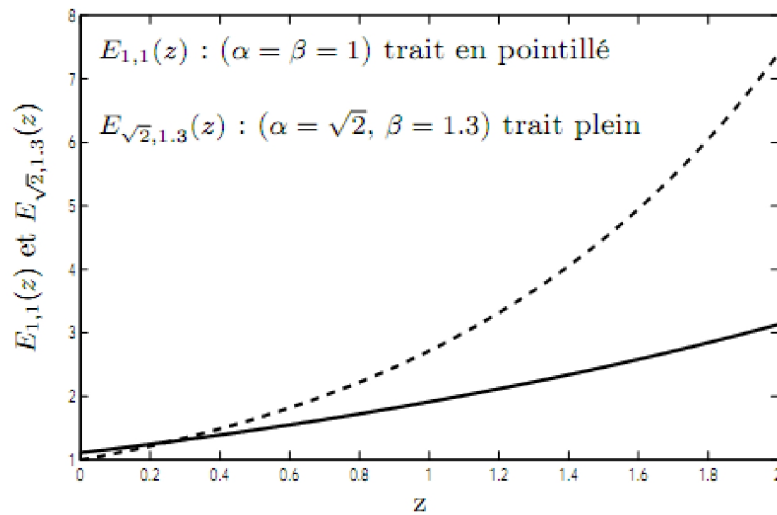


FIGURE 1.4 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

### 1.4.1 Transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres s'écrit sous la forme (voir [23]) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt = \frac{k! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha \pm a)^{k+1}}, \quad (\operatorname{Re}(p) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

En particulier, pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(k)}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \pm a)^{k+1}}, \quad (\operatorname{Re}(p) > a^2).$$

## 1.5 La fonction d'erreur

En mathématiques, la fonction d'erreur (appelée aussi fonction d'erreur de Gauss) est une fonction entière utilisée en analyse. Cette fonction se note **erf** et fait partie des fonctions spéciales.

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

On note que  $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$ .

Il arrive que la fonction plus générale  $E_n$  définie par :

$$E_n(z) = n! \int_0^z e^{-t^n} dt,$$

soit utilisée et  $E_2$  est appelée erreur intégrale. D'autres fonctions d'erreurs utilisées en analyse, notamment :

- La fonction d'erreur complémentaire notée **erfc** et définie par :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- la fonction **ierfc**, opposée de l'intégrale de la fonction d'erreur complémentaire **erfc** :

$$\operatorname{ierfc}(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z \operatorname{erfc}(z).$$

- La fonction d'erreur imaginaire notée **erfi** et définie par :

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{\operatorname{erf}(iz)}{i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt.$$

Elle n'est souvent définie que dans certains logiciels de calcul formel, tels que Mathematica et Maple. Elle peut néanmoins être décrite à l'aide d'un développement en série

$$\begin{aligned} \operatorname{erfi}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} z^{2n+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + O(z^9) \right). \end{aligned}$$

A partir de la relation (1.47), si on pose  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 1$  on obtient :

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z).$$

La série asymptotique de la fonction d'erreur est :

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(2z^2)^n} \right] = \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2z)^{2n}} \right].$$

## 1.6 La fonction Mellin-Ross

La fonction Mellin-Ross,  $E_t(\nu, a)$ , se pose lors de la recherche de l'intégrale fractionnaire d'une fonction exponentielle  $e^{at}$ . Elle est définie par :

$$E_t(\nu, a) = t^\nu e^{at} \Gamma^*(\nu, t),$$

où

$$\Gamma^*(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)t^\nu} \int_0^t e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0,$$

qui peut s'écrire aussi :

$$E_t(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)} = t^\nu E_{1,\nu+1}(at).$$

# Chapitre 2

## Dérivées et intégrales fractionnaires

### 2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction  $f$  au point  $t$  est donnée par :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.1)$$

Par dérivation successive de la fonction  $f$ , on obtient une généralisation de la formule (2.1) à l'ordre  $n$  ( $n$  est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (2.2)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule (2.2) représente la dérivée d'ordre entier  $n$ , si  $n$  est positif et l'intégrale répétée  $n$  fois si  $n$  est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où  $n$  est négatif ou nul

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier  $\alpha$  par :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$



et

$$\begin{aligned} {}^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les formules (2.3) et (2.4) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  et d'ordre  $(-\alpha)$  au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction  $f$ , où  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle fermé  $[a, t]$ .

Si  $f$  est de classe  $C^m$ , des intégrations par parties de (2.3) et (2.4) nous permet d'écrire :

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

et

$${}^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

La formule (2.5) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées  $f^{(k)}(t)$ , ( $k=1,2,\dots,m$ ) sont continues sur l'intervalle fermé  $[a, t]$  et que  $m$  est un entier vérifiant la condition  $m > \alpha$ . La plus petite valeur possible de  $m$  est déterminée par l'inégalité suivante :

$$m - 1 < \alpha < m.$$

### 2.1.1 Dérivée fractionnaire de $(t-a)^\alpha$

Calculons la dérivée fractionnaire  ${}^G D_t^p f(t)$  au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale

$$f(t) = (t-a)^\alpha,$$

où  $\alpha$  est un nombre réel.

On va commencer par considérer des valeurs négatives de  $p$ , c'est-à-dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre  $(-p)$ .

Utilisons la formule (2.3) :

$${}^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau, \quad (2.7)$$

et supposons  $\alpha > -1$  pour la convergence de l'intégrale. En effectuant dans (2.7), le changement de variables  $\tau = a + \xi(t-a)$  et en utilisant la définition (1.32) de la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned} {}^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\alpha-p} \int_a^t \xi^\alpha (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, \alpha+1) (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}, \quad (p < 0, \alpha > -1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considérons maintenant le cas :  $0 \leq m \leq p < m + 1$ . Pour appliquer la formule (5.5) on a besoin d'imposer  $\alpha > m$  pour la convergence de l'intégrale dans (5.5). Alors on a :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} d\tau. \quad (2.9)$$

En tenant compte de

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha-m} (\tau-a)^{\alpha-m+1}.$$

et en effectuant le changement de variables  $\tau = a + \xi(t-a)$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{\alpha-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(-p+m+1, \alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notons que l'expression (2.10) est formellement identique à l'expression (2.8), on peut donc conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale  $f(t) = (t-a)^\alpha$  est donnée par la formule :

$${}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha-p}, \quad (2.11)$$

avec

$$(p < 0, \alpha > -1) \text{ ou bien } (0 \leq m \leq p < m + 1, \alpha > m).$$

## 2.1.2 Dérivée fractionnaire d'une constante

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante est en général ni nulle ni constante, en effet :

Si  $f(t) = C$  et  $\alpha$  non entier, on a  $f^{(k)}(t) = 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  et donc,

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_0 \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau}_0 \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \end{aligned}$$

### 2.1.3 Composition avec les dérivées d'ordre entier

**Proposition 2.1.1** Soient  $m$  un entier strictement positif et  $p$  non entier. Alors :

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( {}_a^G D_t^p f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \quad (2.12)$$

et

$${}_a^G D_t^p \left( \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \quad (2.13)$$

**Preuve :** Pour  $n-1 < p < n$ , on a d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} \left( {}_a^G D_t^p f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( {}_a^G D_t^p f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^p \left( \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}, \end{aligned}$$

alors,

$${}_a^G D_t^p \left( \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}.$$

Ce qui veut dire que, la dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ .

### 2.1.4 Composition avec les dérivées fractionnaires

**Proposition 2.1.2** Trois cas sont à distinguer :

1. Pour  $q < 0$  et  $p \in \mathbb{R}$ , on a :

$${}_a^G D_t^p \left( {}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

2. Si  $0 \leq m < q < m + 1, p < 0$  et la fonction  $f(t)$  vérifie les conditions

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$$

alors,

$${}_a^G D_t^p \left( {}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

3. Si  $0 \leq m < q < m + 1, 0 \leq n < p < n + 1$  et la fonction  $f(t)$  vérifie les conditions

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, r - 1 \text{ où } r = \max(m, n)$$

alors,

$${}_a^G D_t^p \left( {}_a^G D_t^q (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^q \left( {}_a^G D_t^p (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

**Preuve :** Pour la preuve de cette proposition, on pourra consulter [23].

## 2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

### 2.2.1 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue.  $b$  pouvant être fini ou infini.

Une primitive de  $f$  est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left( \int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

**Définition 2.2.1** Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle *intégrale de Riemann-Liouville* de  $f$  l'intégrale définie par la formule suivante :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel ou complexe

**Remarque 2.2.1** La formule (2.14) est une généralisation de la  $n$ -ième primitive avec un ordre de primitivation  $\alpha$  non entier.

## 2.2.2 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction  $f(t) = (t - a)^\beta$  où  $\beta > -1$ .

$$I_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables  $\tau = a + (t - a)s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} t^\beta dt \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relation (2.15) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  d'une constante est donnée par :

$${}_a^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

Et en particulier, si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ {}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.1** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres complexes et  $f \in C^0([a, b])$ .

$$i) \quad I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0) \quad (2.16)$$

$$ii) \quad \frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \quad Re(\alpha) > 1 \quad (2.17)$$

$$iii) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad Re(\alpha) > 0 \quad (2.18)$$

**Preuve :**

i) Pour la démonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler . En effet :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[ \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau.$$

Le changement de variables  $s = \tau + (t-\tau)\mu$ , nous donne

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'où

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t)$$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction  $f \in C^0([a, b])$ , on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De l'exemple (2.15), on peut écrire

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \rightarrow 1 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

D'une part, on a  $f$  est continue sur  $[a, b]$  qui nous permet d'écrire

$$\forall t, \tau \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \tag{2.20}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad \forall t \in [a, b] \\
&= 2M \left( \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \quad \text{où } M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)|.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Une combinaison de (2.19), (2.20) et (2.21) donne :

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)],
\end{aligned}$$

en faisant tendre  $\alpha$  vers  $0^+$ , on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \varepsilon$$

autrement dit :

$$\left| \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

■

### 2.2.3 Dérivées d'ordre arbitraire

**Définition 2.2.2** Soit  $\alpha \in [m - 1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . On appelle dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \left( \frac{d}{dt} \right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.2.4 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t) = (t-a)^\beta$ . Par la formule (2.15) on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \left( \frac{d}{dt} \right)^m \left[ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta+m-\alpha} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

on sait que :

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.24)$$

Par substitution de (2.24) dans (2.23), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

**Remarque 2.2.2** i) Pour  $\alpha = 1$ , la formule de dérivation (2.25) se réduit à

$${}_a^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt} (t-a)^\beta. \quad (2.26)$$

ii) Si on prend  $\beta = 0$  dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a :

$${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$



**Définition 2.2.3** (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

**Définition 2.2.4** (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de  $f$ , c'est-à-dire les valeurs de  $f(\tau)$  pour  $a < \tau < t$ . Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de  $f$ , c'est-à-dire les valeurs de  $f(\tau)$  pour  $t < \tau < b$ . On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

**Définition 2.2.5** (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

**Définition 2.2.6** (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \left( - \frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que  $f$  est une fonction telle que  ${}^R D_t^\alpha f(t)$  et  ${}^R D_b^\beta f(t)$  sont définies.

## 2.2.5 Compositions

**Proposition 2.2.2** (*Composition avec les intégrales fractionnaires*)

Pour  $p > 0$  et  $t > 0$

$${}^R D_t^p ({}^R D_t^{-p} f(t)) = {}^R D_t^p (I_a^p f(t)) = f(t), \quad (2.27)$$

qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

**Preuve :** Pour  $p = m \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^m ({}^R D_t^{-m} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t - \tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $m - 1 \leq p < m$  et utilisons la règle de composition des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. on a donc :

$${}^R D_t^{-m} f(t) = {}^R D_t^{-(m-p)} ({}^R D_t^{-p} f(t)),$$

d'où

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^m ({}_a^R D_t^{-m} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_a^R D_t^{-(m-p)} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) \} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_a^R D_t^{-m} f(t) \} = f(t), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (2.27). Et en général on a :

$${}_a^R D_t^p \left( {}_a^R D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t). \quad (2.28)$$

■

**Proposition 2.2.3** Si la dérivée fractionnaire  ${}_a^R D_t^m f(t)$ , ( $m - 1 \leq p < m$ ), d'une fonction  $f(t)$  est intégrable, alors :

$${}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{i=1}^m [{}_a^R D_t^{p-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)}. \quad (2.29)$$

**Preuve :** D'une part, on a

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}_a^R D_\tau^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_a^R D_\tau^p f(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

D'autre part, en effectuant des intégrations par parties répétées et en exploitant (2.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_a^R D_\tau^p f(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^m}{d\tau^m} \{ {}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau) \} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-m} \{ {}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau) \} d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} ({}_a^R D_t^{-(m-p)} f(t)) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-m} \{ {}_a^R D_\tau^{-(m-p)} f(\tau) \} d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{p-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\ &= {}_a^R D_t^{-(p-m-1)} \left( {}_a^R D_t^{-(m-p)} f(t) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{p-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)} \\ &= {}_a^R D_t^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{p-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i+1}}{\Gamma(2+p-i)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Par substitution de (2.31) dans (2.30), on arrive à la relation (2.29). ■

**Proposition 2.2.4** *Si  $0 \leq m - 1 \leq q < m$ , on a*

$${}_a^R D_t^{-p} \left( {}_a^R D_t^q f(t) \right) = {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(1+p-i)}. \quad (2.32)$$

**Preuve :** Pour prouver la relation (2.32), nous exploitons les relations (2.16), (2.28) et (2.29) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-p} \left( {}_a^R D_t^q f(t) \right) &= {}_a^R D_t^{q-p} \left\{ {}_a^R D_t^{-q} \left( {}_a^R D_t^q f(t) \right) \right\} \\ &= {}_a^R D_t^{q-p} \left\{ f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)} \right\} \\ &= {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} {}_a^R D_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-i}}{\Gamma(q-i+1)} \right\} \\ &= {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}_a^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-i}}{\Gamma(1+p-i)}. \end{aligned}$$

Comme la dérivation et l'intégration d'ordre entier, la dérivation et l'intégration fractionnaires ne commutent pas en général. ■

**Proposition 2.2.5** *(Composition avec les dérivées d'ordre entier)*

*La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparait dans plusieurs problèmes appliqués.*

*En utilisant la définition (2.22) de la dérivée de Riemann-Liouville, nous obtenons :*

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \left( {}_a^R D_t^\alpha f(t) \right) &= \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= {}_a^R D_t^{n+\alpha} f(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

*Maintenant, nous considérons l'ordre inverse des opérateurs. En tenant compte du fait que*

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^{-n} f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

et que

$${}^R D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^{\alpha+n} \left( {}^R D_t^{-n} f(t) \right). \quad (2.35)$$

Une combinaison de (2.34), (2.35) et (2.25) nous donne :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= {}^R D_t^{\alpha+n} \left( {}^R D_t^{-n} f^{(n)}(t) \right) \\ &= {}^R D_t^{\alpha+n} \left\{ f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \right\} \\ &= {}^R D_t^{\alpha+n} f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+i-\alpha-n)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivation d'ordre entier ne commutent que si  $f^{(i)}(a) = 0$ , pour tout  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Proposition 2.2.6** (Composition avec les dérivées fractionnaires)

Soient  $n-1 \leq p < n$  et  $m-1 \leq q < m$ . En utilisant la définition (2.22) de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, les formules (2.29) et (2.33), on aura :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p \left( {}^R D_t^q f(t) \right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{-(m-p)} \left( {}^R D_t^q f(t) \right) \right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{i=1}^n \left[ {}^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-i}}{\Gamma(1+m-p-i)} \right\} \\ &= {}^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=1}^n \left[ {}^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-i}}{\Gamma(1-p-i)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En permutant  $p$  et  $q$ , la relation (2.37) donne

$${}^R D_t^q \left( {}^R D_t^p f(t) \right) = {}^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[ {}^R D_t^{p-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-i}}{\Gamma(1-q-i)}. \quad (2.38)$$

Une comparaison des relations (2.37) et (2.38), montre que les deux opérateurs de dérivations fractionnaires  ${}^R D_t^p$  et  ${}^R D_t^q$  ne commutent que si  $p = q$  ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément

$$\left[ {}^R D_t^{p-i} f(t) \right]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (2.39)$$

et

$$\left[ {}^R D_t^{q-i} f(t) \right]_{t=a} = 0, \quad \text{pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.40)$$

**Remarque 2.2.3** Si  $f$  est de classe  $C^m$ , alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-p}}{\Gamma(i-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^p f(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

## 2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans le développement de la théorie des intégrations et des dérivations fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie. Plusieurs travaux sont apparus, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques.

En général, les problèmes appliqués requièrent des définitions permettant l'utilisation des conditions initiales interprétables

physiquement. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de types fractionnaires qui sont difficiles à interpréter physiquement. En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffuse [25]. Cependant, Sabatier et al [57] montrent que ni l'approche de Riemann-Liouville, ni l'approche de Caputo ne peuvent être utilisées pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, Caputo dans [35] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par Caputo et Mainardi [36] dans leurs travaux en viscoélasticité.

**Définition 2.3.1** ([24], [20]) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction  $f(t)$  donnée sur l'intervalle  $[a, b]$  est définie par la relation suivante :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (2.41)$$

avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $m = [\alpha] + 1$ , où  $[\alpha]$  désigne la partie entière de  $\alpha$ .

**Remarque 2.3.1** L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

**Définition 2.3.2** (Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche)

$$\forall t > a, \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

**Définition 2.3.3 (Dérivée fractionnaire de Caputo à droite)**

$$\forall t < b, \quad {}_b^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} (-1)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Notons bien que  $f$  est une fonction telle que  ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$  et  ${}_t^C D_b^\beta f(t)$  sont définies.

Les opérateurs dont l'intégrale porte sur  $[a, t]$  (respectivement  $[t, b]$ ) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).

**2.3.1 Relation avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville**

1) [1] (page 91) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $m = [\alpha] + 1$ . Si  ${}_a^C D_t^p f(t)$  et  ${}_a^R D_t^p f(t)$  existent, alors :

$$i) \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}, \quad (2.42)$$

on déduit que si  $f^{(i)}(a) = 0$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , on aura  ${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t)$ .

$$ii) \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left( f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right). \quad (2.43)$$

2) Si  $0 < \alpha < 1$ , la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont définies respectivement par :

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left( {}_a^R D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad (2.44)$$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^{-(1-\alpha)} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad (2.45)$$

et on a les propriétés suivantes :

**2.3.2 Propriétés**

1) [1] (page 73)

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}_a^C D_t^\alpha f(t), \end{aligned} \quad (2.46)$$

2) [1] (page 91)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left( f(t) - f(a) \right). \quad (2.47)$$

3) i) [1] ( page 95) Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors

$${}^C D_t^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t), \quad (2.48)$$

4) [1] ( page 96) Si  $f \in C^m[a, b]$ , alors

$$I_a^{\alpha C} D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i. \quad (2.49)$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

**Exemple 2.3.1** Soient la fonction  $f(t) = (t-a)^\beta$ ,  $m$  un entier et  $p$  un réel tels que  $0 \leq m-1 < p < m$  avec  $\beta > m-1$ .

On a

$$f^m(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} (\tau-a)^{\beta-m},$$

donc

$${}^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-m} d\tau,$$

en effectuant le changement de variables  $\tau = a + s(t-a)$  on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-m} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{m-\alpha-1} s^{\beta-\alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(m-\alpha, \beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

**Remarque 2.3.2** La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :  ${}^C D_t^\alpha C = 0$ .

## 2.4 Approche complexe des intégrales non entières

Soit  $f(z)$  une fonction analytique dans un ouvert  $\mathcal{O}$  du plan complexe et une courbe régulière  $\mathcal{C}$  autour du point  $z$  dans  $\mathcal{O}$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

La dernière égalité peut s'étendre formellement à des puissances non entières.

$$\nu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\} : D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} d\zeta.$$

On va montrer que si  $Re(\nu) < 0$ , on retrouve l'intégrale non entière définie par la relation (1.14).  
Que devient la formule dans le cas où  $z = x \in \mathbb{R}$ ? Évaluons, pour  $x > 0$

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta$$

sur le contour  $L_1, L_2, \gamma$  où  $c < x$  éventuellement  $c = -\infty$ .

Sur  $\gamma$ , on prend la détermination

$$\log(\zeta - x) = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$(\zeta - x)^{-\nu-1} = \exp(-\nu - 1)(\ln r + i\theta) = \frac{1}{r^{\nu+1}} \exp -i(\nu + 1)\theta$$

donc

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta \right| \leq r^{-Re(\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + re^{i\theta})| d\theta.$$

Pour  $Re(\nu) < 0$ , on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta = 0$$

Sur  $L_1$ , en prenant  $t = Re(\zeta)$ , alors :

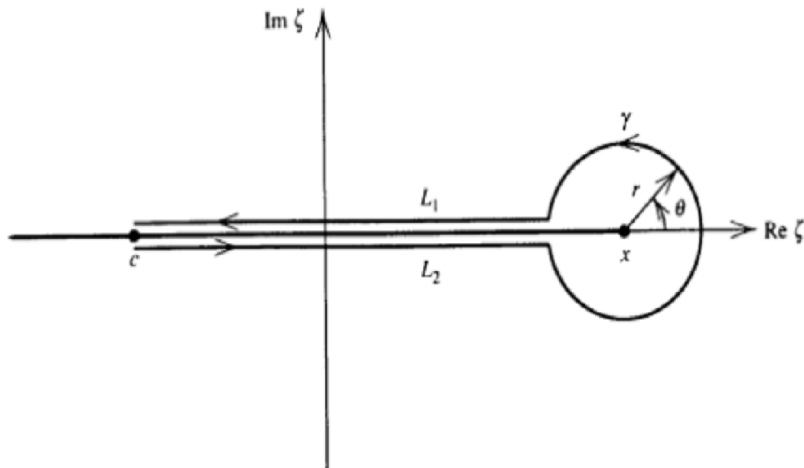


FIGURE 2.1 – Coube  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta &= \int_{x-r}^c \frac{f(t)}{\exp[(\nu + 1)(\ln |t - x|) + i\pi]} dt \\ &= \exp -(\nu + 1)i\pi \int_{x-r}^c \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt \end{aligned}$$



et sur  $L_2$ , on trouve :

$$\int_{L_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta = \exp(\nu + 1)i\pi \int_c^{x-r} \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt.$$

Par passage à la limite quand  $r$  tend vers 0, on obtient :

$$[\exp(\nu + 1)i\pi - \exp -(\nu + 1)i\pi] \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt = 2i \sin(\nu + 1)\pi \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt.$$

On a donc, pour une boucle  $\mathcal{C}$  autour de  $x$  ne rencontrant pas  $\{t < x\}$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta = 2i \sin(\nu + 1)\pi \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt$$

En utilisant la relation  $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{\nu+1}} d\zeta &= \frac{\sin(\nu + 1)\pi}{\pi} \Gamma(\nu + 1) \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt \\ &= \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(-\nu)} \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_c^x \frac{f(t)}{(x - t)^{\nu+1}} dt \end{aligned}$$

Pour  $c = 0 < x$ , et  $\nu < 0$  on retrouve donc  $(I_0^{-\nu} f)(x)$ .

Une intégrale d'ordre négatif dans le corps complexe est donc une intégrale d'ordre opposé.

## 2.5 Propriétés des dérivées fractionnaires

Dans cette section, nous intéressons aux propriétés de dérivation et d'intégration fractionnaire, qui sont utilisées à la suite de cette thèse.

### 2.5.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^p \left( \lambda f(t) + \mu g(t) \right) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t), \quad (2.51)$$

où  $D^p$  désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans cette thèse.

La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante. Par exemple,

pour les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov définies par la formule (2.3), on a :

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p \left( \lambda f(t) + \mu g(t) \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} \left( \lambda f(t - rh) + \mu g(t - rh) \right) \\
&= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \\
&+ \mu \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} g(t - rh) \\
&= \lambda_a D_t^p f(t) + \mu_a D_t^p g(t).
\end{aligned}$$

et pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre  $p$  ( $k - 1 \leq p < k$ ) définies par la formule (2.22), on a

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p \left( \lambda f(t) + \mu g(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} \left( \lambda f(\tau) + \mu g(\tau) \right) d\tau \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} g(\tau) d\tau \\
&= \lambda_a^R D_t^p f(t) + \mu_a^R D_t^p g(t).
\end{aligned}$$

## 2.5.2 Règle de Leibniz

En partant de la règle connue de Leibniz pour calculer la dérivée  $n$ -ième du produit de deux fonctions  $f(t)g(t)$ , on a pour tout entier  $n$  :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \quad (2.52)$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier  $n$  par un paramètre réel  $p$ . dans le membre à droite de (2.52) à la formule :

$$D^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t), \quad n \geq p + 1 \quad (2.53)$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!} \Gamma(-p) \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi, \quad (2.54)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0.$$

Si  $f$  et  $g$  avec toutes ses dérivées sont continues sur  $[a, t]$ , la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{p-k}g(t). \quad (2.55)$$

$D^p$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

### 2.5.3 Intégration par parties

Dans ce paragraphe, nous intéressons à la formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et celles de Caputo.

Donnons d'abord la formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville :

**Théorème 2.5.1** Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $a < t < b$ . Alors :

$$\int_a^t \left[ {}^R D_t^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) \left[ {}^R D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau \quad (2.56)$$

$$\int_t^b \left[ {}^R D_b^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau = \int_t^b f(\tau) \left[ {}^R D_\tau^\alpha g(\tau) \right] d\tau. \quad (2.57)$$

En particulier,

$$\int_a^b \left[ {}^R D_b^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) \left[ {}^R D_b^\alpha g(\tau) \right] d\tau \quad (2.58)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left[ {}^R D_t^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left( \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g(\tau) d\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left( \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g'(\tau) d\tau \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(\tau) \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left( \int_u^t (\tau-u)^{-\alpha} g'(\tau) d\tau \right) f(u) du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) \left[ {}^C D_t^\alpha g(u) \right] du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) \left[ {}^R D_t^\alpha g(u) - g(t) \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] du \\
&\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \\
&= \int_a^t f(u) \left[ {}^R D_t^\alpha g(u) \right] du \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[ {}^R D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau
\end{aligned}$$

La seconde formule se montre de la même manière. ■

Contrairement au cas classique, aucun terme de bord n'apparaît dans cette formule. Il n'en va pas de même pour la dérivée de Caputo.

**Théorème 2.5.2** Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $a < t < b$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left[ {}^C D_t^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau &= \int_a^t f(\tau) \left[ {}^C D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau \\
&\quad + g(t) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} f(t) - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
\int_t^b \left[ {}^C D_b^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau &= \int_t^b f(\tau) \left[ {}^C D_b^\alpha g(\tau) \right] d\tau \\
&\quad + g(t) {}_t D_b^{-(1-\alpha)} f(t) - f(b) {}_t D_b^{-(1-\alpha)} g(b),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left[ {}^C D_t^\alpha f(t) \right] g(t) dt &= \int_a^b f(t) \left[ {}^C D_t^\alpha g(t) \right] dt \\
&\quad + g(b) {}_a D_b^{-(1-\alpha)} f(b) - f(a) {}_a D_b^{-(1-\alpha)} g(a).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left[ {}^C D_t^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau &= \int_a^t \left[ {}^R D_t^\alpha f(\tau) \right] g(\tau) d\tau - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau-a)^{-\alpha} g(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[ {}^R D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[ {}^C D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau + \frac{g(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\
&\quad - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[ {}^C D_t^\alpha g(\tau) \right] d\tau + g(t) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \\
&\quad - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Il en va de même pour l'autre formule. ■

## 2.6 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

### 2.6.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

Supposons que  $f$  admet une transformée de Laplace  $F(s)$ , alors, d'après la formule (2.5) avec  $a = 0$  on a Pour  $0 \leq p < 1$ ,

$${}_0^G D_t^\alpha f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau. \tag{2.63}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left\{ {}_0^G D_t^\alpha f(t); s \right\} &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} \left( sF(s) - f(0) \right) \\
&= s^p F(s).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Dans les applications, il faut savoir que la formule (2.64) a un sens dans le cas classique seulement pour  $0 < p < 1$ , mais pour  $p > 1$  elle a lieu au sens des distributions.(voir [23])

### 2.6.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$ .

$${}_0^R D_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \tag{2.65}$$

La transformée de Laplace de la fonction  $g(t) = t^{\alpha-1}$  est donnée dans [23] par :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}. \tag{2.66}$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Grünwald-Letnikov.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^\alpha f(t); s \} = \mathcal{L}\{ {}_0^{GL} D_t^\alpha f(t); s \} = s^{-\alpha} F(s). \quad (2.67)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f(t)$ , posons

$${}_0^R D_t^\alpha f(t) = g^{(n)}(t), \quad (2.68)$$

ce qui entraîne

$$g(t) = {}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (2.69)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à :

$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (2.70)$$

où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s). \quad (2.71)$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t). \quad (2.72)$$

Par substitution de (2.71) et (2.72) dans (2.70), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (2.73)$$

L'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, est limitée par l'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure  $t = 0$ .

En particulier, si  $n = 1$  et  $n = 2$ , on a respectivement

$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0), \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (2.74)$$

$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0) - s {}_0^R D_t^{\alpha-2} f(0), \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (2.75)$$

Le tableau 2.1 donne un bref résumé de quelques transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de cette thèse.  $a$  et  $b$  sont deux réels constants ( $a \neq b$ ) et  $\alpha, \beta > 0$  arbitraires.

| $F(s)$                                  | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\}$          |
|---|---|
| $\frac{1}{s^\alpha}$                    | $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$         |
| $\frac{1}{(s+a)^\alpha}$                | $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$ |
| $\frac{1}{s^\alpha - a}$                | $t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(at^\alpha)$  |
| $\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$      | $E_\alpha(-at^\alpha)$                        |
| $\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$             | $1 - E_\alpha(-at^\alpha)$                    |
| $\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$               | $t^\alpha E_{1, \alpha+1}(at)$                |
| $\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$ | $t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(at^\alpha)$    |
| $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$                  | $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$              |

TABLE 2.1 – Transformée de Laplace de quelques fonctions

### 2.6.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Soient  $f \in C^\infty[a, +\infty[$ ,  $n - 1 \leq \alpha < n$ , et  $a \leq 0$ .

Cas  $a = 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}_0^C D_t^\alpha f\right](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_\tau^{+\infty} e^{-st} (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} u^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left( \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{u^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} du \right) \cdot \left( \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\right](s) \cdot \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s).
\end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ , alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}_0^C D_t^\alpha f\right](s) &= s^{\alpha-n} \left[ s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \right] \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots - s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(0).
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Cas général :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}_a^C D_t^\alpha f\right](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^0 (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + \int_a^0 \left( \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dt \right) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + \int_a^0 \mathcal{L}\left[\frac{(t-\tau)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\right](s) f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{\alpha-n} \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) + s^{\alpha-n} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= \int_a^0 s e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + \left[ e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) \right]_a^0 \\
&= s \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n-1)}(\tau) d\tau + f^{(n-1)}(0) - e^{-as} f^{(n-1)}(a).
\end{aligned}$$

En intégrant encore une fois par parties, on obtient ;

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= s^2 \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n-2)}(\tau) d\tau + \left[ s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0) \right] \\
&\quad - e^{-as} \left[ s f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a) \right]
\end{aligned}$$

ce que l'on généralise par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau &= s^n \int_a^0 e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \left[ s^{n-1} f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0) \right] \\
&\quad - e^{-as} \left[ s^{n-1} f(a) + \dots + f^{(n-1)}(a) \right].
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Une combinaison de (2.77) et (2.78), en simplifiant les termes en  $f^{(k)}(0)$ , on obtient finalement

$$\mathcal{L}\left[{}_a^C D_t^\alpha f\right](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} \left[ s^{\alpha-1} f(a) + s^{\alpha-2} f'(a) + \dots + s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(a) \right]. \tag{2.79}$$

## 2.7 Interprétations des dérivées fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier, s'interprètent physiquement et géométriquement d'une manière claire en général, c'est pour cette raison que leurs usages dans la résolution des problèmes appliqués dans des différents domaines des sciences est simple.



Les manques de ces interprétations ont été reconnu dans plusieurs conférences internationales sur le calcul fractionnaire. L'absence d'une réponse à cette question a rendu la théorie de la dérivation et l'intégration fractionnaire très mystérieuse. Par conséquent, il restait toujours un des problèmes ouverts.

La dérivation et l'intégration fractionnaire sont des généralisations de la dérivation et l'intégration d'ordre entier. Pour ceci, il serait très intéressant d'avoir les interprétations physique et géométrique des opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront un lieu aux interprétations classiques des dérivations et intégrations d'ordre entier.

L'interprétation physique de l'intégration et de la dérivation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps : le temps cosmique et le temps individuel, par contre le calcul différentiel et intégral classique est basé sur l'utilisation du temps mathématique.

# Chapitre 3

## Quelques méthodes de résolutions d'équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on va exposer quelques méthodes de résolutions d'équations différentielles et intégrales fractionnaires, dont on va traiter explicitement quelques exemples pour une bonne compréhension.

### 3.1 Exemples d'équations différentielles fractionnaires

#### Exemple 3.1.1

On considère l'équation différentielle fractionnaire

$${}_0^R D_t^{\frac{2}{3}} y(t) = ay(t),$$

où  $a$  est une constante réelle.

Comme  $0 < \alpha = \frac{2}{3} \leq 1$ , nous pouvons utiliser la formule (2.74). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation, on obtient :

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\frac{2}{3}} y(t)\} = a\mathcal{L}\{y(t)\},$$

ce qui implique

$$s^{\frac{2}{3}} Y(s) - {}_0^R D_t^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = aY(s). \quad (3.1)$$

La constante  ${}_0^R D_t^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = {}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$  est la valeur de  ${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)$  en  $t = 0$ . Si nous supposons que cette valeur existe, et l'appeler  $c_1$ , alors (3.1) devient :

$$s^{\frac{2}{3}} Y(s) - c_1 = aY(s).$$

La résolution de cette équation donne :

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

Finalement, on utilise le tableau 2.1, pour trouver l'inverse de la transformée de Laplace de  $Y(s)$ , puis on conclut que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = c_1 t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}\left(at^{\frac{2}{3}}\right).$$

Dans l'exemple 3.1.1 (et toute autre situation similaire), on peut se demander si l'existence de  ${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$  implique que sa valeur est en faite  $c_1$  comme l'on a supposé. Nous allons montrer que c'est effectivement le cas.

Encore, une autre fois nous utilisons la transformée de Laplace (2.74), on trouve

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)\right\} = s^{-\frac{1}{3}} Y(s). \quad (3.2)$$

Comme

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

alors,

$$\mathcal{L}\left\{{}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)\right\} = \frac{c_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

par conséquent,

$${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1 s^{\frac{2}{3}-1}}{s^{\frac{2}{3}} - a}\right\} = c_1 E_{\frac{2}{3}, 1}\left(at^{\frac{2}{3}}\right)$$

en  $t = 0$ , on obtient

$${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0) = c_1 E_{\frac{2}{3}, 1}(0) = c_1.$$

### Exemple 3.1.2

Nous allons résoudre maintenant l'équation

$${}_0^R D_t^{\frac{4}{3}} y(t) = 0.$$

Puisque  $1 < \alpha = \frac{4}{3} \leq 2$ , nous pouvons utiliser la formule (2.75). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de cette équation, on trouve

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\frac{4}{3}} y(t)\} = 0,$$

ce qui nous donne

$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s {}_0^R D_t^{-(2-\frac{4}{3})} y(0) - {}_0^R D_t^{-(1-\frac{4}{3})} y(0) = 0. \quad (3.3)$$

Imitant l'exemple 3.1.1, nous supposons que les constantes  ${}_0^R D_t^{-(2-\frac{4}{3})}y(0)$  et  ${}_0^R D_t^{-(1-\frac{4}{3})}y(0)$  existent et les appeler  $c_1$  et  $c_2$  respectivement, alors (3.3) devient

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) - c_1s - c_2 = 0.$$

En résolvant par rapport à  $Y(s)$  nous obtenons :

$$Y(s) = \frac{c_1s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}},$$

finalement, nous utilisons le tableau 2.1, on trouve la transformée de Laplace inverse de  $Y(s)$  et nous concluons que :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1s}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})}t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

### Exemple 3.1.3 (L'oscillateur harmonique)

L'étude de l'oscillateur fractionnaire va nous permettre de découvrir le lien entre le nombre de conditions initiales et la composition des dérivées fractionnaires.

Dans le cas classique, le cadre souvent le plus adapté pour décrire l'oscillateur est le formalisme hamiltonien. Faisons de même pour le cas fractionnaire.

considérons le système hamiltonien  $H = \frac{1}{2}p^2 + v(x)$  avec l'oscillateur simple  $v = \frac{1}{2}w^2x^2$

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = p(t) \\ {}_0^C D_t^\alpha p(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -w^2x(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ .

Le système (3.4) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha x(t) = {}_0^C D_t^\alpha p(t) = -w^2x(t) \\ {}_0^C D_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha p(t) = {}_0^C D_t^\alpha (-w^2x(t)) = -w^2p(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha x(t) + w^2x(t) = 0 \\ {}_0^C D_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha p(t) + w^2p(t) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

À titre de comparaison, introduisons le système suivant :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{2\alpha} x(t) + w^2x(t) = 0 \\ {}_0^C D_t^{2\alpha} p(t) + w^2p(t) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Le système (3.6) pourrait être vu comme un prolongement de l'équation classique

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + w^2x(t) = 0. \quad (3.7)$$

Nous allons voir que les systèmes (3.5) et (3.6) ne conduisent pas aux mêmes solutions.

### Résolution du système (3.5)

Pour la résolution du système (3.5), nous avons besoin d'exprimer l'opérateur  ${}_0^C D_t^\alpha {}_0^C D_t^\alpha$  sous une autre forme. Pour cela, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.1.1** Soit  $0 \leq \alpha < 1$ . Alors :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a^C D_t^{2\alpha} f(t), \quad \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a^C D_t^{2\alpha} f(t) + f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)}, \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1. \end{aligned}$$

**Preuve :** Par définition, on a :

$${}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} \left[ \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f'(u) du \right] d\tau. \quad (3.8)$$

En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f'(u) du \right] &= \int_a^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau-u)^{-\alpha} f'(u) du \\ &= -\alpha \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha-1} f'(u) du. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha-1} f'(u) du &= \left[ \frac{(\tau-u)^{-\alpha}}{\alpha} f'(u) \right]_a^\tau - \int_a^\tau \frac{(\tau-u)^{-\alpha}}{\alpha} f''(u) du \\ &= -\frac{(\tau-a)^{-\alpha}}{\alpha} f'(a) - \int_a^\tau \frac{(\tau-u)^{-\alpha}}{\alpha} f''(u) du. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f'(u) du \right] = (\tau-a)^{-\alpha} f'(a) + \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) du,$$

par substitution dans (3.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \left[ (\tau-a)^{-\alpha} f'(a) + \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) du \right] d\tau \\ &= \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-a)^{-\alpha} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \left( \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) du \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Calculons maintenant chaque terme séparément. Pour cela rappelons tout d'abord que :

$$\mathfrak{B}(x, y) = \int_0^1 (1 - \tau)^{x-1} \tau^{y-1} d\tau = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En effectuant le changement de variables  $\tau = t - u(t - a)$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-a)^{-\alpha} d\tau &= \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} (t-a)^{1-2\alpha} \int_0^1 u^{-\alpha} (1-u)^{-\alpha} du \\ &= \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} (t-a)^{1-2\alpha} \mathfrak{B}(1-\alpha, 1-\alpha) \\ &= \frac{f'(a)}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} (t-a)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)} \\ &= \frac{f'(a)(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il en va de même pour le second terme.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \left( \int_a^\tau (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) du \right) d\tau \\ &= \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) du d\tau \\ &= \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_a^t \int_u^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-u)^{-\alpha} f''(u) \tau du \\ &= \int_a^t \left( \frac{1}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \int_u^t (t-\tau)^{-\alpha} (\tau-u)^{-\alpha} d\tau \right) f''(u) du \\ &= \int_a^t \frac{(t-u)^{1-2\alpha}}{[\Gamma(1-\alpha)]^2} \mathfrak{B}(1-\alpha, 1-\alpha) f''(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \int_a^t (t-u)^{1-2\alpha} f''(u) du. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alors, deux cas sont à considérer :

- Si  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , c'est-à-dire  $1 \leq 2\alpha < 2$ , on a :

$$\frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \int_a^t (t-u)^{1-2\alpha} f''(u) du = {}^C D_t^{2\alpha} f(t) \quad (3.12)$$

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $0 \leq 2\alpha < 1$ , une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{(t-u)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f''(u) du &= \int_a^t \frac{(t-u)^{-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(u) du + \left[ \frac{(t-u)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(u) \right]_a^t \\ &= {}^C D_t^{2\alpha} f(t) - \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par substitution de (3.12) et (3.13) dans (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}^C D_t^{2\alpha} f(t), \quad \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ {}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) &= {}^C D_t^{2\alpha} f(t) + f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)}, \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1. \end{aligned}$$

■

**Lemme 3.1.2** Soit  $0 \leq \alpha < 1$ . Alors :

$$\mathcal{L}[{}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f](s) = s^{2\alpha} \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} s^{2\alpha-1} f(a) \quad (3.14)$$

**Preuve :** En exploitant la formule (2.79), on obtient :

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f](s) &= \mathcal{L}[{}^C D_t^{2\alpha} f](s) \\ &= s^{2\alpha} \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} s^{2\alpha-1} f(a), \text{ car } 0 \leq 2\alpha < 1. \end{aligned}$$

- Si  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f](s) &= \mathcal{L}[{}^C D_t^{2\alpha} f](s) + \mathcal{L}\left[f'(a) \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)}\right] \\ &= s^{2\alpha} \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} \left( s^{2\alpha-1} f(a) + s^{2\alpha-2} f'(a) \right) + e^{-as} s^{2\alpha-2} f'(a) \\ &= s^{2\alpha} \mathcal{L}[f](s) - e^{-as} s^{2\alpha-1} f(a). \text{ car } 1 \leq 2\alpha < 2. \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent résoudre les équations (3.5) et (3.6) grâce à la transformée de Laplace.

On rappelle que  $\mathcal{L}\left[\frac{t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right] = \frac{1}{s^{1+\gamma}}$ .

La transformée de Laplace de l'équation (3.5) en  $x$  s'exprime par l'équation suivante :

$$s^{2\alpha} X(s) - s^{2\alpha-1} x(0) + w^2 X(s) = 0, \quad (3.15)$$

où  $X(s) = \mathcal{L}[x](s) = x(0) \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + w^2}$ .

Prenons maintenant sa transformée inverse.

Pour ce fait, on introduit la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres définie au premier chapitre par la relation (1.47).

$$E_{\mu,\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu k + \nu)}, \quad \mu, \nu > 0.$$

et qui semble jouer un rôle important dans le calcul fractionnaire.

Cette fonction est intéressante via notamment son lien avec la transformée de Laplace.

$$\mathcal{L}\left[t^{\gamma-\delta} E_{\gamma,\gamma-\delta+1}(\lambda t^\gamma)\right](s) = \frac{s^{\delta-1}}{s^\gamma - \lambda}. \quad (3.16)$$

On obtient donc :

$$X(s) = x(0) \mathcal{L}\left[E_{2\alpha,1}(-w^2 t^{2\alpha})\right](s). \quad (3.17)$$

Il en va de même pour l'équation en  $p$ .

En prenant la transformée de Laplace inverse de ces équations, nous en déduisons que les solutions des équations du système hamiltonien (3.5) sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = x(0) E_{2\alpha,1}(-w^2 t^{2\alpha}) \\ p(t) = p(0) E_{2\alpha,1}(-w^2 t^{2\alpha}) \end{cases} \quad (3.18)$$

Résolvons à présent l'équation (3.6). Il convient de distinguer deux cas :

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $0 \leq 2\alpha < 1$ ; d'après la formule (2.79),

$$\mathcal{L}^C[D_t^{2\alpha}x(t)](s) = s^{2\alpha}X(s) - s^{2\alpha-1}x(0) \quad (3.19)$$

La transformée de Laplace de l'équation en  $x$  est donc :

$$s^{2\alpha}X(s) - s^{2\alpha-1}x(0) + w^2X(s) = 0. \quad (3.20)$$

Par conséquent,

$$X(s) = x(0) \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + w^2}$$

Les solutions sont alors identiques aux équations (3.18).

- Si  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ , c'est-à-dire  $1 \leq 2\alpha < 2$ ; un nouveau terme apparaît dans ce cas :

$$\mathcal{L}^C[D_t^{2\alpha}x(t)](s) = s^{2\alpha}X(s) - s^{2\alpha-1}x(0) - s^{2\alpha-2}x'(0), \quad (3.21)$$

ainsi,  $X(s) = x(0) \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + w^2} + x'(0) \frac{s^{2\alpha-2}}{s^{2\alpha} + w^2}$ .

Par conséquent,

$$x(t) = x(0)E_{2\alpha,1}(-w^2t^{2\alpha}) + x'(0)E_{2\alpha,2}(-w^2t^{2\alpha}). \quad (3.22)$$

Il en va de même pour  $p$ .

Donc, les solutions du système (3.6) sont données par :

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{cases} x(t) = x(0)E_{2\alpha,1}(-w^2t^{2\alpha}) \\ p(t) = p(0)E_{2\alpha,1}(-w^2t^{2\alpha}) \end{cases} \quad (3.23)$$

- Si  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ ,

$$\begin{cases} x(t) = x(0)E_{2\alpha,1}(-w^2t^{2\alpha}) + x'(0)E_{2\alpha,2}(-w^2t^{2\alpha}) \\ p(t) = p(0)E_{2\alpha,1}(-w^2t^{2\alpha}) + p'(0)E_{2\alpha,2}(-w^2t^{2\alpha}) \end{cases} \quad (3.24)$$

■

**Remarque 3.1.1** La figure (3.1) présente l'allure des solutions du système (3.5), dans les cas  $\beta = 1$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\beta = 0.4$  pour les valeurs  $x(0) = 1$ ,  $w = 1$ , en remarquant que le cas  $\beta = 1$  n'est autre que la solution classique  $x(t) = \cos(t)$ . La figure (3.2) présente l'allure des solutions du système (3.6) dans les cas  $\beta = 1$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\beta = 0.6$  en prenant  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ ,  $w = 1$ . Le cas  $\beta = 1$  présente la solution de l'équation classique  $x(t) = \cos(t) - \sin(t)$ .

Les figures 3.1 et 3.2 nous permet de remarquer que plus  $\beta$  est petit, plus la solution est amortie. Les dérivées fractionnaires ont donc un caractère amortissant intrinsèque, pour plus de détails (voir [2] et [15]).

Le deuxième remarque concerne l'incompatibilité des systèmes (3.5) et (3.6). Cela constitue une bonne illustration de la nécessité d'écrire les équations sous une bonne forme avant d'effectuer un prolongement fractionnaire.



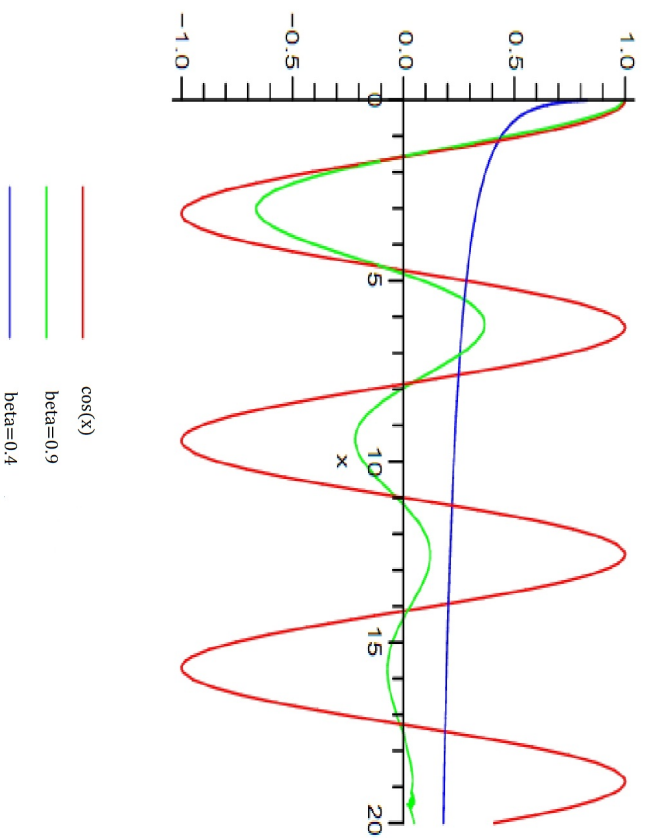


FIGURE 3.1 – Solutions de l'équation (3.5), pour  $\beta = 1, \beta = 0.9$  et  $\beta = 0.4$ .

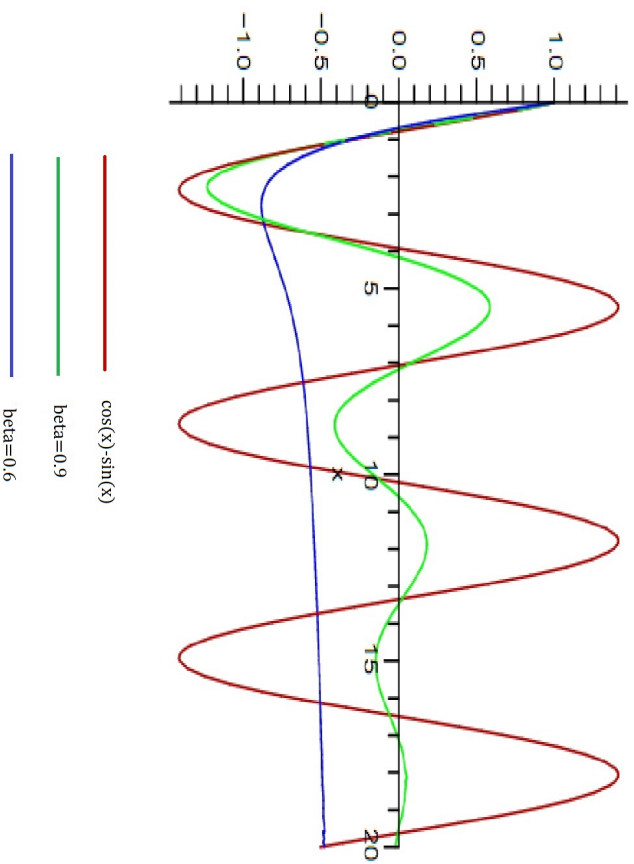


FIGURE 3.2 – Solutions de l'équation (3.6), pour  $\beta = 1, \beta = 0.9$  et  $\beta = 0.6$ .

Cette différence entre les formulations se traduit notamment par un nombre différent de conditions initiales. Une équation ne faisant intervenir que l'opérateur  ${}^C D_t^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  conduira à une solution caractérisée uniquement par sa valeur initiale, de manière similaire au cas classique. Mais ce qui devient remarquable dans le cas fractionnaire est que l'opérateur  ${}^C D_t^\alpha \circ {}^C D_t^\alpha$  conduit aussi à une seule condition initiale, tandis que  ${}^C D_t^{2\alpha}$  peut en induire deux. La différence entre  ${}^C D_t^{2\alpha}$  et  ${}^C D_t^\alpha \circ {}^C D_t^\alpha$  ne se résume donc pas à un simple terme de bord supplémentaire, mais conditionne le nombre de degré de liberté du système.

Dans l'article [2], A.A. Stanislavsky considère que les systèmes (3.5) et (3.6) sont équivalents et ne résout que le second. Les développements précédents semblent montrer le contraire. Pour être complet, mentionnons aussi que les solutions du système (3.6) diffèrent de celles trouvées par A.A. Stanislavsky car celui-ci semble finalement utiliser les résultats des dérivées de Riemann-Liouville pour sa résolution (voir [15].)

## 3.2 Exemples d'équations intégrales fractionnaires

### 3.2.1 Equation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel est bien étudiée, et il existe de nombreuses sources consacrées à ses applications dans des différents domaines. Parmi les nombreux ouvrages existants sur divers aspects des équations d'Abel nous citons par exemple [53] et [65].

Il existe aussi d'autres types d'équations intégrales, qui apparaissent dans les applications et qui peuvent être réduites à l'équation intégrale d'Abel.

**Définition 3.2.1** *L'équation intégrale*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \quad (t > 0), \quad (3.25)$$

où  $0 < \alpha < 1$ , est appelée équation intégrale d'Abel.

**Remarque 3.2.1** *La solution de l'équation d'Abel est donnée par la formule*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad (t > 0), \quad (3.26)$$

que nous préférons à écrire sous la forme inversée

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = \varphi(t), \quad (t > 0). \quad (3.27)$$

En terme des dérivées d'ordre fractionnaire, les équations (3.25) et (3.27) prennent respectivement les formes :

$${}^R D_t^{-\alpha} \varphi(t) = f(t), \quad (t > 0), \quad (3.28)$$

et

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \varphi(t), \quad (t > 0). \quad (3.29)$$

### 3.2.2 Quelques équations réductibles à l'équation d'Abel

La résolution de nombreux problèmes appliqués conduit à des équations intégrales, qui à première vue n'ont rien en commun avec l'équation intégrale d'Abel, et à cause de cette impression des efforts supplémentaires sont entrepris pour le développement de la procédure analytique ou numérique pour résoudre ces équations.

Cependant, leurs transformations à la forme de l'équation intégrale d'Abel peuvent souvent être pratique pour obtenir rapidement la solution, ce qui est la raison pour donner quelques exemples typiques d'équations qui peuvent être réduites à l'équation d'Abel. Pour plus de détails nous pouvons consulter [52], [53].

#### Exemple 3.2.1

On considère l'équation

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2 + y^2})}{\sqrt{s^2 + y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y}. \quad (3.30)$$

Posons

$$\frac{\varphi(r)}{r} = F(r^2).$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (3.30) sous la forme

$$\int_0^{+\infty} F(s^2 + y^2) ds = \frac{f(y)}{2y}. \quad (3.31)$$

En effectuant le changement de variables  $x = y^2$ ,  $\xi = s^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \xi = s^2 &\implies d\xi = 2s ds \\ &\implies d\xi = 2\xi^{\frac{1}{2}} ds \\ &\implies ds = \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi. \end{aligned}$$

Par substitution dans (3.31), on arrive à

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} F(x + \xi) d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \quad (3.32)$$

Effectuant encore une autre fois le changement de variable  $\tau = \frac{1}{x+\xi}$ , on aura d'une part,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x + \xi} &\implies x + \xi = \frac{1}{\tau} \\ &\implies d\xi = -\frac{1}{\tau^2} d\tau. \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x + \xi} &\implies \xi = \frac{1}{\tau} - x \\ &\implies \xi^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{\tau} - x \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\xi^{-\frac{1}{2}}d\xi &= -\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{\tau}-x\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\
&= -\tau^{-\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau}-x\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\
&= -\tau^{-\frac{3}{2}}\left(1-\tau x\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau \\
&= -x^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}-\tau\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau.
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les bornes de l'intégrale pour la nouvelle variable  $\tau$ . On a

$$\begin{aligned}
\xi = 0 &\implies \tau = \frac{1}{x} \\
\xi \longrightarrow +\infty &\implies \tau \longrightarrow 0^+.
\end{aligned}$$

Si nous substituons dans (3.32), nous obtenons

$$\int_{\frac{1}{x}}^0 -x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}-\tau\right)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}F\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (3.33)$$

après simplification, on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}-\tau\right)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}F\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau = f(\sqrt{x}), \quad (3.34)$$

si on pose maintenant  $t = \frac{1}{x}$ , et  $\psi(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}}F\left(\frac{1}{\tau}\right)$  on arrive à une équation d'Abel de type (3.25) avec  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\psi(\tau)d\tau = f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (3.35)$$

Par la relation (3.29), on déduit que la solution de l'équation (3.35) s'écrit sous la forme :

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)_0} {}^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}_0} {}^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad (3.36)$$

c'est-à-dire que :

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{t}{\sqrt{\pi}_0} {}^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (3.37)$$

### Exemple 3.2.2

Soit l'équation plus générale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2 + y^2})}{\sqrt{s^2 + y^2}} s^n ds = \frac{f(y)}{ny}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.38)$$

D'une façon analogue que celle utilisée dans l'exemple 1, l'équation (3.38) s'écrit sous la forme

$$\int_0^{+\infty} s^n F(s^2 + y^2) ds = \frac{f(y)}{ny}, \quad (3.39)$$

posons  $x = y^2$  et  $\xi = s^n$ . Alors :

$$d\xi = ns^{n-1} ds$$

et

$$s^{n-1} = \xi^{1-\frac{1}{n}},$$

donc

$$d\xi = n\xi^{1-\frac{1}{n}} ds$$

et par suite,

$$ds = \frac{1}{n} \xi^{\frac{1}{n}-1} d\xi.$$

Par substitution dans (3.39), on arrive à l'équation

$$\int_0^{+\infty} F(x + \xi) \xi^{\frac{1}{n}} d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad (3.40)$$

si on pose  $\tau = \frac{1}{x+\xi}$  on obtient :  $d\xi = -\frac{1}{\tau^2} d\tau$  et  $\xi^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{\tau} - x\right)^{\frac{1}{n}}$ , donc

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{1}{n}} d\xi &= -\tau^{-2} \left(\frac{1}{\tau} - x\right)^{\frac{1}{n}} d\tau \\ &= -\tau^{-2-\frac{1}{n}} (1 - \tau x)^{\frac{1}{n}} d\tau \\ &= -x^{\frac{1}{n}} \tau^{-2-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{x} - \tau\right)^{\frac{1}{n}} d\tau. \end{aligned}$$

En substituant dans (3.40), on arrive à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - \tau\right)^{\frac{1}{n}} \tau^{-2-\frac{1}{n}} F\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \quad (3.41)$$

si nous posons  $\psi(\tau) = \tau^{-2-\frac{1}{n}} F\left(\frac{1}{\tau}\right)$ , alors par le changement de variables  $t = \frac{1}{x}$  on arrive à une équation d'Abel avec  $\alpha = \frac{n+1}{n}$

$$\int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{n}} \psi(\tau) d\tau = t^{\frac{n+2}{2n}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad (3.42)$$

dont la solution est :

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} {}_0^R D_t^{\frac{n+1}{n}} \left( t^{\frac{n+2}{2n}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right),$$

ou encore

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{t^{\frac{3}{2} + \frac{1}{n}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)} {}_0^R D_t^{\frac{n+1}{n}} \left( t^{\frac{n+2}{2n}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right).$$

En particulier, si par exemple  $n = 2$ , on trouve que la solution de l'équation

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2 + y^2})}{\sqrt{s^2 + y^2}} s^2 ds = \frac{f(y)}{2y}$$

est

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) &= \frac{t^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} {}_0^R D_t^{\frac{3}{2}} \left( t f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right) \\ &= \frac{2t^2}{\sqrt{\pi}} {}_0^R D_t^{\frac{3}{2}} \left( t f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right). \end{aligned}$$

### Exemple 3.2.3 (équation intégrale de Poisson)

Soit l'équation intégrale de Poisson suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \cos \omega) \sin^{2\mu+1} \omega d\omega = f(r). \quad (3.43)$$

Ce type d'équations peut se réduire à une équation intégrale d'Abel par le changement de variables :  $x = r \cos \omega$ . En effet,

$$\begin{aligned} x = r \cos \omega &\implies dx = -r \sin \omega d\omega \\ &\implies d\omega = \frac{-1}{r \sin \omega} dx \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} x = r \cos \omega &\implies x^2 = r^2(1 - \sin^2 \omega) \\ &\implies \sin^2 \omega = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2}, \end{aligned}$$

d'un autre côté on a :  $\omega = 0 \implies x = r$  et  $\omega = \frac{\pi}{2} \implies x = 0$ .

En substituant dans l'équation (3.43), on arrive à l'équation

$$\int_0^r \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^\mu \psi(x) dx = r f(r), \quad (3.44)$$

si on pose maintenant  $y = \frac{1}{r^2}$ , alors l'équation (3.44) devient :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \quad (3.45)$$

ou plus simplement,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1 - yx^2)^\mu \psi(x) dx = g(y) \quad (3.46)$$

où

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

puisque  $(1 - yx^2)^\mu = y^\mu \left(\frac{1}{y} - x^2\right)^\mu$ , alors l'équation (3.46) peut se mettre encore sous la forme :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \left(\frac{1}{y} - x^2\right)^\mu \psi(x) dx = y^{-\mu} g(y) \quad (3.47)$$

En effectuant le changement de variables  $\tau = x^2, t = \frac{1}{y}$  on obtient  $dx = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau, y^{-\mu} g(y) = t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right)$  et par suite l'équation (3.47) s'écrit sous la forme

$$\int_0^t (t - \tau)^\mu \psi(\sqrt{\tau}) \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right) \quad (3.48)$$

si on pose  $\varphi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}, h(t) = 2t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right)$ , on arrive à une équation intégrale d'Abel

$$\int_0^t (t - \tau)^\mu \varphi(\tau) d\tau = h(t), \quad (3.49)$$

avec  $\alpha = \mu + 1$  dont la solution est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)_0^R} D_t^\mu h(t).$$

### Exemple 3.2.4

Dans de nombreux problèmes appliqués, une équation intégrale du type suivant apparaît.

$$\int_0^y \frac{1}{(y^2 - x^2)^\beta} \psi(x) dx = f(y). \quad (3.50)$$

Dans ce type d'équations, on nous effectuons souvent le changement de variables  $\tau = x^2, t = y^2$ . Ce qui nous donne :  $dx = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau, (\tau = 0, \text{ si } x = 0) \text{ et } (\tau = t, \text{ si } x = y)$ . Par substitution dans (3.50), on arrive à l'équation

$$\int_0^t (t - \tau)^{-\beta} \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} d\tau = 2f(\sqrt{t}), \quad (3.51)$$

ou plus simplement,

$$\int_0^t (t - \tau)^{-\beta} \varphi(\tau) d\tau = 2f(\sqrt{t}), \quad (3.52)$$

avec  $\varphi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$ , qui est une équation intégrale d'Abel avec  $\alpha = 1 - \beta$ , dont la solution est de la forme :

$$\varphi(t) = \frac{2}{\Gamma(1 - \beta)^0} {}^R D_t^{1-\beta} f(\sqrt{t}). \quad (3.53)$$

Donc la solution de l'équation (3.50) est donnée par :

$$\psi(\sqrt{t}) = \frac{2\sqrt{t}}{\Gamma(1 - \beta)^0} {}^R D_t^{1-\beta} f(\sqrt{t}).$$



# Chapitre 4

## Survey de quelques résultats d'existence et d'unicité

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle fractionnaire hyperbolique non linéaire avec des conditions intégrales aux limites, en utilisant la théorie du point fixe. Pour cela nous présentons dans l'annexe quelques théorèmes d'existence et d'unicité basés sur des théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. Nous utiliserons des définitions connues et des notions de l'analyse fonctionnelle qui peuvent être trouvées, par exemple, dans le livre de Kolmogorov et Fomine [3]

Le travail effectué dans ce chapitre fait l'objet d'une publication internationale : "Existence and uniqueness of solution for nonlinear hyperbolic fractional differential equation with integral boundary conditions. International Journal of Applied Mathematical Research. vol. 5(1)(2016), pp 18-23." (voir [8])

### 4.1 Existence et unicité de solutions

#### 4.1.1 Introduction

Au cours des dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont été d'un grand intérêt pour de nombreux mathématiciens, en raison du développement de la théorie du calcul fractionnaire et ses applications en physique, mécanique économie Viscoelasticité, électrochimie, électromagnétisme, etc. (voir [14], [23], [33], [54], [68]). Pas mal d'auteurs ont discuté l'existence de solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires, citons à titre d'exemple les papiers [4], [59], [62], [52], [30], [63]. Benchohra et Ouair ont discuté dans [34], l'existence de solutions du problème aux limites

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad \alpha \in (0, 1], \quad (4.1)$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s) ds = y(T), \quad (4.2)$$

où  ${}^C D^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire de Caputo,  $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $\mu \in \mathbb{R}^*$ .

Dans [66], Sotiris K. Ntouyas a étudié l'existence et l'unicité de solutions du problème

$${}^C D^q x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < q \leq 1, \quad (4.3)$$

$$x(0) = \alpha I^p x(\eta), \quad 0 < \eta < 1, \quad (4.4)$$

où  ${}^C D^q$  désigne la dérivée fractionnaire d'ordre  $q$  de Caputo,  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \neq \Gamma(p+1)/\eta^p$ ,  $\Gamma$  est la fonction d'Euler et  $I^p$ , ( $0 < p < 1$ ) est l'intégrale fractionnaire d'ordre  $p$  de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites :

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, 1], \quad (4.5)$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds \quad (4.6)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds \quad (4.7)$$

où  ${}^C D^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta \leq 1$  et  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

**Lemme 4.1.1** [67] Si  $\alpha > 0$ , alors l'équation différentielle

$${}^C D^\alpha h(t) = 0$$

admet une solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

**Lemme 4.1.2** [67] Si  $\alpha > 0$ , alors

$$I^{\alpha C} D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n = [\alpha] + 1$ .

**Définition 4.1.1** Une fonction  $y \in C(J, \mathbb{R})$  est dite solution du problème (4.5)-(4.7), si  $y$  satisfait l'équation  ${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$  sur  $J$ , et les conditions (4.6) et (4.7).

Pour l'étude d'existence de solutions du problème (4.5)-(4.7), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

**Lemme 4.1.3** Soit  $1 < \alpha \leq 2$  et soit  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée continue. Alors, le problème aux limites

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J \quad (4.8)$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds \quad (4.9)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds \quad (4.10)$$

admet une solution unique donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \int_0^1 \left[ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] h(s) ds$$

où

$$\gamma_1 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}, \quad \gamma_2 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}.$$

**Preuve :**

En appliquant le lemme 4.1.2 nous pouvons réduire le problème (4.8)-(4.10) à une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} y(t) &= I_0^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour certaines constantes  $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ . Par intégration, et en utilisant le théorème de Fubini, nous obtenons :

$$\int_0^1 y(s) ds = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2}. \quad (4.12)$$

En appliquant (4.11), on trouve :

$$y(0) = c_0,$$

et par (4.9) et (4.12), nous arrivons à :

$$y(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2},$$

alors,

$$c_1 = -2 \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

En exploitant (4.10) et (4.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1} (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s ds, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\beta-1} (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} ds + \frac{c_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s ds, \end{aligned}$$

après simplifications, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &+ \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{c_1}{\Gamma(\beta+2)}, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire aussi,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) c_0 + \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\right) c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En posant  $\gamma_1 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}$ ,  $\gamma_2 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}$ , alors (4.14) devient :

$$\gamma_1 c_0 + \gamma_2 c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

En utilisant (4.13), nous trouvons :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds - \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &+ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha h(s) ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

une combinaison de (4.11), (4.13) et (4.15) nous conduit à :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} h(s) dr ds \\ &- \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \left[ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right] \int_0^1 (1-s)^\alpha h(s) ds, \end{aligned}$$

ou d'une autre manière,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \\ &\int_0^1 \left[ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \alpha \Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] h(s) ds \end{aligned}$$

■

## 4.1.2 Résultats d'existence et d'unicité

Notre premier résultat d'existence est basé sur le théorème de l'application contractante de Banach.

**Théorème 4.1.1** *Supposons que la fonction  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et qu'il existe une constante  $L > 0$  telle que*

$$(H_1) : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad t \in [0, 1], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Si  $LA < 1$ , alors le problème aux limites (4.5)-(4.7) admet une solution unique, où*

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)}. \quad (4.16)$$

**Preuve :**

On définit l'opérateur  $F$ , par :

$$\begin{aligned} (Fy)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \int_0^1 \left[ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left( \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right) (1-s)^\alpha \right] f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Posons  $\sup_{t \in [0, 1]} |f(t, 0)| = M$  et montrons que  $FB_\rho \subset B_\rho$ , où  $B_\rho = \{y \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho\}$  et

$$\rho \geq \frac{MA}{1-LA}.$$

Soient  $y \in B_\rho$  et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} &\|(Fy)(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) dr ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \\ &\quad \left. + \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \right\} \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left( |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \right) ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} \left( |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \right) dr ds \\ &\quad + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left( |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \right) ds \\ &\quad + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha \left( |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \right) ds \\ &\quad \left. + \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha \left( |f(s, y(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \right) ds \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Posons  $u = \frac{s-r}{1-s}$ , ce qui donne  $1-r = (1-u)(1-s)$ ,  $dr = (1-s)du$  et par suite :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr ds &= \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{\alpha-1} du \\ &= \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{\alpha + \beta}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Par substitution dans (4.18) et après simplifications, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|(Fy)(t)\| &\leq (L\rho + M) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\} \\ &\leq (L\rho + M)A \leq \rho, \end{aligned} \quad (4.20)$$

ce qui implique que  $FB_\rho \subset B_\rho$ .

Supposons maintenant que  $x, y \in C([0, 1], \mathbb{R})$  et  $t \in [0, 1]$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|(Fx) - (Fy)\| &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| dr ds \\ &\quad + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\quad + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^\alpha |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \right\} \\ &\leq L\|x - y\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\} \\ &= LA\|x - y\|. \end{aligned}$$

Par hypothèse on a  $0 < LA < 1$ , alors  $F$  est une contraction. En appliquant le principe de l'application contractante de Banach, on déduit que le problème (4.5)-(4.7) admet une solution unique. ■

**Exemple 4.1.1** *Considérons le problème aux limites suivant :*

$${}^C D^{\frac{3}{2}} y(t) = \frac{1}{t^2 + 4} \times \frac{|x|}{1 + |x|} + t \cos^2 t, \quad t \in [0, 1] \quad (4.21)$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s) ds \quad (4.22)$$

$$y(1) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{1}{2}} y(s) ds. \quad (4.23)$$

Dans cet exemple,  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $f(t, x) = \frac{1}{t^2+4} \times \frac{|x|}{1+|x|} + t \cos^2 t$ .  
On a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \frac{1}{t^2+4} \times \frac{||x| - |y||}{(1+|x|)(1+|y|)} \\ &\leq \frac{1}{4} |x - y|, \end{aligned}$$

donc,  $L = \frac{1}{4}$ .

Par un calcul simple, on trouve :  $LA \simeq 0.3715... < 1$ , et d'après le théorème (4.1.1) on déduit que le problème (4.21)-(4.23) admet une solution unique.

Le second résultat d'existence est obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

**Théorème 4.1.2** Soit  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui satisfait les conditions  $(H_1)$  et  $(H_2) : |f(t, x)| \leq \mu(t)$ ,  $\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$  et  $\mu \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)$ . Supposons que

$$L \left\{ \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\} < 1. \quad (4.24)$$

Alors, le problème aux limites (4.5)-(4.7) admet une solution unique.

**Preuve :**

Posons  $\sup_{t \in [0,1]} |\mu(t)| = \|\mu(t)\|$ .

Nous fixons  $\rho^* \geq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \right\}$   
et nous considérons l'ensemble  $B_{\rho^*} = \{y \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho^*\}$ .

Nous définissons les deux opérateurs  $P$  et  $Q$  sur  $B_{\rho^*}$  par :

$$\begin{aligned} (Py)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, 1] \\ (Qy)(t) &= \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) dr ds \\ &+ \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 \Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds \\ &+ \frac{2t}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Soient  $x, y \in B_{\rho^*}$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Px + Qy\| &\leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} dr ds \\
&+ \frac{\|\mu\|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds + \frac{2|\gamma_2|\|\mu\|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha ds \\
&+ \frac{2\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha ds \\
&\leq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\} \\
&\leq \rho^*.
\end{aligned}$$

Donc,  $Px + Qy \in B_{\rho^*}$ .

Nous avons :

$$\|Q(x) - Qy\| \leq L\|x - y\| \left\{ \frac{\mathfrak{B}(\beta, \alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \right\}$$

Par exploitation de (4.24), on déduit que  $Q$  est une contraction. D'après la définition de l'opérateur  $P$ , on déduit que la continuité de  $f$  implique celle de  $P$ . En plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Px\| &\leq \|\mu\| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
&\leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ce qui implique que  $P$  est uniformément borné.

Maintenant, nous montrons que  $P$  est compact. On a :

$$\begin{aligned}
(Py)(t_1) - (Py)(t_2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right).
\end{aligned}$$

Posons  $f^* = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times B_{\rho^*}} |f(t, x)|$ . En tenant compte de la condition  $(H_1)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(Py)(t_1) - (Py)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} \left[ (t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \right] f(s, y(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{f^*}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} \left[ (t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \right] ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \right|,
\end{aligned}$$

un calcul simple nous conduit à :

$$|(Py)(t_1) - (Py)(t_2)| \leq \frac{f^*}{\Gamma(\alpha+1)} |t_2^\alpha - t_1^\alpha|. \tag{4.26}$$



Le second membre de (4.26) est indépendant de  $y$  et tend vers zéro quand  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , donc  $P$  est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on déduit que  $P$  est compact dans  $B_{\rho^*}$ . Ainsi, tous les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaits. Ceci, implique que le problème aux limites (4.5)-(4.7) admet une solution unique sur  $[0, 1]$ .



# Chapitre 5

## Résultats de non-existence des solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires

Dans ce chapitre, on établit des conditions nécessaires de non-existence globale de solutions de deux problèmes de Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires non-linéaires l'une de type parabolique et l'autre de type hyperbolique.

### 5.1 Non-existence de solutions d'un problème de Cauchy de type parabolique

Dans ce paragraphe nous discutons la non-existence globale de solutions pour les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} D_{0|t}^\alpha u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u^m) = |u|^p + f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.1)$$

et

$$\begin{cases} D_{0|t}^\alpha u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u^m) = |v|^p + f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ D_{0|t}^\delta v + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v^m) = |u|^q + g(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $D_{0|t}^\alpha, D_{0|t}^\delta$  désignent les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha, \delta \in ]0, 1[$  au sens de Caputo,  $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}, (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$  où  $\beta, \gamma \in ]1, 2[$ , sont les Laplaciens fractionnaires de puissances  $(\frac{\beta}{2}), (\frac{\gamma}{2})$  définis par :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\beta \mathfrak{F}(v)(\xi))(x, t), \quad (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} v(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(|\xi|^\gamma \mathfrak{F}(v)(\xi))(x, t),$$

où  $\mathfrak{F}$  est la transformée de Fourier et  $\mathfrak{F}^{-1}$  son inverse.

$Q_T = \mathbb{R}^N \times (0, T)$ ,  $L_{loc}^p(Q_T, dxdt)$  est l'espace de fonctions  $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\int_K |v|^p dxdt < \infty$ , pour tout compact  $K$  dans  $Q_T$ .

### 5.1.1 Introduction

Plusieurs auteurs ont établi des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et la non-existence globale de solutions pour des équations différentielles fractionnaires, voir par exemple [15],[27],[37],[21],[42],[22],[44],[32],[18], et [61].

Dans ce travail, nous suivons une idée présentée dans quelques références citées ci-dessus en ajoutant une fonction  $f(x, t)$  vérifiant certains hypohèses.

Dans [21], Fujita a considéré le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{1+\tilde{P}} & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ = Q, \\ u(x, 0) = a(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où  $\tilde{p} > 0$ . Si  $P_c = \frac{2}{N}$  (c désigne critique) nous avons :

(I) si  $0 < \tilde{P} < P_c$  et  $a(x_0) \geq 0$  pour un certain  $x_0$ . Alors toute solution du problème de Cauchy explose en temps fini.

(II) si  $P > P_c$ , alors il existe des solutions dans  $Q$  ainsi que des solutions sur  $\mathbb{R}^N \times (0, T)$  qui s'explodent en temps fini  $T$  mais pas sur  $Q$ . (Pour ces valeurs de  $P$ , pas toutes les solutions sont globales, en effet, si  $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{P+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_0 dx < 0$ ), la solution ne peut pas être globale [19].

Le cas critique  $P = P_c$ , a été étudié plus tard par Hayakawa [29] pour  $N = 1, 2$  et par Kobayaki, Sirao et Tanaka [31] pour  $N \geq 3$ .

Plus tard, Nagasawa, et Sirao [44], Sujitani [61] et Guedda, Kirane [39] ont considéré le problème :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = c(x, t)|u|^{1+\tilde{P}} & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ = Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Nagasawa et Sirao ont pris  $c(x, t) = c(x)$ , Sujitani  $c(x, t) = 1$ , tandis que Guedda et Kirane [39] ont étudié le cas  $c(x, t) = c(t)$ . Guedda et Kirane [40] ont étendu les résultats précédents à l'équation :

$$u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = h(x, t)|u|^{1+\tilde{P}}, \quad (x, t) \in Q,$$

où

$$h(x, t) = O(t^\sigma |x|^\rho) \text{ for large } |x|.$$

Finalement, Kirane et Qafsaoui [42] ont traité l'équation plus générale

$$u_t + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u^m) + a(x, t) \cdot \nabla u^q = f(x, t)|u|^{1+\tilde{P}}, \quad (x, t) \in Q.$$

En particulier, S. Q. Zhang [50] a étudié l'équation :

$$u_t - \Delta(u^m) = |x|^{\rho} t^s |u|^{1+\tilde{P}}, \quad (x, t) \in Q.$$

Pour avoir une bonne idée sur les problèmes posés, on est renvoyé aux contributions importantes [11],[30],[17],[44],[5],[45] et [50].

**Remarque 5.1.1** Dans le cas  $\alpha = 1, \beta = 1$ , le problème (5.1) se réduit à celui de la chaleur classique.

## 5.1.2 Préliminaires

Avant d'entamer nos problèmes on ait besoin de quelques définitions utiles à la suite de nos résultats.

**Définition 5.1.1** Pour  $0 < \alpha < 1$  et  $\phi \in L^1(0, T)$ , on définit respectivement les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville par :

$$D_{0|t}^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma,$$

et

$$D_{t|T}^\alpha \phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\phi(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha} d\sigma,$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction Gamma d'Euler.

**Définition 5.1.2** Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $\phi' \in L^1(0, T)$ . Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Caputo sont définies respectivement par :

$$D_{0|t}^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\phi'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha} d\sigma,$$

et

$$D_{t|T}^\alpha \phi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{\phi'(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha} d\sigma,$$

Les dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville sont liées par la relation (voir [65]) :

$$D_{0|t}^\alpha \phi(t) = D_{0|t}^\alpha (\phi(t) - \phi(0)).$$

Enfin, en tenant compte de la formule d'intégration par parties suivante (voir [65]).

$$\int_0^T f(t) D_{0|t}^\alpha g(t) dt = \int_0^T g(t) D_{t|T}^\alpha f(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

on donne les définitions suivantes :

**Définition 5.1.3** Soit  $Q_T$  l'ensemble défini par  $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0, T)$ . On dit que  $u \in L^1_{loc}(Q_T)$  est une solution faible locale du problème (5.1) définie sur  $Q_T$ ,  $0 < T < +\infty$ , si  $u \in L^p_{loc}(Q_T) \cap L^m_{loc}(Q_T)$  telle que :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \varphi(x, t) dx dt + \int_{Q_T} |u|^p \varphi(x, t) dx dt + \int_{Q_T} \varphi(x, t) f(x, t) dx dt \\ &= \int_{Q_T} (u)^m (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(x, t) dx dt + \int_{Q_T} u D_{t|T}^\alpha \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (5.3)$$

pour toute fonction  $\varphi \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$  satisfaisant  $\varphi(x, T) = 0$ .

**Définition 5.1.4** On définit de la même manière les formulations faibles du système (5.2) par :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \varphi_1(x, t) dx dt + \int_{Q_T} |v|^p \varphi_1(x, t) dx dt + \int_{Q_T} f(x, t) \varphi_1(x, t) dx dt \\ &= \int_{Q_T} u^m (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_1(x, t) dx dt + \int_{Q_T} u D_{t|T}^\alpha \varphi_1(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} v_0(x) D_{t|T}^\delta \varphi_2(x, t) dx dt + \int_{Q_T} |u|^q \varphi_2(x, t) dx dt + \int_{Q_T} g(x, t) \varphi_2(x, t) dx dt \\ &= \int_{Q_T} v^m (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi_2(x, t) dx dt + \int_{Q_T} v D_{t|T}^\delta \varphi_2(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

**Remarque 5.1.2** Si  $T = +\infty$ , les solutions des problèmes (5.1) et (5.2) sont dites globales.

### 5.1.3 Enoncés des resultats

**Théorème 5.1.1** Soient  $N > 1$ ,  $1 \leq m < p$  et  $\int_{Q_T} f(x, t) dx dt \geq 0$ . Si

$$1 < p \leq P_c = \frac{\beta + \alpha m N}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)}$$

alors, le problème (5.1) n'admet pas de solution globale non triviale.

**Preuve :**

Supposons que  $u$  est une solution globale non triviale. La solution  $u$  existe dans  $(0, T^*)$  pour tout  $T^* > 0$ . Soient  $T$  et  $R$  deux réels tels que  $0 < TR^{\frac{\beta(P-1)}{\alpha(P-m)}} < T^*$ . Soit  $\Psi \in C_0^2(\mathbb{R}^+)$ , une fonction décroissante telle que :

$$\Psi(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{si } y \geq 2, \end{cases}$$

et  $0 \leq \Psi \leq 1$ .

On choisit :

$$\phi(x, t) = \Psi\left(\frac{|x|^2 + t^\theta}{R^2}\right)$$

telle que :

$$\int_{Q_T} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} < +\infty \text{ et } \int_{Q_T} |D_{t|T}^\alpha \phi|^{p'} \phi^{-\frac{p'}{p}} < +\infty.$$

Pour estimer le membre à droite de (5.3) sur  $Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}$ , on utilise l'inégalité  $\epsilon$ -Young et pour les exposants conjugués  $\frac{p}{m}$  et  $\frac{p}{p-m}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} (u)^m (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi dx dt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} (u)^m \phi^{\frac{m}{p}} ((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi) \phi^{-\frac{m}{p}} dx dt \\ &\leq \epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi dx dt + C(\epsilon) \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} dx dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

D'une manière analogue, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u \phi^{\frac{1}{p}} (D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi) \phi^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \epsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi dxdt + C(\epsilon) \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi|^{p'} \phi^{\frac{-p'}{p}} dxdt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Pour  $\epsilon$  assez petit, (5.3), (5.6) et (5.7) donnent :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f \phi dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi dxdt &\leq \\ &C(\epsilon) \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi|^{p'} \phi^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Posons

$$\phi(x, t) = \phi(Ry, R^{\frac{2}{\theta}}\tau) = \chi(y, \tau)$$

avec

$$t = R^{\frac{2}{\theta}}\tau, \quad x = Ry, \quad dxdt = R^{N+\frac{2}{\theta}} dyd\tau$$

et définissons l'ensemble  $\Omega$  par :

$$\Omega = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, |y|^2 + \tau^{\theta} \leq 2\}.$$

Maintenant, nous estimons les deux intégrales dans le membre à droite de (5.8). Commençons par

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} dxdt.$$

On sait que :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2}$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \chi}{\partial y_1} \times \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{1}{R} \times \frac{\partial \chi}{\partial y_1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \times \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \chi}{\partial y_1} \times \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1^2} \\ &= R^{-2} \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1^2}. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = R^{-2} \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2} = R^{-2} \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_N^2},$$

donc

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2} = R^{-2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_N^2} \right),$$

i.e.

$$\Delta \phi = R^{-2} \Delta \chi.$$

Alors, on arrive à :

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi = R^{-\beta} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi.$$

Par substitution, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} dx dt &= \int_{\Omega} R^{-\frac{\beta p}{p-m}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} R^{N+\frac{2}{\theta}} dy d\tau \\ &= R^{-\frac{\beta p}{p-m} + N + \frac{2}{\theta}} \int_{\Omega} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} dy d\tau. \end{aligned}$$

(5.9)

Maintenant, on passe à

$$\int_Q |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi|^{\frac{p'}{p}} \phi^{-\frac{p'}{p}} dx dt$$

Par définition, nous avons :

$$D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^{TR^{\frac{2}{\theta}}} \frac{\phi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}} d\sigma. \quad (5.10)$$

En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{\sigma}{R^{\frac{2}{\theta}}} \quad \text{i.e.} \quad \sigma = u R^{\frac{2}{\theta}}$$

alors

$$d\sigma = R^{\frac{2}{\theta}} du$$

et

$$\sigma = t \iff u = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}} = \tau$$

$$\sigma = TR^{\frac{2}{\theta}} \iff u = T.$$

En substituant dans (5.10), on trouve :

$$\begin{aligned} D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{R^{\frac{2}{\theta}}} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^T \frac{\chi(u)}{(R^{\frac{2}{\theta}} u - R^{\frac{2}{\theta}} \tau)^{\alpha}} R^{\frac{2}{\theta}} du \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{R^{\frac{2}{\theta}}} \frac{1}{R^{\frac{2\alpha}{\theta}}} R^{\frac{2}{\theta}} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^T \frac{\chi(u)}{(u-\tau)^{\alpha}} du \\ &= R^{-\frac{2\alpha}{\theta}} \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^T \frac{\chi(u)}{(u-\tau)^{\alpha}} du \\ &= R^{-\frac{2\alpha}{\theta}} D_{\tau|T}^{\alpha} \chi, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^\alpha \phi|^{p'} \phi^{-\frac{p'}{p}} dx dt &= \int_{\Omega} R^{-\frac{2\alpha p'}{\theta}} |D_{\tau|T\chi}^\alpha |^{p'} \phi^{-\frac{p'}{p}} R^{N+\frac{2}{\theta}} dy d\tau \\ &= R^{-\frac{2\alpha p'}{\theta} + N + \frac{2}{\theta}} \int_{\Omega} |D_{\tau|T\chi}^\alpha |^{p'} \phi^{-\frac{p'}{p}} dy d\tau. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Égalisons les deux puissances de  $R$  dans (5.9) et (5.11) nous obtenons :

$$\frac{\beta p}{p-m} = \frac{2\alpha p'}{\theta}$$

i.e.

$$\theta = \frac{2\alpha(p-m)}{\beta(p-1)}.$$

Substituons (5.9) et (5.11) dans (5.8), il vient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\phi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \leq CR^\gamma \quad (5.12)$$

où,

$$C = C(\epsilon) \int_{\Omega} \left\{ |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{-\frac{p}{p-m}} \phi^{-\frac{m}{p-m}} + |D_{\tau|T\chi}^\alpha |^{p'} \phi^{-\frac{p'}{p}} \right\} dy d\tau,$$

et

$$\gamma = \frac{-\beta p}{p-m} + N + \frac{\beta(p-1)}{\alpha(p-m)}.$$

Remarquons que la dernière expression nous donne l'exposant critique pour le problème (5.1) qui est égale à :

$$P_c = \frac{\beta + \alpha m N}{\alpha N + \beta(1-\alpha)},$$

alors, deux cas sont à distinguer :

**Premier cas :**

Pour  $\gamma < 0$  i.e. ( $P < P_c$ ). On fait tendre  $R$  vers  $+\infty$ , en appliquant (5.12), on arrive à :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f + \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |u|^p \leq 0,$$

par conséquent,  $u = 0$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse :  $u$  non triviale

**Second cas :**

Pour  $\gamma = 0$  i.e. ( $P = P_c$ ), la relation (5.12) devient :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\phi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \leq C \text{ i.e. } \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \leq C,$$

d'où la convergence de l'intégrale  $\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi$ .

Maintenant, posons

$$C_R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : R^2 \leq |x|^2 + t^\theta \leq 2R^2\},$$



donc,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} |u|^p \phi dxdt = 0. \quad (5.13)$$

En exploitant (5.3), on obtient

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\phi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \leq \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^m |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi| dxdt + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u| |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi| dxdt. \quad (5.14)$$

Par l'inégalité de Hölder, on arrive à :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^m |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi| dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^m \phi^{\frac{m}{p}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi| \phi^{\frac{-m}{p}} dxdt \\ &\leq \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi dxdt \right)^{\frac{m}{p}} \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi|^{\frac{p}{p-m}} \phi^{\frac{-m}{p-m}} dxdt \right)^{\frac{p-m}{p}}, \end{aligned}$$

la dernière expression peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^m |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi| dxdt \leq \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \right)^{\frac{m}{p}} \left( \int_{\Omega_1} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-m}} \chi^{\frac{-m}{p-m}} dyd\tau \right)^{\frac{p-m}{p}}. \quad (5.15)$$

Appliquons une autre fois l'inégalité de Hölder, on trouve l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u| |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi| dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u| \phi^{\frac{1}{p}} |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi| \phi^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi|^{p'} \phi^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{p-m}{p}} \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u| |D_{t|TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha} \phi| dxdt \leq \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega_1} |D_{t|T}^{\alpha} \chi|^{p'} \chi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau \right)^{\frac{p-m}{p}} \quad (5.16)$$

où

$$\Omega_1 = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : 1 \leq |y|^2 + \tau^{\theta} \leq 2\},$$

par substitution de (5.15) et (5.16) dans (5.14), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} f\phi + \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi &\leq \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \right)^{\frac{m}{p}} \left( \int_{\Omega_1} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-m}} \chi^{\frac{-m}{p-m}} dyd\tau \right)^{\frac{p-m}{p}} \\ &+ \left( \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p \phi \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega_1} |D_{t|T}^{\alpha} \chi|^{p'} \chi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau \right)^{\frac{p-m}{p}}. \end{aligned}$$

En appliquant (5.13) à la dernière expression et on fait tendre  $R$  vers  $+\infty$  on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} f + \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |u|^p \leq 0$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |u|^p \leq 0$$

donc, on arrive aussi à une contradiction avec l'hypothèse  $u$  est non triviale et ceci termine la démonstration ■

**Théorème 5.1.2** Soient  $N > 1$ ,  $1 \leq m < p$  et  $f, g$  deux fonctions vérifiant  $\int_{Q_T} f(x, t) ds dt \geq 0$  et  $\int_{Q_T} g(x, t) ds dt \geq 0$ . Si

$$1 < N \leq \max \left\{ \frac{\frac{m\delta}{q} + \alpha - (1 - \frac{m^2}{pq})}{\frac{m(p-m)\delta}{pq\gamma} + \frac{(q-m)\alpha}{q\beta}}, \frac{\frac{m\alpha}{p} + \delta - (1 - \frac{m^2}{pq})}{\frac{m(q-m)\alpha}{pq\beta} + \frac{(p-m)\delta}{p\gamma}} \right\},$$

alors le système (5.2) n'admet pas de solution globale non triviale.

**Preuve :**

On procède toujours par contradiction. Posons

$$\phi_j(x, t) = \phi \left( \frac{t^2 + |x|^{2\theta_j}}{R^2} \right), \quad j = 1, 2$$

où  $R > 0$ ,  $\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}$  et  $\theta_2 = \frac{\gamma}{\delta}$ .

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_{Q_{TR}} u^m |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi_1| \leq \left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{\frac{m}{q}} \left( \int_{Q_{TR}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi_1|^{\frac{q}{q-m}} \phi_2^{-\frac{m}{q-m}} \right)^{\frac{q-m}{q}}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} u |D_{t|TR}^{\alpha} \phi_1| \leq \left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{\frac{m}{q}} \left( \int_{Q_{TR}} |D_{t|TR}^{\alpha} \phi_1|^{\frac{q}{q-m}} \phi_2^{-\frac{m}{q-m}} \right)^{\frac{q-m}{q}}$$

d'où, par la formulation (5.4) il vient :

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 + \int_{Q_{TR}} f \phi_1 \leq \left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{\frac{m}{q}} .A, \quad (5.17)$$

où

$$A = \left( \int_{Q_{TR}} |(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi_1|^{\frac{q}{q-m}} \phi_2^{-\frac{m}{q-m}} \right)^{\frac{q-m}{q}} + \left( \int_{Q_{TR}} |D_{t|TR}^{\alpha} \phi_1|^{\frac{q}{q-m}} \phi_2^{-\frac{m}{q-m}} \right)^{\frac{q-m}{q}} .$$

D'une manière analogue, la formulation (5.5) donne :

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 + \int_{Q_{TR}} g \phi_2 \leq \left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{\frac{m}{p}} .B, \quad (5.18)$$

$$B = \left( \int_{Q_{TR}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \phi_2|^{\frac{p}{p-m}} \phi_1^{-\frac{m}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} + \left( \int_{Q_{TR}} |D_t^\delta \phi_2|^{\frac{p}{p-m}} \phi_1^{-\frac{m}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}}.$$

En utilisant les inégalités (5.17) et (5.18), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 + \int_{Q_{TR}} f \phi_1 &\leq \left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{\frac{m}{q}} .A \\ &\leq \left[ \left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{\frac{m}{p}} .B \right]^{\frac{m}{q}} .A \\ &= \left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{\frac{m^2}{pq}} B^{\frac{m}{q}} .A, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{1-\frac{m^2}{pq}} \leq B^{\frac{m}{q}} .A \quad (5.19)$$

et

$$\left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{1-\frac{m^2}{pq}} \leq A^{\frac{m}{p}} .B. \quad (5.20)$$

Pour  $A$ , on effectue le changement de variables  $t = R\tau$ ,  $x = R^{\frac{\alpha}{\beta}} y$ , et pour  $B$  on effectue le changement  $t = R\tau$ ,  $x = R^{\frac{\delta}{\gamma}} y$ .

Grâce à l'expression (5.19) on arrive à :

$$\left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{1-\frac{m^2}{pq}} \leq C(R^{-l_1})^{\frac{m}{q}} R^{-l_2}$$

i.e.

$$\left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{1-\frac{m^2}{pq}} \leq CR^{-(\frac{ml_1}{q}+l_2)}, \quad (5.21)$$

où

$$\begin{aligned} l_1 &= \delta - \frac{p-m}{p} \left( \frac{\delta}{\gamma} N + 1 \right) \\ l_2 &= \alpha - \frac{q-m}{q} \left( \frac{\alpha}{\beta} N + 1 \right). \end{aligned}$$

Pour  $\frac{ml_1}{q} + l_2 \geq 0$ , on trouve la valeur critique pour la première équation du système (5.2).

$$N \leq \frac{\frac{m\delta}{q} + \alpha - (1 - \frac{m^2}{pq})}{\frac{m(p-m)\delta}{pq\gamma} + \frac{(q-m)\alpha}{q\beta}}. \quad (5.22)$$

d'une manière similaire, en utilisant (5.20), on trouve la valeur critique pour la deuxième équation du système (5.2).

$$N \leq \frac{\frac{m\alpha}{p} + \delta - (1 - \frac{m^2}{pq})}{\frac{m(q-m)\alpha}{pq\beta} + \frac{(p-m)\delta}{p\gamma}}. \quad (5.23)$$

Sous les conditions ci-dessus (valeurs critiques), en faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$  dans (5.21), on obtient :

$$\left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \phi_1 \right)^{1 - \frac{m^2}{pq}} \leq 0 \quad (5.24)$$

La même méthode de démonstration, en considérant la condition  $\frac{ml_2}{p} + l_1 \geq 0$ , on trouve :

$$\left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \phi_2 \right)^{1 - \frac{m^2}{pq}} \leq 0. \quad (5.25)$$

L'une des inégalités (5.24) ou (5.25) nous conduit à l'une des contradictions  $u$  est non triviale ou  $v$  est non triviale, c'est-à-dire que le système (5.2) n'admet pas de solution globale non triviale.

■

## 5.2 Non-existence de solutions d'un problème de Cauchy de type hyperbolique

Dans ce paragraphe, nous intéressons à l'équation

$$D_{0|t}^{1+\alpha}u + D_{0|t}^{\beta}u + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}u = h(t, x) |u|^p |1-u|^q,$$

définie sur  $Q = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ , où  $p, q > 1$ ,  $-1 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 2$ ,  $0 < \gamma \leq 2$ , et  $\beta < 1 + \alpha$  avec les conditions  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ , et au système de type (SDF) avec des conditions initiales

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha_1}u + D_{0|t}^{\beta_1}u + (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}}u = h_1(t, x) |v|^{p_1} |1-v|^{q_1}, & (t, x) \in Q \\ D_{0|t}^{1+\alpha_2}v + D_{0|t}^{\beta_2}v + (-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}}v = h_2(t, x) |u|^{p_2} |1-u|^{q_2}, & (t, x) \in Q \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où  $-1 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 2$ ,  $0 < \gamma_i \leq 2$ , et  $\beta_i < 1 + \alpha_i$ .

Nous trouvons un exposant critique de type Fujuta pour les différentes valeurs  $p_i, q_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , ( $i = 1, 2$ ) et  $N$ .

Le travail effectué dans ce paragraphe a fait l'objet d'une publication internationale : "Non-existence of global solutions for a fractional problem with a nonlinearity of the Fisher type". Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 12(2)(2016), pp 1613-1627." (voir [9])

## 5.2.1 Introduction

Dans le calcul fractionnaire, nous utilisons les dérivées et les intégrales d'ordre non entier. Des équations et des systèmes fractionnaires ont été étudié dans plusieurs documents (voir par exemple ([41],[43],[66]) où il était utilisé l'opérateur différentiel fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ .

Dans [43], Kirane et Tatar ont considéré un problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire hyperbolique :

$$u_{tt} + D_{0|t}^{\beta} u = \Delta u + h(t, x) | u |^p, \quad (5.26)$$

où  $p > 1$  et  $\beta \in (0, 1)$ . Cette équation est utilisée pour décrire la diffusion anormale, média de fractal, phénomènes biologiques etc...(voir [20]). Les deux auteurs ont établi que sous la condition

$$1 < p \leq 1 + \frac{2\beta + \rho}{2 + N - 2\beta}, \quad (5.27)$$

l'équation précédente (5.26) n'admet pas des solutions globales.

Un grand nombre de chercheurs ont été traité le cas où  $\beta = 1$ , de sorte que beaucoup de résultats de non-existence ont été prouvé, également les résultats d'existence globale ont été trouvé en utilisant l'équation du télégraphe fractionnaire  $D^{2\beta} u + D^{\beta} u = \Delta u$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , ou par l'étude d'autres équations fractionnaires hyperboliques de mouvements Brownien par exemple. Voir aussi [64] où S. Fuquin et al ont utilisé un exposent critique tout en étudiant un système hyperbolique de type réaction-diffusion d'un point de vue de l'existence et de la non-existence des solutions.

Dans [47], Nasser-eddine Tatar a étudié le problème différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{1+\alpha} u + D^{\beta} u = \Delta u + h(t, x) | u |^p, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad u_t(0, x) = u_1(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.28)$$

où  $-1 < \alpha < 1$  et  $0 < \beta < 2$ . Il a prouvé que si  $u_0(x), u_1(x) \geq 0$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$  et la fonction  $h$  vérifie  $h(t, x) > 0$ ,  $h^{1-q} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$  et  $h(tR^2, xR^2) = R^{\rho} h(t, x)$  pour  $\rho > 0$  et  $R > 0$  assez grand alors, le problème (5.28) n'admet pas de solution globale non triviale en temps.

Dans [30], Saoudi et Haouam ont considéré le système différentiel fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha_1} u + D_{0|t}^{\beta_1} u + (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} u = | v |^p, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ D_{0|t}^{1+\alpha_2} v + D_{0|t}^{\beta_2} v + (-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}} v = | u |^q, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.29)$$

où  $p, q > 1$ ,  $-1 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 2$  et  $0 < \beta_i < 1 + \alpha_i$ , ( $i = 1, 2$ ). Il ont prouvé que pour  $p, q > 1$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 1$  ( $i = 1, 2$ ). Si

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{1 + pq(\beta_2 - 1) + \beta_1 p}{\beta_1(p - 1) + \beta_2(q - 1)p}, \frac{1 + pq(\beta_1 - 1) + \beta_2 q}{\beta_2(q - 1) + \beta_1(p - 1)q} \right\} \text{ for } N \geq 1,$$

alors, le problème (5.29) n'admet pas de solution globale non triviale.

Dans ce chapitre, nous considérons deux problèmes. Le premier est le suivant :

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha}u + D_{0|t}^{\beta}u + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}u = h(t, x) | u |^p | 1 - u |^q, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad u_t(0, x) = u_1(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.30)$$

avec des données initiales où  $p, q > 1$ ,  $-1 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 2$ ,  $0 < \gamma < 2$  et  $\beta < 1 + \alpha$ .  $D^{\alpha}, D^{\beta}$  désignent respectivement les dérivées fractionnaires en temps d'ordres arbitraires  $\alpha$  et  $\beta$  aux sens de Caputo,  $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$  est réservé pour le laplacien fractionnaire, par rapport à  $x$ , d'ordre  $\frac{\gamma}{2}$  lequel est défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\gamma} \mathcal{F}(u)(\xi))(t, x),$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier et  $\mathcal{F}^{-1}$  son inverse. Et le deuxième problème est donné par

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha_1}u + D_{0|t}^{\beta_1}u + (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}}u = h_1(t, x) | v |^{p_1} | 1 - v |^{q_1}, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ D_{0|t}^{1+\alpha_2}v + D_{0|t}^{\beta_2}v + (-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}}v = h_2(t, x) | u |^{p_2} | 1 - u |^{q_2}, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad u_t(0, x) = u_1(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ v(0, x) = v_0(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad v_t(0, x) = v_1(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.31)$$

où  $-1 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 2$ ,  $0 < \gamma_i \leq 2$ , et  $\beta_i < 1 + \alpha_i$ .

## 5.2.2 Organisation et objectif

Ce chapitre est organisé de la façon suivante :

- Dans la section 5.3, nous rappelons quelques définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et le lien entre les deux définitions, nous donnons aussi quelques définitions de solutions faibles du problème cité.
- La section 5.4, est consacrée à l'étude de la non-existence de solutions du problème (5.30).
- Dans la section 5.5, nous établissons un résultat sur la non-existence de solutions pour le système fractionnaire (5.31).

**Remarque 5.2.1** *Particulièrement, le second terme de l'équation (5.30) et dans le système (5.31) sont pris dans une forme de type Fisher (voir [51]), qui interprètent un modèle mathématique pour la croissance de la simulation et de la propagation d'une population bactérienne particulière dans un domaine non borné .*

**Remarque 5.2.2** *Dans le cas où  $q = 0$  et  $\gamma = 2$ , le problème (5.30) se réduit au problème de Cauchy (5.28) étudié dans [50]*

**Remarque 5.2.3** *Dans le cas où  $h_1(t, x) = h_2(t, x) = 1$ ,  $q_1 = q_2 = 0$  et  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$  le système (5.31) se réduit au système (5.29) étudié dans [30].*

### 5.2.3 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons deux définitions différentes de dérivées fractionnaires, certaines de leurs propriétés et la définition de solutions faibles de notre problème (5.30)

Pour la courtoisie du lecteur, on rappelle ici quelques définitions et propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Riemman-Liouville et de Caputo.

**Définition 5.2.1** La dérivée à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemman-Liouville sont définies respectivement par :

$$D_{0|t}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} f(\tau) d\tau, \quad n = [\gamma] + 1, \quad \gamma > 0.$$

$$D_{t|T}^\gamma f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^T (\tau-t)^{n-\gamma-1} f(\tau) d\tau, \quad n = [\gamma] + 1, \quad \gamma > 0.$$

La dérivée de Caputo est donnée dans le cas général par :

$$D^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n = [\gamma] + 1, \quad \gamma > 0.$$

**Définition 5.2.2** Soit  $0 < \alpha < 1$  et  $0 < \beta < 1$ . On appelle solution faible du problème (5.30) toute fonction  $u$  localement intégrable telle que  $u \in L_{loc}^p(Q_T, h dtdx)$  et qui satisfait

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \varphi h |u|^p |1-u|^q dtdx &= \int_{Q_T} u(t,x) D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi dtdx - \int_{Q_T} u_1(x) D_{t|T}^\alpha \varphi dtdx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \varphi(0) dx + \int_{Q_T} [u(t,x) - u_0(x)] D_{t|T}^\beta \varphi dtdx \\ &+ \int_{Q_T} u(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi dtdx \end{aligned} \quad (5.32)$$

pour toute fonction  $\varphi \geq 0$  telle que  $\varphi \in C_0^2(Q_T)$  et  $\varphi(T,x) = D_{t|T}^\alpha \varphi(T,x) = 0$ .

On désigne par  $Q_T$  l'ensemble  $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N$  et par  $L_{loc}^p(Q_T, h dtdx)$  l'espace de toutes les fonctions  $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\int_C |v|^p h(t,x) dtdx < +\infty$  pour tout compact  $C$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ .

Les intégrales dans la formule (5.32) sont supposées convergentes et si  $T = +\infty$ , la solution est dite globale.

**Définition 5.2.3** Soient  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 < \beta < 2$  et  $\beta \leq 1 + \alpha$ . On appelle solution faible du problème (5.30) toute fonction  $u$  localement intégrable telle que  $u \in L_{loc}^p(Q_T, h dtdx)$  et qui satisfait

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \varphi h |u|^p |1-u|^q dtdx &= \int_{Q_T} u(t,x) D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi dtdx - \int_{Q_T} u_1(x) D_{t|T}^\alpha \varphi dtdx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|T}^\alpha \varphi(0) dx + \int_{Q_T} [u(t,x) - u_0(x)] D_{t|T}^\beta \varphi dtdx \\ &+ \int_{Q_T} u(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi dtdx \end{aligned} \quad (5.33)$$

pour toute fonction  $\varphi \geq 0$  telle que  $\varphi \in C_0^2(Q_T)$  et  $\varphi(T,x) = D_{t|T}^\alpha \varphi(T,x) = D_{t|T}^{\beta-1} \varphi(T,x) = 0$ .

**Remarque 5.2.4** Afin d'obtenir les formulations faibles dans les définitions ci-dessus, nous avons utilisé certaines propriétés en tant que :

$$D_{0|t}^{1+\alpha} f = D \cdot D_{0|t}^\alpha f \quad \text{et} \quad D_{t|T}^{1+\alpha} f = -D \cdot D_{t|T}^\alpha f$$

et la propriété

$$D^{n+\alpha} f(t) = D^n D^\alpha f(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 5.2.4 Enoncés des résultats

Ici, nous considérons seulement le cas  $0 < \alpha < 1$  et  $0 < \beta < 1$ . Les autres cas peuvent être traités de la même manière.

**Théorème 5.2.1** Supposons que  $u_0(x), u_1(x) \geq 0$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ , et  $h$  une fonction qui vérifie  $h(t, x) > 0$ , et  $h(tR^2, xR^\beta) = R^\rho h(t, x)$  pour  $\rho > 0$  et  $R > 0$  assez grand. Alors, si  $1 < p \leq 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$ , le problème (5.30) n'admet pas de solution globale non triviale en temps.

**Preuve :**

Supposons par contradiction, qu'il existe une solution  $u \neq 0$  pour tous les temps  $t > 0$ , et considérons la solution  $u$  sur  $(0, T_*)$ .  $T$  et  $R$  sont deux constantes positives telles que  $0 < TR^2 < T_*$ . Nous considérons comme fonction test,

$$\varphi(t, x) = \varphi_0 \left( \frac{t^{2\beta} + |x|^4}{R^{4\beta}} \right)$$

telle que  $\varphi(TR^2, x) = D_{t|TR^2}^\alpha \varphi(t, x) \Big|_{TR^2} = 0$ .

La fonction  $\varphi_0 \in C_0^2(R_+)$ , est non négative, non croissante et satisfaisant :

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{si } z \geq 2, \end{cases}$$

avec  $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ .

De la définition 5.2.2 la formulation faible de solutions de notre problème est :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1 - u|^q dt dx &+ \int_{Q_{TR^2}} u_1(x) D_{t|TR^2}^\alpha \varphi dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u_0(x) D_{t|TR^2}^\beta \varphi dt dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR^2}^\alpha \varphi(0) dx = \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi dt dx \\ &+ \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^\beta \varphi dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi dt dx. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dans la formulation (5.34), il est clair que  $D_{t|TR^2}^\alpha \varphi \geq 0$  et  $D_{t|TR^2}^\beta \varphi \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1 - u|^q dt dx &\leq \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^\beta \varphi dt dx \\ &+ \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi dt dx. \end{aligned} \quad (5.35)$$



Par l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi dt dx = \int_{Q_{TR^2}} u(1-u)^{\frac{q}{p}} (\varphi h)^{\frac{1}{p}} (1-u)^{-\frac{q}{p}} (D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi) (\varphi h)^{-\frac{1}{p}} dt dx \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dx dt + C_\varepsilon \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} |D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} dt dx. \end{aligned} \quad (5.36)$$

D'une manière analogue :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{TR^2}} u D_{t|TR^2}^\beta \varphi dt dx = \int_{Q_{TR^2}} u(1-u)^{\frac{q}{p}} (\varphi h)^{\frac{1}{p}} (1-u)^{-\frac{q}{p}} (D_{t|TR^2}^\beta \varphi) (\varphi h)^{-\frac{1}{p}} dt dx \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dx dt + C_\varepsilon \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} |D_{t|TR^2}^\beta \varphi|^{\frac{p}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} dt dx. \end{aligned} \quad (5.37)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{TR^2}} u(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi dt dx = \int_{Q_{TR^2}} u(1-u)^{\frac{q}{p}} (\varphi h)^{\frac{1}{p}} (1-u)^{-\frac{q}{p}} ((-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi) (\varphi h)^{-\frac{1}{p}} dt dx \\ & \leq \varepsilon \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dx dt + C_\varepsilon \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} dt dx. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Une substitution de (5.36), (5.37) et (5.38) dans (5.35) donne, pour  $\varepsilon < \frac{1}{3}$  :

$$\int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dx dt \leq C_\varepsilon \left[ A_1 + A_2 + A_3 \right]. \quad (5.39)$$

Où,

$$A_1 = \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx \quad (5.40)$$

$$A_2 = \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^\beta \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx \quad (5.41)$$

$$A_3 = \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q}{p-1}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx. \quad (5.42)$$

Maintenant, nous estimons le membre à droite de (5.39). Pour  $u \neq 1$  et  $u \neq 0$ .

On a :

$$\forall u > 0, (u \neq 1), \forall u_0 > l > 0 : |1-u|^{-\frac{q^2}{p-1}} < C_{p,q}. \quad (5.43)$$

En utilisant (5.39) et (5.43), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dt dx \leq \\ & C \left[ \int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx + \int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^\beta \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx + \right. \\ & \left. \int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} dt dx \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Pour certaine constante positive  $C$ .

Ensuite, nous effectuons les changements de variables  $t = R^2\tau$  et  $x = R^\beta y$ , en définissant l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\chi$  par :

$$\Omega = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N : \tau^{2\beta} + |y|^4 \leq 2\}$$

et

$$\chi(\tau, y) = \varphi(R^2\tau, R^\beta y) = \varphi(t, x).$$

Clairement, nous avons :

$$\begin{aligned} dt dx &= R^{2+\beta N} d\tau dy, \\ D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi &= R^{-2(\alpha+1)} D_{\tau|T}^{\alpha+1} \chi, \\ D_{t|TR^2}^\beta \varphi &= R^{-2\beta} D_{\tau|T}^\beta \chi, \end{aligned}$$

et

$$(-\Delta\varphi)^{\frac{\gamma}{2}} = R^{-\beta\gamma} (-\Delta\chi)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Par substitution, nous obtenons :

$$\int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^{\alpha+1} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} = R^{\beta N + 2 - \frac{2(\alpha+1)p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1}} \int_{\Omega} (\chi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{\tau|T}^{\alpha+1} \chi|^{\frac{p}{p-1}}, \quad (5.45)$$

$$\int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{t|TR^2}^\beta \varphi|^{\frac{p}{p-1}} = R^{\beta N + 2 - \frac{2(\alpha+1)p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1}} \int_{\Omega} (\chi h)^{-\frac{1}{p-1}} |D_{\tau|T}^\beta \chi|^{\frac{p}{p-1}}, \quad (5.46)$$

$$\int_{Q_{TR^2}} (\varphi h)^{-\frac{1}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \varphi|^{\frac{p}{p-1}} = R^{\beta N + 2 - \frac{\beta\gamma p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1}} \int_{\Omega} (\chi h)^{-\frac{1}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-1}}. \quad (5.47)$$

Les relations (5.45)-(5.47) avec (5.44) impliquent que :

$$\begin{aligned} &\int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q dt dx \\ &\leq CR^{\beta N + 2 - \frac{\beta\gamma p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1}} \int_{\Omega} (\chi h)^{-\frac{1}{p-1}} \left[ |D_{\tau|T}^{\alpha+1} \chi|^{\frac{p}{p-1}} + |D_{\tau|T}^\beta \chi|^{\frac{p}{p-1}} + |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \chi|^{\frac{p}{p-1}} \right] \\ &\leq CR^{\beta N + 2 - \frac{\beta\gamma p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Observons que,  $\beta N + 2 - \frac{\beta\gamma p}{p-1} - \frac{\rho}{p-1} \leq 0$  est équivalent à notre hypothèse  $p \leq 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$ .

**Premier cas :**

Si  $p < 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$ , alors  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_{TR^2}} h |u|^p |1-u|^q = 0$ . Cela implique que  $u = 0$  ou  $u = 1$  puisque  $h(t, x) > 0$  sur  $R^+ \times R^N$ . C'est une contradiction avec notre hypothèse.

**Deuxième cas :**

Si  $p = 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$ , alors en exploitant (5.48), nous obtenons :

$$\int_{Q_\infty} h |u|^p |1-u|^q \leq C. \quad (5.49)$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à tous les termes du membre à droite de (5.35), nous trouvons :

$$\int_{Q_{TR^2}} \varphi h |u|^p |1-u|^q \leq \left( \int_{C_R} \varphi h |u|^p |1-u|^q \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left( \int_{C_R} |1-u|^{-\frac{q}{pp'}} (\varphi h)^{-\frac{p'}{p}} \left[ |D_{\tau|T}^{\alpha+1} \chi|^{p'} + |D_{\tau|T}^{\beta} \chi|^{p'} + |(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \chi|^{p'} \right] \right)^{\frac{1}{p'}}$$

où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ et } C_R = \{(t, x) \in R^+ \times R^N : 0 \leq t^{2\beta} + |x|^4 \leq 2R^{4\beta}\}.$$

Par passage à la limite quand  $R \rightarrow +\infty$ , en tenant compte de la convergence de l'intégrale dans (5.49), nous arrivons à

$$\int_{Q_\infty} h |u|^p |1-u|^q = 0 \text{ i.e. } u = 0 \text{ ou } u = 1 \text{ (puisque } h(t, x) > 0).$$

On conclut donc, qu'il n'existe plus de solutions globales non triviales. ■

**Remarque 5.2.5** Si  $\gamma = 2, q = 0$ , nous obtenons l'exposant critique  $p \leq 1 + \frac{2\beta+\rho}{2+\beta N-2\beta}$  pour le problème (5.28) traité par Nasser-eddine Tatar dans [47].

Maintenant, nous considérons le problème de Cauchy (5.31) pour un système fractionnaire hyperbolique non-linéaire avec données initiales.

**Théorème 5.2.2** Soient  $N > 1, p > 1, q > 1, 0 < \alpha_i < 1, 0 < \beta_i < 1$ , pour  $i = 1, 2$ . Si

$$N \leq \max \left\{ \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_2 - 1) + 2\beta_1 p_1 + \rho(p_1 + 1)}{\beta_1(p_1 - 1) + \beta_2 p_1(p_2 - 1)}, \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_1 - 1) + 2\beta_2 p_2 + \rho(p_2 + 1)}{\beta_2(p_2 - 1) + \beta_1 p_2(p_1 - 1)} \right\}$$

pour  $N \geq 1$ . Alors le système (5.31) n'admet pas de solutions globales faibles non triviales avec  $u \neq 1$  et  $v \neq 1$ .

**Preuve :**

Nous procédons toujours par contradiction. Supposons qu'il existe une solution positive non triviale  $(u, v) \neq (1, 1)$  pour tout  $t > 0$  dans  $(0, T^*)$ , avec  $T^* > 0$  arbitraire.

Soient  $T$  et  $R$  deux constantes positives telles que  $0 < TR^2 < T^*$ . Nous considérons la fonction test

$$\varphi_j(t, x) = \varphi_0 \left( \frac{t^{2\beta_j} + |x|^4}{R^{4\beta_j}} \right), \quad j = 1, 2$$

telle que  $\varphi_j(TR^2, x) = D_{t|TR^2} \varphi_j(t, x) \Big|_{TR^2} = 0$ .

La fonction  $\varphi_0 \in C_0^2(R_+)$  est positive, non croissante et satisfait

$$\varphi_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{if } z \geq 2, \end{cases}$$

et  $0 \leq \varphi_0 \leq 1$ .

De la définition 5.2.2 la formulation faible de solutions de notre problème est :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} dt dx &+ \int_{Q_{TR^2}} u_1(x) D_{t|TR^2}^{\alpha_1} \varphi_1 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u_0(x) D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1 dt dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) D_{t|TR^2}^{\alpha_1} \varphi_1(0) dx = \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1 dt dx \\
&+ \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} \varphi_1 dt dx.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} dt dx &+ \int_{Q_{TR^2}} v_1(x) D_{t|TR^2}^{\alpha_2} \varphi_2 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} v_0(x) D_{t|TR^2}^{\beta_2} \varphi_2 dt dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) D_{t|TR^2}^{\alpha_2} \varphi_2(0) dx = \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) D_{t|TR^2}^{\alpha_2+1} \varphi_2 dt dx \\
&+ \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) D_{t|TR^2}^{\beta_2} \varphi_2 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}} \varphi_2 dt dx.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

De (5.50) et (5.51), tandis que  $D_{t|TR^2}^{\alpha_i} \varphi_i \geq 0$  et  $D_{t|TR^2}^{\beta_i} \varphi_i \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , alors nous obtenons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} dt dx &\leq \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1 dt dx \\
&+ \int_{Q_{TR^2}} u(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} \varphi_1 dt dx.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} dt dx &\leq \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) D_{t|TR^2}^{\alpha_2+1} \varphi_2 dt dx + \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) D_{t|TR^2}^{\beta_2} \varphi_2 dt dx \\
&+ \int_{Q_{TR^2}} v(t,x) (-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}} \varphi_2 dt dx.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Maintenant, nous estimons les quantités qui se trouvent dans le second membre de (5.52) et (5.53). En utilisant l'inégalité de Hölder nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{TR^2}} u(t,x) D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1 \\
&\leq \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \int_{Q_{TR^2}} |1-u|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1|^{p_2'} (\varphi_2 h)^{-\frac{p_2'}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2'}} \\
&\leq C \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1|^{p_2'} (\varphi_2 h)^{-\frac{p_2'}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2'}}
\end{aligned}$$

et

$$\int_{Q_{TR^2}} u(t, x) D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1 \leq C \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1|^{p'_2} (\varphi_2 h)^{-\frac{p'_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p'_2}}$$

nous avons aussi :

$$\int_{Q_{TR^2}} u(t, x) (-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} \varphi_1 \leq C \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left( \int_{Q_{TR^2}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} \varphi_1|^{p'_2} (\varphi_2 h)^{-\frac{p'_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p'_2}}.$$

Par conséquent,

$$\int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} \leq C \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \mathcal{A} \quad (5.54)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\alpha_1+1} \varphi_1|^{p'_2} (\varphi_2 h)^{-\frac{p'_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p'_2}} + \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\beta_1} \varphi_1|^{p'_2} (\varphi_2 h)^{-\frac{p'_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \\ &+ \left( \int_{Q_{TR^2}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma_1}{2}} \varphi_1|^{p'_2} (\varphi_2 h)^{-\frac{p'_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p'_2}}. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, nous avons l'estimation suivante :

$$\int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \leq C \left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \mathcal{B} \quad (5.55)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\alpha_2+1} \varphi_2|^{p'_1} (\varphi_1 h)^{-\frac{p'_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p'_1}} + \left( \int_{Q_{TR^2}} |D_{t|TR^2}^{\beta_2} \varphi_2|^{p'_1} (\varphi_1 h)^{-\frac{p'_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \\ &+ \left( \int_{Q_{TR^2}} |(-\Delta)^{\frac{\gamma_2}{2}} \varphi_2|^{p'_1} (\varphi_1 h)^{-\frac{p'_1}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p'_1}}. \end{aligned}$$

Les inégalités (5.54) et (5.55) impliquent que :

$$\left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2}} \leq C \mathcal{B}^{\frac{1}{p_2}} \mathcal{A}$$

et

$$\left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2}} \leq C \mathcal{A}^{\frac{1}{p_1}} \mathcal{B}.$$

En effectuant les changements de variables  $t = R^2 \tau$  et  $x = R^{\beta_i} y$ ,  $i = 1, 2$  dans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , nous obtenons :

$$\left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_1 h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2}} \leq C_1 (R^{k_1})^{\frac{1}{p_2}} R^{k_2}$$

et

$$\left( \int_{Q_{TR^2}} \varphi_2 h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2}} \leq C_1 (R^{k_2})^{\frac{1}{p_1}} R^{k_1}.$$

où

$$k_1 = \frac{2 + \beta_1 N}{p'_1} - 2\beta_1 - \frac{\rho}{p_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{2 + \beta_2 N}{p'_2} - 2\beta_2 - \frac{\rho}{p_2}.$$

Notons que :

$$\frac{k_1}{p_2} + k_2 \iff N \leq \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_2 - 1) + 2\beta_1 p_1 + \rho(p_1 + 1)}{\beta_1(p_1 - 1) + \beta_2 p_1(p_2 - 1)}$$

et

$$\frac{k_1}{p_2} + k_2 \iff N \leq \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_1 - 1) + 2\beta_2 p_2 + \rho(p_2 + 1)}{\beta_2(p_2 - 1) + \beta_1 p_2(p_1 - 1)}.$$

Tandis que  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = 1$  et  $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = 1$ , Nous obtenons l'exposant critique :

$$N \leq \max \left\{ \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_2 - 1) + 2\beta_1 p_1 + \rho(p_1 + 1)}{\beta_1(p_1 - 1) + \beta_2 p_1(p_2 - 1)}, \frac{2 + 2p_1 p_2 (\beta_1 - 1) + 2\beta_2 p_2 + \rho(p_2 + 1)}{\beta_2(p_2 - 1) + \beta_1 p_2(p_1 - 1)} \right\}$$

pour  $N \geq 1$ .

En faisant tendre  $R$  vers  $+\infty$  dans  $\Omega_i = \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N : 0 \leq t^{2\beta_i} + |x|^4 \leq 2R^{4\beta_i}\}$  avec la convergence de certaines intégrales, nous amène à

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} h |u|^{p_2} |1-u|^{q_2} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} |u|^{p_2} = 0,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} h |v|^{p_1} |1-v|^{q_1} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N} |v|^{p_1} = 0,$$

ce qui conduit à  $u = 0$  ou  $u = 1$  et  $v = 0$  ou  $v = 1$ . Donc notre problème n'admet pas de solutions globales non triviales. Ceci termine la preuve. ■

**Remarque 5.2.6** Si  $\rho = 0$ , et  $q_1 = q_2 = 0$  nous récupérons le système étudié par Saoudi et Haouam [30], par conséquent nous obtenons le même résultat trouvé par eux, i.e.

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{1 + p_1 p_2 (\beta_2 - 1) + \beta_1 p_1}{\beta_1(p_1 - 1) + \beta_2 p_1(p_2 - 1)}, \frac{1 + p_1 p_2 (\beta_1 - 1) + \beta_2 p_2}{\beta_2(p_2 - 1) + \beta_1 p_2(p_1 - 1)} \right\} \quad \text{pour } N \geq 1.$$

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons vu quelques méthodes de résolutions des équations différentielles et intégrales fractionnaires basées sur les transformations de Laplace et les changements de variables. Puis nous avons appliqué quelques théorèmes du point fixe pour établir l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires, où on a transformé un problème de Cauchy fractionnaire en un problème du point fixe.

Enfin, nous avons étudié des conditions suffisantes de non-existence des solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires où nous avons prouvé l'existence des exposants critiques de type Fujita, en utilisant les techniques des fonctions tests.

Nous espérons étudier au futur quelques problèmes pour des dérivées fractionnaires à deux ordres, où la motivation de c'est le fait que l'on peut trouver dans la nature des systèmes avec deux couches différentes et parallèles avec des propriétés différentes, comme par exemple le mouvement de l'eau dans l'aquifère avec des couches parallèles et des propriétés différentes.

# Annexe A

## Quelques théorèmes du point fixe

### A.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe unique pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

**Définition A.1.1** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$ . On dit que  $T$  est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive  $k$  telle que l'on ait :

$$\forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

• Si  $k < 1$ ,  $T$  est appelée contraction.

**Théorème A.1.1** Soit  $T$  une application continue sur un espace de Banach  $X$ . alors les assertions suivantes sont vraies :

1) S'il existe  $x, y \in X$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = y,$$

alors,  $y$  est un point fixe de  $T$ , i.e.  $T(y) = y$ .

2) Si  $T(X)$  est un ensemble compact dans  $X$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $x_\epsilon \in X$  tel que

$$\|T(x_\epsilon) - x_\epsilon\| < \epsilon,$$

alors  $T$  admet un point fixe.

**Preuve :**

1) Soit  $y_n = T^n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Si  $T$  est une application continue, alors

$$T(y) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = y,$$

ce qui prouve la première assertion.

2) Supposons que les hypothèses de 2) sont remplies. Alors pour  $n = 1, 2, \dots$  on a  $x_n \in X$  tel que :

$$\|T(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}. \tag{A.1}$$

$T(X)$  est un ensemble compact implique qu'il existe une sous suite convergente  $(T(x_{n_k}))_{n=1}^{+\infty}$  de  $(T(x_n))_{n=1}^{+\infty}$  de limite  $x$ . Alors en exploitant (A.1) et le fait que  $T$  est continue, on déduit que  $x$  est un point fixe de  $T$ .





**Théorème A.1.2 (Théorème du point fixe de Banach)[26]**

Soient  $X$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow X$  une application contractante. Alors  $T$  admet un point fixe unique, autrement dit :

$$\exists !x \in X : Tx = x.$$

**Preuve :**

Existence

Considérons la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}), & n \geq 1 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

On démontre que  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $X$ .

Pour  $m < n$ , on a :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \dots + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque  $T$  est une contraction, alors :

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|Tx_p - Tx_{p-1}\| \leq k\|x_p - x_{p-1}\|, \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1})\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k}\|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que la suite  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $X$  qui est complet, donc  $(x_n)_n$  converge vers  $x$  dans  $X$ .

Puisque  $T$  est continue, alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}\right) = Tx.$$

Donc,  $x$  est un point fixe de  $T$ .

Unicité

Supposons que  $Tx = x$  et  $Ty = y$ . Alors :

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|,$$

puisque  $k < 1$ , on déduit que  $\|x - y\| = 0$  c'est-à-dire  $x = y$ , d'où l'unicité du point fixe de  $T$ .



Le théorème du point fixe de Banach se généralise de la manière suivante :

**Théorème A.1.3** Soit  $T$  une application sur un espace de Banach  $X$  telle que  $T^N$  soit une contraction sur  $X$  pour un entier positif  $N$ . Alors  $T$  admet un point fixe unique.

**Preuve :**

Le théorème du point fixe de Banach implique qu'il existe un point fixe pour  $T^N$ . Appelons  $x_0$  ce point fixe. Maintenant, il suffit de noter que :

$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^N(T(x_0)) - T^N(x_0)\| \leq k\|T(x_0) - x_0\|$$

ceci implique que  $T(x_0) = x_0$  car  $0 < k < 1$ .

L'unicité est claire puisque un point fixe de  $T$  est également un point fixe pour  $T^N$ . ■

## A.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Soient  $N \geq 1$ ,  $R > 0$  et  $f \in C(B_R, B_R)$  avec  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$ . (on muni  $\mathbb{R}^N$  d'une norme notée  $\|\cdot\|$ ) Alors  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire il existe  $x \in B_R$  tel que :  $f(x) = x$ .

### Définition A.2.1

On dit qu'un espace topologique  $X$  a la propriété du point fixe si toute application continue  $T : X \rightarrow X$  possède un point fixe.

### Théorème A.2.1 (Théorème du point fixe de Brouwer)[13]

Soit  $B_n$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^N$ . La boule  $B_n$  a la propriété du point fixe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## A.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour la démonstration de l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

**Théorème A.3.1 (Théorème du point fixe de Schauder)[13]** Soient  $K$  un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach  $X$  et  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Alors  $T$  admet un point fixe.

**Preuve :**

Soit  $T : K \rightarrow K$  une application continue. Comme  $K$  est compact, alors  $T$  est uniformément continue. Donc pour  $\varepsilon$  fixé, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in K$ , on a :

$$\|x - y\| \leq \delta \implies \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon,$$

de plus, il existe un ensemble fini de points  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset K$  tel que les boules ouvertes de rayon  $\delta$  centrées aux points  $x_i$  recouvrent  $K$ ; c'est-à-dire,  $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$ .

Si on pose  $L := \text{vect}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ , alors  $L$  est de dimension finie, et  $K^* := K \cap L$  est compact

convexe de dimension finie.

Pour  $1 \leq j \leq p$ , on définit la fonction continue  $\psi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{si non} \end{cases}$$

Il est clair que  $\psi_j$  est strictement positive sur  $B(x_j, \delta)$  et nulle en dehors. On a donc, pour tout  $x \in K$ ,  $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$ , et par la suite on peut définir sur  $K$  les fonctions continues positives  $\varphi_j$  par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)},$$

pour lesquelles on a  $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ , pour tout  $x \in K$ .

Posons maintenant, pour  $x \in K$ ,

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x)T(x_j).$$

La fonction  $g$  est continue (somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans  $K^*$  (car  $g$  est un barycentre des  $T(x_j)$ ).

Si on prend la restriction  $g/K^* : K^* \rightarrow K^*$ , (d'après le théorème de Brouwer)  $g$  possède un point fixe  $y \in K^*$ .

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \left( T(y) - T(x_j) \right). \end{aligned}$$

Or si  $\varphi_j(y) \neq 0$  alors  $\|y - x_j\| < \delta$ , et par suite  $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$ . Donc, on a pour tout  $j$

$$\begin{aligned} \|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) \|T(y) - T(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier  $m$ , on peut trouver un point  $y_m \in K$  tel que  $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$ . Et puisque  $K$  est compact, alors de la suite  $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  on peut extraire une sous suite  $(y_{m_k})$  qui converge vers un point  $y^* \in K$ . Alors  $T$  étant continue, la suite  $(T(y_{m_k}))$  converge vers  $T(y^*)$ , et on conclut que  $T(y^*) = y^*$ , c'est-à-dire  $y^*$  est un point fixe de  $T$  sur  $K$ .

Pour les applications, la généralisation suivante s'avère utile. ■

**Théorème A.3.2 (Théorème du point fixe de Schauder généralisé)[13]** soit  $F$  un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach  $X$  et soit  $T : F \rightarrow F$  une application continue telle que  $T(F)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $F$ . Alors  $T$  admet un point fixe.

**Théorème A.3.3** Supposons que  $T$  est une application continue entre deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . Si  $K$  est un ensemble compact dans  $X$  alors,  $T(K)$  est un ensemble compact dans  $Y$ .

**Preuve :**

Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application continue et soit  $K$  un ensemble compact dans  $X$ . supposons une suite arbitraire  $(y_n) \subset T(K)$ . Alors il existe une suite  $(x_n) \subset K$  telle que  $T(x_n) = y_n$  pour tout  $n$ . Puisque  $K$  est compact, alors il existe une sous-suite  $(x_{n_k})$  convergente de  $(x_n)$  dans  $K$ , i.e. il existe un élément  $x \in K$  tel que  $x_{n_k} \rightarrow x$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . De plus, puisque  $T$  est continue, nous avons

$$x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow y_{n_k} = T(x_{n_k}) \rightarrow T(x) \in T(K).$$

Ceci termine la preuve. ■

Soit  $T : X \rightarrow Y$  une application entre deux espaces de Banach. Les différentes notions de continuité utilisées dans ce chapitre sont :  $T$  est dite

- **Continue** : si pour tout  $x \in X$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(x, \epsilon)$  tel que quelque soit  $y \in X$  :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

- **Uniformement continue sur  $A : (A \in X)$** , si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tel que quels que soient  $x, y \in A$  nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon.$$

Si  $T_\lambda : X \rightarrow Y$ , ( $\lambda \in \Lambda$ ), un ensemble d'applications entre deux espaces de Banach.  $T_\lambda$  est dite

- **Equicontinue sur  $A : (A \in X)$** , si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tel que quels que soient  $x, y \in A$  et quelque soit  $\lambda \in \Lambda$  nous avons :

$$\|y - x\|_X < \delta \Rightarrow \|T_\lambda(y) - T_\lambda(x)\|_Y < \epsilon.$$

**Théorème A.3.4 (Théorème d'Ascoli-Arzelà)[58]** Soit  $A \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ , ( $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ).  $A$  est relativement compact (i.e,  $\bar{A}$  est compact) si et seulement si :

1.  $A$  est uniformément borné.
2.  $A$  est équicontinu.

- On rappelle qu'une fonction  $f$  est uniformément bornée dans  $A$  s'il existe un constante  $M > 0$  telle que :

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M, \quad \forall f \in A$$

## A.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

On a vu précédemment deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et le théorème de l'application contractante de Banach. Krasnoselskii a combiné ces deux théorème.

**Théorème A.4.1 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii )**[58] Soit  $F$  un ensemble non vide, fermé, et convexe d'un espace de Banach  $X$ .  $T_1$  et  $T_2$  sont deux applications de  $F$  dans  $X$  telles que :

1.  $T_1(x) + T_2(y) \in F, \forall x, y \in F$ ,
2.  $T_1$  est une contraction,
3.  $T_2$  est compacte et continue.

Alors,  $T_1 + T_2$  admet un point fixe dans  $F$ , autrement dit, il existe  $x \in F$  tel que  $T_1(x) + T_2(x) = x$ .

**Preuve :**

Supposons que les applications  $T_1$  et  $T_2$  satisfont les hypothèses du théorème. En particulier, il existe  $k \in (0, 1)$  tel que :

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad x, y \in F.$$

Ceci donne :

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)y)\| \geq \|x - y\| - \|T_1(x) - T_1(y)\| \geq (1 - k)\|x - y\|,$$

et

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)y)\| \leq \|x - y\| + \|T_1(x) - T_1(y)\| \leq (1 + k)\|x - y\|.$$

Par conséquent,  $I - T_1 : F \rightarrow (I - T_1)(F)$  est un homéomorphisme et  $(I - T_1)^{-1}$  existe, puisque  $(I - T_1)(F)$  est continue. De plus on remarque que pour tout  $y \in F$ , l'équation

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

a une solution unique  $x \in F$  selon le théorème du point fixe de Banach. De cette dernière équation nous concluons que  $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$  pour tout  $y \in F$  et que  $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \rightarrow F$  est bien définie comme étant une application continue. Puisque  $T_2$  est une application compacte, il s'ensuit que  $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \rightarrow F$  est aussi une application compacte. Finalement, le théorème du point fixe de Schauder généralisé nous garantit la conclusion du théorème. ■

Pour plus de détails, nous recommandons toute personne intéressée par les théorèmes du point fixe de parcourir le livre [11] par Smart où des résultats supplémentaires et beaucoup plus de références peuvent être trouvées.

# Annexe B

## Fiches B



FIGURE B.1 – Georg Friedrich Bernhard Riemann

Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au collège. Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques ; il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique.

En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Göttingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des gaz, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles

de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann.



FIGURE B.2 – Joseph Liouville

Né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Joseph Liouville est diplômé de l'école polytechnique en 1827. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur.

Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté sous la direction de Simeon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il était répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838. Il obtient une chaire en mathématique au Collège de France en 1850 et une chaire en mécanique à la Faculté des sciences de Paris en 1857. Il est élu membre de l'Académie des sciences le 3 juin 1839 (il en sera président pendant l'année 1870).

À côté de ses réussites académiques, il était un remarquable organisateur. Liouville fonda en 1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées appelé parfois journal de Liouville, qui garde sa haute réputation de nos jours (il est édité depuis 1997 par l'éditeur anglo-néerlandais Elsevier Science). Il a beaucoup publié dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudonyme Besge.

Il fut le premier à lire les travaux inédits d'Évariste Galois, en reconnut l'importance et les publia dans son journal en 1846. Le mathématicien Olry Terquem fut l'un des célèbres auteurs de son journal. Liouville s'impliqua aussi en politique et fut membre de l'assemblée constituante en 1848. Cependant, après sa défaite aux élections à la députation en 1849, il quitta la politique.

D'un point de vue familial, on sait que Liouville a eu deux filles, Céline et Marie



# Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] A.A. Stanislavsky, Hamiltonian formalism of fractional systems, Eur. Phys. J. B, 49(2006), 93-101.
- [3] A. Kolmogorov, S. Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. 2<sup>e</sup> édition, Editions Mir-Moscou. 1973.
- [4] A. M. El-Sayed and E.O. Bin-Tahar , "Positive Nondecreasing solutions for a Multi-Term Fractional-Order Functional Differential Equation With Integral Conditions", Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2011(2011), No. 166, pp. 1-8.
- [5] A.A. Samarski, V.A. Galaktinov, S.P. Kurdyumov, Blowups in problems for Quasilinear Parabolic Equations, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 19, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [6] B. Rebiai, S. Rouar and K. Haouam, Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 12(2)(2016), pp 1613-1627.
- [7] B. Rebiai, and K. Haouam, Nonexistence of Global Solutions to a Nonlinear Fractional Reaction-Diffusion System. IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol. 45, no.4, pp259-262, 2015.
- [8] B. Tellab, K. Haouam, Existence and uniqueness of solution for nonlinear hyperbolic fractional differential equation with integral boundary conditions. International Journal of Applied Mathematical Research. vol. 5(1)(2016), pp 18-23.
- [9] B. Tellab, K. Haouam, Nonexistence of global solutions for a fractional problem with a nonlinearity of the Fisher type. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 12(2)(2016), pp 1613-1627.
- [10] B. Tellab, K. Haouam, Exponential growth for a fractional differential equations. Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 27(2017), No. 3. pp. 307-314.
- [11] D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press 1973.
- [12] E. Artin, The Gamma Function, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)
- [13] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorems, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, Tokyo 1985.
- [14] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, Chem. Phys. 103(1995), 7180-7186.

- [15] G. M. Zaslavsky, A. A. Stanislavsk and M. Edelman, (2006) Chaotic and Pseudochaotic Attractors of Perturbed Fractional Oscillator, *Chaos*, 013102.
- [16] G. Chen, G. Friedman, An RLC interconnect model based on Fourier analysis, *IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst.* 24 (2) (2005) 170-183.
- [17] G.G. Laptev, Nonexistence results for higher-order evolution partial differential inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131(2003)415-423.
- [18] G. Rudolf, V. A. Galakinov, Blowups in problems for quasilinear parabolic equations. *Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. 19, de Gruyter Berlin, 1995.
- [19] H.A. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $pu_t = -Au + F(u)$ , *Arch. Rational Mech. Anal.* 51(1973)371-386.
- [20] H. E. Roman, M. Giona, Fractional diffusion equation on fractals. *J. Phys*, A25 (1992), 2107-2117.
- [21] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ , *J. Fac. Sci. Univ Tokyo Sect.* 113(1966)109-124.
- [22] H. Kuiper, Life span of nonnegative solutions to certain quasilinear parabolic Cauchy problems, *Electron. J. Differential Equation* 66(2003)1-11.
- [23] I. Podlubny, Fractional differential equations. *Mathematics in science and engineering*, vol. 198. New York/London : Springer ;1999.
- [24] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 5(2002), 367-386, .
- [25] J. Sabatier, M. Merveillaut, R. Malti, and A. Oustaloup, How to impose physically coherent initial conditions to a fractional systems ? *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 10(2010), 1318-1326.
- [26] K. Deng, H. A. Levine, The role of critical exponents in Blow-up theorems : the sequel, *J Math. Anal. Appl.* 243(2000), 85-126.
- [27] K. Haouam, M. Sfaxi, Necessary conditions for local and global existence to a reaction-diffusion system with fractional derivatives. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* Vol. 2006 (2006), 1-8.
- [28] K.B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order.* Academic Press ? Inc (1974)..
- [29] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Proc Japan Acad* 49(1973), 503-505.
- [30] K. Saoudi, K. Haouam, Critical exponent for nonlinear hyperbolic system with spatio-temporal fractional derivatives. *International Journal of Applied Mathematics* vol 24, N° 6 2011 pp 861-871.
- [31] K. Kobayashi, T. Sirao , H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear reaction-diffusion systems, *J. Math. Anal. Appl.* 268(2002), 217-243.
- [32] L.E. Payne, *Improperly posed problems in Partial Differential Equations*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 22, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1975.
- [33] L. Gaul, P. Klein and Kempfle, Damping description involving fractional operators, *Mech. Systems Signal Processing* 5 (1991), 81-88.

- [34] M. Benchohra and F. Ouair, Existence Results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Bullten Of Mathematical analysis and Applications, Vol. 2 issue4, pp. 7-15, (2010).
- [35] M. Caputo, Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13 :529-539, 1967.
- [36] M. Caputo and F. Minardi, A new dissipation model based on memory mechanism, Pure and Applied Geophysics, 91 :134-137, 1971.
- [37] M. Escobedo, M.A. Herrero, Boundedness and Blow-up for a semilinear reaction-diffusion equation, J. Differential Equations 89(1991) 176-202.
- [38] M. Godefroy, La fonction Gamma ; Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, Paris, (1901).
- [39] M. Guedda, M. Kirane, A note on nonexistence of global solutions to a nonlinear integral equation, Bull. Belg. Math. Soc. Simon. Stevin. 6(1999), 491-497.
- [40] M. Guedda, M. Kirane, Criticality for some evolution equations. Differential Equations 37(2001), 540-550.
- [41] M. Kirane, Y. Laskri, N-e. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives. J Math Anal Appl 2005 ;312(2) :488-501.
- [42] M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, J. Math. Anal. Appl. 268(2002)217-243.
- [43] M. Kirane, N-e. Tatar, Exponential growth for fractionally damped wave equation. Z Anal Anwend (J Anal Appl) 2003 ;22(1) : 167-78.
- [44] M. Nagasawa, T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Trans. Amer. Math. Soc. 139(1969)301-310.
- [45] M. Sredynska, A. Hanyga, Nonlinear Hamiltonian equations with fractional damping, J. Math. Phys. 41(2000)2135-2156.
- [46] N. Enghtea, On tractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, IEEE Trans. Antennas Propag. 44 (4) (1996) 554-566.
- [47] N-e. Tatar, Nonexistence results for a fractional problem arising in the thermal diffusion in fractal media. Chaos, Solitons and Fractals 36(2008)1205-1214.
- [48] N. Laskin, Fractional market dynamics, Physica A 287 (2000) 482-492.
- [49] O. Heaviside, Electromagnetic Theory, Chelsea, New York, 1971.
- [50] Q. S. Zhang, A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping. The critical case. C R Acad Sci Paris Serie I 2001 ;333 :109-14.
- [51] R.A. Fisher, The advance of advantageous genes, Ann of Eugencs, Vol. 7(1937), 355-369.
- [52] R. Gorenflo, Abel integral equations with special emphasis on applications, Lectures in Mathematical Sciences, Vol. 13, University of Tokyo, 1996.
- [53] R. Gorenflo and S. Vessella, Abel integral Equations : Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [54] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

- [55] R. Hiller (Ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific pub Co, Singapore, 2000.
- [56] R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.
- [57] R. Ikehata, K. Tanizawa, Global existence of solution for semilinear damped wave equation in  $\mathbb{R}^N$  with noncompactly supported initial data. *Nonlinear Anal. TMA* ;61 (2005), 1189-208.
- [58] R.P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, Existence of fractional neutral functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (3) (2010), 1095-1100.
- [59] R.L. Bagley, P.J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J Rheol.* 27(1983) :201-210
- [60] R.L. Bagley, R.A. Calico, Fractional order state equations for the control of visco-elastically damped structures, *J. Guidance Control Dyn.* 14 (1991) 304-311.
- [61] S. Sugitani, On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations, *Osaka J. Math.* 12(1975) 45-51.
- [62] R. W. Ibrahim, Existence and uniqueness of holomorphic solutions for fractal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* 380, pp. 232-240, (2011).
- [63] S.B. Hadid, Local and global existence theorems on differential equations of non-integer order. *J. Fractional Calculus*, Vol. 7, pp. 101-105, May (1995).
- [64] S. Fuquin, W. Mingxin, Existence and nonexistence of global solution for a nonlinear hyperbolic system with damping, *Nonlinear Analysis* 66(2007), 2889-2910.
- [65] S.G Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications.* Amsterdam : Gordon and Breach ; 1993[Engl. Trans. from the Russian edition 1987].
- [66] Sotiris K. Ntouyas, Existence Results For First Order Boundary Value Problems For Fractional Differential equations and Inclusions With Fractional Integral Boundary Conditions, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 3 July 2012, No. 9, pp 1-14.
- [67] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, *Electron. J. Differential Equations* 2006, No. 36, pp. 1-12.
- [68] W. G. Glokle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, *Biophys. J.* 68 (1995), 46-53.
- [69] Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system, *Acta Mech.* (1997).

## حل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة وجود وعدم وجود حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية ذات مشتقات كسرية. لدراسة الوجود و الوجودانية تم تطبيق نظرية النقطة الثابتة و لدراسة عدم وجود الحلول استعملنا الصيغ الضعيفة و تقنية دوال الاختبار. مهمتنا في هذه الأطروحة هي تفصيل بعض المقالات التي تعالج هذا الموضوع من أجل جعلها أكثر وضوحاً للقراء. لهذا قمنا بتنظيم هذا العمل على النحو التالي:

**الفصل الاول:** نقدم في هذا الفصل بعض الأدوات الأساسية في دوال لابلاس و فورييه و تعريف بعض الدوال الخاصة المستعملة في هذه الأطروحة مثل الدالة غاما مع بعض الأمثلة و الخصائص المهمة.

**الفصل الثاني:** يخصص لتعريف المشتقات و التكاملات ذات الرتب الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل ، غرينفيلد ليتنيكوف و كابيتو وكذا العلاقة بينها مع بعض الأمثلة و الخصائص المكتملة و تحويل لابلاس لهذه المشتقات.

**الفصل الثالث:** في هذا الفصل قمنا بحل بعض المعادلات التفاضلية و التكاملية ذات مشتقات كسرية من أجل الفهم الجيد و المعالجة الصحيحة للحساب على المؤثرات ذات المشتقات الكسرية.

**الفصل الرابع:** الهدف منه دراسة وجود ووجودانية حلول بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية ذات الرتب الكسرية مع شروط حدية تكاملية باستعمال تقنيات النقطة الثابتة.

**الفصل الخامس:** هذا الفصل يخصص لدراسة عدم الوجود الشامل لحلول المعادلات و الجمل التفاضلية الزائدية غير الخطية ذات الرتب الكسرية بالتركيز على طريقة دوال الاختبار للبحث عن الأسس الحرجة من نوع فيجيتا.

# Solving fractional differential equations

## Abstract

In this work we have studied the existence and non-existence of solutions of nonlinear fractional differential equations. For the study of the existence and uniqueness the fixed point theory has been applied and for non-existence the weak formulations and the test function technique have been used.

Our task in this thesis is to detail the demonstrations of certain articles that treat the subject in order to make them clearer for the readers. For this, we organized this work as follows:

**Chapter 1:** In this chapter, we present some basic tools on Laplace and Fourier transforms and some definitions of special functions useful throughout our thesis such as: Euler gamma function, beta function, function of Mittag-Leffler with examples and some interesting properties.

**Chapter 2:** Chapter 2 is devoted to the definitions of derivatives and fractional integrals in the sense of Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov and Caputo and the links between these derivatives with some examples and some complementary properties as well as their Laplace transforms.

**Chapter 3:** This chapter is dedicated to the explicit resolution of some fractional differential and integral equations, for a good understanding and a good manipulation of the fractional operational calculus.

**Chapter 4 :** The purpose of this chapter is to study the existence and uniqueness of solutions of some nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, using fixed-point techniques.

**Chapter 5:** This chapter is devoted to the study of the global non-existence of solutions of nonlinear hyperbolic fractional equations and fractional differential systems based on the test function method in search of Fujuta-type critical exponents.

# Résolution des équations différentielles fractionnaires

## Résumé

Dans ce travail on a étudié l'existence et la non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires non- linéaires . Pour l'étude de l'existence et l'unicité on a appliqué la théorie du point fixe et pour la non-existence on a utilisé les formulations faibles et la technique des fonctions test.

Notre tache dans cette thèse est de détailler les démonstrations de certains articles qui traitent le sujet afin de les rendre plus claires pour les lecteurs. Pour cela, nous avons organisé ce travail de la façon suivante :

**Chapitre 1** : Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils de base sur les transformées de Laplace et de Fourier et quelques définitions des fonctions spéciales utiles tout au long de notre thèse telles que : la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta, la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes.

**Chapitre 2** : Le chapitre 2 est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires ainsi que leurs transformées de Laplace.

**Chapitre 3** : Ce chapitre est dédié à la résolution explicite de quelques équations différentielles et intégrales fractionnaires, pour une bonne compréhension et une bonne manipulation du calcul opérationnel fractionnaire.

**Chapitre 4** : Le chapitre 4 à pour but, l'étude de l'existence et l'unicité de solutions de quelques équations différentielles fractionnaires non linéaires avec des conditions intégrales aux limites, en utilisant les techniques du point fixe.

**Chapitre 5** : Ce chapitre est consacré à l'étude de la non-existence globale de solutions des équations et des systèmes différentiels fractionnaires hyperboliques non linéaires basé sur la méthode des fonctions tests à la recherche des exposants critiques de type Fujuta.